CONSIDERACIONES TEORICAS Y PRAXIS DEL PROCESO DE JERARQUIA ANALITICA EN LA TOMA DE DECISIONES.

Andrés E. Reyes Polanco.
Profesor Asociado UCV

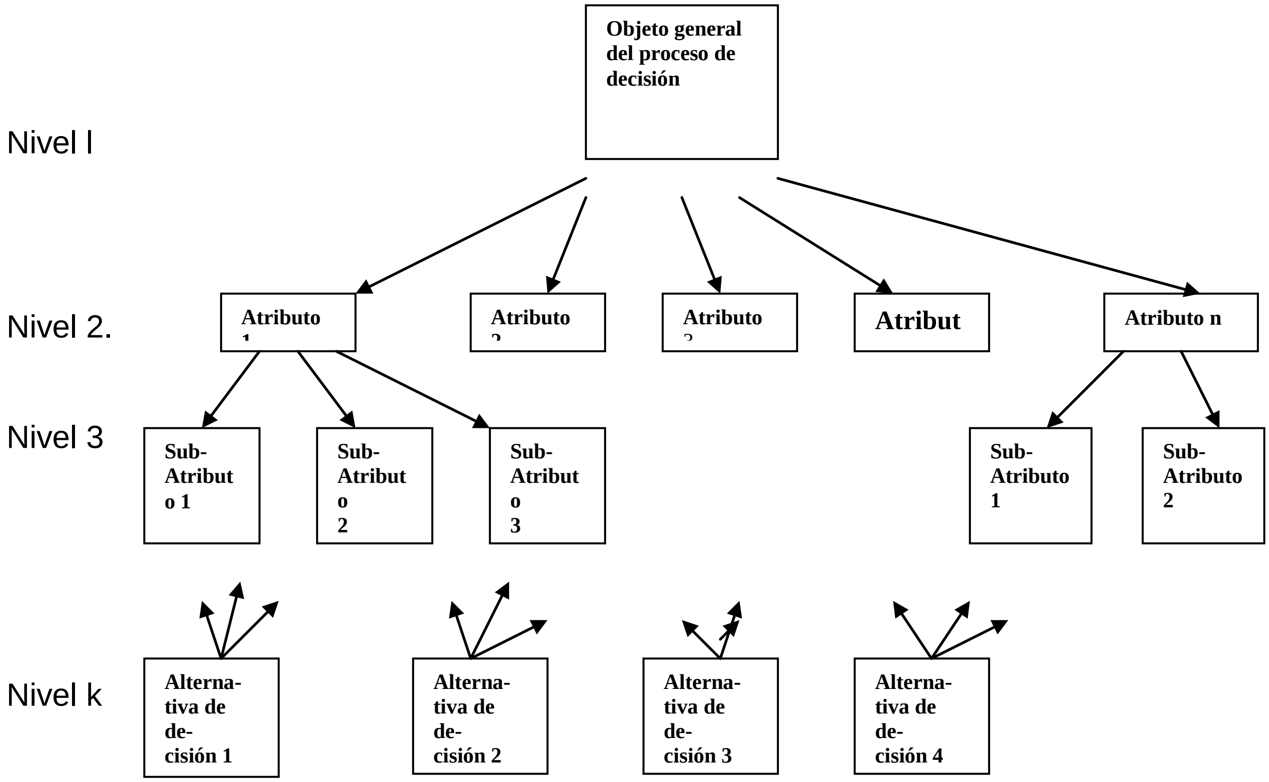
Introducción.

