¿Dónde queda el álgebra en Crítica de la razón pura? El álgebra y su relación con las construcciones simbólicas en la interpretación de Lisa Shabel

María Carolina Álvarez
(Universidad Central de Venezuela)

UCV ESCUELA DE FILOSOFÍA

apuntes filosóficos

Vol. 28 No. 55

¿Dónde queda el álgebra en la Crítica de la razón pura? El álgebra y su relación con las construcciones simbólicas en la interpretación de Lisa Shabel.

Where is Algebra in the Critique of Pure Reason? Algebra and Symbolic Constructions in the Interpretation of Lisa Shabel.

María Carolina Álvarez
(Universidad Central de Venezuela)

Articulo recibido: 18 de octubre de 2019.

Arbitrado: 12 de noviembre de 2019.

Resumen: El propósito de este artículo es presentar la propuesta interpretativa de Lisa Shabel que relaciona el álgebra con las construcciones simbólicas. Así, brevemente se recorre el problema del status del algebra y como algunas de las interpretaciones dadas la relacionan con el cálculo numérico. Posteriormente, de la mano de Shabel y con la mirada puesta en la práctica matemática de Cristian Wolff, se identificarán las maneras de proceder algebraicamente en el siglo XVIII para después analizar las dos acepciones del término “magnitud”. Finalmente se relaciona el álgebra con una construcción en concordancia con los conceptos a priori (pura), ciertas reglas (esquemática) y que ostenta su referente (ostensiva). Tal tipo de construcción define lo que Kant entiende por construcción simbólica.

Palabras clave: Álgebra, Construcciones Simbólicas, Magnitud.

Abstract: The purpose of this article is to present Lisa Shabel's interpretive proposal that relates algebra to symbolic constructions. This briefly covers the problem of the status of algebra and how some of the interpretations given relate it to the numerical calculation. Subsequently, by the hand of Shabel and with an eye on the mathematical practice of Cristian Wolff, the ways of proceeding algebraically in the eighteenth century will be identified and then analyze the two meanings of the term “magnitude”. Finally, algebra is related to a construction in accordance with the a priori (pure) concepts, certain rules (schematic) and which it has its referent (ostensive). Such a type of construction defines what Kant understands by symbolic construction.

Keywords: Algebra, Symbolic Construction, Magnitude.

En el marco de la *Crítica de la razón pura*, Kant identifica explícitamente la geometría con la intuición pura *a priori* del espacio y las construcciones ostensivas, mientras que hace lo propio con la aritmética con la intuición pura *a priori* del tiempo que fundamenta la noción de sucesión. Bajo este esquema cabe preguntarse qué sucede con el álgebra. El papel del álgebra en la filosofía de la matemática kantiana es uno de los temas de difícil conciliación por parte de los intérpretes. En este sentido, Gordon Brittan expresa que las afirmaciones kantianas sobre el álgebra hacen que algunos intérpretes adjudiquen las construcciones simbólicas a la aritmética e identifiquen aritmética con el álgebra en este proceso, mientras que otros identifican la lógica con la matemática[1]. En este artículo presentamos la interpretación de Lisa Shabel, interpretación que relaciona el álgebra con las construcciones simbólicas definidas por Kant en A717-B745, con la mira puesta en la práctica matemática del siglo XVIII.

I.- ¿Álgebra o aritmética?

