

Algoritmo trazador de rayos sísmicos en medios
heterogéneos estratificados isótropos usando
técnicas numéricas.

Jesús Acosta

Mayo 2010

Índice general

Resumen	8
Dedicatoria	10
Agradecimientos	11
Introducción	13
1. Teoría del rayo	16
1.1. Ecuaciones de Maxwell en la Materia	16
1.2. Ecuación Eikonal	24
1.3. Ecuación del Rayo	27
1.4. Óptica Ondulatoria y Óptica Geométrica	30
1.5. Principio de Fermat	32
1.6. Ley de Snell	36
1.7. Principio de Huygens	39
1.8. Modelos de enlentecimiento de onda	40
1.9. Anisotropía en Rocas Sedimentarias	40
1.10. Tipos de Anisotropía Sísmica	45
1.10.1. Isotropía en un plano de simetría (TI)	46
1.10.2. Anisotropía Ortorrómbica (ORT)	49
1.10.3. Anisotropía Monoclínica (MNC)	50
1.10.4. Anisotropía Débil o Anisotropía de Thomsen	51

1.10.5. Anisotropía Elíptica	51
1.11. Ecuación Elastodinámica y sus soluciones simples	52
1.12. Tipos de Ecuación Elastodinámica	55
1.12.1. Ecuación Elastodinámica para medios heterogéneos u homogéneos Isótropos	57
1.12.2. Ecuación Elastodinámica para medios heterogéneos u homogéneos Anisótropos	58
2. Métodos Trazadores de Rayos Sísmicos	59
2.1. Representación del modelo Trazador de Rayos	60
2.2. Métodos Trazadores de Rayos	61
2.2.1. Métodos de disparo	61
2.2.2. Métodos de doblamiento del rayo	62
2.2.3. Métodos de la ecuación del rayo	65
3. Trazador de rayos por Recocido Simulado: Método de Doblamiento del Rayo	67
3.1. Rayos	68
3.2. Recocido Simulado	68
3.3. Analogías entre la Teoría del Rayo y la Mecánica Estadística	71
3.4. Metodología del trazador de rayos	72
3.4.1. Rayos: Discretización y Parametrización	72
3.4.2. Algoritmo: Recocido Simulado	76
3.4.3. Trazado de Rayos usando el Recocido Simulado	79
3.4.4. Algoritmo: Tipo de perturbación elegida al azar	81
3.4.5. Equilibrio y Tasa de enfriamiento	83
4. Resultados Experimentales y Análisis	86
4.1. Pruebas Realizadas	89
4.1.1. Primer modelo de prueba: Medio Exponencial linealmente heterogéneo	89

4.1.2. Segundo modelo de prueba: Modelo de Marmousi	95
Conclusiones y Recomendaciones	105
Apéndices	107
A. Algoritmo trazador de rayos sísmicos	108
A.1. Principal	108
B. Algoritmo trazador de rayos sísmicos	112
B.1. Temperatura	112
C. Algoritmo trazador de rayos sísmicos	113
C.1. Interpola	113
D. Algoritmo trazador de rayos sísmicos	115
D.1. Simular	115
E. Algoritmo trazador de rayos sísmicos	119
E.1. Romberg	119
F. Algoritmo trazador de rayos sísmicos	121
F.1. tviaRomberg	121
G. Algoritmo trazador de rayos sísmicos	122
G.1. Insertar	122
Bibliografía	123

Índice de figuras

1.1. Parámetros que describen un Rayo.	28
1.2. Principio de Fermat aplicado a la Refracción.	34
1.3. Ley de Snell.	37
1.4. Casos posibles: Ley de Snell.	37
1.5. Principio de Huygens.	39
1.6. Medio Anisótropo, presenta un frente de onda elíptico ($V_{grupo} \neq V_{fase}$).	44
1.7. Medio Isótropo, presenta un frente de onda circular ($V_{grupo} = V_{fase}$).	44
1.8. Muestra un medio VTI, este medio es representado en la naturaleza por las lutitas.	47
1.9. Presenta anisotropía HTI, en este tipo de anisotropía la orientación del eje de simetría es perpendicular a la orientación de las fracturas.	48
1.10. Anisotropía Ortorrómbica (ORT).	49
1.11. Anisotropía Monoclínica (MNC).	50
1.12. Muestra la Anisotropía Elíptica, el frente de onda representa una elipse.	52
3.1. Perturbación que resulta de eliminar un punto $q \in \bar{\gamma}^0$	79

3.2.	Perturbación del camino debido a la adición de otro punto. Los puntos $q \in \bar{\gamma}^0$ y $q' \in \mathcal{D}$ son elegidos aleatoriamente y el camino original es perturbado mediante el fraccionamiento de los segmentos y posteriormente se une a) $q - 1$ a q y b) q a $q + 1$ y luego se une a cada uno en q' , formando así los 2 diferentes caminos formados en las discontinuidades del segmento. Luego se selecciona el camino del tiempo de viaje más pequeño para subsiguiente cálculos.	80
3.3.	Perturbación del camino al mover el punto a otro diferente dentro de \mathcal{D} , es decir, mover el punto q a q'	81
4.1.	Medio exponencial linealmente heterogéneo (velocidad expresada en m/s): Sobre un mallado de 100×250 puntos de muestreo del campo de velocidades a intervalos de 30 metros a lo largo de x y z	90
4.2.	Trayectorias de algunos rayos.	94
4.3.	Modelo suavizado de Marmousi (velocidad expresada en m/s): Sobre un mallado de 384×122 puntos de muestreo del campo de velocidades a intervalos de 24 metros a lo largo de x y z	96
4.4.	Comparación entre los resultados obtenidos por el método de recocido simulado encontrados por A. Bóna, M. Slawinski y P. Smith [5] y los encontrados por el método de trazado de rayo de Benamou [2].	97
4.5.	Tiempos de viajes obtenidos para 100 rayos en el Modelo de Marmousi.	97
4.6.	Frentes de ondas (re-escalados) obtenidos en este T.E.G usando el método de recocido simulado.	98
4.7.	Frentes de ondas obtenidos en este T.E.G usando el método de recocido simulado.	99
4.8.	Frentes de ondas obtenidos en el artículo [5], usando el método de recocido simulado y posteriormente plotado sobre el Modelo de Marmousi.	99
4.9.	Valor de enfriamiento para $\alpha = 0,8$	101
4.10.	Valor de enfriamiento para $\alpha = 0,84$	102

4.11. Valor de enfriamiento para $\alpha = 0,9$ 102
4.12. Valor de enfriamiento para $\alpha = 0,99$ 103

Índice de cuadros

1.1. Transformación de Voigt	43
4.1. Tiempos de viaje calculados para diferentes ubicaciones del receptor en el medio Exponencial linealmente heterogéneo.	92
4.2. Tiempos de viaje calculados para diferentes receptores en el modelo de Marmousi.	100

Resumen

Algoritmo trazador de rayos sísmicos en medios heterogéneos estratificados isótropos usando técnicas numéricas.

Jesús Rafael Acosta Rodríguez¹ , Aldo Ernesto Reyes Cortez² y Rafael Martín Landrove³

En la prospección sísmica, especialmente en la exploración petrolera, se necesita saber el camino que siguen los rayos sísmicos en el subsuelo, tomando en cuenta las diferentes capas geológicas presentes. Como cada capa tiene su impedancia característica, la velocidad de propagación de las ondas varía con la región del subsuelo en el cual se desplazan.

El trazado de rayos sísmico ha sido ampliamente usado como una técnica de exploración del subsuelo, produciendo con una explosión (fuente) una onda que luego es recibida por varios sensores repartidos apropiadamente de acuerdo a la mejor configuración utilizada sobre la superficie del terreno (receptores).

¹Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Caracas 1040, Venezuela. Email: jrar85@gmail.com

²Universidad de Carabobo, Facultad de Ciencias y Tecnología, Departamento de Computación, Valencia, Venezuela. Email: areyes@uc.edu.ve

³Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Caracas 1040, Venezuela. Email: rmartin@fisica.ucv.ve

Las aplicaciones de esta técnica van desde la exploración petrolera y en general toda la minería, así como en sismología donde se ha usado para el estudio de la corteza, el manto y el núcleo terrestre usando como fuentes el hipocentro de terremotos, hasta otros campos del conocimiento como la Ingeniería Civil, para esclarecer los tipos de suelos donde se van a construir estructuras, en la arqueología, en estudios de sonares, en la detección de objetos tridimensionales con ondas sónicas o electromagnéticas (GPR), en el diseño de equipos ópticos, y en el diseño de redes WAN entre otras.

Siendo el problema del trazado de rayo extraordinariamente complejo, su solución solo puede obtenerse usando técnicas numéricas computacionales. En este sentido, en el presente trabajo, se emularon satisfactoriamente los resultados obtenidos y propuestos por Andrej Bóna, Michael Slawinski y Peter Smith en el artículo [5] presentado en el año 2009, titulado *Ray tracing by simulated annealing: Bending method*. Además, se comprobó que el método fué capaz de trazar rayos bastantes precisos y se propusieron mejoras para dicho algoritmo.

Debido a la fuerte no linealidad del problema de optimización descrito, fué necesario buscar la solución en forma iterativa. Con el fin de evitar posibles mínimos locales y una convergencia prematura, se utilizó el método de optimización global conocido como *Recocido Simulado* y se utilizaron modelos sintéticos.

Para emular y comprobar el correcto funcionamiento y eficiencia del presente algoritmo, se utilizaron modelos de velocidades existentes en la literatura, como fueron el modelo exponencial linealmente heterogéneo y el modelo de Marmousi. Dicho algoritmo se programó en *Octave*, el cual proporcionó una interfaz de línea de comandos para resolver numéricamente los problemas no lineales encontrados.

Dedicatoria

A mi preciosa, bella y amorosa madre, por darme todo su amor, cariño, paciencia, apoyo, consejos y, por sobre todo, valor para seguir adelante pase lo que pase.

A mi bello e increíble padre, por guiarme, protegerme y llenarme de amor.

A mi hermosa y bella segunda madre, por brindarme su amor incondicional y apoyarme siempre en todo.

A Marlene Alvarado, por ser parte de mi vida y alma.

Agradecimientos

A Dios, por darme la oportunidad de vivir y regalarme una familia maravillosa, por estar conmigo en todo momento, por ayudarme y guiarme siempre en este proyecto y, aun más, en mi vida entera *GRACIASSS*.

A mi mami preciosa Deyanira, a mi viejito lindo Rafael y a mi Chepita linda mi segunda mami, *“Los amo con todo mi corazón”*. LO LOGRAMOS, ustedes tres son lo máximo, son únicos, que regalo y que dicha tener 3 padres, gracias por su apoyo incondicional en todo momento, por impulsarme siempre a lograr mis metas y acompañarme en el camino hacia ellas en todo momento, gracias por ser quien soy y por darme todo lo que tengo.

A mi hermano Luis Angel y su esposa Albita, a los dos gracias por su gran amor y cariño hacia mí, por apoyarme, por sus consejos y por estar pendiente de todo, gracias hermano por ayudarme siempre, de verdad gracias sabes que te amo. En fin, gracias a toda mi familia.

A mi Cucha Hedmosa, linda te amo, gracias por llegar a mi vida te amo *“Hasta el infinito y mas alla”*, este logro es tambien tuyo, gracias por ser simplemente tu, eres perfecta siempre lo seras.

A mi tutor externo Aldo Reyes, por haberme guiado en este camino, por sus ideas, por sus consejos, por querer y desear tantas cosas buenas para mí, gracias por su amistad.

A mi tutor interno Rafael Martín, gracias por aceptarme como su tesista y formar parte de este trabajo de verdad gracias.

Introducción

Un problema fundamental de la geofísica lo constituye determinar las características de una región específica del subsuelo.

Esta determinación es muy importante en exploración petrolera, ya que al conocer las formas de las interfaces entre las diferentes capas de roca y el determinar su densidad, nos proporciona información valiosa para determinar regiones del subsuelo donde se pueden haber acumulado hidrocarburos.

En cualquier algoritmo de tomografía sísmica, una de las etapas más importantes lo constituye la solución del problema directo, el cual consiste en determinar la trayectoria que siguen las ondas sísmicas al propagarse en el medio, entre dos puntos especificados y calcular el tiempo de viaje empleado. Este problema generalmente es resuelto mediante un algoritmo trazador de rayos sísmicos.

En el presente trabajo de grado, se implementa el método de trazado de rayos propuesto por Andrej Bóna, Michael Slawinski y Peter Smith en el artículo [5] presentado en el año 2009, titulado *Ray tracing by simulated annealing: Bending method*, y se comprueban los resultados experimentales reportados en la referida publicación.

Este trabajo tiene como finalidad cumplir con una serie de metas, las cuales están constituidas por un objetivo general y unos objetivos específicos derivados del general.

El objetivo general de este proyecto consiste en:

Diseñar e implementar un algoritmo trazador de rayos sísmicos en medios heterogéneos estratificados isótropos, empleando técnicas numéricas de optimización no lineal.

Posteriormente de este objetivo general se desprenden varios objetivos específicos, los cuales son:

1. Hacer una revisión de la teoría del rayo sísmico que comprenda la formulación de esta teoría en medios estratificados con capas homogéneas isótropas y en medios estratificados con capas heterogéneas isótropas.
2. Hacer una revisión del estado del arte en lo que se refiere a propuestas para el trazado de rayos que se han presentado recientemente.
3. Implementar el prototipo del algoritmo Trazador de rayos sísmicos.
4. Evaluar el algoritmo implementado en algunos medios que han sido utilizados y que han sido reportados en la literatura como el Modelo de Marmousi y en medios teóricos que presentan isotropía.

Al resolver el problema de inversión sísmica se pretende determinar las características de un medio partiendo de los datos proporcionados por las ondas sísmicas que se propagan en el mismo.

Una considerable atención se ha dedicado a los problemas de valores iniciales, en el que la trayectoria del rayo se especificó dando a conocer un punto inicial y un punto final. Esto es, en general, un problema que se ha trabajado ampliamente y se ha resuelto de forma satisfactoria por **Cerveny** [10]. Sin embargo, estudios tomográficos

en la industria petrolera, por lo general, requieren de tiempos de viajes muy precisos y cálculos de trayectoria de propagación de ondas sísmicas entre dos puntos (problema de condiciones de contorno), siendo estos no triviales en los medios lateralmente heterogéneos en 3-D.

Con el fin de ubicarnos en el contexto de este trabajo de grado, en el Capítulo 1, se expone como surge la teoría del rayo sísmico a partir de las ecuaciones de Maxwell en la materia.

En el Capítulo 2, se presentan los métodos prácticos del trazado de rayo sísmico, que surgen de diferentes leyes y principios físicos, como lo son la ley de Snell, el principio de Fermat y el principio de Huygens. Además, se realiza una revisión bibliográfica de los diferentes trabajos de investigación, en los cuales se han propuesto soluciones del trazado de rayo, en el que se han utilizado cada uno de estos métodos.

En el Capítulo 3, primeramente se presenta una revisión de la teoría del recocido simulado como un método de optimización, posteriormente en el mismo capítulo se presentan los enfoques teóricos y los respectivos cálculos que se han utilizado para resolver el problema del trazado de rayos sísmicos y además se presenta una propuesta basada en una extensión del artículo [5] propuesto en el 2009 por Andrej Bóna, Michael Slawinski y Peter Smith, para el trazado de rayos usando el recocido simulado.

En el Capítulo 4, se presentan los resultados experimentales y análisis de este trabajo de grado, al evaluar el algoritmo propuesto sobre algunos modelos sintéticos que han sido reportados en la literatura.

Por último, se presentan las conclusiones y se proponen algunas recomendaciones para trabajos futuros.

Capítulo 1

Teoría del rayo

La teoría del rayo sísmico, surge como una solución asintótica de alta frecuencia a la ecuación elastodinámica, de manera similar a como surge la ecuación de onda como solución a las ecuaciones electromagnéticas. Por ello, es importante resaltar que cuando se trata de ondas electromagnéticas, la aproximación asintótica de alta frecuencia es bastante precisa, en este capítulo, se deduce la teoría del rayo sísmico a partir de las ecuaciones de Maxwell, para ello, primero se deduce de forma clara y simple la ecuación de onda a partir de estas ecuaciones, para luego deducir la ecuación Eikonal y la ecuación del Rayo.

1.1. Ecuaciones de Maxwell en la Materia

Las ecuaciones electromagnéticas propuestas por James Clerk Maxwell, en el siglo XVIII, marcaron un gran impacto en el ámbito científico, ya que mediante estas ecuaciones se pueden explicar de manera unificada muchos de los aspectos y fenómenos electromagnéticos de hoy en día, a partir de estas ecuaciones podemos deducir de forma muy completa toda la teoría del rayo, la cual es la base de esta investigación.

Entonces, para poder desarrollar la teoría del rayo, se deduce la ecuación de onda a partir de las ecuaciones de Maxwell en la materia en su forma diferencial.

Las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial comprenden las siguientes expresiones:

Ley de Faraday de inducción electromagnética:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

Ley de Ampere generalizada:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.2)$$

Ley de Gauss para el campo magnético:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.3)$$

Que implica la no existencia de monopolos magnéticos.

Y la Ley de Gauss:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.4)$$

En estas ecuaciones, se presentan las siguientes variables:

- \vec{E} Vector campo eléctrico
- \vec{H} Vector intensidad de campo magnético
- \vec{D} Vector densidad de flujo eléctrico
- \vec{B} Vector densidad de flujo magnético
- \vec{J} Vector densidad de corriente
- ρ Densidad de carga

Adicionalmente, se tienen las Relaciones Constitutivas que permiten vincular estas cantidades:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.6)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (1.7)$$

Donde ε , μ , σ se conocen respectivamente como:

- $\varepsilon \rightarrow$ Permitividad en un medio
- $\mu \rightarrow$ Permeabilidad en un medio
- $\sigma \rightarrow$ Conductividad

Utilizando la Ley de Ampere (1.2) y la Ley de Faraday (1.1) se obtiene la Ecuación de Continuidad o Principio de conservación de la carga:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.8)$$

La cual establece que, sólo podrá haber un flujo de corriente si la cantidad de carga varía con el paso del tiempo, ya que está disminuyendo o aumentando en proporción a la carga que es usada para alimentar dicha corriente.

A partir de la Ley de Faraday (1.1) y asumiendo que la dependencia temporal es elegida como:

$$\vec{E} \sim e^{-j\omega t}, \quad \text{donde, } j = \sqrt{-1} \quad (1.9)$$

Se tiene que, análogamente:

$$\vec{B} \sim e^{-j\omega t}, \quad \text{donde, } j = \sqrt{-1} \quad (1.10)$$

Entonces, al sustituir (1.10) en la Ley de Faraday (1.1), se obtiene:

$$\nabla \times \vec{E} = j\omega \vec{B} \quad (1.11)$$

Ahora, al utilizar la relación constitutiva (1.6) y asumiendo que todos los fenómenos físicos ocurren en el vacío¹, de modo que $\mu = \mu_0$, se tiene que:

$$\nabla \times \vec{E} = j\omega \mu_0 \vec{H} \quad (1.12)$$

Cabe destacar, que una sola frecuencia ω es elegida, en donde los campos existentes pudieran ser encontrados en superposición de frecuencia única.

Luego, al usar la Ley de Ampere (1.2) y asumiendo que tanto el vector densidad de corriente \vec{J} , como la densidad de carga ρ son cero, (al principio se supone que no existen medios materiales) se tiene entonces:

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.13)$$

Esta ecuación implica que, el rotor del vector intensidad del campo magnético varía, es decir, aumenta o disminuye de acuerdo al resultado generado por la derivada parcial con respecto al tiempo del vector densidad de flujo eléctrico.

Ahora, se usa la relación constitutiva (1.5) $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ y asumiendo nuevamente la dependencia temporal (1.9), entonces:

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial(e^{-j\omega t})}{\partial t} = -\epsilon j\omega e^{-j\omega t} = -j\epsilon\omega \vec{E} \therefore$$

$$\nabla \times \vec{H} = -j\epsilon\omega \vec{E} \quad (1.14)$$

¹En el sistema de medidas MKS la Permeabilidad en el vacío $\mu_0 \cong 4\pi \times 10^{-7} \frac{Ns^2}{C^2}$

Las relaciones (1.12) y (1.14), permiten relacionar el vector intensidad de campo magnético \vec{H} con el Vector campo eléctrico \vec{E} .

Luego, tomando la relación constitutiva (1.6) y sustituyéndola en la ecuación (1.3), se obtiene:

$$\nabla \bullet \vec{H} = 0 \quad (1.15)$$

Ahora usando la ecuación (1.4) $\nabla \bullet \vec{D} = \rho$, asumiendo la condición de que \vec{J} y ρ son cero, es decir $\nabla \bullet \vec{D} = 0$ y utilizando la relación (1.5) $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$.:

$$\nabla \bullet \varepsilon \vec{E} = 0 \quad (1.16)$$

Las ecuaciones (1.12), (1.14), (1.15) y (1.16), deducidas a partir de las ecuaciones de Maxwell, junto con las siguientes identidades vectoriales, permiten construir la ecuación de onda.

Identidades vectoriales:

- Sea f una función escalar de \vec{x} , $f(\vec{x})$ y del tiempo t .
- Sea \vec{A} una función vectorial de \vec{x} , $\vec{A}_{(\vec{x})}$ y también del tiempo t .

