Sobre la ontología de la lógica modal. La reforma metafísica de Kripke. Breve manual de semántica

Jesús F. Baceta V.
(Universidad Central de Venezuela)

UCV ESCUELA DE FILOSOFÍA
apuntes filosóficos
Vol. 27 No. 53

Sobre la ontología de la lógica modal. La reforma metafísica de Kripke Breve manual de semántica

On the ontology of modal logic. The metaphysical reform of Kripke Brief semantics manual

Jesús F. Baceta V.
(Universidad Central de Venezuela)

Articulo Recibido: 6 de diciembre de 2018.

Arbitrado: 19 de enero de 2019.

Resumen: Se analizan los supuestos ontológicos de la lógica modal de Saul Kripke. Se dan respuestas a las preguntas: ¿Qué son las modalidades? ¿Cuál es el problema semántico que afrontó Kripke? ¿Cómo lo resolvió? ¿Cómo un cambio de lógica reforma los análisis ontológicos? Este trabajo también tiene el propósito de ser una introducción a la semántica de la lógica modal proposicional de Kripke.

Palabras clave: Lógica Modal, Ontología, Marcos De Kripke.

Abstract: The ontological assumptions of the modal logic of Saul Kripke are analyzed. Answers to the questions are given: What are the modalities? What is the semantic problem that Kripke faced? How was it resolved? How a substitution of logic reforms the ontological analyzes? This paper is also intended to be an introduction to the semantics of Kripke's propositional modal logic.

Keywords: Modal Logic, Ontology, Kripke Frames.

Se analizan aquí los supuestos ontológicos de la interpretación de la lógica modal de Kripke. Para ello explicamos, brevemente, en el contexto de una nota sobre el cuadro de oposición aristotélico que aparece en la *Conceptografía* de Frege, qué son las modalidades y algunos de sus tipos. Luego, se explica en qué consistió el problema semántico que abordó Kripke, cómo lo resolvió y cómo la lógica guía la elección de clases metafísicas.

¿QUÉ SON LAS MODALIDADES?

Las modalidades son marcas de nuestra subjetividad y con ellas se codifica parte de nuestras intenciones: lo que creemos, entendemos, dudamos, sabemos, esperamos, imaginamos, deseamos, prohibimos, anhelamos, tememos, necesitamos, sea en el pasado, en el ahora o en el futuro. Ellas codifican las expectativas que tenemos sobre la acción expresada por el verbo del llamado "contenido proposicional". Por ejemplo, la oración:

Deseo que pronto "el dictador esté preso"

…expresa, al menos, dos intenciones: mi deseo que, en un futuro muy próximo, pronto, el valor de verdad de la proposición "El dictador está preso" sea verdadero; que, en efecto, "esté preso". Trata sobre mi voluntad hacia el fin de un objeto.

Las modalidades son idóneas para representar gradaciones de la verdad, contrafácticos, hipótesis, hechos probables, procesos dinámicos, tránsitos temporales, en los llamados "contextos intensionales"[1]. Ellas codifican distintos estados en que se manifiestan las cosas. Por eso son fundamentales en las argumentaciones de la filosofía de la mente, la ética deóntica, la filosofía de la lógica, la epistemología, etc.

Las modalidades, desde un punto de vista lógico, son cierto tipo de operadores que trabajan muy similar a los cuantificadores; funciones de funciones de verdad que afectan la manera en que

[1] Se distingue entre la llamada *intencionalidad* de los estados mentales y la denominada *intensionalidad* de las proposiciones que describen a los primeros. La *intencionalidad* se predica de los estados mentales, mientras que solo de ciertas proposiciones predicamos que son *intensionales,* solo si éstas fallan en las pruebas semánticas extensionales, particularmente si no satisfacen la sustitución *salva veritate*. Los estados mentales no se someten a "pruebas extensionales"; las proposiciones sí. Así que las proposiciones intensionales pueden describir ciertos actos intencionales. Las primeras son verdaderas o falsas; los segundos, pueden ser afortunados o desafortunados. Trocar la palabra en el objeto es tanto como confundir la intensión con la intención. Las creencias no son intensionales; las proposiciones que las expresan sí que lo son. Así, toda proposición sobre nuestra intencionalidad es susceptible de un análisis intensional, pero no todo acto intencional puede ser expresado como una oración intensional. Ver, SEARLE, J.: *Intentionality, an Essay in the Philosophy of Mind*, Cambridge University Press 1983, p.24. Pujadas, L.: "Intensión, intención, intencionalidad", *Taula,* N° 10 (1988), p. 29-41.

evaluamos la verdad de una proposición. Las más conocidas son las modalidades de la verdad, la posibilidad (el diamante: $\Diamond$) y la necesidad (la caja: $\Box$). Los operadores $\Diamond$ y $\Box$ son operadores de un solo parámetro; similares a la negación, se aplican a una proposición para crear nuevas proposiciones. "$\Diamond p$" se lee: "Es posible p" y "$\Box p$" se lee "Es necesario p". La gramática de la lógica modal proposicional, por lo general, es la usual de la lógica proposicional más las cláusulas modales:

Definición 1: *Gramática* de las fórmulas φ de la lógica modal (se supone el alfabeto de la lógica proposicional más $\Diamond$ y $\Box$):

(Lenguaje modal) $\varphi ::= p_i \mid \bot \mid {\sim}\varphi \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \rightarrow \varphi) \mid (\varphi \leftrightarrow \varphi) \mid \Diamond\varphi \mid \Box\varphi$

De acuerdo a la gramática de la lógica modal, son fórmulas:

$\Diamond p, \Box\neg p, \Box(p \rightarrow q), \Box(p \rightarrow \Diamond(q \vee {\sim}q))$

Se introduce una constante para la falsedad, $\bot$, porque se quiere ilustrar, posteriormente, un detalle muy específico de la ontología de los modelos de Kripke, a saber, lo que le debe a lo mundano los modelos de Kripke. Por definición, $\top \leftrightarrow {\sim}\bot$, $\top$ es la constante para la verdad.

En lógica temporal $\Box$ se entiende como "siempre va a ser el caso" y $\Diamond$ como "a veces va a ser el caso". En lógica deóntica $\Box$ se lee "es moralmente obligatorio…" y $\Diamond$ como "es moralmente permitido…". En lógica epistémica $\Box$ codifica "se sabe que…" y $\Diamond$ un tipo de rumor. Entre otras, se distinguen, así, varios tipos de modalidades:

Aléticas o de la verdad: Necesidad y posibilidad

Deónticas: Prohibido, permitido y obligatorio

Temporales: Siempre, a veces, presente, pasado y futuro

Epistémicas: saber, conocer, ignorancia

Doxásticas: Creer, suponer

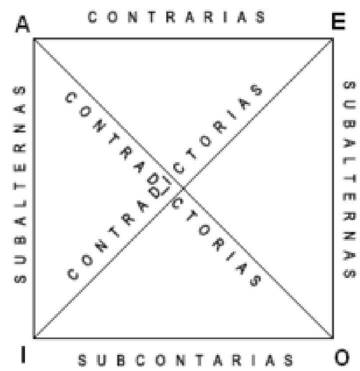
Dinámicas: Transiciones entre estados de la ejecución de un programa

Físicas: Necesidad física y posibilidad física

Borrosas o fuzzy: casi…, próximo…, probable…, verdadero en el rango…

Podríamos agregar “temer” y “confiar”, o cualquier par de operadores que se opongan por medio de otra oposición. Si temo, necesariamente no confío. Si no confío, puedo no temer. Se puede hacer mediar la oposición entre “temer” y “confiar” mediante la oposición entre “necesario” y “posible”. Para explicar esto con más detalle, codifiquemos, en primer orden, el cuadro de oposición aristotélico con algo de ingenio:

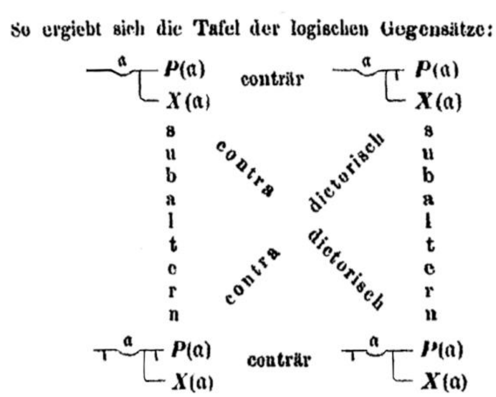
$\forall x(Px \to Qx)$ $\forall x(Px \to \sim Qx)$



$\exists x\sim (Px\to \sim Qx)$ $\exists x\sim (Px\to Qx)$

Para las proposiciones A y O, el operador $\forall x$ se opone a $\exists x$ por medio de la contradicción entre $(Px\to Qx)$ y $\sim(Px\to Qx)$ que, por supuesto, es otra oposición. Para las proposiciones E e I, se oponen $\forall x$ y $\exists x$ por medio de la contradicción entre $(Px \to \sim Qx)$ y $\sim (Px \to \sim Qx)$. Son oposiciones vía contradicciones. Esto en cuanto a las contradictorias. ¿Qué ocurre con las contrarias y subcontrarias?