En su artículo "Kant on the 'Symbolic Construction' of the Mathematical Concepts"[2], Shabel afirma que la noción de construcción, el importante pivote en el que se sustenta la concepción kantiana de la matemática, incluye dos oscuros pasajes: los únicos en los Kant hace referencia al álgebra. En A 717/B 745 se lee:

> Las matemáticas no sólo construyen magnitudes (*quanta*), como en la geometría, sino también la mera cantidad (*quantitas*), como en el álgebra, donde se prescinde totalmente de la naturaleza del objeto que ha de ser pensado según el concepto de magnitud. Esta misma ciencia elige entonces cierta denominación de todas las construcciones de magnitudes en general (*números*), como adición, sustracción, extracción de raíces, etc., y, una vez que ha designado también el concepto universal de las magnitudes según las diversas relaciones de las mismas, representa en la intuición, de acuerdo con ciertas reglas universales, todas las operaciones producidas y modificadas mediante la magnitud. Cuando una magnitud tiene que ser dividida por otra, la ciencia matemática combina los símbolos de ambas según el signo indicador de la división, etc. Así, pues, logra por medio de una construcción simbólica, exactamente igual que lo hace la geometría por medio de una construcción ostensiva o geométrica (de los objetos mismos), lo que jamás podría conseguir el conocimiento discursivo por medio de simples conceptos.[3]

[1] Cfr. BRITTAN, Gordon, "Algebra and Intuition", *Kant's Philosophy of Mathematics* Carl J. Posy (Ed), Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1992, p. 315.

[2] SHABEL, Lisa, "Kant's on the 'Symbolic Construction' of Mathematical Concepts", *Studies in History and Philosophy of Science*, Vol. 29, Nº 4, 1998, pp. 589-621.

[3] KANT, Immanuel, *Crítica de la razón pura*, Madrid: Ediciones Alfaguara S.A., 1988, A 717/ B 745, p. 577.

Y en A 734/B 762:

> En consecuencia, sólo las matemáticas poseen demostraciones, debido a que su conocimiento no deriva de conceptos, sino de la construcción de los mismos, es decir, de la intuición que puede darse *a priori* en correspondencia con los conceptos. El mismo procedimiento del álgebra, con sus ecuaciones, a partir de las cuales, por reducción, produce la verdad juntamente con su prueba, aunque no es una construcción geométrica, es una construcción característica por la cual se presentan en la intuición los conceptos a través de signos, especialmente los que se refieren a relaciones de magnitud[4]

Shabel afirma que las interpretaciones que se hacen sobre estos textos fallan, ya que se realizan desde las concepciones recientes de la matemática y no tienen en cuenta la práctica matemática de la modernidad temprana. Es su objetivo presentar un acercamiento conceptual que permita elucidar las tesis kantianas de la construcción simbólica y, con ello, la concepción del álgebra, teniendo en cuenta esta perspectiva. Esto será realizado desde las concepciones del álgebra de los textos matemáticos de la decimoctava centuria[5]. Así ofrecerá una lectura sustentada en la discusión de Wolff sobre la aplicación del álgebra a problemas de geometría y aritmética, ilustrando con ello la noción kantiana de construcción simbólica de los conceptos algebraicos. Con esta lectura no pretende dibujar una estricta división entre las construcciones simbólicas y ostensivas (geométricas), más bien buscará afirmar que una construcción simbólica es, para Kant, una simbolización de una construcción ostensiva[6].

Entre los intérpretes a los que se refiere Shabel se encuentra C.D. Broad[7], afirmando que Kant no provee una teoría sobre las razones algebraicas y considera que el álgebra es simplemente una aritmética generalizada: así, mientras la aritmética es la que determina la cantidades numéricas, el álgebra trata sobre cantidades numéricas indeterminadas. De este presupuesto desprende que la construcción simbólica es la construcción de los símbolos de las variables numéricas, tales como ´x´. Shabel asigna una reconstrucción semejante a Hintikka y aunque Parsons[8] le contra argumenta por medio de la noción de intuición, ninguno da cuenta de