Entonces:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \bullet \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (1.17)$$

$$\nabla \bullet (f\vec{A}) = \nabla f \bullet \vec{A} + f \nabla \bullet \vec{A} \quad (1.18)$$

$$\nabla \times (f\vec{A}) = \nabla f \times \vec{A} + f\nabla \times \vec{A} \quad (1.19)$$

$$\nabla(e^f) = e^f \nabla f \quad (1.20)$$

$$\nabla^2 f = \nabla \bullet \nabla f \quad \text{Laplaciano} \quad (1.21)$$

$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g \quad (1.22)$$

Ahora se construye la ecuación de onda, para esto, se toma el rotor en ambos lados de la ecuación (1.12):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = j\mu_0\omega \nabla \times \vec{H}$$

Luego, aplicando la identidad vectorial (1.26) al lado derecho de la ecuación anterior, se tiene que:

$$\nabla(\nabla \bullet \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = j\mu_0\omega \nabla \times \vec{H}$$

Al sustituir (1.14) al lado derecho de la ecuación anterior, se obtiene:

$$\nabla(\nabla \bullet \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = j\mu_0\omega(-j\varepsilon\omega \vec{E}), \quad \text{donde, } j = \sqrt{-1}$$

Entonces:

$$\nabla(\nabla \bullet \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \mu_0\varepsilon\omega^2 \vec{E} \quad (1.23)$$

Se considera que, la permitividad² en un medio ε es independiente del tiempo y de trozos de variación lenta (estas variaciones son sumamente pequeñas del orden de la

²En el sistema de medidas MKS la Permitividad en el vacío $\varepsilon_0 \cong 8,854 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$

longitud de onda, excepto en las interfaces).

Posteriormente a esto, se toman en cuenta las siguientes relaciones fundamentales:

$$\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \quad (1.24)$$

Velocidad de la onda

$$\nu = \lambda f \quad \text{Velocidad de la onda} = \text{Longitud de la Onda} * \text{Frecuencia} \quad (1.25)$$

Frecuencia angular

$$w = 2\pi f \quad (1.26)$$

Número de onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.27)$$

*Frecuencia Angular = Número de Onda * Velocidad de la Luz*

$$w = kc \quad (1.28)$$

Índice de Refracción

$$n \quad \text{Donde: } n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \quad (1.29)$$

Utilizando las definiciones de las ecuaciones (1.24) $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, de modo que, $\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$ y de (1.28) $w = kc$, la cual expresa la relación existente entre la frecuencia angular w y la velocidad de la luz c .³

³En el sistema de medidas MKS la Velocidad de la luz $c \cong 2,9979 \times 10^8 \frac{m}{s}$

La última expresión puede escribirse así:

$$\begin{aligned}\nabla(\nabla \bullet \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \cdot \omega^2 \cdot \vec{E} \\ \nabla(\nabla \bullet \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot k^2 \cdot \vec{E}\end{aligned}$$

Si definimos el índice de refracción como en (1.29) $n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$, realizando el despeje, $n^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \therefore$

$$\nabla(\nabla \bullet \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \varepsilon \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot k^2 \vec{E}$$

Por último:

$$\nabla(\nabla \bullet \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = n^2 k^2 \vec{E} \quad (1.30)$$

Ahora utilizando la identidad vectorial (1.18) y la ecuación (1.16) al lado izquierdo de la ecuación (1.30) y reorganizando los términos se obtiene:

$$\nabla^2 \vec{E} + n^2 k^2 \vec{E} = -\nabla\{\vec{E} \cdot \nabla(\ln \varepsilon)\} \quad (1.31)$$

Si suponemos que el medio es homogéneo, el lado derecho de la ecuación es cero ya que $\nabla(\ln \varepsilon) = 0$, **M. Born y E. Wolf** [6]. Entonces:

$$\nabla^2 \vec{E} + n^2 k^2 \vec{E} = \vec{0} \quad (1.32)$$

Esta es la ecuación de onda para el campo eléctrico, la cual es fundamental a la hora de poder obtener lo que se conoce como “Ecuación Eikonal”.

1.2. Ecuación Eikonal

Además de los supuestos anteriores, las hipótesis principal utilizada para derivar la óptica geométrica es que la amplitud de la onda varía lentamente en comparación con la fase. Asumiendo esto, se puede escribir cualquier componente del campo eléctrico como:

$$\vec{E} = \psi e^{-jkS(\vec{x})} \quad (1.33)$$

Esta ecuación posee la forma de onda plana, ya que son las soluciones más simple con que se puede trabajar. Las dos funciones, ψ y $\vec{S}(\vec{x})$, son consideradas independientes de la longitud de onda. La función $\vec{S}(\vec{x})$ es llamada “Eikonal” y ψ la amplitud de onda.

Colocando la ecuación (1.33) dentro de la ecuación (1.32). Realizándolo para una sola componente por simplicidad \therefore .

$$\nabla^2(\psi e^{-jkS}) + n^2 k^2 (\psi e^{-jkS}) = 0 \quad (1.34)$$

Al usar las ecuaciones (1.18), (1.20), (1.21) y (1.22) se obtiene \therefore .

$$k^2\{n^2 - (\nabla S)^2\}\psi - jk\{\nabla^2 S + 2\nabla S \bullet \nabla \psi\} + \nabla^2 \psi = 0 \quad (1.35)$$

Reorganizando y dividiendo toda la ecuación (1.35) entre k^2 .:

$$\{n^2 - (\nabla S)^2\}\psi - \frac{j}{k}\{\nabla^2 S + 2\nabla S \bullet \nabla \psi\} + \frac{1}{k^2}\nabla^2 \psi = 0 \quad (1.36)$$

Entonces:

$$\{n^2 - (\nabla S)^2\}\psi = \frac{j}{k}\{\nabla^2 S + 2\nabla S \bullet \nabla \psi\} - \frac{1}{k^2}\nabla^2 \psi \quad (1.37)$$

Asumiendo la condición de que la longitud de onda, λ , es significativamente pequeña comparada con cualquier distancia de propagación, significa que la parte de la derecha es infinitamente pequeña y se desprecia recordando la ecuación: (1.27) $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, entonces:

$$\{n^2 - (\nabla S)^2\}\psi = 0 \Rightarrow n^2 - (\nabla S)^2 = 0 \Rightarrow (\nabla S)^2 = n^2 \quad (1.38)$$

Esta última expresión, conduce a la ecuación “Eikonal” .:

$$(\nabla S) = n \quad (1.39)$$

La ecuación (1.39) es una ecuación en derivadas parciales con no linealidad encontrada en propagación de ondas, cuando la ecuación de onda es aproximada

usando la Teoría WKB.⁴

Como vimos la ecuación (1.39) es la ecuación “*Eikonal*”, esta es derivable de las ecuaciones de Maxwell en la materia del electromagnetismo y proveen un enlace entre la Óptica física (onda) y la Óptica geométrica (rayos).

Una adecuada interpretación física, consiste en que el significado de la ecuación “*Eikonal*” está relacionada con la formula:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \quad (1.40)$$

Donde \vec{E} es la intensidad del campo eléctrico y φ es el potencial eléctrico.

El significado físico de esta ecuación en el ejemplo electromagnético es que cualquiera carga dentro de una región, son empujadas hacia el exterior en un ángulo recto de las líneas de potencial. Las variables correspondientes se presentan en el flujo de fluidos y en la termodinámica.

⁴Calculo semi-clásico en el cual la función de onda es vista como una función exponencial, semiclásicamente expandida, en el que la amplitud o la fase pueden variar lentamente. El nombre de este método es un acrónimo para la aproximación *Wentzel-Kramers-Brillouin*.

1.3. Ecuación del Rayo

Asumiendo una región con índice constante, un conjunto base de soluciones se encuentran para tener ondas planas:

$$|\vec{E}| = e^{-jnk\vec{u}\cdot\vec{r}}$$

Es decir, las superficies de fase constante están en el plano perpendicular a la dirección \vec{u} . El conjunto de base consiste en el conjunto de tales ondas planas.

Esto nos lleva a definir los rayos⁵, como las trayectorias ortogonales a los frentes de fase de una onda de luz. Si se conoce la superficie de fase constante, podemos construir los rayos de luz trazando líneas perpendiculares a los frentes de fase. Entonces estos frentes de fase se curvan en el espacio, debido a los cambios en el índice de refracción para crear los rayos de luz.

Es deseable poder calcular los rayos de luz directamente sin tener que construir los frentes de fase de la ecuación Eikonal.

Entonces se considera una región suficientemente pequeña en la que los rayos de luz son considerados localmente lineales. En la siguiente figura 1.1 se identifican los parámetros que se utilizan posteriormente.

La ecuación para el rayo puede escribirse como una suma de vectores \therefore

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + x\vec{u}$$

Por lo tanto:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dx}$$

⁵Un rayo es una curva continua que corta perpendicularmente a todas las superficies de fase constante.

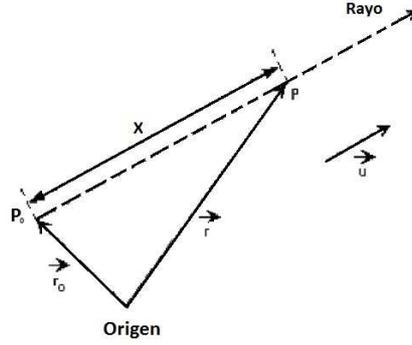


Figura 1.1: Parámetros que describen un Rayo.

Dado que la pendiente de la fase está en la dirección, \vec{u} con una magnitud, n , podemos escribir:

$$\nabla S = n\vec{u} = n \frac{d\vec{r}}{dx} \quad (1.41)$$

Al considerar y tomar el gradiente de la ecuación “Eikonal” en ambos lados, entonces:

$$\nabla(\nabla S)^2 = 2\nabla S \bullet \nabla(\nabla S) = 2n\nabla n \quad (1.42)$$

Ahora usando la ecuación (1.41) y utilizando la regla de la cadena, entonces:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d\vec{r}}{dx} \bullet \nabla f$$

Luego podemos reescribir la ecuación (1.42) como:

$$\nabla S \bullet \nabla(\nabla S) = n \frac{d\vec{r}}{dx} \bullet \nabla(\nabla S) = n \frac{d}{dx}(\nabla S) = n \frac{d}{dx} \left(n \frac{d\vec{r}}{dx} \right) = n \nabla n \quad (1.43)$$

Ahora se divide toda la ecuación (1.43) entre n .:

$$\frac{d}{dx}\left(n\frac{d\vec{r}}{dx}\right) = \nabla n \quad (1.44)$$

Esta es la ecuación del rayo. Resolviendo esto para un \vec{r} cualquiera dentro de un medio gobernado por un índice de refracción dado⁶, se resuelve la ecuación del rayo dentro de ese medio comenzando en un punto P_0 . Para cruzar esta discontinuidad en una interface, se podría usar esta ecuación o usar otros métodos como por ejemplo la Ley de Snell, la cual puede ser derivada del principio de Fermat, **L. Townsend** [31].

⁶Depende del medio o estrato en el que se encuentre.

1.4. Óptica Ondulatoria y Óptica Geométrica

Tanto la óptica ondulatoria como la óptica geométrica pueden deducirse de las ecuaciones de Maxwell.

Una manera para determinar el camino de los rayos de luz con precisión es mediante la ayuda de la geometría elemental por las sucesivas aplicaciones de la ley de refracción (o reflexión).

La óptica geométrica, constituye un papel fundamental en el estudio del comportamiento del rayo, como se puede ver en la deducción de la ecuación eikonal que se explicó anteriormente.

La óptica geométrica, también representa una aproximación al comportamiento ondulatorio teniendo en cuenta tres consideraciones importantes :

1. Mientras que, la longitud de onda de la luz, sea muy pequeña respecto a las dimensiones características del sistema.
2. Mientras que, la solución de la ecuación Eikonal exista.
3. Mientras que, su dependencia espacial, no varíe significativamente de acuerdo a la longitud de onda.

Las leyes fundamentales que rigen la evolución espacial de un rayo cuando éste atraviesa un cambio brusco de índice de refracción son las de la reflexión y refracción. Si el rayo evoluciona en un medio heterogéneo en el que el índice de refracción cambia suavemente, entonces no existe reflexión y sólo se necesitan las leyes de la refracción.

Los fenómenos de reflexión y refracción se analizan en forma adecuada recurriendo a la óptica geométrica.

Mientras que en la óptica física u óptica ondulatoria, se tienen en cuenta las propiedades ondulatorias que en la óptica geométrica se ignoran. La teoría ondulatoria de la luz conduce a explicaciones satisfactorias de los fenómenos que no se pueden analizar mediante rayos.

1.5. Principio de Fermat

El tiempo de viaje de una onda sísmica es la integral de enlentecimiento a lo largo del camino que describe el rayo que conecta la fuente y el receptor. Para ilustrar este punto, se definen dos funcionales⁷ para el tiempo de viaje.

Sea P un camino arbitrario conectado a una fuente y a un receptor en un modelo de enlentecimiento s . En donde se refiere a P como un camino de prueba de rayos, se define un funcional τ^P , el cual da el tiempo de viaje a lo largo del camino P . Dejando a s ser la distribución continua de enlentecimiento $s(\vec{x})$, entonces se tiene:

$$\tau^P(s) = \int_P s(\vec{x}) dl^P \quad (1.45)$$

Donde dl^P denota la distancia infinitesimal a lo largo del camino P .

El principio de Fermat establece que el correcto camino del rayo que puede existir entre dos puntos es el que registra menor tiempo de viaje, es decir, que reduce al mínimo o minimiza⁸ $\tau^P(s)$ con respecto al camino P .

Luego se define a τ^* como el funcional que genera los viajes de tiempo a lo largo del camino de rayo que cumple con Fermat o dicho de otra forma el funcional que minimiza el tiempo. Entonces, el principio de Fermat establece lo siguiente:

$$\tau^*(s) = \min_{P \in Paths} \tau^P(s) \quad (1.46)$$

⁷Un funcional es una función que asigna un espacio funcional o un espacio vectorial a un conjunto de números reales.

⁸El Principio de Fermat es la condición que permite que la integral que representa el tiempo de viaje sea estacionaria con respecto a las variaciones en el camino del rayo y se conoce también que la inversión del tiempo de viaje usando los tiempos de viajes de las primeras llegadas deben ser los mínimos.

Donde *Paths* denotan a todos los caminos continuos que conectan a una fuente y receptor dado⁹. El camino particular que produce un mínimo en la ecuación (1.46) se denota como P^* . Si más de un camino produce el mismo valor del tiempo de viaje, entonces P^* denota a cualquier miembro de este conjunto de caminos con tiempo mínimo.

De esta forma al sustituir $\tau^P(s)$ (1.45) en la ecuación (1.46), se obtiene El Principio de Fermat o Tiempo Mínimo de Viaje, entonces:

$$\tau^*(s) = \int_{P^*} s(\vec{x}) dl^{P^*} = \min_P \int_P s(\vec{x}) dl^P \quad (1.47)$$

El principio de Fermat es la base de los algoritmos del trazado de rayos que utilizan métodos de ajuste del rayo.

En estos métodos se comienza con un camino que conecte la fuente y el receptor, y a partir de ese estimado inicial de la trayectoria del rayo, se utiliza algún procedimiento para “deformar” o “torcer” esa trayectoria con el fin de reducir el tiempo de viaje a lo largo de la misma.

Como ejemplo de la aplicación del Principio de Fermat para el caso de la refracción, se parte del arreglo geométrico representado en la figura 1.2, donde se busca minimizar el tiempo de viaje t , como se explicó anteriormente, el cual establece el tiempo que recorre un rayo desde un punto S a uno P , con respecto a la variable x . Entonces el tiempo de tránsito más pequeño probablemente coincide con la ruta real. Por lo tanto:

$$t = \frac{\overline{SO}}{v_i} + \frac{\overline{OP}}{v_t}$$

⁹La notación $P \in Paths$ significa que P es un miembro del conjunto de *Paths*.

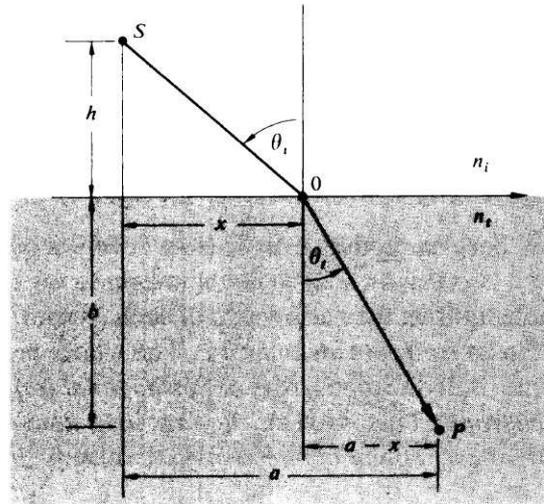


Figura 1.2: Principio de Fermat aplicado a la Refracción.

o, también:

$$t = \frac{(h^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{v_i} + \frac{[b^2 + (a - x)^2]^{\frac{1}{2}}}{v_t}$$

Para minimizar el tiempo $t(x)$ con respecto a variaciones en x , se tiene que, $\frac{dt}{dx} = 0$, esto es:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{v_i(h^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{-(a - x)}{v_t[b^2 + (a - x)^2]^{\frac{1}{2}}} = 0$$

Usando la figura 1.2, se puede reescribir la expresión anterior como:

$$\frac{\sin \theta_i}{v_i} = \frac{\sin \theta_t}{v_t}$$

Que no es más que la ley de Snell, demostrando así que dicha ley es una consecuencia del Principio de Fermat, ya que, si un rayo de luz avanza desde un punto S a uno P en el menor tiempo posible, este debe cumplir con la ley de refracción conocida también como la ley de Snell.

Suponiendo que se tiene un material estratificado compuesto por m capas, como en la figura 1.2. Entonces el tiempo de tránsito de S a P es:

$$t = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \dots + \frac{s_m}{v_m}$$

o, también:

$$t = \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{s_i}$$

Donde s_i y v_i son respectivamente, la longitud del camino recorrido y la velocidad del rayo de luz, asociado con la i -ésima contribución. Por lo tanto:

$$t = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^m n_i s_i$$

En el cual, la suma es conocida como la longitud del camino óptico (OPL) recorrido por el rayo, en contraste con la longitud del camino espacial $\sum_{i=1}^m s_i$. Es evidente que, para un medio no homogéneo, donde el índice de refracción n es una función de la posición, la suma debe cambiar a una integral, como:

$$OPL = \int_S^P n(s) ds$$

La longitud del camino óptico corresponde a la distancia en el vacío equivalente a la distancia recorrida s en el medio de índice de refracción n . Es decir, los dos podrían corresponder con el mismo número de longitudes de onda, $\frac{(OPL)}{\lambda_0} = \frac{s}{\lambda}$, y el cambio de fase es igual al cambio de los avances de la luz.

En la medida en que, $t = \frac{(OPL)}{c}$, se puede reafirmar el Principio de Fermat o como es conocido también el Principio del camino óptico más corto o tiempo de recorrido mínimo: *La luz, al salir desde el punto S al punto P , recorre la ruta que tenga menor tiempo de viaje.*

1.6. Ley de Snell

La refracción producida cuando la luz cambia de medio de propagación en la superficie de separación de dos medios transparentes produce una desviación en la trayectoria luminosa y esto corresponde con la Ley de Snell o conocida también como **Ley de Refracción**.¹⁰

La ley de Snell es una consecuencia del principio de Fermat, como se demostró anteriormente, **M. Born y E. Wolf** [6] y dicho resultado puede ser derivado usando un simple argumento geométrico basado en la estacionalidad del funcional del tiempo de viaje. Entonces el conocido resultado es el siguiente:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$$

Donde θ_1 y θ_2 denotan los ángulos del camino del rayo que se forman al pasar una interface, es decir, la frontera que separa las dos regiones, mientras que n_1 y n_2 representan a los índices de refracción, los cuales son diferentes entre sí y son característicos del medio donde se encuentren, como se puede apreciar en la figura 1.3.

¹⁰Willebrord Van Royen Snell la descubrió en 1703 pero no la publicó, por lo que no fue conocida hasta 1703 cuando Huygens la publicó como resultado.

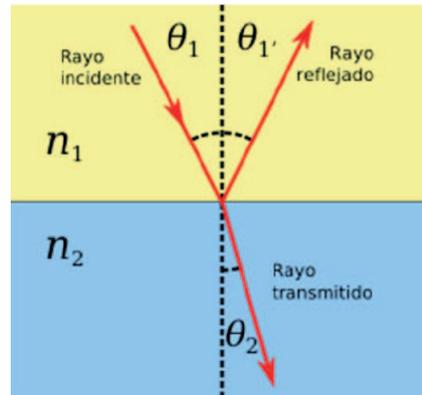


Figura 1.3: Ley de Snell.

De esta forma, es importante apreciar los diferentes casos posibles generados a partir de la Ley de Snell, los cuales constituyen un papel importante en diversos estudios geofísicos, estos casos son expresados en la figura 1.4.

