UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Vínculo entre las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones diferenciales estocásticas.

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Marcos Alejandro Vasquez Perez** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutora: Dra. Mairene Colina

Caracas - Venezuela

28 de enero de 2010

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Vínculo entre las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones diferenciales estocásticas**", presentado por el **Br. Marcos Alejandro Vasquez Perez** titular de la Cédula de Identidad **V-17.856.228**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dra. Mairene Colina
Tutora

Dr. José Rafael León
Jurado

Lic. Maira Valera
Jurado

Dedicado a:

Primeramente a Dios, a mi madre Eglis Perez, a mi abuela Vicenta de Perez, a mi tío Isrrael,a mi madrina Aida, a mi papa Franklin, a mis tías Sor, Antonia, Migdalia, Nelida y Mirian, a mis tíos Adolfredo, Hector, Marco, Henry y Orlando. A mi tutora Mairene Colina. A toda mi familia. A mi novia Vanessa. Y finalmente, a MI.

Agradecimiento:

Primeramente a Dios, por ser mi mejor amigo. A mi mama, Eglis Perez, por sus consejos, sus cuidados y sus sabias palabras, por amarme como nadie y luchar a pesar de todo para darme lo mejor y convertirme en lo que ahora soy, gracias mami, eres la mejor madre del mundo, te amo. A mi abuela, Vicenta, por ser para mi una segunda madre, por darme a cada instante su cariño y amor, por cuidarme y protegerme por sobre todas las cosas, gracias abuela, en donde quiera que estés este siempre fue tu sueño, te amo alita. A mi papa, Franklin Vasquez, porque siempre a estado pendiente de mi y dispuesto a ayudarme y escucharme, te quiero.

A mi tío Isrrael, por ser como un padre para mi, por siempre querer lo mejor para mi y por hacer de mi una mejor persona, te quiero tío. A mi madrina Aida, por su cariño y cuidado incondicional, gracias madrina. A mi tía Antonia, quien siempre tiene sus brazos abiertos para lo que necesite y además siempre ha tenido para mi mucho cariño y amor, gracias tía. A mi tía Migdalia, porque para ella soy como su hijo y siempre me ha cuidado con el mejor de los cariños, muchos besos tiita. A mi tía Mirian, por su dedicación conmigo en todo momento y su gran sonrisa que siempre tiene para mi, te quiero tía. A mi tía Sor, porque siempre esta dispuesta a escucharme y a darme su inmenso cariño, gracias tía. A mi tía Nelida, porque siempre ha tenido para mi mucho cariño, gracias tía. A mi tío Adolfredo, porque siempre ha tenido un consejo y un abrazo para mi, gracias tío. A mi tío Marco, por brindarme siempre sus consejos y cuidados, gracias tío. Gracias también a mis tíos Henry, Orlando y Hector.

Gracias a mis primos, Marcos Gonzalez, Marlyn Gonzalez y Guillermo Jimenez, por crecer conmigo y compartir los mejores momentos juntos, Los quiero mucho. Gracias a mis primos, Orlando, George, David, Andres Eloi, Bladimir, Oscar, German, Alexander, Betsire, Caterine, Deyanire, Yorgledis, Yoreli, Jordan, Dayana, Danya, Jose Miguel, Gina, Enrique e Ignacio, por su cariño incondicional, un gran abrazo primos.

Muchas gracias a mi tutora, Mairene Colina, por ser además de la mejor tutora también la mejor profesora, por tenerme paciencia y ayudarme a convertirme en un mejor estudiante y una mejor persona, por todos sus consejos, por siempre tener un momento para escucharme y ayudarme, además de todo siempre con mucho cariño. Te quiero mucho Mai.

A mi novia Vanessa Garcia, por amarme de manera incondicional y de la manera mas bella que existe, por siempre estar conmigo en todo momento, te amo bebe.

A todos mis amigos, porque ellos me han enseñado lo bonito de compartir y por darme su apoyo siempre.

A todos mis profesores, quienes me han inculcado los mejores conocimientos y han hecho de mi una gran persona. Muy especialmente al Prof. Tomás Guardia, Prof. Cristina Balderrama, Prof. Manuel Maya, Prof. Jose Benito, Prof. Fransisco Tovar, Prof. Ricardo Rio, Prof. Laura Galindo, Prof. Juan Guevara, Prof. Maicol Ochoa y el Prof. Angel Padilla.

Y gracias a todos aquellos que de alguna u otra forma han contribuido a este logro profesional.

Contenido

Introducción

Desde que en el siglo XVII Newton y Leibniz pusieron las bases de lo que ahora llamamos "Calculo Diferencial", las ecuaciones diferenciales ordinarias han sido una herramienta matemática fundamental para modelar sistemas físicos. Las leyes físicas que gobiernan un sistema determinan las ecuaciones correspondientes, que después intentamos resolver, es decir, de las cuales intentamos obtener una expresión del estado del sistema en el instante de tiempo t como función explícita de t. Entre algunos de los innumerables ejemplos de fenómenos que pueden ser modelados por ecuaciones diferenciales ordinarias se encuentran: la interacción de planetas, flujos de fluidos, reacciones químicas, dinámicas poblacionales y económicas. Pero estas ecuaciones diferenciales ordinarias solo modelan fenómenos en un sistema ideal es decir sin perturbaciones, pero en una gran cantidad de casos existen fenómenos aleatorios que nos alteran el sistema con lo que debemos introducir un termino a nuestra ecuación diferencial llamado ruido; esta ecuación diferencial es llamada estocástica.

En los últimos años el estudio de estas ecuaciones diferenciales estocásticas ha tenido una creciente e importante atención, en mecánica y en muchas otras áreas de la física teórica así como de la biología experimental y también en el estudio de finanzas.

Para nuestro estudio consideramos una ecuación diferencial ordinaria de la siguiente forma:

$$dX_t = a(t, X_t)dt, \quad X(0) = x_0.$$

a la cual le introducimos una condición inicial aleatoria y un termino de ruido aleatorio adicional:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dBt, \quad X_0(w) = Y(w), \tag{1}$$

donde $B = (B_t, t \geq 0)$ es un movimiento Browniano, y $a(t,x)$ y $b(t,x)$ son funciones deterministas. La solución de esta ecuación, si esta existe, es un proceso estocástico.

De interpretar esta ecuación como una integral estocástica tenemos:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dBs, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2}$$

Esta ecuación es llamada una ecuación integral estocástica Itô. Muchos autores han investigado sobre las ecuaciones diferenciales del tipo (1) y, la existencia y unicidad de las soluciones de estas ecuaciones se ha demostrado en cada uno de estos estudios y se basa en la utilización de la ecuación integral estocástica propuesta en la ecuación (2). Tanto las condiciones para obtener la existencia y la unicidad de la solución de este tipo de ecuaciones diferenciales estocásticas así como la demostración se basan en las implementadas en las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Una forma de resolver estas ecuaciones diferenciales estocásticas es considerar una ecuación diferencial ordinaria de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \qquad para \quad t \in [t_0, t_1] \\ x(t_0) = \varepsilon_0. \end{cases} \tag{3}$$

donde $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función continua, acotada y satisface la condición de Lipshitz siguiente:

$$|f(t, x^1) - f(t, x^2)| \leq L|x^1 - x^2|,$$

para $t \in [t_0, t_1]$ y $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$, siendo L una constante positiva.

Estas ecuaciones tienen solución única. Con lo cual podemos hallar la solución de la ecuación diferencial estocástica planteada en (1). Este tipo de ecuaciones serán empleadas en el desarrollo de este trabajo.

Para resolver la ecuación diferencial (1), bajo ciertas hipótesis, fijamos las trayectorias del movimiento Browniano y resolviendo la ecuación diferencial deterministica.

Nuestro propósito es desarrollar e implementar esta técnica.

Capítulo 1

Existencia y unicidad de soluciones al problema de valor inicial de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones matemáticas muy usadas para la resolución de problemas de todo tipo, interacciones de planetas, flujos de fluidos, reacciones químicas, dinámicas poblacionales y económicas, crecimiento de organismos, son algunos de los innumerables ejemplos. Las soluciones de estas ecuaciones son curvas regulares $x(t)$ que representan el estado del sistema en cada instante.

Pocas ecuaciones diferenciales tienen una solución analítica sencilla, mayormente es necesario realizar aproximaciones y estudiar el comportamiento del sistema bajo ciertas condiciones. Así, en un sistema tan simple como un péndulo, para obtener una solución sencilla que describa aproximadamente su movimiento periódico, la amplitud de la oscilación ha de ser pequeña y el roce ha de ser despreciable.

Para demostrar la existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones diferenciales de primer orden se requieren de algunas definiciones y teoremas.

1.1 Equicontinuidad.

Sean A y B dos espacios métricos. Denotemos por $\mathcal{C}(A, B)$ el espacio vectorial de las funciones continuas de A en B. Sea F un subconjunto $\mathcal{C}(A, B)$ y $t, t' \in A$. Decimos que F es equicontinuo en t cuando dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_t > 0$ tal que si $d_A(t, t') < \delta_t$ entonces

$$d_B(T_f(t), T_f(t')) < \varepsilon,$$

para toda $f \in F$, donde d_A y d_B son funciones distancias definidas sobre los espacios A y B, respectivamente.

