RESEÑAS

Manzano, M., *Teoría de Modelos*,
Madrid, Editorial Alianza, 1989, 289 pp.

En 1989 la Editorial Alianza lanza al mercado el primer texto de Teoría de Modelos escrito en español y en el cual su autora hace gala no sólo de un conocimiento académico riguroso (de formación anglosajona: Berkeley y Leeds) sino también de una gracia pedagógica difícil de imitar. El texto consta de siete capítulos y un apéndice.

En el *capítulo I* se introducen los sistemas y las relaciones entre ellos (propias del álgebra universal) que no utilizan el lenguaje formal de la lógica: subsistemas, reducción, homomorfismo, inmersión e isomorfismo. El capítulo es generoso en ejemplos y ejercicios: grupos, anillos, cuerpos, órdenes, sistemas de Peano, álgebras de Boole y retículos. Además se identifican los sistemas que poseen algunas de estas estructuras.

En el *capítulo II* se introduce la semántica de primer orden: consecuencia, validez, independencia y la definición de modelo de un conjunto de fórmulas. Se demuestran los teoremas de coincidencia, sustitución e isomorfía y se dan los lenguajes adecuados a la identidad, los grupos, los órdenes, la aritmética, y la teoría de conjuntos (axiomas de Zermelo–Fraenkel y la jerarquía de conjuntos). El capítulo termina con la noción de definibilidad en un sistema y resultados tales como: los números naturales no son definibles en el sistema $\langle R, < \rangle$.

El *capítulo III* consta de tres partes. En la primera parte se presenta el cálculo deductivo en la versión secuencial de Ebbinghaus, Flum y Thomas, los teoremas de coincidencia máxima, ejemplificación, corrección y el test de consistencia.

En la segunda parte se demuestran de manera prolija los lemas de Lindembaum y Henkin, los teoremas de Henkin, el de completud de Gödel, de compacidad y el de Löwenheim–Skolem.

Se construye en detalle el conjunto cociente de los términos del lenguaje bajo una relación de equivalencia: *para cada* τ_1, τ_2 *que pertenecen a los términos de L*, $\tau_1 \sim \tau_2$ *syss* $(\tau_1 = \tau_1)$ *pertenece a un conjunto de fórmulas de L máximamente consistente y ejemplificado*". Gracias a dicha relación se obtiene de manera sencilla el teorema de Henkin, –todo conjunto de fórmulas de un lenguaje L tiene un modelo numerable–, y con él se demuestran los teoremas de completud de Gödel, de compacidad y de Löwenheim–Skolem.

El capítulo cierra con la demostración del teorema de completud para cualquier cardinalidad.

La conclusión más importante (a partir de los teoremas de corrección y completud) es: en primer orden el conjunto de los teoremas lógicos (fórmulas deducidas sin premisas en el cálculo) y el de las lógicamente válidas (consecuencias del conjunto vacío de fórmulas) coinciden, siendo el lenguaje de cualquier cardinalidad infinita.

En el *capítulo IV* se define: elemental, subsistema elemental e inmersión elemental, teoría en un lenguaje, teoría de una clase de sistemas, y se llega a resultados intuitivos tales como: si K_1 y K_2 son dos clases de sistemas tales que:

$$K_1 \subseteq K_2, \text{ entonces TEORIA } (K_2) \subseteq \text{TEORIA } (K_1).$$

El resultado más importante del capítulo consiste en mostrar una de las limitaciones más importantes del lenguaje de primer orden, su incapacidad de distinguir las diferencias evidentes entre subsistemas elementales. Para ello se toma como ejemplo el siguiente teorema: el sistema de los racionales con la relación de orden es un subsistema elemental del sistema de los reales con su relación de orden, teorema que además sugiere de manera sencilla las condiciones del teorema de Tarski–Vaught acerca de subsistema elementales.

El capítulo termina con los diagramas abiertos y completos de un sistema, siendo estos conjuntos de sentencias en el lenguaje ampliado (del sistema ampliado) los que nos permiten construir modelos a partir de una teoría basada en el diagrama.

