EPISTEME NS, VOL. 32, 2012, pp. 121-131

Juan A. Nuño

UN PROCEDIMIENTO PARA CONSTRUIR FÓRMULAS PROPOSICIONALES TAUTOLÓGICAS DADAS LAS VARIABLES DE FUNCIONES VERITATIVAS*

I

En el cálculo proposicional el rango de las funciones veritativas diádicas contiene catorce esquemas de variables correspondiente a las formulas proposicionales sintéticas (o functores de verdad sintéticos) que muestran la alternancia de valores (1,0).

Si la función veritativa (0000) se le considera como la negación de (1111), podemos entonces reducir las catorce variables de funciones veritativas mencionadas a las siete siguientes:

(1110)	*1	(1010)	*5
(1101)	*2	(1001)	*6
(1100)	*3	(1000)	*7
(1011)	*4		

Esto quiere decir que cada una de las funciones veritativas *1 a *7 determina, a través de su negación, una y sólo una función veritativa específica.

Es harto conocido en el cálculo proposicional que los functores de verdad correspondientes a las funciones veritativas del tipo (1111) determinan el conjunto de tautologías. Observemos que de acuerdo con la definición usual para functores de verdad (también llamados conectivas, i.e.: conjunción, disyunción, etc.), no hay una operación específica que corresponda a la función veritativa constante. Esto significa que cada fórmula tautológica debe ser construida para usos múltiples de las conectivas lógicas. Además, se hace evidente que puede haber dos vías para construir fórmulas tautológicas: (a) por combinación de functores de verdad correspondientes a diferentes funciones

[1] Ponencia presentada en el Séptimo Congreso Interamericano de Filosofía. Junio 18 al 23 de 1967.

veritativas (por ejemplo: p → (p □ q) y (b) por la combinación de functores de verdad correspondientes a la misma función veritativa (por ejemplo: (p □ q) ↔ (q □ p). El subconjunto de fórmulas tautológicas construidas por el procedimiento (b) determina a su vez la relación de equivalencia; sabemos que una condición necesaria y suficiente para establecer la equivalencia de dos o más functores de verdad es que la función veritativa correspondiente debe ser siempre la misma, i.e. TF_1 (1110), TF_2 (1110). Es por lo tanto obvio que el functor de equivalencia debe, en este caso, ser escogido para determinar exclusivamente las fórmulas tautológicas del tipo $TF_1 \leftrightarrow TF_{2.}$

II

Tratemos ahora de encontrar un procedimiento que nos permita, sin el uso directo del método de la tabla de verdad, obtener la secuencia abierta de tautologías (conjuntos tautológicos) correspondiente a cada variable de función veritativa ordenada anteriormente de la *1 a la *7.

Se notará que las funciones veritativas *1, *2, *4 y *7 comparten el mismo rango de valores (3 a 1); sucede lo mismo con las funciones veritativas *3, *5 y *6 que muestran la misma razón (2 a 2). Podemos consecuentemente clasificarlas como sigue:

Grupo A (rata- 3-1) =

*1 (1110)
*2 (1101)
*4 (1011)
*7 (1000)

Grupo B (rata- 2-2) =

*3 (1100)
*5 (1010)
*6 (1001)

Procedamos ahora a trabajar separadamente cada grupo.

III

Tomemos una de las funciones veritativas del Grupo A, digamos *1 (1110). Por definición, sabemos que corresponde al functor de verdad de la disyunción (p □ q). Por la relación de equivalencia, también sabemos que cualquier tautología que posea el operador de equivalencia se formará de acuerdo con el esquema general, indicado anteriormente, i.e. $TF_1 \leftrightarrow TF_2$. En este caso particular, podemos escribir una fórmula con el functor de la disyunción, sustituyendo el término a la izquierda del esquema general: (p □ q) $\leftrightarrow TF_2$.