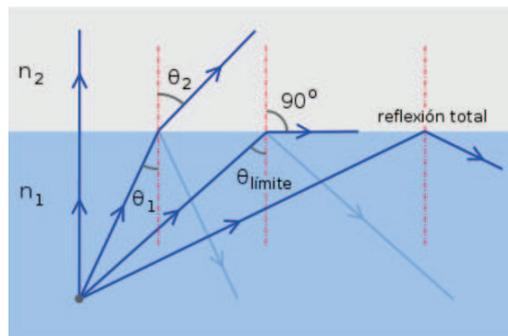


Figura 1.4: Casos posibles: Ley de Snell.

Entonces, de esta forma se tiene que:

- Cuando $\theta_1 = 0 \therefore \theta_2 = 0$, para cualquier n_1 y n_2 .
- Cuando $n_1 > n_2 \therefore \theta_2 > \theta_1$
- Cuando $\theta_1 = \theta_{\text{limite}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ ocurre **Reflexión en la interface**.

- Cuando $\theta_2 = \theta_{\text{límite}}$ ocurre **Reflexión Total Interna**.

La aplicación de la ley de Snell permite saber cómo se comportan los rayos sísmicos cuando encuentran alguna de las discontinuidades que presenta la Tierra.

1.7. Principio de Huygens

En 1678, casi dos siglos antes de los trabajos de Maxwell sobre las ondas electromagnéticas, Christian Huygens (1629-1695) propuso una teoría ondulatoria de la luz.

El principio de Huygens nos permite hallar la forma y posición futura de un frente de onda a partir de su forma y posición presentes, **J. Kane y M. Sternheim** [16]. Dicho principio establece que:

Todo punto alcanzado por una onda se puede considerar como centro emisor de nuevas ondas, llamadas secundarias, que sólo son activas, en cada instante, en los puntos de contacto con la envolvente común a todas ellas en ese instante.

Este fuente de ondas secundarias, se extiende en todas las direcciones con la misma velocidad, frecuencia y longitud de onda que el frente de onda original, es decir, del que preceden, como se puede apreciar en la figura 1.5

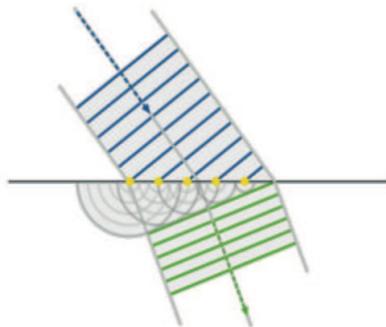


Figura 1.5: Principio de Huygens.

1.8. Modelos de enlentecimiento de onda

Cuando una onda sonora o una onda sísmica ingresa en un medio, se necesita de un tiempo para que la onda progrese de un punto cercano a la fuente donde se emitió hasta otro punto mas distante. El tiempo que toma la onda para el viaje de un punto de interes al siguiente es llamado **tiempo de viaje**. Para un medio que no está pasando por cambios físicos o químicos durante el paso del sonido, la onda tiene una velocidad definida con el que siempre viaja entre dos puntos en el medio. Nosotros llamamos esta velocidad como el promedio de la velocidad de onda o simplemente velocidad de onda. También se puede definir una velocidad de onda local asociada con cada punto del medio, considerando el promedio de la velocidad de onda para dos puntos que se encuentran muy próximos entre sí. El enlentecimiento local es el inverso de la velocidad de onda local. Es más conveniente desarrollar fórmulas de inversión y tomografía en términos de modelos del enlentecimiento de la onda, porque las ecuaciones pertinentes son lineales en el enlentecimiento o inverso de la velocidad de onda sísmica.

En los algoritmos de inversión se pretende construir un modelo de la distribución del inverso de la velocidad de la onda, valor que denominaremos enlentecimiento de la onda $s(\vec{x})$, **A. Reyes** [27].

$$v(\vec{x}) \neq s(\vec{x})$$

$$v(\vec{x}) = \frac{1}{s(\vec{x})}$$

1.9. Anisotropía en Rocas Sedimentarias

Las rocas que constituyen la corteza terrestre se encuentran sometidas de manera constante a **esfuerzos** que representan la fuerza aplicada sobre un cuerpo y

deformaciones que representan la distorsión producto del esfuerzo, ya que desde el punto de vista tectónico la tierra es considerada como un planeta dinámico. Estudios realizados han encontrado que las deformaciones sufridas por las rocas son linealmente proporcionales a los esfuerzos aplicados, lo cual se conoce como **Ley Generalizada de Hooke**. El enunciado de esta ley establece que, para cada punto de un cuerpo tridimensional y linealmente elástico, las seis componentes (de 2^{do} orden) del tensor de esfuerzo están linealmente relacionadas con las seis componentes del tensor de deformación (también de 2^{do} orden) por medio de un tensor constante llamado tensor de elasticidad o tensor elástico (de 4^{do} orden) denotado como C_{ijkl} .

Esta relación se puede expresar como:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \xi_{kl}$$

Donde:

C_{ijkl} Es el tensor Elástico o Tensor de Elasticidad.

σ_{ij} Es el tensor de esfuerzo.

ξ_{kl} Es el tensor de deformación.

Otra forma de expresar esta relación, es la siguiente:

$$\xi_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 S_{ijkl} \sigma_{kl}$$

Donde:

S_{ijkl} Es el (compliance tensor) o inverso del tensor elástico.

El tensor de deformación se expresa de la siguiente manera:

$$\xi_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$

Es importante recordar que la expresión anterior no representa una relación matricial sino por el contrario es una relación tensorial, por lo tanto obedece al álgebra tensorial;

por ello es posible relacionar el tensor elástico C_{ijkl} (que contiene un total de $3^4 = 81$ componentes) con el tensor de deformación ξ_{kl} (que contiene un total de $3^2 = 9$ componentes)

El tensor de elasticidad puede tender a reducirse de 81 componentes elásticas a 36 constantes y posteriormente a 21, por dos razones:

1. Existe simetría intrínseca de los tensores de esfuerzo y deformación, lo cual hace que el tensor de constantes elásticas se reduzca a 36.
2. La corteza terrestre es considerada como un sólido deformable isotérmico o adiabático, es decir, la constante de tiempo de disipación de calor es mayor que el período de la onda sísmica propagándose en el medio (no hay transferencia de calor).

Por lo tanto, al existir simetrías, en el tensor elástico se cumple que:

$$C_{ijkl} = C_{klij}$$

Esto lleva a que el tensor se reduzca de 36 constantes a 21.

El tensor elástico puede ser escrito de una manera más compacta por medio de la transformación de Voigt (Cuadro 1.1):

$$C_{ijkl} \rightarrow C_{mn}$$

El cambio es de forma tal, que los ij (ó kl) cambian a m (ó n) siguiendo la regla:

$$m = i \rightarrow i = j$$

$$m = 9 - (i + j) \rightarrow i \neq j$$

Valor de ij	Valor de kl	Valor Correspondiente de m	Valor Correspondiente de n
11	11	1	1
22	22	2	2
33	33	3	3
32=23	32=23	4	4
31=13	31=13	5	5
12=21	12=21	6	6

Cuadro 1.1: Transformación de Voigt

Utilizando la transformación anterior el tensor elástico queda escrito de la siguiente manera:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix}$$

La **anisotropía** consiste en la variación de las propiedades físicas de un material (elasticidad, temperatura, conductividad, etc.) con respecto a la dirección y polarización en la cual se esté midiendo, mientras que en la **isotropía** las propiedades físicas en el material se mantienen constantes, es decir, no varían con respecto a la dirección y polarización. Cuando una onda se propaga en un medio que presenta anisotropía, su frente de onda es generalmente elíptico, como se puede apreciar en la figura 1.6 y en otros casos es arbitrario, en cambio, para un medio isótropo el frente de onda es circular, como se muestra en la figura 1.7.

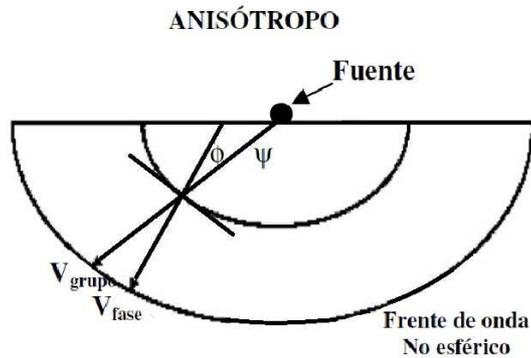


Figura 1.6: Medio Anisótropo, presenta un frente de onda elíptico ($V_{grupo} \neq V_{fase}$).

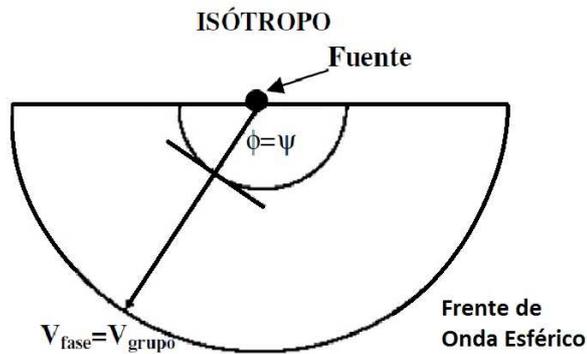


Figura 1.7: Medio Isótropo, presenta un frente de onda circular ($V_{grupo} = V_{fase}$).

La forma del frente de onda depende de la **velocidad de grupo**, que es la velocidad con la que viaja un tren de ondas y la **velocidad de fase**, que es la velocidad con la cual un punto de fase constante viaja perpendicular en dirección normal a la superficie de la onda. Para un medio isótropo la velocidad de grupo es equivalente a la velocidad de fase, es decir, $V_{grupo} = V_{fase}$, mientras que para un medio anisótropo ocurre la dispersión, es decir, la velocidad de fase es distinta a la velocidad de grupo $V_{grupo} \neq V_{fase}$, esto principalmente se debe a que la velocidad varía con respecto a la frecuencia.

Los modelos elásticos mas simples son los llamados isotrópicos. Para esta situación, considerada la mas sencilla e ideal, el medio esta caracterizado por la siguiente representación matricial del tensor elástico, la cual esta caracterizada completamente por dos constantes elásticas, λ conocida como el primer parámetro de Lamé y μ conocida como el módulo de rigidez o cizallamiento, ambas constituyen las constantes de Lamé.

$$C = \begin{pmatrix} c_{33} & c_{33} - 2c_{44} & c_{33} - 2c_{44} & 0 & 0 & 0 \\ c_{33} - 2c_{44} & c_{33} & c_{33} - 2c_{44} & 0 & 0 & 0 \\ c_{33} - 2c_{44} & c_{33} - 2c_{44} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$$

Donde:

$c_{33} = \lambda + \mu$ y $c_{44} = \mu$ son las constantes independientes que aparecen en la matriz en función de los parámetros de Lamé.

1.10. Tipos de Anisotropía Sísmica

Existen diversas razones, por las cuales una roca puede presentar anisotropía, por ejemplo en el contexto geológico las causas más frecuentes son:

1. Alineamiento de fracturas.
2. Estratificación fina y presencia de lutitas.

3. Anisotropía Intrínseca, causada por el alineamiento de la hojuelas de arcillas y materiales orgánicos.

Dependiendo del tipo de roca existen diversos tipos de anisotropía:

1.10.1. Isotropía en un plano de simetría (TI)

Este grupo de anisotropía se puede clasificar en dos subgrupos como lo es la **Anisotropía Polar (VTI)** y la **Anisotropía Azimutal**. El primero posee un eje de simetría vertical, mientras que el segundo presenta un eje de simetría horizontal.

1. **Anisotropía Polar**: Sus propiedades no varían con respecto al acimut, pero sí varía con respecto al ángulo polar. También es llamado isotropía transversal con eje de simetría vertical (VTI), este tipo de anisotropía es representada por un medio que contiene capas horizontales muy finas, todas isótropas, producto de fragmentos de placas de arcilla. Se caracteriza por zonas que contienen lutitas, como se puede observar en la figura 1.8, las cuales pueden ser trampas estructurales; este sistema está regido por cinco parámetros elásticos, c_{11} , c_{12} , c_{13} , c_{33} y c_{44} .

El tensor elástico del sistema VTI viene dado por:

- a) Medio con isotropía transversal con eje de simetría vertical (VTI).

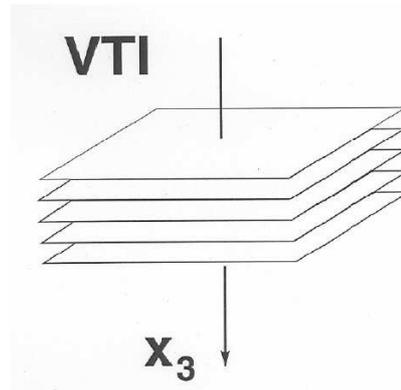


Figura 1.8: Muestra un medio VTI, este medio es representado en la naturaleza por las lutitas.

- b) Tensor elástico que caracteriza este tipo de medio.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}$$

Donde:

$$c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$$

2. **Anisotropía Azimutal:** Consiste en la variación de una o más propiedades de un material homogéneo con respecto al acimut. También es llamado isotropía transversal con eje de simetría horizontal (HTI), Este tipo de anisotropía

matemáticamente representa lo mismo que un medio con anisotropía polar, excepto por la rotación del eje de simetría, sin embargo, en el contexto geológico, el medio se representa por un sistema de fracturas verticales todas paralelas entre sí, como se puede observar en la figura 1.9.

a) Medio con isotropía transversal con eje de simetría vertical (HTI).

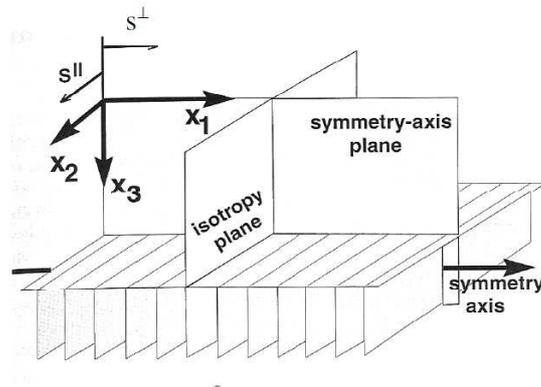


Figura 1.9: Presenta anisotropía HTI, en este tipo de anisotropía la orientación del eje de simetría es perpendicular a la orientación de las fracturas.

b) Tensor elástico que describe este tipo de medio.

$$C = \begin{pmatrix} c_{33} & c_{13} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{pmatrix}$$

Donde:

$$c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})$$

1.10.2. Anisotropía Ortorrómbica (ORT)

Este tipo de medio es representado por dos sistemas de fracturas mutuamente perpendiculares, las cuales permanecen invariantes antes rotaciones de 180° alrededor del eje de simetría, el cual se puede observar en la figura 1.10, así como también su correspondiente tensor elástico.

a) Muestra de la Anisotropía Ortorrómbica.

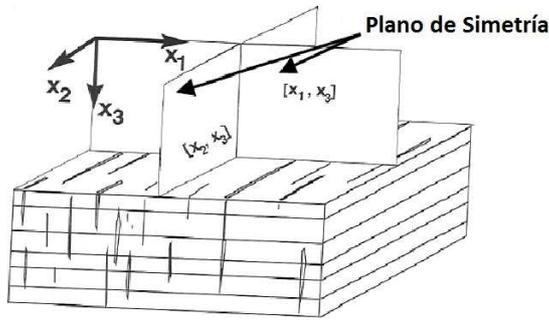


Figura 1.10: Anisotropía Ortorrómbica (ORT).

b) Tensor elástico que describe este tipo de medio.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}$$

Este tipo de medio representa dos sistemas de fracturas verticales y contiene nueve constantes elásticas en total. Para este tipo de medio no existe una expresión analítica para las expresiones de las velocidades de fase y grupo de las ondas P y S .

1.10.3. Anisotropía Monoclínica (MNC)

La anisotropía monoclínica está relacionada con un medio que posee un sistema de fracturas verticales distribuidas de manera arbitraria (no perpendicular). Para caracterizar este medio hacen falta 12 constantes elásticas. Los medios con simetría monoclínica permanecen invariantes ante rotaciones de π alrededor del eje vertical, además poseen un plano de simetría horizontal y al igual que en la anisotropía ortorrómbica no existe una expresión analítica para las expresiones de las velocidades de fase y grupo de las ondas P y S , un ejemplo de este tipo de anisotropía lo podemos observar en la figura 1.11 y su respectivo tensor elástico, característico de este tipo de anisotropía, entonces:

a) Muestra de la Anisotropía Monoclínica.

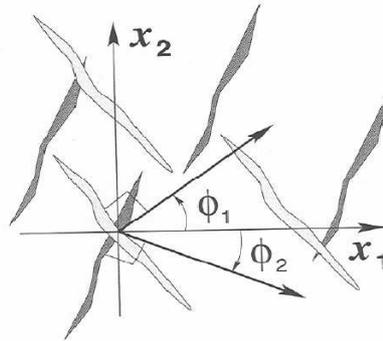


Figura 1.11: Anisotropía Monoclínica (MNC).

b) Tensor elástico que describe este tipo de medio.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{45} & c_{55} & 0 \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}$$

1.10.4. Anisotropía Débil o Anisotropía de Thomsen

Estudios realizados anteriormente por **L. Thomsen** [30] en rocas sedimentarias mostraron que existe muy poca anisotropía en rocas yacimientos no fracturados como arenas, areniscas y carbonatos sobre condiciones de yacimientos, debido a que los parámetros tienen valores <0.2 , aún cuando los materiales que lo constituyen son altamente anisótropos. También, cabe destacar que, **Thomsen**, en sus estudios experimentales comprobó que el comportamiento anisotrópico de gran cantidad de medios puede caracterizarse mediante valores pequeños de los parámetros de anisotropía y posteriormente denominó a este tipo de medios, **medios débilmente anisotrópicos**.

1.10.5. Anisotropía Elíptica

Cuando nos encontramos en presencia de un medio anisótropo y la onda al propagarse contiene un frente de onda elíptico, hablamos de un medio con anisotropía elíptica. Este tipo de medio se puede observar cerca de los ejes de simetría cuando nos encontramos en un medio TI, un ejemplo de este tipo de anisotropía lo podemos apreciar en la figura 1.12.

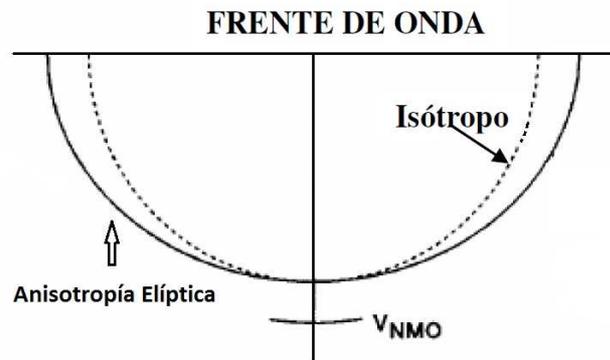


Figura 1.12: Muestra la Anisotropía Elíptica, el frente de onda representa una elipse.

1.11. Ecuación Elastodinámica y sus soluciones simples

El método del Rayo Sísmico está basado en la solución asintótica de alta frecuencia de la ecuación elastodinámica. Para frecuencias finitas, el método del rayo es no exacto, pero si es aproximado. Su precisión, sin embargo es suficiente para solventar muchos problemas de propagación de ondas 2D y 3D de interés práctico en la sismología y exploración sísmica.

Dentro del método del rayo sísmico, las altas frecuencias de los campos de ondas dentro de estructuras complejas se pueden expandir o ampliar en contribuciones, la cual se puede propagar a lo largo de los rayos y son llamadas ondas elementales.

Individualmente las ondas elementales corresponden, por ejemplo, en ondas directas P y S, ondas reflejadas, diversas ondas múltiples reflejadas y transmitidas y ondas convertidas. Una gran ventaja del método del rayo es que las ondas elementales pueden ser manejadas de manera independiente.

Todas las ecuaciones son expresadas en forma algorítmica y pueden ser usadas directamente en programación y aplicado en varios programas de interpretación sísmica, en modelados numéricos de ondas sísmicas de campo, en tomografías sísmicas y también en migración ¹¹.

La propagación de cuerpos de ondas sísmicas, en complejas variaciones laterales para distintas estructuras de capas 2D y 3D son un proceso complicado.

Soluciones analíticas de la ecuación elastodinámica para estos tipos de medios no son conocidos.

El más estricto acercamiento a la investigación de ambas partes tanto cinemática como dinámica del método de rayos consiste de las aplicaciones de los métodos de altas frecuencias asintóticos a las ecuaciones elastodinámicas en los diferentes medios.

Se usara la descripción Lagrangiana de movimiento en un continuo elástico. Dentro de la descripción lagrangiana, se estudia el movimiento de una partícula especificada por su posición original en algún tiempo de referencia. Asumiendo que la partícula es localizada en la posición descrita por las coordenadas cartesianas x_i en un tiempo de referencia. La distancia vectorial de una partícula en un tiempo t de posición \vec{x} en un tiempo de referencia es llamado **Vector de Desplazamiento** y es denotado como \vec{u} , donde $\vec{u} = (\vec{x}, t)$, **V. Červený** [11].

