

Juan Negrete

INVENCIONES DE LA LOGICA POLACA. EL CALCULO PROPOSICIONAL EXTENDIDO ¹

Poco es lo que se ha divulgado en nuestro ambiente filosófico sobre la esplendorosa escuela polaca de lógica que se desarrolló en el período comprendido entre las dos guerras mundiales (1920-1939). Esta escuela, rica, densa y con muy importantes contribuciones al progreso de la lógica en el Occidente de Europa, estuvo en sus comienzos lingüísticamente confinada, porque la mayor parte de sus aportes se publicaron en polaco, y sólo unos pocos en alemán. Por otro lado, el fenómeno del nazismo, junto con la invasión de Polonia, diezmó buena parte del profesorado de filosofía y lógica de las Universidades de Cracow y Lwów, ensañándose también de manera muy particular con profesores de filosofía en todo el país. No sólo por ser polacos o por judíos polacos, sino también por filósofos, pues, en efecto, es realmente impresionante el número de filósofos asesinados en la Polonia ocupada y en los campos de concentración.

Pese a un aislamiento inicial, en Polonia se da un florecimiento de la tradición lógica entre 1920-1939, que coincide con el resurgimiento de Polonia como Estado independiente (1918), y no tiene, por su densidad y brillantez, parangón en la Europa de ese período. Jan Lukasiewicz (1878-1956) es el venerado mentor de ese florecimiento; sin

¹ El presente trabajo es una continuación de un pequeño esbozo, que bajo el título de "El Cálculo Proposicional Extendido" apareció en la revista *Nueva Expresión*, No. 4, Caracas, Mayo de 1974, pp. 21-22. En esa ocasión nos limitamos brevemente a la parte técnica del cálculo proposicional extendido, que se publicó además con un exceso de errores de imprenta. Es por eso que hemos retomado el tema para añadirle las explicaciones correspondientes al valor y méritos, a nuestro modo de ver, que presenta este descubrimiento de la lógica polaca. Existe, además, en nuestro medio tal escasez de fuentes sobre el tema (nos referimos a la bibliografía de lengua española), que ello nos ha estimulado a ofrecer en esta ocasión una exposición más amplia sobre ésta y otras aportaciones de la lógica polaca.

embargo, también entre los fundadores hay que contar a K. Twardowski, S. Lesniewski y T. Kotarbinski. Un grupo de destacadas figuras creció bajo esa generación como discentes: A. Tarski, K. Ajdukiewicz, M. Wajberg, I. M. Bochenski, J. Hosiasson, A. Lindenbaum, H. Greniewski, S. Jaskowski, J. Slupecki, C. Lejewski y B. Sobocinski. A partir de éstos, merecen citarse como segunda generación a A. Mostowski, W. Benadrowski, H. Hiz, A. Grzegorzczuk, R. Suszko, J. Los, H. Rasiowa, y K. Szaniawski. También una nueva escuela surgió alrededor de J. Slupecki y Maria Kokoszynska, que incluye a L. Borkowski, W. Pogorzelski y T. Kubinski.

Desde entonces Polonia no ha dejado de ser un país de primer rango en los estudios de esta disciplina, y ha seguido dando importantes contribuciones tanto en el campo estricto del cálculo lógico como en la metateoría, la filosofía de la matemática y la semántica. De esa variedad de invenciones hemos escogido para este trabajo un fragmento que lleva por título *Cálculo Proposicional Extendido* (C.P.E.) y que constituye, sin duda, una ampliación del Cálculo Proposicional ordinario o estándar (C.P.). Ofrecemos esta versión de C.P.E. por cuanto se le conoce poco, no aparece en los manuales comunes, tiene implicaciones metateóricas para la lógica básica y suele creerse, entre los estudiantes y aficionados, que C.P. es una pieza acabada sin posibilidades de perfeccionamiento.

