EPISTEME NS, Vol. 16, N$^{os}$ 1-3, 1996, pp. 129-132

CARLOS AUGUSTO DI PRISCO

# SOBRE ALGUNOS PROBLEMAS RELATIVOS AL CONCEPTO DE INFINITO EN MATEMÁTICAS.

Según algunos historiadores de las matemáticas, Bernhard Bolzano fue el primer matemático que estudió conjuntos como objetos matemáticos. Por los años 1840 Bolzano dio argumentos convincentes para demostrar la existencia de conjuntos infinitos y formuló el concepto de correspondencia uno a uno entre conjuntos. Aparentemente Bolzano no estaba al tanto de la posibilidad de que pudiesen existir conjuntos infinitos de distinto tamaño. Fue Georg Cantor quien, posteriormente, comprendió la importancia de la idea de correspondencia uno a uno y demostró la existencia de conjuntos infinitos de diferentes tamaño.

Diremos que dos conjuntos tienen la misma cardinalidad si se puede establecer una biyección, o correspondencia uno a uno, entre ellos. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales 1,2,3,... y el conjunto de los números pares 2,4,6,... son ambos infinitos, y aunque el segundo es un subconjunto propio del primero, estos conjuntos tienen la misma cardinalidad. Cantor demostró que el conjunto de los números reales (los correspondiente a los puntos de una recta) es de cardinalidad estrictamente mayor que la de los números naturales: el conjunto de los números naturales es un subconjunto del conjunto de los números reales, con el que no se puede poner en correspondencia uno a uno. Esto sugiere de inmediato la pregunta ¿existen subconjuntos del conjunto de los números reales de cardinalidad intermedia? O dicho de otra forma, Existe un conjunto de números reales cuya cardinalidad sea mayor que la del conjunto de los números naturales pero menor que la del conjunto completo de los números reales?

Este problema, conocido como el Problema del Continuo de Cantor, ha motivado una gran parte del desarrollo de la teoría de conjuntos. Se conoce con el nombre de Hipótesis del Continuo la afirmación de que tales conjuntos de números reales, de cardinalidad intermedia, no existen. Hoy en día sabemos que a partir de los axiomas usuales de la teoría de conjuntos no se puede demostrar la Hipótesis del Continuo ni tampoco se puede demostrar su negación. La Hipótesis es, pues, indecidible.

Para poder explicar esto, y otros de los principales aportes hechos al estudio del problema del continuo, es conveniente comenzar haciendo una breve introducción a la axiomática de la teoría de conjuntos.

El primer intento de axiomatización formal de la teoría fue realizado por Frege, a fines del siglo pasado. Frege se basó en el principio de que toda propiedad define un conjunto, pero como es bien conocido, esta idea produce problemas que se ponen de manifiesto al considerar, por ejemplo, el conjunto de los x que tienen la propiedad "x no es elemento de x". Posteriormente, Zermelo formuló una axiomatización que, con las modificaciones hechas por Fraenkel, se ha convertido en la más comúnmente adoptada por los matemáticos. Algunos de los axiomas de la teoría de Zermelo-Fraenkel establecen la existencia de conjuntos que se pueden construir a partir de otros conjuntos. Por ejemplo, el axioma de los pares establece que dados dos conjuntos a y b, existe un conjunto c cuyos únicos elementos son a y b, el axioma de la unión postula la existencia de la unión de un conjunto de conjuntos, al axioma del conjunto potencia postula la existencia del conjunto de subconjuntos de un conjunto dado. Tenemos también axiomas de carácter más técnico que tienen por objeto eliminar los problemas que presentaba la teoría de Frege, o simplificar otros aspectos de la teoría.

Un axioma que quiero mencionar explícitamente es el que postula la existencia de un conjunto infinito. Si eliminamos este postulado, la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel se debilita enormemente y queda reducida a una teoría aritmética. La existencia de conjuntos infinitos es parte importante de casi toda la matemática contemporánea, pero es necesario mencionar que ha sido objeto de las más duras controversias. Hilbert pensaba que en el universo no existen objetos infinitos, por lo que los conjuntos infinitos de las matemáticas debían ser considerados abstracciones interesantes en la medida que permitiesen descubrir nuevos aspectos sobre los objetos finitos.

Los teoremas de Incompletitud de Gödel indican que a partir de los demás axiomas de la teoría de conjuntos no se puede demostrar el axioma del infinito. Ni siquiera podemos demostrar su consistencia con los demás axiomas, suponiendo que éstos sean consistentes. Por esto algunos especialistas consideran que la existencia de conjuntos infinitos debe ser tomada como un acto de fe, o adoptada como una posición filosófica. Un hecho que vale la pena hacer notar es que con el axioma del infinito se pueden demostrar hechos finitistas, de la aritmética por ejemplo, que no son demostrables sin ese axioma. (Un ejemplo interesante lo proporciona el resultado de Paris y Harrington: *A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic*, in *Handbook of Mathematical Logic*, J. Barwise, Ed. North Holland 1977).