Se denotaron las componentes cartesianas de el tensor de esfuerzo como $\tau_{ij}(\vec{x}, t)$ y las componentes cartesianas del tensor de deformación como $e_{ij}(\vec{x}, t)$. Ambos tensores son considerados simétricos, de esta forma se tiene que:

¹¹Migración es un proceso el cual ayuda a determinar la verdadera posición espacial de los eventos en relación al número de estaciones superpuestas

$$\tau_{ij}(\vec{x}, t) = \tau_{ji}(\vec{x}, t) \quad (1.48)$$

El tensor de deformación puede ser expresado en términos del vector desplazamiento, de la siguiente forma:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji}) \quad (1.49)$$

Por otro lado, el tensor de esfuerzo τ_{ij} describe completamente las condiciones de esfuerzo en cualquier punto \vec{x} . Este puede ser utilizado para calcular la tracción \vec{T} actuando a través de un elemento de superficie de orientación arbitraria en \vec{x} .:

$$\vec{T} = \tau_{ij}n_j \quad (1.50)$$

Donde \vec{n} es el vector normal a el elemento de superficie bajo consideración.

La **Ecuación Elastodinámica** se refiere a las variaciones espaciales del tensor de esfuerzo con las variaciones temporales del vector de desplazamiento .:

Se puede expresar la ecuación general de la **Ecuación Elastodinámica** como:

$$\tau_{ij,j} + f_i = \rho\ddot{u}_i, \quad (1.51)$$

donde $i = 1, 2, 3$.

Aquí f_i denota las componentes cartesianas de las fuerzas externas y ρ representa la densidad de masa. El término f_i en la ecuación general de la **Ecuación Elastodinámica** (1.51) podría también referirse al término fuente. La cantidades $\ddot{u} = \frac{\delta^2 u_i}{\delta t^2}$, con $i = 1, 2, 3$ representando la segunda derivada parcial de u_i con respecto al tiempo (en otras palabras la aceleración de la partícula). De manera similar se

puede denotar a la velocidad de la partícula $\frac{\delta u_i}{\delta t}$ como v_i o \dot{u}_i .

Las cantidades introducidas son medidas en las siguientes unidades:

El tensor de esfuerzo τ_{ij} y el tensor de tracción T_i en pascales \therefore

$$[\tau_{ij}] = Pa = Kg.m^{-1}.s^{-2}$$

$$[T_i] = Pa = Kg.m^{-1}.s^{-2}$$

Las componentes de las fuerzas externas f_i en Newtons por metro cúbico \therefore

$$[f_i] = \frac{N}{m^3} = Kg.m^{-2}.s^{-2}$$

La densidad de masa ρ en kilogramos por metro cúbico \therefore

$$[\rho] = Kg.m^{-3}$$

Las componentes de desplazamiento u_i en metros \therefore

$$[u_i] = m$$

Por último, se tiene que las componentes del tensor de deformación e_{ij} son adimensionales.

1.12. Tipos de Ecuación Elastodinámica

En un sólido perfectamente elástico, anisotrópico y lineal la relación constitutiva entre el tensor de esfuerzo y el tensor de deformación, está dada por la **Ley generalizada de Hooke**.

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} \quad (1.52)$$

Mientras que, en un sólido isotrópico, las componentes del tensor elástico C_{ijkl} pueden ser expresadas en términos de dos módulos elásticos como lo son λ y μ de la siguiente forma:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (1.53)$$

Aquí δ_{ij} es el símbolo de la delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{Para:} \quad i = j$$

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{Para:} \quad i \neq j$$

En general, λ es conocido como el módulo elástico de Lamé, mientras que μ es llamado módulo de rigidez.

Los materiales elásticos, lineales, isótropos, homogéneos, tienen sus propiedades elásticas únicamente determinadas por dos módulos cualesquiera.

Por otro lado, el incremento de esfuerzo está definido como la diferencia entre el esfuerzo real y el esfuerzo correspondiente al estado de equilibrio estático. Este incremento de esfuerzo es cero dentro del estado de equilibrio estático y satisface la relación constitutiva (1.52) si las derivaciones que provienen del estado de equilibrio estático son pequeñas.

Todos los módulos elásticos, son en general, funciones de la posición. Si ellas son constantes (independientes de la posición) en alguna región, se refiere a que dicho medio es homogéneo.

Es decir, si estos módulos elásticos no fueran constantes es decir independientes del tiempo, se estaría en presencia de un medio heterogéneo.

Entonces, de esta forma se puede expresar los diferentes tipos de ecuaciones elastodinámicas utilizadas en los diferentes medios existentes.

1.12.1. Ecuación Elastodinámica para medios heterogéneos u homogéneos Isótropos

Se considera, en principio, un medio de densidad ρ sometido a la fuerza por unidad de volumen f_i .

Para un medio istropo la relación entre los tensores de esfuerzo y deformación, se puede escribir reacomodando la ecuación (1.52), entonces:

$$\tau_{ij} = \lambda\delta_{ij}\theta + 2\mu e_{ij}, \quad (1.54)$$

donde: $\theta = e_{kk} = u_{kk} = \nabla \bullet \vec{u}$

Dicha ecuación (1.54), representa a la Ley de Hooke, donde aquí θ es llamado dilatación cúbica.

Si se reemplaza θ y e_{ij} por las componentes del vector de desplazamiento, entonces se obtiene la ecuación:

$$\tau_{ij} = \lambda\delta_{ij}u_{kk} + \mu(u_{ij} + u_{ji}) \quad (1.55)$$

De esta forma, al insertar la ecuación (1.55) dentro de (1.51), se obtiene así la ecuación elastodinámica para medios perfectamente elásticos, heterogeneos e isótropos ilimitados. Entonces la ecuación queda expresada de la siguiente forma:

$$(\lambda u_{jj})_{,i} + [\mu(u_{ij} + u_{ji})] + f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (1.56)$$

donde: $i = 1, 2, 3$.

1.12.2. Ecuación Elastodinámica para medios heterogéneos u homogéneos Anisótropos

Considerando un medio de densidad ρ sometido a la fuerza por unidad de volumen f_i y tomando en cuenta también que el tensor elástico cumple con las siguientes relaciones de simetría:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (1.57)$$

Luego, expresamos e_{kl} en terminos de las componentes del vector desplazamiento (1.49) y considerando (1.57), se puede reescribir la **Ley generalizada de Hooke** (1.52) de la siguiente forma:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} u_{kl} \quad (1.58)$$

Entonces, insertando la ecuación (1.58) dentro de la ecuación elastodinámica general (1.51), se obtiene la ecuación elastodinámica para un medio perfectamente elástico, heterogéneo y con ilimitada anisotropía. La ecuación se expresa de la siguiente forma:

$$(C_{ijkl} u_{kl})_{,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (1.59)$$

donde $i = 1, 2, 3$.

La ecuación elastodinámica(1.59) representa un sistema de tres ecuaciones en derivadas parciales acopladas de segundo orden por tres componentes cartesianas del vector desplazamiento. Alternativamente, la ecuación elastodinámica puede expresarse en términos de 12 ecuaciones en derivadas parciales de primer orden en tres componentes cartesianas del vector velocidad de la partícula y 9 componentes del tensor de esfuerzo.

Capítulo 2

Métodos Trazadores de Rayos Sísmicos

En este capítulo, se consideran los 3 métodos más influyentes e importantes en el trazado de rayos sísmicos, los cuales son:

1. Métodos de disparo.
2. Métodos de doblamiento del rayo.
3. Métodos de la ecuación del rayo.

Cada uno de estos tres métodos se basan en diferentes principios físicos, los métodos de disparo se basan en la Ley de Snell, **M. Born y E. Wolf** [6], los métodos de doblamiento del rayo, que son la base de este proyecto de grado, se basan en el Principio de Fermat, **M. Born y E. Wolf** [6] y los métodos de la ecuación del rayo se basan en el Principio de Huygens, **J. Kane y M. Sternheim** [16]. Los métodos de disparo y los métodos de la ecuación del rayo generalmente son usados con representaciones suaves del modelo tales como rejillas o redes de interpolación lineal o aproximación de funciones mediante splines, mientras que los métodos de doblamiento del rayo son preferidos para las representaciones de celdas constantes.

Además, se realiza una revisión bibliográfica de los diferentes trabajos de investigación, en los cuales se han propuesto soluciones del trazado de rayo, en el que se han utilizado cada uno de estos métodos.

2.1. Representación del modelo Trazador de Rayos

El paso más costoso en cualquier inversión del tiempo de viaje o algoritmo de tomografía es el adelantar el paso de modelado asociado con el trazado de rayo a través de la mejor estimación actual del modelado rápido de la onda. Por lo que es esencial hacer una buena elección del algoritmo trazador de rayos, para una aplicación en particular bajo consideración. Antes de elegir un método trazador de rayos, un método de representación del modelo debe ser elegido. Tres elecciones típicas son:

- a) Celdas.
- b) Bloques de constante de enlentecimiento.
- c) Una malla rectangular con valores de enlentecimiento asignados a los puntos de la malla y valores interpolados linealmente entre puntos de la malla o una suma sobre un conjunto de funciones bases cuyos coeficientes determinan el modelo

El método de trazado de rayos debe ser diseñado para producir resultados óptimos para la representación del modelo elegido.

A continuación se explicaran brevemente estos 3 métodos trazadores de rayos:

2.2. Métodos Trazadores de Rayos

2.2.1. Métodos de disparo

Los métodos de disparo de rayos tienen su fundamento físico en la Ley de Snell. Por otro lado se tiene que la ecuación del rayo forman las bases de los métodos de disparo del trazado de rayos sísmicos. Comenzando en cualquier punto aleatoriamente donde se ubique la fuente, se comienza eligiendo un conjunto de ángulos posibles (ángulos de despegues). Un espaciado inicial óptimo de ángulos puede ser determinado si el rango de variación de la velocidad de la onda es conocido aproximadamente. Luego, se usa la ecuación del rayo para trazar los rayos en cada uno de estos ángulos por medio de la vecindad del receptor de interés. Por lo general ninguno de los ángulos iniciales resulta ser el correcto (los primeros rayos producidos que impactan o insiden en el receptor), pero a menudo el receptor está rodeado por dos (algunos) de estos rayos. Luego, por interpolación, se puede encontrar una aproximación lo más preciso como se quiera. Es decir, eligiendo un nuevo conjunto de ángulos entre un par de receptores, trazamos los rayos para estos ángulos de despegues fijados anteriormente, manteniendo cercanía entre los dos receptores, de esta forma se continúa el proceso hasta que algún objetivo sea logrado, como conseguir el ángulo de despegue óptimo para trazar los rayos cumpliendo con la ley de Snell y permitiendo así una optimización real del algoritmo planteado.

Los métodos de disparo son muy precisos, pero también relativamente costosos. Puede que se tenga que disparar muchos rayos hasta alcanzar el grado de precisión deseado. Además, puede haber casos patológicos que surgen en la inversión y tomografía sísmica donde este es difícil o imposible trazar un rayo de la fuente al receptor a través de la mejor estimación actual del modelo de lentitud. Este tipo de problemas es más probable que se produzcan en los modelos que contienen regiones con alto contraste. Luego, pueden existir zonas de sombra detrás de las regiones lentas, donde la amplitud del rayo es pequeña para las primeras llegadas. Este tipo de problemas también pueden

surgir debido a la mala elección del modelo de parametrización.

Los métodos de disparo deberían normalmente ser usados con modelos de elentecimiento basados en interpolación lineal entre puntos de la red (o rejilla), o aproximaciones de funciones mediante splines (segmentos de recta). Si el modelo deseado usa celdas y constantes de elentecimiento, los métodos de disparo no son recomendados.

Este tipo de método toma muy en cuenta las condiciones de borde al elegir como método de representación del modelo las celdas.

Los métodos de disparo y de doblamiento del rayo propuesto por **V. Cervený** [11] en el 2001, son comúnmente usados en enfoques numéricos para solucionar condiciones de frontera de problemas de trazado de rayos. El método de disparo esta basado en solucionar ecuaciones del rayo, como problemas de valores iniciales especificando el ángulo de despegue. El ángulo de despegue es variado hasta que pase a través de la posición del receptor. El método de disparo trabaja bien para encontrar la conexión entre los rayos emitidos por la fuente y recibidos por el receptor en medios simples 2D. No es eficiente dentro de áreas donde las ecuaciones del rayo no sirven, como en zonas oscuras y dentro de medios complejos donde una variación leve del ángulo de despegue podría dar lugar a un rayo significativamente diferente, por lo tanto causa dificultad en conectar los rayos emitidos por la fuente y los que son recibidos por el receptor.

2.2.2. Métodos de doblamiento del rayo

Los métodos de doblamiento del rayo estan conceptualmente basados en el Principio de Fermat o tiempo mínimo de viaje. Este método puede ser tan exácto como los demás si la rutina de búsqueda es lo suficientemente sofisticada u óptima dependiendo

del caso presentado.

Aunque los métodos de doblamiento del rayo pueden ser muy útiles para la optimización de un trazador de rayos, en algunos casos, estos métodos generalmente no son tan sistemáticos ni tan precisos como los métodos de disparo si no se sigue una correcta estrategia de planificación que aborde el problema planteado.

Sin embargo, también son mucho menos propensos a sufrir errores de convergencia en la presencia de modelos patológicos con altos contrastes relativos (que pueden resultar en zonas de sombra que ocurre detrás de muchas regiones suaves o lentas). Los métodos de doblamientos de rayos conectan algún camino entre la fuente y el receptor, este camino inicial es tomado aleatoriamente (generalmente se toma una línea recta para tomografías Borehole a Borehole) y luego se usa algún método para reformar o doblar ese camino para reducir y minimizar el tiempo de viaje a lo largo del camino.

También, los métodos de doblamiento del rayo son los que generalmente se recomiendan usar cuando el modelo se compone de celdas de constantes de enlentecimiento.

En estos tipos de métodos también se cumple con la ley de Snell ya que esta ley es una consecuencia del Principio del Fermat o tiempo mínimo de viaje, por lo que es más consistente la aproximación a la física incorporada en el modelo.

El método de doblamiento del rayo se direcciona intrínsecamente al problema de conectar los rayos emitidos por la fuente con los que son recibidos en el receptor. Se comienza por la conexión de la fuente S a un receptor R mediante un camino inicial. Este camino inicial se dobla según el principio de Fermat hasta que el rayo deseado es obtenido. Si se busca el rayo correspondiente al mínimo global del tiempo de recorrido

o tiempo de viaje, este método permite evitar obtener únicamente mínimos locales, es decir se tiene una probabilidad de encontrar la solución deseada al problema de optimización. Se pueden calcular caminos que corresponden a un mínimo local de un tiempo de viaje donde se restringen a ellos a pasar a través de una interface.

El método del doblamiento del rayo se ha utilizado extensamente. Los métodos de doblamiento del rayo usado por **B. Julian y D. Gubbins** [15] en 1977 y **B. Pereyra** [25] en 1980 usan métodos de diferenciación finita para resolver las ecuaciones del rayo y para la construcción de los rayos obligados a pasar a través de un receptor específico. **J. Um y C. Thurber** [32] en 1987 y **W. Prothero** [26] en 1988 toma un acercamiento u enfoque diferente: Muestra como cada rayo puede ser construido para perturbar la forma del rayo mismo. **J. Um y C. Thurber** [32] comenzaron con una estimación o suposición de tres puntos para el rayo y luego ellos usaron una interpretación geométrica de las ecuaciones de rayo para perturbar este. **W. Prothero** [26] propone una suposición inicial y luego perturba a este localmente para encontrar el rayo. El acercamiento de **J. Um y C. Thurber** [32] es más eficiente, aunque menos preciso numéricamente que lo propuesto por **W. Prothero** [26].

Además **K. Koketsu y S. Sekine** [18] en 1988 mostraron que el comienzo del método de **J. Um y C. Thurber** [32] es más estable numéricamente que los resultados de **B. Pereyra** [25], especialmente dentro de los modelos discontinuos de velocidades. Como se muestra por **B. Pereyra** [25], la precisión del método del pseudo-doblamiento del rayo disminuye a medida que el número de discontinuidades del modelo incrementa.

T. Moser, G. Nolet y R. Snieder [22] en 1992, proponen que, con el fin de minimizar el tiempo de viaje del rayo, se determina el gradiente del tiempo de viaje con respecto a los parámetros que definen la trayectoria y utilizando el método de gradiente, se ajustan el valor de los parámetros para ir modificando la trayectoria hasta encontrar un tiempo de viaje estacionario.

Estos métodos dependen del camino inicial tomado. Si el camino no es elegido cuidadosamente, uno pudiera finalizar con un rayo que corresponda a un mínimo local de un tiempo de viaje, en parte esta es una limitación de estos recursos de análisis de optimización.

2.2.3. Métodos de la ecuación del rayo

Los métodos de la ecuación del rayo son métodos numéricos. El modelado numérico sísmico es una técnica que consiste en simular la propagación de ondas en levantamientos sísmicos. Uno de los tantos objetivos es complementar o incluso predecir la información registrada por un sismógrafo y así generar un conjunto de sensores los cuales pueden grabar, partiendo de una supuesta estructura del subsuelo. Esta técnica, también conocida como métodos de la ecuación del rayo son una valiosa herramienta para la interpretación sísmica y constituye una parte esencial de los algoritmos de inversión sísmica.

Para resolver la ecuación del rayo o ecuación del movimiento por métodos numéricos directos, el modelo geológico se aproxima a una malla numérica; eso quiere decir, que el modelo tomado es discretizado en un número finito de puntos. Las soluciones de estos métodos implícitamente generan las ondas de campo completamente. Estos métodos directos no tienen restricciones de la variabilidad del material y pueden ser muy precisos cuando una rejilla suficientemente fina se utiliza. Aunque son más costosos que los métodos de análisis y rayos en términos de tiempo computacional, esta técnica puede manejar fácilmente la aplicación de diferentes geologías sean suaves o complejas.

Uno de estos métodos que marco pauta en dichos estudios fue el método de Vidale por **J. Vidale** [36] en 1988, el cual utiliza un esquema de diferenciación finita para

computar los tiempos de viaje de ondas en un medio arbitrario. El elentecimiento del medio es representado en los nodos de la rejilla rectangular (para medios 2-D) con interpolación lineal asumida entre los nodos. El método se aproxima al campo de onda que se propaga a través de una onda plana.

Existen otros métodos de trazado de rayo, como por ejemplo el propuesto por **T. Moser** [21] en 1991, el cual utiliza la teoría de redes para calcular totalmente el rayo dentro del método del camino más corto. Este método siempre encuentra el mínimo global del tiempo de viaje, pero la precisión de los resultados dependen de la geometría de la red subyacente. **H. Sadeghi, S. Suzuki y H. Takenaka** [28] en 1999 propone el algoritmo microgenético, el cual combina el método de pseudo-doblamiento del rayo y un algoritmo genético para calcular los rayos. Al combinar estos algoritmos, ellos evitan complicaciones que surgen con discontinuidades dentro de la función de velocidad. Sin embargo, su método es dependiente de la conjetura inicial.

Como una alternativa a estos algoritmos de búsqueda, **V. Vinje, K. Astebol, E. Iversen y H. Gjoystdal** [37], [38] y [39] proponen un método en el cual los frentes de onda son calculados por el trazado de rayos en elementos cortos en 2 y 3 dimensiones, respectivamente. Este método usa el trazado de rayos para calcular las formas de los elementales frentes de ondas que se propagan en variaciones lenta dentro de medios inhomogéneos. Aunque son rápidos y robustos en la práctica, sus principales desventajas son la dificultad con el mapeo de datos espaciados irregularmente en mallas regulares.

Capítulo 3

Trazador de rayos por Recocido Simulado: Método de Doblamiento del Rayo

En este trabajo especial de grado se propone un nuevo método trazador de rayos sobre el concepto de recocido simulado propuesto por Andrej Bóna, Michael Slawinski y Peter Smith en el artículo [5] presentado en el año 2009. Usando este método, se encontraron rayos entre fuentes y receptores fijos que hacen viajes de tiempo (tiempo de recorrido) del mínimo global. Con éste método planteado, es posible construir rayos y sus viajes de tiempo asociados a una precisión satisfactoria en medios complejos. Además, este algoritmo puede ser modificado para calcular rayos que hacen viajes de tiempo de mínimo local, tal como los rayos reflejados, al restringir el rayo que pasan por un conjunto de puntos que son libres de especificar o modificar.

En este capítulo se presenta una breve introducción del artículo [5] y luego se presenta una metodología concreta de lo que se realizó en el presente trabajo especial de grado.

3.1. Rayos

Un rayo describe una trayectoria o camino de la señal. Las propiedades del medio son dadas por la función $V(\vec{x})$, el cual describe la velocidad en un ruta en cualquier punto \vec{x} dentro del medio. En este trabajo, se consideró un medio en 2 dimensiones, donde se denotó un solo punto dentro del medio con coordenadas $\vec{x} = (x, z)$.

El viaje o recorrido de tiempo a lo largo de un rayo γ dependen de la velocidad y el camino, es decir:

$$T(V(\vec{x}); \gamma) = \int_{\gamma} \frac{ds}{V(\vec{x})}$$

Donde ds es el elemento de longitud de arco y γ conecta los puntos fijos de los extremos con el inicial (en sí γ indica el camino aleatorio generado inicialmente).

El problema de este estudio para encontrar rayos puede ser resuelto visto como un problema variacional de Fermat para encontrar un camino de un tiempo de viaje estacionario entre una fuente y un receptor. Esta idea ya habia sido planteada por **V. Cervený** [11] y luego por **A. Bóna y M. Slawinski** [4].