La técnica que a continuación comentamos fue desarrollada por el matemático T. M. Saaty durante los primeros años de la década de los ochenta. Su aplicación es tan amplia que discurre desde complejos problemas de política internacional hasta selección de un software o de una cartera de inversión. Este trabajo es el resultado de algunas aplicaciones realizadas en Venezuela por el suscrito, mostrando al final de este punto las dificultades y limitaciones de la herramienta en diferentes situaciones. El método resulta sencillo cuando hay un solo árbitro y pocos atributos, pero cuando estos atributos se ramifican en varios niveles y hay más de un decisor su aplicación presenta varios problemas. El caso se divide en los siguientes puntos, en primer lugar se desarrolla el método, posteriormente se presenta una propuesta donde se establece la relación que hay entre la teoría de la información y el problema de consistencia del método, en seguida se plantea unos comentarios generales productos de la experiencia.

1.- El método.

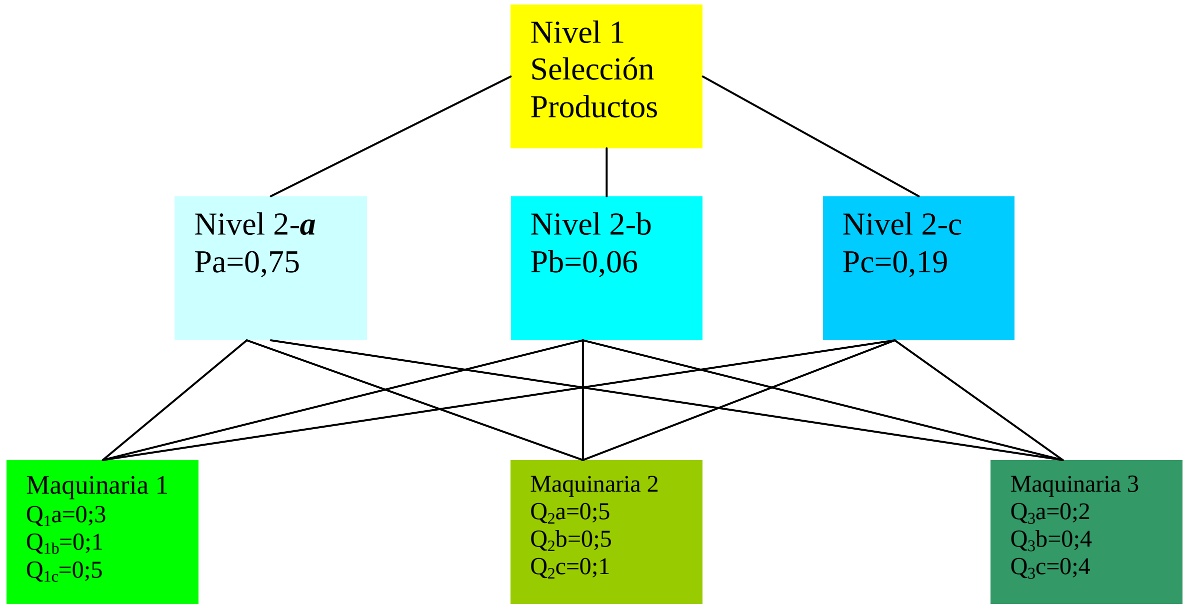
El proceso de jerarquía analítica **(P.J.A)** es un método que permite consolidar las opiniones de uno o varios expertos cuando se está en la disyuntiva de escoger entre varias opciones, que no son fáciles de evaluar por el gran número de categorías implícitas. Para ello se definen diferentes niveles. En el primer nivel está la definición del problema, en el segundo están los atributos en su expresión más alta. Cada uno de estos atributos se subdivide en sub-atributos definiendo un nuevo nivel. Esta operación de definir niveles se efectúa tantas veces como sea necesario dando origen a lo que Saaty(2001) llama una jerarquía funcional si el sistema bajo estudio es descompuesto en partes considerando sus relaciones esenciales o, jerarquía estructural si el sistema se descompone en orden descendente de acuerdo a sus propiedades estructurales tales como el tamaño, color etc. El tipo de jerarquía que emplearemos es la funcional. Partiendo de esta forma jerárquica, si no hay información previa de los atributos a un nivel o solo se tiene de algunos de ellos que permitan hacer comparaciones, se construyen sucesivas matrices, que permiten realizar comparaciones pareadas y, mediante el uso de autovectores y autovalores pueden determinarse cuál es el orden de importancia de cada atributo en los diferentes niveles.

