SELECCIÓN DE INVERSIONES MODELO: DE BOULMOL QUANDT.

Andrés E Reyes Polanco[1].
Profesor Asociado UCV

Introducción.

Los primeros en formular el problema de selección de inversiones como un modelo de programación lineal fueron J. H. Lorie y L. J. Savage publicando en 1955 el artículo: “Three I problems in Rationing Capital”, en el Journal of Business. Posteriormente H. M. Weingatner presenta una generalización del modelo desarrollado por Lorie-Savage.
En el siguiente artículo tomado de la revista Investigación y Gerencia se presentará a grosso modo el modelo propuesto por Boulmol-Quandt en el cual se plantea maximizar los dividendos a repartir entre los accionistas, tomando en consideración los flujos de caja asociados a los diferentes tipos de posibles inversiones, y las disponibilidades financieras esperadas de la empresa. Este modelo fue trabajado por los autores bajo dos hipótesis: la primera consiste en suponer que no es posible la transferencia de fondos de un período a otro. La segunda hipótesis establece que tales transferencias son posibles, surgiendo así la incorporación de nuevas variables. Ya al final de este artículo se considera la posibilidad de la naturaleza aleatoria de alguno de los coeficientes, tanto de la función objetivo como de las restricciones.
En los modelos de Lorie-Savagey el de H. M. Weingatner se persigue maximizar el valor del capital de las inversiones posibles que se presentan como alternativas, sujeto a las restricciones financieras que se presentan en cada período. En el modelo de Boulmol y Quandt se desea maximizar los dividendos a repartir por la empresa entre sus accionistas.

II:-El Modelo de Boulmol y Quandt

Definición de las variables del Modelo
M_i: Dividendos a repartir a los accionistas en los períodos i = 1, 2, … , t.

W_i: Es la utilidad marginal del consumo para los accionistas en el período i-ésimo. Esta utilidad se supone constante y conocida.

En el presente artículo siempre se tomará W_i en función de la tasa de retorno K, esto es:

---

[1] Este artículo apareció por primera vez en **Reyes Polanco, A.E (1984)** ***Programación Matemática y Modelos Financieros Investigación y Gerencia Volumen 1 Nº1 1984*****. Se ha actualizado añadiendo un ejemplo comentado.**
San Antonio de Los Altos Enero de 2007.

$$W_i = \frac{1}{(1+K)^i}$$

F_{ij}: Flujo neto de caja asociado a la inversión j-ésima en e período i- ésimo.

X_j: Variable asociada a la inversión j-ésima. Indicará el número de veces que puede ser seleccionada la inversión del tipo j-ésimo.

La naturaleza de la variable X_j puede ser dicotómica, en tal caso toma el valor cero si la inversión es rechazada, o uno si es aceptada; puede tomar algún valor entero no negativo indicando el número de veces que puede efectuarse la misma inversión y, finalmente puede tomar cualquier valor en el intervalo $[0,\infty)$ o $[0,1]$

D_i: Disponibilidad financiera de la empresa en el período i-ésimo. I = 1, 2,…, T.

III.-Formulación del Modelo

$$Max$$

$$Z = W_1M_1 + W_2M_2 + \cdots + W_tM_t$$

$$s.a\begin{cases} -F_{11}X_1 - F_{12}X_2 - F_{13}X_3 - \cdots - F_{1n}X_n + M_1 \le D_1 \\ -F_{21}X_1 - F_{22}Y_2 - F_{23}X_3 - \cdots - F_{2n}X_n + M_2 \le D_2 \\ \vdots \\ -F_{T1}X_1 - F_{T2}X_2 - F_{T3}X_3 - \cdots - F_{Tn}X_n + M_T \le D_T \\ X_1 \ge 0, X_2 \ge 0, \cdots X_n \ge 0, M_1 \ge 0, M_2 \ge 0, \cdots, M_T \ge 0 \end{cases} \quad [1]$$