3.2. Recocido Simulado

El recocido simulado es usado en matemáticas y física para obtener en problemas de optimización sujetos a restricciones una solución, uno de los artículos más famosos fue el de **V Cerný** [9]. **D. Velis y T. Ulrych** [35] usaron este método dentro del contexto de trazador de rayos, desarrollando un algoritmo para buscar el ángulo de despegue del rayo que minimaliza el tiempo de viaje en medios 2D. Estos autores **Velis y Ulrych** [35] extendieron su algoritmo trazador de rayos sísmicos a cálculos en medios 3D. La diferencia clave entre su algoritmo y el que se presenta en este trabajo, es que su algoritmo esta basado en variar el ángulo de despegue del rayo inicial, mientras que este está basado en variaciones al camino en sí mismo.

Este método planteado en el presente trabajo, supera las deficiencias comunes de los dos anteriores métodos de doblamiento del rayo. Primero, las soluciones que se presentan en este método son independientes del camino inicial elegido (ya que el camino elegido inicialmente es aleatorio). Segundo, este método no requiere usar variaciones de enlentecimiento en los modelos de velocidad y se demuestra la aplicabilidad del mismo método con varios modelos complejos de velocidad (en el artículo se utilizaron 2 modelos complejos). Usando una forma lineal no homogénea y un modelo elípticamente anisotrópico, se demostró que este método puede construir rayos en medios lentos y que puede ser generalizado a problemas de 3 puntos (problemas en 3D), el cual es aplicable para calcular rayos restringidos a pasar a través de múltiples interfaces. Luego se estudió el modelo de Marmousi, calculando rayos en estructuras de velocidades complejas con una precisión comparable a los otros métodos trazadores de rayos existentes.

En física, recocido es un proceso físico dentro del cual un sólido en un baño caliente se funde por incrementar la temperatura del baño de calor a un valor en el cual todas las partículas se disponen al azar en una fase líquida. Luego esto es seguido de un enfriamiento de las partículas de vuelta a la fase sólida al bajar lentamente la temperatura de el baño caliente. Ya que el líquido se enfría, se debe permitir que alcance el equilibrio térmico con el baño de calor para asegurar que las partículas se depositan en el estado de mínima energía al llegar al punto de congelación. Esto se conoce como la configuración del estado fundamental del sistema o simplemente como el estado fundamental, planteado por **P. Chaikin y T. Lubensky** [12].

Si el proceso de enfriamiento ocurre muy rápido, se corre el riesgo de defectos de enfriamiento en el sólido.

El recocido simulado esta basado en la analogía entre la simulación del recocido de

sólidos y el problema de resolver los grandes problemas combinatorios propuestos por **V. Laarhoven** y **E. Aarts** [33].

Este método fue desarrollado por **S. Kirkpatrick** [17] y **V. Cerný** [9], el cual se basa en aplicar el razonamiento de la mecánica estadística para resolver problemas de optimización. El objetivo es construir la solución óptima (el estado fundamental) para un problema concreto (el sistema) mediante la variación de una solución de prueba de acuerdo con un protocolo específico (primero un calentamiento y luego un enfriamiento del sistema) con respecto a un parámetro particular, en este caso la temperatura.

Se usó el algoritmo Metropolis para llevar a cabo las perturbaciones a cada temperatura. Una completa descripción del algoritmo Metropolis y sus aplicaciones a simulaciones de sistemas mecánicos estadísticos, están planteadas en el primer artículo [20] referente a este caso registrado en 1953, originado por Nicholas Metropolis, Arianna Rosenbluth, Marshall Rosenbluth, Augusta Teller y Edward Teller, y generalizado en 1970 por W. K. Hastings, es probablemente el método Monte Carlo más utilizado en la Física, y tiene como objetivo determinar valores esperados de propiedades del sistema simulado, a través de una media sobre una muestra. El algoritmo es concebido de modo a obtenerse una muestra que siga la distribución de Boltzmann. Para determinarse la probabilidad de una dada configuración, sería necesario conocer la oportunidad de ocurrencia de todas las otras configuraciones. En el caso de variables continuas, sería necesario una integración de la densidad de probabilidad sobre todo el espacio de configuraciones, pero ese procedimiento es muy costoso ya que se utiliza un número de variables de la orden de centenares. Al pasar de los años otra propuesta interesante en el 2002 fue propuesta por **M. Newman** y **G. Barkema** [23].

La eficiencia del algoritmo de Metropolis está directamente conectada al hecho de no

llevar en cuenta la probabilidad de las configuraciones en sí, pero sí la razón entre ellas, pues la razón entre las probabilidades de dos configuraciones dadas puede ser determinada independientemente de las otras.

Las herramientas computacionales hoy en día son muy usadas para resolver diversos problemas planteados en física estadística y en muchas otras áreas, una de estas herramientas computacionales son los métodos de Monte Carlo, los cuales forman los más grandes y más importantes clases de métodos numéricos usados para solventar problemas de física estadística.

La parte más difícil de llevar a cabo una simulación de Monte Carlo es la generalización de un apropiado conjunto aleatorio de estados de acuerdo a la distribución de probabilidades de Boltzmann. Casi todos los regímenes de Monte Carlo se basan en procesos de Markov como el motor de generación para el conjunto de estados utilizados.

Para implementar el algoritmo de recocido simulado como un método para el trazado de rayo, se consideran las analogías existentes entre la teoría del rayo y la mecánica estadística.

3.3. Analogías entre la Teoría del Rayo y la Mecánica Estadística

El objetivo del recocido simulado, como método de optimización de una función objeto, consiste en simular el enfriamiento de un sistema físico mediante la búsqueda del mínimo óptimo de dicho problema. Dicha función objeto esta asociada al Hamiltoniano del sistema.

En este trabajo, se asociaron configuraciones de sistemas con caminos que conectan fuentes y receptores. Sea $\gamma_{(S,R)}$ el cual representa un camino particular o aleatorio que conecta una fuente S a un receptor R y sea $T_{(\gamma)}$ denotado como el tiempo de viaje asociado a este camino.

El objetivo de este estudio, también se basa en encontrar el camino que minimiza el tiempo de viaje existente entre la fuente y el receptor. Entonces, dentro de este contexto, es natural asociar energías con tiempos de viajes a lo largo de un camino. Como resultado, entonces, el estado fundamental es el camino que minimiza el tiempo de viaje a lo largo del mismo. Por lo tanto, el rayo encontrado (el que recorre el camino que minimiza el tiempo) corresponde a el estado fundamental.

Para representar el papel del baño caliente dentro del trazado de rayos, se utilizó el parámetro τ , el cual tiene unidades de tiempo. Se disminuiría el valor de este parámetro de la misma forma que se disminuiría la temperatura del baño caliente en el recocido simulado.

3.4. Metodología del trazador de rayos

3.4.1. Rayos: Discretización y Parametrización

Se representa un medio 2D por una red \mathcal{D} de $N = L_x \times L_z$ puntos, donde L_x denota el número de puntos a lo largo del eje x y del eje z respectivamente. Los parámetros h_x y h_z denotaran el espaciamiento sobre \mathcal{D} .

Sea S la fuente, R el receptor y $\gamma(s; S, R)$ el camino que conecta estos puntos y $\bar{\gamma}(s; S, R)$ una poligonal de M líneas con segmentos que tienen puntos finales sobre \mathcal{D} que aproximan $\gamma(s; S, R)$:

$$\gamma(s; S, R) \approx \bar{\gamma}(s; S, R) = \bigcup_{k=1}^M \bar{\gamma}_k(s) \quad (3.1)$$

El término $\bar{\gamma}_k(s)$ representa el k esimo-segmento de la poligonal:

$$\bar{\gamma}_k(s) = \mathbf{m}_k(s - s_0^k) + \mathbf{p}_k, \quad (3.2)$$

donde \mathbf{m}_k es la dirección y \mathbf{p}_k corresponde al punto inicial. La ecuación anterior representa un segmento de recta.

El tiempo de viaje real es calculado sobre la malla, por la ecuación de aproximación (3.1), entonces:

$$\mathbf{T}(V(\bar{x}); \gamma) \approx \sum_{k=1}^M \mathbf{T}(V(\bar{x}); \bar{\gamma}_k) \quad (3.3)$$

y $\mathbf{T}(V(\bar{x}); \bar{\gamma}_k)$ denota el tiempo de viaje de la señal a lo largo del k -ésimo segmento del rayo con $V(\bar{x})$ siendo la velocidad de la señal.

La velocidad se escala de acuerdo a las distancias dimensionales sobre la “red” o “malla” y se expresa en unidades de $m.s^{-1}$.

El tiempo de viaje de una señal de propagación a lo largo de $\bar{\gamma}_k$ es:

$$\mathbf{T}(V(\bar{x}); \bar{\gamma}_k(s)) = \int_{s_0^k}^{s_f^k} \frac{ds}{V(x(s), z(s))} \quad (3.4)$$

La ecuación (3.4) puede ser integrada numéricamente.

El problema que se aborda es minimizar el tiempo de viaje \mathbf{T} sobre el conjunto de trayectorias que unen S y R en términos de la aproximación $\bar{\gamma}$ determinamos:

$$\mathbf{T}^* = \min \sum_{k=1}^M \mathbf{T}(\bar{\gamma}_k) \quad (3.5)$$

y una trayectoria $\bar{\gamma}$ sobre la cual se alcanza \mathbf{T}^* , es decir, un punto del conjunto:

$$\mathcal{M} = \{\bar{\gamma} \in \Gamma : \mathbf{T}(\bar{\gamma}) = \mathbf{T}^*\} \quad (3.6)$$

Para este fin, sea $\lambda > 0$ y consideramos la función de probabilidad sobre Γ :

$$\mathbb{P}_\lambda(\bar{\gamma}) = \frac{e^{-\lambda \mathbf{T}(\bar{\gamma})}}{\sum_{\bar{\gamma} \in \Gamma} e^{-\lambda \mathbf{T}(\bar{\gamma})}} \quad (3.7)$$

Al multiplicar el numerador y el denominador de lo anterior por $e^{\lambda \mathbf{T}^*}$:

$$\mathbb{P}_\lambda(\bar{\gamma}) = \frac{e^{\lambda(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}(\bar{\gamma}))}}{\sum_{\bar{\gamma} \in \Gamma} e^{\lambda(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}(\bar{\gamma}))}}, \quad (3.8)$$

donde Γ es el conjunto de trayectorias y como $\Gamma = \mathcal{M} \cup \mathcal{M}^c$, entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{\gamma} \in \Gamma} e^{\lambda(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}(\bar{\gamma}))} &= \sum_{\bar{\gamma} \in \mathcal{M}} e^{\lambda(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}(\bar{\gamma}))} + \sum_{\bar{\gamma} \in \mathcal{M}^c} e^{\lambda(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}(\bar{\gamma}))} \\ &= \sum_{\bar{\gamma} \in \mathcal{M}} 1 + \sum_{\bar{\gamma} \in \mathcal{M}^c} e^{\lambda(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}(\bar{\gamma}))} \\ &= \#\mathcal{M} + \sum_{\bar{\gamma} \in \mathcal{M}^c} e^{\lambda(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}(\bar{\gamma}))} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Donde $\#\mathcal{M}$ denota el número de elementos de \mathcal{M} . Sustituyendo (3.9) en (3.8), entonces:

$$\mathbb{P}_\lambda(\bar{\gamma}) = \frac{e^{\lambda(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}(\bar{\gamma}))}}{\#\mathcal{M} + \sum_{\bar{\gamma} \notin \mathcal{M}} e^{\lambda(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}(\bar{\gamma}))}} \quad (3.10)$$

Como $\mathbf{T}^* - \mathbf{T}(\bar{\gamma}) < 0$, entonces, para $\bar{\gamma} \notin \mathcal{M}$ al hacer tender $\lambda \rightarrow +\infty$, se tiene que:

$$\mathbb{P}_\lambda(\bar{\gamma}) \rightarrow \frac{\delta_{\mathcal{M}}(\bar{\gamma})}{\#\mathcal{M}} \quad (3.11)$$

y

$$\delta_{\mathcal{M}}(\bar{\gamma}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \bar{\gamma} \in \mathcal{M} \\ 0 & \text{si } \bar{\gamma} \notin \mathcal{M} \end{cases} \quad (3.12)$$

Esto dice que cuando λ es grande la atención se concentra sobre \mathcal{M} . De esta forma se construye una cadena de Markov con distribución límite $\mathbb{P}_\lambda(\bar{\gamma})$, (para λ grande).

Un método para construir una tal cadena es introducir el concepto de trayectorias cercanas y utilizar el algoritmo de **Metropolis-Hastings**. En este algoritmo se moveran de una trayectoria $\bar{\gamma}^{(i)}$ a una $\bar{\gamma}^{(j)}$ (“Cercanas”) con probabilidad:

$$\mathbb{P}(\bar{\gamma}^{(i)} \rightarrow \bar{\gamma}^{(j)}) = \min \left\{ \mathbf{1}, \frac{e^{-\lambda \mathbf{T}(\bar{\gamma}^{(j)})} / \mathbf{N}(\bar{\gamma}^{(j)})}{e^{-\lambda \mathbf{T}(\bar{\gamma}^{(i)})} / \mathbf{N}(\bar{\gamma}^{(i)})} \right\} \quad (3.13)$$

Si se elige:

$$\mathbf{N}(\bar{\gamma}^{(j)}) = \mathbf{N}(\bar{\gamma}^{(i)}) \quad (3.14)$$

Entonces:

$$\mathbb{P}(\bar{\gamma}^{(i)} \rightarrow \bar{\gamma}^{(j)}) = \min \{ \mathbf{1}, e^{-\lambda \mathbf{T}(\bar{\gamma}^{(j)}) - \mathbf{T}(\bar{\gamma}^{(i)})} \} \quad (3.15)$$

Cuando la cadena de Markov esta en el estado $\bar{\gamma}^{(i)}$, se elige la trayectoria $\bar{\gamma}^{(j)}$ y si $\Gamma(\bar{\gamma}^{(j)}) \leq \mathbf{T}(\bar{\gamma}^{(i)})$, la cadena se mueve al estado $\bar{\gamma}^{(j)}$ y si no la cadena se mueve a $\bar{\gamma}^{(j)}$ con probabilidad $e^{[\lambda \{ \mathbf{T}(\bar{\gamma}^{(i)}) - \mathbf{T}(\bar{\gamma}^{(j)}) \}]}$ o permanece en el estado $\bar{\gamma}^{(i)}$ con probabilidad $\mathbf{1} - e^{[\lambda \{ \mathbf{T}(\bar{\gamma}^{(i)}) - \mathbf{T}(\bar{\gamma}^{(j)}) \}]}$.

La limitación es que se eligió “ λ grande” fijo, si la cadena entra en una trayectoria $\bar{\gamma}$ que al evaluarla $\mathbf{T}(\bar{\gamma})$ tenga un valor pequeño, entonces la cadena podría tardar mucho tiempo en moverse a un estado diferente.

En la práctica λ no se toma fijo si no que se escoge por medio de una sucesión $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ que crezca a infinito lentamente, por ejemplo, $\lambda_n = c \lg(1 + n)$. De manera que al principio ocurren muchos cambios y luego la sucesión crece permitiendo menos cambios.

Si se define $\tau_n = \frac{1}{\lambda_n}$, la distribución $\mathbb{P}_{\tau_n} \propto e^{\lambda(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}(\bar{\gamma}))}$ es una distribución de Gibbs o conocida también como una distribución de Boltzmann¹.

La probabilidad de aceptación A de moverse de un camino γ_i a γ_j en τ es:

$$A(\gamma_i \rightarrow \gamma_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta T \leq 0 \\ e^{(-\frac{\Delta T}{\tau})} & \text{si } \Delta T > 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Donde $\Delta \mathbf{T} = \mathbf{T}(\gamma_j) - \mathbf{T}(\gamma_i)$ es el cambio del tiempo de viaje de las señales asociadas con la perturbación del camino.

Cualquier perturbación que disminuye el tiempo de viaje a lo largo del camino es aceptada automáticamente, aunque cualquiera de las perturbaciones que incrementen el tiempo de viaje son aceptadas con una probabilidad que disminuyen con la temperatura. Por ejemplo, las perturbaciones que aumentan el tiempo de viaje a lo largo del camino por $\Delta \mathbf{T}(\gamma_j) \approx \tau$ tiene un 30 % de probabilidad de aceptación en ese particular τ .

Cuando τ disminuye, esta probabilidad disminuye, así que las perturbaciones de este tamaño tienen menos probabilidades de ser aceptada.

3.4.2. Algoritmo: Recocido Simulado

A continuación se presenta brevemente el algoritmo pseudoformal referente al recocido simulado, el cual posteriormente se implementó en el programa *Octave* (y puede ser apreciado completamente en la sección de los **Apéndices**).

¹La distribución de Boltzmann consiste en una cierta función de distribución o medida de probabilidad para la distribución de los estados de un sistema específico.

 Algoritmo: Recocido Simulado

Proponer trayectoria inicial γ_0 y temperatura τ_0 .

Calcular tiempo de viaje T_0 de γ_0 .

En la iteración $k \geq 1$.

Mientras que $\tau_k < TOL$.

{

Proponer nueva trayectoria γ^* utilizando el algoritmo de perturbación aleatoria (3.4.4) para trayectorias.

Calcular el tiempo de viaje T^* asociado a γ^* .

Si $T_{k-1} > T^*$

{

Entonces $T_k = T^*$ y $\gamma_k = \gamma^*$.

}

Si no $T_{k-1} \leq T^*$

{

Se genera u uniforme en el intervalo $[0, 1]$ y se acepta o rechaza:

$$(T_k, \gamma_k) = \begin{cases} (T^*, \gamma^*) & \text{si } u < e^{-\frac{T^* - T_{k-1}}{\tau_{k-1}}} \\ (T_{k-1}, \gamma_{k-1}) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

}

Actualizar la temperatura τ_k .

}

En el algoritmo anterior se consideraron los siguientes esquemas de enfriamiento:

- Descenso Geométrico

$$\tau_k = \alpha\tau_{k-1}, \quad \text{donde, } \alpha \in [0.8, 0.99]$$

- Descenso de Boltzmann

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1 + \lg(k)}$$

- Descenso de Cauchy

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1 + k}$$

- Esquema de Lundi y Mees

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1 + \text{beta}(k)}$$

3.4.3. Trazado de Rayos usando el Recocido Simulado

Para $S = (x_s, z_s)$ y $R = (x_r, z_r)$, se comienza con una suposición de un rayo $\bar{\gamma}^0(\xi)$ que tiene M segmentos. La parametrización es determinada por la ecuación (3.2), y su tiempo de viaje es calculado por la ecuación (3.3). Para simplificar, se elige una línea recta como una suposición inicial. Se comienza el proceso del recocido con una alta temperatura, entonces todas las perturbaciones en el sistema son aceptadas, posteriormente se enfría el sistema hasta que este se fija o llega hasta un valor estacionario. Por lo tanto, la solución que se encontró en este trabajo de investigación no depende de la suposición inicial, ya que se aniquila al iniciar los cálculos.

En cada paso, se elige un punto al azar, $q = (x_q, z_q) \in \mathcal{D}$, que conecta 2 segmentos en $\bar{\gamma}^0(\xi)$. Luego, se elige 1 de 3 perturbaciones posibles al azar, sobre dicho punto:

- a) La eliminación del punto.
- b) Agregar otro punto.
- c) Mover el punto a otro diferente dentro de \mathcal{D}

Si es removido o eliminado el punto, se conectarían los puntos adyacentes al punto elegido q , como se observa en la figura 3.1

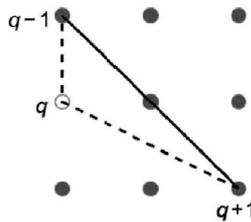


Figura 3.1: Perturbación que resulta de eliminar un punto $q \in \bar{\gamma}^0$.

Si se elige agregar otro punto, se divide el segmento a la izquierda o a la derecha de q y se conecta a un punto elegido aleatoriamente $q' \in \mathcal{D}$, como se observa en la figura 3.2

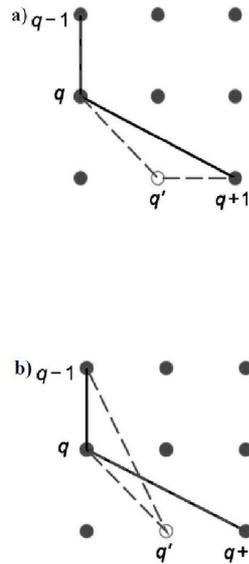


Figura 3.2: Perturbación del camino debido a la adición de otro punto. Los puntos $q \in \bar{\gamma}^0$ y $q' \in \mathcal{D}$ son elegidos aleatoriamente y el camino original es perturbado mediante el fraccionamiento de los segmentos y posteriormente se une a) $q - 1$ a q y b) q a $q + 1$ y luego se une a cada uno en q' , formando así los 2 diferentes caminos formados en las discontinuidades del segmento. Luego se selecciona el camino del tiempo de viaje más pequeño para subsiguiente cálculos.

Si elegimos mover el punto q a q' , como se observa en la figura 3.3.