---

[4] *Ibíd.*, A 734/B762, pp. 587-588.
[5] Cfr., SHABEL, Lisa, "Kant's on the 'Symbolic… *cit.*, pp. 589-90.
[6] *Ibíd.*, pp. 590-591.
[7] Shabel se refiere a las tesis que Broad presenta en su artículo "Kant´s Theory of Mathematical an Philosophical Reasoning" del año 1941. Para este tema, ver: *Ibíd.*, p. 593 y ss.
[8] Aunque Shabel se refiere al artículo de Parsons "Kant's Philosophy of Arithmetic", en "The Transcendental Aesthetic" el autor cataloga a las reconstrucciones de Hintikka, Beth y Friedman de interpretaciones que ignoran muchos de los planteamientos de la discusión "fenomenológica" kantiana sobre la noción de construcción; entendiendo por "fenomenológicos" las tesis sobre la sensibilidad desarrolladas en la "Estética Trascendental". Los dos primeros reducen el papel de la intuición pura en la matemática a una parte de la lógica. Ver: PARSONS,

la construcción simbólica. En su opinión, ambas interpretaciones consideran las reglas de las razones algebraicas análogas a la reglas de cálculo numérico[9].

Una nueva lectura, opuesta a la de Broad, es la que ofrece Friedman[10] en su texto *Kant and the Exact Sciences*. En primer lugar, Friedman afirma que tanto la aritmética como el álgebra pueden ser incluidas bajo la construcción simbólica o característica y, aunque expresa que puede considerarse al álgebra una clase de aritmética –"la aritmética general de las magnitudes indeterminadas"–, se distingue de otros comentadores ya que rechaza que el álgebra sea una generalización de la aritmética. Para él, el hecho de que la aritmética verse sobre magnitudes determinadas –magnitudes racionales– y el álgebra sobre magnitudes indeterminadas –magnitudes irracionales o inconmensurables[11]– es signo de que la aritmética corresponde a la teoría de las magnitudes geométricas en los *Elementos* de Euclides (Libros VII-IX) y el álgebra a la teoría de las razones y proporciones de Euclides/ Eudoxio (Libro V)[12]. Ya que mediante la teoría de la proporción se nos hace posible medir magnitudes inconmensurables, entonces: "el álgebra nos permite llegar a definir reglas de aproximación para números (incluyendo fracciones), reglas de aproximación que pueden hacer acercarnos a nuestra meta."[13] Con estas reglas en la mente se puede, sea mediante la expansión decimal o una infinita serie de fracciones[14], dar una aproximación a alguna magnitud irracional[15]. Después de identificar el procedimiento de la iteración sucesiva con la teoría kantiana de construcción de conceptos,

---

Charles, "Arithmetic and the Categories", *Kant's Philosophy of Mathematics*, Carl J. Posy (Ed), Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1992, pp. 135-158.

[9] Para la exposición de las interpretaciones de Hintikka y Parsons ver: SHABEL, L., "Kant's on the 'Symbolic…, cit., pp. 594-595. De forma similar, Couturat considera que el álgebra, junto con el análisis, es parte de la aritmética y ésta juntamente con la geometría conforman aquello que Kant denomina "matemática pura". Ver: COUTURAT, Luis, *La filosofía de las matemáticas en Kant*, México: Universidad Autónoma de México, 1960, p. 38.

[10] Similares planeamientos se encuentran en: FRIEDMAN, Michael, "Kant on Concepts and Intuitions in the Mathematical Sciences", *Synthese* 84, 1990, pp. 213-257.

[11] Cfr. *Ibíd.*, p. 225.

[12] Para este tema, ver: SHABEL, Lisa, "Kant's on the 'Symbolic …, *cit.*, pp. 595-596.

[13] El pasaje de Friedman es citado por Shabel: "[algebra] allows us to find a definite rule of approximation by numbers (including fractions), a rule of approximations which can be made as accurate as one wishes". *Ibíd.*, p. 596.

[14] Afirma Friedman que el álgebra y la aritmética conciernen solo a la forma de la progresión sucesiva común a todo proceso de iteración. La iteración sucesiva es posible gracias a la intuición pura *a priori* del tiempo y es la necesaria condición de nuestro concepto de magnitud. La iteración sucesiva es justamente el esquema de magnitud. ver: FRIEDMAN, Michael, "Kant on Concepts…, *cit.*, pp. 233 y ss.