Ahora bien, el término a la derecha de nuestra nueva expresión es precisamente la primera incógnita que debemos resolver. De esta forma tenemos: (p v q) $\leftrightarrow$ X. donde (X) representa cualquier fórmula proposicional que contenga un functor de verdad relacionado con el mismo conjunto de variables proposicionales empleadas en el lado izquierdo de nuestra fórmula. Ciertamente, si la función veritativa (X) es la misma que la de (p v q), i.e. (1110), entonces la fórmula de equivalencia que relaciona a ambos términos será, a su vez, válida o tautológica; de lo contrario, será una fórmula no-válida. Nuestro problema se limita, entonces, a encontrar cualquier fórmula que sustituida por (X) determine una tautología en (p v q) $\leftrightarrow$ X.

Asumamos que (X) representa una fórmula proposicional que involucra el functor implicación, tal como ($x \rightarrow y$). Se puede fácilmente observar que al introducir las funciones veritativas correspondientes a cada término, el problema puede ser re-expresado de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} TF_1\ (p \vee q)\ \ (1110) \\ \underline{TF_2\ (x \rightarrow y)\ (1110)} \\ TF_1 \leftrightarrow TF_2\ (1111) \end{array}$$

Con el objeto de buscar soluciones para las incógnitas desconocidas en TF_2, se puede trazar un esquema similar, señalando el esquema vacío de los correspondientes valores de verdad de las variables indeterminadas:

$$\begin{array}{r} x\quad (----) \\ \underline{y\quad (----)} \\ x \rightarrow y\ (1110) \end{array}$$

Supongamos que x sea sustituida por p. Podemos, a partir de ello, reexpresar el esquema precedente de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} p\quad (1100) \\ \underline{y\quad (-----)} \\ p \rightarrow y\ (1110) \end{array}$$

Obviamente, ningún valor de verdad y puede satisfacer la función veritativa ($p \rightarrow y$) puesto que el valor último de p es 0. Con el objeto de evitar la dificultad, reemplazamos los valores positivos de p por valores negativos (-p). Obtenemos de esta forma:

$$\begin{array}{r} -p\ (0011) \\ \underline{y\ (-----)} \\ -p \rightarrow y\ (1110) \end{array}$$

Se puede fácilmente ver que colocando los valores de verdad de q en el lugar de y, obtenemos inmediatamente la solución requerida:

$$-p \rightarrow q\ (1110)$$

Haciendo la sustitución en la fórmula general ($TF_1 \leftrightarrow TF_2$) derivamos la siguiente tautología:

$$(p \vee q) \leftrightarrow (-p \rightarrow q)$$

Utilizando un procedimiento similar con cada uno de los otros functores, llegamos a establecer, finalmente, nuestro primer conjunto tautológico de formulas proposicionales correspondiente a la función veritativa *1 (1110). Tal conjunto se presenta de la siguiente manera:

$$(p \vee q) \leftrightarrow (-p \rightarrow q) \leftrightarrow -(-p \,.\, -q) \leftrightarrow (-p \mid -q) \leftrightarrow (q \vee p) \leftrightarrow (-q \rightarrow p) \leftrightarrow -(-q \,.\, -p) \leftrightarrow (-q \mid -p)\ S_1$$

De acuerdo con la definición de equivalencia, tanto cada par de miembros de S_1 como todo el conjunto son fórmulas tautológicas.

Una vez que se haya establecido el primer conjunto de tautologías, se pueden inferir, siguiendo un patrón operativo similar para cada caso, las correspondiente a las funciones veritativas *2, *4 y *7. Podríamos, sin embargo, usar un método más directo. Basados en la propiedad común de que, en tanto elementos del Grupo A, las funciones veritativas *2, *4 y *7 comparten con la función veritativa *1, la presencia de la rata 3-1, es factible deducir sus correspondientes fórmulas tautológicas de S_1. Será suficiente para ello hacer todas las sustituciones ordenadas para p, q, -p, -q por sus conversas, observando, cuando sea necesario, la regla de la doble negación. De esta forma, tenemos:

$$(p \vee -q) \leftrightarrow (-p \rightarrow -q) \leftrightarrow -(-p \,.\, q) \leftrightarrow (-p \mid q) \leftrightarrow (-q \vee p) \leftrightarrow (q \rightarrow p) \leftrightarrow -(-q \,.\, -p) \leftrightarrow (q \mid -p)\ S_2$$

$$(-p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \leftrightarrow -(p \,.\, -q) \leftrightarrow (p \mid -q) \leftrightarrow (q \vee -p) \leftrightarrow (-q \rightarrow -p) \leftrightarrow -(-q \,.\, p) \leftrightarrow (-q \mid p)\ S_3$$

$$-(-p \vee -q) \leftrightarrow -(p \rightarrow -q) \leftrightarrow (p \,.\, q) \leftrightarrow -(p \mid q) \leftrightarrow -(-q \vee -p) \leftrightarrow -(q \rightarrow -p) \leftrightarrow (q \,.\, p) \leftrightarrow -(q \mid p)\ S_4$$

Los conjuntos de fórmulas tautológicas S_2, S_3 y S_4 muestran fórmulas proposicionales correspondientes respectivamente a las funciones veritativas *2 (1101), *4 (1011) y *7 (1000).

IV

Estamos ahora en posición de describir un método para determinar las tautologías referidas al Grupo B de las variables de funciones veritativas; este grupo está representado por las funciones veritativas *3 (1100), *5 (1010) y *6 (1001).

En principio, se puede apreciar que la función veritativa *3 corresponde a los valores p positivos, hablando en términos del método de la tabla de verdad. En lo que atañe a la función veritativa *5, ésta representa, a su vez, los valores q positivos; por último, la función veritativa *6 ejemplifica los valores de equivalencia ($p \leftrightarrow q$). Todo esto significa que ellos no son esquemas mutuamente relacionados, como puede mostrarse fácilmente. En efecto, si los valores de p son negados en *3, obtenemos, como su función veritativa conversa, los valores (0011) que no corresponden a ninguna de las otras funciones veritativas pertenecientes al Grupo B. Resultados similares se obtienen con las funciones veritativas *5 y *6. Debemos entonces resolver independientemente cada función veritativa sin posibilidad de derivar dos de ellas del primer conjunto tautológico que podamos obtener.

V

Tratamiento de la función veritativa *3 (1100).

Como dijimos anteriormente, estos son los valores positivos de p que nos permiten registrar el primer término de la fórmula tautológica buscada: $p \leftrightarrow X$. Como (X) representa alguna forma proposicional correspondiente a una función veritativa (1100), podemos ver que, por definición, no hay ninguna fórmula proposicional del tipo x R y (donde R representa cualquier functor de verdad, y *x, y* representan cualquier par de variables proposicionales) que pueda presentar sus valores ordenados como lo exige la función veritativa *3. Los valores de (X) deberían, por lo tanto, ser previstos por alguna fórmula proposicional del tipo complejo (x R y) R (x R y), donde x, y representan cualquier par de variables proposicionales y R podría ser reemplazado por cualquier functor de verdad.

Por lo tanto, se puede ver que hay tres formas de interpretar R según sus variaciones, a saber: (i) R, R’, R”; (ii) R, R’, R’; (iii) R, R, R. Por ejemplo, podemos usar como functores de verdad: (i) v, $\leftrightarrow$, $\rightarrow$; (ii) $|$, $\rightarrow$, $\rightarrow$; (iii) $\rightarrow$, $\rightarrow$, $\rightarrow$.

Apliquemos ahora las interpretaciones específicas del problema a cada caso.