El Proceso de Jerarquía Analítica, también conocido como Método Analítico de Jerarquía, dará lugar a un árbol cuya forma general es:



Se puede observar que en el último nivel están las opciones o alternativas. Los atributos o cualidades de las alternativas deben coincidir con los atributos o cualidades del penúltimo nivel.
Ahora veremos un ejemplo que servirá para explicar el método en cada uno de los pasos.

Ejemplo 5.
Supongamos, que una empresa desea adquirir una nueva maquinaria tomando en cuenta tres cualidades o categorías: a) tecnología b) costo y c) vida útil. Hay tres maquinarias candidatas a ser seleccionadas de acuerdo a estos atributos. El problema se presenta en forma de un árbol como sigue: el primer nivel, representado por la primera casilla es el problema que consiste en la selección de una maquinaria de acuerdo a los atributos. Esta casilla está conectada con las tres correspondientes al segundo nivel que indica las cualidades y finalmente, cada una de estas cualidades está conectada con cada una de las marcas de las maquinarias.



El siguiente paso, consiste en la determinación de los pesos para clasificar las alternativas de decisión, esto puede hacerse mediante matrices de comparaciones pareadas.
Si se tiene en forma general n criterios en una jerarquía cualquiera, entonces necesitamos una matriz de comparación nxn. Cada uno de estos criterios puede subdividirse en m_i criterios, dando origen a matrices $m_i \times m_i$, y así sucesivamente.
En cuanto al último nivel la información requerida de las opciones debe corresponder a las que se poseen del nivel inmediatamente anterior.
Supongamos que en un nivel cualquiera se está comparando tres atributos independientes entre sí que llamaremos A, B y C; la matriz de comparación pareada es:

ATRIBUTOS	**A**	**B**	**C**
A	**1**		
B		**1**	
C			**1**

Una característica de esta matriz cuadrada es que la diagonal principal es una constante igual a 1 porque la comparación entre un mismo atributo es indiferente.
Para continuar la comparación debemos tener presente los siguientes aspectos:
1.-Hay que estar seguro que por la naturaleza de los atributos estos son independientes, la presencia de uno no condiciona para nada la del otro.
2.-Los valores que se asigna a las comparaciones deben cumplir con:
2.a Siempre es: $A \cong A$. Por tanto el número que se le asigna es uno.
2.b Si $A \succ B$, esto es, A es preferido a B y se le asigna el valor k, al hacer la comparación B con A se cumple $B \prec A$ y por tanto el valor asignado es 1/k.
2. c. Si $A \succ B \succ C$, entonces $A \succ C$, por tanto si $A \succ B$ se le asignó k y $B \succ C$ se le asignó g, a $A \succ C$ se le asignará un número $m \geq \max(k, g)$.
2 .d Si A es indiferente a B, esto es A es igualmente preferido a B: $A \cong B$ entonces, $B \cong A$ y el valor que se asigna es uno.
2.e Si $A \succ B$ y $B \cong C$ entonces $A \succ C$ y el valor que se le asigna a C es el mismo que el asignado a $A \succ B$.
Sea a_{ij} el elemento de la i-ésima fila y la j-ésima columna de la matriz cuadrada $A_{n.n}$ (en donde su lectura por fila o por columna se asocia a los n atributos) el cual puede tomar los valores enteros entre 1 y 9, en donde $a_{ij} = 1$, indica que tanto el atributo i como el atributo j son igualmente importantes, $a_{ij} = 3$ refleja que el atributo i es algo importante que el atributo j, $a_{ij} = 5$ indica que el atributo i es más importante que el atributo j, $a_{ij} = 7$ indica que el atributo i es mucho más importante que el atributo j, $a_{ij} = 9$ es el caso extremo donde el atributo i es extremadamente mucho más importante que j. De esto se desprende que sÍ $a_{ij} = k$ $a_{ji} = 1/k$. Se puede emplear los números 2,4,6 y 8 como puntos intermedios entre los descritos.