La ampliación de C.P. se logra por la introducción de nuevos recursos en el lenguaje básico de la lógica, como el de las variables functoriales (o variables de conectivas) y el de constantes proposicionales con un valor definido. Esta innovación, que veremos en detalle, planteó la cuestión metalógica de saber cuál era el menor grupo de axiomas que generaba el sistema completo. Pero una vez obtenido éste a partir de un sólo axioma, se trataba de saber después cuál sería el axioma más corto posible capaz de engendrar (o parir) todo el sistema. En otras palabras, se trataba de buscar el principio supremo de la lógica, el más fundamental en tanto soportaba todo el edificio de las demostraciones, rol que los lógicos tradicionales le asignaron al trío conjunto de principios de identidad, no contradicción y tercero excluido. La fórmula mágica de Meredith es $C\delta\delta o\delta p$, la cual permite derivar C.P. completo, además de C.P.E.

Habría que recordar que desde 1917 Jean Nicod² logró una sorprendente economía teórica al reducir los cinco axiomas de *Principia Mathematica* (Russell-Whitehead) a un único axioma de veintitrés letras con la barra de Scheffer o functor de incompatibilidad ('|'). Por supuesto, primero redujo el sistema allí expuesto a un lenguaje con esa única conectiva y después procedió a una simplificación axiomática. El axioma único de Nicod es el siguiente:

$$\{p|(q|r) | \{[t|(t|t)]|[s|q]|((p|s)|(p|s))\}$$

En notación polaca³, que es la que utilizaremos aquí, y donde 'D' representa a '|', tiene efectivamente veintitrés letras.

$$DDpDqrDDtDttDDsqDDpsDps$$

Sin embargo, el manejo de un sistema así resultaba en extremo difícil. El uso de '|' producía fórmulas excesivamente largas y la regla de derivación (de α y de $\alpha|(B|\tau)$ se sigue τ) resultaba complicada. Pero tal reducción demostraba en todo caso la posibilidad de disponer de un solo principio, cuya potencia deductiva era suficiente como para obtener la demostración de todas las leyes de C.P. La idea del axioma único se había asentado en la lógica.

Veamos a continuación la ampliación del cálculo proposicional de la lógica polaca y el desarrollo de la simplificación axiomática como su

² "A Reduction in the Number of the Primitive Propositions of Logic". En *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 19 (1917); pp. 32-41.

³ Será conveniente indicar en qué consiste esta elegante notación polaca, que fuera simplificada por Lukasiewicz hasta un límite casi insuperable. Se caracteriza por lo siguiente: a) Las letras de conectivas (siempre mayúsculas) se colocan delante de las letras enunciativas (siempre las minúsculas p, q, r, s,...) a las cuales afectan; b) esta notación no necesita el uso del paréntesis. Así la expresión Cpq corresponde a la fórmula $p \rightarrow q$, donde C es la implicación y las variables p, q sus argumentos. Las otras conectivas son N (negación), K (conjunción), A (disyunción), E (equivalencia) y D (la barra de Sheffer). La fórmula, por ejemplo, NKNpCqp debe leerse en la notación ordinaria $\neg[\neg p \& (q \rightarrow p)]$ y NCCpqANqp $\neg[(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \vee p)]$.

consecuencia, para lo cual dividiremos el tema en dos secciones.

1.- Constantes lógicas

La implicación material es el functor primordial para la lógica de primer orden así como para la metalógica; pues, dejando aparte los funtores únicos (barra de Scheffer y flecha de Peirce), el de la implicación es desde un punto de vista intuitivo el que mejor se corresponde con la forma natural de la inferencia. Ya Peirce desde el siglo pasado le había dado curso al sentimiento, compartido por otros lógicos, de que el ideal sería construir la lógica en términos de la implicación, pues siendo la lógica una teoría de la inferencia ¿por qué habría el lógico de considerar relevantes otras fórmulas tautológicas además de las tautologías implicativas?⁴ Pero había que mostrar todavía que todas las leyes de C.P. o bien son expresiones implicativas o bien abreviaciones definicionales de ellas. No obstante, para poder representarlas a todas resulta indispensable usar la negación conjuntamente con la implicación. Sólo en el caso de que pudiera definirse la negación en términos de la implicación, podríamos construir C.P. utilizando la implicación como único functor.

