UCV, Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería Eléctrica.

Análisis de Sistemas Lineales

Ebert Brea

11 de diciembre de 2012

Contenido

1. Señales y Sistemas

Problema 1.1. *Sea una señal $x(t)$ definida por*

$$x(t) = e^{-5t}\mathrm{u}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Si a la señal dada por la Ecuación (1.1) *se le toman muestras a intervalos regulares $h = \frac{1}{10}\,\mathrm{s}$. Determine el modelo matemático de la señal discreta $x[n]$ que represente la secuencia de las muestras extraídas a la señal $x(t)$.*

Problema 1.2. *Determine los correspondientes modelos matemáticos en el dominio discreto, que representen las secuencias de muestras extraídas de las siguientes señales definidas mediante los modelos matemáticos descritos a continuación, si las muestras son tomadas a intervalos regulares de valor $h = \frac{1}{5}\mathrm{s}$*

I) $x(t) = \mathrm{sen}\,(2t)\mathrm{u}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

II) $x(t) = e^{-t}\mathrm{sen}\,(2t)\mathrm{u}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

III) $x(t) = \mathrm{p}_2(t-4), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

IV) $x(t) = \mathrm{q}_2(t+4), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$

Problema 1.3. *Sean los modelos matemáticos definidos en el dominio continuo, en donde $x(t)$ e $y(t)$ representan respectivamente las señales de excitación y respuesta del sistema objeto de estudio, y las cuales ambas señales dependen de la variable independiente continua $t \in \mathbb{R}$. Entonces, a qué tipo de sistema corresponde cada modelo matemático definido a continuación:*

I) $y(t) = x^2(t), \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}.$

II) $y(t) = \text{sen}\,(2t)\, x(t), \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}$.

III) $y(t) = \text{máx}(x(t), 0), \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}$.

IV) $y(t) = x(t+1), \quad \forall x(t) \in \mathbb{R}$.

Problema 1.4. *Sean los modelos matemáticos definidos en el dominio discreto, en donde $x[n]$ e $y[n]$ representan respectivamente las señales de excitación y respuesta del sistema objeto de estudio, y las cuales ambas señales dependen de la variable independiente discreta $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, a qué tipo de sistema corresponde cada modelo matemático definido a continuación:*

I) $y[n] = a^n x[n-2], \quad \forall x[n] \in \mathbb{R}$.

II) $y[n] = x[n+1] - x[n], \quad \forall x[n] \in \mathbb{R}$.

III) $y[n] = x[n]\, x[n-2], \quad \forall x[n] \in \mathbb{R}$.

IV) $y[n] = 1 + x[n-1], \quad \forall x[n] \in \mathbb{R}$.

2. Análisis de Sistemas en el Dominio Continuo

Problema 2.1. *Sea el sistema descrito por la Figura 2.1 formado por los elementos: resistencia, inductancia y capacitancia.*

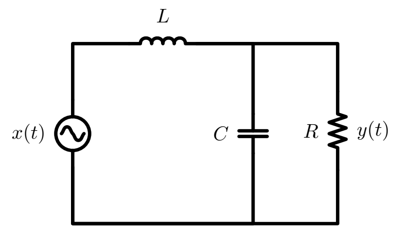

Figura 2.1: Sistema eléctrico RCL.

Si el sistema es excitado por una señal de tensión eléctrica $x(t)$ y su respuesta $y(t)$ es medida a través de la caída de tensión sobre la resistencia. Entonces, su modelo matemático en el dominio del tiempo continuo, y en términos de sus variables externas está dado por

A) $LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$

B) $\frac{L}{R}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$

C) $L\frac{di_L(t)}{dt} + y(t) = x(t)$

D) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{LC}\,y(t) = x(t)$

Problema 2.2. *Sea un sistema lineal, dinámico, causal, invariante en el dominio y determinista (LDCID) definido en el dominio continuo, y cuyo modelo matemático[1] viene dado por*

$$16\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 20\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 8\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 32x^2(t), \tag{2.1}$$

[1] Note que $16a^3 + 20a^2 + 8a + 1 = 16(a + \frac{1}{4})(a^2 + a + \frac{1}{4})$.