1.2 Transformación contractiva.

Se llama transformación contractiva a la función definida $\mathrm{T} : M \to M$, con M un espacio métrico, tal que:

$$d(\mathrm{T}(x), \mathrm{T}(y)) \leq \alpha \cdot d(x, y) \qquad \forall x, y \in M$$

donde α es una constante tal que $0 \leq \alpha < 1$ y d es la función distancia definida en M.

Un ejemplo de una transformación contractiva se muestra a continuación:

Sea $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y $T : \mathcal{C}(J) \to \mathcal{C}(J)$ definido por $T(\varphi)(x) = b + \int_c^x f[t, \varphi(t)]dt$, donde f satisface una condición de Lipschitz de la forma

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq K|y - z|$$

para todo $x \in J$, todo $z, y \in \mathbb{R}$ y $K > 0$. Designaremos con $L(J)$ la longitud del intervalo J. Veamos que T es una transformación contractiva

$$|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)| = \left| \int_c^x \{f[t, \varphi(t)] - f[t, \psi(t)]\} dt \right| \leq K \left| \int_c^x |\varphi(t) - \psi(t)| dt \right|$$
$$\leq K\|\varphi - \psi\| \left| \int_c^x dt \right| \leq KL(J)\|\varphi - \psi\|, \quad \forall x \in J.$$

Luego si $KL(J) < 1$, entonces T es una transformación contractivo.

Para demostrar la existencia y unicidad de la solución ecuación diferencial requerimos uno de los teoremas de análisis matemático mas importantes, el teorema del punto fijo de Banach. Este teorema garantiza la existencia y unicidad de puntos fijos de ciertas funciones definidas sobre espacios métricos y proporciona un método para encontrarlos. Debe su nombre a Stefan Banach (1892–1945), quien fue el primero en enunciarlo en 1922. A continuación el enunciado y la demostración del mismo.

Teorema 1.2.1 ***(Teorema del punto fijo de Banach).*** *Sea A un espacio métrico completo. Toda transformación contractiva $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ posee sólo un punto invariante y solo uno, es decir, la ecuación $T(u) = u$ tiene una única solución.*

Demostración. Sea φ_0 una función cualquiera de $\mathcal{A}$ y definamos una sucesión de funciones $\{\varphi_n\}_{n\geq 0}$ mediante la fórmula de recurrencia

$$\varphi_{n+1} = T(\varphi_n)_{n\geq 0} \quad \textit{para} \quad n = 0, 1, 2, ...$$

donde T es una transformación contractiva. Vamos a demostrar que la sucesión $\{\varphi_n\}$ converge a una función φ de $\mathcal{C}(A)$. Escribamos cada φ_n como suma telescópica,

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\}.$$

Veamos ahora la convergencia de $\{\varphi_n\}$. Para ello se debe probar que la serie

$$\varphi_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\},$$

converge uniformemente en A. Para ver la convergencia uniforme vamos a compararla con la serie geométrica convergente

$$M\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k,$$

donde $M = \|\varphi_0\| + \|\varphi_1\|$, y α es la constante de contracción para T. Para establecer la comparación, basta probar la siguiente desigualdad

$$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \leq M\alpha^k,$$

para todo x en A y todo $k \geq 1$. Ahora bien, para todo $x \in A$

$$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| = |T(\varphi_k)(x) - T(\varphi_{k-1})(x)| \leq \alpha\|\varphi_k - \varphi_{k-1}\|;$$

por lo que, basta probar

$$\|\varphi_k - \varphi_{k-1}\| \leq M\alpha^{k-1}$$

para $k \geq 1$. Demostremos por inducción. Para $k = 1$ tenemos

$$\|\varphi_1 - \varphi_0\| \leq \|\varphi_1\| + \|\varphi_0\| = M,$$

por lo tanto se verifica la hipótesis inductiva. Ahora supongamos cierto para $k = n$ y demostremos para $k = n+1$, entonces

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq \alpha\|\varphi_n - \varphi_{n+1}\| \leq \alpha M\alpha^{k-1} \leq M\alpha^n.$$

Como esto es válido para todo $x \in A$ entonces

$$\|\varphi_{n+1} - \varphi_n\| \leq M\alpha^n,$$

con lo que se demuestra que

$$\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| \leq M\alpha^{n-1}.$$

Por consiguiente la serie

$$\varphi_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty}\{\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)\},$$

converge uniformemente en A. Es decir la sucesión de sumas parciales $\{\varphi_n\}$ converge uniformemente, esto es

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\}.$$

Luego, la función φ es continua en A ya que es el límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas. Ahora demostremos que φ es un punto fijo de T, para ello debemos a comparar $T(\varphi)$ con $\varphi_{n+1} = T(\varphi_n)$. Utilizando la propiedad de contracción de T tenemos

$$|T(\varphi)(x) - \varphi_{n+1}(x)| = |T(\varphi)(x) - T(\varphi_k)(x)| \leq \alpha|\varphi(x) - \varphi_n(x)|;$$

por otra parte,

$$\begin{aligned}|\varphi(x) - \varphi_n(x)| &= \left|\varphi_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\} - [\varphi_0(x) + \sum_{k=0}^{n-1}\{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\}]\right| \\ &= \left|\sum_{k=n}^{\infty}(\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x))\right| \leq \sum_{k=n}^{\infty}|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \leq M\sum_{k=n}^{\infty}\alpha^k.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|T(\varphi)(x) - \varphi_{n+1}(x)| \leq M\sum_{k=n}^{\infty}\alpha^{k+1}.$$

Cuando $n \to \infty$ la serie

$$\sum_{k=n}^{\infty}\alpha^{k+1} \to 0$$

por ser la cola de una serie absolutamente convergente. Luego cuando $n \to 0$, tenemos que $\varphi_{n+1}(x) \to T(\varphi(x))$, pero también sabemos que $\varphi_{n+1}(x) \to \varphi(x)$ cuando $n \to \infty$, tenemos $\varphi(x) = T(\varphi)(x)$ para cada x en A. Por lo tanto $\varphi = T(\varphi)$, en consecuencia φ es un punto fijo.

Veamos ahora que este punto fijo φ es único. Supongamos que existe otra función $\psi \in \mathcal{C}(A)$ tal que $T(\psi) = \psi$. Entonces

$$\|\varphi - \psi\| = \|T(\varphi) - T(\psi)\| \leq \alpha\|\varphi - \psi\|,$$

así

$$(1-\alpha)\|\varphi-\psi\| \leq 0;$$

como $0 \leq \alpha < 1$ podemos dividir por $1-\alpha$ obteniendo la desigualdad $\|\varphi-\psi\| \leq 0$. Ahora bien, por definición de norma sabemos que $\|\varphi-\psi\| \geq 0$ entonces $\|\varphi-\psi\| = 0$, y por lo tanto $\varphi-\psi = 0$, es decir, $\varphi = \psi$. $\square$

Otra versión del teorema del punto fijo fue introducida por Brouwer en 1910. A continuación de presenta dicho resultado.

Figura 1.1: Jan Brouwer (1881-1966)

Teorema 1.2.2 ***(Teorema del punto fijo de Brouwer).*** *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto homeomorfo a $\overline{\mathbf{B}}(0,1)$. Sea $F : A \to A$ una función continua. Entonces F admite un punto fijo, es decir, existe $x \in A$ tal que $F(x) = x$.*

Ahora si estamos listos para demostrar la existencia y unicidad de las soluciones al problema de valor inicial de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

1.3 Ecuaciones diferenciales.

Las ecuaciones diferenciales son expresiones matemáticas que establecen relaciones entre variables independientes, dependientes y las derivadas de ésta última. Las ecuaciones diferenciales se clasifican en dos tipos ordinarias y Parciales.

Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales son:

1. $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$,

2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4(\frac{dy}{dx})^3 + 3y = 0$,

3. $\begin{cases} y' + y\tan(x) = \sec(x), \\ y(0) = -1. \end{cases}$

El tipo de ecuación diferencial que nos interesa estudiar son las ecuaciones lineales. Una ecuacion diferencial lineal ordinaria es una ecuación que tiene la siguiente forma:

$$A_n(x)y^{(n)}(x) + ... + A_1(x)y'(x) + A_0(x)y(x) = f(x),$$

donde $y^{(n)}(x)$ es la derivada n-esima de y.

Más aún, nos interesan las ecuaciones lineales de primer orden que tienen la siguiente forma:

$$\begin{cases} y' + P(x)y = Q(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas. La solución de estas ecuaciones viene dada por:

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} P(x)dx\right)\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(x)\exp\left(\int P(x)dx\right)\right].$$

A continuación enunciaremos y demostraremos el teorema de Picard-Lindelöf y el teorema de Cauchy-Peano. Estos resultados son de gran importancia dentro del estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias ya que establecen bajo qué condiciones puede asegurarse la existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial ordinaria dado un problema de Cauchy (problema de valor inicial).

Teorema 1.3.1 ***(Picard-Lindelöf).*** *Consideramos el problema*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \qquad para \quad t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) = \varepsilon_0. \end{cases}$$

Sea $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, tal que satisface la siguiente condición de Lipshitz

$$|f(t, x^1) - f(t, x^2)| \leq L|x^1 - x^2|,$$

para $t \in [t_0, t_1]$ y $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$, siendo L una constante positiva. Entonces el problema propuesto tiene una única solución.