En 1938 Kurt Gödel dio a conocer su resultado sobre la consistencia de la Hipótesis del Continuo. Gödel probó que no se puede demostrar la existencia de un conjunto de tamaño intermedio entre el de los números naturales y el de los números reales. Este es un resultado sorprendente ya que se trata de una prueba matemática de la imposibilidad de demostrar un enunciado matemático. No era, sin embargo, la primera vez que se lograba un resultado de este tipo. El quinto postulado de Euclides sobre rectas paralelas ya había conducido a demostraciones de esta clase. La demostración dada por Gödel no sólo dio información sobre la Hipótesis del Continuo, sino que también probó la consistencia del axioma de la elección, otro postulado matemático que ha generado las más variadas controversias.

La contribución de Gödel no se quedó allí, su método de demostración ha sido usado posteriormente en muchos trabajos, incluso muy recientes, sobre diversos aspectos de los fundamentos de la matemática. La mejor manera de describir esta demostración de Gödel es diciendo que indicó la forma de construir un universo matemático con el mínimo posible de conjuntos. En ese universo no tiene cabida ningún conjunto de tamaño intermedio entre el de los números naturales y el de los números reales. Las propiedades matemáticas de los conjuntos de ese universo de Gödel, llamado el universo constructible, están dictadas por la estructura interna de ese universo; ésta es tan clara que ha permitido observar en esos conjuntos propiedades sobre conceptos tan variados como los de la teoría de la medida, del álgebra homológica y de la topología.

En un interesante artículo de 1947 titulado Qué es el problema del continuo de Cantor? (Kurt Gödel: Obras Completas. Alianza Editorial 1981) Gödel señala que posiblemente con postulados de infinitud aún más fuertes se pueda dilucidar el problema del continuo. A esto nos referiremos de nuevo más adelante. En ese mismo artículo, Gödel señala la posibilidad de que la Hipótesis del Continuo sea indemostrable a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos. Cosa que no fue corroborada sino en 1963 por Paul Cohen. La lectura del artículo de Gödel recién mencionado es todavía fuente de inspiración para muchos especialistas en la materia.

El resultado de Cohen es otra de las grandes contribuciones del siglo a la teoría de conjuntos. Para obtenerlo, Cohen inventó un método, llamado "*forcing*", para generar toda una diversidad de universos matemáticos con propiedades muy variadas. Del método de *forcing* se puede decir que es la herramienta matemática que ha dado más frutos en el campo de los fundamentos de las matemáticas. Es un método especialmente diseñado para probar resultados de independencia, y consiste en formar un universo matemático agregando ciertos conjuntos a un universo original. Por ejemplo, si queremos un universo donde la Hipótesis del Continuo sea falsa, comenzamos la construcción a partir de un universo cualquiera, y añadimos "nuevos" conjuntos. Si logramos añadir, de la forma adecuada, una gran cantidad de estos nuevos conjuntos manteniendo las propiedades que tiene la estructura original, en el universo que resulta de la construcción habrá tantos números reales que podremos hallar conjuntos de tamaño intermedio. Esto significa que en el universo construido, la Hipótesis del Continuo es falsa.

Todavía es razonable pensar, como lo creía Gödel, que será posible formular un axioma de infinitud fuerte que permita resolver el problema del Continuo. Las hipótesis de infinito fuerte han permitido obtener resultados que sin duda deben ser calificados de espectaculares. Muy recientemente se ha podido demostrar que la existencia de cierto tipo de conjuntos infinitos, implica que no existen contraejemplos a la Hipótesis del Continuo sino, en todo caso, de una complejidad que sobrepasa lo que se puede describir con el tipo de fórmulas que comúnmente usan los matemáticos. De modo que, de alguna forma, la profunda intuición de Gödel ha sido ya reivindicada.

Los artículos de Penelope Maddy aparecidos recientemente contienen un recuento de las direcciones en las que se ha desarrollado la teoría de conjuntos y, en particular, contienen una detallada descripción de los axiomas de infinitud fuerte más interesantes que se han considerado. (Penelope Maddy: Believing the Axiomas I y II, Journal of Symbolic Logic 53 1988).

Para explicar el papel que juegan los axiomas de infinito fuerte, tomemos uno en particular, el que estipula la existencia de cardinales inaccesibles.

¿Qué es un cardinal inaccesible? Para no entrar en detalles técnicos, la cardinalidad de un conjunto A es inaccesible si A no se puede obtener a partir de conjuntos más pequeños mediante las operaciones de tomar el conjunto de partes de un conjunto.

La existencia de un cardinal inaccesible no es demostrable a partir de los axiomas de la teoría de conjuntos (incluyendo, por supuesto, entre ellos el axioma del infinito). Ni siquiera se puede demostrar la consistencia de la existencia de cardinales inaccesibles. Sin embargo, la existencia de este tipo de cardinales tiene consecuencias importantes en teorías matemáticas. Algunos resultados recientes ponen de manifiesto la profunda relación que existe entre los cardinales inaccesibles y la teoría de la medida de Lebesgue y otras propiedades de los conjuntos de números reales.

Uno de los hechos más interesantes de la teoría de cardinales grandes (nombre con el cual se conoce el estudio de los axiomas fuertes de infinitud) es que a pesar de que los diferentes tipos de infinito fuerte que se han considerado se deben a motivaciones muy dispares, ha sido posible desarrollar una teoría muy coherente que ordena de una manera simple estos axiomas de infinitud de acuerdo a su fuerza relativa.

CARLOS AUGUSTO DI PRISCO

Universidad Central de Venezuela