El *capítulo* V consta de cinco partes. En la primera parte se define propiedad axiomatizable, propiedad finitamente axiomatizable, clase de sistemas axiomatizables; marcando la diferencia entre el metalenguaje y el lenguaje adecuado a dichos sistemas. En la segunda parte se usa el método de los diagramas (las condiciones necesarias y suficientes para que el diagrama completo de algún sistema sea igual a la teoría del sistema expandido) para demostrar la parte no trivial del teorema de compacidad, prueba independiente de la completud. Además se dan las condiciones en el lenguaje para la unicidad de operaciones. En la tercera parte se muestran la consecuencias más importantes del teorema de compacidad y nuevas limitaciones del lenguaje de primer orden, a saber:

a. La finitud no es axiomatizable en primer orden (ni siquiera no–finitamente).

b. La infinitud es axiomatizable no–finitamente.

c. La clase de los cuerpos de característica es axiomatizable, pero no finitamente.

d. Sea $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, 0, S, +, . \rangle$ el sistema de los naturales, hay un sistema que es modelo de la teoría de $\mathcal{N}$ pero no isomorfo a $\mathcal{N}$. Este resultado muestra la existencia de modelos no–estándar de $\mathcal{N}$.

e. Un grafo es k–coloreable syss cada subsistema suyo es k–coloreable.

f. Las inmersiones elementales son amalgamables.

g. Si una teoría admite eliminación de cuantificadores, entonces la clase de todos los subsistemas de los modelos de la teoría es amalgamable.

En la cuarta parte se introduce la construcción de ultraproductos para volver a demostrar el teorema de compacidad combinando los modelos de los conjuntos finitos para construir el del infinito, utilizando la noción booleana de ultraproducto (filtro maximal) para construir como modelo un ultraproducto de los modelos iniciales. El capítulo termina con un apéndice de filtros y ultrafiltros.

El *capítulo VI* consta de tres partes. En la primera se resuelven los siguientes problemas: dado un sistema $\mathcal{A}$ de cardinalidad α,

1. ¿para qué cardinalidades β encontramos sistemas $\mathcal{B}$ tales que $\mathcal{B}$ es subsistema elemental de $\mathcal{A}$?

2. ¿ para qué cardinalidades β encontramos sistemas $\mathcal{B}$ tales que $\mathcal{A}$ sea subsistema elemental de $\mathcal{B}$?

Los teoremas Downward y Upward Löwenheim–Skolen (que son de Tarski y Vaught, 1956) resuelven la cuestión.

A partir del teorema Downward Löwenheim –Skolem se obtienen como corolarios los siguientes resultados:

i. El teorema de Skolem (1920);

ii. El teorema de Löwenheim (1915);

iii. La teoría de los números reales tiene un modelo numerable;

iv. La teoría de conjuntos de Zermelo–Fraenkel tiene un modelo numerable.

Como corolario del teorema Upward Löwenheim–Skolem se tiene el teorema que motiva la segunda parte del capítulo: la aritmética de Peano tiene modelos no–estándar.

En la segunda parte del capítulo se construyen en detalle los modelos no–estándar de los naturales y sus propiedades más relevantes.

A partir del resultado que afirma en un modelo no estándar de la Aritmética de Peano el conjunto formado por los números estándar no es definible (mediante una fórmula de primer orden); se define que la Aritmética de Peano de primer orden no es categórica, siendo la Aritmética de Peano de segundo orden categórica cuando tomamos como sistemas adecuados para interpretar el lenguaje de segundo orden, solamente a los sistemas no estándar. Es decir, la Aritmética de Peano no es categórica cuando aceptamos modelos en cuyos universos relacionales no estén todas las relaciones posibles o, en versión de la teoría de modelos, cuando aceptemos una semántica no–estándar.

Para el lector con inquietudes matemáticas la página 231 contiene un teorema de representación de los números reales finitos–no–estándar como suma de una parte estándar y otra infinitesimal. Resultado que nos permitirá entender la razón por la cual matemáticos y físicos hicieron y siguen haciendo muy bien sus cuentas sin saber siquiera de la existencia de los números no–estándar, (y creo que a la inmensa mayoría tampoco le importe mucho). Además de que todo el teorema demostrable en el sistema no–estándar de los reales es demostrable en el sistema estándar de los reales y viceversa (a pesar de la propaganda de Gödel a favor del análisis no–estándar).