Demostración. En el espacio vectorial $X = \mathcal{C}([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ definimos la siguiente norma para $x \in X$,

$$\|x\| = sup\{e^{-k(t-t_0)}|x(t)| : t \in [t_0, t_1]\},$$

siendo $k > L$ una constante fija. Para demostrar el teorema, primero debemos probar que el espacio X con esta norma es un espacio de Banach

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(X, \|\|)$. Sea $y_n(t) = e^{-k(t-t_0)}x_n(y)$.

Por una parte, $\{y_n\} \in X$ ya que $e^{-k(t-t_0)} \in \mathcal{C}([t_0, t_1])$, $x_n \in X$ y el producto de funciones continuas es continua.

Por otra parte, veamos que $\{y_n\}$ es de Cauchy con la norma infinita, sea $n, m \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\|y_n - y_m\|_\infty = sup|y_n(t) - y_m(t)| = sup(e^{-k(t-t_0)}|x_n(t) - x_m(t)|) = \|x_n - x_m\|.$$

Así $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $(X, \|\|_\infty)$. Por lo tanto, $(X, \|\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Como el espacio $(X, \|\|_\infty)$ es de Banach, existe $y \in \mathcal{C}([t_0, t_1])$ tal que si $n \to \infty$ entonces $\|y_n - y\|_\infty \to 0$.

Sea $x(t) = e^{k(t-t_0)}y(t)$, $x \in X$ ya que $e^{k(t-t_0)} \in X$ y $y(t) \in X$.

Veamos ahora que si $n \to \infty$ entonces $\|x_n - x\|_\infty \to 0$:

$$\begin{aligned}
\|x_n - x\| &= sup(e^{-k(t-t_0)}|x_n(t) - x(t)|) = sup|e^{-k(t-t_0)}x_n(t) - e^{-k(t-t_0)}x(t)| \\
&= sup|y_n(t) - y(t)| = \|y_n - y\|_\infty.
\end{aligned}$$

Así como $\|y_n - y\|_\infty \to 0$ cuando $n \to \infty$ entonces $\|x_n - x\|_\infty \to 0$.

Entonces X es un espacio de Banach.

Ahora, usaremos que el espacio X es de Banach y que la función f es de Lipshitz para demostrar la existencia de la solución del problema.

Definimos, para $x \in X$:

$$T_x(t) = \varepsilon_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Si $x_1, x_2 \in X$, usando el hecho de que la función f es de Lipshitz tenemos que:

$$\begin{aligned}
|T_{x_1}(t) - T_{x_2}(t)| &= \left|\varepsilon_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))ds - \varepsilon_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x_2(s))ds\right| = \\
&= \left|\int_{t_0}^{t} f(s, x_1(s))ds - f(s, x_2(s))ds\right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x_1(s))ds - f(s, x_2(s))|ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} L|x_1(s) - x_2(s)|ds.
\end{aligned}$$

Así:

$$
\begin{aligned}
e^{-k(t-t_0)}|T_{x_1}(t) - T_{x_2}(t)| &\leq e^{-k(t-t_0)} L \int_{t_0}^{t} |x_1(s) - x_2(s)| ds \\
&= e^{-k(t-t_0)} L \int_{t_0}^{t} e^{-k(s-t_0)} e^{k(s-t_0)} |x_1(s) - x_2(s)| ds, \\
&= L \int_{t_0}^{t} (e^{k(s-t_0)} e^{-k(t-t_0)}) e^{-k(s-t_0)} |x_1(s) - x_2(s)| ds \\
&= L \int_{t_0}^{t} e^{k(s-t)} e^{-k(s-t_0)} |x_1(s) - x_2(s)| ds \\
&\leq L \int_{t_0}^{t} e^{k(s-t)} \|x_1 - x_2\| ds \\
&= L \|x_1 - x_2\| \int_{t_0}^{t} e^{k(s-t)} ds \\
&= L \|x_1 - x_2\| \int_{t_0}^{t} e^{-kt} e^{ks} ds \\
&= L \|x_1 - x_2\| e^{-kt} \int_{t_0}^{t} e^{ks} ds \\
&= L \|x_1 - x_2\| e^{-kt} \left(\frac{e^{ks}}{k} \right) \Big|_{t_0}^{t} \\
&= L \|x_1 - x_2\| \frac{e^{-kt}}{k} (e^{kt} - e^{kt_0}) \\
&= L \|x_1 - x_2\| \frac{e^{-kt} e^{kt} - e^{-kt} e^{kt_0}}{k} \\
&= L \|x_1 - x_2\| \frac{1 - e^{-k(t-t_0)}}{k} \\
&\leq L \|x_1 - x_2\| \left(\frac{1}{k} \right) = \frac{L}{k} \|x_1 - x_2\|,
\end{aligned}
$$

de donde se concluye que

$$
e^{-k(t-t_0)}|T_{x_1}(t) - T_{x_2}(t)| \leq \frac{L}{k} \|x_1 - x_2\|.
$$

Tomando supremo tenemos

$$sup_{t\in[t_0,t_1]}(e^{-k(t-t_0)}|T_{x_1}(t)-T_{x_2}(t)|) \leq sup_{t\in[t_0,t_1]}\left(\frac{L}{k}\|x_1-x_2\|\right)$$
$$\|T_{x_1}-T_{x_2}\| \leq \frac{L}{k}\|x_1-x_2\|.$$

Como $\frac{L}{k} < 1$ entonces T es una transformación contractiva y por el Teorema 1.2.1 tenemos que existe un punto fijo que es la solución del problema. □

Teorema 1.3.2 ***(Cauchy-Peano).*** *Sea el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)) & en \quad [t_0,t_1], x(t) \in \mathbb{R}^n \\ x(t_0) = \varepsilon_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

siendo $f : [t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *continua y acotada. Entonces existe al menos una solución del problema.*

Demostración. Consideremos la ecuación integral asociada

$$x(t) = \varepsilon_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds.$$

Llamemos $B = \{x \in \mathcal{C}([t_0,t_1],\mathbb{R}^n) : |x(t)| \leq 1, t \in [t_0,t_1]\}$ y para $x \in B$ definamos la transformación $x \to T_x$,

$$T_x(t) = \varepsilon_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds.$$

Sea $M \geq 0$ y $|f| \leq M$. Entonces, se tiene

$$\begin{aligned}|T_x(t)| &= |\varepsilon_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds| \leq |\varepsilon_0| + \left|\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds\right| \\ &\leq |\varepsilon_0| + \int_{t_0}^{t} |f(s,x(s))|ds \leq |\varepsilon_0| + \int_{t_0}^{t} Mds \\ &\leq |\varepsilon_0| + M\int_{t_0}^{t_1} ds \leq |\varepsilon_0| + M(t_1 - t_0).\end{aligned}$$

Supongamos en principio que

$$|\varepsilon_0| + M(t_1 - t_0) \leq 1 \tag{1.2}$$

Entonces, el conjunto de las transformaciones en B denotado TB esta contenido en B. Por otra parte, si $x \in B$ y $t, t' \in [t_0, t_1]$, entonces

$$\begin{aligned}|T_x(t) - T_x(t')| &= \left|\varepsilon_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds - \varepsilon_0 - \int_{t_0}^{t'} f(s,x(s))ds\right| = \\ &= \left|\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds - \int_{t_0}^{t'} f(s,x(s))ds\right|.\end{aligned}$$

Si $t > t'$, entonces

$$|T_x(t) - T_x(t')| = |\int_{t'}^{t} f(s,x(s))| \leq M(t - t').$$

Si $t < t'$, entonces

$$|T_x(t) - T_x(t')| = \left|\int_{t}^{t'} f(s,x(s))\right| \leq M(t' - t).$$

Por lo tanto,

$$|T_x(t) - T_x(t')| \leq M|t - t'|.$$

así TB es una familia equicontinua.

Además, si $x_k, x \in B$ y x_k converge a x uniformemente en $[t_0, t_1]$, es decir x_k converge x en la norma del supremo del valor absoluto definida en $\mathcal{C}([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned}
|T_{x_k}(t) - T_x(t)| &= \left| \varepsilon_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))ds - \varepsilon_0 - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \right| = \\
&= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \right| = \left| \int_{t_0}^{t} (f(s, x_k(s)) - f(s, x_k(s)))ds \right| = \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, x_k(s)) - f(s, x_k(s))|ds
\end{aligned}$$

y así, por continuidad de f, $T_{x_k} \to T_x$ uniformemente en $[t_0, t_1]$. Por tanto, $T : B \to B$ es una transformación continua respecto de la norma $\|\|$.

Aplicando el Teorema 1.2.2, existe un punto fijo de T, es decir, existe una solución del problema de Cauchy planteado.

Si $H = |\varepsilon_0| + M(t_1 - t_0) > 1$, se puede definir

$$g(t, x) = \frac{1}{H} f(t, Hx) \qquad y \qquad \eta_0 = \frac{\varepsilon_0}{H}.$$

Por lo tanto el siguiente problema

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \quad en \quad [t_0, t_1], \\ y(t_0) = \eta_0, \end{cases}$$

tiene las mismas condiciones (1.2) y así la ecuación tiene una solución $y(t)$. Tomando $x(t) = Hy(t)$ se obtiene una solución del problema original (1.1). $\square$

Capítulo 2

Procesos estocásticos.

