

*Perturbaciones de los Solitones Ópticos de la
Ecuación No-Lineal de Schrödinger*

Br. Juan Manuel Palacios

Tutor: Prof. Alberto Bellorín

Trabajo Especial de Grado



Caracas, 16 de diciembre del 2009



Universidad Central de Venezuela

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

**PERTURBACIONES
DE LOS SOLITONES ÓPTICOS DE LA
ECUACIÓN NO-LINEAL DE SCHRÖDINGER**

Br. Juan Manuel Palacios

Prof. Alberto Bellowin, Tutor

Caracas, 16 de diciembre del 2009

**PERTURBACIONES DE LOS SOLITONES ÓPTICOS DE LA
ECUACIÓN NO-LINEAL DE SCHRÖDINGER**

Br. Juan Manuel Palacios

*Trabajo Especial de Grado presentado
ante la ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título de
Licenciado en Física.*

Prof. Alberto Bellorín, Tutor

Fecha

Quienes suscriben, miembros del Jurado que examinó el trabajo presentado por el **Br. Juan Manuel Palacios**, titulado: “**Perturbaciones de los Solitones Ópticos de la Ecuación No-Lineal de Schrödinger**” para optar al título de Licenciado en Física, consideramos que dicho trabajo cumple con los requisitos exigidos por los reglamentos respectivos y por lo tanto lo declaramos APROBADO en nombre de la Universidad Central de Venezuela.

Prof. Alberto Bellorín, Tutor

Fecha

Prof. Luis E. Guerrero

Fecha

Prof. Fermín Dalmagro

Fecha

Caracas, 16 de diciembre del 2009

*A la memoria de Alvaro. Más que un amigo, una inspiración.
Elevado tanto en calidad humana como en inteligencia,
¡un nuevo Big Bang antes que una mente tan brillante
vuelva a este mundo!*

Agradecimientos

Son muchas las personas gracias a quienes la escritura de estas palabras de agradecimiento – clausura simbólica de toda una carrera universitaria – es posible, en mayor o menor medida, debido a un rol u otro en mi vida.

Primero y principal, gracias a mis padres, Alonso y Elena, y mi hermano, Rodrigo, quienes han sido un apoyo incesante en toda mi vida. Fuentes de motivación e impulso a ser la persona que hoy en día soy, entre otras cosas un eterno apasionado por el arte de nunca desistir en la búsqueda del conocimiento más pleno. “Sólo sé que no sé nada”, según profesó Sócrates en tiempos memoriales.

Una mención especial merece Mariela Soto, quien sufrió la coincidencia, tal vez incluso desdicha, de acompañarme a través de lo que fácilmente fueron los momentos más difíciles de mi carrera, con sus no escasas consecuencias en mi vida personal. Eternamente agradecido estaré por tu constancia, tu incansable apoyo e impulso, sin lo cual esta clausura tal vez no hubiese sido lograda. En la misma categoría incluyo a Gloria Hernández, cuyas sabias, pacientes y cariñosas palabras en momentos clave fueron cruciales para poder llegar aquí.

A mi Tutor, Alberto Bellorín, por haber tenido la paciencia y resistencia para sobrellevar mis interminables preguntas durante todos los meses de elaboración de este trabajo, manejando mi impaciencia día a día por querer verlo culminado tal vez incluso antes de tiempo.

A todo el Crew de IM, lugar de trabajo sin igual que prácticamente fue mi segundo hogar durante gran parte de la preparación de este escrito: Jade, Xuyen, Jhonny, Eduardo e Ivens, ¡increíbles compañeros de trabajo! Sus amplias consideraciones para conmigo por mi doble vida entre IM y mi condición de “tesista” fueron invaluable.

Finalmente, a mis amigos de la Escuela de Física, mis compañeros de estudio, risas, celebraciones e incluso tristezas en nuestro paso por la carrera. Sin orden particular alguno: Emilio Lazo, el “Grande”, maestro L^AT_EX, sin quien este trabajo jamás hubiese llegado a tener una presentación de tan alta calidad; Ritguez Flores, con sus eternas conversas en cada pausa de eternas cuentas; Alexander López, el “Tula”, de los grandes en la Escuela y en la amistad; Alvaro Roccaro, el “Magnánimo”, admirado, a quien me gustaría poder mostrarle estas palabras de eterno agradecimiento por no descansar para verme llegar aquí; Alejandro Claro, entre códigos de programación e interminables discusiones, de quien también aprendí abundantemente; Alexis Chechelev, el “Cheche”; Carolina Trigo, la “Trigueña”; Jorman Sandoval; Daniela Bartolini, la “Ragazza”; Lisset Mendez; Orlenys Troconis; Deivis Ramírez; Francisco Peña, conocido como el “Discípulo” por algunos, aunque nunca dejé de aprender de él; Ernesto Contreras; Nelson Bolívar; Mayra Peralta; Beercheba Rondón; Eliceth Rojas; Javier Lugo; Jennifer Valera... y seguramente muchos otros que paso por alto, mis sinceras disculpas, pero que indiscutiblemente junto a los ya mencionados contribuyeron en una forma u otra a todo lo que hoy en día culmina con estas palabras de agradecimiento que escribo.

A todos Uds., mi carrera de Física y este Trabajo Especial de Grado les pertenece, ¡y por ello mis más sinceros agradecimientos!

Resumen

Perturbaciones de los Solitones Ópticos de la Ecuación No-Lineal de Schrödinger

Juan Manuel Palacios

Prof. Alberto Bellorín, Tutor

Universidad Central de Venezuela

El presente trabajo realiza un estudio tanto analítico como numérico de las principales perturbaciones de los solitones temporales-brillantes con orden $N = 1$ de la Ecuación No-Lineal de Schrödinger (ENLS), aplicada al campo de la óptica no-lineal y escrita en forma escalar, continua y en $1 + 1$ dimensiones. Mediante el formalismo Lagrangiano clásico se desarrolla un análisis variacional que, junto al teorema de los procesos adiabáticos, resulta en la dinámica de las coordenadas colectivas del solitón fundamental perturbado, quedando éstas escritas en función de los modelos matemáticos de cada perturbación tratada, i.e. disipación energética, auto-escarpado (“self-steepening”) y dispersión intra-pulso de Raman (“intra-pulse Raman scattering”). Finalmente, el análisis numérico por el método Split-Step de Fourier Simetrizado es empleado para confirmar las predicciones analíticas de la dinámica adiabática ante cada perturbación individual, mediante la integración directa de la ENLS modificada correspondiente y la comparación de las características de la solución numérica resultante vs. la analítica respectiva.