(i) R, R’, R” (= tres functores de verdad diferentes)

Por definición, tenemos:

$$\begin{array}{ll} TF_1\ (x \text{ v } y) & (----) \\ \underline{TF_2\ (x \rightarrow y)} & \underline{(----)} \\ \quad TF_1 \leftrightarrow TF_2 & (1100) \end{array}$$

Por hipótesis:

$$\begin{array}{ll} p \text{ v } q & (1110) \\ \underline{x \rightarrow y} & \underline{(----)} \\ (p \text{ v } q) \leftrightarrow (x \rightarrow y) & (1100) \end{array}$$

En este caso, la función veritativa correspondiente a $(x \rightarrow y)$ será (1101), la cual es precisamente la función veritativa cuyas fórmulas tautológicas se obtuvieron en el conjunto S_2 anteriormente. Se puede ver fácilmente que $(-p \rightarrow -q)$ sustituye las incógnitas en $(x \rightarrow y)$. De esta forma tenemos el segundo elemento del conjunto tautológico (aunque no una tautología misma):

$$(p \text{ v } q) \leftrightarrow (-p \rightarrow -q) \qquad (\alpha)$$

Estamos ahora en posición de o bien continuar con el mismo esquema adoptado para los functores de verdad (i.e. R, R’, R”), o bien para introducir un nuevo esquema (por ejemplo, R, R’, R’: solamente con dos functores de verdad diferentes) para resolver el conjunto tautológico. Escogeremos la segunda alternativa, puesto que la primera es conspicuamente fácil de desarrollar. Bastará, de hecho, con variar en p y/o q valores para obtener una nueva fórmula en correspondencia con la misma función veritativa. Por ejemplo:

$$(-p \text{ v } q) \leftrightarrow -(p \rightarrow -q) \qquad (\beta)$$

(Se podrá observar que sólo la equivalencia que se establecerá entre las fórmulas (α) y (β) determinará una tautología).

Obtendremos, por lo tanto, los otros elementos del conjunto a partir de los esquemas formales (ii) y (iii), ofreciendo, de esta manera, una ejemplificación más completa de las posibilidades de tal procedimiento.

(ii) R, R', R' (= dos functores de verdad diferentes)

En este caso, habrá sólo dos operadores distintos, digamos: |, →, →.

Por definición, podemos escribir:

$$\begin{array}{ll} TF_1\ (x \mid y) & (----) \\ \underline{TF_2\ (x \rightarrow y)} & \underline{(----)} \\ TF_1 \rightarrow TF_2 & (1100) \end{array}$$

Y, por hipótesis:

$$\begin{array}{rl} p \mid q & (0111) \\ \underline{x \rightarrow y} & \underline{(----)} \\ (p \mid q) \rightarrow (x \rightarrow y) & (1100) \end{array}$$

De nuevo aquí tenemos una formulación vacía (x → y) cuya función veritativa, debidamente interpretada, debe ser (0100). De acuerdo con $S_{3,}$ sabemos que ésta corresponde a la negación de la implicación, i.e.

$$-(p \rightarrow q).$$

Así podemos finalmente hacer la siguiente reformulación:

$$(p \mid q) \rightarrow -(p \rightarrow q)$$

como un nuevo elemento en el conjunto tautológico correspondiente a la función veritativa (1100).

Estamos en posición de desplegar el conjunto de tautologías hasta ahora derivadas:

$$[(p \vee q) \leftrightarrow (-p \rightarrow -q)] \leftrightarrow [(-p \vee q) \leftrightarrow -(p \rightarrow -q)] \leftrightarrow [(p \mid q) \rightarrow -(p \rightarrow q)]$$

Para agregar otro término a este conjunto, procedemos a averiguar la fórmula proposicional correspondiente al tercer posible esquema de R.