El modelo matemático básico de la teoría de la probabilidad es el espacio de probabilidad, que consta de una terna ordenada $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ en donde Ω es un conjunto arbitrario que puede ser interpretado como el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Al conjunto Ω se le llama espacio muestral y a un elemento de Ω se le denota por ω. El segundo elemento es una colección no vacía $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω, llamada σ-álgebra. A los elementos de $\mathcal{F}$, subconjuntos de Ω, se les llama eventos o conjuntos medibles. Finalmente el tercer elemento es una función $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$, llamada medida de probabilidad.

En estadística, concretamente en la teoría de la probabilidad, un proceso aleatorio o proceso estocástico es un concepto matemático que sirve para caracterizar fenómenos como son las señales sísmicas, el número de manchas solares año tras año, La evolución de la población de un municipio año tras año, entre muchas otras. Estas son sucesiones de variables aleatorias (estocásticas) que evolucionan en función de otra variable, generalmente, el tiempo. Cada una de las variables aleatorias del proceso tiene su propia función de distribución de probabilidad y, entre ellas, pueden estar correlacionadas o no.

A continuación se presentan algunas definiciones que debemos conocer para poder introducir formalmente los procesos estocásticos.

2.1 Vector aleatorio.

Definición 2.1.1 Un vector $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ es un vector aleatorio si sus componentes $X_1, X_2, ..., X_n$ son variables aleatorias.

Por ejemplo, un vector aleatorio podría medir el estado del tiempo en una determinada ciudad o lugar a través del tiempo t, en donde las variables podrían ser: X_1 la temperatura, X_2 la presión del aire, X_3 la velocidad del tiempo, etc.

Análogo a una variable aleatoria uno puede definir para un vector aleatorio la función de distribución, la esperanza, la varianza, la matriz de covarianza, etc.

2.2 Función de distribución.

Al lanzar dos monedas al aire uno considera cuatro pares de posibles situaciones (C, C), (C, S), (S, C), (S, S) (C=cara, S=sello) como los resultados del experimento. Estas posibilidades constituyen los resultados del espacio Ω. Asignemos 1 a C y 0 a S. De esta forma, obtenemos dos variables aleatorias X_1 y X_2, y $X = (X_1, X_2)$ es un vector aleatorio. Si la moneda esta equilibrada entonces asignaremos 0.25 a cada una de los posibles resultados , entonces

$$P(\{w \in \Omega : X(w) = (k, l)\}) = 0.25, \qquad k, l \in \{0, 1\}.$$

Consideramos una colección F de subconjuntos de ω y definimos una medida de probabilidad en el mismo, entonces asignamos un número $P(A) \in [0, 1]$ para cada $A \in F$.

El conjunto de las probabilidades

$$F_X(x) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n) = P(\{w : X_1(w) \leq x_1, ..., X_n(w) \leq x_n\}),$$

$$x = (X_1, ..., X_n) \in \mathbb{R}^n,$$

es la función de distribución F_X de X.

2.3 Distribución.

El conjunto de las probabilidades

$$P_x(B) = P(X \in B) = P(\{w : X(w) \in B\})$$

para un subconjunto $B \subset \mathbb{R}^n$ constituye la distribución de X.

Si un vector aleatorio X tiene una densidad f_X, entonces la distribución F_X de X puede ser representada como

$$F_X(x_1, ..., x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_n} f_X(y_1, ..., y_n) dy_1 ... dy_n,$$

$$(x_1, ... x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

donde la función de densidad satisface

$$f_X(x) \geq 0 \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y_1, ..., y_n) dy_1 ... dy_n = 1$$

2.4 Esperanza de un vector aleatorio.

La esperanza o valor medio de un vector aleatorio X esta dado por

$$\mu_X = E(X) = (E(X_1), ..., E(X_n)).$$

donde $E(X_i) = \mu_{X_i}$ es la función esperanza definida para una variable aleatoria X_i para cada $i = 1, ..., n$.

2.5 Matriz de varianza y covarianza.

La matriz de varianza y covarianza de un vector aleatorio X esta definida así

$$\Sigma_X = (cov(X_i, X_j); i, j = 1, 2, ...n),$$

donde

$$cov(X_i, X_j) = E[(X_i - \mu_{X_i})(X_j - \mu_{X_j})] = E(X_i X_j) - \mu_{X_i}\mu_{X_j},$$

es la covarianza de X_i X_j. Note que la $cov(X_i, X_i) = var(X_i) = \sigma^2_{X_i}$.

2.6 Vector gaussiano.

Un vector normal $X = (x_1, .., x_n)$ es una colección de variables aleatorias normales cuya función de densidad conjunta esta dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(det\Sigma_X)1/2} \exp\{-\frac{1}{2}(X - \mu_X)\Sigma_X^{-1}(X - \mu_X)'\}, x \in \mathbb{R}^n,$$

donde μ_X es la media del vector y σ_X es la matriz de covarianza, el vector $(X - \mu_X) = (x_1 - \mu_{x_1}, .., x_n - \mu_{x_n})$, $(X - \mu_X)'$ es su traspuesto y $det\Sigma_X$ es el determinante de la matriz de covarianza.

2.7 Proceso estocástico.

Siempre que estudiamos el comportamiento de una variable aleatoria a lo largo del tiempo, estamos ante un proceso estocástico.

En general, trabajamos con procesos estocásticos en cualquier caso en que intentemos ajustar un modelo teórico que nos permita hacer predicciones sobre el comportamiento futuro de un proceso.

Definición 2.7.1 Un proceso estocástico a tiempo continuo X es una colección de variables aleatorias

$$(X_t, t \in T) = (X_t(w) : t \in T \subseteq \mathbb{R}; w \in \Omega)$$

definido en algún espacio Ω, donde T es un intervalo, un conjunto finito o infinito numerable.

Un proceso estocástico es una función en dos variables. Para un tiempo fijo t, este es una variable aleatoria,

$$X_t = X_t(w), \quad w \in \Omega.$$

Para un resultado aleatorio fijo $w \in \Omega$, esta es una función del tiempo,

$$X_t = X_t(w), \quad t \in T.$$

Esta función es llamada una trayectoria del proceso X.

En la Figura 1 podemos observar las trayectorias de un proceso estocástico.

Un proceso estocástico $X = (X_t, t \in T)$ puede ser considerado como una colección de vectores aleatorios $(X_{t_1}, .., X_{t_n})$ para $t_1, .., t_n \in T$ $n \geq 1$. Para cada uno de ellos podemos determinar la esperanza y la matriz de covarianza.

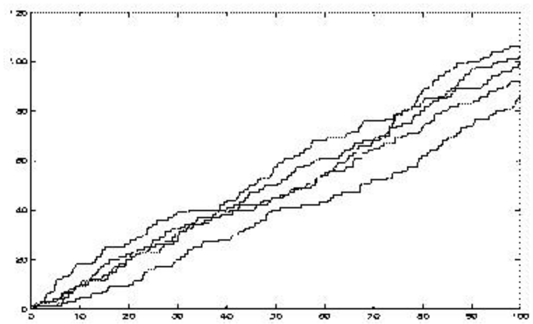

Figura 2.1: Trayectorias de un proceso estocástico

2.8 Esperanza y covarianza de un proceso estocástico.

La función de esperanza para un proceso estocástico X viene dada por

$$\mu_X(t) = \mu_{X_t} = E(X_t), \quad t \in T.$$

La función de covarianza de X esta dada por

$$\Sigma(t,s) = cov(X_t, X_s) = E[(X_t - \mu_X(t))(X_s - \mu_x(s))], \quad t,s \in T.$$

Un ejemplo de procesos estocásticos muy conocidos es:

2.9 Proceso estocástico gaussiano.

Definición 2.9.1 Un proceso estocástico X_t es llamado gaussiano cuando cada uno de sus distribución finita-dimensionales son gaussianas multivariadas, es decir para cada selección de $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$ el vector aleatorio $Z = (X_{t_1}, ..., X_{t_k}) \in \mathbb{R}^k$ tiene una distribución normal multivariada. Esto quiere decir que, existe un vector $\mu_k \in \mathbb{R}^k$ y una matriz definida no negativa $\Sigma_k = (\sigma_{i,j}) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ tales que:

$$P[X_{t_1} \in \mathcal{F}_1, ..., X_{t_k} \in \mathcal{F}_k] = \frac{1}{(2\pi|\Sigma_k|)^{k/2}} \int_{\mathcal{F}_1} ... \int_{\mathcal{F}_k} \exp\{-(x-\mu_k)\Sigma_k^{-1}(x-\mu_k)^t\}dx,$$

donde

$$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^k,$$

es un vector columna y

$$\mu_k = (E[X_{t_1}], ..., E[X_{t_k}]),$$

$$\sigma_{i,j} = \Sigma(t_i, t_j), \quad i, j = i, ..., k.$$

Entre una de las características de mayor utilidad que presentan algunos procesos estocásticos es la de tener incrementos estacionarios e independientes.

2.10 Incrementos estacionarios e independientes.

Definición 2.10.1 Sea $X = (X_t, t \in T)$ un proceso estocástico y $T \subset \mathbb{R}$ un intervalo.

- X tiene incrementos estacionarios si en distribución

  $$X_t - X_s = X_{t+h} - X_{s+h}$$

  para todo $t, s \in T$ y h con $t+h, s+h \in T$.