Ahora bien, esto que parecía imposible resultó ser un problema muy sencillo y fue resuelto por Wajsberg⁵ mediante la introducción del símbolo ' $\neg$ ' como constante que denota a una proposición falsa. De este modo, la negación $\neg$ se define como Cp . En efecto, los valores de $\neg p = 1, 0$. Así también los valores de $Cp = 1, 0$; pues substituyendo los valores de p tenemos que $C0 = 1$ y $C1 = 0$. Del mismo modo, se puede introducir la constante proposicional verdadera mediante el símbolo ' $\vee$ '.

⁴ *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, (Vols. I-VI), edited by Hartshorne and Paul Weiss, Harvard University Press, 1931-5. Véase 3.182-97 y 2.356.

⁵ "Ein neues Axiom des Aussagenkalküls in der Symbolik von Scheffer". En *Monatshefte für Mathematik und Physik*. Vol.39, N. 2 (1932).

En 1937 Wajsberg⁶ demostró que los tres axiomas de Tarski-Bernays, para el segmento implicativo de C.P., (1) $CpCqp$; (2) $CCpqCCqrCpr$; (3) $CCCpqpp$, más su propio axioma (4) Cop cumplen suficientemente bien como principios para derivar C.P. completo.

El desenvolvimiento de este nivel de axiomatización con la implicación y la negación reducida, viene precedido por un trabajo arduo del mismo problema en el cálculo proposicional implicativo, que es el que sólo contiene fórmulas implicativas. La historia de este problema es *grosso modo*, y siguiendo a Lukasiewicz⁷, la siguiente.

The problem of how to construct the Complete Propositional Calculus as well as the Implicational Calculus of Propositions on the basis of a single axiom was raised and solved in 1925 by Tarski, who gave a method of combining several axioms by applying the rule of substitution and the rule of detachment.⁸

Sin embargo, no constituyó una solución satisfactoria, pues esto daba lugar a axiomas que eran fórmulas compuestas de otras tesis o axiomas, extremadamente largas (cincuenta y tres letras), y que no representaban, por tanto, principios originales o básicos del sistema. No obstante, dicho método tarskiano, modificado por Lukasiewicz, le

⁶ "Metalogische Beiträge" en *Wiadomosci Matematyczne*, 43 (1937), pp. 1-38. Traducido al inglés en Storrs McCall: *Polish Logic*, Cap.14, Wajsberg: "Contributions to Metalogic", (Oxford University Press, 1967, pp. 285-318).

⁷ "The Shortest Axiom of the Implicational Calculus of Propositions", *Proceedings of The Royal Irish Academy*, Vol. 52, Section A, No.3 (April 1948); pp. 25-33. Reproducido en L. Borkowski (Editor): *Jan Lukasiewicz. Selected Works*, North Holland Publishing Company, Amsterdam-London, 1970; pp. 295-305.

⁸ He aquí su traducción: "El problema de cómo construir el Cálculo Proposicional Completo así como el Cálculo Implicativo de Proposiciones sobre la base de un solo axioma fue erigido y resuelto en 1925 por Tarski, quien proporcionó un método de combinación de varios axiomas mediante la regla de substitución y la regla de separación." (J.N.) Lukasiewicz, *op.cit.*, [en Borkowski, nota 7)] p. 296.

permitió a Wajsberg⁹ en 1926 obtener el primer axioma orgánico (o fórmula no compuesta de otras tesis del sistema) de veinticinco letras para el Cálculo Proposicional Implicativo, a saber,

CCCpqCCrstCCuCCrstCCpuCst

Esto animó a Lukasiewicz a buscar un axioma orgánico más corto, y encontró en 1930 y 1932 diferentes axiomas de la misma extensión: diecisiete letras, los cuales son CCCpqCrsCtCCspCrp y CCCpqCrsCCspCtCrp respectivamente. Finalmente, en 1936 obtuvo la solución más satisfactoria: el demostrado axioma más corto de trece letras:

CCCpqrCCrpCsp

Y aunque ya tenemos aquí una simplificación notable esto vale solamente para una parte de C.P., el cálculo implicativo (C).