Prof. Alberto Bellorín
Tutor

Índice General

Resumen	vii
Índice General	viii
Lista de Figuras	x
Introducción	1
1. Solitones y la Ecuación No-Lineal de Schrödinger	7
1.1. Solitones y sus Orígenes	7
1.2. Ecuación No-Lineal de Schrödinger	11
1.2.1. Universalidad	11
1.2.2. Óptica No-Lineal	14
1.2.3. Solitones Brillantes de la ENLS Normalizada	24
1.2.4. El Solitón Fundamental	28
2. Ecuación No-Lineal de Schrödinger Perturbada	33
2.1. Análisis Variacional	34
2.1.1. Ecuación de Euler-Lagrange para Campos	37
2.1.2. Dinámica Adiabática de las Coordenadas Colectivas	40
2.2. Perturbación Disipativa	44
2.3. Efectos de Orden Superior	48
2.3.1. Perturbación por Efecto de Auto-Escarpado	49

2.3.2.	Perturbación por Efecto de Dispersión Intra-Pulso de Raman	53
3.	Estudio Numérico	58
3.1.	Método Split-Step de Fourier	59
3.1.1.	Simetrización	62
3.1.2.	Estabilidad Numérica	64
3.1.3.	Perfil de Entrada	68
3.2.	Simulación No Perturbada	69
3.3.	Simulación Disipativa	77
3.4.	Simulación de Auto-Escarpado	82
3.5.	Simulación de Dispersión Intra-Pulso de Raman	86
	Conclusiones	95
	Bibliografía	101

Lista de Figuras

1.1.	“The Great Wave of Translation”	9
3.1.	Simulación conservativa con parámetros de fibra regular (3.18) y de solitón (3.19). Dominio temporal.	72
3.2.	Simulación conservativa con parámetros de fibra regular (3.18) y de solitón (3.19). Dominio de frecuencias.	73
3.3.	Simulación conservativa con parámetros de fibra “dispersion-shifted” (3.20) y de solitón (3.21). Dominio temporal.	74
3.4.	Simulación conservativa con parámetros de fibra “dispersion-shifted” (3.20) y de solitón (3.22). Dominio temporal.	75
3.5.	Simulación conservativa con parámetros de fibra “dispersion-shifted” (3.20) y orden de solitón $\tilde{N} = 1, 2$. Dominio temporal.	76
3.6.	Simulación disipativa con parámetros de fibra regular (3.18) y de solitón (3.19). Dominio temporal.	79
3.7.	Simulación disipativa con parámetros de fibra regular (3.18) y de solitón (3.19). Dominio de frecuencias.	80
3.8.	Solución analítica (3.25) de la dinámica adiabática de la ENLS (3.23), con parámetros de solitón (3.19) y α (3.26).	81
3.9.	Simulación disipativa con parámetros de fibra regular (3.18), de solitón (3.19) y α' (3.27). Dominio temporal.	82
3.10.	Solución analítica (3.25) de la dinámica adiabática de la ENLS (3.23), con parámetros de solitón (3.19) y α' (3.27).	83

3.11.	Simulación de un solitón de parámetros (3.32) y con efecto de auto-escarpado, con S (3.31), en una fibra regular de parámetros (3.18). Dominio temporal.	86
3.12.	Solución analítica (3.30) de la dinámica adiabática de la ENLS (3.28), con parámetros de solitón (3.32) y $s = 0,2$	87
3.13.	Simulación de un solitón de parámetros (3.32) y con efecto de auto-escarpado, con S (3.31), en una fibra regular de parámetros (3.18). Dominio de frecuencias.	88
3.14.	Simulación de un solitón de parámetros (3.19) y con efecto de auto-escarpado, con S (3.31), en una fibra regular de parámetros (3.18). Dominio temporal.	89
3.15.	Simulación de un solitón de parámetros (3.38) y con efecto de dispersión intra-pulso de Raman, con T_R (3.37), en una fibra regular de parámetros (3.18). Dominio temporal.	90
3.16.	Solución analítica (3.36) de la dinámica adiabática de la ENLS (3.34), con parámetros de solitón (3.38) y T_R (3.37).	91
3.17.	Simulación de un solitón de parámetros (3.38) y con efecto de dispersión intra-pulso de Raman, con T_R (3.37), en una fibra regular de parámetros (3.18). Dominio de frecuencias.	92
3.18.	Simulación de un solitón de parámetros (3.19) y con efecto de dispersión intra-pulso de Raman, con T_R (3.37), en una fibra regular de parámetros (3.18). Dominio temporal.	93
3.19.	Simulación de un solitón de parámetros (3.19) y con efecto de dispersión intra-pulso de Raman, con T_R (3.37), en una fibra regular de parámetros (3.18). Dominio de frecuencias.	94

Introducción

La capacidad de transmitir altas tasas de información de diversa índole a grandes velocidades ha crecido incesantemente en las últimas décadas con el advenimiento de sistemas modernos de comunicación, generalmente basados en fibras ópticas que transmiten contenido digital en forma de ondas lumínicas. No obstante, el también incesante crecimiento de la complejidad de las comunicaciones actuales ha impulsado la constante búsqueda de tasas de transmisión aún mayores, usualmente a través del uso de pulsos ópticos discretos con anchos temporales cada vez menores, para poder así agrupar mayor cantidad de “bits” en un espacio dado.

Las características electromagnéticas de los materiales que componen las fibras ópticas más eficientes en uso hoy en día, generalmente construidas a base de vidrios de sílice y derivados, hacen imperativa la comprensión de efectos físicos de naturaleza no-lineal que emergen cuando el ancho temporal de los pulsos transmitidos se reduce por debajo de los 10 nano-segundos ($10 \times 10^{-9}s$), límite este solamente sobrepasado recientemente [1–3]. La compleja combinación de estos efectos con otros de naturaleza lineal puede llegar a dar origen a fenómenos físicos no vistos fuera de este régimen combinado, como lo es el solitón óptico originalmente descubierto teóricamente por A. Hasegawa et al., reportado en [4], y confirmado posteriormente a modo experimental por L. F. Mollenauer et al. [5].