Frege deja constancia de lo escurridizas que son las contrarias y subcontrarias. Él pareciera cometer un error en el cuadro de oposición aristotélico que apareció en su *Conceptografía* (p. 24), sin ningún comentario adicional por parte de Frege, el cual se reproduce a continuación:

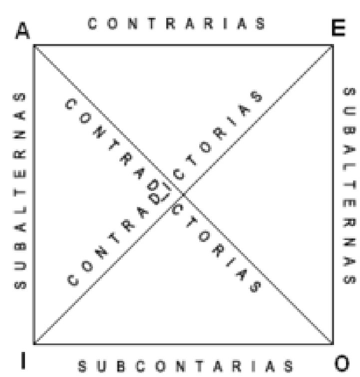


Como se puede observar, llama “contraria” (*conträr*) a las relaciones entre I y O que, clásicamente, se llama “subcontraria”. En lógica aristotélica, dos proposiciones *subcontrarias* pueden ser ambas verdaderas, pero no pueden ser ambas falsas y las *contrarias* pueden ser ambas falsas, pero no pueden ser ambas verdaderas. Ahora resulta que la contrariedad que afirma Frege entre I y O en efecto está ahí: $\exists x{\sim}(Px \rightarrow {\sim}Qx)$ y $\exists x{\sim}(Px \rightarrow Qx)$ pero pueden ser ambas falsas (el universo vacío es el caso más simple) y no pueden ser ambas verdaderas, como es fácil comprobar, pero a un costo: se supone la existencia de al menos un individuo para que alguna sea verdadera. Algo similar pasa con A y E que no necesitan presuposición existencial; ellas satisfacen los criterios de las clásicas “subcontrarias”. Hay una diferencia entre subcontraria y contraria que radica, más allá de como las denominemos, en la presuposición existencial y Frege parece aceptarla en una nota a pie de página por el énfasis que pone en el adverbio, dice previamente al cuadro: “La palabra “algunos” ha de entenderse *siempre* (*immer*) así: que incluye el caso “un”. Más explícitamente, se diría: “algunos o al menos uno” ” (p.24, nota al pie).

Dado lo anterior, uno estaría tentado a llamar “subcontraria” a lo que clásicamente se llamó “contraria” y viceversa, o simplemente llamar a ambas “contrarias”, como hizo Frege, pues, al fin y al cabo, los cuantificadores son oposiciones mediadas por oposiciones, por modos de ser o no ser el caso.

Esta grata característica que subyace a la cuantificación de Frege, los cuantificadores como operadores opuestos por oposiciones, se preserva para los operadores modales.

$\Box(P \rightarrow Q)$ $\Box\,(P \rightarrow {\sim}\,Q)$



$\Diamond{\sim}\,(P \rightarrow {\sim}Q)$ $\Diamond{\sim}\,(P \rightarrow Q)$

No todo es el caso del mismo modo. Existen diferentes modos en que se presenta la verdad y la falsedad y ellos dependen de las oposiciones. También, por lo tanto, hay modos de modos y modos que son necesarios. De hecho, cuando las situaciones son inevitables decimos “ni modo”. Montague[2] observó que los operadores modales $\Box$ y $\Diamond$ pueden ser interpretados como el cuantificador universal y existencial, respectivamente[3]. Ellos son interdefinibles, tal como lo es la cuantificación existencial y la universal. El paralelismo es evidente:

$\forall \equiv \sim\exists\sim$	$\Box \equiv \sim\Diamond\sim$
$\sim\forall \equiv \exists\sim$	$\sim\Box \equiv \Diamond\sim$
$\forall\sim \equiv \sim\exists$	$\Box\sim \equiv \sim\Diamond$
$\sim\forall\sim \equiv \exists$	$\sim\Box\sim \equiv \Diamond$

Así, por ejemplo, si el contenido proposicional se declara imposible ($\sim\Diamond$), es necesariamente falso ($\Box\sim$) y, si es necesario ($\Box$), es imposible que sea falso ($\sim\Diamond\sim$).

Los problemas de una semántica para la lógica modal

En la lógica actual, la gramática de cada lenguaje permite representar las *formas argumentativas* mediante *fórmulas*. Tal codificación se interpreta y permite definir las nociones de “modelo” y “verdad de una fórmula en un modelo”, de tal manera que cada instancia de una *forma argumentativa válida* es *una fórmula verdadera en todos los modelos* o *espacio lógico*, como lo llamo Wittgenstein[4]. Así, la amplia gama de casos argumentativos se reemplaza por el conjunto de modelos, que teóricamente pueden resultar más manejables y, quizás, más cómodos en la práctica. Sobre esto trata la teoría de modelos. Los modelos más usados, con fines didácticos, para la evaluación de fórmulas en lógica proposicional son las tablas de verdad y los árboles semánticos.

Al tratar de establecer los modelos y la verdad de una fórmula, en un modelo, para la lógica modal surge un problema: Los operadores modales no son funciones de verdad. Para mostrar

[2] MONTAGUE, R., “Logical necessity, physical necessity, ethics and quantifiers”, *Inquiry* 4, (1960). pp. 259-269.
[3] Una forma de hacer explícita tal interpretación es mediante lo que se conoce como “Traducción estándar”. Más adelante se definirá y se darán ejemplos. Consiste en una traducción de las fórmulas modales en fórmulas de la lógica de primer orden, sin pérdida de contenido semántico.
[4] WITTGENSTEIN, *Tractatus logico-philosophicus*, Austria, 1921. Ver §1.13, §2.11, §3.4 §4.125, ver también §3.02, §3.24, §4.1212,

esto, simplemente suponga que se quiere determinar los valores de verdad de $\Box p$ a partir de los valores de verdad de p, como si se tratase de una tabla de verdad:

p	$\Box p$
V	?
F	F

nota, de inmediato, que el valor de verdad de la proposición *p* no determinar el valor de $\Box p$, de donde $\Box$ no es una función de verdad. Hay un falló en una prueba extensional[5]. ¿Cómo se recupera la composición[6] para los lenguajes modales? ¿Cómo se logra que el valor de verdad, la referencia, de la proposición modal sea una función del valor de vedad de sus componentes? Quine criticó a los contextos modales por no preservar la referencia, ya que no satisfacen la prueba extensional de la sustitución *salva veritate* y, de tal forma, no preservan la referencia objetiva. Da, entre otros ejemplos, el siguiente: "Necesariamente 9 es mayor que 7", lo cual es verdadero. Como 9 era extensionalmente el número de planetas del sistema solar cuando Quine escribió el ejemplo[7], la sustitución de uno por otro atribuye una necesidad a una proposición contingente: "Necesariamente el número de planetas del sistema solar es mayor que 7" lo cual es paradójico, falso, si se interpreta "necesario" como "analítico" y esto, además, es independiente de si el número de planetas es 8 o 9. Aquí la sustitución del nombre de un número, el numeral, por una descripción convierte un contexto referencial y transparente (pleonasmo) en uno opaco e intensional (pleonasmo), cuando se supone que ambas refieren al número 9. Falla la prueba extensional. Además, según prueba Quine para un sistema en el que interpreta $\Box$ como "es analítico que" o "es lógicamente necesario que", las modalidades colapsan vía reiteración de las mismas y esto muestra su indispensabilidad[8]. ¿Cómo formular, entonces, una semántica referencial para la lógica modal, si sus operadores son intensionales? ¿Cómo recuperar la