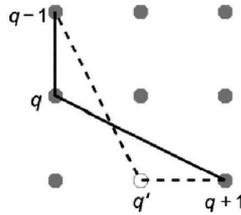


Figura 3.3: Perturbación del camino al mover el punto a otro diferente dentro de \mathcal{D} , es decir, mover el punto q a q'

Sea ΔT , el cual denota el cambio del tiempo de viaje correspondiente a la perturbación elegida: Agregar, quitar o mover el punto a lo largo del camino. Para el cambio del tiempo de viaje ΔT en τ , donde τ tiene unidades de tiempo y es el análogo de la temperatura en esta formulación, se aceptó esta perturbación usando la probabilidad de aceptación A , dada por la ecuación (3.16).

3.4.4. Algoritmo: Tipo de perturbación elegida al azar

En el algoritmo pseudoformal presentado a continuación se muestra la elección del tipo de perturbación elegida aleatoriamente en el trazado de rayos usando recocido simulado.

Algoritmo: Tipo de perturbación elegida al azar

```
Elegir un punto  $P_i$  sobre la trayectoria aleatoriamente.
Elegir el tipo de perturbación que se aplicará.
Si se eligió eliminar entonces
{
  Redefinir la trayectoria eliminando el punto  $P_i$ .
}
Si no
{
  Si se eligió insertar entonces
  {
    Elegir donde se va a insertar el nuevo punto.
    Si se insertará antes entonces
    {
      Seleccionar uno de los ocho vecinos de  $P_i$  y redefinir
      la trayectoria insertando el punto seleccionado, antes de  $P_i$ .
    }
    Si no (entonces se inserta después)
    {
      Seleccionar uno de los ocho vecinos de  $P_i$  y redefinir
      la trayectoria insertando el punto seleccionado, después de  $P_i$ .
    }
  }
  Si no (se eligió mover)
  {
    Seleccionar uno de los ocho vecinos de  $P_i$  y se redefine
    la trayectoria sustituyendo  $P_i$  por su vecino.
  }
}
```

3.4.5. Equilibrio y Tasa de enfriamiento

Analizando los desequilibrios y equilibrios que ocurren en la naturaleza, se pueden observar que cuando existe un flujo de calor entre dos subsistemas, uno de ellos está más caliente que el otro, hasta que se igualan las temperaturas al llegar al equilibrio. Es por ello que al alcanzar el equilibrio, tanto la temperatura, como la presión o la concentración están bien definidas, **V. Alonso** [1].

Es por ello, que para que se equilibre el camino correctamente con respecto a τ , se necesita elegir el número de caminos ν con cuidado. Se elige ν como un múltiplo entero del número de puntos de rejilla N , entonces se selecciona cada punto en la rejilla por lo menos una vez por temperatura en promedio.

Si se elige ν con un valor pequeño, el sistema podría no estabilizarse y se podría encontrar con una configuración que no sea la óptima. Por el contrario, si se elige un ν con valor grande, se estaría sacrificando eficiencia por precisión.

Para los resultados presentados en este trabajo, nosotros elegimos $\nu = 10N$. Para valores menores de ν se obtienen resultados de similar precisión; sin embargo, se sigue con ν suficientemente grandes, como para garantizar que todos los puntos de la rejilla son suficientes sin un mayor coste computacional.

Para simular el proceso de enfriamiento dentro del proceso de recocido simulado, uno puede seguir varios procedimientos, entonces:

Y. Nourani y **B. Andersen** [24] investigaron las propiedades de varios procedimientos de enfriamiento implementado en varios estudios de recocido simulado. Ellos consideran constante la velocidad termodinámica, exponencial, logarítmica y las tasas de enfriamiento lineal. Las comparaciones se basan en la cantidad de entropía producidas durante el proceso de recocido para estados iniciales

y finales dados y un número fijo de iteraciones.

El sistema de refrigeración genera la menor cantidad de entropía, este sistema se considera el mejor; En su estudio, la tasa de la velocidad constante termodinamica es tambien buena; siempre se encontró el mínimo global del sistema dentro del número preescrito de iteraciones.

Para estas simulaciones del proyecto de grado, se usó el Descenso Geométrico como esquema de enfriamiento, el cual se traduce en la siguiente secuencia:

$$\tau_k = \alpha\tau_{k-1}, \quad \text{donde, } \alpha \in [0.8, 0.99]$$

Donde $k = 0, 1, 2, \dots$ denota el i -ésimo paso de enfriamiento dentro del proceso de recocido y α corresponde a la velocidad de enfriamiento. Aunque esta tasa no tiene una rápida convergencia a la tasa constante de velocidad termodinamica, esta originó los mejores resultados de todas las de todas las tasa fijas de los sistemas de enfriamiento considerados.

La aplicación adaptativa progresivamente de las tasas, como por ejemplo la tasa constante de la velocidad termodinámica puede ser estudiada en un trabajo futuro.

El paso final antes de correr las simulaciones, es elegir aproximadamente valores τ_0 y α . El valor de τ_0 es elegido para cada modelo de tal manera que la tasa de aceptación es cercana a la unidad al comienzo de los cálculos.

Para la tasa o sistema de enfriamiento de este estudio, se eligió $\alpha = 0,84$ y se enfrió para 25 temperaturas. Esto permite que se enfríe el sistema en varios órdenes de magnitud de temperatura. Valores mayores de α dan lugar a una lenta tasa de enfriamiento, donde la posibilidad de aceptar menos mínimos locales entra en juego; pero resultando en un necesario costo mayor de cómputo científico, mientras que

valores menores de α dan lugar a una rápida tasa de enfriamiento, donde la posibilidad de aceptar mínimos locales aumenta. También la optimización de los valores de α pueden ser estudiados en trabajos futuros.

Se derivó la tasa de enfriamiento mediante la construcción de 100 rayos entre una fuente dada y un par de receptores y se observó que el conjunto de parámetros da el mejor balance entre precisión y eficiencia.

Con la tasa de enfriamiento señalada anteriormente, se contruyó un conjunto de rayos para los cuales sus viajes de tiempos difieren en el orden de milisegundos o menos. Mayores tasas de enfriamiento con mayores valores de ν son mas precisos, a expensas de eficiencia. Por lo tanto, la información y resultados presentados aqui se encuentran dentro de la precisión de la escala de error experimental adecuada.

Capítulo 4

Resultados Experimentales y Análisis

Los conceptos desarrollados en los capítulos anteriores permiten implementar un algoritmo trazador de rayos sísmicos mediante el proceso de recocido simulado.

En este capítulo se reportan los resultados obtenidos al evaluar la versión final del algoritmo, sobre un modelo sintético (Medio Exponencial linealmente heterogéneo) y un modelo encontrado en la literatura (Modelo de Marmousi) donde se construyeron rayos y calcularon los tiempos de viaje asociado a dichos modelos de velocidades.

- a) Modelo 1: Medio Exponencial linealmente heterogéneo.
- b) Modelo 2: Modelo de Marmousi.

Se presentaron resultados para dos y tres puntos de los cálculos del trazado de rayo que conectan una fuente y receptor.

En el comienzo de cada cálculo, se obtuvo el tiempo de viaje entre cada posible conjunto de puntos en la rejilla. Ya que, como se incrementa el número de puntos, el tiempo que toma calcular las escalas de los tiempos de viaje se toma como $\frac{N(N-1)}{2}$,

donde N es el número de puntos sobre la rejilla cuadrada o cuadrícula.

Se necesita llevar a cabo este cálculo una sólo vez por simulación, siempre y cuando no se hagan modificaciones en la malla geométrica. Esto es crucial cuando N es grande. Sin embargo, la cantidad de memoria disponible impone límites estrictos sobre el número de puntos que se pueden considerar en dichos cálculos. Además, este paso no es equivalente a calcular todos los rayos posibles; el propósito de este cálculo es ofrecer una mirada o vista previa a grandes rasgos de todo el proceso de recocido simulado cuando se calculan las perturbaciones de un camino.

Para cada modelo, se construyó rayos entre la fuente y todos los posibles pares (fuente-receptor). Luego se usó esta información para reconstruir cualitativamente las formas de los frentes de ondas mediante el trazado de todos los puntos que se encuentran en la isócrona $T = t$ usando el software matemático.

Pero antes de construir los datos de la isócrona para cada modelo, se construyeron 100 rayos conectando la fuente a un específico receptor para adquirir un conocimiento en como el presente algoritmo se comportaría en los medios considerados.

Los resultados obtenidos en el algoritmo pueden ser vistos con una precisión de una parte en 10^4 . Los tiempos de viaje de los rayos construidos en la presente simulación están de acuerdo con cada punto donde se comenzó el cálculo hasta otro cierto punto (fuente-receptor).

El algoritmo presentado en este trabajo no produce el tiempo de viaje mínimo absoluto como para alcanzar el 100 por ciento de precisión, pero si es realmente bueno, la diferencia en el camino entre el mínimo y máximo del tiempo de viaje observado cuando la temperatura se llega a cero es pequeña, por lo que se podría estar en presencia de un mínimo local y no un mínimo global, el cual es el esperado.

Sin embargo, cabe destacar que justamente al usar el proceso de recocido simulado se aumentó la precisión considerablemente en comparación con otros trabajos realizados, este método es muy preciso para los medios lo suficientemente suaves.

Todas las simulaciones se realizaron usando un código en serie sobre un procesador Intel Core i5 CPU M450 a 2,40GHz.

Utilizando el proceso de recocido simulado indicado anteriormente, el cálculo de cada rayo tomó cerca de un aproximado de 1,38 s de tiempo de CPU.

Le tomó aproximadamente 4 horas y 48 minutos para realizar el cálculo de un conjunto de rayos a partir de una fuente especificada a todos los puntos sobre la rejilla.

Además, se podrá comparar los resultados del modelo de Marmousi con los resultados publicados en la literatura y comentar posteriormente sobre cómo estos resultados coinciden.

La principal preocupación con este trabajo, consiste en mostrar que el método presentado aquí es no exacto. Para ello, se utilizó una red o rejilla de 100×100 para muestrear el dominio de cada modelo empleado.

Se tiene que tener claro que no se le presta mucho atención a las comparaciones de tiempo de CPU, más allá de citar la cantidad de tiempo necesario para realizar los cálculos necesarios, ya que el algoritmo presente en este trabajo podría ser mejorado con algún otro proceso de optimización, el cual correspondería a un próximo o futuro trabajo de investigación.

4.1. Pruebas Realizadas

Para validar la calidad del software desarrollado se realizaron dos tipos de pruebas. La primera prueba consistió en un modelo teórico, (Medio Exponencial linealmente heterogéneo) ya que en los medios utilizados para estas pruebas se conoce una solución analítica para el comportamiento de los rayos, de modo que es posible determinar tanto la trayectoria del rayo como su tiempo de viaje. En la segunda prueba se utilizó un medio complejo, (Modelo de Marmousi) donde no se conoce una solución analítica para el problema. Sin embargo este tipo de prueba permite evaluar el comportamiento del algoritmo en lo que a convergencia se refiere.

A pesar de que el algoritmo permite el trazado del rayo correspondiente a cualquier tipo de onda (P , SV o SH), en todas las pruebas que se presentan se calculó la trayectoria y tiempos de viajes de los rayos correspondientes a una onda tipo P (onda primaria).¹

4.1.1. Primer modelo de prueba: Medio Exponencial linealmente heterogéneo

Se consideró primeramente como modelo de prueba un Medio Exponencial linealmente heterogéneo (Ver Figura 4.1) para probar el algoritmo trazador de rayos sísmicos usando recocido simulado, este modelo presentado es de caracter teórico, lo que permitió comparar los tiempos de viajes (experimentales) obtenidos para diferentes ubicaciones del receptor con los tiempos de viajes teóricos calculados mediante la ecuación (4.1).

¹Las ondas tipo P también se conocen como ondas compresionales o longitudinales, las cuales se desplazan perpendicularmente a la dirección de propagación.

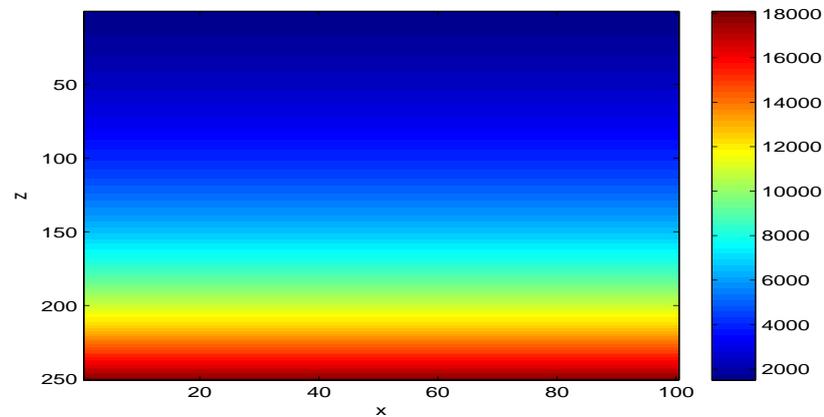


Figura 4.1: Medio exponencial linealmente heterogéneo (velocidad expresada en m/s): Sobre un mallado de 100×250 puntos de muestreo del campo de velocidades a intervalos de 30 metros a lo largo de x y z .

El desempeño del algoritmo trazador de rayos sísmicos se evaluó utilizando este medio construido de manera sintética. Para la construcción de este medio se utilizó un algoritmo de interpolación de superficies mediante el uso de una rejilla geométrica de 100×100 puntos implementado a partir de las ideas presentadas en el Capítulo 3.

El tipo de medio presente en este modelo es isotrópico heterogéneo, con capas homogéneas, la característica principal de la velocidad en este medio es que la misma es constante en cada capa pero con diferente valor en cada una de ellas según se indica en la figura 4.1. Además se consideraron a las interfaces planos paralelos a la superficie.

En esta prueba se intenta modelar un medio heterogéneo donde la velocidad aumenta exponencialmente con la profundidad. Este medio fue utilizado por V. Grechka y G. McMechan [13] para probar el algoritmo trazador de rayos que ellos proponen.

En el medio utilizado por V. Grechka y G. McMechan [13] la velocidad de la onda

quedaba definida mediante la expresión:

$$V_{(z)} = V_0 e^{k \cdot z}, \quad (4.1)$$

donde $V_0 = 1500 \frac{m}{seg}$ y $k = 1500 m^{-1}$.

- $V_0 \rightarrow$ Amplitud
- $k \rightarrow$ Constante
- $z \rightarrow$ Profundidad

La ecuación (4.1) como se dijo anteriormente indica que la velocidad del rayo que recorre el modelo exponencial al utilizar el algoritmo incrementa exponencialmente al aumentar la profundidad.

Para este medio, V. Grechka y G. McMechan [13] presentan una expresión analítica que permite determinar el tiempo de viaje del rayo que conecta una fuente localizada en $P_{fuente} = (1, 0, 1)$ con un receptor ubicado en $P_{receptor} = (x, 0, z)$. La expresión es la siguiente:

$$t_{(x,z)} = \frac{\sqrt{2(\cosh(kz) - \cos(kx))}}{kV_0 \exp(kz/2)} \quad (4.2)$$

En el cuadro 4.1 se muestra el tiempo de viaje (experimental) obtenido para cada uno de los rayos trazados y el tiempo de viaje calculado teóricamente mediante la ecuación (4.2). Se indica también en este cuadro las ubicaciones de los receptores correspondientes a estos tiempos y su respectivo error relativo.

Ubicación del Receptor (m)	Tiempo de viaje Experimental (s)	Tiempo de viaje Teórico (s)	Error Relativo
[10,100]	0.3448	0.3467	0,0055
[20,100]	0.3499	0.3509	0,0028
[30,100]	0.3552	0.3578	0,0073
[40,100]	0.3660	0.3669	0,0025
[50,100]	0.3789	0.3780	0,0024
[60,100]	0.3925	0.3906	0,0049
[70,100]	0.4094	0.4044	0,0124
[80,100]	0.4336	0.4188	0,0353
[90,100]	0.4492	0.4337	0,0357
[100,100]	0.4833	0.4485	0,0776

Cuadro 4.1: Tiempos de viaje calculados para diferentes ubicaciones del receptor en el medio Exponencial linealmente heterogéneo.

Debido a que el modelo del medio en el algoritmo que se propone es un medio estratificado, es decir, por capas, fue necesario discretizar este medio continuo. Para esto se consideró un mallado geométrico de 100×100 puntos, el cual posteriormente fue extrapolado a dicho modelo de prueba, simulando así capas separadas por superficies interfaces de forma plana.

Sin embargo, es importante destacar que estas exigencias computacionales no son imputables al algoritmo de optimización seleccionado (recocido simulado), sino que surgen de la complejidad del problema que se pretende resolver, es decir, conocer el comportamiento del rayo en el presente medio.

Si bien este medio no presenta mayor complejidad, resulta interesante ya que se conoce una solución analítica que permite determinar el tiempo de viaje del rayo que conecta una fuente con un receptor.

En base a los valores que aparecen en el cuadro 4.1 se determinó que el promedio del error relativo en el tiempo calculado experimentalmente es de 0,0186, lo cual sirve como indicador de la exactitud del algoritmo.

Si la diferencia entre los datos de tiempo de viaje de las ondas obtenidos experimentalmente y los resultados obtenidos teóricamente no alcanzaran la precisión deseada, sería necesario hacer modificaciones sobre el modelo con el fin de reducir estas diferencias. Es por ello, que existen diferentes estrategias para determinar como debe modificarse el modelo del medio, las cuales incluyen métodos del álgebra lineal, técnicas de optimización no lineal, entre otras.

Finalmente, una vez modificado el modelo y la estrategia de optimización, se utilizaría este como mejor estimado del medio para realizar una nueva iteración del algoritmo de inversión.

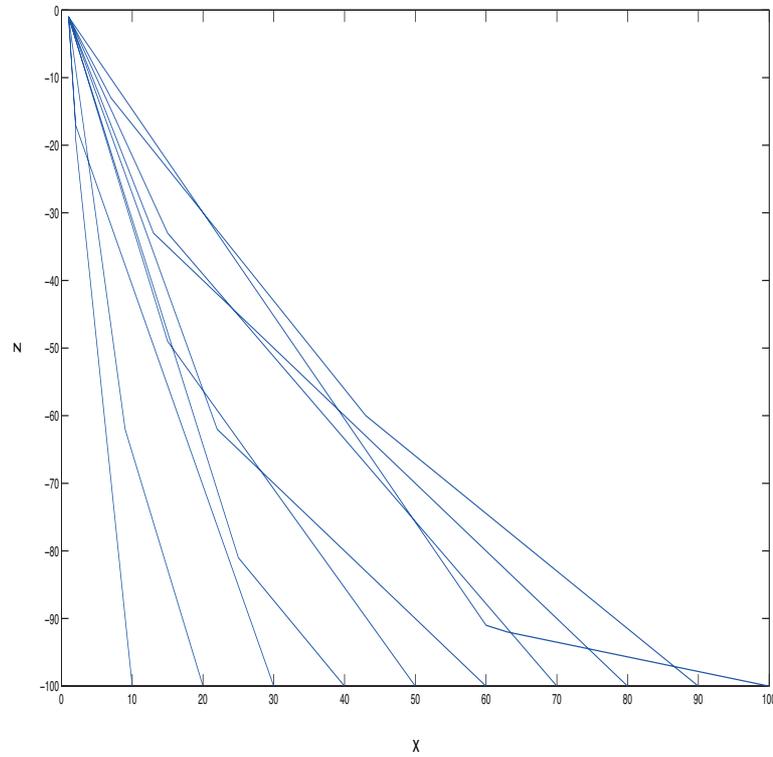


Figura 4.2: Trayectorias de algunos rayos.

Además se pueden apreciar gráficamente varios ejemplos de diferentes trayectorias de los rayos sísmicos (Ver Figura 4.2), conseguidas al fijar el emisor en el punto $[1, 1]$ y diferentes receptores en los puntos $[10, 100]$, $[20, 100]$, $[30, 100]$, $[40, 100]$, $[50, 100]$, $[60, 100]$, $[70, 100]$, $[80, 100]$, $[90, 100]$ y $[100, 100]$ correspondientes a 10 rayos.

4.1.2. Segundo modelo de prueba: Modelo de Marmousi

Ahora, se considera el modelo de Marmousi 2D **R. Versteeg y G. Grau** [34]. El modelo de Marmousi, fué creado inicialmente por el Instituto Francés de petróleo (IFP) y es usado comunmente en procesamiento de datos sísmicos como migración e inversión.

Al igual que en el modelo anterior se calcularon los rayos y sus viajes de tiempo asociados al modelo de prueba, en este caso, usando una versión de enlentecimiento de Marmousi. Como se dijo anteriormente para este modelo no se conoce una solución analítica para el comportamiento de los rayos. Dado el carácter irregular del campo de velocidades, se utilizó una rejilla cuadrada o cuadrícula de 100×100 puntos, la cual genera la mejor solución posible para el modelo de velocidad de muestreo de manera uniforme.

Los tiempos de viaje entre todos los puntos de la red de Marmousi se calculan a partir de un conjunto de datos de 384×122 puntos de muestreo del campo de velocidades a intervalos de 24 metros a lo largo de x y z . Al determinar el tiempo de viaje a lo largo de un segmento, se calcula el enlentecimiento o lentitud de acuerdo al más cercano punto de velocidad. El modelo de velocidad de enlentecimiento de Marmousi se representa en la figura 4.3.