Una vez asignado los valores de la matriz de comparaciones pareadas, el problema es encontrar la solución a la siguiente ecuación:
$Ax - \lambda x = 0$
En donde A es la matriz de comparaciones pareadas, x es un vector fila , 0 es el vector nulo y λ es un valor real.
Esta ecuación tiene solución distinta a la trivial si y solo si el determinante cumple con: $|Ax - \lambda x| = 0$. Al resolver el determinante se obtendrá un polinomio en λ. En efecto:
$|Ax - \lambda x| = f(\lambda)$
Como el determinante debe ser nulo, entonces: $f(\lambda) = 0$. Las raíces de $f(\lambda)$ se denominan raíces características o autovalores y los vectores asociados a estas raíces se llaman vectores característicos o autovectores. Hay diferentes métodos de cálculo que permiten obtener tanto las raíces como los vectores.
Si la matriz de comparaciones se ha construido tomando en cuenta lo propuesto en los puntos 1 y 2 entonces la matriz de comparación, es perfectamente consistente. Si este es el caso, entonces se podrá construir una nueva matriz P

partiendo de ésta, tal que la suma de los componentes de cada vector columna suma uno, esto es:

$$P = \left\| p_{ij} \right\| \;, \quad p_{ij} = a_{ij} / \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \quad i = 1,2,..n \; ; \; j = 1,2,..n$$

Los componentes del autovector se obtiene como los promedios de cada columna, esto es: si x_i es el componente i-ésimo del autovector x entonces: $x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} / n$

Ejemplo 6.

Considerando el ejemplo anterior, supongamos que la gerencia ha decidido dar la siguiente ponderación a cada categoría como construyendo la siguiente matriz de comparaciones:

MATRIZ A

	Tecnología	Costo	Vida Útil
Tecnología	1	9	7
Costo	0,11111111	1	0,2
Vida Útil	0,14285714	5	1
SUMA	1,25396825	15	8,2

A continuación construimos la matriz P que consiste en dividir los elementos de cada columna por la suma correspondiente: $a_{ij} / \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$:

MATRIZ P

Tecnología	0,80	0,60	0,85
Costo	0,09	0,07	0,02
Vida Ütil	0,11	0,33	0,12
SUMA	1	1	1

Luego calculamos el autovector cuyos elementos son $x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} / n$.

AUTOVECTOR
0,75
0,06
0,19
1

Del vector anterior concluimos que la tecnología tiene un peso de 0,75; el costo 0,06 y finalmente la vida útil 0,19.

Para obtener el autovalor, en primer lugar se multiplica la matriz original A por el autovector obteniéndose un nuevo vector:

2,61752255
0,18121048
0,59637356

Cada elemento de este vector se divide entre cada elemento del autovalor y luego se suman y se divide entre el número de sumandos. El resultado es el primer autovalor de la matriz A esto es: (2,6175/0,75+0,1812/0,06+0,5963/0,19)/3=3,219