- X tiene incrementos independientes si para cada colección de $t_i \in T$ con $t_1 < ... < t_n$ y $n \geq 1$,

  $$X_{t_2} - X_{t_1}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

  son variables aleatorias independientes.

Como los procesos gaussianos están determinados por su función de media y su función de covarianza entonces se dice que un proceso gaussiano $X = (X_t, t \in T, T = [0, \infty] ó T = \mathbb{Z})$ es estacionario si

$$\mu_X(t+h) = \mu_X(t) \qquad y \qquad cov_X(t,s) = cov_X(t+h, s+h)$$

μ_X es la media del vector y cov_X es la matriz de covarianza del vector X.

2.11 Movimiento Browniano.

Jan Ingenhousz describió el movimiento irregular de partículas de carbón pulverizadas en la superficie del alcohol en 1785. No obstante, el descubrimiento del movimiento browniano se atribuye tradicionalmente al botánico Robert Brown en 1827. Se cree que Brown estuvo estudiando al microscopio partículas de polen flotando en el agua. Dentro de las vacuolas de los granos de polen observó diminutas partículas con movimientos nerviosos. Al repetir el experimento con partículas de polvo concluyó que el movimiento no se debía a que las partículas de polen estaban 'vivas', aunque no explicó el origen del movimiento.

El primero en describir matemáticamente el movimiento browniano fue Thorvald N. Thiele en 1880, en un documento sobre el método de los mínimos cuadrados. Fue seguido independientemente por Louis Bachelier en 1900 en su tesis doctoral titulada "La teoría de la especulación", en la que se presenta un análisis estocástico de acción y opción de mercados. Sin embargo, fue el estudio independiente de Albert Einstein en su artículo de 1905 el que mostró la solución a los físicos, como una forma indirecta de confirmar la existencia de átomos y moléculas.

El movimiento browniano juega un papel importante en la teoría de probabilidad, la teoría de proceso estocástico, física, finanzas, entre otras ramas.

Figura 2.2: Robert Brown 1773-1858

Un proceso estocástico $B = (B_t, t \in [0, \infty))$ es llamado movimiento browniano si satisface las siguientes condiciones:

- Este inicia en cero: $B_0 = 0$.
- Tiene incrementos independientes y estacionarios.
- Para cada $t > 0$, B_t tiene una distribución normal $N(0, t)$.
- Las trayectorias son continuas.

Otras propiedades del movimiento browniano son:

- $E(B_t) = 0$.
- $Var(B_t) = E(B_t^2)$.
- $Cov(B_t, B_s) = E(B_t B_s)$.
- Procesos no estacionarios

$$cov(B_{t_1+h}, ..., B_{t_n+h}) \neq cov(B_{t_1}, ..., B_{t_n}).$$

En la siguiente sección se introduce la noción de integral estocástica Itô; primero veremos su comportamiento en procesos simples para luego extenderla a procesos más generales.

2.12 Integral estocástica.

Sabemos que las trayectorias de un movimiento browniano no son diferenciables y tienen variación no acotada. Esto tiene su mayor consecuencia en la definición de una integral estocástica con respecto a las trayectorias Brownianas. La integral estocástica Itô se definirá como el límite en media cuadrática de sumas de Riemann-Stieltjes. También en esta sección conoceremos algunas herramientas conocidas como lema de Itô para la comprensión y solución de la integral estocástica Itô.

Para poder definir la integral estocástica Itô, requerimos conocer previamente algunos conceptos importantes:

Definición 2.12.1 La familia $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ de $\sigma-$álgebra de Ω es llamada una filtración si

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$$

para todo $0 \leq s \leq t$.

De manea intuitiva, una filtración representa la evolución de una historia.

Definición 2.12.2 Sea $X = \{X_t : t \in \mathbb{R}^+\}$ un proceso estocástico.

- Se dice que X es un proceso medible si $X : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es una función medible con respecto a la σ-álgebra producto $\mathcal{F} \bigotimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$. Esto es $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{F} \bigotimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.

- X es adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{R}^+\}$ si X_t es $\mathcal{F}_t$-medible (i.e.,$X_t^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{F}_t$), para $t \in \mathbb{R}^+$

- La filtración definida por $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : s \leq t\}$ es la σ- álgebra mas pequeña que contiene a la familia $\{X_s^{-1}(B) : s \in [0,t], B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$. Esta filtración es llamada la filtración natural del proceso estocástico X.

2.13 Integral estocástica Itô.

La integral estocástica surge de la necesidad de resolver determinados problemas, en los que aparecen implicados ciertos procesos estocásticos, como el movimiento Browniano, por ejemplo las integrales del tipo:

$$\int_0^t f(s,w)dB_s(w).$$

El hecho de que las trayectorias del Movimiento Browniano no sean diferenciables ni de variación acotada impide integrar respecto a este movimiento en el sentido de Riemann-Stieltjes. Surge por tanto la necesidad de crear una nueva integral, que en casos de regularidad del integrando coincidirá como la integral de Riemann-Stieltjes.

Figura 2.3: Kiyoshi Itô 1915-2008

2.14 Integral estocástica Itô para procesos simples.

Iniciamos el estudio y construcción de la integral de Itô con las funciones simples, las cuales definimos a continuación.

Un proceso estocástico $C = (C_t, t \in [0, T])$ es un proceso simple si satisface las siguientes propiedades:

Existe una partición

$$\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = T,$$

y una sucesión $(Z_i, i = 1, .., n)$ de variables aleatorias, tal que

$$C_t = \begin{cases} Z_n, & si \quad t = T \\ Z_i, & si \quad t_{i-1} \leq t < t_i, i = 1, .., n. \end{cases}$$

donde la sucesión (Z_i) esta adaptada a $\mathcal{F}_{t_i} = \sigma\{B_{t_j} : t_j \leq t_i\}$, por lo que Z_i es una función del movimiento Browniano en el tiempo t_{i-1}, y satisface que $E[Z_i^2] < \infty$ para todo i.

Un proceso simple es entonces un proceso "constante" a trozos, adaptado a $\mathcal{F}_t$ y tiene trayectorias cuadrado integrables. Denotaremos por $\mathcal{L}_0$ al espacio vectorial de todos los procesos estocásticos simples.

Conociendo como son los procesos simples entonces podemos definir la integral estocástica Itô para procesos simples de la siguiente forma:

Definición 2.14.1 La integral estocástica Itô para procesos simples C en $[0, T]$ viene dada por

$$\int_0^T C_s dB_s := \sum_{i=1}^{n} C_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^{n} Z_i \Delta_i B.$$

La integral estocástica Itô para procesos simples C en $[0, t]$, $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, se define como

$$I_t(C) = \int_0^t C_s dB_s := \int_0^T C_s \mathbb{I}_{[0,t]} dB_s = \sum_{i=1}^{k-1} Z_i \Delta_i B + Z_k(B_t - B_{t_{k-1}}),$$

donde $\sum_{i=1}^{k} Z_i \Delta_i B = 0$.

Algunas propiedades de la integral estocástica Itô para procesos simples son:

- La integral estocástica Itô tiene esperanza cero, esto es $E[I_t(C)] = 0$.

  Como Z_i y $\Delta_i B$ son independientes entonces la $E[(Z_i \Delta_i B)] = E[Z_i]E[\Delta_i B] = 0$ así la $E[I_t(C)] = 0$.

- La integral estocástica Itô es cuadrado integrable y satisface la propiedad de isometría:

$$\begin{aligned}
E(\int_0^t C_s dB_s)^2 &= \int_0^t E[C_s^2]ds, \quad t \in [0, T] \\
&= E[\sum_{k=1}^{n} C_{t_{k-1}}(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})]^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} E[C_{t_{k-1}} C_{t_{j-1}} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})].
\end{aligned}$$

Consideremos $\sigma_j = \sigma\{B_{t_i}, t_i < t_j\}$.Para $i < j$ se tiene

$$E\{E[C_{t_{k-1}} C_{t_{j-1}} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})|\sigma_j]\}.$$

Por independencia,

$$E((B_{t_j} - B_{t_{j-1}}))E(C_{t_{k-1}} C_{t_{j-1}} (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})) = 0.$$

Si $j > k$, el caso es análogo.

Si $j = k$, entonces

$$
\begin{aligned}
E\left(\int_0^t C_s dB_s\right)^2 &= \sum_{k=1}^{n} E[C_{t_{k-1}}^2 (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2] \\
&= \sum_{k=1}^{n} E[C_{t_{k-1}}^2] E[(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^2] \quad = \sum_{k=1}^{n} E[C_{t_{k-1}}^2](t_k - t_{k-1}) = \int_0^t E[C_s^2 ds].
\end{aligned}
$$

- La integral estocástica de Itô es lineal: Para constantes c_1, c_2 y procesos simples $C_s^{(1)}$ y $C_s^{(2)}$ sobre $[0, T]$.

$$\int_0^t [c_1 C_s^{(1)} + c_2 C_s^{(2)}] dB_s = c_1 \int_0^t C_s^{(1)} dB_s + c_2 \int_0^t C_s^{(2)} dB_s.$$

La integral estocástica de Itô es lineal sobre intervalos adyacentes. Para $0 \leq t \leq T$.

$$\int_0^T C_s dB_s = \int_0^t C_s dB_s + \int_t^T C_s dB_s.$$

- El proceso $I(C)$ tiene trayectorias continuas.