Con la introducción de la constante proposicional falsa 'o' y, por lo tanto, con la negación incluida, se puede reducir a un solo axioma todo C.P. utilizando como único functor la implicación material. El primero que parece haberlo logrado fue C. A. Meredith¹⁰, discípulo de Lukasiewicz en Dublín, quien en un alarde de perfeccionismo lógico redujo en 1953, usando el lenguaje C-o, toda la lógica proposicional a la fórmula (axioma) de diecinueve letras

CCCCCpqCrostCCtpCrp.

Igual papel podía cumplir CCCpqCCorsCCspCtCup. Sin embargo, y por lo que se verá a continuación, estos axiomas resultaban todavía muy extensos e incitaban a seguir la búsqueda del axioma más corto posible.

⁹ Wajsberg, op. cit. nota 5.

¹⁰ C. A. Meredith, *Journal of Computing Systems*, July 1953, Paper 10.

2.- La variable functorial δ

La introducción de una variable de conectivas en el C.P. se debe al también lógico polaco Stalinislaw Lesniewski¹¹ en su Prototética (teoría de los primeros principios), sistema axiomático que va mucho más allá de un clásico cálculo proposicional y cuya única conectiva no definida es la equivalencia. Lukasiewicz adoptó esa variable de conectivas, aun cuando modificara ligeramente su regla de substitución. Con estos artificios se obtiene el Cálculo Proposicional Extendido (C.P.E.).

Una variable es un símbolo o letra que rige sobre un determinado dominio de valores, cada uno de los cuales puede pasar a sustituirla en una fórmula. Las variables proposicionales p, q, r, s , etc. rigen sobre cualquier fórmula bien formada del C.P., en tanto valor substituyente. Llamamos δ a la variable de funtores o conectivas, la cual consta de un solo argumento. Así δp es una expresión significativa del sistema, a condición de que p lo sea también. Es obvio que por δ en la expresión δp podemos substituir cualquier valor que junto con p produzca una expresión significativa del sistema. La variable δ , entonces, rige sobre cualquier conectiva, pero no sólo se podrá substituir por una conectiva monádica, tal como la negación N , sino también por expresiones complejas de una o más conectivas, que al unirse con p produzcan una expresión significativa.

En δp podemos substituir δ por Cq (expresión incompleta e impropia), substitución que indicamos por δ/Cq , y entonces se obtiene Cqp , lo cual es una fórmula completa y correcta. Luego, según la regla de substitución que perfecciona Lukasiewicz¹², el uso del apóstrofo (') sirve para indicar que el argumento que acompaña a δ debe colocarse en su lugar. Por ejemplo, si en δp substituimos $\delta/C'r$ se obtiene Cpr . Los siguientes ejemplos aclararán mejor la aplicación de la regla de

¹¹ *Grundzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik* (Elementos de un nuevo sistema de los Fundamentos de la Matemática), *Fundamenta Mathematicae*, 14 (1929), pp. 1-81.

¹² "On variable functors of propositional arguments", en Borkowski: *Jan Lukasiewicz. Selected Works*, véase nota 6), pp. 314-315.

substitución de la variable functorial δ .

En δp , si $\delta/C'CN'q$, se obtiene $CpCNpq$

En $C\delta pC\delta Np\delta q$, si $\delta/C'r$, se obtiene $CCprCCNprCqr$

En este último caso obsérvese que la primera variable δ que aparece tiene como argumento a p , mientras que la segunda a Np y la tercera a q . Por lo tanto, estos argumentos deben ocupar el lugar del apóstrofo respectivamente. Cuando se trate de substituir δ/C'' entonces se repite el argumento de δ . Cuando $\delta/'$ entonces se elimina la variable δ . Y cuando se trate de δ/δ' la expresión original se mantiene invariable como resultado. Pasemos a constatarlo en los siguientes ejemplos.