El modelo [1] podemos expresarlo en notación matricial como sigue:

$$Max$$

$$s.a\begin{cases} Z = WM \\ -Fx + IM \le D \\ X \ge 0, M \ge 0 \end{cases} \quad [2]$$

en donde

$$-F_{T\times n} = -\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & \cdots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & \cdots & F_{2n} \\ \vdots & & & \\ F_{T1} & F_{T2} & \cdots & F_{Tn} \end{bmatrix}_{T\times n} ; I_{T\times T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = (W_1, W_2, \cdots W_T); M^T = (M_1, M_2, \cdots M_T); D^T = (D_1, D_2, \cdots D_T)$$

Formulación del Dual

Sea Y un vector columna de T componentes los cuales son las t variables duales asociadas a cada restricción, entonces, el dual del modelo de programación lineal dado en [2] es

$$\begin{aligned}&Min\\&D^T y\\&s.a\begin{cases}-Fy \geq 0\\ Iy \geq W & [3]\\ y \geq 0\end{cases}\end{aligned}$$

Las variables duales Y_i indican la utilidad marginal de los recursos financieros en el período i.

Si denotamos por $Y_H = (Y_{t+1}, Y_{t+2}, ...Y_{t+k})$ el vector de variables de holguras duales asociadas a las restricciones del tipo $I_y \geq W$ dado en [3] y empleamos el teorema débil de completitud de variables de holgura, podemos llegar a las siguientes conclusiones: Si algún componente Y_{t+i} es mayor a cero, entonces el dividendo a repartir entre los accionistas en el período i es nulo y además el precio teórico del recurso financiero (Y_i) es mayor a la utilidad marginal del consumo para los accionistas en ese período. Por otra parte, si Y_{t+i} es igual a cero, entonces se ha de repartir dividendo y las variables Y_i y W_i son iguales.

Ejemplo 1

Supongamos que una empresa tiene dos alternativas de inversiones. La tasa de rentabilidad exigida por los accionistas sobre sus títulos es del 5%. Se estima que en los dos próximos años, la empresa tiene una disponibilidad financiera de 1.000 y 2.000 millones de bolívares. En el primer período los flujos de caja de la primera segunda inversión son respectivamente de -10 y -5 millones de bolívares. En el segundo período los flujos de caja asociados a la primera y segunda inversión son de 10 y -10 millones de bolívares respectivamente.

Con los datos dados anteriormente, podemos formular y resolver el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}&Max\\&z = 0{,}95M_1 + 0{,}91M_2\\&s.a\begin{cases}10x_1 + 5x_2 + M_1 & \leq 1.000\\ -10x_1 + 10x_2 + M_2 & \leq 2.000\\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, M1 \geq 0, M2 \geq 0\end{cases}\end{aligned}$$

Al aplicar el algoritmo simplex obtenemos la siguiente solución óptima:

1	*0,4*	*13,85*	*0*	*0*	*0,95*	*0,91*	*2.770*
0	*10*	*5*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1000*
0	*-10*	*10*	*0*	*1*	*0*	*1*	*2000*

Para realizar una interpretación completa del ejemplo, plantearemos su dual, el cual es:

$$
\begin{aligned}
&Min\\
&Z = 1.000y_1 + 2.000y_2\\
&s.a\begin{cases} 10y_1 - 10y_2 \geq 0 \\ 5y_1, +10y_2 \geq 0 \end{cases}\\
&\quad y_1 \geq 0{,}95\\
&\quad y_2 \geq 0{,}91\\
&\quad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

El valor actual óptimo del monto de los dividendos a repartir entre los accionistas es de 2.770 millones de bolívares. En el primer año este monto es de 1.000 millones de bolívares y en el segundo año es de 2.000 millones de bolívares.

Los valores de las variables duales son $y_1 = 0{,}95$ y $y_2 = 0{,}91$se puede observar que la tercera y cuarta restricción se cumplen como igualdades; por tanto, las variables de holgura duales asociadas a estas restricciones son nulas. Este resultado obtenido en el dual complementa la solución formal en el sentido de que debe repartirse dividendo tanto en el primer año así como en el segundo. Por otra parte la solución del primal nos indica que no debe seleccionarse ninguna de las inversiones propuestas. Observando la solución dual notamos que ambas inversiones tienen asociado un costo de oportunidad de 0,4 y 13,85 millones de bolívares respectivamente.