El trabajo de Hasegawa demostró que, dada la combinación de un conjunto particular de efectos lineales y no-lineales, i.e. dispersión cromática de segundo orden y efecto Kerr óptico, respectivamente, la evolución a través de una fibra de sílice del perfil temporal de un pulso óptico “ultra-corto” (de ancho menor a los 10 nano-segundos) y de intensidad no nula (i.e. “brillante”) es gobernada por la conocida Ecuación No-Lineal de Schrödinger (ENLS), la cual presenta soluciones solitónicas según lo demostrado por V. E. Zakharov et al. en sus estudios del comportamiento de ondas lumínicas en medios dieléctricos de respuesta no-lineal, publicados en [6].

El objetivo principal de este Trabajo Especial de Grado es estudiar un grupo adicional de efectos lineales y no-lineales que originalmente fueron descartados en la deducción que condujo a la Ecuación No-Lineal de Schrödinger para estos pulsos, dadas sus magnitudes relativas considerablemente pequeñas en comparación a la dispersión cromática de segundo orden y al efecto Kerr óptico [1, 7, 8]. Estos son:

- La disipación del pulso, efecto lineal causado primordialmente por la absorción de su energía electromagnética por parte de los electrones de los materiales que componen al medio de propagación [1, 2];
- el auto-escarpado o “self-steepening”, efecto no-lineal de deformación geométrica del frente de onda causado por la dependencia inversa entre la intensidad del pulso y su velocidad de grupo, originalmente descubierto por D. Grischkowsky et al. en sus investigaciones sobre formaciones de shocks ópticos en los frentes de onda, publicadas en [9];
- la dispersión intra-pulso de Raman o “intra-pulse Raman scattering”, efecto no-lineal que modifica la frecuencia del pulso como consecuencia de las colisiones inelásticas entre sus fotones y las moléculas del material, las cuales excitan sus modos vibracionales a expensas de la energía del pulso, efecto en sí conocido como la dispersión inelástica de Raman o sencillamente efecto Raman [1, 2].

La dispersión cromática de segundo orden es debida a la dependencia del índice de refracción del medio sobre la frecuencia del pulso, lo cual causa que distintas componentes espectrales dentro del paquete de onda se propaguen a velocidades diferentes [1, 2, 8]. Por otro lado, tanto el efecto Kerr óptico como el de auto-escarpado y dispersión intra-pulso de Raman son debidos a la polarización no-lineal del medio ante la presencia de pulsos ópticos de alta intensidad; en cambio, solamente los últimos dos pertenecen al régimen conocido como polarización de orden superior, apreciable sólo cuando el ancho temporal de los pulsos que se propagan en la fibra de sílice es inferior a un pico-segundo (1×10^{-12} s) [1, 2, 8, 10].

El principal aporte del trabajo de Zakharov a la teoría de la ENLS fue deducir sus soluciones mediante el método analítico de la transformada de dispersión inversa (“inverse scattering transform”) [11, 12], tras demostrar la estructura Hamiltoniana completamente integrable de la dinámica representada por la ENLS [13–15]. La inclusión en la descripción de la evolución del pulso de cualquiera de los tres efectos a estudiar en este trabajo aparta la dinámica de tal estructura Hamiltoniana, razón por la cual la ENLS modificada resultante no es integrable analíticamente [16, 17]. No obstante, la pequeña magnitud de estos efectos hace posible considerarlos como perturbaciones al caso ideal, lo cual en sí permite tomarlos en cuenta únicamente como pequeñas modificaciones a la solución conocida de la ENLS no perturbada [18, 19].

Esta metodología comienza por asumir la conservación de la forma geométrica de la solución no perturbada ante cualquier dinámica, i.e. el ansatz secante hiperbólico del solitón temporal-brillante de primer orden, también conocido como “fundamental”, el cual pasa a estar escrito en términos de un conjunto de coordenadas colectivas que describen sus características primordiales en una situación particular dada [14]. La inclusión de las perturbaciones en la ENLS se reduce entonces a la búsqueda específica de las formas funcionales de estas coordenadas ante el efecto particular bajo estudio, esquema conocido como la dinámica adiabática de las coordenadas colectivas originalmente propuesto por A. E. Bondeson et al. en [18], a partir del estudio variacional con

base en el formalismo Lagrangiano clásico aplicado por G. B. Whitham a la ENLS en [20]. Esto conforma el fundamento de la metodología empleada en el presente Trabajo Especial de Grado para estudiar las consecuencias de las perturbaciones mencionadas sobre el solitón temporal-brillante fundamental.

Seguidamente, siendo la dinámica adiabática de las coordenadas colectivas no más que una aproximación analítica a un problema no integrable, el objetivo final de este Trabajo Especial de Grado fue buscar la confirmación de estas predicciones a través del análisis de los resultados de un estudio numérico que integre directamente la ENLS perturbada correspondiente. Si bien estas soluciones también se fundamentan en aproximaciones, esta vez de índole numérica, la ausencia en ellas de las características y/o limitaciones de un *ansatz* sirve para validar, o no, los resultados de la dinámica adiabática, los cuales están basados en la suposición de la conservación del *ansatz* secante hiperbólico del solitón temporal-brillante fundamental ante la presencia de las perturbaciones.

El método numérico escogido para el estudio fue el Split-Step de Fourier, dada la inherente relación que guarda con los problemas de naturaleza ondulatoria y la facilidad con la cual todas las ENLS perturbadas consideradas se re-escriben en la forma operacional necesaria para su aplicación. La variante “simetrizada” de su técnica fue empleada en búsqueda de la minimización del error numérico incurrido en su modelo matemático, a cambio de un incremento mínimo en el costo de cómputo de resultados de mayor precisión. Adicionalmente, esta precisión fue monitoreada en función de la conservación de la densidad de energía electromagnética del sistema físico modelado, lo cual es definido como el criterio de estabilidad numérica de las soluciones simuladas de la ENLS [3, 10, 21, 22].