Si la matriz A es consistente entonces el primer valor característico es igual al número de atributos o criterios que se están evaluando.
Generalmente, no se puede garantizar la consistencia de una matriz la primera vez que se trabaja, por tanto hay que estudiar la consistencia de la matriz de comparación, que en forma general se plantea así: se calcula el índice de consistencia de A dado por: $IC = (\lambda - n)/(n-1)$, el índice de consistencia aleatorio dado por: $ICA = 1{,}98(n-1)/n$ y la razón de consistencia que está dada por: $n(\lambda - n)/1{,}98(n-1)(n-2)$, si esta razón es menor que 0,1, el nivel de inconsistencia es, según Saaty muy aceptable. Para una matriz de comparaciones de orden 3x3 una buena consistencia está alrededor de 5% , para una tabla 4x4 alrededor del 9%.
Si las matrices son consistentes, se pasa al ordenamiento de las variables o categorías según el valor del elemento que le corresponde en el autovalor en cada nivel.
En nuestro ejemplo, al realizar las operaciones apropiadas para el segundo nivel se encuentra que el índice de consistencia es 0,1095; el índice de consistencia aleatorio es 1,32, por tanto la razón de consistencia es 0,083, luego el nivel de consistencia es aceptable.
En general, este procedimiento se repite en cada nivel siempre que no se posea datos. Ahora consideremos el tercer nivel donde están como opciones las tres máquinas de las cuales se obtienen las ponderaciones de cada cualidad según información suministrada por los vendedores.

MAQUINARIAS

	1	2	3
Tecnología	0,3	0,5	0,2
Costo	0,1	0,5	0,4
Vida Útil	0,5	0,1	0,4

Este cuadro quiere decir que al comparar la tecnología entre las tres máquinas la segunda tiene el mayor peso que es 0,5, la maquina dos tiene un peso en esta cualidad de 0,3 y finalmente la maquina tres de 0,2. Igual ocurre con las otras dos categorías.
Para evaluar cada maquinaria, ponderamos el peso que tiene cada una de las categorías por el peso correspondiente del nivel superior, obteniendo el peso de cada maquinaria:

M1=0,3x0,75+0,1x0,06+0,5x0,19=0,32597
M2=0,5x0,75+0,5x0,06+0,4x0,19=0,42411
M3=0,2x0,75+0,4x0,06+0,4x0,19=0,24992

En este caso el mejor es la segunda maquinaria.
Cuando se tiene un solo evaluador y un solo nivel de comparación con pocos atributos el problema se resuelve sin ninguna dificultad, de hecho se puede emplear el Excel sin recurrir a algún software especializado. Difícilmente, un evaluador frente a matrices de orden menor a cuatro tendrá mayores problemas para obtener matrices consistentes, el problema surge cuando hay varios niveles con matrices de orden superior a tres.
Cuando existen varios niveles es necesario estudiar la consistencia global, no solamente la consistencia en cada nivel. Para estudiar la consistencia global partimos como sigue:

ICG=IC del segundo nivel + (autovector del segundo nivel)x(vector de IC del tercer nivel)+(autovector del tercer nivel)x(vector de IC del cuarto nivel)+….+(autovector del nivel k-1)x(vector de IC del nivel k).
Ahora bien, es frecuente que en una empresa participen varios evaluadores considerados como expertos. Cuando existen varios evaluadores para un mismo problema que afecta a una organización hay que estudiar la concordancia entre los evaluadores.
Para ver la concordancia entre todos los expertos o evaluadores, se emplea el coeficiente de concordancia **W** de Kendall que viene dado por:

$$W = 12\sum_{i=1}^{n}(\bar{R}_i - \bar{R})^2 / n(n^2 - 1)$$

Donde:

$\bar{R}_i$: es el promedio de los rangos asignados al objeto i.

$\bar{R}$: es la media de todos los rangos asignados a todos los objetos
n : es el número de factores o atributos evaluados.
$n(n^2 - 1)/12$: es la suma máxima posible de los cuadrados de las desviaciones.

El máximo valor que puede alcanzar $\sum_{i=1}^{n}(\bar{R}_i - \bar{R})^2$ es $n(n^2-1)/12$ y el mínimo es cero. Por tanto $0 \le W \le 1$, mientras más cercano se esté de uno, mejor es la concordancia, puesto que de la forma que está definido este estadístico, a valor mayor de correlación entre el conjunto de rangos, mayor es la concordancia.