[15] Friedman expone que si una magnitud es conmensurable la aritmética determina el número entero o la fracción, si no es conmensurable, es el álgebra (teoría de las razones) que nos permite definir reglas de aproximación de números (incluyendo fracciones). *Ibíd.*, p. 227.

Friedman usará para su interpretación los roles históricos de la aritmética y el álgebra con el fin reconstruir la noción de construcción simbólica. Cita Shabel del texto de Friedman:

> Existen, en realidad, dos aspectos distinguibles aunque relacionados de la construcción simbólica. Por un lado, en la búsqueda de magnitudes de algo podemos emplear la progresión sucesiva subyacente a las series numéricas: bien por generar un número entero o fracción en un número finito de pasos, o bien por generando una infinita aproximación a un número irracional. Por otro lado, no obstante, la iteración sucesiva es empleada también en la simple manipulación de signos en las fórmulas algebraicas: tal 'operación de un cálculo' es también un procedimiento iterativo paso a paso.[16]

Sin embargo, Shabel es de la opinión de que la reconstrucción de Friedman considera, en el fondo, al álgebra como una clase de aritmética inmersa en el cálculo numérico[17].

Entonces, bajo las mejores interpretaciones de los oscuros pasajes que hacen mención del álgebra, se considera que Kant, al hacer la estricta distinción entre la construcción simbólica y ostensiva, distingue también el método del álgebra y de la aritmética del método de la geometría. Estas interpretaciones acercan el método del álgebra a los procedimientos del cálculo numérico, aproximación que bajo la óptica de Shabel es, aunque posible, insatisfactoria por dos razones. En primer lugar, los argumentos y el fundamento de la matemáticas en la intuición pura del tiempo hacen natural la interpretación de que aritmética y álgebra poseen el mismo método –construcciones no ostensivas–, sin embargo, los ejemplos de construcciones aritméticas que ofrece Kant, en B15 y A 240/B299, son ejemplos de construcciones ostensivas. En segundo lugar, entender la construcción simbólica como la construcción de los símbolos algebraicos es inconsistente con el papel asignado a la noción de construcción como conocimiento matemático y esto no explica el nuevo conocimiento que surge de la construcción de conceptos matemáticos en la intuición y, por ende, a los juicios matemáticos como sintéticos[18]. Después de lo cual afirma que un análisis de las concepciones del álgebra y de la aritmética del siglo XVIII servirá para ofrecer una lectura más acorde filosófica y textualmente.

[16] *Ibíd.*, p. 596.
[17] *Ibíd.*, p. 596.
[18] Para los argumentos de Shabel contra las interpretaciones tradicionales de la construcción simbólica, ver: *Ibíd.*, pp. 597-599.

II.- Una mirada a la práctica matemática del siglo XVIII. El álgebra y la aritmética para Cristian Wolff.

Durante los treinta años previos a la publicación de la *Crítica de la razón pura*, Kant tomo varios cursos de matemáticas y física basados en los textos de Christian Wolff[19] y ellos representan el estado de la matemática elemental bajo el cual escribe su *Crítica*. Afirma Shabel que: "Hay que puntualizar que para Wolff el álgebra no era considerada como ciencia sino más bien como un arte o método que prestaba ayuda a la solución de ciertos problemas geométricos y aritméticos"[20]. Según este autor, los problemas de la aritmética y de la geometría versan sobre números, magnitudes y unidades, mientras que los métodos algebraicos son empleados para la solución de problemas elementales matemáticos.