2.15 La integral estocástica Itô.

En la sección anterior vimos como es la integral de Itô cuando los procesos son simples, ahora vamos a extender la integral estocástica a procesos más generales.

Sea $\mathcal{L}_2[0, T]$ el espacio de todos los procesos medibles,

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \{C(t, w); t \in \mathbb{R}^+, w \in \Omega\} \\
&= \{C_t(w)\}_{t \geq 0},
\end{aligned}
$$

adaptados a $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s; s \leq t\}$ tales que,

$$\|C\|_{2,T}^2 = E[\int_0^t C_s^2(w) ds] < \infty.$$

La métrica asociada a este espacio es

$$\|C\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}(\|C\|_{2,n} \wedge 1).$$

Este espacio es completo respecto a esta norma, es decir, es un espacio de Banach. Por lo tanto, toda sucesión de Cauchy en este espacio tiene límite en él.

Queremos darle sentido a la definición de $\int_0^t C_t(w)dB_t$ para toda $C \in \mathcal{L}_2[0,T]$. Para esto recordemos que todo proceso simple es un elemento de $\mathcal{L}_2$, entonces tenemos que $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_2$, además $\mathcal{L}_0$ es denso en $\mathcal{L}_2$ respecto a la norma asociada. Esto significa que para cualquier proceso $C \in \mathcal{L}_2[0,T]$ existe una sucesión de procesos simples

$$C_n(t) = \sum_{i=1}^{n_k} C_i \mathbb{1}_{[t_{i-1},t_i)}(t),$$

donde C_i son procesos simples $\mathcal{F}_t$-medibles y cuadrado integrables, tales que $C_n \uparrow C$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T (C_n(t) - C(t))^2 dt = 0$$

así definimos

$$\int_0^T C(t)dB_t = \lim_{n\to\infty} \int_0^T C_n(t)dB_t.$$

Esta integral existe ya que

$$h_n = \int_0^T C_n(t)dB_t$$

es una sucesión de Cauchy, puesto que

$$E|\int_0^t C_n(t)dB_t - \int_0^T C_m(t)dB_t| = \int_0^T E[C_n(t) - C_m(t)]^2 dt \to 0$$

. Notemos que esta integral es una variable aleatoria integrable, tal que $E(I(C)) = 0$. Además es cuadrado integrable y se puede ver fácilmente, que la definición no depende de la sucesión, de esta manera usando la propiedad de isometría para funciones simples y el teorema de convergencia dominada tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\int_0^T C_n(t)dB_t\right]^2 = \lim_{n\to\infty} \int_0^T E(C_n(t))^2 dt = \int_0^T E(C^2(t))dt.$$

Luego,

$$E\left[\int_0^T C_n(t)dB_t\right]^2 = \int_0^T E(C^2(t))dt.$$

Definición 2.15.1 Sea $C \in \mathcal{L}_2[0,T]$, entonces la integral estocástica Itô $I(C)$ está definida por

$$I(C) = \int_0^T C(t)dB_t(w) = \lim_{n\to\infty}\int_0^T C_n(t)dB_t(w),$$

donde $\{C_n\}$ es una sucesión de funciones simples tales que

$$E[\int_0^T [C(t) - C_n(t)]^2 dt] \to 0,$$

cuando $n \to \infty$.

Propiedades de la integral estocástica de Itô.

- La integral de Itô satisface la propiedad de isometría:

$$E(\int_0^t C_s dB_s)^2 = \int_0^t EC_s^2 ds, \quad t \in [0,T].$$

- La integral estocástica Itô es lineal: Para constantes c_1, c_2 y procesos $C_s^{(1)}$ y $C_s^{(2)}$ en $[0,T]$, se satisface que:

$$\int_0^t [c_1 C_s^{(1)} + c_2 C_s^{(2)}]dB_s = c_1 \int_0^t C_s^{(1)} dB_s + c_2 \int_0^t C_s^{(2)} dB_s.$$

  También la integral es lineal en intervalos adyacentes:

$$\int_0^T C_s dB_s = \int_0^t C_s dB_s + \int_t^T C_s dB_s,$$

  para $0 \leq t \leq T$.

Veamos un ejemplo de la integral estocástica Itô.

Sea $B = (B_t, t \geq 0)$ un movimiento Browniano. Consideremos la suma de Riemann-Stieltjes

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} B_{t_{i-1}} \Delta_i B,$$

donde

$$\tau_n : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t$$

es una partición de $[0, t]$ y, para cualquier función f sobre $[0, t]$,

$$\Delta f : \Delta_i f = f(t_i) - f(t_{i-1}), \quad i = 1, ..., n,$$

son los correspondientes incrementos de f y

$$\Delta_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = 1, ..., n.$$

Nótese que S_n puede escribirse de la siguiente forma:

$$S_n = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i B)^2 := \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}Q_n(t),$$

ya que $(\Delta_i B)^2 = (B_{t_i} - B_{t_{t-i}})^2 = B_{t_i}^2 + B_{t_{t-i}}^2 - 2B_{t_i}B_{t_{t-i}}$. Luego

$$E[Q_n(t)] = \sum_{i=1}^{n} E[(\Delta_i B)^2] = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = t,$$

recordando la independencia de los incrementos del movimiento Browniano, se tiene que

$$var(Q_n(t)) = \sum_{i=1}^{2} var[(\Delta_i B)^2] = \sum_{i=1}^{n} [E(\Delta_i B)^4 - \Delta_i^2],$$

una variable aleatoria Y que se distribuya $N(0, 1)$ tiene $E[Y^4] = 3$. De aquí,

$$E(B_1^4) = E[B_{t_i - t_{i-1}}^4] = E[(\Delta_i)^{\frac{1}{2}} B_1]^4 = 3\Delta_i^2.$$

Esto implica que

$$var(Q_n(t)) = 2\sum_{t=i}^{n} \Delta_i^2.$$

Así, si

$$max(\tau_n) = \max_{i=1,\ldots,n} \Delta_i \to 0,$$

obtenemos que

$$var(Q_n(t)) \leq 2max(\tau_n) \sum_{i=1}^{n} \Delta_i = 2tmax(\tau_n) \to 0.$$

Luego $var(Q_n(t)) = E(Q_n(t) - t)^2$ y mostramos que $Q_n(t)$ converge a t en el sentido cuadrático. Podríamos tomar este límite como el valor de la integral $\int_0^t B_s dB_s$, entonces

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t).$$

2.16 El lema de Itô.

De la regla de la cadena y el teorema fundamental del calculo sabemos que

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t f'(g(s))dg(s)$$

donde g es derivable en s y f derivable en $g(s)$. La pregunta que nos hacemos es, ¿Qué pasa si sustituimos $g(t)$ por un movimiento Browniano?.

La respuesta a esta pregunta nos da una caracterización sencilla de la muy conocida e importante fórmula de Itô.

Lema 2.16.1 ***(Lema de Itô).*** *Sea f una función dos veces continuamente diferenciable. Entonces*

$$f(B_t) - f(B_s) = \int_s^t f'(B_x)dB_x + \frac{1}{2}\int_s^t f''(B_x)dx, \quad s < t.$$

Esta expresión es conocida como la fórmula de Itô.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}^2$, consideremos sin pérdida de generalidad $s = 0$ y $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = t$ una partición de $[0, t]$ luego

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=0}^{m-1} [f(B_{t_{i+1}}) - f(B_{t_i})]. \tag{2.1}$$

Como $f : [B_0, B_t] \to \mathbb{R}$ es una función tal que f' y f'' están definidas en $[B_0, B_t]$. Sean $a, x \in [B_0, B_t]$ tal que $a \neq x$, entonces haciendo un desarrollo de Taylor de orden dos de f en torno a el punto a tenemos

$$f(B_{t_i}) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(B_{t_i} - a) + \frac{f''(a)}{2}(B_{t_i} - a)^2$$

$$f(B_{t_{i+1}}) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(B_{t_{i+1}} - a) + \frac{f''(a)}{2}(B_{t_{i+1}} - a)^2.$$

Luego

$$\begin{aligned} f(B_{t_{i+1}}) - f(B_{t_i}) &= f'(a)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \frac{f''(a)}{2}[(B_{t_i} - a)^2 - (B_{t_{i+1}} - a)^2] \\ &= f'(a)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \frac{f''(a)}{2}[(B_{t_i} - B_{t_i})(B_{t_{i+1}} + B_{t_i} - 2a)], \end{aligned}$$

tomando $a = B_{t_i}$ obtenemos

$$\begin{aligned} f'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) &+ \frac{f''(B_{t_i})}{2}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{i+1}} + B_{t_i} - 2B_{t_i})] \\ &= f'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \frac{f''(B_{t_i})}{2}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2. \end{aligned}$$

Esta igualdad es al segundo orden, el resto es de orden superior.

