San Antonio de Los Altos 3 de marzo de 2007.

ALGUNOS COMENTARIOS SOBRE LAS TÉCNICAS DE PRONÓSTICOS.

Autor: Andrés Eduardo Reyes Polanco.[1]
Postgrado de Ciencias Administrativa.
Facultad de Economía y Ciencias Sociales.
Universidad Central de Venezuela.

Palabras claves: Pronósticos, modelos determinísticos, modelos aleatorios, modelos de baja capacidad predictiva: caos. Pronósticos o predicción en los modelos determinísticos. Pronósticos o predicción en los modelos probabilísticas. Pronósticos o predicción en los modelos caóticos.

INTRODUCCIÓN.

La siguiente monografía tiene como objetivo fundamental dar una visión muy apretada de los diferentes enfoques en predicción o pronóstico e ilustrar cada uno de los enfoques con algunas técnicas propias de los mismos. Está hecha pensando en los alumnos de las maestrías de Ciencias Administrativa y Economía de la Universidad Central de Venezuela como un material introductorio.
En primer lugar, debemos tener presente que significa el término pronóstico, en la bibliografía especializada se toman como sinónimos las palabras pronóstico y predicción, salvo Sir Maurice Kendall [2] asoma una distinción entre los dos términos aunque al final, decide emplear el término pronóstico para cualquier situación en donde se explica la variación de un fenómeno en el tiempo, con el objeto de determinar su comportamiento futuro. Sin embargo, auque no es común establecer ninguna distinción entre ambos términos, llamaremos pronóstico al estudio del comportamiento pasado de un fenómeno con la finalidad de conocer su posible comportamiento en el futuro y, predicción el estudio del comportamiento pasado de un fenómeno (efecto) vía el comportamiento pasado de uno u otros fenómenos (causas), con la finalidad de determinar su comportamiento futuro esperado dado el comportamiento futuro de las causas. En el primer caso (pronóstico) estamos frente al estudio de la variabilidad intrínseca al fenómeno, esto es, se tiene un conjunto de observaciones temporales que se llama serie de tiempo y esta se puede abordar en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia. En el dominio del tiempo se estudia la variación de la serie en un lapso determinado buscando encontrar patrones tales como: la tendencia, la estacionalidad, ciclos de naturaleza determinística y la parte irregular; para ello se emplean métodos que separan estas componentes. En el dominio de la frecuencia se considera que la

[1] Profesor Asociado de la Universidad Central de Venezuela.
[2] Time-Series pag. 115

serie de tiempo es el resultado de la superposición de ondas de la formas senos cosenos de frecuencias diferentes en donde se asume que hay un elemento aleatorio, esto conduce a lo que se denomina análisis espectral.
Algunos modelos emplean la misma variable que se quiere pronosticar empleando sus retardos y se llaman modelos autoregresivo (AR) cuya expresión es:

$$Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + ...\varphi_p Y_{t-p} + \alpha_t$$

O se consideran los ruidos de los periodos anteriores y se llaman modelos de promedios móviles (MA) y su expresión general es:

$$Y_t = \mu - \theta_1 \alpha_{t-1} - \theta_2 \alpha_{t-2} - ... - \theta_q \alpha_{t-q} + \alpha_t$$

La combinación de ambos casos se llaman modelos autoregresivos y de promedios móviles (ARMA):

$$Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + ...\varphi_p Y_p - \theta_1 \alpha_{t-1} - \theta_2 \alpha_{t-2} - ... - \theta_q \alpha_{t-q} + \alpha_t$$

El segundo caso (predicción) se especifican lo que se denomina modelos causales, las causas son variables explicativas y la consecuencia la variable dependiente, ambos tipos de variables son observadas en el tiempo en el mismo lapso.

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + ... + \beta_{tp} X_p + \varepsilon$$

En términos econométricos, en estos modelos la variable dependiente se llama endógena y las independientes exógenas.
En ocasiones, se emplea dos variables X e Y (o más) con varios retardos de la forma: $X_t, X_{t-1},...X_{t-p}, Y_t, Y_{t-1},...Y_{t-p}$ y se formula el modelo de vectores autoregresivos:

$$X_t = f_1(X_{t-1}, X_{t-2},..X_{t-p}) + g_1(Y_{t-1}, Y_{t-2}...Y_{t-p}) + \varepsilon_1 .$$

$$Y_t = f_2(X_{t-1}, X_{t-2},..X_{t-p}) + g_2(Y_{t-1}, Y_{t-2}...Y_{t-p}) + \varepsilon_2$$

Aquí no se distingue entre variables endógenas y exógenas porque todas se consideran endógenas.

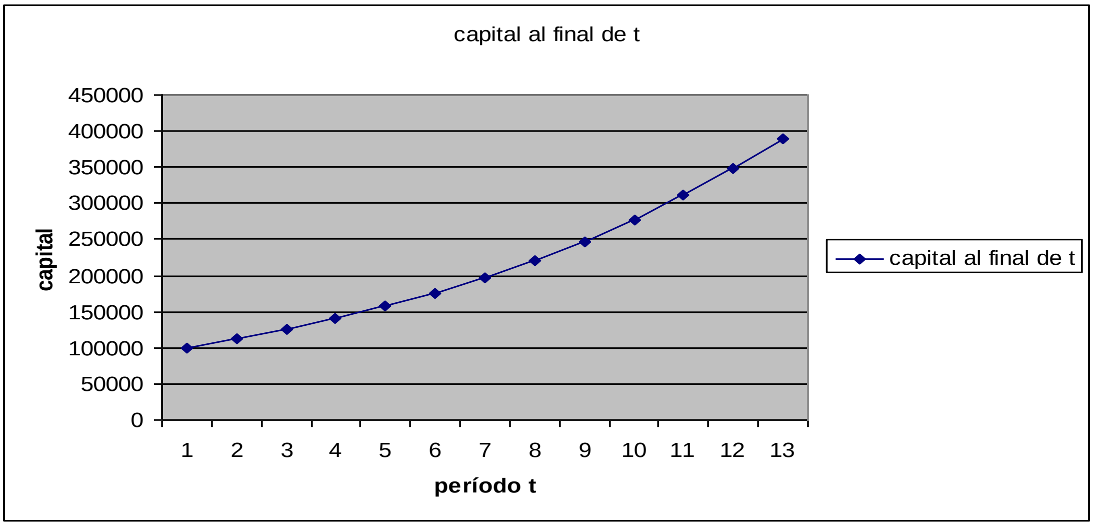
Pero no siempre se requiere de las observaciones pasadas de un fenómeno para conocer su comportamiento futuro. El comportamiento futuro de un fenómeno puede estar plenamente determinado, tal es el caso de los eclipses, conocemos las fechas exactas de cuando ocurrirán, que es lo opuesto a observar en el fenómeno una variabilidad irregular, que puede ser descompuesta como indicamos en un patrón más una parte irregular que asumimos que su efecto es despreciable a los fines de hacer pronósticos y, una vez determinado el patrón, asumir que este patrón permanece en el comportamiento futuro del fenómeno, tal es el caso de la demanda de un producto de consumo masivo. Finalmente tenemos que el comportamiento del fenómeno es tal que podemos estar fuertemente limitados para conocer el comportamiento futuro, como ejemplos tenemos el caso si entre tres meses la temperatura en Caracas será de 30º centígrado o si las acciones de una empresa X subirán dentro de cinco días. En el ejemplo de los eclipses, es un fenómeno determinístico dinámico, en el segundo caso es un fenómeno con componente aleatorio y finalmente el último caso puede ser un fenómeno determinístico caótico. De aquí derivan tres clase de modelos a la hora de predecir el comportamiento futuro del fenómeno de interés: determinísticos, aleatorios y finalmente el caóticos.

I.-MODELOS DETERMINÍSTICOS.

En estos modelos se asume que se posee información completa y cierta de la relación causa efecto, por tanto conocidas las causas se puede determinar con exactitud el efecto en cualquier momento, tanto pasado como futuro. Lo más que se admite es que pueden darse errores de medición que no afectan el resultado, este tipo de modelos son los propios de la física newtoniana, es decir, a nivel de lo macrocóspico. En finanzas y otras ramas de la economía se han planteado modelos de esta naturaleza, el análisis marginal es un caso.
Veamos varios ejemplos, para explicar la idea de un modelo determinístico.

Ejemplo 1.

Supongamos que un inversionista tiene un capital inicial C_0 y quiere colocar su dinero en un instrumento financiero con un interés fijo r por unidad de tiempo t (meses, años etc). Él puede determinar exactamente cuanto tendrá al final de un determinado tiempo.
En efecto, al final del primer período su capital es:
$C_1 = C_0(1+r)$
En el segundo período es:
$C_2 = C_1(1+r) = C_0(1+r)^2$
Después de t periodo el capital acumulado es:
$C_t = C_0(1+r)^t$
Por tanto, el inversionista podrá determinar exactamente cuanto será el capital al final del lapso de tiempo que ha decidido colocar su capital inicial. Supongamos que el capital inicial es 100.000 $ y la tasa es de 12% anual. Con estos datos obtenemos el siguiente gráfico.



Ejemplo 2.