En síntesis, este trabajo se encuentra organizado de la siguiente forma:

- Capítulo 1, Solitones y la Ecuación No-Lineal de Schrödinger:

- Explora brevemente el concepto de solitón y sus características primordiales como ente dinámico robusto, a través de un recuento resumido de la historia de las principales investigaciones en las distintas áreas de la Física en las cuales ha sido observado, junto a los modelos matemáticos de los cuales emerge;
 - seguidamente, presenta la Ecuación No-Lineal de Schrödinger como un modelo universal que gobierna la evolución de ondas monocromáticas y lentamente moduladas en medios dispersivos y con no-linealidad de tipo Kerr o relacionadas, en una amplia gama de sistemas físicos no limitados a los de ondas electromagnéticas;
 - volviendo al campo de la óptica no-lineal, detalla el estudio teórico usado por Hasegawa para deducir la ENLS como la dinámica de los pulsos ópticos ultra-cortos en las fibras de sílice [4];
 - finalmente, este primer capítulo estudia el solitón temporal-brillante fundamental como solución de la ENLS ante la condición de dispersión anómala.
- Capítulo 2, Ecuación No-Lineal de Schrödinger Perturbada:
 - Introduce la Ecuación No-Lineal de Schrödinger Perturbada como modelo para el estudio de dinámicas no integrables en las fibras de sílice;
 - explora las propiedades Hamiltonianas de la ENLS no perturbada, con el objetivo de deducir la dinámica adiabática de las coordenadas colectivas del solitón temporal-brillante fundamental;
 - realiza el estudio de la perturbación disipativa;
 - introduce el régimen de polarización no-lineal de orden superior, válido para solitones con anchos temporales menores a un pico-segundo:
 - * Realiza el estudio de la perturbación por efecto de auto-escarpado;
 - * finalmente, realiza el estudio de la perturbación por efecto de dispersión intra-pulso de Raman;

- Capítulo 3, Estudio Numérico:
 - Presenta el método split-step de Fourier simetrizado para el análisis numérico de la ENLS, haciendo un estudio del error inherente en su modelo matemático y de las condiciones necesarias para lograr la estabilidad numérica;
 - explica los requisitos físicos para lograr la inyección de pulsos ópticos que evolucionen al solitón temporal-brillante fundamental en las fibras de sílice;
 - realiza el estudio numérico de la ENLS no perturbada, como punto de partida para la comparación entre los resultados analíticos de la dinámica adiabática y los numéricos de las diversas perturbaciones;
 - realiza el estudio numérico de la ENLS perturbada por efecto de disipación energética;
 - realiza el estudio numérico de la ENLS perturbada por el efecto de orden superior de auto-escarpado;
 - finalmente, realiza el estudio numérico de la ENLS perturbada por el efecto de orden superior de dispersión intra-pulso de Raman;
- Conclusiones:
 - Se presentan las principales conclusiones de este Trabajo Especial de Grado, haciendo énfasis en la comparación entre los resultados analíticos aproximados de la dinámica adiabática de las coordenadas colectivas para las diversas perturbaciones y los numéricos correspondientes por análisis de split-step de Fourier simetrizado.

Solitones y la Ecuación No-Lineal de Schrödinger

1.1. Solitones y sus Orígenes

El estudio de ondas solitarias como entes altamente localizados y robustos, con fuertes tendencias a preservar su forma y velocidad de propagación incluso ante interacciones con el medio de propagación y/u otras ondas solitarias similares, comienza de forma indirecta en el año 1834 a partir de las observaciones del ingeniero escocés John Scott Russell, quien trabajaba en el “Union Canal” (cercano a Edimburgo) en el área de Ingeniería Naval. En un experimento, cuyo propósito era medir la relación entre la fuerza de propulsión de una embarcación y su velocidad resultante, una falla en el mecanismo que hizo detener abruptamente a la embarcación dio origen a la propagación de una masa de agua que “se desplazó hacia adelante con gran velocidad, asumiendo la forma de una gran elevación solitaria, un redondeado, liso y bien definido montículo de agua, que continuó su curso a lo largo del canal sin cambio de forma ni disminución de velocidad” [23].

Scott Russell no ignoró este fenómeno, atribuyéndole en cambio gran importancia y dedicación en sus estudios, tras bautizarlo con el nombre “Great Solitary Wave”. En

varios trabajos en tanques y canales de agua durante la década siguiente, demostró que la onda solitaria era un ente dinámico independiente con cuatro propiedades básicas [23]:

- una forma $h \operatorname{sech}^2[\kappa(x - vt)]$, donde h era la amplitud de la onda (“height”) por sobre la superficie del agua en reposo y v su velocidad de desplazamiento.
- una masa inicial de agua lo suficientemente grande podía llegar a producir dos o más ondas solitarias independientes.
- distintas ondas solitarias podían cruzarse (colisionar) sin presentar cambio alguno en sus propiedades.
- una onda solitaria de amplitud h , en un canal de profundidad d (“depth”), y con una medición de gravedad g , se propagaba a una velocidad $v = \sqrt{g(d + h)}$, sugiriendo que ondas de mayor amplitud se propagarían a mayor velocidad.

Una descripción matemática de estas observaciones no se descubrió formalmente sino hasta 1895, cuando D. Korteweg y G. de Vries, basándose principalmente en estudios previos de J. Boussinesq y Lord Rayleigh en 1871 [24], publicaron una teoría de ondas de aguas poco profundas que intentaba reducir los descubrimientos de Scott Russell a sus fundamentos, produciendo la conocida ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) para un pulso u en un medio de tensión superficial T y densidad ρ [25]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \gamma u \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

donde $c = \sqrt{gd}$ (velocidad de la propagación del pulso),

$$\varepsilon \equiv c \left(\frac{d^2}{6} - \frac{T}{2\rho g} \right) \quad (\text{parámetro dispersivo}),$$

