Apuntes para una introducción al logicismo

Ricardo Da Silva

Resumen: Esta nota tiene como propósito introducir a los estudiantes interesados en el logicismo. Nuestro objetivo no es mostrar ninguna nueva interpretación o tesis sobre el logicismo o sobre su renacimiento entre los años 60 y 80 del siglo pasado. Lo que haremos es mostrar sistemáticamente la evolución del logicismo desde Frege hasta Russell-Whitehead, con mayor énfasis en este último desarrollo, y abordar algunos problemas que surgen en el seno de dicho movimiento, como por ejemplo: Las paradojas lógicas y el principio de comprehensión intuitiva, la definiciones impredicativas y las paradojas semánticas, la jerarquía ramificada y los números reales, el axioma de reducibilidad y la imposibilidad de la reducción de la matemática a la lógica, etc.

Palabras clave: Logicismo, Matemática, Paradojas, Teoría de tipos, Axioma de Reducibilidad.

Abstract: The following note has on purpose to introduce interested students to logicism. Our objective is not to show any new interpretation or thesis about logicism or its rebirth between the 60s and 80s of the last century. What we will do is systematically show the evolution of logicism from Frege to Russell-Whitehead, with greater emphasis on this latest development, and approach some problems that arise within that movement, for example: The logical paradoxes and the principle of intuitive comprehension, the impredicative definitions and the semantic paradoxes, the Ramified Hierarchy and real numbers, the axiom of reducibility and the impossibility of reducing mathematics to logic, etc.

Keywords: Logicism, Mathematics, Paradoxes, Type Theory, The Axiom of Reducibility.

Antes de estudiar la concepción logicista de la matemática es necesario advertir de dos desarrollos de esta filosofía de la matemática[1]. Un primer intento por llevar a cabo el programa logicista es el que resulta anterior al surgimiento de las paradojas de la Teoría de conjuntos[2]. Tal intento es el que llevó adelante el lógico y filósofo Gottlob Frege, dicho proyecto encuentra sus bases teóricas en *Die Grundlagen der Arithmetik*[3] y su pretensión de realización formal, que como sabemos es inconsistente[4], es llevada a cabo en *Grundgesetze der Arithmetik*[5].

El intento posterior de llevar a cabo el logicismo surge como una posible solución al problema de la crisis de los fundamentos de la matemática ocasionada por el descubrimiento de las paradojas de la Teoría de conjuntos[6]. Este proyecto encuentra sus bases teóricas y filosóficas en la obra *The priciples of mathematics*[7] de Russell y su realización práctica se hace efectiva en

---

[1] El logicismo no es solo una postura filosófica, es también un proyecto de fundamentación matemática, así como un teoría epistemológica sobre la matemática, al menos de esta manera lo entiende Neil Tennat en su entrada sobre *Logicism and Neologicism* en The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Cfr. The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL : https://plato.stanford.edu/archivies/win2017/entries/logicism/.

[2] Para abordar el tema de las paradojas lógicas o conjuntistas recomendamos las siguientes obras: (1) RUSSELL, Bertrand, "La lógica matemática y su fundamentación en la teoría de tipos" en RUSSELL, Bertrand, *Lógica y conocimiento* (1901-1950), Comp. Robert Charles Marsh, Madrid, Taurus, 1966. (2) BETH, Evert, *Las paradojas de la lógica*, Valencia, Cuadernos Teorema, 1975. (3) GARCIADIEGO, Alejandro, *Bertrand Russell y los orígenes de las "paradojas" de la teoría de conjuntos,* Madrid, Alianza Editorial, 1992. (4) También recomendamos revisar las entradas; *Paradoja de Burali-Forti*, *Paradoja de Cantor* y *Paradoja de Russell*, así como las demás nociones involucradas en estas paradojas, en MOSTERÍN, J. y TORRETTI, R., *Diccionario de Lógica y filosofía de la ciencia*, Madrid, Alianza Editorial, 2002. (5) Por último, no podemos dejar pasar la siempre actualizada entrada "Paradoxes and contemporary logic" de Cantini y Bruni en The Stanford Encyclopedia of Philosophy, que cuenta a su vez con una generosa lista bibliográfica sobre el tema; consúltese Cantini, Andrea y Bruni, Riccardo, "Paradoxes and contemporary logic", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2017 edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = https://plato. stanford.edu/archives/fall2017/entries/paradoxes-contemporary-logic/.

[3] Cfr. FREGE, Gottlob, *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch Mathische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, 1884, traducida al inglés como *The Foundations of Arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the concept of number* por J.L. Austin, Oxford: Blackwell, 1974 (Segunda edición revisada). Se cuenta también con traducción al español: *Los fundamentos de la aritmética: una investigación lógico-matemática sobre el concepto de número* en FREGE, G., *Escritos filosóficos*, Jesús Mosterín (Ed.), Barcelona, Mondadori, 1996.

[4] En 1902 Bertrand Russell le escribe una carta a Frege indicándole que había encontrado una contradicción en el sistema expuesto en su obra *Grundgesetze der Arithmetik.* Esta antinomia surge en el sistema de Frege gracias al axioma V que supone al *Principio de Comprensión Intuitiva* y que asegura que "toda propiedad determina un conjunto". Para ver la influencia del *Principio de comprensión intuitiva* en la lógica matemática y en el surgimiento de la Teoría de conjuntos consúltese: JANE, I. "¿De qué trata la teoría de conjuntos?" En ORAYEN, R. y MORETTI, A. (Ed), *Filosofía de la lógica*, Madrid, Editorial Trotta, 2004; y MADDY, P., *Naturalism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1997.

[5] Cfr. FREGE, Gottlob, *Grundgesetze der Arithmetik (*I-II), 1893-1903, Jena: Verlag Hermann Pohle. Se cuenta con una traducción al inglés completa de los dos tomos por parte de EBERT, P. y ROSSBERG, M.: *Basic Laws of Arithmetic*: *Derived using concept-script*, Oxford: Oxford University Press, 2013.

[6] Cfr. DE LORENZO, Javier, *La matemática: de sus fundamentos y sus crisis.* Madrid, Tecnos, 1998., p. 39.