Supongamos que una empresa ofrece en el mercado un producto del que se conoce su oferta dada por x, como se sabe, en la medida que aumenta la oferta, disminuyen los precios, consideremos una ley de demanda dada por: $p(x) = a - bx$, donde $p(x)$ es el precio y a y b son valores conocidos. Entonces, la función de ingreso en general es: $I(x) = xp(x)$ por tanto, en este caso la función del ingreso es:

$I(x) = ax - bx^2$

El ingreso marginal es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \frac{dI(x)}{dx}$$

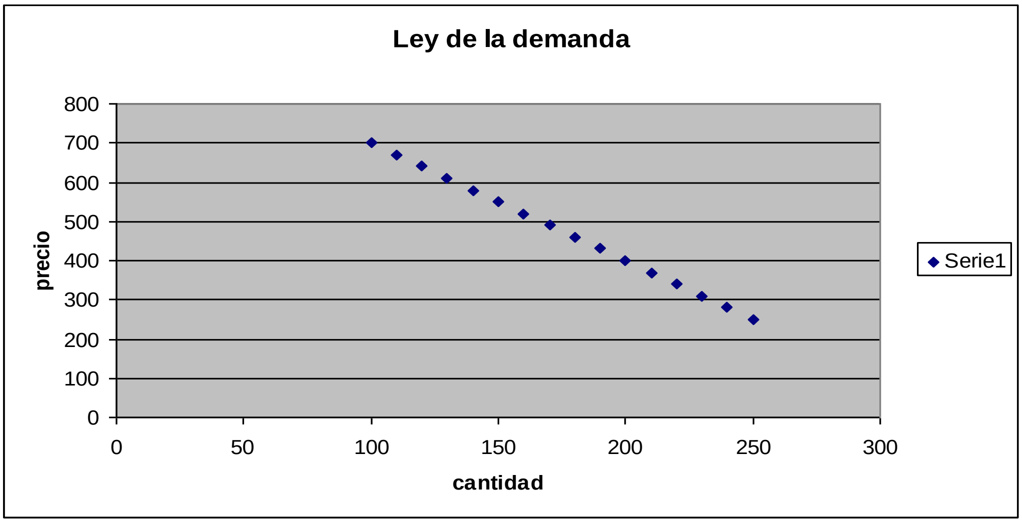
Si la función de costo está dada como: $C(x)$, entonces el costo marginal es:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C(x)}{\Delta x} = \frac{dC(x)}{dx}$$

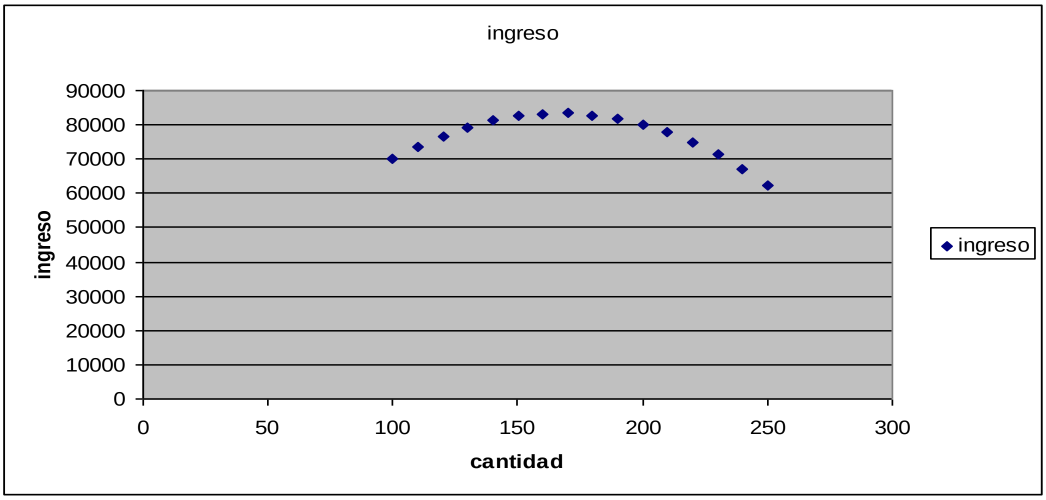
Si $C(x)$ es la función de costos y $I(x)$ la del ingreso, entonces la empresa alcanza su máximo beneficio para un valor x^*, si se verifica en este punto que el ingreso marginal es igual al costo marginal:

$$\frac{dI(x^*)}{dx^*} = \frac{dC(x^*)}{dx^*}$$

Por tanto sabrá con exactitud que cantidad debe producir para alcanzar su máximo beneficio si conoce la ley de la demanda y la función de costo. Supongamos que la producción inicial es de 100 unidades que se incrementa de diez en diez, el valor de a=1000 y el de b=-3. La representación gráfica de la ley de la demanda es:



La función del ingreso tiene la siguiente representación gráfica:



Ejemplo 3.

Ahora consideremos un cuerpo que se desplaza linealmente y uniformemente acelerado, se conoce en cuanto tiempo recorre un determinado espacio. Llamemos t_0 es tiempo inicial y t_1 el tiempo final y e_0 el espacio inicial y e_1 el final, la velocidad se define como la relación:

$$v = \frac{e_1 - e_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

Si se considera la velocidad instantánea, es decir cuando $\Delta t \to 0$ entonces tenemos:

$$v = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} = de/dt$$

Por tanto, podemos establecer la relación exacta:

$$vdt = de$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos:

$\int vdt = \int de; \quad vt = e + c$ de donde $v = e/t + c_1$.

Esto es, si sabemos el tiempo que tarda un vehículo en desplazarse en un determinado espacio, y la velocidad inicial representada por c_1, sabremos exactamente su velocidad.

Si consideramos ahora los cambios de velocidad en intervalo de tiempo que es lo que se llama aceleración a, entonces:

$$a = \Delta v / \Delta t$$

La aceleración en un instante dado es:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 e}{d\ t^2}.$$

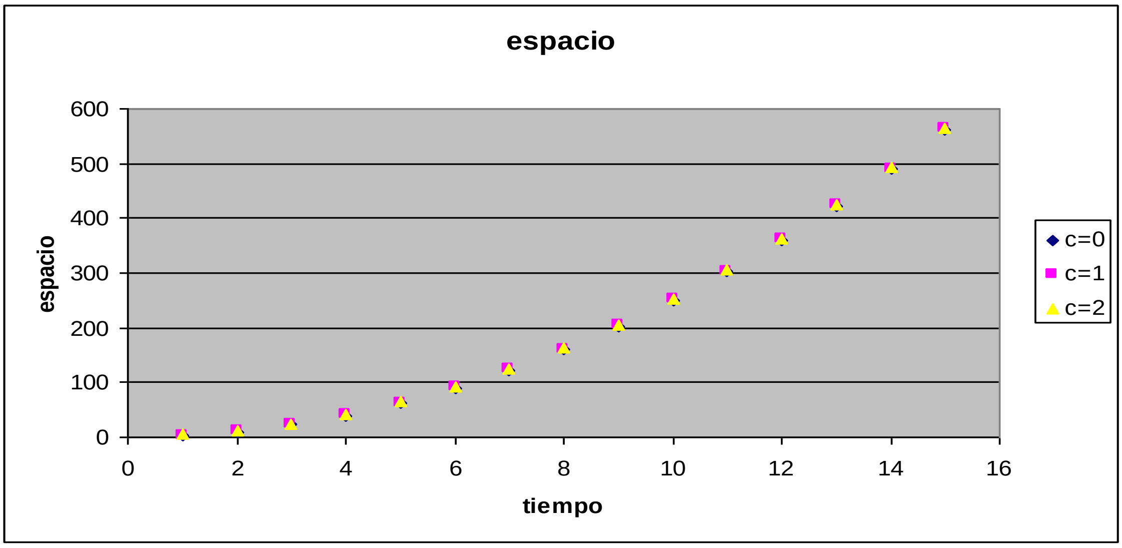
De aquí concluimos que:

$\int adt = \int dv$ por tanto $at + c = v$

Si consideramos que c_1=0 y c=0, entonces.

$$v = de/dt = at$$

$\int de = \int atdt$; $e = a\frac{t^2}{2} + c_2$



El gráfico anterior muestra una familia de curvas que representan las soluciónes de la ecuación diferencial $de/dt = at$ para diferentes valores de c.
Como puede observarse en los tres ejemplos permiten predecir con exactitud el comportamiento de una variable conociendo el comportamiento de otras variables. En los gráficos no se detecta ninguna perturbación.
En algún momento se llegó a pensar que cualquier fenómeno tanto natural como social se podía predecir con exactitud y esta forma de pensar es lo que se conoce como determinismo. ¨ El determinismo inspirado en la relación causa efecto tiene dos direcciones básicas: el determinismo moral y el determinismo físico. El determinismo moral lo encontramos en Sócrates que argumenta que el que conoce el bien tiene necesariamente que obrar bien, las faltas son producto de la ignorancia. La idea del determinismo, que todo está inexorablemente sometido a leyes que permiten predecir los acontecimientos futuros, está presente tanto en la cultura occidental como la oriental. La interpretación de los hechos históricos planteada en el oriente, habla de la fatalidad del eterno retorno y la regeneración del cosmos, el tiempo es completamente cíclico y por tanto los fenómenos sociales son perfectamente predecibles. El I Ching, Libro de las Mutaciones, es el oráculo que permite predecir los cambios y como adaptarse pasiva o activamente a las mutaciones del acontecer que dependen de dos fuerzas contrapuestas: el Yin y el Yang…. En las ciencias naturales, el determinismo se expresa mediante la ley de causalidad que podemos resumirlo como sigue: si conocemos perfectamente las condiciones iniciales de todas las cosas que participan en un proceso natural y omitimos las pequeñas fluctuaciones entonces, podemos predecir sin equívocos los resultados de este proceso natural o fenómeno. Hay dos tipos básicos de determinismo uno absoluto representado por Descartes y Laplace, el primero sostenía que todo tiene una razón de ser, sin hacer distinciones de los diferentes dominios del ser, Laplace por su parte manifestaba que deberían de existir un conjunto de leyes que permitiera predecir el comportamiento de la naturaleza e incluso de lo humano con tal que conociéramos las condiciones iniciales del Universo.
Se habla igualmente del determinismo histórico en donde se asume que existen leyes inmutables que explican y predicen el comportamiento futuro de la sociedad, tal es el caso del materialismo histórico que tomando las ideas de la dialéctica de