Ejemplo 7.
Retomemos el caso de la selección dado en el ejemplo 5 y asumamos que existen diez evaluadores independientes tal que cada uno ha obtenido un autovector tal como se muestra a continuación:

atributo	Evaluador1	Evaluador2	Evaluador3	Evaluador4	Evaluador5
Tecnología	0,5	0,7	0,8	0,7	0,6
Costos	0,1	0,01	0,1	0,2	0,1
Vida útil	0,4	0,29	0,1	0,1	0,3
SUMA	1	1	1	1	1

atributo	Evaluador6	Evaluador7	Evaluador8	Evaluador9	Evaluador10
Tecnología	0,5	0,5	0,6	0,7	0,6
Costos	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1
Vida ütil	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3
SUMA	1	1	1	1	1

La matriz de rango con su promedio es:

atributo	Evaluador1	Evaluador2	Evaluador3	Evaluador4	Evaluador5
Tecnología	3	3	3	3	3
Costos	1	1	1,5	2	1
Vida ütil	2	2	1,5	1	2

atributo	Evaluador6	Evaluador7	Evaluador8	Evaluador9	Evaluador10
Tecnología	3	3	3	3	3
Costos	2	2	1,5	1	1
Vida útil	1	1	1,5	2	2

La medias son $\bar{R}_1 = 3$; $\bar{R}_2 = 1{,}4$; $\bar{R}_3 = 1{,}6$ y $\bar{R} = 2$, de esto se obtiene el valor $W = 0{,}76$.
La interpretación se deja al lector.
La hipótesis que se establece es $H_0 : W = 0$, contra la alternativa: $H_1 : W > 0$. Si el número de factores o atributos es mayor que siete ($n > 7$) el estadístico que se emplea para contrastar la hipótesis nula es:
$\chi^2 = k(n-1)W$

Donde k es el número de evaluadores. Este estadístico bajo la hipótesis nula tiene una distribución χ^2 con $n-1$ grados de libertad.
Si este valor es mayor que el valor del cuantil asociado a un nivel de significación preestablecido de una χ^2 con $n-1$ grado de libertad, entonces rechazamos la hipótesis $H_0 : W = 0$.
En el caso de que el número de evaluadores k esté comprendido entre tres y veinte y el número de criterios a ordenar sea igual o menor a siete se tienen tablas para realizar el contraste con la distribución exacta.

Un valor alto de W puede interpretarse como un reflejo de que los k evaluadores están aplicando los mismos estándares al asignar rangos a las n categorías o atributos bajo estudio.

Resumiendo esta metodología requiere:

1.-Una vez definido el problema y su descomposición jerárquica se pasa a la construcción de un instrumento especial que permita recoger las comparaciones realizadas en cada nivel y por cada uno de los expertos en las diferentes áreas.

2.-Estudiar la consistencia de cada una de las matrices mediante la aplicación del índice de consistencia y razón de consistencia. Una vez obtenido el autovalor, que denotamos por λ se obtiene el índice de consistencia dado por:
$(\lambda - n)/(n-1)$
Luego obtenemos el índice de consistencia aleatorio dado por: 1,98(n-2)/n, finalmente calculamos la razón de consistencia que está dada por: $n(\lambda - n)/1{,}98(n-1)(n-2)$ si esta razón no es menor que 0,1, el nivel de inconsistencia no es aceptable y debería repetirse la evaluación.

4.-Estudiar la consistencia global una vez determinada la consistencia de cada matriz.

5.-Estudiar la concordancia o acuerdo de las opiniones de los expertos mediante el estadístico W de Kendall, cuando existen más de dos expertos.
Para contrastar la hipótesis si el número de objetos evaluados es mayor que siete (n>7) entonces aplicamos:

$$\chi^{*2} = k(n-1)W$$

Si este valor es mayor que el valor del cuantil asociado a un nivel de significación preestablecido de una χ^2 con n-1 grado de libertad, o calculada la probabilidad $P(\chi^2 > \chi^{*2})$ es menor al nivel de significación α entoces, rechazamos la hipótesis nula $H_0 : W = 0$.