[5] Se considera a un lenguaje *extensional*, si ninguna de sus proposiciones cambia de valor de verdad cuando una expresión de la misma es sustituida por otra que tenga la misma extensión, esto es, si satisface las sustituciones *salva veritate*; caso contrario, es *intensional*

[6] Prefiero el término "composición", que hace referencia a las funciones compuestas de las matemáticas, al término "composicionabilidad", un invento de filósofos y malos traductores ajenos al mundo simbólico. Así uso "principio de composición" para la *composición de funciones* de verdad, referencia y sentido, y no uso el incorrecto y oscuro "composicionabilidad" que parece referir al carácter esencial de ser compuesto.

[7] Lo cual muestra lo que debe la referencia al contexto científico y social; punto a favor de Kripke. Plutón ahora es considerado un planetoide por la comunidad de astrofísicos.

[8] QUINE, W. V. O.: "Referencia y modalidad" en *Desde un punto de vista lógico.* Ariel, 1962. (1° ed., 1953).

composición? ¿Cómo evitar el colapso? ¿Se precisan, entonces, *contextos intensionales*, para la interpretación de las fórmulas en las que aparecen las modalidades que dependen de la naturaleza deóntica, temporal, situacional, epistémica, probabilísticas, etc., de los estados de cosas?

El problema anterior se vinculó con un problema técnico quizá más complejo. Antes de la semántica de Kripke se desarrolló considerablemente la sintaxis de la lógica modal por parte de Lewis y sus discípulos. A los axiomas de la lógica clásica se agregaba un subconjunto de los siguientes 4 axiomas:

(**K**) $\Box(A \Box B) \Box (\Box A \Box \Box B)$

(Ax_1) $\Box A \Box A$

(Ax_2) $A \Box \Box\Diamond A$

(Ax_3) $\Box A \Box \Box\Box A$

Tales subconjuntos caracterizan 4 sistemas axiomáticos, T, B, S4 y S5 para la lógica modal. Todos estos y la gran mayoría de los sistemas modales aceptan **K**, pero difieren en el resto de los axiomas que aceptan como premisas:

T: (A_1)

B (A_1), (A_2)

S4: (A_1), (A_3)

S5: (A_1), (A_2), (A_3)

Al sistema que tiene solo tiene a **K** como axioma se le llamó, posteriormente, **K** en honor al trabajo semántico de Kripke.

Todos estos sistemas, como la gran mayoría de los sistemas modales, incluyen la regla de necesidad y la de modus ponens en la sintaxis:

MP $\dfrac{A \to B,\ A}{B}$

N $\dfrac{\Box A}{A}$

Diseñar una teoría de modelos para la lógica modal exigía, por lo tanto, completar varias tareas. Habría que diseñar una semántica para cada sistema. Ya Carnap había proporcionado una semántica para S5 basado en la noción de "estados de cosas" que, sin embargo, no era aplicable a otros sistemas. El problema, entonces, era ¿cómo diseñar un tipo general de teoría de modelos que, al variar las condiciones, podría producir las semánticas específicas para cada sistema? Este último fue el camino que afrontó Kripke, quien crea una teoría general de modelos, tipo Tarski, extensional y referencial, para un conjunto de sistemas modales de los cuales mostró, adicionalmente, que eran correctos y completos. El célebre artículo se llama "A Completeness Theorem in Modal Logic", del año 1959, y apareció en el volumen 24 del prestigioso *Journal of Symbolic Logic*. Kripke tenía, en ese entonces, tan solo 19 años en el tránsito por este mundo.

La solución de Kipke

Kripke prestó atención al contexto y lo amplió a lo que hoy llamamos "marcos de referencia de Kripke". Ellos pueden ser entendidos como una ampliación del principio de contexto de Frege. Según Frege "en el contexto de una oración las palabras significan algo"[9] o, dicho de otra manera, el contexto mínimo de evaluación de la verdad es la proposición. Para Kripke el contexto para la interpretación de la lógica modal es cierto tipo de estructura relacional.

¿Qué es una estructura relacional?

En términos generales, una *estructura relacional* ***E*** es una lista ordenada de elementos $\langle W, R\rangle$ cuyo primer elemento es un conjunto no-vacío de elementos W y los restantes elementos son relaciones sobre W. Se asume que una estructura relacional contiene, al menos, una relación. El análisis de redes, los grafos, los sistemas de transición, los autómatas, y los marcos de Kripke son todos estructuras relacionales.

Las estructuras relacionales tienen el atractivo particular de que pueden ser representadas por gráficos simples: grafos, diagramas de Hasse, árboles, etc.

Definición 2: Un *marco de Kripke* ***F*** *(frame)* es una lista ordenada de dos elementos $\langle W, R\rangle$ donde:

a) W es un conjunto de mundos

[9] FREGE, G.; *Fundamentos de la aritmética*, Sección 60, 1884.

b) $R \subseteq W \times W$ es la relación de accesibilidad entre mundos.

Cuando wRw_1, se dice que w accede a w_1, w_1 es accesible desde w o w_1 es el sucesor de w. A R se le conoce con el nombre de "relación de accesibilidad".

Los marcos de Kripke son importantes estructuras relacionales porque codifican el espacio lógico y son claves para representar la ontología y la noción de "validez". Los marcos son como los "cuadros matemáticos" de la ontología; ellos caracterizan, mediante la relación de accesibilidad, el espacio lógico de las modalidades y en ellos se distribuye toda la ontología modal. Ellos son como las posibles combinaciones de las tablas de verdad en el espacio lógico proposicional. Por ejemplo, se puede considerar al tiempo como una colección de puntos ordenados por un orden parcial estricto o suponer un análisis del conocimiento que requiera estados epistémicos vinculados por una relación de equivalencia. De hecho, Chalmers, en *La mente consciente*, codifica el espacio lógico para su filosofía de la mente en un marco de Kripke[10]. Los marcos, en suma, permiten que se codifiquen nuestras suposiciones ontológicas fundamentales de una forma matemáticamente rigurosa, agotando todas las posibilidades de la distribución de la ontología.

Dos elementos destacan en la definición del marco: el conjunto W y la relación R. Los elementos de W son llamados de muy distintas maneras: puntos, estados, nudos, mundos, tiempos, instantes, situaciones, etc. En fin, los llamados "mundos posibles". ¿Cuál es el estatus ontológico de los mundos posibles? ¿Son reales o imaginarios? Forbes[11] distingue, al menos, tres posturas al respecto. La primera sostiene un *realismo absoluto*: los mundos posibles existen y son entidades *sui generis*. Lewis es uno de sus defensores[12]. La segunda sostiene un tipo de conceptualismo llamado *realismo reductivo* según el cual existen mundos posibles, pero pueden reducirse a entidades más inofensivas (por ejemplo, conceptuales o lingüísticas). La tercera sostiene un pleno *anti-realismo*: los mundos posibles no existen, de tal modo las proposiciones posibles sobre los mundos son falsas o sin sentido. La primera y la tercera son posiciones extremas, mientras que ciertas variantes de la segunda son las más comunes. Por ejemplo, Kripke[13] niega la "visión telescópica" de los mundos de Lewis y concibe los mundos posibles