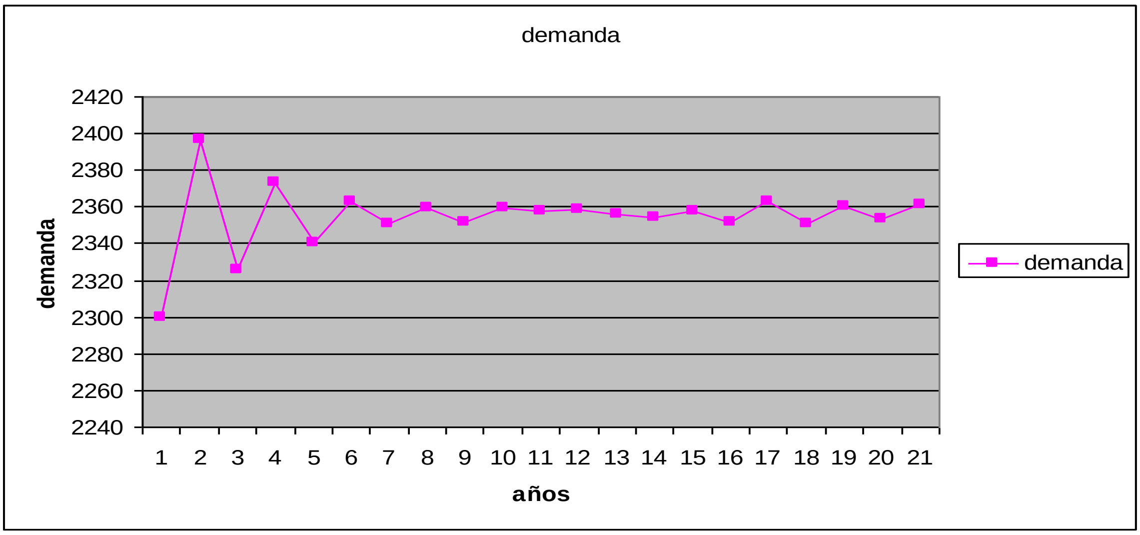
Hegel sobre el devenir y modificándolas, plantea el comportamiento social como consecuencia de contradicciones que originan la lucha de clases.
Entre este enfoque determinista y el mecanicismo hay una íntima ligazón, tanto que se confunde uno con el otro. Se puede hablar del mecanicismo-reduccionismo-newtoniano-cartesiano, donde la naturaleza se comporta como un gran reloj perfectamente sincronizado y, para entender su comportamiento solo es necesario considerar sus partes y posteriormente ensamblarlas. El determinismo en su etapa inicial, encaja perfectamente en la concepción filosófica-religiosa dominante de su época. Aún más es la repuesta cara al concepto del destino final del hombre y la existencia de un dios omnisciente creador de un universo perfectamente ordenado. Como indica Ilya Prigoguine: "La ciencia solo aparece en función de la idea que el hombre se hace del universo. Si un pueblo está convencido de que hay un creador en el origen del mundo, y que aquel determina su futuro, eso quiere decir que hay unas leyes y un futuro discernible ¨….Finalizando el siglo XIX el determinismo absoluto empieza a desmoronarse para dar paso a un determinismo moderado en el cual se reconoce en primer lugar la incapacidad de la mente humana de explicar mediante leyes exactas todo el comportamiento de la naturaleza, porque este comportamiento depende en muchos casos, de un conjunto de causas muy complejas y, además, es insostenible formular una ley única que reduzca a todos los fenómenos de la naturaleza que son tan diversos. De esta manera surge una reinterpretación de la causalidad que da paso a la causalidad estadística. Para Beltrand Russel, las leyes causales que se presenta en la ciencia pueden tener afirmaciones probabilísticas, en efecto, al definir ley causal dice: " Una ley causal según voy a usar el término, puede ser definida, como un principio general en virtud del cuál, dado datos suficientes sobre ciertas regiones del espacio tiempo es posible definir algo sobre otras determinadas regiones espacio temporal. <u>La inferencia puede ser solo probable,</u> pero la probabilidad debe ser considerada superior a la mitad si el principio en cuestión ha de ser considerado digno de ser llamado " ley causal¨ . En la tendencia moderna se habla entonces de causalidad estadística en donde se considera el devenir como probable, donde un consecuente sigue casi necesariamente a un antecedente en términos probabilísticos. Para algunos científicos la incorporación de la estadística tiene una finalidad operativa para explicar los fenómenos microscópicos. En una carta dirigida a Max Born, Einstein decía:
"La mecánica cuántica violenta el reposo. Pero una voz interior me dice que todavía no es el nec plus ultra. La teoría nos aporta muchas cosas, pero no nos acerca al secreto del viejo. De todas manera estoy convencido que él no juega a los dados ¨. A Einstein y sus seguidores no son los únicos que se aferran a un determinismo aunque sea catalogado como moderado, René Thom, retoma el principio de causa eficiente y desarrolla el determinismo que se encuentra en Aristóteles utilizando la teoría de las catástrofes.[3] Esta teoría busca explicar cualitativamente los cambios bruscos que pueden darse en la naturaleza o en el comportamiento de las sociedades y está basada en una rama de la topología que se conoce como topología diferencial.

[3] Reyes P, Andrés E (1996)
La Predicción bajo el Determinismo, Azar y Caos.
Mimeografía.-UCV-Caracas.

II.-MODELOS ALEATORIOS.

Cuando la información es veraz pero incompleta se supone que se debe a que está presente el azar que no permite entender y medir todas las causas que determinan un determinado fenómeno. La idea de concebir fenómenos cuyo comportamiento tienen variabilidad que está comprendida entre cierto rango y que por lo tanto no se puede predecir con exactitud es lo que conduce a formular este comportamiento con un componente no observable y que intenta recoger los muchos otros factores que están afectando al fenómeno pero con un efecto individual casi despreciable, este componente se llama el azar. En finanzas tenemos el caso de los flujos de cajas en cuyo comportamiento podemos detectar la presencia del azar. Veamos varios ejemplos para aclarar la idea.

Ejemplo 1.
Supongamos que la demanda de un artículo presenta la siguiente evolución en el tiempo:



Se piensa que este comportamiento puede expresar en función de la demanda del período anterior más una variable que recoge los otros múltiples factores no observables con efecto individual casi despreciable, entonces el modelo es:
$Y_t = \mu + \varphi_1 Y_{t-1} + \alpha_t$

En este modelo Y_t, Y_{t-1} son las demandas del periodo actual y del inmediatamente anterior, por tanto son variables aleatorias observables; y μ, φ_1 son parámetros desconocidos y α_t es una variable aleatoria que se distribuye como una normal de media cero varianza finita si los factores no observables son independientes y actúan de forma aditiva.

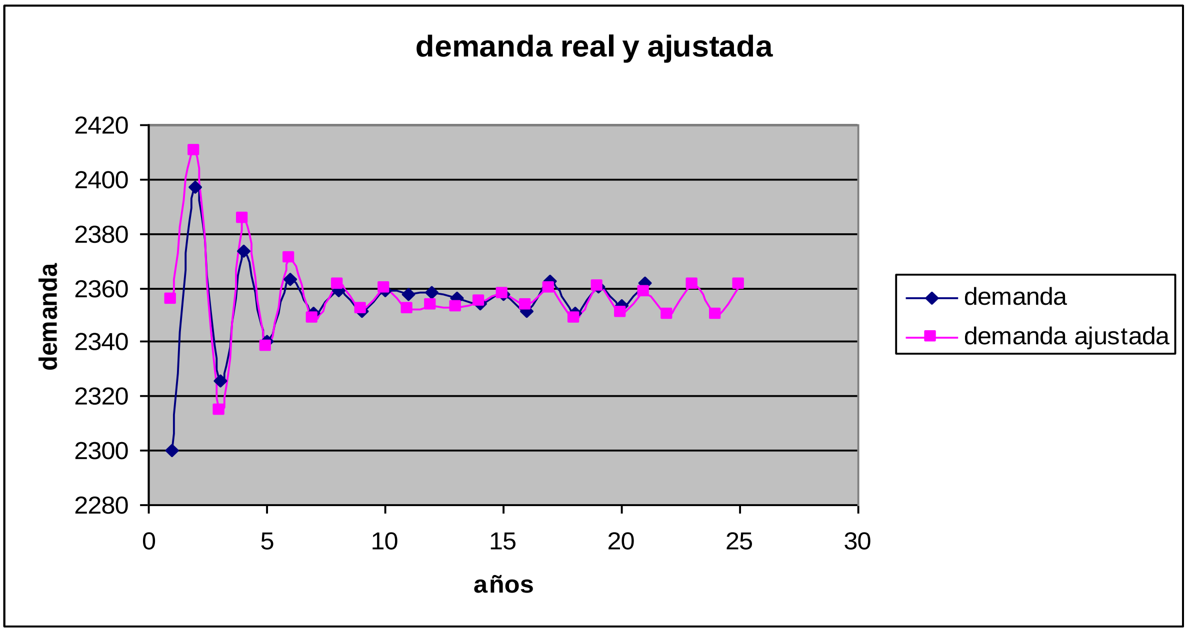
Este modelo se llama autoregresivo de primer orden y se anota como AR(1).
Una vez estimados los parámetros mediante las observaciones de Y_t y Y_{t-1} empleando un método estadístico de estimación como los mínimos cuadrados, obtenemos un modelo ajustado dado por:

$$\overset{*}{Y_t} = \mu^* + \varphi^*{}_1 Y_{t-1}$$

Las estimaciones de los dos parámetros en este ejemplo son: μ^*=2355 y φ_1^*=-0,9871, luego:

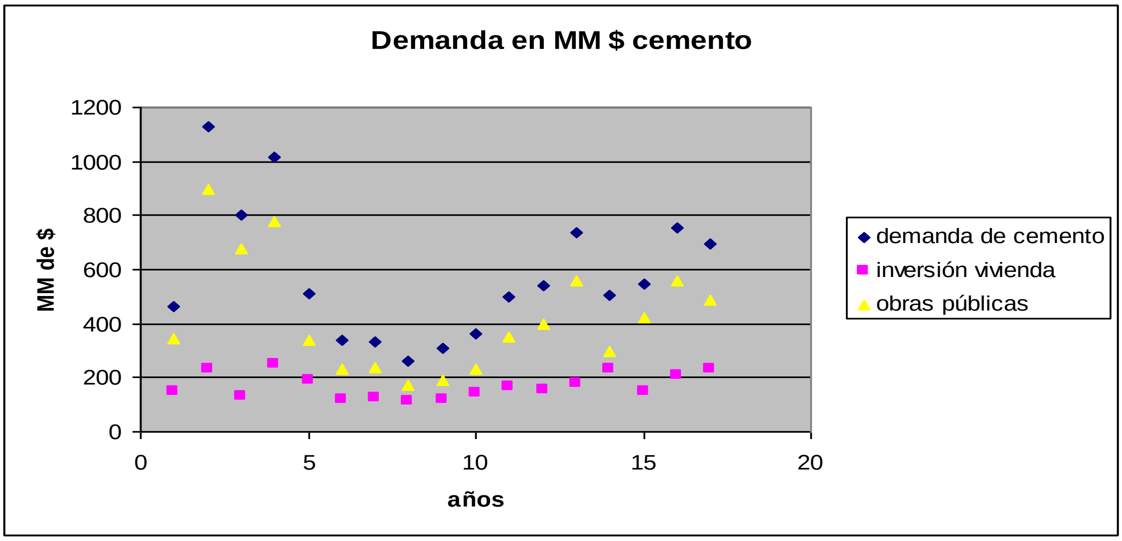
$$\overset{*}{Y_t} = 2355 - 0{,}9871 Y_{t-1}$$

Este modelo explica la variabilidad observada en la demanda del artículo con la variabilidad observada de la demanda en el período anterior del mismo artículo más el componente aleatorio, al ajustarlo desaparece el elemento aleatorio.
Habrá que estudiar si el modelo propuesto refleja lo más fiel posible las observaciones realizadas, por tanto tiene un carácter de tentativo. El siguiente gráfico muestra los valores observados de la demanda y el ajuste del modelo y el pronóstico desde el año 22 al 25.



Ejemplo 2.

Supongamos que una empresa quiere estudiar la demanda de cemento y asume que esta se puede explicar por la inversión en la construcción de viviendas y la inversión en desarrollos de obras públicas. El gráfico muestra las tres series de tiempo.



Parece razonable pensar que la demanda puede explicarse con el siguiente modelo tentativo:

$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \beta_2 X_{t2} + \varepsilon_t$

Donde β_0, β_1 y β_2 son parámetros que hay que estimar, Y_t es la demanda observada de cemento en MM de dólares en el año t, X_{t1} es la inversión en MM de dólares en la construcción de viviendas en el año t, X_{t2} es la inversión en MM de dólares en la construcción de obras públicas en el año t y finalmente ε_t es la perturbación aleatoria en el año t que tiene una determinada ley de probabilidad (generalmente se asume que se distribuye como una normal: $N(0,\sigma^2)$ aunque no necesariamente es así) por tanto Y_t es también una variable aleatoria cuya ley de probabilidad depende de la ley de probabilidad de ε_t.

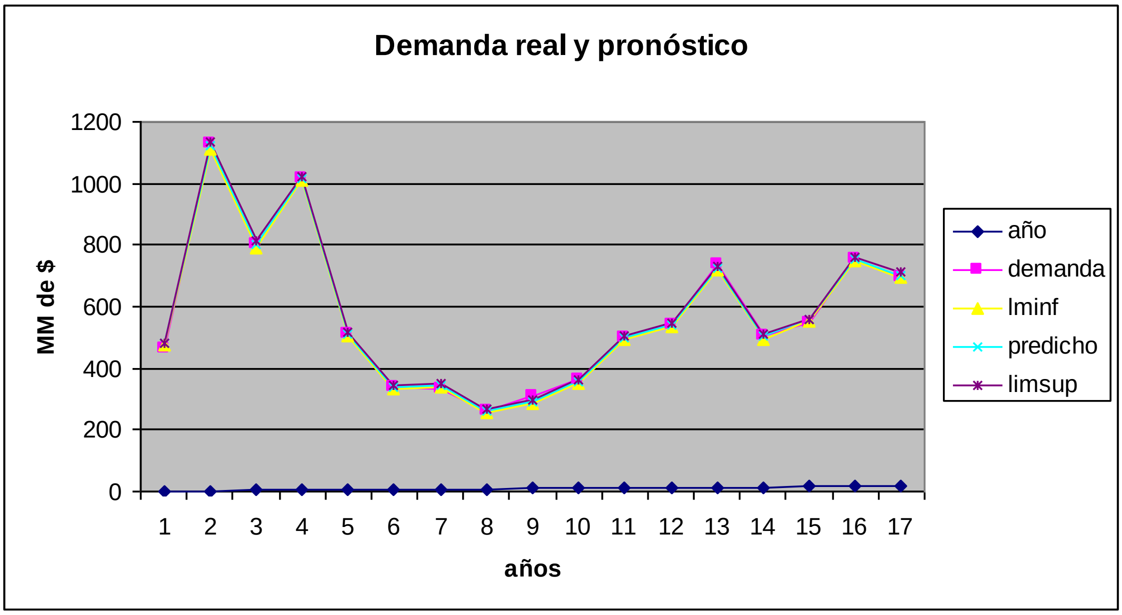
Con las observaciones de las variables obtenemos el siguiente modelo ajustado:

$Y^*{}_t = \beta^*{}_0 + \beta^*{}_1 X_{t1} + \beta^*{}_2 X_{t2}$

En este caso es:

$Y^*{}_t = -11{,}105 + 0{,}893 X_{t1} + 1{,}032 X_{t2}$

El siguiente gráfico muestra cuatro series: demanda real, demanda predicha y los dos límites que forman el intervalo de confianza al 95%.



Habría que estudiar si no hay un modelo mejor que el propuesto. Si el modelo es adecuado sus resultados permiten explicar la variación de la demanda por las variables seleccionadas y predecir posteriormente el comportamiento futuro de la misma dado el comportamiento futuro de las variables explicativas.

Los dos ejemplos vistos muestra como en las observaciones hay irregularidades, éstas asumimos que responden a efectos aleatorios. Entonces, dentro de esa irregularidad se proponen modelos tentativos que permitan separar un posible patrón existente en los datos y la parte aleatoria. Si del modelo se deriva un ¨ buen ¨ patrón ¨, entonces podemos realizar los pronósticos o predecir el comportamiento futuro del fenómeno en estudio.
Como puede observarse se ha introducido en los modelos vistos el azar. ¨ Hasta bien entrado el siglo XIX prevaleció el enfoque determinístico en los diferentes campos de la ciencia. El problema del azar surge a finales del siglo XIX y comienzos del XX, no de la filosofía, como un problema óntico o epistemológico sino como un dato de la naciente física cuántica y los trabajos de H. Poincaré que inicialmente fueron poco tomados en cuenta por sus contemporáneos cuando estos trabajos se referían al azar. Es interesante la observación que hace el físico teórico F. Capra: "Las tres primeras décadas de nuestro siglo cambiaron toda la situación de la física contemporánea. Dos desarrollos separados el de la teoría de la relatividad y el de la física atómica obviaron todos los conceptos principales de la concepción newtoniana del mundo: la noción de espacio y tiempo absoluto, las partículas sólidas elementales, la naturaleza estrictamente causal de los fenómenos físicos y el ideal de una descripción objetiva de la naturaleza"…"El azar se hace presente como consecuencia de un gran número de causas complejas, tal que cada una por separada produce un efecto casi despreciable pero que su conjunto, el resultado final termina tomando importancia" [4] La discusión es amplia en cuanto a la naturaleza del azar ya sea que se considere como el resultado de

[4] Reyes P, Andrés E (1996)
La Predicción bajo el Determinismo, Azar y Caos.
Mimeografía.-UCV-Caracas.

nuestra incapacidad para entender todo el fenómeno o bien sea por que realmente el azar es intrínseco a la naturaleza incluyendo la humana.
En física cuántica es bien sabida la discusión sobre el efecto que tiene un observador sobre el comportamiento de las micropartículas, por un lado Einstein y por el otro Bohr y Heisenberg. Igualmente ocurre con la interpretación del principio de incertidumbre de Heisenberg, pues muy a su pesar, hay científicos de la talla como S.W Hawking que ve en este principio ¨ una propiedad fundamental, ineludible del mundo ¨[5]. En las ciencias sociales, la inclusión del azar tiene un antecedente temprano en la Ilustración con los trabajos de Condorcet que introduce el cálculo de probabilidades dentro de su proyecto de una ciencia social matemática. La incorporación definitiva en el campo de la economía data del tercer decenio del siglo XX.