$C\delta pC\delta Np\delta q$ δ/C'' se obtiene $CCppCCNpNpCqq$

$C\delta pp$ $\delta/'$ se obtiene Cpp

$CCpqC\delta p\delta q$ δ/δ' se obtiene $CCpqC\delta p\delta q$

Con la modificación impuesta por la introducción de esta variable functorial en el cálculo, la cual es una especie de comodín, se puede lograr una mayor reducción del axioma único del cálculo proposicional extendido. En 1951 Lukasiewicz descubrió el axioma único de nueve letras para un sistema C.P.E. que cuenta con C- δ -o. Se trata de la fórmula $C\delta ooC\delta o\delta p$. También $C\delta oC\delta Coo\delta p$ de diez letras cumple la misma función. Pero fue Meredith¹³, su discípulo, quien logró la máxima reducción posible al obtener el axioma $C\delta\delta o\delta p$ que tiene sólo seis letras. Deducir de esta tesis mínima todo el cálculo de proposiciones

¹³ Meredith presentó su cálculo en el artículo "On an Extended System of the Propositional Calculus", *Proceedings of the Royal Irish Academy, Dublin* (1951), 54 A 3. Contiene además una prueba de completitud. Por otro lado, y como dato curioso, se trata de un cálculo con cuantificadores sobre variables proposicionales y functoriales.

es una hazaña científica y, como dice Lukasiewicz, una "masterpiece of deductive power". Estamos ante uno de los ejemplos que nos permiten captar el alto grado de exactitud y belleza alcanzado por la lógica contemporánea, y en especial por la escuela de lógica polaca, ya que Meredith continúa su tradición, superando incluso los niveles de sistematización alcanzados por la matemática.

Hemos visto una superposición de sistemas de lógica proposicional que comienza desde el cálculo exclusivamente implicativo, es decir, C, pasando por C-N, por C-o, hasta el Cálculo Proposicional Extendido C- δ -o. Nos ha faltado indicar que en el cálculo C-N- δ (es decir, sin constante proposicional falsa y también extendido) el axioma más corto posible tiene nueve letras, el cual es $C\delta pC\delta Np\delta q$. Existe además una prueba de que no puede haber otro más corto. La tesis Cpp o principio de identidad, de importantes consecuencias deductivas en estos sistemas, es, por ejemplo, derivable de ese axioma en la siguiente prueba, que transcribimos en su forma no abreviada para ilustrar el uso de la variable functorial δ y de la regla de substitución.

(1) $C\delta pC\delta Np\delta q$	Axioma (único)
(2) $CpCNpp$	1, δ' , q/p
(3) $\frac{CCpCNppCCpCNpNpCpCNpNp}{(2)}$	1, $\delta/CpCNp'$, q/Np
(4) $CCpCNpNpCpCNpNp$	2,3 Modus Ponens
(5) $CpCNpNp$	1, δ' , q/Np
(6) $\frac{CCpCNpNpCNCpCNpNpNCpCNpNp}{(5)}$	5, $p/CpCNpNp$
(7) $CNCpCNpNpNCpCNpNp$	5,6, Modus Ponens
(8) $\frac{CCCpCNpNpCpCNpNpCCNCpCNpNpNCpCNpNpCpp}{(4)}$	1, δ/C'' $p/CpCNpNp, q/p$

(9) $\underline{CCNCpCNpNpNCpCNpNpCpp}$
(7)

4,8 Modus Ponens

(10) Cpp

7,9 Modus Ponens

No hay que olvidar que estas simplificaciones axiomáticas comenzaron en realidad por la axiomatización de Łukasiewicz del C.P. presentada en su obra de 1929 *Elementy Logiki Matematycznej* (Lógica Matemática Elemental)¹⁴, donde, en función de la implicación y negación, expuso un sistema de sólo tres axiomas, a saber,

(i) $CCpqCCqrCpr$ (ii) $CCCpqqp$ (iii) $CpCqp$.