[10] CHALMERS, D., *La Mente Consciente. En busca de una teoría fundamental.* Barcelona: Gedisa, 1999.
[11] FORBES, G., *The Metaphysics of Modality.* Oxford: Clarendon Press, 1985, p. 74
[12] LEWIS, D., *Counterfactuals.* Cambridge, MA: Harvard University Press, 1973, p. 84
[13] KRIPKE, S. A. *Naming and Necessity*. Oxford: Basil Blackwell, 1972, p. 15

como *estados o historias posibles del mundo real*, esto es, considera a los mundos posibles como contrafácticos. "Es posible que, si abro la gaveta, encuentre un lápiz" es lo mismo que decir "si abriera la gaveta, encontraría un lápiz". Ha de notarse que la verificación de la verdad del contrafáctico depende de la verificación del contenido proposicional que se expresa en la oración: "Si abro la gaveta, hay un lápiz" que habla del mundo real. Kripke no siempre fue de esta opinión. En los orígenes[14], concibió a los mundos como entidades metalingüísticas, es decir, como *funciones de interpretación* del lenguaje objeto. Carnap[15] identificó los mundos con ciertas entidades del lenguaje objeto, sus denominadas "descripciones de estado". Hintikka las generalizó[16] y las denominó "descripciones de estado extendidas", cierto tipo de conjuntos máximamente consistentes. Pareciera, por lo tanto, que la semántica de los mundos posibles da para todos los gustos ontológicos, no obliga a tomar una posición metafísica particular.

El segundo elemento es la relación *R*, llamada "accesibilidad"; permite controlar el acceso a los mundos. Clásicamente no se supuso, con Leibniz y Carnap, restricciones a los accesos de los mundos posibles o de los estados de cosas. Para ellos:

□A es verdadera en el mundo real si, y sólo si, A es verdadera en *todo* mundo posible.

◊A es verdadera en el mundo real si, y solo si, A es verdadera en *algún* mundo posible.

Kripke condicionó el acceso que tienen los mundos a otros mundos. Se puede notar, por ejemplo, que se puede acceder al pasado por medio de los registros históricos, fósiles, arte, etc. y que no todo el tiempo nos es dado acceder al futuro, con la excepción de las buenas predicciones de los físicos. Similarmente, cuando no se conoce un código, no se tiene acceso a ese mundo. Y, si se es esquizofrénico, pareciera que no se tiene acceso ni al propio mundo interno. No se sabe cómo resolver el problema de las otras mentes, no se sabe cómo acceder a la fenomenología de otro, más allá de la simpatía. Así que no todo mundo accede a otro mundo. La relación de accesibilidad establece cierto tipo de "posibilidad relativa" y la reiteración de las modalidades de acuerdo al tipo de acceso. Supongamos que w es el mundo real, entonces wRw^1 representa las posibilidades reales para algún w^1; wRw^1 y w^1Rw^2 codifica las posibilidades posiblemente reales para algún w^1 y w^2; wRw^1, w^1Rw^2 y w^2Rw^3, las posibles posibilidades posiblemente reales para…

[14] KRIPKE, S., "A completeness theorem in modal logic". *Journal of Symbolic Logic*, 24/1, 1959, pp. 1–14.
[15] CARNAP, R., *Meaning and Necessity*. Chicago: University of Chicago Press, 1947, p. 9
[16] HINTIKKA, J. "Modality and quantification", *Theoria* 27. Reprinted in J. Hintikka. *Models for Modalities*, Dordrecht, Reidel. 1961. pp. 57–70

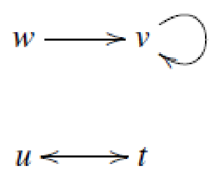
De tal manera, Kripke proporciona una definición de necesidad y posibilidad más flexible que la de Carnap y Leibniz al agregar la relación de accesibilidad:

□A es verdadera en un mundo dado $w \in W$ si, y sólo si, A es verdadera en *todo* w^* tal que wRw^*.

◊A es verdadera en un mundo dado $w \in W$ si, y sólo si, A es verdadera en *algún* w^* tal que wRw^*.

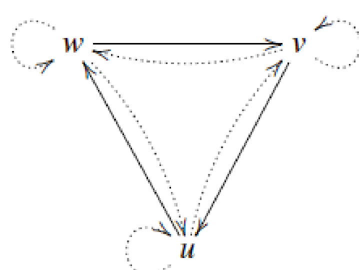
Una proposición *p* es necesaria en *w*, si es verdadera en todo mundo accesible desde *w* y es posible, si es verdadera en algún mundo al que se accede desde *w*.

Los marcos se pueden representar por grafos. Por ejemplo:



Grafo 1

En el grafo 1 se representa un conjunto de mundos posibles $\{w, v, t, u\}$ y la relación de accesibilidad $R = \{(w, v), (v, v), (u, t), (t, u)\}$. En esta configuración de la accesibilidad, el mundo *w* accede únicamente a *v*, *v* es el único mundo accesible al propio *v* y los mundos *u* y *t* se acceden mutuamente. La relación, evidentemente, no es reflexiva, ni simétrica.



Grafo 2

El grafo 2 representa otro marco. En él *R* es reflexiva, simétrica y transitiva.

Una vez caracterizado el espacio lógico de la lógica modal, se definen los modelos de la siguiente forma:

Definición 3: Un *modelo de Kripke **M** para la lógica modal* es una lista ordenada de tres elementos $\langle W, R, V\rangle$ donde:

$\langle W, R\rangle$ es un marco de Kripke (el marco subyace a ***M***).

V es una función que asigna a cada letra proposicional p_i un subconjunto $V(p_i)$ de W.

Los modelos de Kripke (no los marcos) dependen de la elección de las variables proposicionales.

Informalmente, $V(p_i)$ es el conjunto de mundos en el modelo donde p_i es verdadera. Un modelo de Kripke es un marco relacional, una distribución de la ontología, con una relación binaria, la accesibilidad, más una clase de funciones dadas por V (como toda función es una relación, se sigue cumpliendo con la definición de marco relacional). De las definiciones se sigue que:

$\boldsymbol{M} = \langle W, R, V(p_1), V(p_2), V(p_3), \ldots\rangle$

Las valuaciones llenan, entonces, los marcos con información contingente. “Hay clases el viernes”,” Es legal protestar”, “Néstor toma”, “Juan ama a María”, ”5+7=12”, “Leopoldo fuma”, etc. Tal información, sin duda, es importante y ciertamente se necesita para poder trabajar con ella. Sin embargo, las proposiciones solo merecen la descripción lógica, si son invariantes a los cambios de información contingente. Hay, entonces, una distinción fundamental entre la información ontológica de los marcos y la información, más mundana, dada por los modelos. Mientras la noción de verdad en los modelos de Kripke adquiere un carácter local, ya que cada fórmula se evalúa en su mundo, las fórmulas válidas tendrán un carácter universal en la ontología, en los marcos de Kripke. Veamos:

Definición 4: Sea $\boldsymbol{M} = \langle W, R, V\rangle$ un modelo de Kripke y w un mundo posible en W y p_I un conjunto de variables proposicionales atómica. El *valor de verdad de las fórmulas modales* se define inductivamente en relación con ***M*** y w, de la manera que se indica a continuación.