III.-MODELOS DE BAJA CAPACIDAD PREDICTIVA. (CAOS)

Ahora veremos una situación diferente a los anteriores, en estos caso podemos combinar las dos ideas de comportamiento determinístico con el aleatorio. Estos modelos se caracterizan porque describen fenómenos dinámicos con una alta irregularidad que hace difícil construirlos con capacidad predictiva. La alta irregularidad se debe a varios elementos:
1.-Los modelos que describen este tipo de fenómenos son no lineales, con o sin ruidos aleatorios.
2.-Son altamente sensibles a las pequeñas variaciones en las condiciones iniciales, esto implica una inestabilidad exponencial. Una consecuencia de esta característica es: la capacidad de predicción no depende si el fenómeno es simple o complejo.
3.- Estos fenómenos se caracterizan también por la retroalimentación: la salida regresa a la entrada.
4.-La geometría que los describe es de naturaleza cuantitativa y se expresa en el espacio definido por las variables que explican el movimiento en el tiempo, este especio se llama de fase. Esta geometría tiene entre sus características, que a diferencia de la geometría plana o esférica, su representación presenta discontinuidades e irregularidades y en la medida que se hace la escala más pequeñas las figuras originales se replican en estas escalas. Esta geometría se llama fractal.
5.-El modelo que describe el fenómeno converge a un atractor que Rulle denominó atractor extraño por tener una naturaleza fractal.
Los fenómenos que tienen estas características se dice que se comportan como sistemas dinámicos caóticos.
Veamos varios ejemplos:

Ejemplo 1.
Empezaremos el análisis de la inestabilidad de los sistemas con dos casos sencillos: imaginemos que el comportamiento dinámico de dos sistemas puede describirse por las siguientes ecuaciones: para el primer sistema: $X_t = 100X_{t-1}$ y para el segundo: $X_t = 100 + X_{t-1}$. Consideremos como condición inicial $X_0 = 0,01$

[5] Hawking, S.W. (1989)
La Historia del Tiempo
Grijalbo S.A.-Caracas

en ambos casos, y luego nos desviaremos en 0,00009 de esta condición, esto es $X_0^* = 0{,}01009$ y estudiemos el comportamiento de los dos sistema cuando se hace presente esta pequeña desviación.
Empedemos a desarrollar el primer caso:

$X_1 = 100X_0$

$X_2 = 100X_1 = 100^2 X_0$

$X_t = 100^t X_0$

Con una pequeña desviación de la condición inicial de 0,00009, es decir con $X_0^* = 0{,}01009$, $X_5 = 100.900.000$ es decir una diferencia de 900.000, pero para el período siguiente, es decir, t=6, la diferencia pasa a ser de 90.000.000, en efecto con la condición $X_0 = 0{,}01$, $X_5 = 10.000.000.000$ y con $X_0^* = 0{,}01009$ $X_6 = 10.090.000.000$ en cambio en el segundo caso tenemos:

$X_1 = X_0 + 100$

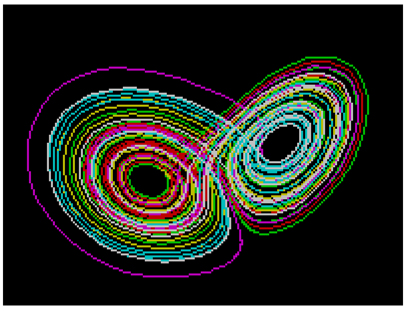
$X_2 = X_1 + 100 = X_0 + 200$

$X_t = X_0 + 100t$

En el tiempo t=5 y con la condición inicial $X_0 = 0{,}01$, $X_5 = 500{,}01$, y con la desviación de la condición inicial $X_0^* = 0{,}01009$ es: $X_5 = 500{,}01009$ para el período siguiente es: $X_6 = 600{,}01$ con la condición inicial original y $X_6 = 600{,}01009$ es decir la diferencia entre las dos trayectorias se mantiene.
Como puede observarse por el comentario anterior, la diferencia entre la trayectoria del primer caso cuando hay una pequeña desviación a la condición inicial se hace exponencial mientras que en el segundo se mantiene. Este es un ejemplo de cómo un sistema dinámico determinístico simple, como el primer caso, es sensible a la condición inicial. Pequeñas variaciones en la condición inicial trae grandes variaciones en la trayectoria del sistema.

Ejemplo 2.

Un ejemplo de atractor extraño es el atractor de Lorenz (2000), que resulta de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de tres ecuaciones y tres variables asociado al problema climático. El gráfico del atractor se presenta a continuación.



El sistema de ecuaciones diferenciales es:

$$dx/dt = -\sigma x + \sigma y$$
$$dy/dt = -xz + rx - y$$
$$dz/dt = xy - bz$$

Las tres constantes b, σ y r determinan el comportamiento del sistema ¨ (Lorenz 2000). Se puede observar que ninguna de las orbitas se interceptan además, en el sistema de ecuaciones las dos últimas son no lineales al aparecer los productos cruzados de las variables x, y, z como xz y xy.

Modernamente hay dos enfoques fundamentales, en uno se considera el caos como socio y precursor del orden, se hace énfasis en la irreversibilidad de los fenómenos que se comportan como sistemas dinámicos caóticos y el estudio de estos fenómenos parten de la interpretación de la segunda ley de la termodinámica[6] y el uso intensivo del concepto de entropía. Este enfoque está representado por Ilya Prigogine que propone el concepto de estructuras disipativas: "La segunda ley de la termodinámica se ha asociado por antonomasia a la destrucción de estructuras, sin tener en cuenta las condiciones iniciales. El razonamiento más reciente tiene un punto de partida en el hecho de que, en condiciones muy inestables, incluso en el marco de la segunda ley de la termodinámica, pueden surgir nuevas estructuras. Estas nuevas estructuras dinámicas son las estructuras disipativas "[7] .El otro enfoque está representado por Edward Lorenz, Mitchell Feigenbaum, Benoit Maldelbrot y Robert Shaw, David Ruelle, Floris Takens entre otros. Todos ellos se ocupan de las condiciones del caos más que su estructura organisativa. E. Lorenz se conoce por el efecto mariposa, un pequeño aleteo de una mariposa en Beijín puede originar una tormenta en Florida, Mitchell Feigenbaum encontró la duplicación de los períodos en un conjunto de ecuaciones que conducen del orden al caos con la constante que lleva su nombre; Benoit Maldelbrot es el creador de la geometría fractal que dentro de su característica está que los objetos pueden tener dimensiones no entera, en la medida que se reduce la escala, el objeto se reproduce una y otra vez dentro de si mismo, los fractales pueden tener estructura determinística o poseer un elemento aleatorio[8]. Robert Shaw establece la relación entre la teoría de la información y la teoría del caos y finalmente David Ruelle y Floris Takens introducen el concepto de atractores extraños y en especial Takens introduce el teorema de inserción de particular importancia en esta teoría. Esta teoría tuvo sus inicios en la décadas de los setenta aunque tiene su antecedente con los trabajos de estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales de Lyapunov en la segunda mitad del siglo XIX, los trabajos sobre el efecto de las condiciones iniciales en los fenómenos físicos de H. Poincaré y los conceptos de distancias del matemático Hausdorff.

La cantidad de trabajos que hay actualmente es abrumadora en ciencias relacionadas con la física, química o biología, de hecho hay revistas especializadas en el área tal como Physica D, Physical Review Letters, Physical

---

[6] ¨ Para procesos en sistema aislado, cuyos subsistemas o componentes intercambian calor, la entropía total del sistema permanece constante, es decir el sistema permanece cercano al equilibrio, si los procesos son reversibles, y aumenta si los procesos son irreversibles, es decir, el sistema está lejos del equilibrio ¨ M. Alonso y E.J. Fine(2000).-Física.-Addison Wesley Pág. 356.

[7] Prigogine Y (1993) Tan solo una Ilusión Tusquets Editores-Barcelona. Pág. 160.

[8] Mandelbrot B (1997)
La Geometría Fractal de la Naturaleza.
Tuquets Editores-Metatemas 49-Barcelona-España.

Review A y muchas otras que tratan de fenómenos no lineales que además son sensibles a las condiciones iniciales, es decir caóticos. Su aplicación en economía es mucho más reciente originando lo que algunos autores llaman la economía de la complejidad, se han incorporado las herramientas de la teoría del caos al estudio de diferentes problemas económicos tales como la inflación, el desempleo, el mercado de capitales, el mercado financiero internacional etc. Es frecuente ver en estos últimos años trabajos enfocado desde la perspectiva del caos en revistas como Econometric Reviews, Journal of Economic Theory , y otras propias del área.

IV.-PRONOSTICO O PREDICCIÓN.