[7] RUSSELL, Bertrand, *The Principles of Mathematics*, Cambridge: At the University Press. 1903.

los tres tomos de la obra *Principia Mathematica*[8] que escribieron conjuntamente Russell y Alfred Whitehead. Teniendo presente esta distinción, es conveniente señalar al lector que prestaremos mayor atención al segundo movimiento logicista, liderado por Russell y Whitehead, y nos referiremos en menor medida el logicismo fregeano. Mucho de nuestra presentación sobre el logicismo, en especial el de los *Principia*, se basa en el análisis llevado a cabo por Rudolf Carnap en la conferencia "The logicist foundations of mathematics"[9], presentada en 1930 en el *Congreso sobre los fundamentos de la Matemática* que tuvo lugar en la ciudad de Königsberg[10], por lo que podemos asumir sin conflicto que las notas que aquí presentamos pueden entenderse como una introducción del logicismo *à la* Carnap. Empezaremos ubicando al lector en el contexto del surgimiento de las paradojas de la teoría de conjunto para luego avanzar a una exposición sistemática del logicismo.

I

El siglo XIX fue un siglo de grandes descubrimientos y progresos para la que se conocía como la 'más confiable de todas las ciencias', esto es, la matemática, y ello se debe a tres aspectos fundamentales, los cuales hacen que la matemática de ese momento se diferencie de todo el *Hacer* matemático precedente, *Hacer* matemático que era liderado por las investigaciones de Euler, Lagrange, d'Alembert y Fourier, por solo nombrar algunos de los matemáticos de mayor relevancia para la época. Dichos aspectos fundamentales que se encuentran en esta nueva forma de hacer matemática son los siguientes[11]: (1) Una exigencia de rigor en las definiciones y conceptos de las diversas ramas de la matemática[12], (2) Una determinación explícita de los procedimientos deductivos y fundacionales que son usados en las demostraciones matemáticas[13]

---

[8]WHITEHEAD, Alfred y *RUSSELL*, Bertrand 1910, 1912, 1913, *Principia Mathematica*, 3 volumes, Cambridge: Cambridge University Press. En español se cuenta con una traducción incompleta de la obra por parte de la editorial Paraninfo (hasta el parágrafo 56).

[9] CARNAP, R, "The logicist foundations of mathematics" (1931) En BENACERRAF, P. y PUTNAM, H. *Philosophy of mathematics*. Cambridge, Cambridge University Press.1983.

[10] Donde también se presentaron John von Neumann en defesan del Formalismo y Arend Heyting en defensa del intuicionismo.

[11] Cfr. REALE, G. y ANTISERI, D., *Historia del pensamiento filosófico y científico*, Barcelona, Editorial Herder, 1988, t. III, p. 324.

[12] Esto permite a su vez dos cosas, por un lado que las definiciones fuesen claras y sencillas, facilitando su empleo, y por otro lado se buscaba conocer el campo de aplicabilidad de los conceptos.

[13] Se buscaba hacer evidente todas aquellas leyes y estrategias lógicas que el matemático usa en las demostraciones de teoremas.

y (3) La eliminación de la *evidencia empírica* como requisito necesario para la aceptación de resultados matemáticos[14].

Estos tres aspectos se ven desarrollados en un primer momento en la investigación del matemático francés Louis Augustin Cauchy, quien define, de manera formal y rigurosa, las nociones de la *Teoría infinitesimal*, como por ejemplos los conceptos de *límite*, *derivada*, *integral*, entre otros[15]. Un segundo momento, en donde se siguen desarrollando los tres aspectos antes mencionados, es en la construcción de la *Teoría de los números reales* a partir de la *Teoría de los números naturales*, investigación que recibe el nombre, en la historia de la matemática, de '*aritmetización del análisis*'[16].

Ahora bien, muchos matemáticos y lógicos no aceptaron la idea de que los números naturales fuesen la base del edificio de la matemática, más bien, postulaban la tesis de que había algo mucho más primigenio a partir de lo cual se podía derivar la noción de número natural. Es justamente de esta tesis, de que los números naturales se derivan de nociones mucho más básicas y primigenias, que surgen dos líneas de investigación para la fundamentación de la aritmética, por un lado encontramos el proyecto logicista de Gottlob Frege y por otro lado encontramos el proyecto conjuntista de Georg Cantor[17]. De esta manera, mientras Frege pasaba de la *aritmetización del análisis* a la *logización de la aritmética*, Georg Cantor buscaba fundamentar la aritmética en la *Teoría de conjuntos*, i.e., buscaba definir el concepto de número natural desde la noción más básica de conjunto. Sin embargo, ambas fundamentaciones se ven amenazadas por el surgimiento de varias paradojas que implicaban grandes contradicciones a la base del edificio matemático, en especial podemos mencionar la *Paradoja de Cantor, la Paradoja de Burali-Forti* y la *Paradoja de Russell.* Desarrollemos, en lo que sigue, cada una de estas paradojas.

[14] La certeza de los resultados matemáticos no se veía reducida a la aplicación de dichos resultados en investigaciones empíricas.
[15] Cfr. *Ibídem*.
[16] En la *aritmetización del análisis* se ven relacionados grandes matemáticos como Karl Weierstrass, Georg Cantor y Richard Dedekind, quienes demostraron que toda la *Teoría de los números reales*, y los entes matemáticos que se pueden construir a partir de ellos, se construyen rigurosamente a partir del concepto de número natural y las propiedades de dicho concepto. Es posible, usando una metáfora arquitectónica, ver a los números naturales como el cimiento o los bloques que soportan todo el edificio de la matemática. Cfr. DE LORENZO, Javier, *Ob. Cit*. Para un estudio del uso de las metáforas arquitectónicas empleadas al momento de hablar de los fundamentos de la matemática, revísese el Capítulo 1 titulado: "De crisis y fundamentos".
[17] Cfr. MADDY, Penelope, *Ob. Cit.*, Cap. 1.