$$\gamma \equiv \frac{3c}{2d} \quad (\text{parámetro no-lineal}).$$

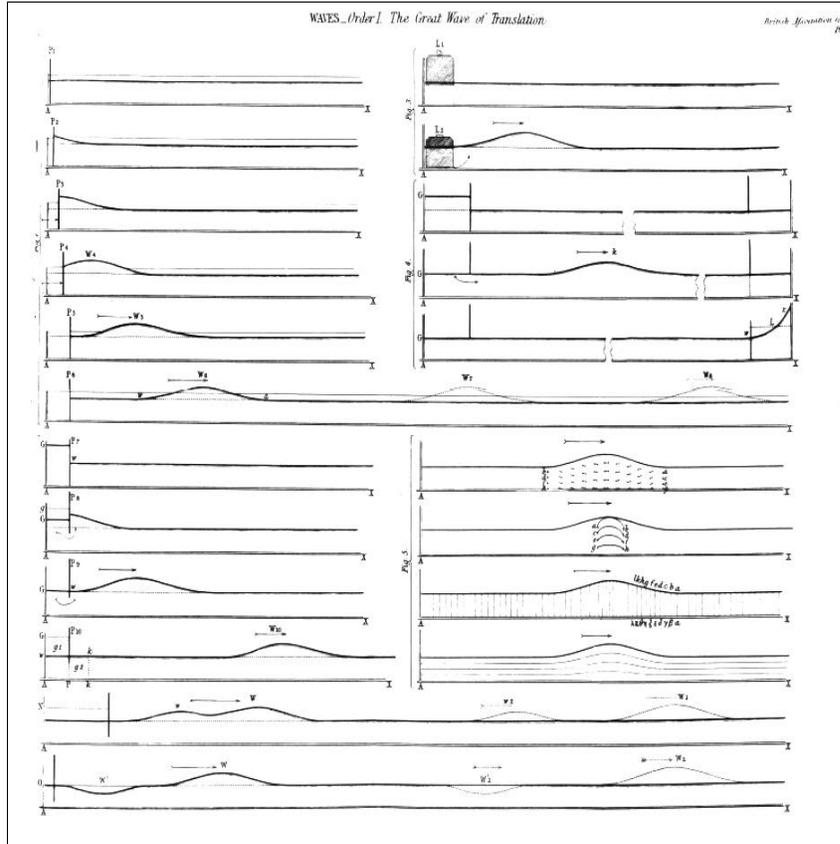


Figura 1.1: Esquemática de los tanques de estudio de John Scott Russell.

La cual posee una familia de soluciones en forma de onda viajera:

$$u(x, t) = u(x - vt) \propto \text{sech}^2[\kappa(x - vt)] ,$$

donde $\kappa = \sqrt{\gamma h / 12\varepsilon}$, demostrando así la relación inversa entre la amplitud de las ondas solitarias y su ancho. También quedó demostrado el balance existente entre la influencia de los efectos dispersivos representados por ε , que tienden a esparcir el pulso, y los no-lineales representados por γ , que tienden a comprimirlo, lo cual produce como resultado la preservación de su forma y demás propiedades a lo largo de la propagación, dándole prominencia a su carácter de entidad dinámica independiente [26, 27].

Estos “pulsos” fueron re-bautizados bajo el término *solitones* en 1965 por N. Zabusky y M. Kruskal, tras sus trabajos en simulaciones numéricas sobre la ecuación de

KdV en base a la dinámica de un conjunto de muelles ligeramente no-lineales y acoplados, los cuales modelaban la conducción térmica de una red cristalina (problema de equipartición de energía de Fermi, Pasta y Ulam) [27]. El comportamiento de las soluciones ondulatorias estables que encontraron, en particular la confirmación que éstas preservaban su forma y velocidades después de la colisión entre dos de ellas (colisiones elásticas), los llevó a sugerir el término “solitón”, enfatizando así sus similitudes con partículas reales y calificándolas de “quasi-partículas” [7, 11, 28].

Hoy en día, el concepto de solitón es ampliamente usado para describir la solución de una EDP no-lineal que presenta las características previamente descritas de (i) estabilidad, (ii) robustez, (iii) fuerte localización espacial y (iv) tendencia a preservar su forma y velocidad al interactuar con otras de su tipo y/o el medio de propagación. Otra característica básica de los solitones es la interdependencia entre sus propiedades fundamentales: amplitud, ancho, frecuencia, velocidad, fase, etc.

El primer trabajo en demostrar que la presencia de solitones no se limitaba a sistemas de ondas de agua fue el de Y. I. Frenkel y T. A. Kontorova en 1939 en el área de la física del estado sólido, modelando la relación entre las deformaciones plásticas en cristales y la dinámica de sus dislocaciones, produciendo finalmente como resultado la conocida ecuación Seno de Gordon que gobierna las variaciones espaciales y temporales de un desplazamiento atómico $u(x, t)$ en función de la periodicidad en la red cristalina [27]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sin u .$$

A partir de este punto, las áreas de la Física en las cuales el estudio de solitones ha cobrado importancia son variadas, extendiéndose desde la hidrodinámica clásica hasta el electromagnetismo aplicado, la física del plasma y una gran cantidad de sistemas cuánticos y semiclásicos. La característica primordial compartida por todos ellos es una interacción entre efectos lineales y no-lineales que no puede ser ignorada en la descripción de la evolución de sus soluciones

Entre los ejemplos más conocidos de EDPs no-lineales que poseen soluciones solitónicas se encuentran: la ya mencionada ecuación de KdV y relacionadas, e.g. ecuación de Kadomtsev-Petviashvili (también conocida como la KdV en dos dimensiones) y las ecuaciones de Boussinesq y de Burger; la ecuación Seno de Gordon y otras extensiones no-lineales de la ecuación de Klein-Gordon, e.g. el modelo φ^4 y la ecuación Doble Seno de Gordon; y las que se clasifican dentro del grupo tipo Schrödinger, como la ecuación de Ginzburg-Landau, la de Ginzburg-Gross-Pitaevskii y la No-Lineal de Schrödinger [26, 27, 29], esta última ampliamente usada en la descripción de ondas lentamente moduladas y en el campo de las telecomunicaciones ópticas no-lineales [4, 6], cuyas soluciones en este último contexto son objeto central de estudio del presente trabajo.

1.2. Ecuación No-Lineal de Schrödinger

1.2.1. Universalidad

La Ecuación No-Lineal de Schrödinger (ENLS) es una EDP compleja que emerge en una gran cantidad de ámbitos de la naturaleza, al describir de forma genérica la evolución espacio-temporal de un paquete de onda plano, lentamente modulado y cuasi-monocromático que se propaga uni-direccionalmente en un medio dispersivo, no disipativo (conservativo) y débilmente no-lineal [26, 30]. Por esta razón se le considera una ecuación *universal*, con áreas de aplicación tan variadas como el estudio de ondas de aguas profundas en el océano, la acústica no-lineal, teorías macroscópicas de superconductividad, teorías de superfluidez en condensados de Bose-Einstein de bajas temperaturas, auto-enfoque y colapso de ondas Langmuir en plasmas y propagación de pulsos ópticos en fibras no-lineales [11, 12, 16, 17, 27, 30, 31], entre otras.