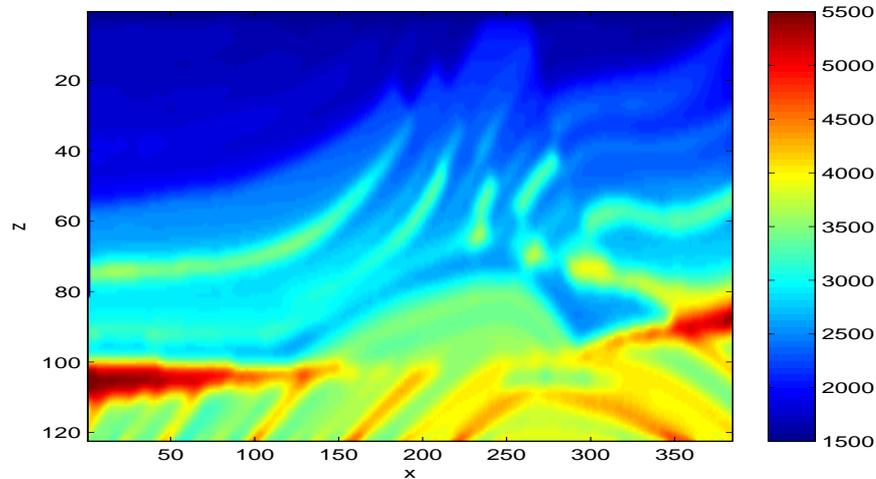


Figura 4.3: Modelo suavizado de Marmousi (velocidad expresada en m/s): Sobre un mallado de 384×122 puntos de muestreo del campo de velocidades a intervalos de 24 metros a lo largo de x y z .

En la figura 4.4, se trazaron un conjunto de tiempos de viajes correspondientes a las primeras llegadas provenientes de una fuente ubicada a $(6.0Km, 2.8Km)$ de profundidad, un conjunto de 384 puntos, espaciados uniformemente a lo largo de la superficie a intervalos de 24 metros, comparando así los resultados obtenidos por el método de recocido simulado encontrados por A. Bóna, M. Slawinski y P. Smith [5] y los encontrados por el método de trazado de rayo de Benamou [2].

Se graficaron los tiempos de viajes obtenidos para 100 rayos en el Modelo de Marmousi, como se observa en la figura 4.5. Para poder calcular dicho proceso, los tiempos de viajes de los 100 rayos tardaron aproximadamente 2 minutos y 53 segundos de tiempo de CPU. En esta simulación se colocaron los receptores en la primera fila del mallado geométrico (como si se colocaran en la superficie del terreno) mientras que la fuente se encontraba en un punto de coordenadas equivalente a $(6\text{ km}, 2.8\text{ km})$.

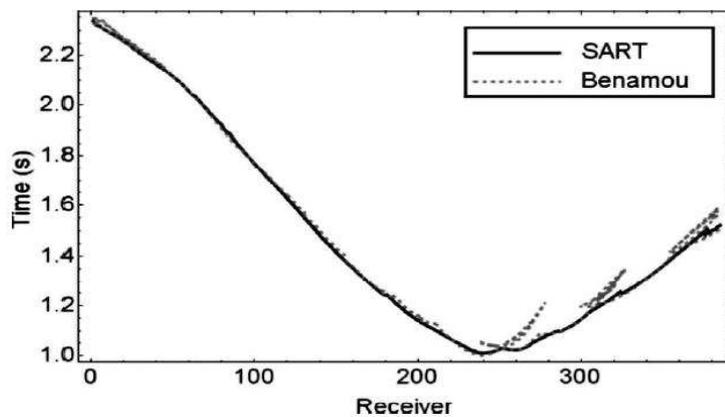


Figura 4.4: Comparación entre los resultados obtenidos por el método de recocido simulado encontrados por A. Bóna, M. Slawinski y P. Smith [5] y los encontrados por el método de trazado de rayo de Benamou [2].

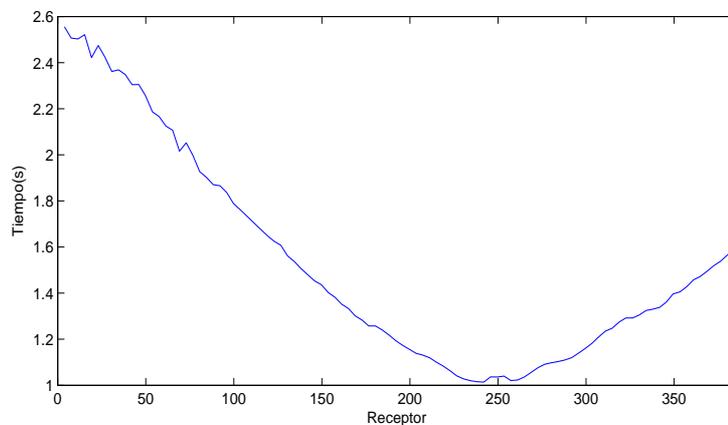


Figura 4.5: Tiempos de viajes obtenidos para 100 rayos en el Modelo de Marmousi.

Por lo tanto al comparar los resultados obtenidos (Ver Figura 4.5) con los encontrados en el artículo [5] (Ver Figura 4.4), se apreció una gran semejanza, por lo que se consideró como una buena convergencia el comportamiento de los rayos generados

por el algoritmo, dichos resultados fueron tabulados en el cuadro 4.2.

Cabe destacar que los resultados obtenidos en este T.E.G referente a los frentes de ondas del modelo de Marmousi no son explicados ni referenciados en su totalidad en el artículo de A. Bóna [5].

En la figura 4.6, se representan todos los frentes de ondas generados por el algoritmo en este trabajo y no todos cumplen con la propiedad fundamental para ser isocronas, ya que algunas se cortan entre sí, es decir, el fuerte ruido presente en algunos frentes de ondas son provocados por posibles errores de cálculo numéricos, presumiendo así que el algoritmo propuesto es mas preciso y util en modelos de velocidad suaves y no en modelos que presentan gran complejidad en estructuras geológicas.

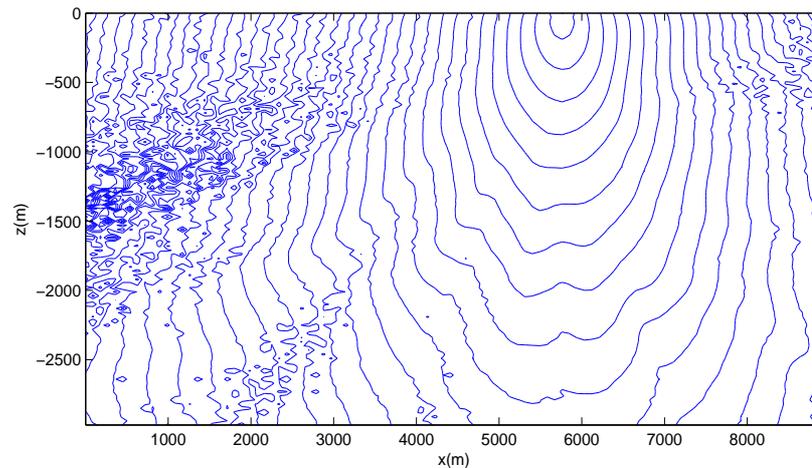


Figura 4.6: Frentes de ondas (re-escalados) obtenidos en este T.E.G usando el método de recocido simulado.

Es por ello, que para realizar una comparación mas realista se tomó la figura 4.6 y se adaptaron los ejes de tal modo que no se incluyera dicho ruido, generando así la figura 4.7, la cual muestra una gran precisión al ser comparada con la figura 4.8, la

cual corresponde a los frentes de ondas obtenidos en el artículo [5] usando el mismo método.

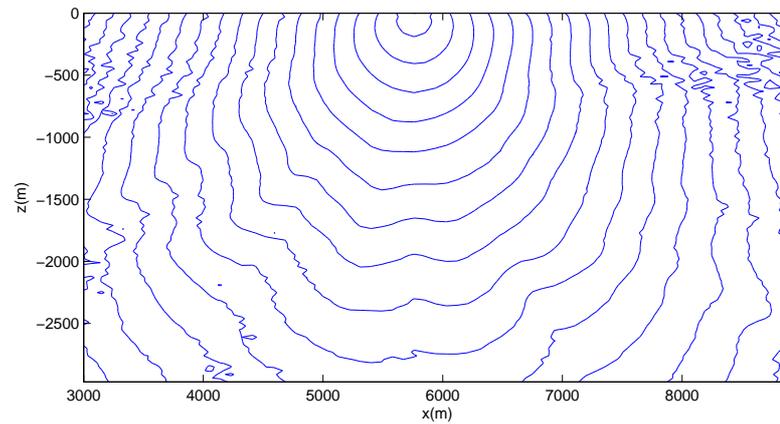


Figura 4.7: Frentes de ondas obtenidos en este T.E.G usando el método de recocido simulado.

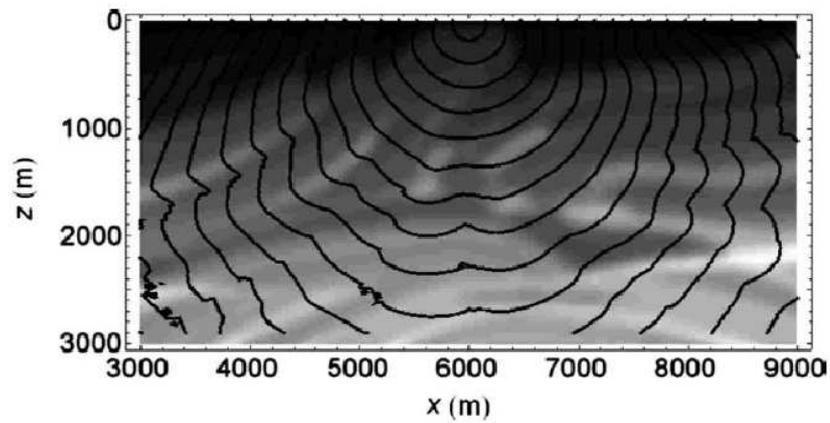


Figura 4.8: Frentes de ondas obtenidos en el artículo [5], usando el método de recocido simulado y posteriormente ploteado sobre el Modelo de Marmousi.

Ubicación del Receptor (m)	Tiempo de viaje Experimental (s)
[1,1]	2,5554
[6,1]	2,4741
[11,1]	2,3045
[16,1]	2,1246
[21,1]	1,9271
[26,1]	1,7888
[31,1]	1,6848
[36,1]	1,5058
[41,1]	1,3822
[46,1]	1,2577
[51,1]	1,1735
[56,1]	1,1004
[61,1]	1,0200
[66,1]	1,0400
[71,1]	1,0762
[76,1]	1,1204
[81,1]	1,2357
[86,1]	1,3051
[91,1]	1,3965
[96,1]	1,4947

Cuadro 4.2: Tiempos de viaje calculados para diferentes receptores en el modelo de Marmousi.

De las pruebas realizadas en los dos modelos de velocidad se puede observar que el modelo de Marmousi es más variable y por ende menos suavizado que el modelo Exponencial linealmente heterogéneo.

Además se construyeron las gráficas de *Tiempo Vs Iteración* para diferentes valores de α (0,8, 0,84, 0,9, 0,99) usando el Método Geométrico para enfriamiento, para poder así comparar y determinar cual valor brindaba mejor relación entre el espacio de búsqueda (aceptación de tiempos considerados mínimos por el algoritmo) y el número de iteraciones hasta alcanzar la condición de parada.

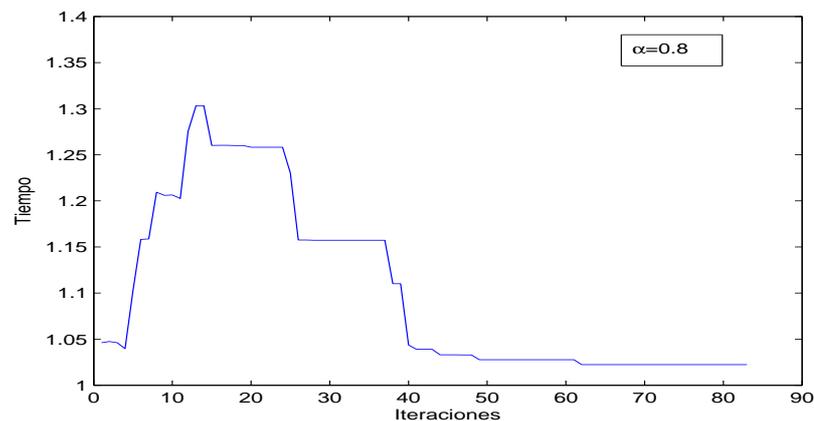


Figura 4.9: Valor de enfriamiento para $\alpha = 0,8$.

En base a los valores que aparecen en la figura 4.9 se determinó que, para este valor de enfriamiento ($\alpha = 0,8$) fueron necesarias aproximadamente 84,45 iteraciones del algoritmo de optimización para alcanzar la condición de parada.

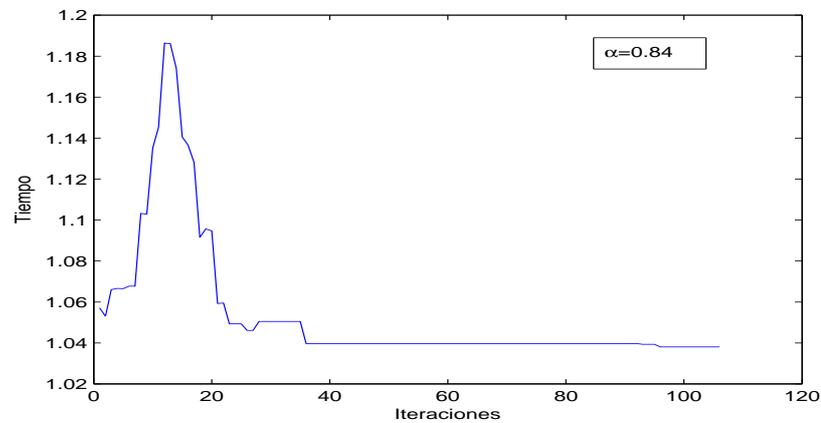


Figura 4.10: Valor de enfriamiento para $\alpha = 0,84$.

De la misma forma, en base a los valores que aparecen en la figura 4.10 se determinó que, para este valor de enfriamiento ($\alpha = 0,84$) fueron necesarias aproximadamente 108,35 iteraciones del algoritmo de optimización para alcanzar la condición de parada.

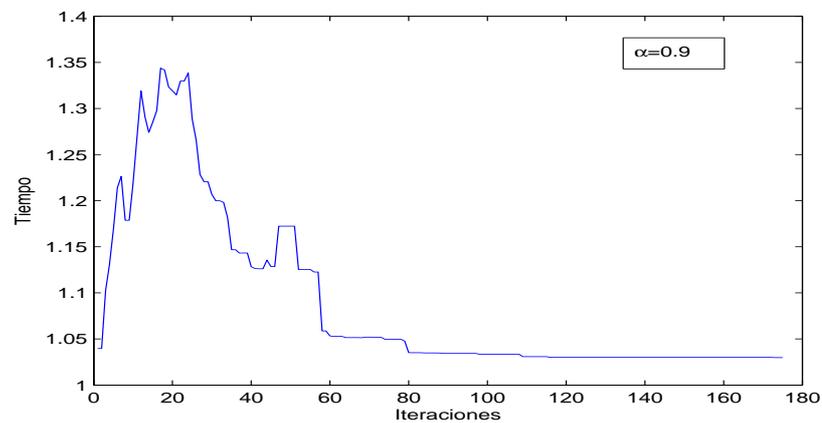


Figura 4.11: Valor de enfriamiento para $\alpha = 0,9$.

En la figura 4.11 se determinó que, para este valor de enfriamiento ($\alpha = 0,9$) fueron

necesarias aproximadamente 177,67 iteraciones del algoritmo de optimización para alcanzar la condición de parada.

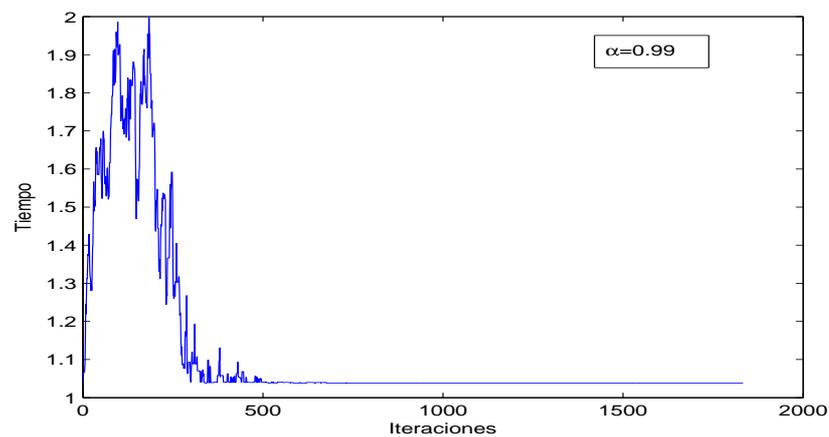


Figura 4.12: Valor de enfriamiento para $\alpha = 0,99$.

Por último, de acuerdo a los valores que aparecen en la figura 4.12 se determinó que, para este valor de enfriamiento ($\alpha = 0,99$) fueron necesarias aproximadamente 1810,24 iteraciones del algoritmo de optimización para alcanzar la condición de parada, por lo tanto, se puede apreciar específicamente que para este valor de enfriamiento se tiene el mayor espacio de búsqueda dentro del mallado (aceptación de tiempos) y conjuntamente el mayor número de iteraciones, pudiendo generar resultados más precisos, pero esto da lugar a una lenta tasa de enfriamiento, donde la posibilidad de aceptar menos mínimos locales entra en juego, pero resultando en una prolongación de tiempo de CPU debido al manejo de las grandes cantidades de datos que se manejan.

Encontrando así que para diferentes valores de α usando el Método Geométrico para enfriamiento ($\alpha = 0,8$, $\alpha = 0,84$, $\alpha = 0,9$, $\alpha = 0,99$), el valor de más adecuado fue el de $\alpha = 0,84$, ya que permite un equilibrio al aceptar tiempos de viajes en un espacio de búsqueda moderado y por lo tanto no requerir de tiempos muy prolongados de ejecución del algoritmo.

Conclusiones y Recomendaciones

El objetivo primordial alcanzado de manera satisfactoria fue proponer un reciente método de trazado de rayos sísmicos basado en el recocido simulado, propuesto Andrej Bóna, Michael Slawinski y Peter Smith [5] en el 2009, consiguiendo emular eficientemente los resultados obtenidos en dicha publicación.

Los modelos de velocidad presentados en este trabajo demuestran la utilidad del método propuesto.

Las pruebas realizadas permiten afirmar que el algoritmo se desempeña de una manera satisfactoria en diferentes tipos de medios que van desde medios simples, como lo son los medios isotrópicos heterogeneos, hasta medios complejos como el modelo de Marmousi.

El desempeño obtenido al utilizar el algoritmo de recocido simulado es satisfactorio ya que se logra un algoritmo trazador de rayos con un bajo costo computacional y sobre todo es útil porque no utiliza derivadas sino evaluaciones de la función del tiempo de viaje.

Los resultados del modelo de Marmousi mostraron que el presente método es adecuado para el cálculo de los rayos en modelos de enlentecimiento hasta alcanzar una precisión exitosa al evaluar el comportamiento del algoritmo en lo que a convergencia se refiere.

Además, se aprovechó el hecho de que los puntos sobre la rejilla se pueden asignar a áreas específicas del modelo para alcanzar una mayor precisión. En este caso, se le asignó a los puntos que se encuentran a lo largo de una interface no paralela al sistema de coordenadas de la red subyacente. En otras palabras, se posee libertad de elegir cualquier modelo de rejilla que se desee.

Los resultados obtenidos al utilizar el medio exponencial y el modelo de Marmousi en este algoritmo, demuestran que el método puede producir resultados precisos en medios simples y complejos en comparación con los resultados obtenidos a partir de otros métodos.

El paralelismo natural de los rayos sísmicos, los cuales se propagan de manera independiente, hace posible plantearse en trabajos futuros, la posibilidad de implementar una versión paralela del presente algoritmo en máquinas con multiprocesador, con el fin de reducir los tiempos de ejecución del CPU, ya que si se conoce la dependencia de los procesos involucrados en la solución propuesta al problema del trazado de rayos, es posible plantear diferentes paradigmas de implementación paralela. Esto podría ser de gran importancia al extrapolar los cálculos de los rayos de 2D a 3D.

Teniendo en cuenta el algoritmo en sí, las extensiones para el trazado de rayos en 3D son sencillas, la complicación principal sería el procesamiento y cálculos computacionales, para lo cual se requeriría de máquinas o sistemas con multiprocesadores, como se plantó anteriormente, para así agilizar el tiempo de procesamiento de datos. Además sería recomendable realizar el algoritmo en otros lenguajes de programación como C^{++} o Fortran.

El algoritmo Metropolis en 3D es, en principio, el mismo que el algoritmo 2D, el cual fué el planteado en este trabajo. Entonces, se propone que para un algoritmo en 3D,

se especifique un camino inicial y se planteé un recocido de la solución del tiempo mínimo de viaje del rayo al igual que en 2D, con la diferencia de que se elegirían puntos en un mallado o rejilla representados en 3D, es decir utilizando un sistema de coordenadas en tres dimensiones.