Wolff considera que la matemática es la ciencia de todo lo que puede ser medido, de esta manera, la aritmética es la ciencia de los números o del cálculo, y el número es "aquello que puede ser referido a la unidad"[21]. Los números son homogéneos de la misma clase –de la misma unidad–: 'dos esferas de plata' es homogéneo a 'tres esferas de plata' y heterogéneo a 'tres esferas de plomo'; en consecuencia, los números enteros son caracterizados como discretas partes idénticas de una unidad seleccionada arbitrariamente[22], entonces, los números pueden ser expresados también por segmentos, pueden ser construidos como segmentos (unidades) concadenados. Wolff definirá los números racionales como conmensurables por medio de la unidad y los irracionales como inconmensurables, en consecuencia, un segmento de línea es mensurable si puede ser expresado por medio de un número racional. De esta manera, los objetos de la aritmética –números conmensurables o inconmensurables– dependen del tradicional concepto geométrico de línea extensa. Por otro lado, la geometría plana es la ciencia de la magnitud extensa y provee las reglas para producir, medir y comparar –cuantitativa y cualitativamente– objetos construidos con regla y compás[23].

Para Wolff el 'arte analítico' o 'análisis' es el método general para resolver ciertas clases de problemas matemáticos y el análisis finito busca "desde algunas magnitudes finitas conocidas

---

[19] Shabel hace una lista de los textos de Wolff en: *Ibíd.*, p. 599.
[20] Cfr. *Ibíd.*, pp. 599-600.
[21] *Ibíd.*, p. 600.
[22] Ver: *Ibídem.*
[23] Ver: *Ibíd.*, pp. 600-601.

otras magnitudes finitas que son aún desconocidas"[24]. Dentro de esta clase de análisis Wolff menciona el álgebra. Al respecto, Shabel escribe:

> El álgebra, como mencionamos arriba, es una clase de análisis finito 'por medio de ecuaciones' que sirve de soporte para la solución de varios tipos de problemas aritméticos y geométricos. De esta manera, para Wolff, el álgebra es un método de razonamiento sobre los objetos de la aritmética y la geometría elementales, que incluye números (concebidos como segmentos de línea) y construcciones geométricas planas.[25]

Este planteamiento está de acuerdo con la aplicación del álgebra a la geometría por parte del programa cartesiano: expresar problemas geométricos bajo la forma de una ecuación y proveer construcciones geométricas arraigadas en esas ecuaciones[26]. En definitiva, esta relación entre aritmética, geometría y álgebra, en la cual el álgebra no es una generalización aritmética sino más bien un método general para la solución de particulares problemas aritméticos y geométricos, no es tenida en cuenta por los intérpretes que Shabel ha mencionado anteriormente. Gracias al análisis que hace Gisnée[27] del método cartesiano, Shabel afirma que "se usa este método para resolver y 'construir' problemas matemáticos, primero expresando todas y cada una de las magnitudes geométricamente, por segmentos de líneas rectas, y luego razonando sobre ellas algebraicamente"[28]. En consecuencia, el "álgebra es ejercida sobre problemas de magnitudes que han sido construidos geométricamente; y de manera correspondiente, las soluciones que nos aporta el álgebra también pueden ser en la forma de magnitudes construibles geométricamente"[29]. Wolff en su *Elementa* aplica el álgebra a tres problemas meta-matemáticos: cómo resolver problemas geométricos algebraicamente, cómo construir ecuaciones simples y cómo construir ecuaciones cuadráticas[30].

III.- El álgebra y la magnitud.

Después de este análisis de las tesis sobre la ciencia matemática de Wolff, Shabel se encuentra en condiciones de regresar a la posición kantiana sobre el álgebra. Este regreso se

---

[24] Wolff es citado por Shabel en: *Ibídem.*, p. 601.
[25] En el texto original se lee: "Algebra, as mentioned above, is a kind of finite analysis 'by means of equations' that is brought to bear on the solution of various types of arithmetic and geometric problems (Wolff, 1965, p. 34). Thus, for Wolff, algebra is a method of reasoning about the objects of elementary arithmetic and geometry, which include numbers (conceived as line segments) and plane geometric constructions" *Ibíd.*, p. 601.
[26] Sobre la referencia al programa cartesiano ver: *Ibíd.*, p. 601.
[27] Cfr. *Ibid.*, pp. 601 y ss.
[28] *Ibíd.*, p. 602.
[29] *Ibídem.*
[30] Cfr. *Ibíd.*, p. 602.