Su forma prototípica para un frente de onda escalar y continuo es:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta \nabla^2 \psi + V(|\psi|^2) \psi = 0, \quad (1.1)$$

donde ψ es el frente que se propaga a un tiempo t y en una dirección espacial (e.g. z), con posibles modos de oscilación en las direcciones transversales y bajo los efectos de una función V , análoga a un potencial en el contexto de la mecánica cuántica. La no-linealidad del medio que da origen a los efectos de compresión del frente se encuentran descritos por esta función, que es generalmente dependiente del cuadrado del módulo de la onda en estudio [8, 17]. El parámetro β a su vez representa los efectos de dispersión que el medio de propagación genera sobre el frente, dando lugar en una gran cantidad de casos a una relación de dispersión Ω que depende también del cuadrado del módulo de la onda y del número de onda κ [17]:

$$\Omega = \Omega(\kappa, |\psi|^2).$$

La ecuación (1.1) fue originalmente estudiada en contextos distintos a la mecánica cuántica y en 2+1 dimensiones por V. E. Zakharov en 1961, en sus estudios de modulaciones lentas de grupos de ondas de agua a partir de las ecuaciones de Euler-Bernoulli de la dinámica de un fluido ideal (i.e. incompresible, irrotacional y de viscosidad cero). Para estas ondas, y bajo la suposición de una propagación cuasi-monocromática, la amplitud de la modulación satisface una ENLS bajo ciertas condiciones de profundidad vs. longitud de onda [32, 33].

En el ámbito de la óptica no-lineal, el área de la Física que se ocupa primordialmente del estudio del comportamiento de ondas electromagnéticas en medios ópticos de respuesta no-lineal, la ENLS cobra especial importancia tras el trabajo de V. I. Talanov [34] y por el de R. Y. Chiao, E. Garmire y C. H. Townes [35], los cuales demostraron la conexión de la ENLS con los fenómenos de auto-enfoque (“self-focusing”) de ondas electromagnéticas bajo condiciones particulares del medio y con el de propagación de “paquetes” que preservan su forma a manera de una *envolvente* o modulación lenta.

No obstante, el interés en ecuaciones similares a (1.1) en sus contextos más tradicionales mecánico-cuánticos queda enfatizado por ejemplo en los trabajos sobre teoría

macroscópica de superconductividad de V. Ginzburg y L. Landau, que dieron origen a la conocida ecuación de “Ginzburg-Landau Compleja”, escrita en su forma normalizada [36]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = A + (1 + i\alpha) \nabla^2 A - (1 + i\gamma) |A|^2 A,$$

donde A es una función compleja del tiempo t y espacio \vec{r} , de la cual depende la densidad de corriente de superconducción \vec{J} . Los parámetros reales α y γ caracterizan los coeficientes lineales y no-lineales de dispersión [36].

También resaltan los estudios de L. Pitaevskii y E. P. Gross a principios de los años 60, quienes trabajaron en teorías de superfluidez en condensados de Bose-Einstein de muy baja temperatura, para los cuales el sistema entero de bosones, bajo ciertas aproximaciones, puede ser descrito por una sola función de onda $\psi_o(\vec{r}, t)$ por encontrarse todos en el mismo estado cuántico base [37]:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_o(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_o(\vec{r}, t) + [V(\vec{r}) + U_o |\psi_o(\vec{r}, t)|^2] \psi_o(\vec{r}, t),$$

donde la función $V(\vec{r})$ es el potencial debido a un campo magnético externo, y $U_o = 4\pi\hbar a_s/m$ y a_s representan respectivamente el potencial y distancia característica de la aproximación de un condensado lo suficientemente diluido, en el cual el potencial de dispersión a larga distancia es reemplazado por el de interacción entre partículas a corta distancia como dinámica principal, dando así origen a la no-linealidad de la ecuación [37].

Este vasto rango de aplicaciones de la ENLS o ecuaciones relacionadas que preservan la forma prototípica de (1.1), como la de Ginzburg-Landau y la Gross-Pitaevskii, enfatiza su carácter universal en la descripción de paquetes de onda lentamente modulados en medios dispersivos y débilmente no-lineales.

1.2.2. Óptica No-Lineal

En el ámbito de la óptica no-lineal, la ENLS es usada para describir la propagación de ondas electromagnéticas a través de fibras ópticas dispersivas y no homogéneas que, ante el estímulo del campo eléctrico de la onda misma, manifiestan una respuesta no-lineal en su constante dieléctrica ε , lo cual puede llegar a modificar considerablemente la evolución del perfil de onda. Un material muy común en la construcción de estas fibras es el silicio, dadas sus propiedades electromagnéticas óptimas para la transferencia de pulsos lumínicos dentro de rangos específicos de longitudes de onda.

Para una onda lumínica monocromática y con longitud de onda λ en el rango $(0,5 - 2) \mu m$, que se propaga a través de una fibra óptica con densidad de cargas libres ρ_f , densidad de corriente \vec{J} y polarización magnética \vec{M} nulas (i.e. $\rho_f = 0$ y $\vec{J} = \vec{M} = \vec{0}$), y que además preserva la polarización del frente de onda, su campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ queda descrito por la ecuación de Maxwell resultante [1]:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_o \frac{\partial^2 \vec{P}_L}{\partial t^2} + \mu_o \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2}, \quad (1.2)$$

donde los términos \vec{P}_L y \vec{P}_{NL} son las componentes lineal y no-lineal de polarización eléctrica del medio isotrópico, relacionadas con el campo eléctrico a través de las susceptibilidades eléctricas de primer y tercer orden, $\chi^{(1)}$ y $\chi^{(3)}$ respectivamente, bajo las aproximaciones de respuesta local al campo eléctrico aplicado [7] y debilidad relativa de los efectos no-lineales. Esto permite tratar a \vec{P}_{NL} como una pequeña perturbación a \vec{P}_L , quedando expresada como el producto tensorial [1, 7, 17]:

$$\vec{P}_{NL} = \varepsilon_o \chi^{(3)} : \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (1.3)$$

La solución para la ecuación (1.2), en el caso de una fibra en forma de guía de onda plana y bajo la aproximación de modulaciones lentas, es un campo con polarización fija en una dirección transversal a la de propagación \hat{z} , e.g. \hat{x} [7, 8]:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\hat{x}}{2} \left[E(\vec{r}, t) e^{-i\omega_o t} + cc \right]. \quad (1.4)$$

Esta última condición hace posible el tratamiento escalar del campo que se desplaza a una frecuencia central ω_o , la *frecuencia portadora*, en torno a la cual el espectro de frecuencias presentes en el paquete se encuentra altamente concentrado debido a la condición de monocromaticidad, es decir, $\omega_o \gg \Delta\omega$. Esto, junto al carácter perturbativo de \vec{P}_{NL} sobre \vec{P}_L [1], permite pasar al espectro de frecuencias y trabajar con un campo $\mathcal{E}(\vec{r}, \omega - \omega_o)$ que se define como la transformada de Fourier de $E(\vec{r}, t)$ centrada en ω_o :

$$\mathcal{E}(\vec{r}, \omega - \omega_o) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\vec{r}, t) e^{i(\omega - \omega_o)t} dt .$$