El capítulo termina con una magistral exposición de la pseudo–paradoja de Skolem que nos dice –si Zermelo–Fraenkel fuera consistente (1), entonces tendría modelos numerables en los cuales la sentencia γ que expresa "existen conjuntos supernumerables" sería verdadera–. Si Zermelo–Fraenkel tuviera algún modelo numerable (por los teoremas de Löwenheim–Skolem) $\mathcal{A} = < A, \in^{\mathcal{A}} >$ que es modelo de γ. Pero la relación binaria $\in^{\mathcal{A}}$ no es necesariamente la relación binaria del universo matemático. (2)

(1) El segundo teorema de incompletud de Göbel nos dice que la consistencia de Zermelo–Fraenkel es indemostrable (en primer orden ser consistente es equivalente a tener un modelo).

(2) Universo matemático es el par $\mathcal{U} = < \mathcal{V}, \in >$ formado por $\mathcal{V}$ la jerarquía estándar de conjuntos (que no es un conjunto) siendo $\in$ la relación binaria de pertenencia. $\mathcal{U}$ no es un sistema por no ser $\mathcal{V}$ un conjunto.

Por lo tanto la supuesta paradoja no conduce a contradicción ya que el universo matemático y los modelos de Zermelo–Fraenkel no tienen que coincidir, es decir, un concepto matemático y su significado en un modelo de Zermelo–Fraenkel no son necesariamente lo mismo.

Es decir que en el universo matemático $\underline{a} = \{\underline{x} \mid \underline{x} \in \underline{a}\}$ y su significado en $\mathcal{A}$ $\{\underline{x} \in A \mid \underline{x} \in \underline{a}\}$ no tiene que coincidir necesariamente.

De modo análogo el significado de "para un $\underline{b} \in A$ se cumple $\mathcal{A}\,[\underline{b}]$ sat Func y" que en $\mathcal{A}$ el elemento $\underline{b}$ de A está en el subconjunto A que interpreta el relator Func, no tiene por qué coincidir con lo que en $\mathcal{U}$ es una función. Luego $\mathcal{A}$ es modelo de γ es una abreviatura de "existe un $\underline{a} \in A$ tal que:

A [a] sat¬ $ y (Funcy Ÿ Inyecty Ÿ Domy = x Ÿ Recy ⊆ ∞)" (3)

Lo anterior afirma que en $\mathcal{A}$ no hay ningún $\underline{b}$ que no sea función inyectiva de $\underline{a}$ en $\omega^{\mathcal{A}}$; $\underline{a}$ es supernumerable en $\mathcal{A}$. Pero como A es numerable, también lo son $\{\underline{x} \in A \mid \underline{x} \in \underline{a}\}$ y $\{\underline{x} \in A \mid \underline{x} \in^{\mathcal{A}} \underline{a}\}$. Y por ser numerable $\mathcal{U}$ existe una función inyectiva de $\underline{a}$ en un subconjunto de los naturales, pero esta función no está en A, o no cumple con las condiciones que permiten establecer la supernumerabilidad de $\underline{a}$ en A.

En el capítulo VII se trata de la completud, la eliminación de cuantificadores, la modelo–completud, y la completud y decidibilidad del sistema < ℕ, 0, S> donde ℕ es el conjunto de los naturales, 0 el cero y S la función sucesor. Siendo el problema principal a resolver el siguiente: para cualquier sistema la teoría asociada a él es trivialmente completa, pero si definimos la teoría por un conjunto finito y recursivo de axiomas entonces no es trivial afirmar si la teoría es o no completa.