El ejemplo que se ha dado puede presentarse en notación matricial como sigue:

$$
\begin{aligned}
&Max\\
&z = (0{,}95;0{,}91) \qquad \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}\\
&s.a \qquad -\begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 10 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1.000 \\ 2.000 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

IV.-Modelo de Boulmol y Quandt con transferencia temporal de fondo

Este modelo difiere del anterior en que se permite transferir fondos de un período a otro.

Por tanto hay que definir unas nuevas variables C_i i=0, 1,$\cdots$, T, que indican el importe transferido del período t a t + 1 .La formulación de este modelo es:

$$
\begin{aligned}
&Max\\
&Z = W_1 M_1 + W_2 M_2 + \cdots + W_T M_T\\
&s.a \begin{cases}
-F_{11}X_1 - F_{12}X_2 - F_{13}X_3 - \cdots - F_{1n}X_n + M_1 + C_1 + C_0 \le D_1\\
-F_{21}X_1 - F_{22}X_2 - F_{23}X_3 - \cdots - F_{2n}X_n + M_2 + C_2 - C_1 \le D_2\\
\vdots\\
-F_{T1}X_1 - F_{T2}X_2 - F_{T3}X_3 - \cdots - F_{Tn}X_n + M_t + C_t - C_{t-1} \le D_T
\end{cases}\\
&\quad X_j \ge 0, M_i \ge 0, C_i \ge 0\\
&\quad i = 1,2,\ldots,t\\
&\quad j = 1,2,\ldots n
\end{aligned}
$$

Si denotamos por F la matriz $\|F_{ij}\|_{t\times n}$, por I la matriz identidad, por A la matriz $\|a_{ij}\|_{T\times T+1}$ cuyos elementos a_{ij} son: $a_{ij} = -1$para $i = j$, $a_{ij} = 1$ para $i = j-1$ y, $a_{ij} = 0$en otro caso. Además, si denotamos por x el vector columna de n componentes: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, por M el vector columna de t componentes $(M_1, M_2, \ldots M_t)^T$, por C el vector columna $(C_0, C_1, \ldots C_{t-1}, C_t)^T$, y por $D = (D_1, D_2 \ldots D_T)^T$ entonces el modelo de Boulmol y Quandt podemos presentarlo en notación matricial como sigue:

$$
\begin{aligned}
&Max\\
&Z = WM\\
&Sujeto \quad a \qquad -Fx + IM + AC \le D \qquad\qquad [5]\\
&\qquad\qquad x \ge 0, M \ge 0, C \ge 0
\end{aligned}
$$

El dual asociado a este modelo es:

$$
\begin{aligned}
&Min\\
&Z = D^t y\\
&s.a \begin{cases}
-F^T y \ge 0\\
Iy \ge W^T\\
A^T y \ge 0
\end{cases} \qquad\qquad [6]
\end{aligned}
$$

Generalmente se establece como condición inicial de que $C_0 = 0$. Los valores de C_{i-1} indica la cantidad que se dispone del período *i-1* para transferirlos al período *i*-ésimo aumentando de este modo la disponibilidad financiera para ese período.

V.-Comentarios.

Entre los autores que comentan los modelos anteriormente distintos está Andrés Suárez S (1991). Estos comentarios se pueden resumir como sigue:

1. En el modelo sin transferencia de fondo, las variables de M_i actúan como variables de holgura, por tanto las restricciones deben darse como igualdades.

2. Del punto 1 se desprende que ya se descarta la posibilidad de transferencia de fondo que viene representada por la inclusión de las nuevas variables C_i.
3. De acuerdo a los valores de los coeficientes F_{ij} puede representarse el caso que en la solución óptima las variables de decisión x_j sean nulas.

VI.-Una modificación al modelo de Boulmol-Quandt con transferencia de fondo.