Para el año de 1899[18] Cantor le había escrito una carta a Dedekind comentándole que había encontrado una inconsistencia en el seno de la *Teoría de conjuntos*. Cantor, en 1891, había demostrado que "el conjunto potencia de un conjunto dado siempre tiene una cardinalidad mayor que ese conjunto dado. Para cada conjunto A, $|A| < |\wp(A)| = 2^{|A|}$"[19]. Pero inmediatamente podemos preguntarnos, como en efecto lo hizo Cantor, ¿Qué pasa cuando consideramos el teorema anterior sobre el conjunto universal U (el conjunto de todos los conjuntos)? Por lo dicho anteriormente, el *número cardinal* de U debería ser menor que el *número cardinal* de $\wp$(U), pero resulta que U es el conjunto de todos los conjuntos, y como $\wp$(U) es un conjunto de conjuntos, tenemos entonces que $\wp$(U) es un subconjunto de U, indicando esto que la cardinalidad de $\wp$(U) es menor o igual que la de U, lo cual es una contradicción.

La *paradoja de Burali-Forti* fue dada a conocer en 1897[20]. Para poder enunciarla necesitamos definir los siguientes conceptos[21]:

Definición de conjunto transitivo: Para todo conjunto A, A es *transitivo*, si $\forall x\ (x \in A \rightarrow x \subset A)$.

Definición de conjunto estrictamente bien ordenado por $\in$: Para todo conjunto A, A se encuentra *estrictamente bien ordenado por* $\in$, si $A \notin A$.

Definición de ordinal: Un conjunto A es un *ordinal* si es transitivo y se encuentra estrictamente bien ordenado por $\in$.

[18] Cfr. GARCIADIEGO, Alejandro, *Ob. Cit.*, pp. 66-67. Garciadiego comenta, en las páginas señaladas, lo siguiente: "Algunos colegas aseguran que Cantor describió esta inconsistencia a Dedekind en una carta fechada el 28 de julio de 1899, sólo que ahora incluso la fecha de la carta está en duda. Grattan-Guinness ha mostrado que Zermelo realizó un trabajo poco escrupuloso al editar las obras completas de Cantor y exhibió que no únicamente había una carta de Cantor a Dedekind, como se deducía de la publicación alemana original, sino dos. Unos han establecido la fecha de descubrimiento de la "paradoja" tan pronto como 1883, otros en 1895, y algunos más en 1896. Así, al menos, la fecha del descubrimiento se encuentra en disputa". A pesar de esta disputa, que sigue en pie sobre la fecha del descubrimiento de la paradoja de Cantor, hemos querido seguir a autores como Jesús Mosterín en *Los lógicos*, Jesús Mosterín y Roberto Torretti en el *Diccionario de Lógica y filosofía de la ciencia* y van Heinenoort en *From Frege to Gödel*, para quienes la fecha de 1899 es la correcta.

[19] MOSTERÍN, J. y TORRETTI, R., *Ob. Cit*., p. 546, *Entrada:* Teorema de Cantor.

[20] Sin embargo en MOSTERÍN, J. y TORRETTI, R., *Ob. Cit*., se sugiere que aunque presentada en 1897 por Burali-Forti, la paradoja ya era conocida hacia 1985 por el propio Cantor.

[21] DI PRISCO, Carlos, *Teoría de conjuntos*, Caracas, CDCH, 2009.

Enunciemos ahora la *paradoja de Burali-Forti*: La clase de todos los ordinales (ORD) es transitiva y está estrictamente bien ordenada por $\in$. Si ORD fuese un conjunto, entonces ORD $\in$ ORD, pero esto contradice que ORD $\notin$ ORD. Por lo tanto, ORD no puede ser un conjunto.

Por último, encontramos la tan famosa *paradoja de Russell*. Durante la primavera de 1901, Russell se encontraba trabajando sobre los fundamentos de la matemática y en el transcurso de dichas investigaciones, la *paradoja de Cantor* tuvo un impacto fundamental, ya que fue esta la que llevó al lógico británico a la *paradoja de las clases que no pertenecen a sí mismas*[22], en palabras del propio Russell:

> Cantor tenía una demostración de que no existe un número máximo, y a mí me parecía que el número de todas las cosas en el mundo tenía que ser el máximo posible. De acuerdo a ello, examiné su demostración con cierta minuciosidad, e hice un esfuerzo por aplicarla a la clase de todas las cosas que existen. Esto me condujo a considerar a las clases que no son miembros de sí mismas, y a preguntar si la clase de tales clases es o no es un miembro de sí misma. Encontré que cualquier respuesta implica su contraria.[23]

Para finales de 1901 Russell no le dedica gran importancia a la paradoja descubierta por él y la trata como una mera 'curiosidad lógica'. Es en 1902 cuando reconoce, luego de no poder resolver tal 'curiosidad lógica', que la paradoja amenazaba con derrumbar la confianza que giraba en torno de la consistencia de la matemática. Ese mismo año le escribe una carta a Frege indicándole que la paradoja se podía derivar como teorema del sistema expuesto en su obra *Grundgesetze der Arithmetik*. Esta antinomia surge en el sistema de los *Grundgesetze* gracias al axioma V[24] que supone al *Principio de Comprensión Intuitiva (PCI),* según el cual "toda propiedad determina un conjunto"[25].

Siguiendo a autores como Manuel Garrido[26] y a Jesús Mosterín[27], la *paradoja de Russell* puede explicarse de la siguiente manera:

---

[22] Cfr. MOSTERÍN, Jesús, *Los Lógicos*, Madrid, Editorial España Calpe, 2000, p. 152.
[23] RUSSELL, Bertrand, *La autobiografía de Bertrand Russell*, Madrid, Aguilar, 1968, p. 232 (citado en GARCIADIEGO, A., *Ob. cit.*, p. 150).
[24] El Axioma V de Frege dice: "Para todo concepto F y G, la extensión de F es igual a la extensión de G si y sólo si las mismas cosas caen bajo F y bajo G". Dicha cita fue tomada de Maddy, P., *Ob. Cit*., p. 6 (La traducción es propia).
[25] JANE, I., "¿De qué trata la teoría de conjuntos?" En ORAYEN, R. y MORETTI, *Ob. Cit*., p. 252.
[26] Cfr. GARRIDO, Manuel, *Lógica Simbólica*, Madrid, Tecnos, 2001 (1ra. Ed. 1974), pp. 520-522.
[27] Cfr. MOSTERÍN, J., *Ob.cit*., pp. 152-153.