Si se exige la condición de isomorfía entre los modelos de una teoría (categoricidad) nos encontramos que el número de dichas teorías es reducidísimo; por lo tanto la equivalencia elemental es

---

(3) a.– $\mathcal{A}\,[a]$ sat $\Phi = \mathcal{A}\mathcal{J}_x^a$ sat Φ donde $\mathcal{J}_x^a$ es la función de asignación variante.

b.– ω = el conjunto de los números naturales.

mucho más interesante además de ser lógicamente equivalente a la completud, de donde se concluye que todos los modelos de una teoría completa poseen las mismas propiedades expresables en primer orden.

Otra aplicación interesante de la completud nos la da el siguiente teorema: toda teoría axiomatizable y completa es decidible.

Se define la k–categoricidad mostrando que:

a. Todas las teorías categóricas son completas;

b. Las teorías completas con un modelo finito son categóricas;

c. El test de completud de Vaught (1954): Sea Γ una teoría de cardinalidad k que no tiene modelos finitos. Si Γ es λ–categórica para un $\lambda \geq k$ (λ siendo finito), entonces Γ es completa.

Se analiza la primera parte del capítulo con el conocido teorema de Cantor (1895) en versión de teoría de modelos: dos sistemas numerables con estructura de orden denso y sin extremos, son isomorfos.

En la segunda parte del capítulo se atacan los siguientes problemas:

i. ¿Cómo caracterizar las relaciones definibles en un sistema?;

ii. Encontrar condiciones para que una teoría sea decidible.

Problemas que se resuelven parcialmente mediante la eliminación de cuantificadores.

Se da un catálogo de seis teorías que admiten eliminación de cuantificadores, un test de eliminación de cuantificadores, y se demuestra que la teoría de $\mathcal{N}_S$ = <N, 0, S> y la de los órdenes densos sin extremos admiten eliminación de cuantificadores.

La tercera parte trata de modelo–completud [4] definición que nos permite relacionarla con la eliminación de cuantificadores y la completud mediante los siguientes teoremas:

---

(4) Una teoría es *modelo–completa* si para cada dos sistemas que son modelos de la teoría tales que el primero sea subsistema del segundo, entonces, el primero es subsistema elemental del segundo.

i. Si una teoría admite eliminación de cuantificadores entonces es modelo–completa.

ii. Test del modelo principal (Robinson, 1956): Si una teoría es modelo–completa con un modelo principal [5], entonces es completa.

Test que nos permite demostrar de manera muy cómoda que:

a. La teoría de los órdenes densos sin extremos es completa.

b. La teoría de los naturales con la operación del siguiente es completa.

En la cuarta parte del capítulo la profesora Manzano resuelve pedagógicamente un problema clásico que se presta a confusión por estar mal planteado, el de la decidibilidad de los naturales, siendo lugar común la respuesta: el teorema de Gödel nos dice que no. Pero la respuesta está relativizada al tipo de sistema que defina a los naturales. Por ello se diferencia entre $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}_s$ siendo $\mathcal{N} = \langle N, 0, S, +, .\rangle$, que satisface al conjunto de los axiomas de la Aritmética de Peano $\mathcal{AP}$ (el estándar) de primer orden:

$\mathcal{AP}$ *1)* $\forall x\ (c \neq f\ x)$

$\mathcal{AP}$ *2)* $\forall x\ y\ (f\ x = f\ y \rightarrow x = y)$

$\mathcal{AP}$ *3)* $\forall x\ \ (x + c = x)$

$\mathcal{AP}$ *4)* $\forall x\ y\ (x + fx = f\ (x + y))$

$\mathcal{AP}$ *5)* $\forall x\ (x\ .\ c = c)$

$\mathcal{AP}$ *6)* $\forall x\ y\ (x\ .\ fy = (x\ .\ y) + x)$

junto con la serie infinita de las ocurrencias del axioma de inducción de primer orden $\mathcal{PI}$.

(5) **Un modelo $\mathcal{A}$ de una teoría es *modelo principal* de la teoría syss cada modelo de la teoría tiene un subsistema isomorfo a $\mathcal{A}$.**

$\mathcal{PJ}$ $\Phi(c) \wedge \forall x\, (\Phi(x) \rightarrow \Phi(fx)) \rightarrow \forall x\, \Phi(x)$ (6)

Siendo la aritmética de Peano $\mathcal{AP}$, las consecuencias que se derivan de:

$\mathcal{AP}1 \wedge \mathcal{AP}2 \wedge \mathcal{AP}3 \wedge \mathcal{AP}4 \wedge \mathcal{AP}5 \wedge \mathcal{AP}6 \wedge \mathcal{PJ}$.