En la práctica, muchas veces no es posible determinar los coeficientes de la función objetivo. En nuestro caso es plausible pensar que la utilidad marginal esperada por los accionista tenga una naturaleza estocástica, es decir, considerar los coeficientes W_j como variables aleatorias. Igualmente, se puede pensar de que la futuras disponibilidades financieras en la empresa responden a un proceso estocástico indexado en el tiempo. Para simplificar, tomaremos a este conjunto de variables aleatorias $(D_i, i = 1,2,...,t)$ distribuidas independientemente y con la misma ley.

Utilidades marginales aleatorias

El problema original con transferencia de dividendos a repartir actualizados es

$$Max$$

$$Z = WM$$

$$s.a \quad \begin{array}{l} -FX + IM + AC \le D \\ x \ge 0, M \ge 0, C \ge 0 \end{array}$$

Al considerar que los elementos del vector de coeficientes de la función objetivo W_x, son variables aleatorias, el modelo queda formulado como sigue:

$$Max \quad Z_0$$

$$s.a \begin{cases} P[WM \ge Z_0] \ge \alpha \\ -Fx + IM + AC \le D \end{cases}$$

$$x \ge 0, M \ge 0, C \ge 0$$

Se desea entonces, maximizar Z_0 bajo un conjunto de restricciones asociadas a las disponibilidades financieras de la empresa. Además debe verificarse que la probabilidad de que los dividendos a repartir actualizados sean mayor a Z_0 debe ser mayor de un valor prefijado α. Este valor α tiene el rol de "confianza" y $1-\alpha$ de riesgo de no cumplimiento de la restricción probabilística. Para resolver este problema suponemos que las utilidades marginales son variables aleatorias no correlacionadas con ley de probabilidad $F_{Wi}(W_i)$ y con $E[W_i] = \overline{W_i}$ y $\text{var}[W_i] = \sigma^2_{wi}$. Por tanto

$$E[WM] = \sum_{i=1}^{t} M_i E[W_i] = \sum_{i=1}^{t} M_i \overline{W_i}$$

$$\operatorname{var}[WM] = \sum_{i=1}^{t} M_i^2 \operatorname{var}[W_i] = \sum_{i=1}^{t} M_i^2 \sigma_{wi}^2$$

Si la ley $F_{wi}(W_i)$ corresponde a una normal de media $\overline{W_i}$ y varianza σ_{wi}^2, entonces podemos definir una nueva variable aleatoria con ley normal de media cero y varianza la unidad:

$$\frac{\sum M_i W_i - \sum M_i \overline{W_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{t} M_i^2 \sigma_{wi}^2}} \stackrel{\Delta}{=} N(0,1)$$

Bajo este supuesto calcularemos la probabilidad:

$$P[WM \geq Z_0]$$

En efecto:

$$P[WM \geq Z_0] = P\left[\frac{Z_0 - \sum M_i \overline{W_i}}{\sqrt{\sum M_i^2 \sigma_{wi}^2}} \leq \frac{\sum M_i W_i - \sum M_i \overline{W_i}}{\sqrt{\sum M_i^2 \sigma_{wi}^2}}\right] \geq \alpha$$

Tal probabilidad se verificará como mayor o igual a α, si y sólo si

$$\frac{Z_0 - \sum M_i \overline{W_i}}{\sqrt{\sum M_i^2 \sigma_{wi}^2}} \leq \varphi_{(a)}$$

donde $\varphi_{(a)}$ es el cuantil α-ésimo; asociado a la “confianza” prefijada α.
Esta condición es equivalente

$$Z_0 = \sum_{i=1}^{t} M_i \overline{W} i + \varphi_{(a)} \sqrt{\sum_{i=1}^{t} M_i^2 \sigma_{wi}^2}$$

Por tanto, el modelo puede reformularse como sigue:

$$Max$$

$$Z = \sum_{i=1}^{t} \overline{W} i M_i + \varphi_{(a)} \sqrt{\sum_{i=1}^{t} M_i^2 \sigma_{wi}^2} \qquad [7]$$

$$s.a \qquad -Fx + IM + AC \leq D$$

$$x \geq 0, M \geq 0, C \geq 0$$

Si consideramos una matriz V tal que:

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_{w1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{w2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{wt}^2 \end{bmatrix}$$

y expresamos $\sum_{i=1}^{t} \bar{W_i} M_i = WM, y \sum_{i=1}^{t} M_i^2 \sigma_{wi}^2 = MVM^T$

El modelo puede finalmente presentarse en notación matricial de la siguiente forma:

$$Max$$
$$Z = WM + \varphi_{(a)}(M^{T}VM)^{1/2}$$
$$s.a \qquad -Fx + IM + AC \leq D$$
$$x \geq 0, M \geq 0, C \geq 0$$

VIa- Disponibilidades financieras aleatorias.