Por otro lado, sea $\mathcal{G}$ la $\sigma-$álgebra generada por $(B_{t+dt} - B_t)$, entonces

$$\begin{aligned} (dB_t)^2 = (B_{t+dt} - B_t)^2 &= E[((B_{t+dt} - B_t)^2)|\mathcal{G}] \\ &= E[B_{t+dt}^2|\mathcal{G}] - 2E[B_{t+dt}B_t|\mathcal{G}] + E[B_t^2|\mathcal{G}] \\ &= E[B_{t+dt}^2] - 2E[B_{t+dt}B_t] + E[B_t^2] \\ &= t + dt - 2[(t+dt) \wedge t] + t \\ &= t + dt - 2t + t = dt, \end{aligned} \tag{2.2}$$

es decir,

$$(dB_t)^2 = (B_{t+dt} - B_t)^2 = dt.$$

Luego

$$f(B_{t_{i+1}}) - f(B_{t_i}) = f'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \frac{f''(B_{t_i})}{2}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2.$$

Entonces la ecuación 2.1 se convierte en

$$f(B_t) - f(B_0) = \sum_{i=0}^{m-1} f'(B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f''(B_{t_i})}{2}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 + ...$$

y haciendo $(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \to 0$ tenemos

$$\begin{aligned} f(B_t) - f(B_0) &= \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)(dB_s)^2 \\ &= \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds. \end{aligned}$$

□

2.17 Extensión del lema de Itô.

Para resolver las ecuaciones estocásticas presentadas en este trabajo se requiere extender el lema de Itô visto en la sección anterior. Comenzaremos con un proceso estocástico $f(t, B_t)$ para el lema de Itô. Asumiremos que la función $f(t, x)$ tiene derivadas parciales continuas al menos de segundo orden.

Usando la expansion de segundo orden de Taylor tenemos:

$$\begin{aligned} f(t + dt, B_{t+dt}) - f(t, B_t) =& f_1(t, B_t)dt + f_2(t, B_t)dB_t + \\ & + \frac{1}{2}[f_{11}(t, B_t)(dt)^2 + 2f_{22}(t, B_t)dtdB_t + f_{22}(t, B_t)(dB_t)^2] + ..., \end{aligned}$$

en donde

$$f_i(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, x_2), \quad i = 1, 2.$$

$$f_{ij}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, x_2), \quad i = 1, 2.$$

Como en el calculo clásico, los términos de orden mayor pueden ser despreciados, también pueden ser despreciados los términos con los factores $dtdB_t$ y $(dt)^2$. El factor $(dB_t)^2$ puede ser interpretado como dt tal como vimos en la ecuación (2.1) de la sección anterior entonces el termino con $(dB_t)^2$ no puede ser despreciado. Luego, integrando ambos lados en un sentido formal y reuniendo los términos con dt y dB_t conseguimos la siguiente formula:

$$f(t, B_t) - f(s, B_s) = \int_s^t \left[f_1(x, B_x) + \frac{1}{2} f_{22}(x, B_x) \right] dx + \int_s^t f_2(x, B_x) dB_x, \quad s < t.$$

Esta formula es una extension del lema de Itô cuya demostración de manera formal se puede encontrar en [1].

2.18 Ecuación diferencial estocástica.

En el Capitulo 1 estudiamos la definición, existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales del tipo lineales de primer orden bajo condiciones iniciales, pero es bien conocido que este tipo de ecuaciones caracterizan fenómenos dado un ambiente ideal y que no toman en consideración efectos producidos por el medio ambiente y otros factores, este tipo de fenómenos ajenos a estas ecuaciones diferenciables pueden ser agregados mediante componentes aleatorios.

La forma más sencilla de introducir una variable aleatoria en esta ecuación es colocando una condición inicial aleatoria. La solución $x(t)$ se convierte en un proceso estocástico $(X_t, t \in [0, T])$:

$$dX_t = a(t, X_t)dt, \quad X_0(w) = Y(w).$$

Esta ecuación es llamada ecuación diferencial aleatoria. Esta ecuación no requiere de un calculo estocástico para resolverla, se resuelve por métodos clásicos y luego se ajusta a la condición inicial. Para nuestro caso vamos a introducir además un termino de ruido aleatorio adicional:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dBt, \quad X_0(w) = Y(w),$$

donde $B = (B_t, t \geq 0)$ es un movimiento Browniano, y $a(t, x)$ y $b(t, x)$ son funciones deterministas. La solución de esta ecuación, si esta existe, es un proceso estocástico.

De interpretar esta ecuación como una integral estocástica tenemos:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dBs, \quad 0 \leq t \leq T,$$

donde la primera integral es una integral de Riemann, y la segunda es una integral estocástica de Itô.

Esta ecuación es llamada una ecuación integral estocástica de Itô.

Capítulo 3

Existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial estocástica Itô.

Existen diferentes demostraciones para la existencia y unicidad de la solución de una ecuación diferencial estocástica. Por ejemplo, en la tesis de la Lic. Jocelyn León Pastran ,[4], se usa el lema de Borel-Cantelli para la demostración. Para nuestra demostración usaremos el método propuesto por Halim Doss [1] en el año de 1977, usando la solución de una ecuación diferencial ordinaria para encontrar la solución de la ecuación diferencial estocástica.

Teorema 3.0.1 *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, B un movimiento Browniano, y $\{\mathcal{F}_t\}$ una σ-algebra generada por el movimiento Browniano. Supongamos que σ es de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ con primera y segunda derivada acotada y b una función Lipschitz-continua, entonces la ecuación diferencial estocástica unidimencional*

$$dX_t = \sigma(X_t)dBt + b(X_t)dt, \quad X_0(w) = X_0, \tag{3.1}$$

tiene una única solución, esta puede ser escrita de la forma

$$X_t(w) := h(B_t(w), D_t(w))); \quad 0 \leq t \leq \infty, w \in \Omega,$$

para una función continua $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y un proceso D el cual es la solución de una ecuación diferencial ordinaria para cada $w \in \Omega$.

Demostración. Consideremos la ecuación integral estocástica asociada a la ecuación diferencial estocástica (3.1)

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s + \int_0^t b(X_s)ds, \tag{3.2}$$

y sea $h(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dy}h(x,y) = \sigma(h(x,y)), \quad h(x,0) = x, \tag{3.3}$$

donde h existe y es única por el teorema Cauchy-Peano y el teorema de Picard-Lindelöf. Luego, derivando tenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}h(x,y) = \sigma(h(x,y))\sigma'(h(x,y)),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}h(x,y) = \sigma'(h(x,y))\frac{\partial}{\partial x}h(x,y), \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}h(x,0) = 1, \tag{3.5}$$

de donde se puede observar que la ecuación (3.4) es una ecuación diferencial exacta cuya solución es:

$$\frac{d}{dy}h(x,y) = \exp\left(\int_0^y \sigma'(h(x,z))dz\right). \tag{3.6}$$

Sea $T > 0$ una cota de σ' y σ'' entonces:

$$\exp\left(\int_0^y \sigma'(h(x,z))dz\right) \leq \exp\left(T\int_0^y dz\right) \leq exp(Ty),$$

$$\exp\left(\int_0^y \sigma'(h(x,z))dz\right) \geq \exp\left(-T\int_0^y dz\right) \geq exp(-Ty). \tag{3.7}$$

De los resultados (3.7) y (3.6) tenemos que:

$$|h(x_1,y) - h(x_2,y)| = \left|\int_{x_2}^{x_1} \exp(\int_0^y \sigma'(h(x,z))dz)dx\right| \leq |x_1 - x_2|\exp(Ty).$$

Ahora, tomemos en cuenta la siguiente desigualdad (teorema de valor medio de Lagrange). Sean f una función continua y derivable tenemos

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq max_{x\in[a,b]}(f'(x))$$

En particular, tenemos que

$$|\exp(\alpha)-\exp(\beta)| \leq max(\exp(\alpha),\exp(\beta))|\alpha-\beta|$$

luego,

$$\left|\exp(\int_0^y \sigma'(h(x_1,z))dz) - \exp(\int_0^y \sigma'(h(x_2,z))dz)\right|$$

$$\leq max\left(\exp\left(\int_0^y \sigma'(h(x_1,z))dz\right), \exp\left(\int_0^y \sigma'(h(x_2,z))dz\right)\right)\int_0^y |\sigma'(h(x_1,z)) - \sigma'(h(x_2,z))|dz$$

$$\begin{aligned}
&\leq \exp(Ty)\int_0^y |\sigma'(h(x_1,z)) - \sigma'(h(x_2,z))|dz \\
&\leq \exp(Ty)\int_0^y max(\sigma'')|h(x_1,z) - h(x_2,z)|dz \\
&\leq T\exp(Ty)|x_1-x_2|\int_0^y \exp(Tz)dz \\
&\leq T\exp(Ty)|x_1-x_2|\exp(Ty)\int_0^y dz \\
&\leq Ty\exp(2Ty)|x_1-x_2|
\end{aligned}$$

Así la función $g(x,y) = \exp(-\int_0^y \sigma'(h(x,z))dz)$ es Lipschitz-continua y acotada en y.

Por otra parte si L_1 y L_2 son las constantes de Lipschitz de σ y b respectivamente, entonces

$$|\sigma'(h(x_1,y))\sigma(h(x_1,y)) + b(h(x_1,y)) - \sigma'(h(x_2,y))\sigma(h(x_2,y)) - b(h(x_2,y))|$$

$$\leq |max(\sigma'(h(x_1,y)),\sigma'(h(x_2,y)))||\sigma(h(x_1,y)) - \sigma(h(x_2,y))| + |b(h(x_1,y)) - b(h(x_2,y))|$$

$$\leq L_1\exp(Ty)|h(x_1,y) - h(x_2,y)| + L_2|x_1-x_2|$$

$$\leq (L_1 \exp(2Ty) + L_2)|x_1 - x_2|,$$

de donde se obtiene que el siguiente producto:

$$f(x,y) = g(x,y)\left(-\frac{1}{2}\sigma'(h(x,y))\sigma(h(x,y)) + b(h(x,y))\right), \tag{3.8}$$

el cual satisface la condición de Lipschitz. Fijando $w \in \Omega$, sea $D_t(w)$ la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}D_t(w) = f(B_t(w), D_t(w)), \\ D_0(w) = X_0(w). \end{cases}$$

Esta ecuación tiene una solución general dado que f satisface la condición de Lipschitz.