donde $y(t)$ y $x(t)$ representan respectivamente la señal de respuesta y la señal de excitación del sistema.
Si el sistema es excitado por una señal $x(t) = e^{-2t}\mathrm{u}(t)$, donde $\mathrm{u}(t)$ representa la función escalón unitaria. Entonces, la expresión matemática correspondiente a la respuesta del sistema para todo $t > 0$, es decir, $y(t)$ viene dada por

A) $y(t) = -\frac{32}{735}e^{-4t}$
B) $y(t) = A_1e^{-t/4} + A_2te^{-t/2} + A_3e^{-t/2} - \frac{32}{735}e^{-4t}$
C) $y(t) = A_1e^{-t/4} + A_2e^{-t/2} - \frac{32}{735}e^{-4t}$
D) $y(t) = A_1e^{-t/4} + A_2te^{-t/2} + A_3e^{-t/2} - \frac{32}{63}e^{-2t}$

Problema 2.3. *Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo, y cuyo modelo matemático corresponde a*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} + x(t), \tag{2.2}$$

donde $y(t)$ y $x(t)$ representan respectivamente la señal de respuesta y la señal de excitación del sistema.Si el sistema es excitado por una señal $x(t) = e^{-t}\mathrm{u}(t)$, donde $\mathrm{u}(t)$ representa la función escalón unitaria. Entonces, para un $A_1 \neq 0$ y un $A_2 \neq 0$ la expresión matemática correspondiente a la respuesta del sistema para todo $t > 0$, es decir, $y(t)$ viene dada por

A) $y(t) = A_1 + e^{-t}$
B) $y(t) = A_1e^{-t}$
C) $y(t) = A_1 + A_2e^{-t}$
D) *No puede ser determinada*

Problema 2.4. *Sea un sistema LDCID definido en el dominio del tiempo continuo, y cuyo modelo matemático viene dado por*

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} = 4\frac{dx(t)}{dt}, \quad \forall t > 0, \tag{2.3}$$

donde $y(t)$ y $x(t)$ representan respectivamente las señales de respuesta y de excitación del sistema. Si el sistema es excitado por una señal $x(t) = e^{-2t}\mathrm{u}(t)$, donde $\mathrm{u}(t)$ representa la función escalón unitaria. Entonces, la expresión matemática correspondiente a la respuesta del sistema ante la señal $x(t)$ para todo $t > 0$, es decir, $y(t)$ viene dada por

A) $y(t) = A_1e^{-t}\mathrm{sen}\,(t) + A_2e^{-t}\cos(t) + 2\,e^{-2t}, \quad \forall t > 0.$
B) $y(t) = A_1 + A_2e^{-t}\mathrm{sen}\,(t) + A_3e^{-t}\cos(t) + 2\,e^{-2t}, \quad \forall t > 0.$
C) $y(t) = A_1 + A_2e^{-\sqrt{2}\,t}\mathrm{sen}\,(t + \frac{3\pi}{4}) + A_3e^{-\sqrt{2}\,t}\cos(t + \frac{3\pi}{4}) + 2\,e^{-2t}, \quad \forall t > 0.$
D) $y(t) = 2\,e^{-2t}, \quad \forall t > 0.$

Problema 2.5. *Sea un sistema LDCID en el dominio continuo, el cual está definido por*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\,\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 6x(t), \;\; \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Si la señal de excitación $x(t)$ está dada por[2]

$$x(t) = \mathrm{sgn}\,(t) \;\; \forall t \in \mathbb{R},$$

[2]Note que $\mathrm{sgn}\,(t) = \begin{cases} 1, & \forall\, t > 0; \\ -1, & \forall\, t < 0. \end{cases}$

y además $y(t)\Big|_{t=0} = -1$; $\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=0} = 0$. *Entonces, la respuesta del sistema para* $t > 0$ *es*

A) $-9e^{-2t} + 6e^{-3t} + 2$

B) $-\frac{9}{2}e^{-2t} + 3e^{-3t} + \frac{1}{2}$

C) $-21e^{-2t} + 14e^{-3t} + 6$

D) $-6e^{-2t} + 4e^{-3t} + 1$

Problema 2.6. *Sea el sistema descrito por la Figura 2.2 formado por resistencias y capacitancias.*

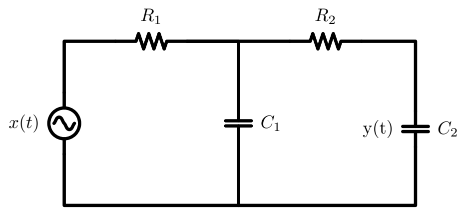

Figura 2.2: Sistema eléctrico doble RC.