Para valores n<7 hay tablas de la distribución exacta bajo la hipótesis nula disponibles para realizar el contraste.

6.- Si se tiene varios evaluadores y se encuentra que hay consistencia y concordancia se promedian los autovalores sí aquellos cuya inconsistencia es aceptable, es decir, la razón de consistencia es menor a 0,1.

7.-Si no se logra la concordancia entre los evaluadores, es decir, no se rechaza $H_0 : W = 0$ se debe repetir la evaluación previa la aplicación de alguna técnica que busque el consenso.

2.-Información y consistencia.

En este punto consideramos la cantidad de información contenida en el vector característico o autovector, para ello consideramos el caso que todos los atributos son igualmente indiferente esto es: $A = \|1\|$, luego el autovector está formado por n elementos iguales a: $1/n$ por tanto $\lambda = n$.
Ahora consideremos la función de entropía dada por:

$$H = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_b p_i$$

La función de entropía tiene dos interpretaciones, antes de realizar el experimento es una medida de indeterminación y después de realizado es una medida de información promedio.
Esta función se hace máxima para $p_i = 1/n, \ \forall i$ y el máximo es $\log_b n$, (si b=2, se habla de bit y si es de base 10 de nit) . Llamamos H_s a la función para cualquiera otro valor de p_i con la condición que sean diferentes para todo o casi todo j, entonces:
$H - H_s$ es la cantidad de información ganada.
Ahora, consideremos una matriz de comparación $n.n$ con todos sus elementos iguales a una constante a: $A = \|a\|$ con $a \neq 1$,a tal matriz la llamaremos una matriz de comparación impropia de primer tipo. Se puede demostrar que esta matriz tiene máxima entropía y altísima inconsistencia (cuando n tiende a aumentar la inconsistencia se acerca a: $a - 1$), su autovalor mayor es $\lambda = na$. Si a=1, es una matriz de comparación impropia de segundo tipo, ella tendrá máxima entropía e inconsistencia nula puesto que su auto valor mayor es $\lambda = n$.
Consideremos una matriz de comparación cualquiera A siempre tendrá mayor información que las matrices de comparación impropias uno y dos.

Por otra parte, tendrá menor o igual inconsistencia que la matriz del tipo uno y, mayor o igual a la matriz del tipo dos. Si IC(.) e Inf(.) son índices de inconsistencia e información, lo anterior se resume como:
Inf(A)≥Inf(1)
Inf(A)≥Inf(2)
IC(1)≥IC(A)≥IC(2).

Mientras mayor sea la consistencia (menor inconsistencia) de una matriz de comparación, mayor será su información en el sentido que se ha definido como la diferencia de dos funciones de entropía.
Consideremos ahora que se puede dar un nivel de inconsistencia asociado al autovector P y que es posible disminuir tal nivel y corregirlo dando lugar a un nuevo autovector Q. El problema es cuan tan grande ha sido la modificación del criterio de ponderaciones. Para responder a este problema tomaremos una propuesta de H. Theil adaptándola con una nueva interpretación más apropiada al problema que nos ocupa. Usando la misma notación de H. Theil tenemos:

$$I(p_i, q_i) = \sum_{i=1}^{n} q_i \log q_i / p_i$$

Siendo p_i y q_i elementos de P y Q respectivamente.

$$I(p_i, q_i) \cong 1/2 \sum_{i=1}^{n} q_i (p_i - q_i)^2 / q_i^2 = 1/2 \sum_{i=1}^{n} q_i (p_i - q_i)^2$$

Si este estadístico toma un valor muy grande es de presumir que $p_i - q_j \neq 0$, para al menos algún j. La hipótesis nula es $H_0 : p_i - q_j = 0, \quad \forall j$ y la alternativa $H_1 : p_i - q_j \neq 0$ para al menos algún j. Este estadístico sigue una ley χ^2 con n-1 g.l, bajo la hipótesis nula. Si la hipótesis nula no se rechaza no se ha presentado una mejora en la inconsistencia.
Asumiendo que la matriz de comparación es consistente, entonces el suceso de cumplimiento expuesto en el punto 2 , es un suceso casi seguro.