El tipo de modelo de predicción o pronóstico dependerá si el fenómeno se está considerando bajo una de las ópticas expuestas anteriormente, es decir, determinismo, azar o caos. Entonces, debemos ver cada caso por separado.

IVa.- PRONÓSTICO O PREDICCIÓN EN LOS MODELOS DETERMINÍSTICOS.

La predicibilidad en el determinismo tiene dos vertientes, uno dogmático que postula la certeza de predecir mediante modelos matemáticos cualquier fenómeno y el otro metodológico en donde el uso de ecuaciones permite describir y predecir el comportamiento de un buen número de fenómenos con tal que cumpla con ciertas condiciones.
Partimos de la descripción de un fenómeno real cualquiera, mediante un modelo matemático ó una idealización de tal fenómeno. Al especificar el modelo, se supone que el mismo recoge los elementos más significativos del fenómeno bajo estudio, es decir, el efecto de los factores no incluidos, independientemente del número de estos, no afecta el poder descriptivo y predictivo del modelo formulado. Un buen número de fenómenos puede representarse por una ecuación o un sistema de ecuaciones diferenciales (o en diferencias finitas) lineales o no lineales. Como ejemplos tenemos los dados en el punto I. Entonces, los modelos determinísticos pueden estar expresados por un sistema de ecuaciones como este:

$dy_i / dt = f_i(t, y_1, y_2 ... y_n)$; $i = 1,2,...n \quad t \in [t_0.T]$; $y_j \in R$ (1)

Con condiciones iniciales $y_i(t_0) = y_{i0}$; $i = 1,2,...n$. Usualmente, estas condiciones iniciales son el resultado de ciertas mediciones previas, las cuales han podido ser obtenidas con cierto error que asumimos despreciable. Por tanto, pequeñas variaciones en la fijación de las condiciones iniciales solo deben influir en una muy pequeña variación de la solución. Si este es el caso, estamos frente a un sistema estable y por consiguiente la predicción será " casi exacta". En esta situación se habla de estabilidad según Lyapunov[9].

[9] Consideremos la solución $f_i(t)$, $i = 1,2,...n$ del sistema de ecuaciones diferenciales (1), entonces la solución $f_i(t)$ se llama estable si para cualquier $\varepsilon > 0$, se puede elegir un δ que depende de ε: $\delta(\varepsilon)$>0, tal que para cualquier solución $\varphi_i(t)$ de dicho sistema, se satisfaces las siguientes desigualdades: $|\varphi_i(t_0) - f_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)$, para $i = 1,2,...n$, entonces para todo $t \in [t_0, T]$ también se

Otra representación de fenómenos considerados como deterministico y que permite su descripción y predicción es el empleo de funciones periódicas que se expresan como series de Fourier que combina términos senos- cosenos. Una función periódica consiste en: $f(t) = f(t+P)$, para todo t donde P es el período y 1/P es la frecuencia.
Todas estas herramientas matemáticas son útiles para hacer predicciones de sistemas dinámicos determinísticos cuando sus comportamientos se pueden representar por funciones continuas, donde los saltos son suaves y las variaciones en las condiciones iniciales no afectan la predicción. Pero ¿Qué ocurre cuando los cambios son bruscos, es decir, surgen discontinuidades? La repuesta la da René Thom con su teoría de la catástrofe, en vez de hablar de estabilidad estructural se habla de estabilidad cualitativa.
En economía y ciencias sociales se ha tratado de establecer modelos determinísticos como el de la física newtoniana, tales son los casos de la teoría del equilibrio general, el crecimiento óptimo neoclásico etc.

IVb.- PRONÓSTICO O PREDICCIÓN EN LOS MODELOS PROBABILÍSTICOS.

En el caso de los modelos con componentes aleatorios hay que hacer dos distinciones: si lo que se posee es solamente el comportamiento de fenómeno en el pasado o si es posible tener también observaciones pasadas de otros fenómenos relacionados con el fenómeno en estudio. El primer caso se trata de una serie de tiempo y en el segundo de un modelo causal donde la variable endógena como las variables exógenas están indexadas en el tiempo. Una serie de tiempo no es otra cosa que una realización de un proceso estocástico, entendiendo como proceso estocástico en forma general, a un conjunto de variables aleatorias clasificadas según un determinado parámetro que toma sus valores en un conjunto índice, esto se puede expresar como: $\{X(t,\varsigma); t \in T; \varsigma \in \Omega\}$[10] donde T es el conjunto índice que puede ser continuo o discreto y Ω es el espacio muestral, para nuestro propósito T es el tiempo. Se entiende por pronóstico al siguiente problema: dado $X(t,\varsigma_0)$ que es observable hasta $t \leq t_0$, entonces se desea tener información de cual será el comportamiento de $X(t,\varsigma_0)$ a partir de $t \geq t_0 + h$, es decir, el comportamiento probable o esperado (esperanza matemática) de $X(t_0 + h, \varsigma_0)$.
Cuando hablamos de comportamiento probable queremos decir que deseamos responder a la pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de que $X(t_0 + h, \varsigma_0)$ tome un determinado valor o tome sus valores en un intervalo dadas las observaciones pasadas? Sin pérdida de generalidad, esto es:

cumplen las siguientes desigualdades: $|\varphi_i(t) - f_i(t)| < \varepsilon$ para $i = 1,2,...n$. Por tanto las soluciones cercanas a las condiciones iniciales permanecen cercanas para todo $t \in [t_0, T]$.

[10] En $\{X(t,\varsigma); t \in T; \varsigma \in \Omega\}$ se observa que las variables $X(t,\varsigma)$ tienen dos argumentos que se interpreta como sigue, para un valor fijo de $\varsigma = \varsigma_0$; $X(t,\varsigma_0)$ es una función de t que representa una realización posible de $\{X(t,\varsigma); t \in T; \varsigma \in \Omega\}$ y para un valor fijo de $t = t_0$; $X(t_0,\varsigma)$ es una variable aleatoria o función en el espacio muestral Ω en R.

$P\left[X\left(t_0+h,\varsigma_0\right)\leq j\middle|x\left(0,\varsigma_0\right)\leq k_0;x\left(1,\varsigma_0\right)\leq k_1...x\left(i,\varsigma_0\right)\leq k_i\right]$ Donde $j,k_0,...k_1$ son valores dados.

En el caso que la pregunta se refiera al valor esperado en $t\geq t_0+h$ el problema es estimar la esperanza condicional:
$E\left[X\left(t_0+h,\varsigma_0\right)\leq j\middle|x\left(0,\varsigma_0\right)\leq k_0;x\left(1,\varsigma_0\right)\leq k_1...x\left(i,\varsigma_0\right)\leq k_i\right]$[11]
De esta última pregunta nos ocuparemos a continuación. Pero antes, debemos indicar que se deben cumplir ciertas condiciones para poder hacer el pronóstico adecuadamente de la misma forma que se hace en un modelo determinístico, en este, cuando se describe mediante ecuaciones diferenciales se exige que las soluciones sean estables, mientras que en el probabilística se exige que $\left\{X\left(t,\varsigma\right);t\in T;\varsigma\in\Omega\right\}$ sea estacionario y, esto significa que sus características estadísticas son invariantes en el tiempo.[12]
Esta esperanza condicional puede estar referida a un fenómeno aleatorio que sólo se conoce su comportamiento pasado y que se asume que es la realización de un proceso estocástico del tipo por ejemplo:
$Y_t=\mu+\varphi_1 Y_{t-1}+\alpha_t$
Este modelo se llama autoregresivo de primer orden que lo vimos ya como un ejemplo en el punto II y se abrevia como AR(1) o puede ser tal como:
$Y_t=\mu+\theta_1\alpha_{t-1}+\alpha_t$
El cual no depende de las observaciones pasadas del mismo fenómenos sino de los ruidos pasados que afectan su comportamiento a lo largo del tiempo, entonces tenemos un modelo de promedio móvil MA(1).
Puede ocurrir que se asuma que los datos son la realización de un proceso algo más complicado y que su forma entonces es:
$Y_t=\mu+\varphi_1 Y_{t-1}+\theta_1\alpha_{t-1}+\alpha_t$
Este caso se llama autoregresivo y promedio móvil ARMA (1,1). Previo a realizar el pronóstico hay que estimar los parámetros del modelo propuesto como candidato. En general se expresa un modelo ARMA (p,q) donde los valores p y q indican cuantos parámetros autoregresivos y cuantos de promedios móviles se están considerando. Cuando la serie es no estacionaria, una de la forma de lograrlo es diferenciandola esto es: aplicar el operador ∇ tantas veces como sea necesario a Y_t o a los valores centrados $z_t=Y_t-\mu$, esto es: $\nabla^d Y_t$ o $\nabla^d z_t$, donde d es las veces que se diferencia la serie dando origen a un modelo ARIMA(p,d,q). Una vez estimados los parámetros del modelo sugerido el pronóstico está dado por la siguiente expresión general:

$$E\left[X\left(t_0+h,\varsigma_0\right)\leq j\middle|x\left(0,\varsigma_0\right)\leq k_0;x\left(1,\varsigma_0\right)\leq k_1...x\left(i,\varsigma_0\right)\leq k_i\right]=z^*{}_t\left(h\right)$$ [13]

---

[11] Reyes P, Andrés E (1996)
Obra citada.