Existen clases que pertenecen a sí mismas –por ejemplo, la clase de todas las clases que tienen más de tres elementos–, mientras que existen clases que no pertenecen a sí mismas –por ejemplo, la clase de los perros–. Consideremos La propiedad Px: ‘x es una clase que no pertenece a sí misma’. Siguiendo el PCI tenemos que P genera una extensión, llamémosla R, definida así:

$$R = \{x | x \notin x\}$$

Surge entonces la pregunta: ¿R pertenece a R?[28] Si R ∈ R, entonces R no cumple con la propiedad que deben cumplir los elementos de R y, en consecuencia, R ∉ R, pero si lo último ocurre, tenemos que R verifica la propiedad que deben tener los elementos de R y, por lo tanto, R ∈ R. Así pues, $R = \{x | x \notin x\} \rightarrow (R \in R \leftrightarrow R \notin R)$.

Es así como el final del siglo XIX y el principio del siglo XX pasan a ser reconocidos como los siglos en el que el edificio matemático se vio estremecido y la pregunta sobre los fundamentos cobró más importancia que nunca, es justo en este contexto que se desarrolla el logicismo, en específico, el de Russell-Whitehead como veremos a continuación.

II

Rudolf Carnap comienza su conferencia “The logicist foundations of mathematics”, diciendo que el problema de los fundamentos lógicos y epistemológicos de la matemática no había sido del todo esclarecido para 1930[29]. Para Carnap, y todos los defensores de la corriente logicista, un aspecto importante que atañe a la investigación filosófica sobre los fundamentos de la matemática es la estrecha relación que existe entre la matemática y la lógica[30]. Sobre la naturaleza de dicha relación los logicistas defenderán la tesis según la cual la matemática es reducible a la lógica, de lo que se infiere que la matemática no es más que una rama de la lógica formal, o como nos los señala el propio Russell, la matemática resulta ser “una prolongación de la lógica”[31].

---

[28] Esta pregunta tiene sentido, pues en la *Teoría de conjuntos* vale el *Principio de Tercero Excluido*, es decir, dado cualquier conjunto A y un elemento x, se cumple que x ϵ A o x ∉ A, en especial es lícito preguntar si A pertenece o no pertenece a sí mismo.
[29] Cfr. CARNARP, Rudolf, *Ob. Cit.*, p. 41.
[30] Cfr. *Ibídem*.
[31] RUSSELL, Bertrand, “Introducción a la Filosofía Matemática”, (1919) en RUSSELL, Bertrabd, *Obras Completas. Tomo II: Ciencia y Filosofía (1897-1919),* Madrid, Editorial Aguilar, 1917, p. 1280.

La tesis de la reducción, como ya mencionamos anteriormente, tiene su precursor, y uno de sus mayores defensores, en Gottlob Frege, quien adopta dicha postura por no encontrarse satisfecho ni con la concepción de la noción de número ni con la concepción de la naturaleza de la matemática que se veían implicadas por la filosofía kantiana.

Kant había establecido en la *Crítica de la Razón Pura*[32] la distinción entre juicios (o proposiciones) *analíticos* y *sintéticos*, afirmando que los juicios de la matemática son *sintéticos a priori*, mientras que los juicios de la lógica son de carácter *analítico*. Recordemos que, en términos kantianos, un juicio es *analítico* cuando el predicado está contenido en el sujeto y es *sintético* cuando el predicado no está contenido en el sujeto (para ser más exactos diremos que un juicio es *sintético* cuando hay una característica en el concepto que representa el predicado que no se encuentra o de la cual no participa el concepto que representa el sujeto[33]). Tenemos así que el filósofo de Königsberg aplica esta distinción a los enunciados del tipo 'todos los A son B'[34].

Pero Frege reconoce que la forma en que Kant desarrolla la distinción es problemática, y ello por las siguientes razones: En primer lugar la distinción entre proposiciones *analíticas* y *sintéticas*, tal como la define el filósofo de Königsberg, no tiene sentido aplicarla, por ejemplo, a las proposiciones de la aritmética, pues la mayoría de las proposiciones de la aritmética no son del tipo de proposiciones categóricas, sino más bien proposiciones relacionales. En segundo lugar, la forma en que se define en la *Critica* la distinción es apelando a nociones obscuras y de naturaleza psicológica, como por ejemplo, que un concepto *contiene* a otro concepto[35]. Ahora bien, incluso no estando de acuerdo con la forma en que se encontraba definida la distinción y la manera en que Kant concebía la naturaleza de la aritmética, el lógico alemán pensaba que una distinción entre proposiciones *analíticas* y *sintéticas* aún tenía valor teórico y, por ende, debía redefinirse aquello que generaba la dicotomía entre dichas proposiciones. El profesor Jesús Mosterín nos explica a continuación como entiende el padre de la *Conceptografía* tal redefinición de la distinción:

[32] KANT, I., *Critica de la razón pura*, México, Ediciones Taurus, 2006, Introducción.
[33] Cfr. MOSTERÍN, Jesús, *Ob. Cit.*, p. 57.
[34] Aunque también es posible explicar la distinción sobre los juicios universales negativos.
[35] Otro ejemplo del psicologismo kantiano lo podemos observar cuando se nos dice: "los juicios analíticos (afirmativos) son, pues, aquellos en que se piensa el lazo entre predicado y sujeto mediante la identidad". Kant, I., *Ob. Cit*., p. 48, A7 y B11.

> Según Frege, un enunciado verdadero es analítico si puede ser probado o deducido a partir únicamente de leyes lógicas y definiciones. En caso contrario decimos que se trata de un enunciado sintético.[36]

Es gracias a dicha redefinición que el lógico alemán enuncia su tesis logicista diciendo que los teoremas aritméticos son enunciados *analíticos*[37], es decir, los teoremas aritméticos son deducibles a partir, únicamente, de leyes lógicas mediante definiciones explícitas. Debemos notar que el primer interés en Frege para proponer la tesis logicista era de carácter epistemológico, ya que reduciendo la aritmética a la lógica se lograría probar que la primera era tan confiable como la segunda y se podría, de hecho, tener absoluta confianza en su validez y universalidad[38].

Carnap divide dicha tarea, la de deducir la matemática desde la lógica, en dos partes[39]:

(1) La derivación conceptual: Los conceptos de la matemática se derivan mediante definiciones explícitas de conceptos estrictamente lógicos.
(2) La derivación teoremática: Los teoremas de la matemática pueden obtenerse de axiomas lógicos mediante algún mecanismo lógico de deducción.