inicia con las distinciones entre los dos usos kantianos del término “magnitud”. Magnitud designa el objeto con un tamaño determinado pero también el tamaño de este objeto. En el primer sentido, una magnitud como objeto de un determinado tamaño refiere a objetos de forma cuantitativa y cualitativa o, en otras palabras, a objetos con tamaño y figura, es decir, a objetos geométricos. En el segundo sentido, solo se refiere a objetos de forma cuantitativa, es decir, objetos con tamaño pero sin figura. Así usado en el segundo sentido, el término “magnitud” está relacionado con el concepto puro de la cantidad o a la aplicación de la categoría de cantidad a una particular talla de objetos[31]. Kant expresa esta distinción en A 162/B203. Allí, en los “Axiomas de la intuición” escribe:

> En la medida en que esta conciencia de la diversidad homogénea dada en la intuición en general es la que hace posible la representación de un objeto, constituye el concepto de una magnitud (*quantum*). Así, pues, sólo podemos percibir un objeto como fenómeno gracias a esa misma unidad que sintetiza la diversidad de la intuición sensible dada y mediante la cual pensamos en el concepto de una *magnitud* la unidad de la composición de la diversidad homogénea.
>
> Es decir, todos los fenómenos son magnitudes, *magnitudes extensivas*, ya que, en cuanto intuiciones en el espacio y el tiempo, deben ser representadas mediante la misma síntesis que determina el espacio y el tiempo en general.[32]

Shabel afirmará que la magnitud entendida como *quanta* concierne a los axiomas de la geometría euclidiana, contrastando este sentido con la *quantitas* o la respuesta a la pregunta por “cuán grande sea la cosa”[33]. Al respecto escribe:

> Las apariencias son, en tanto magnitudes extensivas, ‘intuidas como agregados (conjunto de partes previamente dadas)’ (Kant, 1998, A 163/B 204). De esta manera, cuando se quiere determinar la magnitud (*quantitas*) de una magnitud (*quantum*), uno se pregunta cuántas de tales partes previamente dadas hacen el todo; la respuesta a tal cuestión es expresada numéricamente considerando cada una de las partes discretas como unidades homogéneas.[34]

La determinación entre magnitud (*quanta*) y magnitud (*quantitas*) queda sustentada sobre la partes dadas previamente que completan un particular objeto y que Kant designa con el término “magnitud en general” en A 242/B300, y esta no se puede determinar sino pensando en

[31] Cfr. *Ibíd.*, p. 609.
[32] KANT, Immanuel, *Crítica de la…. cit.*, A 162/B 203, pp. 200-201.
[33] Cfr. SHABEL, Lisa, “Kant’s on the ‘Symbolic …*cit*., p. 610.
[34] *Ibíd*., p. 610.

cuántas veces está contenida una unidad en la cosa[35], unidades que pueden ser medidas o contadas. A la luz de esta reconstrucción del concepto de magnitud y regresando al tema que la ocupaba en anteriores secciones –el álgebra–, Shabel afirmará:

> Ahora estoy preparada para entrar en el primer pasaje citado arriba en la primera sección. Kant expone: 'Las matemáticas no sólo construyen magnitudes (*quanta*), como en la geometría, sino también (*quantitatem*), como en el álgebra, donde se prescinde totalmente de la naturaleza del objeto que ha de ser pensado según este concepto de magnitud' (Kant, 1998, A717/B 745) Aquí, Kant reafirma el reclamo familiar de que los objetos de la geometría son construidos por el geómetra en la forma usual: estos objetos construidos (tales como líneas, triángulos y círculos) son ejemplos de 'magnitudes', esto es, objetos de determinado tamaño. Añade que el algebrista 'construye magnitudes' en el segundo sentido discutido arriba: el algebrista ignora los aspectos cualitativos del objeto, considerándolo sólo en concordancia con el concepto puro, o categoría, o magnitud (*quantitatem*). De esta manera, de acuerdo con Kant, el algebrista puede construir objetos matemáticos *qua* cantidad solamente, sin considerar forma o figura.[36]
>
> Si el geómetra construye magnitudes respondiendo a la pregunta ¿cuán grande es?, la construcción del algebrista responde a cuántas unidades homogéneas hacen el particular tamaño de objeto en abstracción de la construcción del objeto en sí mismo.[37]