(iii) R, R, R (=tres functores iguales)

Por definición, tenemos:

$$\begin{array}{ll} TF_1\ (x \rightarrow y) & (----) \\ \underline{TF_2\ (x \rightarrow y)} & \underline{(----)} \\ \quad TF_1 \rightarrow TF_2 & (1100) \end{array}$$

De aquí, por hipótesis en TF_1:

$$\begin{array}{ll} p \rightarrow q & (1011) \\ \underline{x \rightarrow y} & \underline{(-----)} \\ (p \rightarrow q) \rightarrow (x \rightarrow y) & (1100) \end{array}$$

La fórmula indeterminada $(x \rightarrow y)$ tendrá, en este caso, una función veritativa del tipo (1000), que en relación con el functor "implicación" corresponde a la expresión:

$$-(p \rightarrow -q)$$

Entonces, finalmente tenemos:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow -(p \rightarrow -q)$$

Habiendo, de esta forma, seguido el desarrollo del conjunto tautológico construido sobre la función veritativa del tipo (1100), estamos en posición de escribir:

$$p \leftrightarrow [(p \vee q) \leftrightarrow (-p \rightarrow -q)] \leftrightarrow [(-p \vee q) \leftrightarrow -(p \rightarrow -q)] \leftrightarrow [(p \mid q) \rightarrow - (p \rightarrow q)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow -(p \rightarrow -q)]\ S_5$$

VI

Tratamiento de la función veritativa *5 (1010)

Como es conocido, aquí tenemos los valores positivos de q. Siguiendo con la forma en que hemos elaborado hasta ahora, podemos encontrar el siguiente conjunto tautológico:

$$q \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee q)] \leftrightarrow [(-p \rightarrow q) \leftrightarrow (-p \vee q)] \leftrightarrow [(p \,.\, q) \vee (-p \,.\, q)] \leftrightarrow [(p \mid q) \mid (-p \mid q)]\ S_6$$

VII

Tratamiento de la función veritativa *6 (1001)

En este caso, debemos prestar atención al hecho de que la función veritativa (1001) corresponde al functor de equivalencia $(p \leftrightarrow q)$ sobre la que se ha construido la relación de equivalencia. Podemos investigar, entonces, un doble procedimiento:

(1) Comparar las diferentes fórmulas proposicionales derivadas de (p ↔ q) variando en ella los valores de p, q y el propio functor, respectivamente.
(2) Encontrar las fórmulas proposicionales complejas del tipo (x R y) R (x R y) que mostrarán una función veritativa idéntica a la de la equivalencia, i.e. (1001).

Se puede verificar fácilmente que a través del procedimiento (1) obtendremos el siguiente conjunto de tautologías:

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p) \leftrightarrow (-p \leftrightarrow -q) \leftrightarrow -(-p \leftrightarrow q) \leftrightarrow -(p \leftrightarrow -q)$$

Con el objeto de ampliar el conjunto anterior, consideraremos el procedimiento (2). Se verá, a partir de la discusión empleada anteriormente en el desarrollo de las funciones veritativas *3 y *5, que somos, en este caso, capaces de aplicar un proceso totalmente similar, escogiendo ordenadamente tres, dos y un functor de verdad que, debidamente conectados a sus variables proposicionales, se convertirán en fórmulas tautológicas.

Supongamos que deseáramos obtener una fórmula proposicional según el esquema R, R', R''. Podemos, entonces, considerar la expresión (x v y) → (x . y). Por hipótesis, podemos escribir en una primera aproximación: (p v q) → (x . y). Esto a su vez nos conduce a la única posible función veritativa válida para (x . y), i.e. (1000) que corresponde a la fórmula proposicional "conjunción" (p . q). De este modo, tenemos:

(p v q) → (p . q) como un nuevo término para conjunto tautológico de equivalencias precedente.

Tomando ahora el esquema de dos functores diferentes (R, R', R'), digamos, una fórmula tal como (x → y) . (x → y), obtenemos finalmente la siguiente solución:

$$(p \rightarrow q) \;.\; (q \rightarrow p)$$

que podemos agregar al conjunto anterior.