$\boldsymbol{M}, w \vDash p_i$ syss $w \in V(p_i)$

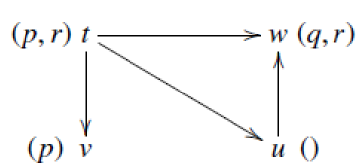
$\boldsymbol{M}, w \nvDash \bot$

$\boldsymbol{M}, w \models \sim\varphi$	syss	$\boldsymbol{M}, w \not\models \varphi$
$\boldsymbol{M}, w \models \varphi \wedge \psi$	syss	$\boldsymbol{M}, w \models \varphi$ y $\boldsymbol{M}, w \models \psi$
$\boldsymbol{M}, w \models \varphi \vee \psi$	syss	$\boldsymbol{M}, w \models \varphi$ o $\boldsymbol{M}, w \models \psi$
$\boldsymbol{M}, w \models \varphi \rightarrow \psi$	syss	$\boldsymbol{M}, w \models \varphi$ implica a $\boldsymbol{M}, w \models \psi$
$\boldsymbol{M}, w \models \varphi \leftrightarrow \psi$	syss	$\boldsymbol{M}, w \models \varphi$ si, y sólo si $\boldsymbol{M}, w \models \psi$
$\boldsymbol{M}, w \models \Diamond\varphi$	syss	para algún $w^* \in W$ tal que Rww^*, $\boldsymbol{M}, w^* \models \varphi$
$\boldsymbol{M}, w \models \Box\varphi$	syss	para todo $w^* \in W$ tal que Rww^*, $\boldsymbol{M}, w^* \models \varphi$

En cada mundo evaluamos las fórmulas dentro de los modelos, mientras que $\Diamond$ y $\Box$ recorren los mundos verificado si alguno o todos, de acuerdo al caso, satisfacen φ, según el tipo de acceso. De manera decisiva, solo los mundos accesibles desde el mundo real pueden ser recorridos. ¡Nada más extensional! Se recorre el marco, toda la ontología.

Por definición, $\bot$ es falso en todo mundo posible, por lo tanto $\top$ es verdadera en cualquier mundo.

Los modelos de Kripke también pueden representarse, como todo marco, por grafos. Ahora, para mayor facilidad, se escribe el conjunto de las proposiciones verdaderas junto al mundo en los gráficos:



Grafo 3

En este modelo Kripke, el marco consta de cuatro mundos posibles $\{w, v, t, u\}$ y la relación de accesibilidad es $R = \{(t, w), (t, v), (t, u), (u, w)\}$. Las proposiciones verdaderas en cada mundo, son: $V(t) = \{p, r\}$ entonces, en t, p y r son verdaderas y q es falsa; $V(v) = \{p\}$ entonces, en v, p es verdadera y q y r falsas; $V(w) = \{q, r\}$ entonces, en w, q y r son verdaderas y p es falsa; por último, según $V(u)$, no existen proposiciones verdaderas en u.

Para definir un modelo de la semántica de la lógica modal, tenemos que definir, no solo la verdad en los modelos "locales" de cada mundo, también tenemos que definir la validez. Esto se logra generalizando la definición anterior por medio de tres pasos que permiten proporcionar una definición general de validez de una fórmula.

Definición 5: Sea φ una fórmula modal, $\boldsymbol{M}$ un modelo de Kripke, $\boldsymbol{F}$ un marco de Kripke:

5.1) φ es *válida en* $\boldsymbol{M}$	($\boldsymbol{M} \vDash \varphi$)	syss	$\boldsymbol{M}, w \vDash \varphi$ para todos los mundos posibles w en $\boldsymbol{M}$
5.2) φ es *válida en* $\boldsymbol{F}$	($\boldsymbol{F} \vDash \varphi$)	syss	$\boldsymbol{M} \vDash \varphi$ para todos los modelos $\boldsymbol{M}$ basados en $\boldsymbol{F}$
5.3) φ es válida	($\vDash \varphi$)	syss	$\boldsymbol{F} \vDash \varphi$, para todo marco $\boldsymbol{F}$

Así, una *inferencia de* ψ *a partir de la clase de fórmulas* Φ *es válida*, $\Phi \vDash \psi$, si y sólo si, para todos los modelos $\boldsymbol{M}$ y mundos w se cumple: $\boldsymbol{M}, w \vDash \varphi$, para todo $\varphi \in \Phi$, implica $\boldsymbol{M}, w \vDash \psi$.

Ejemplo: Se prueba que $\Box(p \vee \sim p)$ es verdad en todos los modelos, por lo tanto es válida en todos los marcos. La proposición $(p \vee \sim p)$ es una tautología clásica, ésta es verdadera en todo mundo posible en todos los modelos. Por lo tanto, para todo w y todo $\boldsymbol{M}$ es claro que $\boldsymbol{M}, w^* \vDash \Box(p \vee \sim p)$ para todo w^* tal que wRw^*. Así, $\boldsymbol{M}, w \vDash \Box(p \vee \sim p)$ para todo w y todo $\boldsymbol{M}$. De donde para todo $\boldsymbol{F} \vDash \Box(p \vee \sim p)$.

Los marcos de Kripke aseguran que los mundos posibles son derivados estrictos de W. La estructura $\boldsymbol{F}$ y los modelos $\boldsymbol{M}$, basados en $\boldsymbol{F}$, son estructuras relacionales que comparten el mismo universo del discurso $\boldsymbol{W}$. Si $\boldsymbol{F}$ tiene una ontología, $\boldsymbol{M}$ la preserva. Así que los mundos posibles, vía la accesibilidad R, son considerados algo así como muestras del mundo real. En eso consistió una de las estratagemas de Kripke: al considerar que los mundos posibles dependen del marco, asegura que los mundos posibles son distribuciones de la ontología, como las muestras y poblaciones en los laboratorios de los científicos, objetos sobre los cuales hacemos nuestras teorías. Por supuesto, excluye explícitamente los mundos sin objetos, al excluir el conjunto vacío como mundo posible.

Así que la semántica de Kripke habla sobre las circunstancias que hay y sus modos de presentación, no sobre copias de ellas o de los objetos que están en esas situaciones, ni sobre copias de Ud o mías, en universos paralelos. No; si Ud habla de copias, avatares, zombies filosóficos, idénticos a Ud. comete una violación a tercero excluído: O es Ud o es una copia, pero no ambos. Si alguna vez Ud. me quiere convencer de la verdad de la oración "Si María fuese presidente, todo fuese muncho mejor", no habla del zombi filosófico de María, ni su avatar o su copia, habla de María. Bueno, esta suposición es la que hace Kripke al considerar que los nombres propios son *designadores rígidos*: designan necesariamente al mismo objeto en todo mundo posible. Los mundos posibles no cambian la designación, así, por ejemplo, si yo tomo una muestra de la población de ratones, es una muestra de la población de ratones, no de copias o avatares de ratones. Esto garantiza que mi hipótesis mantenga la misma referencia objetiva a través de los mundos posibles. En la práctica, la designación rígida comenzó con un acto bautismal y luego la designación del nombre se traspasó a otros mediante cadenas causales de información. Seguir la cadena causal, es seguir la referencia del nombre[17].

Lo mismo no ocurre con la denotación. La designación es individual, particular; la denotación, es múltiple, general. Y así como los nombres designan individuos, los predicados denotan clases de individuos. El predicado lógico *Estudiante* denota a todos y cada uno de los estudiantes en las circunstancias dadas. Hay mundos posibles donde Ud. es una persona solitaria, sin amigos. Hay otros mundos donde Ud. tiene un poco más de amigos y otros mundos donde tiene un millón de amigo (para así más fuerte poder cantar).

Ha de notarse que la denotación del predicado "Amigo" fue cambiando de acuerdo al mundo posible. La extensión de la amistad en algunos mundos es nula, en otros abarca solo a un individuo y, en un pletórico mundo, se tiene un millón de amigos. Cambiaron, como todo en la

[17] Esta teoría es una alternativa a las teorías descriptivistas de los nombres que sostienen, con Frege, Russell, Wittgenstein y Searle, que las descripciones fijan las referencias. Cosa dudosa, porque Aristóteles pudo haber muerto a los 2 años y muchas de sus descripciones serían falsas, esto es, las descripciones designan diferentes objetos en diferentes mundos posibles; no así los nombres. El punto es que en contra de las teorías descriptivas de los nombres, la *teoría causal de la referencia de Kripke* se eleva como una alternativa a cómo fijar la designación de los nombres.

vida, las circunstancias, las extensiones, los objetos presentes en las circunstancias. De tal manera el conjunto de las circunstancias, de los mundos posibles, se convierte en nuestro tan reiterado espacio lógico de la lógica modal o marco de Kripke, pues abarca todas las distribuciones de los objetos en la ontología.