En este punto, consideramos la posibilidad de que las disponibilidades financieras de la empresa en los próximos t-períodos son variables aleatorias. Entonces el problema dado en [5] se escribe como sigue:

$$Max$$
$$Z = WM$$
$$s.a \qquad P[-Fx + IM + AC \leq D] \geq \alpha \qquad [8]$$
$$x \geq 0, M \geq 0, C + 0$$

Igual que en el caso anterior suponemos que los D_i tiene una ley $F_{D_i}(d_i)$ con media $\bar{d}_i$ y varianza σ^2_{di}

Entonces, cada restricción dada en [8], se presenta como sigue:

$$P\left[\sum F_{ij}X_j + M_i + C_i - C_{i-1} \leq D_i\right] \leq \alpha_i \qquad i = 1,2,3,...,T$$

esto es lo mismo que

$$P\left[D_i \geq \sum F_{ij}X_j + M_i + C_i - C_{i-1}\right] \leq \alpha_i \qquad i = 1,2,3,...,T$$

Si suponemos que $F_{D_i}(d_i)$ es una ley normal de media $\bar{d}_i$ y varianza σ^2_{di}, entonces, las variables aleatorias:

$$\frac{D_i - \bar{d}_i}{\sqrt{\sigma^2_{d_i}}} \qquad i = 1,2,3,...,T \text{ tiene cada una ley normal: N(0, 1)}$$

Por tanto, dados los valores de $F_{ij}, M_i, C_i, C_{i-1}, X_i$ podemos calcular la probabilidad

$P\left[D_i \geq \sum F_{ij}X_j + M_i + C_i - C_{i-1}\right]$ mediante la transformación:

$$P\left[\frac{D_i - d_i}{\sigma_{d_i}} \geq \frac{\sum F_{ij}X_j + M_i + C_i - C_{i-1} - d_i}{\sigma_{d_i}}\right]$$

Comparamos esta probabilidad con α_i. Si tal probabilidad es mayor o igual, entonces los valores que toman las variables M_i, C_i, C_{i-1}, X_i conforman una solución factible.

Bajo el supuesto de normalidad, denotaremos por $\sigma_{(\alpha)}$ el cuantil α-ésimo correspondiente a la normal: N(0,1). La condición necesaria y suficiente para que el problema propuesto tenga solución es que

$$P\left[\varphi_{i-\alpha} \leq \frac{D_i - d_i}{\sigma_{d_i}}\right] = \alpha_i$$

o equivalentemente

$$\frac{\sum F_{ij}X_j + M_i + C_i - C_{i-1} - d_i}{\sigma_{d_i}} \le \varphi_{1(\alpha)}$$

de la última expresión se deduce que el problema puede reformularse como sigue:

$$Max$$

$$Z = WM$$

$$s.a \qquad -\sum_{j=1}^{t} F_{ij}X_j + M_i + C_i - C_{i-1} - d_i \le \bar{d}_i + \sigma_{d_i}\varphi_{1(\alpha)} \qquad i = 1,2,3,...,t \qquad [9]$$

$$X_j \ge 0, M_i \ge 0, C_i \ge 0, C_{i-1} \ge 0$$

VIb.- Utilidades marginales y disponibilidades financieras aleatoria

Después de haber considerado separadamente la naturaleza aleatoria tanto de las utilidades marginales como las disponibilidades financieras, surge la cuestión de que si es posible plantear el modelo de Boulmol-Quandt en donde simultáneamente las utilidades marginales y las disponibilidades financieras son aleatorias. Incuestionablemente tal posibilidad existe y su formulación y resolución no es otra cosa que la combinación de los casos de naturaleza estocástica anteriormente expuesto. De esta forma surge el siguiente problema:

$$Max \quad Z_0$$

$$s.a \begin{cases} P[WM \ge Z_0] \ge \alpha \\ P\left[\sum F_{ij}X_j + M_i + C_i - C_{i-1} \le D_i\right] \le \alpha_i \end{cases} \qquad i = 1,2,3,...,t$$

$$X_j \ge 0, M_i \ge 0, C_i \ge 0$$

Tomando los resultados dados en [7] y [9] el problema anterior se replantea como sigue:

$$Z = \sum_{i=1}^{t} \overline{W} i M_i + \varphi_{(a)} \sqrt{\sum_{i=1}^{t} M_i^2 \sigma_{wi}^2}$$

$$s.a \qquad -\sum_{j=1}^{t} F_{ij}X_j + M_i + C_i - C_{i-1} \le \bar{d}_i + \sigma_{d_i}\varphi_{(\alpha)} \qquad i = 1,2,3,...,t$$

$$X_j \ge 0, M_i \ge 0, C_i \ge 0, C_{i-1} \ge 0 \qquad j = 1,2,...,n$$

Solución de los modelos estocásticos propuestos

De los modelos propuestos en donde uno o varios de sus parámetros se consideran como variables aleatorias, el de más fácil solución es aquel en donde las disponibilidades financieras son realmente variables aleatorias.

Para la resolución del modelo dado en [9] basta notar que el mismo no es otra cosa que un modelo de programación lineal y que por tanto cualquiera de los algoritmos simplex permite su solución.

En el caso en donde se plantea las utilidades marginales como variables aleatorias, llegamos a un modelo determinístico no lineal y para su solución debe aplicarse alguno de los algoritmos apropiados para este caso. Igualmente ocurre cuando se combina en un solo problema la naturaleza aleatoria tanto de las utilidades marginales como de las disponibilidades financieras; la función objetivo es no lineal y las restricciones son lineales.

Posibilidad del modelo presentado bajo sus diferentes alternativas
La pregunta que debe hacerse es: ¿Cuál es la posibilidad real de aplicación de este modelo con sus variantes en una economía como la venezolana? En primer lugar debemos establecer que dentro de las diferentes modificaciones del modelo original presentado, en que se adecúa más a la realidad económica es aquel en donde no sólo se contemplan las transferencias temporales de fondo, sino que además uno o varios de los coeficientes son considerados en la determinación de las leyes de probabilidad asociadas a tales variables, ya que no siempre se verifica el supuesto de normalidad, y la utilización de un algoritmo apropiado.

VII.-Interpretación.

Ahora veremos un ejemplo con su interpretación del primal y dual.:

Ejemplo

Suponga que un inversionista quiere ver la posibilidad de seleccionar tres proyectos con un horizonte económico de 3 años. Cada proyecto consiste en adquirir inmuebles para ser alquilados, se asume que las unidades tienen el mismo valor nominal. El primero es adquirir apartamentos en la zona urbana, el segundo adquirir viviendas rústicas en zona montañosa y el tercero en zona playera. En el primer año los gastos de mantenimiento y remodelación son relativamente altos que superan al ingreso por alquiler. Los flujos de cajas netos estimados por unidad y por tipo de vivienda están dados en la siguiente tabla en miles de dólares:

CUADRO DE FLUJOS DE CAJAS NETOS

Años/proyecto	Proyecyo1	Proyecyo2	Proyecyo3
1	-50	-10	-5
2	20	50	35
3	70	35	60

La tasa promedio del mercado es de 20%. Lo que aspira el inversionista es maximizar los dividendos que se desean repartir en los tres años.
La disponibilidad financiera es en esos años de 150, 100, 250 miles de dólares.
a.-Plantee el problema de programación lineal de acuerdo al modelo de Boulmol Quandt.
Como el horizonte económico es de tres años, entonces debemos considerar tres dividendos a repartir correspondiente a cada período: M_1 M_2 y M_3 con utilidades marginales ($W_j=1/(1+0{,}20)^j$; $j=1,2,3$) de 0,83333, 0,694444,0,5787037, por tanto la función objetivo es:
Maximizar;