El teorema de incompletitud de Gödel nos dice que $\mathcal{AP}$ es diferente de la teoría $\mathcal{N}$; es decir que hay sentencias verdaderas que no son deducibles de $\mathcal{AP}$, además, $\mathcal{AP}$ es incompletable.

Pero la teoría del sistema $\mathcal{N}_s = \langle \mathbb{N}, 0, S \rangle$ es axiomatizable, admite eliminación de cuantificadores, es decidible, completa y no categórica, donde sus axiomas son:

α *1)* $\forall x\ (c \neq f\, x)$

α *2)* $\forall x\, y (f\, x = f\, y \rightarrow x = y)$

α *3)* $\forall y (y \neq c \rightarrow \exists x\ y = f\, x)$

α *41)* $\forall x\ (f\, x \neq x)$

α *42)* $\forall x\ (ff\, x \neq x)$

.

.

.

α *4n)* $\forall x\ (f \ldots f_{(n\ \text{veces})}\ x \neq x)$

en donde la serie infinita $\alpha 4.1$, $\alpha 4.2$,..., de los $\alpha 4.n$ nos dice que no hay ciclos de tamaño n.

Lo anterior nos muestra que al hablar de la incompletitud hay que hacerlo acerca de un sistema perfectamente definido.

El libro termina con un apéndice de ordinales y cardinales.

El texto no sólo es de valiosa utilidad para lógicos matemáticos

---

(6) $\mathcal{PJ}$ es el axioma de la inducción matemática en primer orden, es un axioma esquema, no una fórmula, sino una serie infinita de ellas, que se obtienen al sustituir Φ por fórmulas del lenguaje de $\mathcal{N}$. $\mathcal{PJ}$ es menos potente que su formulación metalingüística. El principio de inducción en toda su generalidad requiere de la lógica de segundo orden.

y físicos que se dediquen a problemas de fundamentación, sino también para filósofos de la lógica, de la matemática o de la ciencia, debido a que abarca un conjunto de tópicos de obligada factura a todas estas disciplinas.

Los requisitos mínimos para seguir el texto son: un dominio operacional del cálculo de predicados de primer orden, algunas nociones elementales de álgebra moderna, las nociones fundamentales de cardinalidad y cierta "madurez" por parte del estudiante (que se da como las papas, algunas buenas y otras peores).

El texto puede cubrirse en un semestre de cuatro horas semanales (sesiones de dos horas) siendo aconsejable (apreciación personal) complementarlo con un buen texto de teoría de conjuntos como el de Suppes o el de Takeuti–Zaring.

Está de más decir, que sería de mucha ayuda la existencia de un problemario que haga compañía al texto de la Dra. Manzano, en especial para aquellos estudiantes que no tienen la posibilidad de tener un instructor en la disciplina. Recordemos que en América Latina el área es casi, por no decir absolutamente, desconocida.

En resumen mis más sinceras felicitaciones a la Dra. Manzano no sólo por escribir un texto pedagógico de teoría de modelos, sino también por sacrificar gran parte de su tiempo en la preparación del texto, cuando bien podría haberlo utilizado en la escritura de "papers" cuyo destino por lo general son los hiperespecialistas. Por lo visto la tradición que iniciase el gran maestro español Dr. Julio Rey Pastor se mantiene.

La presentación del texto es impecable y de agradable presencia a pesar de algunos errores de imprenta, fáciles de corregir.

No vacilo en recomendar el texto, el cual me ha sido muy útil en el Post–Grado de Lógica y Filosofía de la Ciencia de la Universidad Central de Venezuela en la asignatura Metateoría de la Lógica. Espero que también tenga una amplia acogida en las Facultades de Ciencias en especial en la especialidad de matemáticas.

JORGE NIKOLIC D.
Instituto de Filosofía, U.C.V.