No todos los predicados son como el predicado "amigo" que vimos anteriormente. Hay predicados como "agua", "oro", "quarks", "potasio" y, quizás, "mamífero" que refieren clases naturales. Pero, ¿qué caracteriza a una *clase natural?* Las clases naturales tratan a los objetos como si tuvieran algo en común en la composición. Para Quine, un conjunto de objetos forma una *clase natural,* si los juicios realizados acerca de algún miembro de ese conjunto pueden ser plausiblemente extendido por un científico por razonamiento inductivo a otros miembros. Son predicados intrínsecos y, como tales, monádicos. De tal forma que lo único que garantiza la referencia de las clases naturales es que éstas también designen rígidamente en su recorrido, mediante la accesibilidad, por los mundos.

Lo más sugestivo de la relación de accesibilidad es que podemos cambiar las propiedades que exigimos de la relación. Si todos pueden acceder a su propio mundo, la propiedad es reflexiva; si todos son alienados y no pueden acceder a su propio mundo interno, la relación es irreflexiva. Supongamos que solo se puede acceder del futuro al pasado por medio de la historia, pero que no se puede de ninguna forma acceder del pasado al futuro, la relación sería, entonces, antisimétrica. Listamos las propiedades más comunes que se pueden atribuir a la relación de accesibilidad como relación binaria:

P_1. $\forall x\ (xRx)$	Reflexiva	T: $\Box A \rightarrow A$
P_2. $\forall xy\ (xRy \rightarrow yRx)$	Simétrica	B: $A \rightarrow \Box\Diamond A$
P_3. $\forall xyz\ (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$	Transitiva	4: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$
P_4. $\forall xyz\ (xRy \wedge xRz \rightarrow yRz)$	Euclidiana	5: $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$

Todos estos tipos de accesos son distintos modos en que se evalúa la verdad. Para Kripke la relación de accesibilidad es fundamental para la demostración del carácter correcto y completo de los sistemas modales[18] y es la que permite una teoría de modelos que interpreta todos los sistemas axiomáticos mencionados y muchísimos más. Ahora resulta que hay una íntima relación entre las propiedades de la accesibilidad y los axiomas que caracterizan T, S4, B y S5, y todas esas correspondencias se pueden probar en la semántica. Si la relación de accesibilidad es solo simétrica, satisface los axiomas del sistema T; si es reflexiva, los de B; si es transitiva, los de S4 y si es euclidiana, los de S5 (o si es reflexiva, simétrica y transitiva). Así, dependiendo de las propiedades que se requieran de la accesibilidad, se satisface un nuevo esquema modal que define un nuevo sistema axiomático. Otras correspondencias son las siguientes:

Relación	Nombre	Principio modal
P5. $\forall x\ \exists y\ (xRy)$	Serial	D: $\sim\Box\bot$
P.7 $\forall x\ \exists! y\ (xRy)$	Funcional	Q: $\Diamond A \to \Box A$
P.8 $\forall xy\ (xRy \rightarrow \exists z\ (xRz \wedge zRy))$	Densa débil	R: $\Box\Box A \to \Box A$
P.10 $\forall xyz\ (xRy \wedge xRz \rightarrow \exists w\ (yRw \wedge zRw))$	Dirigida débil	G: $\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$

Se prueba, a continuación, como ejemplo, que R es reflexiva si, y solo si, $\Box A \to A$ es válida en F:

⇒ Premisa: Supongamos que $\boldsymbol{F} = \langle W, R\rangle$ es reflexivo. Se tiene que probar que $\boldsymbol{F} \vDash \Box A \to A$, esto es, para todas las fórmulas A, para toda valuación V, para todo $w \in W$, $\Box A \to A$ en el modelo $\boldsymbol{M} = \langle W, R, V\rangle$. Así, consideremos una fórmula cualquiera A, cualquier valuación V y cualquier mundo w en W. Ya que R es reflexiva, se cumple wRw para todo w por hipótesis. Ahora se supone que $w \vDash \Box A$ (tenemos que probar A). Esto significa que para todo w^1, si wRw^1 entonces $w^1 \vDash A$. Ya que wRw, esto implica que $w \vDash A$. Esto prueba que $w \vDash \Box A \to A$.

⇐ Esta dirección se muestra por contraposición, entonces se supone que $\boldsymbol{F} = \langle W, R\rangle$ no es reflexivo, por lo que se tiene que mostrar que $\boldsymbol{F} \nvDash \Box A \to A$ para alguna fórmula A. En otras

[18] Esta propiedad la llaman "completitud", otra palabra inventada por los filósofos. El español tiene una antiquísima palabra para la calidad o condición de completo, a saber, "compleción". "Completitud" e "incompletitud" no son de mi agrado porque no respetan las analogías. De ser así, no veo problema alguno en que se acepte la palabra "idiotitud", la cualidad esencial de ser idiota.

palabras, se tiene que mostrar que si ***F*** no es reflexivo, entonces hay una fórmula *A*, una valuación *V* y un mundo *w* en *W* tal que $w \nvDash \Box A \to A$ en el modelo ***M*** = $\langle W, R, V\rangle$. Se hace notar que $w \nvDash \Box A \to A$ es lo mismo que $w \vDash \Box A \wedge {\sim}A$. Por lo que se supone que ***F*** no es reflexivo, lo cual quiere decir que hay al menos un mundo *w* tal que es falso *wRw*. Ahora, se define la valuación *V* sobre ***F*** de la siguiente manera (con solo una proposición atómica *p*). Para todos los mundos w^1:

$$p \in \mathrm{V}(w^1) \text{ syss } wRw^1$$

Se ha de ver que en esta definición w^1 es una elección arbitraria, pero *w* es el mundo en particular tal que es falso *wRw*. De la definición se sigue, entonces, que $w^1 \vDash p$, si wRw^1 y, para todos los otros mundos w^i en *W* esto implica $w^i \nvDash p$, esto es $w^i \vDash {\sim}p$. Ya que es falso *wRw*, se tiene que $w \vDash {\sim}p$. Pero, la definición de *V* implica que todo mundo tal que wRw^1 se cumple $w^1 \vDash p$. Así, $w \vDash \Box p$. Por lo tanto, $w \vDash \Box p \wedge {\sim}p$, de lo cual $w \nvDash \Box p \to p$. En consecuencia, hay una fórmula *A*, a saber *p*, tal que $w \nvDash \Box A \to A$. $\Box\Box A$. Esto prueba que $\Box A \to A$ es caracterizada por los marcos reflexivos.

Se prueba, también como ejemplo, que *R* es transitiva si, y sólo si, $\Box A \to \Box\Box A$ es válida en *F*:

⇒ Premisa: Supongamos que F = ⟨W, R⟩ es transitivo. Se tiene que probar que $F \vDash \Box A \to \Box\Box A$, esto es, para todas las fórmulas A, para toda valuación V, para todo $w \in W$, $\Box A \to \Box\Box A$ en el modelo M = ⟨W, R, V⟩. Así, consideremos una fórmula cualquiera A, cualquier valuación V y cualquier mundo w en W. Ahora se supone $w \vDash \Box A$ Se tiene que probar, entonces, $w \vDash \Box\Box A$, esto es, que para todo w1 tal que wRw1, $w1 \vDash \Box A$. Dado así el estado de cosas, consideremos un w1 tal que wRw1. Para mostrar $w1 \vDash \Box A$, se tiene que mostrar, para todo w2 con w1Rw2, $w2 \vDash A$. Así, sea un w2 tal que w1Rw2. La transitividad de R implica que wRw2. Por lo tanto, $w \vDash \Box A$, esto significa que todo mundo accesible desde w tiene A. De donde, wRw2, w2 es accesible desde w. Por lo tanto, w2⊨A. En consecuencia, w1⊨□A. Y esto es lo que teníamos que probar, con esto se prueba que w⊨$\Box A \to \Box\Box A$.

⇐ Esta dirección se muestra por contraposición, entonces se supone que F = ⟨W, R⟩ no es transitivo, por lo que se tiene que mostrar que F⊭$\Box A \to \Box\Box A$ para alguna fórmula A. En otras palabras, se tiene que mostrar que si F no es transitivo entonces hay una fórmula A, una valuación V y un mundo w en W tal que w⊭$\Box A \to \Box\Box A$ en el modelo M = ⟨W, R, V⟩.