[12] $\left\{X\left(t,\varsigma\right);t\in T;\varsigma\in\Omega\right\}$ es estacionario en sentido estricto si $\left\{X\left(t_i,\varsigma\right);i=1,2...n\right\}$ y $\left\{X\left(t_i+h,\varsigma\right);i=1,2...n\right\}$ están idénticamente distribuidos y en el sentido amplio si:
a) $E(X(t_i,\varsigma))=E(X(t_i+h,\varsigma)$ b) $Var(X(t_i,\varsigma))=Var(X(t_i+h,\varsigma)$ y c) $E(X(t_i,\varsigma),X(t_i+h,\varsigma))=\gamma(h)$.

[13] $z_t=Y_t-\mu$; $\nabla z_t=z_t-z_{t-1}=\left(1-B\right)z_t$; $\nabla^d z_t=\left(1-B\right)^d z_t$

$$z^*_t(h)=\varphi_1^* z_{t+h-1} + \varphi_2^* z_{t+h-2} + \varphi_3^* z_{t+h-3} + \varphi_{p+d}^* z_{t+h-p-d} + \theta^*{}_1\alpha_{t+h-1} + \theta^*{}_2\alpha_{t+h-2} + \ldots + \theta^*{}_q\alpha_{t+h-q}$$

En el caso de un AR(1) es: $z^*_t(h)=\varphi_1^* z_{t+h-1}$. Antes de hacer la predicción, es necesario estudiar la adecuación del modelo, es decir, validar si los datos provienen o son una realización de un proceso estocástico del tipo propuesto[14].

El problema de la predicción puede plantearse de la siguiente forma:

$X(t,\varsigma_0) = f\left(X_1(t,\varsigma_0), X_2(t,\varsigma_0), \ldots X_k(t,\varsigma_0); \beta\right) + \alpha_t$; $t = 1,2,3,\ldots n$ (2)

Donde f es una función lineal o no lineal para cada instante t de $X_j(t,\varsigma_0)$, es decir: f es una función de variables aleatorias observables en el tiempo y β representa el vector de parámetros, uno para cada componente $X_j(t,\varsigma_0)$; j=1,2…k, y α_t es una variable aleatoria que generalmente se asume que está distribuida como una distribución normal para cada t.

Otra forma que puede tener (2) es que las variables $X_j(t,\varsigma_0)$ sean no aleatorias sino un conjunto de valores fijos, que anotaremos como: $X_j(t)$ teniendo β y α_t la misma connotación que en el caso anterior. La esperanza condicional se llama regresión. En cualquiera de los casos hay que hacer la validación de los supuestos con los que se construyen estos modelos para predecir o controlar. Si los parámetros β_j y las variables aleatorias son lineales se habla del modelo tipo I.[15]

IVc.- PRONÓSTICO O PREDICCIÓN EN LOS MODELOS DETERMINÍSTICOS CAÓTICOS.

En el caso de los sistemas altamente sensibles a las condiciones iniciales se suelen clasificar en dos grandes clases, aquellos que son predecibles a muy corto plazo y los que tienen serias dificultades para hacer predicciones incluso a corto plazo. En cualquier caso se requiere de software especiales para poder hacer no solo el pronóstico sino la determinación si la serie de tiempo proviene de un proceso no lineal con sensibilidad en las condiciones iniciales.

Para el estudio del sistema se recurre a varios indicadores, el primero es el exponente de Lyapunov[16], para obtenerlo se han propuestos diferentes algoritmos,

---

[14] El modelo ARIMA se escribe en forma general como: $\Phi(B)(1-B)^d z_t = \Psi(B)\alpha_t$ donde $\Phi(B)=1-B-B^2-\ldots B^p$ y $\Psi(B)=1-B-B^2\ldots B^q$, para realizar el pronóstico el modelo debe cumplir con las condiciones de estacionaridad e invertibilidad: La primera condición se cumple si las raíces del polinomio $\Phi(B)$ caen fuera de un circulo unitario y la segunda si el valor absoluto de las raíces del polinomio en B de $\Psi(B)$ son mayores a la unidad.

[15] El modelo lineal es: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_1(t) + \beta_2 X_2(t) + \ldots \beta_k X_k(t) + \alpha_t$, se llama regresión a: $E(Y_t | X_1(t), \ldots X_k(t)) = \beta_0 + \beta_1 X_1(t) + \beta_2 X_2(t) + \ldots \beta_k X_k(t)$

[16] Tomando en cuenta la nota 9 en donde $|\varphi_i(t_0) - f_i(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ y consideremos que $\varphi_i(t_0) = f_i(t_0 + \varepsilon)$ y después de t períodos obtenemos $\left| f^t{}_i(t_0+\varepsilon) - f^t{}_i(t_0) \right| < \varepsilon . \exp(t\lambda(x))$

uno de los más recientes estudio de este exponente es el propuesto por Lai, D y Chen, G (1997). Entre los otros indicadores están: correlación espacial de Grassberder y Procacia (1983; 1983[a]), el coeficiente de Hurst, la dimensión fractal y los test estadístico de Brock, Dechert y Scheinkman[17] (BDS) éste último sirve para detectar si el proceso proviene de un sistema no lineal condición necesaria para la presencia de caos pero no suficiente. Otros trabajos más recientes giran en la determinación de la mínima dimensión de inserción de L. Cao[18]. Como señala Wolf no siempre es fácil decidir si el proceso es aleatorio o dinámico a pesar que se han propuestos varios métodos tales como la dimensión de correlación. Uno de los problemas fundamentales en economía es el número de observaciones que requieren las diferentes metodologías para diferenciar el tipo de sistema dinámico y este número es en la práctica muy pequeño.
Una vez determinado si la serie es caótica entonces hay que determinar hasta cuantos períodos se puede predecir y este tiempo se llama tiempo de Liapunov que es el inverso del mayor exponente: $T_L = 1/\lambda_{\max}$. Si tenemos una serie de 1200 días y el exponente de Liapunov es 0,95, sólo podemos predecir el comportamiento del próximo día. Los sistemas dinámicos caóticos emulan en el corto plazo a modelos ARIMA(p,d,q), sin embargo se prefiere emplear los modelos no lineales desarrollados por R.F.Engle (1982), Kuldeep Kumar(1986) y más recientemente L.D. Byers (1995). Uno de estos modelos, asumiendo que :

$$\text{Var}(\alpha_t) = \sum_{i=1}^{p} \kappa_t \alpha_{t-i}{}^2$$

Es el modelo no lineal dado por:

$$Y_t = \mu + \alpha_t + \sum_{j=1}^{p} \varphi_j Y_{t-j} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} \beta_{jk} Y_{t-j} \alpha_{t-k}$$

Junto a estos modelos se ha propuesto el empleo de modelos de procesos autoregresivo y de media móvil fraccionalmente integrado ARFIMA(p,d,q) en donde d toma valores no enteros generalmente en el intervalo $(-1,1)$ o en el intervalo $(0,1)$ cuando se usa el coeficiente de Hurst. El más sencillo es el caso ARFIMA(0,d,0). Se han construidos diferentes contrastes sobre el parámetro d, donde la hipótesis nula es $H_0 : d = 0,$ o hipótesis de ruido blanco, Robinson [19]propone un estadístico dado por:

---

despejando y tomando límite $\lambda(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left[\lim_{\varepsilon\to 0} \log \frac{1}{\varepsilon}\left| f_i^t(t_0+\varepsilon) - f_i^t(t_0)\right|\right]$ de donde se obtiene $\lambda(x) = \lim_{t\to\infty} d \log f_i^t(t_0)/dt_0$. Para una sola ecuación con una variable i=1, si $\lambda > 0$, el sistema es sensible a las condiciones iniciales. en los demás casos, si el mayor exponente es mayor que cero. En el caso de ecuaciones no lineales la sensibilidad a las condiciones iniciales implica no inestabilidad sini caos.

17 Se puede ver cada uno de estos conceptos en: Andrés E Reyes P (2007)
Herramientas Cuantitastivas en la Toma de Decisiónes Empresarial.-CAPIX.

18 Cao. L (1997)
Practical method for determining the minimum embedding dimension of scalar time series.
Physica D 110.

19 Robinson (1991)
Testing for strong serial correlation and dinamic condicional hetoroskedaticity in multiple regresión.
Journal of Econometric, 47

$$\lambda = \sqrt{6T/\pi^2}\sum_{j=1}^{T-1}\frac{r_j}{j}$$

Donde r_j es la autocorrelación muestral de orden j, que bajo la hipótesis nula se distribuye asintóticamente como una $N(0,1)$, las hipótesis alterna son : $H_1 : d < 0,$ que representa la presencia de memoria larga, $H_1 : d > 0,$ y $H_1 : d \neq 0,$ para este último contraste se recomienda el uso de λ^2 que sigue asintóticamente bajo H_0 una χ^2_{1gl}.

Otra metodología diferente a las expuestas está basada en los conceptos de redes neuronales las cuales emulan al cerebro humano en cuanto tienen un proceso de aprendizaje. La estructura general de una red neuronal es: ella está formada por varias capas, la primera capa se llama de entrada, posteriormente tiene una o varias capas ocultas en donde se procesa la información que ingresa, generalmente mediante funciones no lineales determinísticas o con componentes aleatorios y, finalmente una capa de salida. Las redes más simples contienen solo tres capas, una de entrada, una oculta y una de salida. Para conocer sobre esta técnica emergente puede consultarse la bibliografía que se da al final de esta monografía.

V.-PASOS GENERALES PARA REALIZAR PRONÓSTICOS CON SERIES TEMPORALES.