Para llevar a cabo la primera tarea, la derivación conceptual, es necesario primero conocer aquellos conceptos lógicos que participan en la derivación. Estos conceptos son los siguientes[40]:

a) De la *Lógica proposicional* los conceptos que se toman como primitivos son: La negación, la disyunción, la conjunción y el condicional (que se simbolizan respectivamente como $\neg$, $\vee$, $\wedge$ y $\rightarrow$; y que además se definen como funciones veritativas).
b) Del *Cálculo funcional* o la *Lógica de predicados* se toman los siguientes conceptos: El cuantificador universal ($\forall$) y el cuantificador existencial ($\exists$).

---

[36] MOSTERÍN, J., *Ob. Cit*., p. 58.
[37] Hablamos de teoremas aritméticos y no de teoremas matemáticos, pues la matemática engloba a la geometría y con respecto a esta última Frege sostenía la idea, indiscutiblemente kantiana, de que eran enunciados del tipo *sintético a priori.*
[38] Esto lo hace notar Neil Tennat en su entrada sobre Logicism and Neologicism en The Stanford Encyclopedia of Philosophy cuando nos dice: "Another consequence of successful logicist reduction of a given branch of mathematics is that mathematical certainty (within that branch) is of a piece with certainty about logical truth. The same holds for necessity; and for the *a priori* character of the knowledge concerned" en Tennat, Neil, "Logicism and Neologicism", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = https://plato.stanford.edu/archivies/win2017/entries/logicism/.
[39] Cfr. CARNAP, Rudolf, *Ob. Cit*., p. 41.
[40] Cfr. *Ibíd*., p. 42.

c) Del *Cálculo funcional con identidad* se toma el concepto de identidad, en donde ˈa=bˈ significa que ‘a’ y ‘b’ son nombres del mismo objeto.

Inmediatamente Carnap asegura que:

> Los conceptos lógicos ya presentados bastan para definir todos los conceptos matemáticos, y aparte de ellos no se requiere de ningún concepto específicamente matemático para la construcción de la matemática[41].

Lo anterior resulta de gran importancia pues es posible señalar que, bajo la interpretación logicista, la lógica goza de la fuerza teórica suficiente para no recurrir al uso de ningún concepto matemático en la derivación de la matemática.

Además, como es sabido por todos[42], en el siglo XIX se había probado que los números reales se pueden construir a partir de la aritmética (*artimetización del análisis*), por lo que la cuestión principal para el logicismo se centraba en el problema de cómo derivar la noción de número natural a partir de conceptos estrictamente lógicos. Ante tal cuestión se presenta como solución la “condición lógica” de los números naturales como atributos que pertenecen a los conceptos y no a las cosas[43], por ejemplo, cuando decimos que son 12 los apóstoles o que son 7 los días de la semana, lo que ello significa es que bajo el concepto de ‘Apóstoles’ caen 12 objetos mientras que bajo el concepto de ‘Días de la semana’ caen 7 objetos. Lo que sigue, para el logicismo, es usar los conceptos primitivos aceptados para modelar la condición lógica de los números naturales, veamos un ejemplo de ello:

Lo primero es definir cuándo un número x de objetos cae bajo el alcance de un concepto[44]. Por ejemplo, la definición de 3 objetos que caen bajo un concepto F, denotado por 3m(F)[45], se define de la siguiente manera:

$$3\mathrm{m}(F) \overset{\mathrm{def}}{=} \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3\ [\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \neg(x_2 = x_3) \wedge\ F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge F(x_3)\ ]$$

[41] *Ibídem*. (La traducción es propia).
[42] Cfr. BELL, E.T., *Historia de las matemáticas*, México, FCE, 1985², Cap. XII.
[43] Así pues como nos dice Jesús Mosterín “los números no se dicen de las cosas sino de los conceptos” en MOSTERÍN, Jesús, *Ob. Cit*., p. 58.
[44] Los conceptos se expresan en términos de predicados.
[45] Que se lee “tres objetos m caen bajo el alcance del concepto F”.

En base a lo anterior se define la noción de número natural, por ejemplo, la definición del número 3 es la que aquí se presenta:

$3(F) \stackrel{\text{def}}{=} 3\text{m}(F) \wedge \neg\, 4\text{m}(F)$, que equivale a:

$$3(F) \stackrel{\text{def}}{=} \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \, [\neg(x_1 = x_2) \wedge \neg(x_1 = x_3) \wedge \neg(x_2 = x_3) \wedge F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge F(x_3)] \wedge$$

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 \begin{Bmatrix} \big(F(x_1) \wedge F(x_2) \wedge F(x_3) \wedge F(x_4)\big) \rightarrow \\ [\,(x_1 = x_2) \vee (x_1 = x_3) \vee (x_1 = x_4) \vee (x_2 = x_3) \vee (x_2 = x_4) \vee (x_3 = x_4)] \end{Bmatrix}$$

Pero es evidente, por lo anterior, que la definición de número se debe entender como un conjunto de conjuntos, lo que nos lleva inmediatamente a suponer que la noción de conjunto es para los logicistas una noción estrictamente lógica, y de hecho así lo afirma el propio Russell:

> Volviendo ahora a la definición del número, está claro que el número es una forma de agrupar ciertas colecciones, justamente aquellas que tienen un número dado de elementos. Podemos suponer todas las parejas en un apartado, todos los tríos en otro, y así sucesivamente. Obtendríamos de esta manera varios haces de colecciones, compuesto cada uno de ellos por todas las colecciones que tuviesen ciertos números de términos. Cada haz sería una clase cuyos miembros serían colecciones, es decir, clases; sería, pues, una clase de clases. El haz compuesto por todos los pares, por ejemplo, sería una clase de clases: cada pareja sería una clase de dos elementos, y el haz total de las parejas sería una clase con un número infinito de miembros, cada uno de los cuales sería a su vez una clase con dos elementos.[46]