Otra alternativa planteada para trabajos futuros consiste en implementar o sustituir el recocido simulado por el VFSA conocido como very fast simulated annealing. La ventaja del VFSA sobre las técnicas tradicionales del SA se basan en la elección del generador de la distribución y el sistema de refrigeración. Para la selección de nuevos valores de parámetros, el VFSA utiliza una distribución de Cauchy, que permite la exploración del modelo de espacio más eficazmente que el uso de distribuciones Gaussianas o uniformes. Además, una tasa de enfriamiento más rápido permite acelerar la convergencia sin limitar su capacidad de evitar mínimos locales.

Se tiene en cuenta que el algoritmo presentado en este trabajo se puede ajustar aún más, para poder así, adaptarse a aplicaciones específicas de una mejor forma mediante la optimización del sistema de refrigeración.

Apéndice A

Algoritmo trazador de rayos sísmicos

A.1. Principal

```
%Programa de recocido simulado
%Función optimización por recocido simulado
%Version 1.0
%Modelo de Marmousi
%Entradas
%nfg y ncg: n\úmero de filas y n\úmero de columnas de la malla que se usa para
%definir la trayectoria que sigue el rayo (malla geométrica)
%V: Matriz que define el campo de velocidad
%E y R: coordenadas del emisor y receptor (cordenada z, cordenada x)
%I: n\úmero de puntos que definen la trayectoria del rayo
%(incluyendo al emisor y al receptor).
clear all
nfg=100;
ncg=100;
I=12;
E=[1,65]';
R=[96,65]';
%load mmarmsmooth.mat;           %modelo suavizado de Marmousi
load marmusuave.mat;           %modelo duro de Marmousi
%V(1:50,:)=2*ones(50,100);
%V(51:100,:)=8*ones(50,100);
%tiempo de trayectoria m\as corta
```

```

%tiempo2=80;
%tviaromber(E,R,V,nfg,ncg);
%V(1:122,:)=1500*ones(122,384);
V=VM;

function tiempo=optrecsim(E,R,I,nfg,ncg,esquema,V)

trayec=[E,zeros(2,I-2),R];

%trayectoria inicial
D=R-E;
for i=2:I-1
    trayec(:,i)=fix(E+D*(i-1)/(I-1));
end

%c\alculo del tiempo de viaje de la trayectoria inicial
tiempo =0;
for i=1:I-1
    tiempoSeg(i)=tviaromber(trayec(:,i),trayec(:,i+1),V,nfg,ncg);
    tiempo=tiempo+tiempoSeg(i);
end

thau=1;
iter=0;

while (thau>0.00000001)
iter=iter+1;
%perturbaciones aleatorias
if (I==3)
    pertu=fix(2*rand)+2;
    indicep=2;
else
    indicep=fix((I-2)*rand)+2; %punto a modificar de la trayectoria
    pertu=fix(3*rand)+1 %tipo de perturbaci\on
end
switch pertu;
case{1} %Eliminar punto
    trayecn=[trayec(:,1:indicep-1) trayec(:,indicep+1:I)];
    Indtran=I-1;
case{2} %Sustituir punto
    pnuevo=simular(trayec(:,indicep),nfg,ncg);
    trayecn=trayec;
    trayecn(:,indicep)=pnuevo
    Indtran=I;
case{3} %Insertar punto

```

```

    pnuevo=simular(trayec(:,indicep),nfg,ncg)
    donde=fix(2*rand)+1; %donde insertar
    switch donde
        case{1} %antes
            trayecn=[trayec(:,1:indicep-1) pnuevo trayec(:,indicep:I)];
        case{2} %despues
            trayecn=[trayec(:,1:indicep) pnuevo trayec(:,indicep+1:I)];
    end
    Indtran=I+1;
end
switch pertu ;
case{1}
    if (Indtran==2)
        tiempon=tiempo2;
    else
        tiempoSegn(1:indicep-2)=tiempoSeg(1:indicep-2);
        tiempoSegn(indicep-1)=tviaromber(trayecn(:,indicep-1),trayecn(:,indicep),V,nfg,ncg);
        tiempoSegn(indicep:I-2)=tiempoSeg(indicep+1:I-1);
        tiempon=tiempo-tiempoSeg(indicep-1)-tiempoSeg(indicep)+tiempoSegn(indicep-1);
    end
case{2}
    tiempoSegn=tiempoSeg;
    tiempoSegn(indicep-1)=tviaromber(trayecn(:,indicep-1),trayecn(:,indicep),V,nfg,ncg);
    tiempoSegn(indicep)=tviaromber(trayecn(:,indicep),trayecn(:,indicep+1),V,nfg,ncg);
    tiempon=tiempo-tiempoSeg(indicep-1)-tiempoSeg(indicep)+tiempoSegn(indicep-1)+tiempoSegn(indicep);
case{3}
    switch donde
        case{1} %antes
            tiempoSegn(1:indicep-2)=tiempoSeg(1:indicep-2);
            tiempoSegn(indicep-1)=tviaromber(trayecn(:,indicep-1),trayecn(:,indicep),V,nfg,ncg);
            tiempoSegn(indicep)=tviaromber(trayecn(:,indicep),trayecn(:,indicep+1),V,nfg,ncg);
            tiempoSegn(indicep+1:I)=tiempoSeg(indicep:I-1);
            tiempon=tiempo-tiempoSeg(indicep-1)+tiempoSegn(indicep-1)+tiempoSegn(indicep);
        case{2} %despues
            tiempoSegn(1:indicep-1)=tiempoSeg(1:indicep-1);
            tiempoSegn(indicep)=tviaromber(trayecn(:,indicep),trayecn(:,indicep+1),V,nfg,ncg);
            tiempoSegn(indicep+1)=tviaromber(trayecn(:,indicep+1),trayecn(:,indicep+2),V,nfg,ncg);
            tiempoSegn(indicep+2:I)=tiempoSeg(indicep+1:I-1);
            tiempon=tiempo-tiempoSeg(indicep)+tiempoSegn(indicep)+tiempoSegn(indicep+1);
    end
end
if (tiempon < tiempo)
    clear trayec tiempo tiempoSeg
    trayec=trayecn;
    tiempo=tiempon;
end

```

```
tiempoSeg=tiempoSegn;
else
    u=rand;
    delta=tiempon-tiempo;
    alpha=exp(-delta/thau);
    if (u < min(1,alpha))
        clear trayec tiempo tiempoSeg
        tiempo=tiempon;
        trayec=trayecn;
        tiempoSeg=tiempoSegn;
    else
        clear trayecn tiempon tiempoSegn;
    end
end

thau=temperatura(thau,iter,esquema);
I=length(trayec);
TRAY{iter}=trayec;
tiempog(iter)=tiempo;
disp(['tiempo,iter,thau']);
end
```

Apéndice B

Algoritmo trazador de rayos sísmicos

B.1. Temperatura

```
%Funci\on optimizaci\on por recocido simulado  
%iter, Ajuste
```

```
function temp=temperatura(temp1,iter,esq);
```

```
tinic=1;
```

```
alpha=0.81;
```

```
beta=0.001;
```

```
switch esq
```

```
case{1} %descenso constante
```

```
temp=1;
```

```
case{2} %descenso geom\etrico
```

```
temp=alpha*temp1;
```

```
case{3} %criterio de Boltzmann
```

```
temp=tinic/(1+log(iter));
```

```
case{4} %Esquema de Cauchy
```

```
temp=tinic/(1+iter);
```

```
case{5} %Esquema de Lundi y Mees
```

```
temp=tinic/(1+beta*iter);
```

```
end
```

Apéndice C

Algoritmo trazador de rayos sísmicos

C.1. Interpola

```
function invVt=interpola(t,P1M,direc,V)

[f,c]=size(V);
P=P1M+t*direc;
SI=fix(P);

if (SI(1,1)==f)
SI(1,1)=f-1;
end

if (SI(2,1)==c)
SI(2,1)=c-1;
end

F=[SI(1,1),SI(1,1)+1];
C=[SI(2,1),SI(2,1)+1];

Z(1,1)=V(F(1),C(1));
Z(1,2)=V(F(1),C(1));
Z(2,1)=V(F(1),C(1));
Z(2,2)=V(F(1),C(1));
```

```
%F\ 'ormula de interpolaci\ 'on
```

```
invVt=((C(2)-C(1))*(F(2)-F(1)))/([F(2)-P(1,1),P(1,1)-F(1)]*Z*[C(2)-P(2,1),P(2,1)-C(1)]');
```

Apéndice D

Algoritmo trazador de rayos sísmicos

D.1. Simular

```
%simula nuevo punto de sus vecinos  
%q es el punto se que se va a perturbar  
%m,n es el tamano de la malla  
%salida genera vecino
```

```
function pnuevo=simular(q,m,n)
```

```
if (q==[1,1]')
```

```
    indvec=fix(3*rand)+1;
```

```
    switch indvec
```

```
        case{1}
```

```
            pnuevo=[2,1]';
```

```
        case{2}
```

```
            pnuevo=[2,2]';
```

```
        case{3}
```

```
            pnuevo=[1,2]';
```

```
    end
```

```
elseif (q==[1,n]')
```

```
    indvec=fix(3*rand)+1;
```

```
switch indvec
    case{1}
        pnuevo=[1,n-1]';
    case{2}
        pnuevo=[2,n-1]';
    case{3}
        pnuevo=[2,n]';
end

elseif (q==[m,n]')

indvec=fix(3*rand)+1;
switch indvec
    case{1}
        pnuevo=[m-1,n]';
    case{2}
        pnuevo=[m-1,n-1]';
    case{3}
        pnuevo=[m,n-1]';
end

elseif (q==[m,1]')

indvec=fix(3*rand)+1;
switch indvec
    case{1}
        pnuevo=[m,2]';
    case{2}
        pnuevo=[m-1,2]';
    case{3}
        pnuevo=[m-1,1]';
end

elseif (q(1,1)==1)

indvec=fix(5*rand)+1;
switch indvec
    case{1}
        pnuevo=[1,q(2,1)-1]';
    case{2}
        pnuevo=[1,q(2,1)+1]';
    case{3}
        pnuevo=[2,q(2,1)-1]';
    case{4}
        pnuevo=[2,q(2,1)]';
```

```

        case{5}
            pnuevo=[2,q(2,1)+1]';
        end

elseif (q(2,1)==n)

indvec=fix(5*rand)+1;
switch indvec
    case{1}
        pnuevo=[q(1,1)-1,n]';
    case{2}
        pnuevo=[q(1,1)+1,n]';
    case{3}
        pnuevo=[q(1,1)-1,n-1]';
    case{4}
        pnuevo=[q(1,1),n-1]';
    case{5}
        pnuevo=[q(1,1)+1,n-1]';
end

elseif (q(1,1)==m)

indvec=fix(5*rand)+1;
switch indvec
    case{1}
        pnuevo=[m,q(2,1)-1]';
    case{2}
        pnuevo=[m,q(2,1)+1]';
    case{3}
        pnuevo=[m-1,q(2,1)-1]';
    case{4}
        pnuevo=[m-1,q(2,1)]';
    case{5}
        pnuevo=[m-1,q(2,1)+1]';
end

elseif (q(2,1)==1)

indvec=fix(5*rand)+1;
switch indvec
    case{1}
        pnuevo=[q(1,1)-1,1]';
    case{2}
        pnuevo=[q(1,1)+1,1]';
    case{3}

```

```
    pnuevo=[q(1,1)-1,2]';
    case{4}
    pnuevo=[q(1,1),2]';
    case{5}
    pnuevo=[q(1,1)+1,2]';
end

else

indvec=fix(8*rand)+1;
switch indvec
    case{1}
    pnuevo=[q(1,1)-1,q(2,1)-1]';
    case{2}
    pnuevo=[q(1,1),q(2,1)-1]';
    case{3}
    pnuevo=[q(1,1)+1,q(2,1)-1]';
    case{4}
    pnuevo=[q(1,1)-1,q(2,1)]';
    case{5}
    pnuevo=[q(1,1)+1,q(2,1)]';
    case{6}
    pnuevo=[q(1,1)-1,q(2,1)+1]';
    case{7}
    pnuevo=[q(1,1),q(2,1)+1]';
    case{8}
    pnuevo=[q(1,1)+1,q(2,1)+1]';
end

end
```

Apéndice E

Algoritmo trazador de rayos sísmicos

E.1. Romberg

```
%M\etodo de integraci\on de romberg con tolerancia
%tol es la tolerancia
%n es el n\umero de m\aximo de filas de la tabla
%quad es el valor de la integral

function quad=romberg(P1M,direc,V)

tol=10^(-6);
h=1;
M=1;
n=10;
err=1;
J=0;
R=zeros(4,4);
R(1,1)=0.5*(interpola(0,P1M,direc,V)+interpola(1,P1M,direc,V));

while ((err>tol)& (J<n)) | (J<4)
    J=J+1;
    h=h*0.5;
    s=0;
    for p=1:M
        x=h*(2*p-1);
```

```
        s=s+interpola(x,P1M,direc,V);
    end
R(J+1,1)=R(J,1)/2+h*s;
M=2*M;
for K=1:J
    R(J+1,K+1)=R(J+1,K)+(R(J+1,K)-R(J,K))/(4^K-1);
end
    err=abs(R(J,J)-R(J+1,K+1));
end
quad=R(J+1,J+1);
```

Apéndice F

Algoritmo trazador de rayos sísmicos

F.1. tviaRomberg

```
%Cálculo del tiempo de viaje en un segmento
%entradas
%Las coordenadas (Z,X) de los extremos del segmento P1 y P2 en la malla
%geométrica
%La matriz V de velocidades del medio
%Dimensiones de la malla geométrica: m, n

function tiempo=tviaromber(P1,P2,V,m,n)

[M,N]=size(V);
%P1 y P2 en las coordenadas de Marmusi
P1M=[P1(1,1)*(M/m),P1(2,1)*(N/n)]';
P2M=[P2(1,1)*(M/m),P2(2,1)*(N/n)]';
%vector director del segmento que une P1M y P2M
direc=(P2M-P1M);

%calculamos la norma del vector director

nV=norm(direc,2);
s=romberg(P1M,direc,V);
tiempo=24*nV*s;
```

Apéndice G

Algoritmo trazador de rayos sísmicos

G.1. Insertar

```
%Insertar en una posici'on  
  
function insertar(trayec, posi)  
  
pnuevo=rand(2;1);  
  
u=rand;  
if (u<0.5)  
    trayec=[trayec(:,1:posi-1),pnuevo(:,1),trayec(:,posi:end)];  
else  
    trayec=[trayec(:,1:posi),pnuevo(:,1),trayec(:,posi+1:end)];  
end
```

Bibliografía

- [1] V. Alonso. *Física Estadística*. Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela, pp. 29-44, Septiembre, 2006.
- [2] J. Benamou. Big ray tracing: Multivalued travel time field computation using viscosity solutions of the eikonal equation. *Journal of Computational Physics*, Volumen 128, pp. 463-474, 1996.
- [3] J. Berryman. Lectures notes on Nonlinear Inversion And Tomography. Borehole Seismic Tomography. Disponible en:
<http://sepwww.stanford.edu/sep/berryman/NOTES/chapter5.pdf>, Octubre, 1991.
- [4] A. Bóna y M. Slawinski. Fermat's principle for seismic rays in elastic continua. *Journal of Applied Geophysics*, Volumen 54, pp. 445-451, 2003.
- [5] A. Bóna, M. Slawinski y P. Smith. Ray tracing by simulated annealing: Bending method. *Journal of Applied Geophysics*, Volumen 74, N.-2, 2009.
- [6] M. Born y E. Wolf. *Principles of Optics*. Pergamon Press, Oxford, pp. 11, 370-375, 1980.
- [7] S. Borowitz. *Fundamentals of Quantum Mechanics*. Copyright, W. A. Benjamin, Inc., New York, pp. 106-114, 1967.

- [8] Y. Cabello. Análisis de velocidad en un medio anisótropo de tipo VTI para ondas PP y PS. *Tesis de Ingeniería Geofísica, Universidad Simón Bolívar, Facultad de Ingeniería, 2007.*
- [9] V. Cerný. Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Volumen 45, pp. 41-45, 1985.
- [10] V. Cervený. Ray tracing algorithms in three-dimensional laterally varying layered structures. Nolet, G., Edition, *Sismic Tomography*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, pp. 99-133, 1987.
- [11] V. Cervený. *Seismic Ray Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 7-89, 2001.
- [12] P. Chaikin y T. Lubensky. *Principles of condensed matter physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [13] V. Grechka y G. McMechan. 3D Two-Point Ray Tracing for Heterogeneous, Weakly Transversely Isotropic Media. *Geophysics*, Volumen 61, N.-6, Noviembre-Diciembre, 1996.
- [14] E. Hecht. *Optics*. Adisson-Wesley, fourth edition, Adelphi University, New York, pp. 86-514, 2002.
- [15] B. Julian y D. Gubbins. Three dimensional seismic ray tracing. *Journal of Geophysics*, Volumen 43, pp. 95-114, 1977.
- [16] J. Kane y M. Sternheim. *Física*. Editorial Reverté, S. A., Segunda Edición, Impreso por Domingraf Impressors, Barcelona, España, pp. 517-518, 2000.
- [17] S. Kirkpatrick, C. Gelatt, Jr., y M. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, Volumen 220, pp. 671-680, 1983.

- [18] K. Koketsu y S. Sekine. Pseudo-bending method for three-dimensional seismic ray tracing in a spherical earth with discontinuities. *Geophysical Journal International*, Volumen 132, pp. 339-346, 1998.
- [19] J. Mathews y K. Fink. *Métodos Numéricos con Matlab*. Prentice Hall Press, 3ª edición, Madrid, pp. 410-414, 2000.
- [20] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller y E. Teller. Equation of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, pp. 21, 1087-1092, 1953.
- [21] T. Moser. Shortest path calculation os seismic rays. *Journal of Geophysics*, Volumen 56, pp. 59-67, 1991.
- [22] T. Moser, G. Nolet y R. Snieder. Equation of state calculations by fast computing machines. *Bulletin of the Seismological Society of America*, Volumen 82, pp. 259-288, Febrero, 1992.
- [23] M. Newman y G. Barkema. *Monte Carlo methods in statistical physics*. Oxford University Press, 2002.
- [24] Y. Nourani y B. Andersen. A comparison of simulated annealing strategies. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, Volumen 23, pp. 8373-8385, 1998.
- [25] B. Pereyra, W. Lee y H. Keller. Solving two-point seismic ray tracing problems in a heterogeneous medium. *Bulletin of the Seismological Society of America*, Volumen 70, pp. 79-99, Febrero, 1980.
- [26] W. Prothero, W. Taylor y J. Eickemeyer. A fast, two-point, three-dimensional ray tracing algorithm using a simple step search method. *Bulletin of the Seismological Society of America*, Volumen 78, pp. 1190-1198, Julio, 1988.

- [27] A. Reyes. Algoritmo trazador de rayos sísmicos en medios heterogéneos débilmente anisotrópicos usando técnicas de optimización no lineal. *Tesis de Maestría, Universidad de Carabobo, Facultad experimental de Ciencia y Tecnología*, 1999.
- [28] H. Sadeghi, S. Suzuki y H. Takenaka. A fast, two-point, three-dimensional seismic ray tracing using genetic algorithms. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, Volumen 113, pp. 355-365, 1999.
- [29] P. Smith. On forward and inverse modeling in seismology: Raytracing in inhomogeneous media. *Thesis (M. Sc.), Memorial University of Newfoundland*, 2006.
- [30] L. Thomsen. Weak Elastic Anisotropy. *Geophysics*, Volumen 51, N.-10, Octubre, 1986.
- [31] L. Townsend. From Maxwells Equations to Wave Optics and Geometrical Optics. Disponible en:
<http://uhaweb.hartford.edu/ltownsend/Maxwell.doc>, 2010.
- [32] J. Um y C. Thurber. A fast algorithm for two-point seismic ray tracing. *Bulletin of the Seismological Society of America*, Volumen 77, pp. 972-986, 1987.
- [33] V. Laarhoven y E. Aarts. *Simulated annealing: Theory and applications*. D. Reidel, 1987.
- [34] R. Versteeg y G. Grau. The Marmousi experience: Proceedings of the 1990 (Copenhagen) EAEG workshop on practical aspects of seismic data inversion. *Eur. Assoc. Explor. Geophysicists, Zeist, (eds)*, 1991.
- [35] D. Velis y T. Ulrych. Simulated annealing ray tracing in complex three-dimensional media. *Geophysical Journal International*, pp. 145, 447-459, 2001.
- [36] J. Vidale. Finite Difference Calculation of Travel Times. *Bulletin of the Seismological Society of America*, Volumen 78, pp. 2062-2076, 1988.

- [37] V. Vinje, E. Iversen y H. Gjoystdal. Traveltime and amplitude estimation using wavefront construction. *Geophysics*, Volumen 58, pp. 1157-1166, 1993.
- [38] V. Vinje, K. Astebol, E. Iversen y H. Gjoystdal. Estimation of multivalued arrivals in 3D models using wavefront construction. *Geophysical Prospecting*, Volumen 44, pp. 819-842, 1996.
- [39] V. Vinje, K. Astebol, E. Iversen y H. Gjoystdal. Three-dimensional wave modeling by wavefront construction in open models. *Geophysics*, Volumen 64, pp. 1912-1919, 1999.