Se hace notar que $w \nvDash \Box A \to \Box\Box A$ es lo mismo que $w \vDash \Box A \wedge {\sim}\Box\Box A$. Por lo que se supone que ***F*** no es transitiva, lo cual quiere decir que hay al menos tres mundos w, w^1, w^2 tal que wRw^1 y w^1Rw^2 y es falso wRw^2. Ahora, se define la valuación *V* sobre ***F*** de la siguiente manera

$p \in V(w^i)$ syss wRw^i

Así, $w^1 \vDash p$, si wRw^1 y, para todos los otros mundos w^2 en *W*, $w^2 \nvDash p$, es decir, $w^2 \vDash {\sim}p$. Ya que falso wRw^2, se tiene $w^2 \vDash {\sim}p$. Esto implica que $w^2 \vDash {\sim}\Box p$. Pero esto implica, nuevamente, $w^2 \vDash {\sim}\Box\Box p$. Pero la definición de *V* implica que todo mundo tal que wRw^1 tiene $w^1 \vDash {\sim}p$. Por lo tanto, $w \vDash \Box p$. De donde, $w \vDash \Box p \wedge {\sim}\Box\Box p$ de lo cual $w \nvDash \Box p \to \Box\Box p$. En consecuencia, hay una fórmula *A*, a saber *p*, tal que $w \nvDash \Box A \to \Box\Box A$. Esto prueba que $\Box A \to \Box\Box A$ es caracterizada por los marcos transitivos.

Se puede mostrar, aprovechando las relaciones y los principios modales correspondientes, cómo funciona la “traducción estándar” de los cuantificadores. Con ello se muestra, definitivamente, la estrecha relación entre la cuantificación y los operadores modales. Consiste en una transformación de las fórmulas modales proposicionales en fórmulas de la lógica de primer orden preservando la semántica de las fórmulas modales, lo cual se logra, nuevamente, gracias a *R*. La traducción estándar ST se define inductivamente de la siguiente manera:

a) $ST_w(p) = Pw$ donde **p** es una fórmula atómica. *Pw* es verdadero cuando p está en *w*.

b) $ST_w(\top) = \top$

c) $ST_w(\bot) = \bot$

d) $ST_w(\sim\varphi) = \sim ST_w(\varphi)$

e) $ST_w(\varphi \wedge \psi) = ST_w(\varphi) \wedge ST_w(\psi)$

f) $ST_w(\varphi \wedge \psi) = ST_w(\varphi) \vee ST_w(\psi)$

g) $ST_w(\varphi \rightarrow \psi) = ST_w(\varphi) \rightarrow ST_w(\psi)$

h) $ST_w(\varphi \leftrightarrow \psi) = ST_w(\varphi) \leftrightarrow ST_w(\psi)$

i) $ST_w(\Diamond_R\, \varphi) = \exists u(R(w, u) \wedge ST_u(\varphi))$

j) $ST_w(\Box_R\, \varphi) = \forall u(R(w, u) \rightarrow ST_u(\varphi))$

En la definición anterior, *w* es el mundo desde el que se evalúa la fórmula. Inicialmente, se usa una variable libre *w* y, cada vez que se necesita traducir un operador modal, se introduce una nueva variable para indicar que el resto de la fórmula debe evaluarse desde ese mundo. *R* se refiere, por supuesto, a la relación de accesibilidad que debe ser usada.

Podemos traducir, al fin, $\Diamond p$ y $\Box p$ en términos de cuantificadores:

$\Diamond p = \exists u\, (R(w, u) \wedge Pw)$

Se pasa de *w* a un mundo accesible *u*, porque hay un mundo *u* accesible desde *w* donde el predicado *P* es verdadero para *w*.

$\Box p = \forall u\, (R(w, u) \rightarrow Pw)$

Se pasa de *w* a un mundo accesible *u*, porque para todo mundo *u* accesible desde *w* el predicado *P* es verdadero para *w*.

$\Box\Box p = \forall u\, (R(w, u) \rightarrow ST_u(\Box p))$… se pasa de *w* a un mundo accesible *u*. Ahora evaluamos el resto de la fórmula: $\forall u(R(w,u) \rightarrow (\forall v(R(u,v) \rightarrow Pv)))$. Esta cuantificación captura con precisión la semántica de la fórmula modal. Según la traducción, $\Box\Box p$ está en *w* cuando para todo mundo accesible *u* desde *w* y para todo mundo accesible *v* desde *u*, el predicado *P* es verdadero para *v*.

Otro ejemplo:

$\Box p \rightarrow \Diamond p = ST_w(\Box p) \rightarrow ST_w(\Diamond p) = \forall u\ (R(w, u) \rightarrow Pw) \rightarrow \exists u\ (R(w, u) \wedge Pw)$

Las traducciones estándar proveen de un método para pasar del conjunto de todos los mundos posibles a la cuantificación sobre un universo del discurso.

Ahora pasemos a comentar algunas propiedades metateóricas de la lógica modal proposicional.

Kripke vinculó, de forma precisa, la sintaxis y la semántica de la lógica modal al proporcionar una correspondencia entre deducción y validez, demostración y prueba. Demostró que el sistema **K**, el que tiene sólo el axioma **K**, es correcto y completo para la clase de todos los modelos de Kripke. Aún más, demostró que cada uno de los sistemas clásicos en la tradición de Lewis, los sistemas T, B, S4 y S5, son correctos y completos. El que un sistema **S** sea *correcto* quiere decir que, si una fórmula es demostrable en **S**, entonces es verdadera en todos los modelos de Kripke de **S**. En otros términos, si **A** es una fórmula cualquiera del lenguaje y **S** es el sistema modal en consideración, entonces demostró:

$\vdash_{\mathbf{S}}$ **A** entonces $\models_{\mathbf{S}}$ **A**

Es *completo,* si una fórmula verdadera en todos los modelos de Kripke, es un teorema en **S.**

$\models_{\mathbf{S}}$ **A** entonces $\vdash_{\mathbf{S}}$ **A**

Por ejemplo, los teoremas de T corresponden con la verdad en todos los modelos de Kripke con una relación de accesibilidad reflexiva. En ellos, la verdad de $\Box$A en w equivale a la verdad de A para todo w^* tal que wRw^* y la reflexividad garantiza que w estará entre éstos. Los teoremas de B a modelos de Kripke simétricos. Los teoremas de S4 corresponden a modelos de Kripke reflexivos y simétricos. Los de S5 a modelos reflexivos, simétricos y transitivos.

Por otro lado, una lógica es *decidible* si, y solo si, existe un procedimiento efectivo (máquina de Turing) mediante el cual para cada fórmula en el lenguaje se puede establecer si es, de manera general, que es válida (o desde la sintaxis, si es un teorema). La lógica proposicional es decidible, porque el método de la tabla de verdad es uno de tales procedimientos efectivos. La lógica de predicados no es decidible. A. Turing, quien demostró este hecho (al igual que A. Church), dio una definición teórica para "procedimiento efectivo" que luego se denominó "máquina de Turing". Así, una lógica es *decidible*, si hay una máquina de Turing que compute la (in)validez general de cada fórmula. Un método común de probar que una lógica es decidible es mediante la propiedad del modelo finito. Una lógica tiene la propiedad de modelo finito, si todas las fórmulas que generalmente no son válidas tienen un contra modelo; en otras palabras, si el hecho de que una fórmula sea válida en todos los marcos finitos es suficiente para concluir que es válida en todos los marcos, finitos o no. Cuando una lógica modal tiene esta propiedad, solo necesitamos verificar los marcos finitos para ver si alguna fórmula es válida y resulta que este es un procedimiento efectivo, en el sentido de Turing.

Si una lógica correcta y completa tiene solo un número finito de axiomas y reglas de inferencia, y tiene la propiedad de tener modelos finitos, entonces es *decidible*.