Con respecto a los otros sistemas numéricos, el logicismo no sigue el método tradicional de añadir dichos números al dominio de $\mathbb{N}$ sino que construye un nuevo domino en donde se establecen ciertas correlaciones, por lo que la construcción logicista de los racionales no supone un problema, pero si lo hace la construcción lógica de los reales. Carnap[47], en su conferencia, nos pide que supongamos la serie de los fracciones ordenadas según su magnitud, la tarea es entones definir (construir) a los números reales usando dicha serie. Por un lado tenemos que algunos números reales, los racionales, corresponden o se correlacionan de una forma obvia a las fracciones, mientras que por el otro lado tenemos que existen ciertos números como los irracionales que no cuentan, de manera obvia, con tal correlación. Sin embargo, gracias a los

[46] RUSSELL, Bertrand, "Introducción a la Filosofía Matemática" (1919) en RUSSELL, B., *Obras Completas. Tomo II: Ciencia y Filosofía (1897-1919),* p. 1274. Respecto al número 3 que definimos, el lógico inglés dirá: "El número 3 es algo que todos los tríos tienen en común y que los distingue de otras colecciones" (p. 1272).
[47] Cfr. CARNAP, Rudolf, *Ob. Cit*., p. 43.

resultados de Richard Dedekind en 1872[48], los irracionales quedan representados por *brechas* o *cortaduras* en la serie de las fracciones.

Ahora bien, una primera consecuencia que se puede extraer de lo visto hasta ahora, con respecto a la reducción conceptual, es que ellos, los logicistas, no postulan la existencia de los objetos matemáticos (ni los conceptos que los caracterizan) sino que los construyen, así pues, con el caso de los números reales, Carnap comenta lo siguiente:

> El logicista no establece la existencia de estructuras que tienen las propiedades de los números reales a partir de axiomas o postulados; en vez de eso, a través de definiciones explicitas, produce construcciones lógicas que tienen, en virtud de dichas definiciones, las propiedades usuales de los números reales[49]

Se puede decir que para los logicistas la definición no es un mecanismo de creación ontológica, y ello implica de manera inmediata que, por un lado, se evite la introducción de un nuevo indefinible[50] (los únicos indefinibles son los conceptos lógicos ya citados) y por otro lado, los componentes ontológicos últimos de la teoría son los conceptos lógicos primitivos[51], aunque como veremos más adelante, la aceptación de ciertos axiomas imposibilita tal reducción ontológica de la matemática a la lógica.

III

La segunda parte del proyecto logicista consiste, como señalamos anteriormente, en la derivación de los teoremas matemáticos a partir de los axiomas lógicos mediante deducción. Carnap no nombra en su conferencia ningún sistema axiomático para la lógica en concreto, pero insinúa que es suficiente con una simplificación del cálculo lógico expuesto en *Principia*, el cual constaría de:

(1) Cuatro (4) esquemas axiomáticos para el *cálculo proposicional*.

(2) Dos (2) esquemas axiomáticos para el *cálculo de Lógica de predicados*.

---

[48] Véase Reck, Erich, "Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/dedekind-foundations/>.

[49] CARNAP, Rudolf, *Ob. Cit.*, p. 43. (La Traducción es propia).

[50] Aceptar a la definición como un mecanismo ontológico de existencia, sería aceptar un nuevo indefinible.

[51] Cfr. Francisco Rodríguez Consuegra, "El Logicismo russelliano: Su significado filosófico", en *CRITICA-Revista Hispanoamericana de Filosofía*, Vol. XXII, número 67, Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM, México, Diciembre 1991, pág. 22

(3) Dos reglas de inferencia. La *regla de sustitución* y el *Modus Ponens*.[52]

Sin embargo, como los enunciados de la matemática se pueden traducir (vía definición) a enunciados lógicos, la segunda tarea del proyecto logicista se puede reinterpretar de la siguiente manera, tal como lo señala Carnap: "todo enunciado matemático demostrable (que sea un teorema), es traducible a otro que contenga símbolos lógicos primitivos y pueda ser probado dentro de la lógica"[53]. Pero esta parte del proyecto logicista viene acompañada de algunas dificultades. Por una parte tenemos que para probar ciertos teoremas de la *Aritmética*, el *Análisis* y la *Teoría de conjuntos*, los axiomas lógicos no son suficientes y se necesitan de otros axiomas (de naturaleza existencial), como lo son el *axioma de infinitud* (AI)[54] y el *axioma de elección* (AE)[55].

Dichos axiomas han sido criticados desde su aparición por los matemáticos finitistas[56], dado su carácter no constructivo y existencial. De hecho, la introducción de estos axiomas equivale a "el abandono del proyecto fregeano de presentar a esta ultima –la aritmética– como una prolongación de la lógica"[57].

Russell y Whitehead ofrecen un intento de solución a la dificultad que representa la introducción de AI y AE. La idea general de dicha solución es proponer que la matemática trate

---

[52] El cálculo comentado por Carnap se parece al presentado en GÖDEL, Kurt, "La suficiencia de los axiomas del calculo lógico de Primer orden" (1930) en GÖDEL, K. *Obras completas*, Jesús Mosterín (Ed.). Madrid, Alianza Editorial, 1989[2], quién además toma su sistema axiomático para la *Lógica de primer orden* de los *Principia*. Dicho cálculo es el siguiente (agregamos los paréntesis a los axiomas para facilitar la lectura):

Axiomas:

Ax.1: $(X \vee X) \rightarrow X$

Ax.2: $X \rightarrow (X \vee Y)$

Ax.3: $(X \vee Y) \rightarrow (Y \vee X)$

Ax.4: $(X \rightarrow Y) \rightarrow \big((Z \vee X) \rightarrow (Z \vee Y)\big)$

Ax.5: $\forall x\, (Px \rightarrow Py)$

Ax.6: $\forall x\, (X \vee Px) \rightarrow (X \vee \forall x\, Px)$

Reglas:

R.1: *Modus Ponens*: De α y $\alpha \rightarrow \beta$ se deduce β.

R.2: La *regla de sustitución* para variables proposicionales y predicativas.

[53] CARNAP, Rudolf, *Ob. Cit*., pág. 44 (La traducción es propia).