$Z=0,83333 M_1+0,694444 M_2+0,5787037 M_3$.
Las restricciones son, (cambiando de signo a los flujos de caja):
$50x_1+ 10x_2+ 5x_3+M_1 \leq 150$
- $20x_1-50x_2-35x_3+M_2 \leq 100$
- $70x_1-35x_2-60x_3+M_3 \leq 250$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, M_1 \geq 0, M_2 \geq 0, M_3 \geq 0$
La solución de este problema es:

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$H$23		2054,398148	2054,398148

El máximo de dividendo a repartir a valor neto actual es de 2.054.398,148 dólares.

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$B$22	urbana	0	0
$C$22	montaña	0	0
$D$22	playa	30	30
$E$22	Dividendo 1	0	0
$F$22	Dividendo 2	1250	1250
$G$22	Dividendo 3	2050	2050

Para obtener ese máximo se deben adquirir 30 apartamentos en la zona de la playa y descartar las otras zonas. La política de reparto de dividendo es, no hay dividendo el primer período, en el segundo se repartirán 1.250.000 dólares y en el tercero 2.050.000 dólares que al actualizarlos de acuerdo a la tasa de descuento da el monto máximo señalado.

Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia
$H$25		150	$H$25<=$I$25	Obligatorio	0
$H$26		200	$H$26<=$I$26	Obligatorio	0
$H$27		250	$H$27<=$I$27	Obligatorio	0

Los recursos financieros previstos para los tres períodos se agotarán totalmente, por tanto el inversionista sabe que por cada millar de dólares adquirido será capaz de pagar un precio en el mercado, este valor lo determina el precio sombra que se obtiene al resolver el dual. En este caso no tiene mucho sentido el reformular el modelo con transferencia de fondos, lo tendría si en alguno de los dos primeros períodos quedaran sobrantes de disponibilidad financiera.
A continuación obtenemos la solución del dual:

	Celda objetivo	
Celda	Nombre	Igual
$H$23		2054,398148

El mínimo del precio total de las disponibilidades financieras coincide con el valor actual neto de los dividendos a repartir.

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Aumento permisible
$B$22	urbana	0	-535,8796296	0	535,8796296	1E+30
$C$22	montaña	0	-63,0787037	0	63,0787037	1E+30
$D$22	playa	30	0	0	1E+30	31,53935185
$E$22	Dividendo 1	0	-10,97222222	0,833333333	10,97222222	1E+30
$F$22	Dividendo 2	1250	0	0,694444444	1E+30	0,694444444
$G$22	Dividendo 3	2050	0	0,578703704	1E+30	0,578703704

Los valores asociados al gradiente reducido indican los valores de holguras del dual, los cuales representan los costos de oportunidad. Por cada apartamento que adquiera en la zona urbana pierde 535,87 dólares y en la zona de montaña 63,078 dólares. Por cada millar de dólares que reparta en el primer período, pierde 10,072 dólares.

Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Aumento permisible
$H$25		150	11,80555556	150	1E+30	150
$H$26		200	0,694444444	200	1E+30	1250
$H$27		250	0,578703704	250	1E+30	2050

La disponibilidad financiera más apreciada por el inversionista corresponde al primer período, él es capaz de pagar hasta 11,80 dólares por cada millar adicional de dólares para incrementar su disponibilidad financiera ese período. Esto es equivalente a decir que está dispuesto a pagar 1,18% de interés anual por un préstamo.