De aquí se encuentra que $\mathcal{E}(\vec{r}, \omega - \omega_o)$ satisface la ecuación de Helmholtz homogénea para la propagación de la onda en el medio descrito [1]:

$$\nabla^2 \mathcal{E} + \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{E} = 0 . \quad (1.5)$$

El factor $\varepsilon(\omega)$ en (1.5) es la constante dieléctrica que encapsula la respuesta no-lineal del medio ante la presencia de campos de altas intensidades. Se caracteriza por ser compleja y dependiente del espectro de frecuencias presentes, i.e. presenta *dispersión cromática*, con su parte real relacionada al índice de refracción modificado \tilde{n} y la imaginaria al de absorción $\tilde{\alpha}$, a través de la definición [1, 7, 38, 39]:

$$\varepsilon(\omega) = \left[\tilde{n}(\omega) + i \frac{\tilde{\alpha}c}{2\omega} \right]^2 , \quad (1.6)$$

donde

$$\tilde{n}(\omega, |\mathbf{E}|) = n_o(\omega) + n_2 |\mathbf{E}|^2 . \quad (1.7)$$

La relación (1.7) viene de la definición del *Efecto Kerr Óptico*, en el cual el índice de refracción total del medio \tilde{n} experimenta una variación neta por sobre el índice natural y lineal $n_o(\omega)$ debido a las oscilaciones no armónicas de los electrones ligados del material, lo cual constituye la respuesta no-lineal y adiabática (instantánea) del

medio a la intensidad del campo aplicado (i.e. proporcional al cuadrado de su módulo) [16, 17, 29, 38]. El coeficiente n_2 es conocido como el *coeficiente de Kerr*, determinado a partir de la susceptibilidad eléctrica de tercer orden del medio [7].

En los medios ópticos que son de interés para el estudio de la ENLS en el área de la óptica no-lineal, descritos aceptablemente por una respuesta del tipo (1.7) y generalmente conocidos como *medios con no-linealidad de Kerr*, o simplemente *medios de Kerr* [7], las pérdidas por los efectos de absorción descritos por $\tilde{\alpha}$ son considerablemente bajas, hasta el punto de poder ser ignoradas en comparación a la parte real de $\varepsilon(\omega)$ e incorporadas posteriormente como una perturbación a la evolución conservativa del frente de onda. En base a esto, la ecuación de Helmholtz (1.5) puede ser aproximada a una forma simplificada que contiene sólo el término de interés:

$$\nabla^2 \mathcal{E} + \tilde{n}^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{E} = 0. \quad (1.8)$$

Cuando el frente de onda que se propaga por la fibra se puede describir inicialmente como un pulso “ultra-corto”, con un ancho inicial T_0 que puede ir desde los 10 ns ($10 \times 10^{-9}s$) hasta los 10 fs ($10 \times 10^{-15}s$) [8], la solución general de la ecuación (1.8) se puede expresar como una onda portadora, con número de onda $\beta_0 = n_0 \omega_0 / c$, que se compone de una distribución de modos transversales soportados por la guía, $F(x, y)$, y una envolvente Ψ de lenta variación que modula en amplitud a los modos a lo largo de la propagación del pulso por la fibra [1]:

$$\mathcal{E}(\vec{r}, \omega - \omega_0) = F(x, y) \Psi(z, \omega - \omega_0) e^{i\beta_0 z}. \quad (1.9)$$

Al insertar este resultado en la expresión (1.4) para el campo eléctrico del perfil de onda, se ve que éste adopta la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\hat{x}}{2} \left[F(x, y) \psi(z, t) e^{i(\beta_0 z - \omega_0 t)} + cc \right], \quad (1.10)$$

con

$$\psi(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(z, \omega - \omega_0) e^{-i(\omega - \omega_0)t} d\omega.$$

La función $\psi(z, t)$ representa la transformada de Fourier de Ψ en base a la frecuencia central ω_o , y es conocida como la *envolvente temporal* que modula lentamente y confina en el tiempo al pulso $\vec{E}(\vec{r}, t)$ que se encuentra confinado de por sí en las direcciones transversales a la de propagación z debido a las restricciones impuestas por la guía de onda [7, 8], descritas por la distribución $F(x, y)$.

Por tanto, la evolución de $\psi(z, t)$ a lo largo de la fibra es lo que determina el comportamiento de estos pulsos “auto-confinados” que dan origen a los *solitones modulados* en medios de Kerr, del tipo *temporal* cuando se comienza con pulsos ultracortos, en comparación a los *solitones espaciales* que se obtienen cuando el frente de onda que entra en una fibra de características apropiadas es en la forma de ondas continuas [7]. Se puede demostrar que la evolución de $\psi(z, t)$, bajo las aproximaciones ya descritas de (i) monocromaticidad del frente, (ii) modulaciones espaciales lentas y (iii) no-linealidad débil de Kerr, obedece una ENLS en 1 + 1 dimensiones, escalar y continua.

Volviendo sobre la ecuación de Helmholtz (1.5) y aplicándola a la forma del pulso (1.9), se encuentra que $\Psi(z, \omega - \omega_o)$ satisface la ecuación diferencial [1]:

$$i2\beta_o \frac{\partial \Psi}{\partial z} = - [\beta^2(\omega) - \beta_o^2] \Psi, \quad (1.11)$$

con

$$\kappa^2(\omega) = \beta^2(\omega) = \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (1.12)$$

En la cual se definió la relación de dispersión no-lineal $\beta(\omega)$ para un medio isotrópico, todavía desconocida, y se ignoró el término de segundo orden sobre Ψ por su pequeña magnitud en comparación a la variación de primer orden, dada la aproximación de variación lenta de la envolvente [7]:

$$\left| \beta_o \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right|.$$

Debido a la condición de monocromaticidad, $\omega_o \gg \Delta\omega$, es posible expandir $\beta(\omega)$ en una serie de Taylor en torno a la frecuencia central ω_o , con los términos de tercer orden y superiores aceptablemente condensados en un término β_{nl} que agrupa los efectos de no-linealidad y pérdidas en la fibra (disipación), los cuales quedan incluidos en la expansión de $\beta(\omega)$ a través de la relación de dispersión (1.12) y la definición de $\varepsilon(\omega)$ (1.6) [1, 8]:

$$\beta(\omega) = \beta_o + (\omega - \omega_o) \beta_1 + \frac{(\omega - \omega_o)^2}{2} \beta_2 + \beta_{nl}, \quad (1.13)$$

donde

$$\beta_m = \left. \frac{d^m \beta(\omega)}{d\omega^m} \right|_{\omega=\omega_o}.$$