3.-Comentarios generales.

Empezaremos el comentario sobre el método, indicando sus limitaciones en la aplicación. Como dijimos anteriormente es fundamental que los atributos en un nivel sean independientes entre sí incluso en su desagregación a niveles inferiores. En problemas con un solo árbitro, no es tanto el número de niveles sino el orden de cada matriz de comparación cuando no hay datos estadísticos que avalen las preferencias. Es corriente en estos casos, que se presente inconsistencias en uno o varios niveles.
Un problema común es cuando se tienen varios árbitros o jueces pero no existe la inconsistencia por el orden de las matrices en los diferentes niveles, sino que el problema es la concordancia.
Hay situaciones que resultan algo más complejas: los niveles son evaluados por árbitros distintos y además el orden de las matrices es mayor de cuatro. Esto

ocurre cuando el problema es lo suficientemente complejo que requiere la participación de un grupo de expertos distinto para algún nivel o para todos.
Finalmente, se presenta el caso que no exista uno o varios árbitros que tengan una visión confiable de conjunto y por tanto no se pueda terminar el árbol. A pesar de lo indicado anteriormente, el método como herramienta para la toma de decisiones resulta satisfactorio cuando el transcurrir del tiempo muestra que se ha tomado una buena decisión o porque hay estudios similares que así lo avalan o, cuando se ha usado el método acompañado con otra técnica, y es posible contactar que los resultados no se contradicen.
Para resumir lo anterior daremos el siguiente cuadro:

Causa	***Problema***	***Solución.***
Complejidad. **1.-Número de jueces** **2.- Número de niveles**	**Falta de consistencia.-** **Falta de concordancia**	**Revisión de la consistencia repetición del experimento,** **Aplicar T.G.N**
3.-Orden de las matrices	**Falta de consistencia**	**ídem**
Conocimiento. **1.-Definición inadecuada de la jerarquía.** **2.-Desconocimiento de las reglas de asignación de valores-**	**Falta de consistencia**	**Redefinir el conjunto de categorías y sus divisiones.** **Inducción sobre el método**

BIOGRAFÍA.

Canada; R,J. Sullivan; W,G. White; J,A. (1997)
Análisis de la Inversión de Capital para Ingeniería y Administración. Cap 20. El proceso de jerarquía analítica. Prentice Hall. . México.

Reyes P. A,E (1999).

Estudio estadístico del sistema de arma 5,56x45mm. Capítulo 3: Aplicación del proceso de jerarquía analítico de los miembros del comité para la selección del fusil de asalto. DARFA.

Reyes P. A,E (2001).
Uso del proceso de jerarquía analítica para la evaluación y selección de talentos. Grupo 1BC.

Reyes P. A,E (2002).
Estudio estadístico del sistema de evaluación de la Escuela Superior de Guerra Naval. Capítulo 2 Opinión de evaluadores. ESGN.

Reyes P. A,E (2002).
Aplicación del proceso de jerarquía analítica para la selección de una solución tecnológica para seguros. Banesco Seguros.

Saaty, T.L (2001)
Decision Making for Leaders. The Analytic Hierarchy Process for Decisions in a Complex World. RWS Publications. Pittsburgh. USA

Siegel S. Castellan N,J.(1997)
Estadística no paamétrica aplicada a la ciencia de la conducta.
Cap.8: Medidas de asociación y sus pruebas de significación. Trillas. México.

7.-Taha H (1997)
Investigación de Operaciones-Una introducción.
Cap.14: Análisis de decisión y juego.
Prentice Hall. México.

8.-Theil H (1971).
Cap. 12:Frontiers of econpmetrics.
John Wiley and Sons, Inc. New York.