Frente al sistema de Frege de seis axiomas, al de Russell-Whitehead de cinco, y al de Hilbert-Ackerman de quince (con la excepción vista del de Nicod: un axioma formulado con el functor de Scheffer), Łukasiewicz presentó su original sistema de tres axiomas en que recobraba la perspectiva intuitiva del functor de implicación como el más genuino para la teoría de la inferencia.

Por otro lado, solucionó el problema del axioma más corto posible en el restringido cálculo de equivalencia (Sistema E, cuya única conectiva es el functor de equivalencia), resultando ser indistintamente cualquiera de las fórmulas siguientes de once letras:

(i) $EEpqEErqEpr$, (ii) $EEpqEEprErq$, (iii) $EEpqEErpEqr$

En el sistema C (cálculo implicativo), como hemos visto, Łukasiewicz descubrió el axioma más corto posible con la tesis de trece letras

$CCCpqrCCrpCsp$

¹⁴ Hay una edición inglesa, preparada por J. Slupecki, de la editorial Pergamon, 1963 (Oxford), bajo el título de *Elements of Mathematical Logic*. En esta obra Łukasiewicz también por primera vez presenta su notación original que prescinde de los paréntesis, y que luego se hizo estándar dentro y fuera de Polonia.

En el C-N logró notables reducciones del único axioma de Tarski de cincuenta y tres letras hasta alcanzarse la fórmula de Meredith de 21 letras:

$$CCCCCpqCNrNsrtCCtpCsp$$

Y finalmente, en el C-o- δ Lukasiewicz perfeccionó la regla de substitución de Lesniewski y, por medio de ella, llegó a la tesis de diez letras $C\delta CooC\delta o\delta p$, que es el principio de bivalencia, como axioma más corto, si bien Meredith, trabajando sobre esta tesis, demostró en forma concluyente que el axioma de Lukasiewicz se podía reemplazar por otro de nueve letras $C\delta pC\delta Np\delta q$ o por el notablemente inferior de seis letras $C\delta\delta o\delta p$, probando la completitud de su sistema y alcanzando la máxima simplificación jamás lograda en un sistema formal.

Muchos descubrimientos de gran importancia se debieron a este principal inspirador de la lógica polaca como fue Lukasiewicz, quien se distinguió por su elegancia y originalidad como lógico y por su virtuosismo como docente, ya que figuras tan destacadas como Tarski, Lindenbaun, Jáskowski, Wajsberg, Salamucha, Sobocinski, Slupecki y Meredith se contaron entre sus deudores bien como discípulos o como colaboradores.

BIBLIOGRAFIA

Edwards, Paul (Editor): *The Encyclopedia of Philosophy* (Macmillan Publishing Co., 1967).

Jordan, Zbigniew: *The Development of Mathematical Logic and of Logical Positivism in Poland between the Two Wars* (Oxford University Press, 1945)

Lukasiewicz, J.: *Jan Lukasiewicz. Selected Works*, Edited by L. Borkowski (North Holland Publishing Company, 1970)

Lukasiewicz, J.: *Aristotle's Syllogistic* (Oxford University Press, 1951)

McCall, Storrs: *Polish Logic 1920-1939* (Oxford University Press, 1967)

Prior, A.N.: *Formal Logic* (Oxford University Press, 1962).
Especialmente los Capítulos II y III.

Prior, A.N.: *Historia de la Lógica* (Editorial Tecnos, Madrid, 1976).

Skolimowski, Henryk: *Polish Analytical Philosophy* (Routledge & Kegan Paul, 1967)

Tarski, Alfred: *Logic, Semantics, Metamathematics*, Papers from 1923 to 1938. (Oxford University Press, 1956)

REVISTAS:

Studia Logica (Polonia)

Notre Dame Journal of Formal Logic (U.S.A.)