Sólo veremos por razón de espacio la situación en donde tenemos disponible únicamente observaciones pasadas de un fenómeno que se supone que es una realización de un proceso estocástico. Los pasos generales son:

1. Se grafica la serie en el tiempo y este gráfico permite visualizar si en el comportamiento irregular que presenta puede detectarse algún patrón. Este patrón puede referirse solo a una tendencia, por ejemplo lineal, pero acompañando a este patrón pueden existir otro tal como la persistencia de un comportamiento cada tanto tiempo, esto es hay estacionalidad y si la serie es suficientemente grande puede darse comportamientos cíclicos: $f(t) = f(t+k)$. Es importante destacar que las series de tiempo están medida en una determinada unidad de tiempo (semanas, meses etc) y en ocasiones es posible pasar de una unidad de tiempo a otra, tal como pasar de meses a semanas y a días. Entonces, si la serie es suficientemente larga ver si en cada escala menor se repiten ciertos patrones, si este es el caso, posiblemente está subyacente una estructura fractal.
2. Si se posee datos suficientes construir el grafico de fase con Y_t, Y_{t-1} y ver si es posible detectar gráficamente un comportamiento que sugiera la presencia de un sistema dinámico altamente sensible a las condiciones iniciales.
3. Supongamos que la serie de tiempo a lo sumo alcanza entre 30 y 60 observaciones, bastará con hacer un gráfico con los puntos (t, Y_t) como el propuesto en el paso 1 y proponer un modelo tentativo tal como un ARIMA (p,d,q) para el caso de poseer cerca de 60 observaciones, para ello estudiamos las estimaciones de las funciones de correlación y correlación

parcial[20] con los datos observados, luego se grafican y de acuerdo a la forma de los gráficos nos permitirán proponer un modelo tentativo. Cualquier software de estadística trae ese soporte. En su defecto puede emplearse algún método de suavizado.

4. Seleccionado el modelo, se valida los supuestos estadísticos inherente al modelo tal como la significación estadística de los parámetros, las medidas de bondad de ajuste y finalmente para conocer si se ha separado adecuadamente el patrón de comportamiento subyacente del componente aleatorio, se estudian los residuos resultantes de las diferencias entre los valores que da el modelo y los valores observados. Se puede determinar además, si existen valores atípicos e influyentes, entendiendo como valores atípicos aquellos que se alejan notablemente de la masa de datos, e influyentes aquellos que al eliminarlos modifican sustancialmente la estimaciones de los parámetros. Puede ocurrir y es lo más corriente, que un valor sea atípico e influyente. Si se encuentran valores atípicos hay que determinar si los mismos son inherentes al fenómeno o es producto de errores cometidos en la recolección de la información, en el primer caso se buscará un método de estimación que no sea afectado por la presencia de estos valores, en el segundo caso se regresa a la fuente de datos y si no es posible corregir el error, se elimina la observación y se sustituye por una interpolación de los datos más cercanos. Por otra parte, es recomendable construir el modelo dejando fuera las observaciones más recientes y comparar las preediciones que da el modelo de estas observaciones, esto nos dará una buena idea de la adecuación del modelo.
5. Aparte de validar el modelo desde el punto de vista estadístico hay que considerar la teoría subyacente relacionada con el fenómeno y el modelo que se está aplicando. Los resultados estadísticamente pueden parecer satisfactorios pero al comparar el modelo con el planteamiento teórico puede encontrarse que entran en contradicción o da resultados absurdos. En todo caso es fundamental tomar los resultados de los pronósticos con prudencia y en lo posible emplear diferentes modelos, la experiencia en el campo en donde se está aplicando las técnicas de pronósticos es fundamental para definir el mejor modelo.
6. El horizonte de la predicción o pronóstico, es decir cuantos períodos futuros se desean pronosticar o predecir dependerá, aparte de lo indicado en los puntos cuatro y cinco en buena medida de la cantidad de información disponible y la complejidad del fenómeno. En el punto dos se recomienda realizar un gráfico que permita ver si existe la posibilidad de que el fenómeno es la realización de un sistema dinámico no lineal además de las herramientas tales como BDS. Si tal es el caso, y se cree que es un sistema dinámico caótico, el horizonte esta definido por el tiempo de Lyapunov dado como: $T_L = 1/\lambda_{\max}$.

[20] Las estimación de la función de correlación se obtiene calculando las correlaciones entre $\left(Y_t, Y_{t-k}\right)$ y está dada por $r_k = \sum_{k=1}^{n-k} (Y_k - Y^*)(Y_{k+t} - Y^*) / \sum_{k=1}^{n} (Y_k - Y^*)^2$. La parcial se obtiene una vez eliminado el efecto de las restantes, por tanto se calcula en base a los residuos obtenidos de los ajustes correspondientes.

VI.-COMENTARIOS FINALES.

Durante la década de los treinta hasta entrados los años ochenta se desarrollaron diferentes modelos lineales uniecuacionales o multiecuacionales que resultaban útiles para entender y predecir los fenómenos macroeconómicos aunados con la metodología de Box-Jenkins desarrollada al inicio de los setenta que permitía formular y seleccionar modelos ARMA para el estudio de series de tiempo, aunque la capacidad predictiva de estos últimos era inferior a los modelos causales en el mediano y largo plazo. En la medida que los fenómenos económicos se hicieron más difíciles de predecir, porque se dieron nuevas circunstancias que los alejaron de la estabilidad y el equilibrio, el supuesto de linealidad fue perdiendo vigencia.
Bajo esta nueva perspectiva, los modelos lineales quedan fuertemente limitados para explicar y más aún predecir (o pronosticar) los fenómenos económicos salvo algunas excepciones. Como consecuencia de esto, los estudios se centran cada vez más en los modelos no lineales: ARCH, GARCH, ARFIMA o técnicas emergentes como las redes neuronales. Si bien en otras ciencias el uso de modelos no lineales es de vieja data, en economía su uso es relativamente reciente, buena parte de los desarrollos más recientes siempre tienen como referencia los trabajos realizados en otros campos, fundamentalmente de la física. Hay un problema en cuanto la aplicación de estas herramientas que consiste en las pocas observaciones que tienen las series económicas, con excepciones como el mercado de capitales que se puede poseer información al menos a la apertura y el cierre diario o el precio del petróleo. Pero al menos hay un hecho alentador que no se daba al inicio de la década de los noventas y es el volumen de publicaciones en revistas especializadas del área y tesis doctorales que se orientan en el campo no lineal.

BIBLIOGRAFÍA.

Box, G.E; Jenkins G .M. (1976)
Time Series Análisis
Holden-Day-San Francisco USA

Brocklebank, J.C; Didkey, Davis. A . (2003)
Forecasting Time Series Second Edition.
SAS Institute.Inc.

Byers L.D; Peal D.A (1995)
Forecasting Industrial Production using non linear methods.
Journal of Forecasting. Vol 14 Pag 325-336.

Caballero M.V; Molera , L. (2004)
Redes Neuronales y Sistemas Dinámicos Complejos.
Universidad de Murcia-España.

Cáceres Hernandez, J.J; Martín Rodríguez, G; Martín Álvarez, F.J (2008)
Introducción al Análisis Univariante de Series Temporales Económicas.
Delta Publicaciones. Universidad de Laguna.

Engle R.F (1982).
Autoregresive Conditions Heteroscedasticity whit Estimates of the Variance of Unitited
Kingdon Inflation.
Econometrica Vol 50 Nº 4 Pag 987-1007.

Fernández Díaz, Andrés. (1994)
La Economía de la Complejidad.
Mc Graw-Hill-Madrid

Fuller W.A. (1976).
Introduction to Statistical Time Series.
John Wiley and Sons-New York.

Grassberder y Procacia. (1983)
Measuring the strangeness of strange attractors
Phstca 9 D.

Grassberder y Procacia. (1983ª)
Estimation of the Kolnogorov entropy fron a chaotic signal
Pysical Review A, Vol 28, Nº 4.

Hanke, J.E; Reitsh; A.G. (1995)
Pronósticos en los Negocios.
Prentice Hall. México.

Kendall M. (1973)
Time Series.
Charles Griffin and Company Ltd-London.

Lai, D y Chen, G (2003)
Distribution of the estimated Lyapunov exponents from noys chaotic time series.
Journal of Time Series Analysis. Vol 24 Nº 6.

Levy C, Sary. (2002)
Complejidad económica desde la perspectiva caótica
Revista Venezolana de Análisis de Coyuntura - Faces-UCV.

Levy C, Sary. (2004)
El Mercado financiero ¿Eficiente o predio de la complejidad?¨
Revista Venezolana de Análisis de Coyuntura - Faces-UCV.

Lorenz, Edward N. (2000)
La Esencia del Caos.
Debate - España

Lorek, Kenneth. (1994)
Pronósticos financieros, requisitos y problemas

Manual de Técnicas de Pronósticos. Compiladores: S. Makadidakis y S. Wheelwright Limusa México,

Makridakis, S; Wheelwright, S.C, (1978)
Forecasting Methods and Applications.
John Wiley & Sons- New York

Makridakis, S; Wheelwright, S.C. (2004)
Métodos de Pronósticos.
Limusa.-México.

Nava F.A. (2002)
Procesamiento de Series de Tiempo.
Fondo de Cultura Económica-México.

Olmedo, E; Valdera, M.V; Mateos, R; Gimeno, R. (2005)
Utilización de Redes Neuronales en la Caracterización, Modelización y Predicción de Series Temporales Económicas en un Entorno Complejo.
Universidad Pontificia Comillas –Madrid España.