Definamos $\widetilde{X}_t(w) := h(B_t(w), D_t(w)))$, ahora probaremos que la función $\widetilde{X}_t(w)$ satisface la ecuación (3.2). Aplicando el lema de Itô visto en el capitulo 2 y usando las ecuaciones (3.3), (3.5), (3.6) y (3.8) tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{X_t} - \widetilde{X_0} = h(D_t(w), B_t(w)) \\
&= \int_0^t \frac{d}{dy}h(D_s, B_s)dB_s + \int_0^t \frac{d}{dx}h(D_s, B_s)D_s'ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d^2}{dy^2}h(D_s, B_s)ds \\
&= \int_0^t \sigma(h(D_s, B_s))dB_s + \int_0^t \{\exp\left(\int_0^{B_s} \sigma'(h(D_s, z))dz\right) \\
&\left[\exp\left(-\int_o^{B_s} \sigma'(h(D_s, z))dz\right)\left(-\frac{1}{2}\sigma'(h(D_s, B_s)\sigma(h(D_s, B_s))) + b(h(D_s, B_s))\right)\right]\}ds \\
&+ \int_0^t \frac{1}{2}\sigma'(h(D_s, B_s))\sigma(h(D_s, B_s))ds \\
&= \int_0^t \sigma(\widetilde{X_s})dB_s + \int_0^t b(\widetilde{X_s})ds.
\end{aligned}$$

Así el proceso $(\widetilde{X_t})$ es la solución de la ecuación (1), continua y $\{\mathcal{F}_t\}$-adaptada.

La solución de esta ecuación es única ya que la función $f(x,y)$ es de Lipschitz con lo que la ecuación diferencial (3.6) es única por el teorema 1.3.1 entonces la solución propuesta $(\widetilde{X_t})$ también es única. $\square$

Veamos un ejemplo de esta aplicación para una ecuación diferencial estocástica dada:

Ejemplo: Tomemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria que modela la propagación de un virus en una población:

$$\frac{dx}{dt} = kx(t)y(t)$$

en donde $x(t)$ es el número de personas contagiadas, $y(t)$ es el numero de personas sanas y k es la constante de crecimiento.

Antes de introducir un termino aleatorio a nuestra ecuación diferencial para convertirla en una ecuación diferencial estocástica vamos a ver como es la solución de la ecuación diferencial ordinaria y así compararla con el esquema de la solución de la estocástica.

Supongamos que en una población de N personas, inicialmente se introduce una persona contagiada entonces $x(t) + y(t) = N + 1$ de donde $y(t) = N + 1 - x(t)$. Así nuestra ecuación diferencial queda de la siguiente forma

$$\frac{dx}{dt} = kx(t)(N + 1 - x(t)) = k(N + 1)x(t) - k(x^2(t)),$$

donde la condición inicial es $x(0) = 1$. Esta ecuación diferencial se resuelve por el método de separación de variables por medio del cual tenemos que la solución es:

$$\int \frac{dx}{(k(N+1)x - kx^2)} = \int dt,$$

$$\frac{Ln(x) - Ln(kx - k(N+1))}{k(N+1)} = t + C_1,$$

$$Ln(kx - k(N+1)) - Ln(x) = -k(N+1)t - k(N+1)C_1,$$

$$Ln(\frac{kx - k(N+1)}{x}) = -k(N+1)t - k(N+1)C_1.$$

Sea $C = e^{-k(N+1)C_1}$, entonces

$$\frac{kx - k(N+1)}{x} = Ce^{-k(N+1)t.}$$

Como $x(0) = 1$, tenemos que

$$C = k - k(N+1) = -kN.$$

Luego, sustituyendo el valor de C, tenemos que

$$\frac{kx - k(N+1)}{x} = -kNe^{-k(N+1)t},$$

$$kx + kNxe^{-k(N+1)t} = k(N+1),$$

$$x(k + kNe^{-k(N+1)t}) = k(N+1),$$

$$x(t) = \frac{N+1}{1 + Ne^{-k(N+1)t}}.$$

Así tenemos la solución de la ecuación diferencial. En general, la propagación de virus no tiene una forma tan sencilla debido a factores aleatorios que no se incluyen en esta ecuación. Para generalizar esta ecuación vamos a introducir un termino aleatorio a nuestra ecuación diferencial. Así la ecuación nos queda de la siguiente forma:

$$dx = kx(t)y(t)dt + x(t)dBt.$$

Ahora, veamos la ecuación diferencial como una ecuación integral

$$x(t) = k\int_0^t x(s)y(s)ds + \int_0^t x(s)dBs + x_0.$$

Nuevamente, tomando $y(t) = N + 1 - x(t)$ y $x_0 = 1$, se tiene

$$x(t) = k\int_0^t x(s)(N+1-x(s))ds + \int_0^t x(s)dBs + 1. \tag{3.9}$$

Para utilizar el método de Doss tenemos que ver que las condiciones del teorema se satisfacen. La función x es continua y, además, satisface la condición de Lipschitz pues

$$|x_1 - x_2| \leq 1|x_1 - x_2|.$$

Así la constante de Lipschitz es igual a 1. La función x tiene primera y segunda derivada acotada. Entonces, tenemos que la ecuación (3.9) satisface las condiciones del teorema.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{dh(x,y)}{dy} = \sigma(h(x,y)), \quad h(x,0) = x$$

donde $\sigma(x) = x$, entonces

$$\frac{dh(x,y)}{dy} = (h(x,y)), \quad h(x,0) = x$$

haciendo $h(x,y) = xe^y$, tenemos

$$\begin{cases} \frac{d(xe^y)}{dy} = xe^y, \\ h(x,0) = xe^0 = x. \end{cases}$$

Ahora sea

$$g(x,y) = e^{-\int_0^y \sigma'(h(x,z))dz} = e^{-\int_0^y dz} = e^{-y}, \tag{3.10}$$

y

$$f(x,y) = g(x,y)(-\frac{1}{2}\sigma'(h(x,y))\sigma(h(x,y)) + b(h(x,y))). \tag{3.11}$$

sustituyendo (3.10) en (3.11) tenemos

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^{-y}(-\frac{1}{2}xe^y + (xe^y(N+1-xe^y))) \\ &= x(-\frac{1}{2} + (N+1-xe^y)) \\ &= x(N+\frac{1}{2} - xe^y). \end{aligned}$$

Llamemos $L = N + \frac{1}{2}$. Ahora fijando $\omega \in \Omega$ y sea $D_t(\omega)$ la solución de la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{dD_t(\omega)}{dt} = f(B_t(\omega), D_t(\omega)) = LB_t(\omega) - e^{D_t(\omega)}B_t^2(\omega), \\ D_0(\omega) = x_0(\omega) = 1. \end{cases}$$

Y, así, tenemos que la única solución de la ecuación (3.9) es

$$\widetilde{X}_t(w) := B_t(w)e^{D_t(w)}.$$

Conclusiones

Es importante mencionar que en el presente trabajo de investigación, sobre el vinculo entre las ecuaciones diferenciales ordinarias y las ecuaciones diferenciales estocásticas, se pudo observar en el ejemplo de la aplicación del cálculo estocástico en el modelaje de la propagación de virus que a pesar de que la ecuación es a simple vista muy sencilla y las funciones que contiene pueden ser manipuladas con facilidad la ecuación diferencial estocástica asociada al problema, es difícil resolver usando el método planteado en este trabajo. Sin embargo, a partir de estos resultados conseguidos se puede conseguir una solución numérica utilizando otros métodos como el expuesto en el trabajo especial de grado realizado por la lic. Jocelyn León Pastran, [4].

Por otro lado, este método nos brinda una herramienta que vincula una ecuación diferencial estocástica, que en principio es muy difícil de resolver sin usar métodos numéricos, con la solución de una ecuación diferencial ordinaria que, en muchos casos, puede simplificar el problema y darnos una solución explícita del mismo.

A pesar de que la solución mostrada en este trabajo es bastante general e incluye muchos casos de aplicaciones en los cuales puede ser utilizados, aún se pueden llegar a ampliar las condiciones del teorema para resolver muchas otras aplicaciones, lo que invita a seguir estudiando este tipo de ecuaciones.

Bibliografía

[1] Halim Doss. "Liens entre équations différentielles stochastiques et ordinaires". Numdam. (1977) 100-104.

[2] Mikosch, T. Elementary Stochastic Calculus. World Scientific. (1998) 14-157.

[3] Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve. Brownian Motion and Stochastic Calculus. Springer. (1997) 294-297.

[4] Lic. Jocelyn León Pastran. "Aplicación del cálculo estocástico en el modelaje del esparcimiento de contaminantes en la superficie del agua.". Universidad Central de Venezuela.(2008).

[5] Tom M, Apostol. Calculus Volumen 2. Reverté, s.a.