IV.- El álgebra y las construcciones simbólicas.

Tras analizar el concepto de "magnitud" Shabel se pregunta si es posible la construcción algebraica. Para Wolff (y el programa cartesiano) las magnitudes –conocidas o desconocidas– pueden ser expresadas por segmentos de líneas, este procedimiento escoge las unidades y las letras seleccionadas designan las varias magnitudes del problema con las que se componen las expresiones algebraicas para las operaciones, estas últimas concuerdan con las reglas de la aritmética[38]. Para Wolff la simbolización de una magnitud es un paso heurístico hacia la solución del problema –el cálculo de la hipotenusa de un triángulo es el ejemplo presentado por Shabel[39]–, y esta nunca es parte de los datos del problema y tampoco es un intento de desnudar el problema en sus datos particulares[40], sino más bien específica todas la magnitudes del problema y las relaciones entre ellas. Entonces, "una vez que razones y proporciones son construidas entre las magnitudes conocidas y desconocidas de acuerdo con las condiciones dadas del problema, el

---

[35] Al respecto Kant indica: "No se puede explicar el concepto de magnitud en general sino diciendo acaso que es la determinación de una cosa, una determinación a través de la cual puede pensarse cuántas veces está contenida la unidad en esa cosa". Kant, Immanuel, *Crítica de la… cit.*, B 300, p. 263.
[36] SHABEL, Lisa, "Kant's on the 'Symbolic …*cit.*, p. 610.
[37] *Ibíd.*, p. 611.
[38] Cfr. *Ibíd.*, p. 612.
[39] Para la demostración wolfiana de este problema por medio del método algebraico, ver: *Ibíd.*, pp. 602 y ss.
[40] Cfr. *Ibíd.*, p. 608.

algebrista puede simbolizar cada relación escribiendo ecuaciones usando la notación seleccionada"[41]. Así cuando Kant afirma, en A 717/ B 745, que la ciencia del álgebra "representa en la intuición, de acuerdo con ciertas reglas universales, todas las operaciones producidas y modificadas mediante la magnitud"[42], se refiere a las construcciones simbólicas mediante las cuales las magnitudes, conocidas e ignoradas, son aritméticamente manipuladas. Al respecto Shabel escribe:

> … por ejemplo, cuando dos magnitudes son unidas por una línea de segmentos concatenados; la raíz es extraída por la construcción de la media proporcional; o una desconocida cantidad es construida como un cuarto proporcional. Cuando Kant habla de que el algebrista 'exhibe' este procedimiento o relación, esto significa que el algebrista escribe una expresión simbólica que está a la base de una particular construcción geométrica: tales como a+b, √a, a:b::c:x, o x=(bc)/a[43]

De todo lo anterior, Shabel concluye que el álgebra es el método aplicado a la solución de problemas matemáticos, simbolizando la construcción de conceptos aritméticos y geométricos en la forma de figuras. Esta construcción simbólica no es una clase de construcción –construcción bajo la forma de símbolos o caracteres–, sino la simbolización de las construcciones ostensivas y geométricas[44].