[54] El Axioma de infinitud tiene la siguiente formulación : $\exists x\, \Big(\emptyset \in x \wedge \forall z \big((z \in x) \rightarrow (z \cup \{z\} \in x)\big)\Big)$. Cf. DI PRISCO, Carlos, *Ob. Cit*., p. 26. También recomendamos revisar la entrada *axioma de infinitud* en MOSTERÍN, J. y TORRETTI, R., *Ob. Cit*., p. *50.*

[55] El axioma de elección tiene la siguiente formulación: Todo conjunto tiene una función selectora, $\forall x \exists f\, \big(f\ es\ una\ función, dom\,(f) = x\backslash\{\emptyset\} \wedge \forall y (y \in dom(f) \rightarrow f(y) \in y)\big)$. Cf. MOORE, G., *Zermelo's Axiom of choice*, Berlín, Springer-Verlag, 1982 Y JECH, T., *The axiom of choice*, Amsterdam, North-Holland, 1973.

[56] Como por ejemplos los constructivistas y los intuicionistas.

[57] KNEALE, W. y KNEALE, M., *Desarrollo de la lógica*, Madrid, Editorial Tecnos, 1972, p. 622.

sobre enunciados condicionales y no categóricos, por ello, si un enunciado P sobre la aritmética necesita del AE o del AI, entonces se transforma en un enunciado condicional (AE → P o AI → P), y este último podría entonces derivarse de los axiomas lógicos.

Pero el logicismo debe enfrentarse a otros problemas, entre ellos, los implicados por su mecanismo lógico para evitar el surgimiento de paradojas.

IV

Russell introduce la *teoría simple de tipos* en 1902 como una forma de erradicar las paradojas de la *Teoría de conjuntos*. La idea general de la *teoría simple de tipos*, es la división del lenguaje con el que predicamos de los entes lógico-matemáticos. Así, tenemos que considerando las propiedades que se aplican a un solo objeto, Russell logró una clasificación de las expresiones del siguiente modo:

Tipo 0: A este tipo pertenecen los nombres de los objetos[58] (denotados por símbolos constantes: $a_i, para\ i \in \mathbb{N}$)

Tipo 1: A este tipo pertenecen los predicados sobre individuos del tipo 0[59] (Donde simbolizamos de la siguiente manera: $F_i(a_j), para\ i, j \in \mathbb{N}$)

Tipo 2: A este tipo pertenecen las predicados sobre predicados de objetos del tipo 0[60] (Donde simbolizamos de la siguiente manera: $P_i(F_j), para\ i, j \in \mathbb{N}$)

Y así sucesivamente…

Dentro de esta jerarquía (sin final, esto es, potencialmente infinita), la regla básica para la creación de expresiones (o *fórmulas bien formadas*) es que cada predicado perteneciente a un tipo n solo puede ser aplicado a expresiones del tipo inmediatamente inferior (n-1)[61], por lo que expresiones de la forma $F_i(F_i)$ no resultan ni verdaderas ni falsas, sino que son carentes de sentidos por precisamente violar la regla. Por lo dicho hasta ahora se puede intuir que, en el seno

[58] En el plano semántico: Los objetos o individuos de la teoría.
[59] En el plano semántico: Las propiedades de los objetos o conjuntos de objetos.
[60] En el plano semántico: Las propiedades de las propiedades, o propiedades de segundo nivel o conjuntos potencias de los conjuntos del nivel anterior. Por ejemplo, el concepto $3(F)$ pertenece a este tipo.
[61] Cfr. RUSSELL, Bertrand, "La lógica matemática y su fundamento en la teoría de los tipos" (1908) en RUSSELL, B., *Lógica y conocimiento* (1901-19050), Comp. Robert Charles Marsh, Madrid, Taurus, 1966, p.105.

de la *teoría simple de tipos*, ningún predicado puede predicarse (o aplicarse) a sí mismo y, por ende, resulta imposible derivar paradojas como las de Russell, Cantor y Burali-Forti.

Pero para Russell, la *teoría simple de tipos* no resultaba suficiente para erradicar a las paradojas, pues el origen de las mismas tenía su razón de ser en lo que el autor llama las *definiciones impredicativa*. Siguiendo a Carnap tenemos que "una definición es impredicativa si define un concepto en términos de una totalidad a la cual pertenece el concepto"[62]. Es por ello que el filósofo inglés introduce el mecanismo de ramificación de los tipos, creando así la *Teoría ramificada de tipos* con la pretensión de vencer no solo a las paradojas conjuntistas sino también a las paradojas semánticas, esto es, erradicar la impredicatividad. La idea básica de la ramificación es la de dividir cada tipo n en un conjunto de órdenes, en donde al primer orden de n pertenecen todos aquellos predicados que no se definen en función a la totalidad de los predicados del tipo n, al segundo orden de n pertenecen todos aquellos predicados que se definen en función de todos los predicados del primer orden del tipo n, al tercer orden de n pertenecen todos aquellos predicados que se definen en función de todos los predicados del segundo orden del tipo n, y así sucesivamente.

Sin embargo, aunque la *teoría ramificada de tipos* solucionaba el problema de las *definiciones impredicativas* y, por lo tano, el de las paradojas semánticas, generaba problemas para la construcción de la matemática, en especial para la construcción de la *teoría de los números reales*, pues como afirma Carnap: "muchos teoremas fundamentales no solo no podían probarse, sino que ni siquiera podían escribirse"[63] [64].

Russell-Whitehead para solucionar este último problema introducen el tan famoso *Axioma de Reducibilidad* (AR), que tiene por objetivo el permitir que los diferentes órdenes de un tipo n se reduzcan al orden inferior del tipo n[65].

---

[62] CARNAP, Rudolf, *Ob. Cit*., p. 47 (La traducción es propia).
[63] *Ibíd*., p. 46 (La traducción es propia).
[64] El matemático de la escuela formalista, Paul Bernays, comenta que las *definiciones impredicativas* se usan, por ejemplo, en la *Teoría de los números reales*, para el teorema que afirma que un conjunto acotado de reales siempre tiene al menos un supremo, Cf. *BERNAYS*, P., *El platonismo en matemática*, Caracas, UCV-Ediciones de la Biblioteca, 1982, p. 19.
[65] Gregory Moore ofrece una sencilla definición del *Axioma de Reducibilidad* que dice así: "En la teoría ramificada de tipo, axioma que establece que toda proposición es equivalente a una de primer orden", esta definición se puede encontrar en el Glosario de MOORE, G., "A house divided against itself: The emergence of first-order lógica as the

AR es en realidad un axioma *ad hoc*, pues ni los propios autores de *Principia* se encontraban convencidos de su carácter de axioma y, mucho menos, de su carácter lógico. Se trataba más bien de una salida de emergencia 'peligrosa e improvisada', que de un verdadero pilar para la reconstrucción consistente y racional de la matemática.