Todas las lógicas modales que hemos considerado son correctas y completas, y solo tienen un número finito de axiomas y reglas de inferencia. Además, los sistemas de lógica modal considerados tienen la propiedad de tener modelos finitos. Podemos concluir, entonces, que son decidibles.

Kripke, entonces, restaura la metafísica de la lógica modal con una base muy sólida de propiedades metateóricas: los sistemas con la propiedad de modelos finitos de la lógica modal proposicional son correctos, completos y decidibles. Tales propiedades restauran su referencia objetiva y, con ella, su transparencia. En lógica proposicional las proposiciones refieren extensionalmente sus valores de verdad. En lógica proposicional modal las proposiciones modales refieren al conjunto formado por todos los mundos donde la proposición es verdadera. Se restauró la consecuencia lógica y la sustitución *salva veritate*. La metafísica es flexible, gracias a la accesibilidad. Se pueden crear muy distintos mundos y estados de cosas de una manera coherente. Es una máquina creadora de juegos del lenguaje. Una máquina tan versátil que permite una reducción de la lógica de segundo orden a la lógica modal[19], una interpretación de la

[19] THOMASON, S. K.: "Reduction of second-orden logic to modal logic". *Mathematical Logic Quarterly*. Vol. 21, N° 1, 1975. pp. 107-114

teoría de conjuntos como un tipo de lógica modal[20] o una traducción de la lógica modal como una metalógica[21], en este último caso las traducciones del metalenguaje son casi naturales.

	Metalenguaje	Lógica modal	
φ es válida	⊨ φ	□φ	φ es necesaria
φ es satisfacible ~φ no es válida	⊭~φ	◊φ	φ es posible
φ es inválida	⊭ φ	~□φ	φ es innecesaria
φ es insatisfacible φ es contradictoria	⊨~φ	~◊φ	φ es imposible
φ es contingente	⊭ φ y ⊭ ~φ	◊φ ∧ ◊~φ ~□φ ∧ ~□~φ	Es posible φ y es posible ~φ Es innecesaria φ y es innecesaria ~φ

Metafísicamente, da coherencia a la existencia de necesidades a posteriori, lo que toca el núcleo mismo de la distinción analítico-sintético, como la conocíamos en la tradición de Carnap. Ahora podemos mostrar extensionalmente la verdad de enunciados necesariamente verdaderos de los cuales solo puede ser conocido su valor de verdad mediante la investigación empírica. Seguramente, los ratones de la muestra siguen siendo mamíferos. De tal forma que sobre el universo de los ratones estudiados y las posibles distribuciones de agrupaciones de los ratones el enunciado "Todos los ratones son mamíferos" es una necesidad a posteriori en todos los mundos a los que se tiene acceso, simplemente porque la oración "Todos los ratones son mamíferos" es verdadera para todos y cada uno de ellos, pero no por necesidad lógica, sino por la investigación empírica. En fin "El agua es H2O", "Tulio es Cicerón" y "Hesperus es fósforo" son necesarios a posteriori y todas las verdades lógicas son verdaderas en todo mundo.

Las mayores preocupaciones de Quine con respecto a lógica modal se referían a la cuantificación sobre contextos modales *de re*, combinaciones como □*x*□*Fx*, cuando □ se lee "es

[20] DISHKANT, Herman: "Set Theory as Modal Logic". *Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic*, Vol.39, N° 4 (1980), pp. 335-345

[21] DOSEN, Kosta: "*Modal Logic as metalogic". Journal of Logic, language, and information.* Vol. 1, N° 3 (1992), pp. 173-201,

lógicamente necesario…” o “es analítico…”. Una fórmula modal *A* se llama *de re*, si una constante o variable individual en *A* está libre bajo el alcance de "□" De lo contrario se llama *de dicto*. Por ejemplo, □Fa y □*x*□*Fx* son *de re*, mientras que □□*x*F*x* es *de dicto*. La fórmula □*x*□*Fx* dice que en nuestro mundo existe un individuo que en todos los mundos posibles tiene la propiedad *F*; en otras palabras, *F* es una *propiedad esencial* (es decir, necesaria) de este individuo. Ahora bien, la verdad de □*x*□*Fx* requiere la existencia de algo tal que □*Fx*, es decir, tal que *Fx* sea analíticamente cierto, pero ¿qué significa decir que una forma proposicional, con sus variables libres, sea analítica? ¿Es analíticamente cierta de una cosa, independientemente de cómo se nombra o describe? Parece no tener sentido. El problema se torna más pertinente cuando notamos que las modalidades *de re* son las únicas relevantes al tratar la cuestión semántica sobre los designadores rígidos frente a los no-rígidos y que las proposiciones *de dicto* no juegan ningún papel en esta distinción. Esto se debe a que la evaluación de las fórmulas *de re* requiere una identificación de los objetos en diferentes mundos. Por lo tanto, hay que asumir que existe un objeto de nuestro mundo o, al menos, algún correlato identificable de él en todos los demás mundos posibles. En contraste, □□*xFx* simplemente afirma que en todos los mundos posibles existe algún individuo que tiene la propiedad *F* lo cual no presupone ninguna correlación entre los individuos en mundos diferentes.

Tal como está planteado, parece ser un problema que no pueda ser resuelto por la lógica-matemática. Veamos el porqué: al no tener □*Fx* referencia objetiva, lo que nos queda es preguntarnos por su significado y, al decir de Rorty, los problemas de la filosofía son los problemas del significado, esa zona que no es clara ni para los mismos filósofos y sobre la cual tenemos muchos prejuicios. La lógica-matemática, como la ciencia en general, requiere de la preservación de la referencia objetiva, por lo que los modelos matemáticos no pueden resolver los problemas del significado. O hacemos como Rorty y abandonamos la filosofía o seguimos indagando en esa zona difusa que juega con nuestros usos del lenguaje hasta que se restituya la referencia. Quine lo hizo nuevamente, revirtió la debilidad de su argumento a su favor y de una forma muy certera.

Kripke guía su metafísica por su lógica y con aquella explica a ésta. Extrapola la lógica en la metafísica con satisfactorios resultados. Se planteó la adecuación de su teoría y se preguntó cómo refieren los nombres a las cosas. Demolió lo que quedaba de la dicotomía analítico-sintético. Si hay necesarios a posteriori ¿son analíticos o sintéticos? Pareciera que, como dijo Quine, nada escapa al tribunal de la experiencia, ni siquiera las verdades necesarias. Abordó el problema de las propiedades esenciales y estableció la posibilidad de enunciados necesarios a posteriori. Este trabajo muestra, entonces, como un cambio de lógica condiciona un cambio de metafísica. Ha de notarse, por favor, que Kripke mostró que existen enunciados necesarios a posteriori, esto es, mostró, en contra de la recomendación de Tarski de la separación de niveles del lenguaje para evitar paradojas, la posibilidad de que un enunciado fuese portador de su verdad en el propio lenguaje y con ello mostró la posibilidad de una teoría de la verdad que fuese coherente y que incluyese su propia semántica. Esto lo logró en un "Esbozo de una teoría de la verdad"[22], pero ya ese es otro cuento que dejamos para otra oportunidad.

Culmino saldando mis deudas con el aspecto técnico. Las 5 estupendas norias que usé.

Referencias Bibliográficas

Blackburn, Patrick; de Rijke, Maarten; Venema, Yde, *Modal Logic*, Cambridge Univ. Press, 2002.

Burgess, John P., "Kripke Models", en Alan Berger (ed.), *Saul Kripke*. Cambridge Univ Press, 2011.

Chellas, Brian, *Modal Logic, an introduction*, Cambridge University Press, 1980.

Rosja Mastop, *Modal Logic*. Cambridge University Press, 2001

La página web *Mathematics*: https://math.stackexchange.com/

[22] KRIPKE, S. "Outline of a Theory of Truth", *Journal of Philosophy*, 72/19 (1975), pp. 690-715.