Por último, un esquema vacío de sólo un functor, por ejemplo, (x | y) | (x | y), debidamente interpretado, nos dará la siguiente forma proposicional:

(p | q) | (-p | -q). Puesto que todas las fórmulas precedentes poseen la misma función veritativa, podemos, en definitiva, establecer nuestro último conjunto tautológico de la siguiente manera:

$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p) \leftrightarrow (-p \leftrightarrow -q) \leftrightarrow -(-p \leftrightarrow q) \leftrightarrow -(p \leftrightarrow -q) \leftrightarrow [(p \lor q) \rightarrow (p \,.\, q)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \,.\, (q \rightarrow p)] \leftrightarrow [(p \mid q) \mid (-p \mid -q)]$ S_7

VIII

Hemos establecido, de esta forma, como lo pretendíamos, siete conjuntos tautológicos correspondientes a siete variables de funciones veritativas diferentes, previamente seleccionadas de las dieciséis variaciones de valor comprensivas del cálculo proposicional diádico.

Si consideramos, ahora, los conjuntos S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 y S_7 que hemos obtenido, se puede observar que ellos nos proveen otra forma de inferir un nuevo conjunto de tautologías. Basta para ello, de hecho, pensarlos como miembros de un super-conjunto o conjunto de conjuntos.

En efecto, podemos establecer sus esquemas tautológicos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
S_1 &= P_1\ (1110) \leftrightarrow Q_1\ (1110) \leftrightarrow R_1\ (1110)\\
S_2 &= P_2\ (1101) \leftrightarrow Q_2\ (1101) \leftrightarrow R_2\ (1101)\\
S_3 &= P_3\ (1011) \leftrightarrow Q_3\ (1011) \leftrightarrow R_3\ (1011)\\
S_4 &= P_4\ (1000) \leftrightarrow Q_4\ (1000) \leftrightarrow R_4\ (1000)\\
S_5 &= P_5\ (1100) \leftrightarrow Q_5\ (1100) \leftrightarrow R_5\ (1100)\\
S_6 &= P_6\ (1010) \leftrightarrow Q_6\ (1010) \leftrightarrow R_6\ (1010)\\
S_7 &= P_7\ (1001) \leftrightarrow Q_7\ (1001) \leftrightarrow R_7\ (1001)
\end{aligned}$$

Estas tautologías pueden ser reformuladas mostrando, en esta oportunidad, sus referencias a la función veritativa tautológica única (1111):

$$\left.\begin{array}{l} P_1 \leftrightarrow Q_1\ (1111) \\[1em] Q_1 \leftrightarrow R_1\ (1111) \end{array}\right] P_1 \leftrightarrow Q_1 \leftrightarrow R_1$$

$$\left.\begin{array}{l} P2 \leftrightarrow Q2\ (1111) \\[1em] Q2 \leftrightarrow R2\ (1111) \end{array}\right] P_2 \leftrightarrow Q_2 \leftrightarrow R_2$$

....

$$\left.\begin{array}{l} P_7 \leftrightarrow Q_7\ (1111) \\ \\ Q_7 \leftrightarrow R_7\ (1111) \end{array}\right] P_7 \leftrightarrow Q_7 \leftrightarrow R_7$$

Una vez que hemos realizado esta operación, encontramos que es perfectamente válido formular un nuevo conjunto de tautologías:

$$\underset{T_1}{(P_1 \leftrightarrow Q_1)} \leftrightarrow \underset{T_2}{(P_2 \leftrightarrow Q_2)} \leftrightarrow \underset{T_3}{(P_3 \leftrightarrow Q_3)} \leftrightarrow\text{-----------}\leftrightarrow \underset{T_7}{(P_7 \leftrightarrow Q_7)}$$

Como se puede apreciar, $T_1 \leftrightarrow T_2 \leftrightarrow T_3 \leftrightarrow\text{------}\leftrightarrow T_7$ no es sino la expresión general del conjunto de los conjuntos tautológicos derivados anteriormente de la variable diádica de funciones veritativas.

Traducción de Benjamín Sánchez Mujica
Instituto de Filosofía UCV
besamu02@yahoo.co.uk