Celda	Celdas cambiantes Nombre	Igual	Límite inferior	Celda objetivo	Límite superior	Celda objetivo
$B$22	urbana	0	0	2054,398148	0	2054,398148
$C$22	montaña	0	0	2054,398148	0	2054,398148
$D$22	playa	30	30	2054,398148	30	2054,398148
$E$22	ividendo 1	0	0	2054,398148	0	2054,398148
$F$22	Dividendo 2	1250	0	1186,342593	1250	2054,398148
$G$22	Dividendo 3	2050	0	868,0555556	2050	2054,398148

El análisis de sensibilidad indica que no puede variar el número de apartamento si quiere mantener la base óptima, sin embargo el segundo período puede que no reparta dividendo o reparta hasta un máximo de 1.250.000 dólares. Lo mismo para el tercer período.
Supongamos que en el primer período los flujos de cajas son también positivos y las disponibilidades financieras son variables aleatorias. La disponibilidad financiera del primer período tiene una ley de probabilidad normal de media 200 y desviación estándar de 200. La segunda una normal de media 350 y

desviación estándar 100, y la tercera una normal de media 400 y desviación estándar de 90. Suponga además que se selecciona como una solución $x_1 = 0, x_2 = 40, x_3 = 10$, $M_1 = 0$, $M_2 = 1000$, $M_3 = 0$ Y se aspira que las restricciones se cumpla al menos en un 95%. El problema es:
Maximizar;

$$Z = 0{,}83333M_1 + 0{,}69444M_2 + 0{,}5787037M_3$$

$$P(50x_1 + 10x_2 + 5x_3 + M_1 \leq 250) \geq 0{,}95$$

$$P(-20x_1 - 50x_2 - 35x_3 + M_2 \leq 100) \geq 0{,}95$$

$$P(-70x_1 - 35x_2 - 60x_3 + M_3 \leq 250) \geq 0{,}95$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, M_1 \geq 0.M_2 \geq 0, M_3 \geq 0$$

Sustituimos la solución propuesta en el conjunto de restricciones probabilísticas y estandarizando las variables $D_i : z = (D_i - \mu_i)/\sigma_i$ obtenemos lo siguiente:

$$P(D_1 \geq 450) = P(z \geq 1{,}25) = 0{,}105649$$

$$P(D_2 \geq -1350) = P(z \geq -17) = 1$$

$$P(D_3 \geq -2000) = P(z \geq -26{,}66) = 1$$

Luego, los valores de las variables propuestos no cumplen con las restricciones cuando las disponibilidades son variables aleatorias con las leyes de probabilidad ya indicadas, por tanto, no es una solución factible.
El problema anterior puede plantearse como un modelo determinístico si partimos que las disponibilidades financieras pueden escribirse como: $E(D_i) + k\sigma_i$, donde k=1,645 (p=0,95)

Bibliografía

Bazaraa, M.S: Jarvis, J.J (1977)
Linear Programming and Network Flows.
John Wiley and Sons. 1era Edition . New York

Bazaraa, M.S: Jarvis, J.J (1979)
Nonlinear Programming. Theory and Algorithms.
John Wiley and Sons. 1era Edition . New York.

Canada; J.R. Sullivan, W.G. (1996)
Análisis de la Inversión de Capital para Ingeniería y Administración
Prentice Hall. Segunda Edición , México

Dantzig, G.B (1974)
Linear Programming and Extensions.
Princeton University Press. Princeton New Jersey

Eppen, G.D: Gould, F.J; Schmidt; C.P; Moore, J.H: Weatherford, L.R (2000)
Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa
Prentice Hall. Quinta Edición , México

Messuti,D.J; Álvarez, V.A; Graffi, H.R (1994)
Selección de Inversiones-Introducción a la Teoría de la Cartera.
Edicciones Msacchi-Buenos Aires.

Moulin; H. Fogelman-S;F (1979)
La Convexité dans les Matematiques de la Decision.
Arman I Methodes-Paris

Reyes Polanco, A.E (1984)
Programación Matemática y Modelos Financieros
Investigación y Gerencia Volumen 1 Nº1 1984

Sposito, V. A.(1975)
Linear and Nonlinear Programming.
Iowa States University Press.

Suárez S,.A. (1991)
Decisiones Óptimas de Inversión y Financiación en la Empresa.
Ediciones Pirámide. Madrid España.

Weingartner, H. M.(1966)
"Capital Budgetin of Interrelated Projects.: Survey and Synthesis".
Management Science, Nº 7 .