Si el sistema es excitado por una señal de tensión eléctrica $x(t)$ *y su respuesta* $y(t)$ *es medida a través de la caída de tensión sobre la capacitancia* C_2. *Entonces, determine:*

I) *modelo matemático en el dominio del tiempo continuo, y en términos de sus variables externas definidas.*

II) *respuesta del sistema si éste es excitado por un señal* $x(t) = \mathrm{u}(t)$ *y el sistema se encuentra en condiciones iniciales de cero.*

III) *respuesta del sistema si es excitado por una señal*[3] $x(t) = \mathrm{p}_2(t-4)$. *Para esto suponga que* $R_1 = R_2 = 1\ \mathrm{k}\Omega$ *y* $C_1 = C_2 = 470\ \mu\mathrm{F}$ *y el sistema se encuentra en condiciones iniciales* $y(0^-) = 1$ *y* $\frac{dy(t)}{dt}|_{t=0^-} = 0$.

3. Análisis de Sistemas en el Dominio Discreto

Problema 3.1. *Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo, con modelo matemático*

$$\frac{dy(t)}{dt} + 10y(t) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

donde $y(t)$ *y* $x(t)$ *representan respectivamente la señal de respuesta y la señal de excitación del sistema.*
Entonces, el modelo en tiempo discreto cuando es discretizado por integración rectangular por la izquierda y con un paso de discretización de $0{,}01$ s *es*

A) $y[n+1] - 0{,}9\,y[n] = 0{,}01\,x[n]$

B) $1{,}1\,y[n+1] - y[n] = 0{,}01\,x[n+1]$

C) $y[n+1] + 9\,y[n] = x[n]$

D) $11y[n+1] - y[n] = x[n+1]$

[3] Considere que los parámetros 2 y 4 que definen la señal están expresados en segundos (s).

Problema 3.2. *Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo, con modelo matemático*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.2}$$

donde $y(t)$ y $x(t)$ representan respectivamente la señal de respuesta y la señal de excitación del sistema. Suponga además que $y(0) = y_0$, y $\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_0 = \dot{y}_0$.

I) *Determine el modelo matemático definido en el dominio discreto empleando el método de integración rectangular por la izquierda.*

II) *Determine el modelo matemático definido en el dominio discreto empleando el método de espacio de estado.*

III) *Compare los modelos matemáticos obtenidos en los Problemas* I) *y* II) *a través de la simulación de los mismos, con un paso de discretización de $h = 0,01$ s. Para esto suponga que la señal de excitación corresponde a una señal escalón unitario y que el sistema se encuentra en condiciones iniciales de cero, es decir, en reposo.*

Problema 3.3. *Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto, y cuyo modelo matemático viene definido por*

$$-\frac{1}{6}y[n-4] + \frac{1}{6}y[n-3] + y[n-2] = x[n-2], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{3.3}$$

donde $y[n-k]$ y $x[n-k]$ representan respectivamente la señal de respuesta y la señal de excitación del sistema, para cada uno de los casos de k.
Entonces, para el sistema descrito, la respuesta del sistema[4] *ante la señal $x[n] = \delta[n-1] + 2\delta[n-2]$ cuando el sistema se encuentra inicialmente en reposo, es decir, $y[n] = 0$ para todo $n \leq 0$, es*

A) $y[n] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{-6}{5}\left(\frac{-1}{2}\right)^k + \frac{6}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^k\right] \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$

B) $y[n] = \delta[n-1] + \frac{11}{6}\delta[n-2].$

C) $y[n] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{18}{5}\left(\frac{-1}{2}\right)^k + \frac{42}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^k\right] \delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$

D) $y[n] = \frac{18}{5}\left(\frac{-1}{2}\right)^n + \frac{42}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad \forall n \geq 1.$

Problema 3.4. *Sea un sistema LDCID en el dominio discreto, el cual está definido por*

$$y[n] + \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n], \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{3.4}$$

Si el sistema es excitado por la señal $x[n]$ definida en el dominio discreto, y la misma está dada por

$$x[n] = \frac{1}{2^n}\, u[n], \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

y se conoce que $y[0] = 1$; $y[1] = 1/2$. Entonces, la respuesta impulsiva del sistema para $n \geq 0$ es

[4] Sugerencia: tome en cuenta que para $n \geq 3$ la señal de excitación es nula, es decir, $x[n] = 0$ para $n \geq 3$.

A) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(4\left(\frac{-1}{4}\right)^k - 3\left(\frac{-1}{2}\right)^k\right)\delta[n-k]$

B) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(2\left(\frac{-1}{4}\right)^k - \left(\frac{-1}{2}\right)^k\right)\delta[n-k]$

C) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(3\left(\frac{-1}{4}\right)^k - 2\left(\frac{-1}{2}\right)^k\right)\delta[n-k]$

D) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\left(\frac{-1}{4}\right)^k + 2\left(\frac{-1}{2}\right)^k\right)\delta[n-k]$

Problema 3.5. *Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto, y cuyo modelo matemático viene definido por*

$$y[n+2] - \tfrac{3}{4}y[n+1] + \tfrac{1}{8}y[n] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{3.5}$$

donde $y[n-k]$ y $x[n-k]$ representan respectivamente la señal de respuesta y la señal de excitación del sistema, para cada uno de los casos de k. Entonces, para el sistema descrito, la respuesta del sistema ante la señal $x[n] = \delta[n-1] + 2\delta[n-3]$ cuando el sistema se encuentra inicialmente en reposo, es decir, $y[n] = 0$ para todo $n \leq 0$, es

A) $y[n] = \delta[n-3] + \sum\limits_{k=4}^{\infty}\left[144\left(\frac{1}{2}\right)^k - 2112\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]\delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$

B) $y[n] = \sum\limits_{k=2}^{\infty}\left[16\left(\frac{1}{2}\right)^k - 64\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]\delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$

C) $y[n] = \sum\limits_{k=3}^{\infty}\left[16\left(\frac{1}{2}\right)^k - 64\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]\delta[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$

D) *ninguna de las anteriores.*

4. Respuesta de Sistemas por Convolución

Problema 4.1. *Sea un sistema LDCID definido en el dominio discreto con modelo matemático definido por*

$$y[n+1] - a_0 y[n] = b_0 x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{4.1}$$

donde $x[n]$ es la señal de excitación, $y[n]$ representa la señal de respuesta del sistema, y a_0 y b_0 son parámetros del sistema.
Si el sistema está inicialmente en reposo, es decir, $y[n] = 0$, determine:

I*)* *respuesta impulsiva del sistema;*

II*)* *respuesta escalón del sistema mediante los métodos de resolución de ecuaciones en diferencias;*

III*)* *respuesta escalón del sistema a través del método de convolución;*

IV*)* *Respuesta impulsiva del sistema considerando que*

$$x[n] = \delta[n] = \mathrm{u}[n] - \mathrm{u}[n-1], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{4.2}$$

Problema 4.2. *Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo y cuyo modelo matemático está definido por*

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

donde $x(t)$ *es la señal de excitación,* $y(t)$ *representa la señal de respuesta del sistema, y* a_0 *y* b_0 *son parámetros del sistema.*
Si el sistema está inicialmente en reposo, es decir, con condiciones iniciales de cero, determine:

I) *Respuesta impulsiva del sistema.*

II) *Respuesta escalón del sistema a través de los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales.*

III) *Respuesta escalón del sistema empleando el método de convolución y compare el resultado con el Problema* II).

IV) *Relación entre los resultados obtenidos de los Problemas* I) *y* II).

Problema 4.3. *Sea un sistema LDCID definido en el dominio continuo y cuyo modelo matemático está definido por*

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_1 \frac{dx(t)}{dt}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{4.4}$$

donde $x(t)$ *es la señal de excitación,* $y(t)$ *representa la señal de respuesta del sistema, y* a_0 *y* b_0 *son parámetros del sistema. Determine:*

1. *Respuesta escalón del sistema a través de los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales.*

2. *Relación entre la respuesta escalón del Problema 4.2.*I *y las soluciones obtenidas en el Problema 4.3.*I*, bajo el supuesto de que el parámetro* b_0 *de la Ecuación* (4.3) *es igual al parámetro* b_1 *de la Ecuación* (4.4).