Autores como Kurt Gödel[66] piensan que la pretensión de Russell y Whitehead de eliminar todas las *definiciones impredicativas* –y, por lo tanto, todas las proposiciones autorreferenciales–, es una posición drástica e innecesaria. Sin duda alguna es cierto que existen proposiciones que al referirse a sí mismas generan contradicciones, como es el caso de la *paradoja de Epiménides*, pero existen otras tantas proposiciones que se refieren a sí mismas sin generar contradicciones, como es el caso de la proposición: 'La presente oración se encuentra en español', pues ella resulta verdadera y no-contradictoria.

Siguiendo a Gödel tenemos que la *teoría ramificada de tipos* no solo elimina más de lo que debería eliminar, sino que también amenaza la definición logicista de número y va en contra de lo que comúnmente se entiende por *principio lógico*. Recordemos que Frege y Russell concebían a los números como conjuntos de conjuntos, por ejemplo, el número dos era considerado como el conjunto de todos los conjuntos de dos elementos. Recordemos, de igual forma, que principios lógicos como el de *tercero excluso* nos dicen que toda proposición es o bien verdadera o bien falsa. Pero la definición de número y principios como el *tercero excluso* resultan *impredicativos*, por lo que violan la regla de la jerarquía ramificada según la cual "lo que presupone la totalidad de una colección no debe formar parte de la colección"[67]. Una posible solución sería limitar la generalidad de los principios lógicos y de los sistemas numéricos a cada tipo lógico pertinente, pero esto va en contra de los ideales de Russell y Whitehead que afirmaban la universalidad de la lógica y por ende de los números naturales.

El *Axioma de reducibilidad* representa a la perfección el antiguo adagio 'en ocasiones el remedio resulta peor que la enfermedad'. Dicho axioma representa incluso la muerte prematura de la tesis central del logicismo, pues el ideal de reducir la matemática a la lógica se derrumba. Lo que se termina haciendo es reducir la matemática a la lógica + AR, pero AR equivale a la

---

basis for mathematics" en PHILLIPS, E. (Ed.), *Studies of History of Mathematics*, The Mathematical Association of America, 1987, p. 130. (La traducción es propia).

[66] Cfr. GÖDEL, Kurt, "La lógica matemática de Russell" (1944) en GÖDEL, Kurt, *Ob. Cit.*

[67] Cfr. RODRÍGUEZ, F., "Tipos lógicos, Lenguaje y Filosofía" En ORAYEN, R. y MORETTI, *Ob. Cit*., p.220.

existencia de clases[68] [69]. En lo que resulta entonces el proyecto logicista de *Principia* es en una reducción de la matemática en la lógica y la teoría de conjuntos, lo cual para Mosterín resulta una tesis trivial[70].

De esta manera el proyecto logicista de *Principi*a se veía amenazado por un dilema:

(α) Primer cuerno del dilema: Se opta solo por la *teoría simple de tipos* que no logra solucionar las *paradojas semánticas* y, por ende, no logra librarse de las *definiciones impredicativas* en su totalidad.

(β) Segundo cuerno del dilema: Se opta por la *teoría ramificada de tipos* + AR y, en consecuencia, la tesis logicista no sólo se trivializa sino que además se dificulta el tratamiento de la *Teoría de los números reales*[71].

V

El filósofo y matemático Frank Ramsey defendió, en 1929, que no existían razones para pensar que las *paradojas semánticas* afecten las matemáticas de manera integral y, por lo tanto, las *definiciones impredicativas* podían considerarse dentro del quehacer matemático[72]. Es por esta razón que Ramsey y Carnap conjeturaron que solo era necesaria la *teoría simple de tipos* para llevar a buen término la reducción propuesta por el logicismo, pero los resultados limitativos de Gödel de 1931 demuestran la inviabilidad de dicho proyecto.

Como es sabido, Gödel demostró en 1931[73] que para todo sistema formal similar al de *Principia Mathematica* (que sea recursivo y del cual se puedan derivar los axiomas de Peano como teoremas), se tiene que dicho sistema, bajo hipótesis de su consistencia, no es completo y, además, se demostró que si el sistema es consistente entonces no se puede derivar del sistema una fórmula que asegure la consistencia del mismo (no se puede llevar a cabo una prueba absoluta de consistencia como lo exigía David Hilbert en su *Teoría de la prueba*). El resultado

[68] Cfr. MOSTERÍN, Jesús, *Ob. Cit*., p. 159.
[69] Clases que ya habían sido desterradas en *Principia* cuando Russell y Whitehead aceptaron la tan famosa "teoría sin clases" que sustituía estas últimas por funciones proposicionales.
[70] Cfr. *Ibídem*.
[71] Cfr. CARNAP, Rudolf, *Ob. Cit*., p. 49.
[72] Cfr. *Ibídem*.
[73] Cfr. GÖDEL, Kurt, "Proposiciones formalmente indecidibles en *Principia Mathematica* y sistemas afines" (1931) en GÖDEL, Kurt, *Ob. Cit*.

metamatemático gödeliano es la última estocada contra el logicismo, y representa la imposibilidad de llevar a cabo la derivación de la matemática a partir de la lógica, tanto en el plano teoremático como en el conceptual, y así, y con esto finalizamos, nos lo hacen saber los Kneale:

> Cuando decimos que la aritmética y, con ella, todos los cálculos funcionales de orden superior, así como todas las versiones de la teoría de conjuntos, son esencialmente incompletos, estamos efectivamente admitiendo que esas teorías envuelven alguna noción, o más de una, de la que no cabe ofrecer una exhaustiva caracterización mediante el establecimiento de una serie de reglas de inferencia; y ésta parece constituir una buena razón para excluirlas del dominio de la lógica.[74]

[74] KNEALE, W. y KNEALE, M. *Ob. Cit.*, p. 673.