Kant distingue entre la construcción pura (esquemática) o la empírica. Las construcciones esquemáticas las realiza la imaginación en concordancia con el concepto *a priori* y las empíricas con alguna clase de material o instrumentos de trazado. Ambas construcciones son ostensivas, ya que en ambas se exhibe el concepto producido por medio de la intuición. Sin embargo, la diferencia entre la demostración matemática y las razones filosóficas se sustenta, para Kant, en una construcción que es pura, esquemática y ostensiva. Para Shabel[45] tal construcción es la

[41] *Ibíd.*, p. 612.
[42] KANT, I., *Crítica de la razón… cit.*, p. 577.
[43] SHABEL, Lisa, "Kant's on the 'Symbolic... *cit.*, p. 613.
[44] Cfr. *Ibíd.*, p. 615.
[45] Brittan hace una reconstrucción que, aunque similar a la de Shabel en cuanto a las objeciones hechas a Friedman, difiere en la catalogación del álgebra como ostensiva. Sobre las siguientes premisas kantianas:

1. Los objetos matemáticos son completamente determinables (Tesis de la decidibilidad)
2. Los conceptos no determinan completamente a los objetos matemáticos (Tesis de la determinación-bajo)
3. O los conceptos o la intuición determinan objetos (tesis de la estructura)
4. De ahí, la intuición es requerida para la completa determinación de los objetos matemáticos

Y de los siguientes argumentos subsidiarios:

i. Toda intuición es sensible o intelectual (espacial-temporal o no)
ii. Pero los humanos (humano dotado de habilidades perceptuales y capacidades conceptuales) no son capaces de intuiciones intelectuales
iii. De esto se sigue que todas la intuiciones son sensibles

simbólica pues la posibilidad de llevarla a cabo se debe a la imaginación en concordancia con los conceptos *a priori* (pura), ciertas reglas (esquemática) y además ostenta su referente (ostensiva)[46].

---

iv. Entonces, las intuiciones que se requieren para la completa determinación de los objetos matemáticos son sensibles

Brittan se pregunta qué tipo de intuición está detrás del álgebra. Según él la relación entre los resultados algebraicos y los diagramas geométricos no sirve como explicación, ya que demarca una fuerte separación entre las construcciones ostensivas y simbólicas. Sin embargo, entendiendo "construcción", "intuición" y "sintético", tal como eran comprendidos por Descartes y los griegos, esto es, como las operaciones desempeñadas de cierta manera sobre inespecíficos objetos en el camino de su representación simbólica, la combinación operacional del álgebra no puede ser ostensiva y, sin embargo, trae consigo las reglas que gobiernan esa operación. La aplicación de las reglas es controlada o guiada por la intuición de los símbolos (casos paradigmas o marcas en el papel) manipulados. En su opinión la intuitividad del álgebra es más evidente que en el caso de la aritmética o de la geometría, ya que sus objetos son construidos de forma variada y no sólo por medio de números o figuras planas. Las consecuencias de estas afirmaciones pueden resumirse en lo que sigue:

1. Si en la geometría y la aritmética se controla el resultado, en el álgebra, en la que se privilegia las operaciones combinatorias que dan lugar a los resultados simbólicos, el control es sobre el objeto: aquí es admisible la construcción en un camino o en otro.
2. La determinación de un objeto matemático puede ser entendida como la determinación de una estructura relacional: los objetos algebraicos permanecen relativamente indeterminados ya que se determinan en el camino de su construcción. La construcción hace uso de símbolos, señales sensibles, etc., y presupone la iteración de operaciones básicas y esto es en parte intuitivo.

Concluye que la objetiva realidad del álgebra no es la construcción ostensiva sino la experiencia verificable: los procedimientos son sistematizados con el tiempo (heurística) y son justificados en el "trabajo". Finalmente distingue el álgebra de la lógica, ya que la primera hace énfasis sobre lo operacional y la segunda sobre lo transformacional. Para esta reconstrucción ver: Brittan, Gordon, "Algebra and Intuition…*cit.*, pp. 315-339.

[46] SHABEL, L., "Kant´s on the 'Symbolic … *cit.*, pp. 616-617.