Por su parte, la debilidad relativa de los efectos no-lineales del medio de Kerr permite tratar a los términos de primer orden y superiores en la expansión de $\beta(\omega)$ como pequeñas perturbaciones $\Delta\beta$ al número de onda natural y no dispersivo β_o [1, 7, 8]:

$$\beta(\omega) = \beta_o + \Delta\beta(\omega)$$

y por lo tanto:

$$\beta^2(\omega) - \beta_o^2 = [\beta(\omega) - \beta_o] [\beta(\omega) + \beta_o] \approx 2\beta_o \Delta\beta(\omega) \quad \text{puesto que } |\beta_o| \gg |\Delta\beta(\omega)|.$$

En conjunto, todas estas consideraciones llevan la EDP (1.11), que gobierna la evolución de la envolvente Ψ en la fibra, a una forma que ilustra claramente una de las características primordiales del comportamiento del pulso durante su propagación: un cambio de fase en cada una de sus componentes espectrales que depende de la frecuencia y de la intensidad del pulso [1], lo cual resulta en primera instancia en su dispersión espectral:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = i\Delta\beta(\omega) \Psi \quad \longrightarrow \quad \Psi(\omega) \propto e^{i\Delta\beta(\omega)z}.$$

1.2. Ecuación No-Lineal de Schrödinger

Nuevamente, las características del medio de Kerr permiten encontrar una expresión para el término β_{nl} en la expansión de $\beta(\omega)$, en base a una aproximación sobre la definición de la constante dieléctrica $\varepsilon(\omega)$ (1.6) que separa los efectos no-lineales y disipativos del índice natural de refracción n_o , siendo este último el que predomina [1]:

$$\varepsilon(\omega) \approx n_o^2(\omega) + 2n_o(\omega) \Delta n,$$

por lo tanto:

$$\beta_{nl} = 2n_o(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \Delta n,$$

donde

$$\Delta n = n_2 |E|^2 + i \frac{\tilde{\alpha} c}{2\omega}.$$

Pasando nuevamente al dominio del tiempo para describir la dinámica de $\psi(z, t)$, y reemplazando los factores $(\omega - \omega_o)$ por el operador $i(\partial/\partial t)$ equivalente en la transformada de Fourier, el factor $\Delta\beta$ queda finalmente expresado como:

$$\Delta\beta = i\beta_1 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \gamma |\psi|^2 + i \frac{\alpha}{2},$$

y por lo tanto:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} = -i\beta_1 \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \gamma |\psi|^2 \psi - i \frac{\alpha}{2} \psi, \quad (1.14)$$

con

$$\text{con } \gamma = \frac{\omega_o n_2}{c A_{\text{eff}}} = \frac{2\pi n_2}{\lambda_o A_{\text{eff}}}. \quad (1.15)$$

El factor A_{eff} , conocido como el *área efectiva* del núcleo, es un parámetro característico de la fibra que se adapta artificialmente para producir la intensidad promedio del pulso apropiada para la formación de los solitones temporales, cuando su potencia de entrada P_o es dividida entre él. Depende de características físicas del medio, principalmente del radio de la fibra y la diferencia de índices de refracción entre el centro

y su revestimiento (“core-cladding index difference”) y por tanto de la distribución de modos $F(x, y)$ soportada la fibra [1, 8]. De esta forma, el *coeficiente de no-linealidad de Kerr* del medio, γ , queda definido como la relación entre su índice de refracción no-lineal n_2 y el producto entre la longitud de onda λ_o del pulso y el área efectiva.

Dos simplificaciones importantes de la dinámica de la envolvente descrita por la ecuación (1.14) se consiguen, primero, al tomar en consideración el caso de disipación despreciable durante la propagación del pulso, como se consideró en la ecuación de Helmholtz reducida (1.8) donde $\varepsilon(\omega) \approx \tilde{n}(\omega)$; y segundo al trasladar las mediciones de la evolución temporal desde la variable de laboratorio t a un sistema que se mueve con el pulso a la velocidad de grupo V_g correspondiente a la frecuencia central ω_o , el conocido *sistema retardado*, el cual mantiene al pulso siempre en vista y por ende permite describir directamente los cambios que experimenta en su propagación. En el primer caso, el factor de disipación $\tilde{\alpha}$ es igual a cero y para el segundo se introduce una nueva variable temporal:

$$T = t - \frac{z}{V_g}. \quad (1.16)$$

Estos últimos cambios finalmente demuestran que la dinámica de la envolvente ψ obedece una ENLS continua, escalar y en $1 + 1$ dimensiones, la cual describe su evolución a medida que se propaga en el eje axial z de una fibra de Kerr con coeficiente de no-linealidad γ y a un tiempo retardado T :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} + \gamma |\psi|^2 \psi = 0. \quad (1.17)$$

La ecuación (1.17) es formalmente conocida como *de tipo* No-Lineal de Schrödinger, por presentar invertidos los roles de las variables temporal y espacial con respecto a la forma más común de la ENLS (1.1). No posee ninguna relación con fenómenos cuánticos en su descripción de la evolución de la envolvente ψ ; no obstante, la analogía con este campo de la Física es útil, puesto que el término no-lineal es equivalente a

un pozo potencial que da lugar a soluciones ligadas de “quasi-partículas” con masa equivalente $m = \beta_2/2$, los solitones en sí [8, 13].

Los coeficientes β_1 y β_2 , altamente dependientes de las características del medio, son de gran importancia en la evolución del pulso, dada la relación que ellos guardan con los efectos de dispersión lineal que el medio ejerce sobre él. Partiendo de la expansión de Taylor (1.13) y de la forma de la relación de dispersión $\beta(\omega)$:

$$\beta_1 = \left. \frac{d\beta(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_o} = \frac{1}{c} \left[\tilde{n}(\omega) + \omega \frac{d\tilde{n}(\omega)}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_o} = \frac{n_g}{c}, \quad (1.18)$$

donde n_g representa el *índice de refracción de grupo* [1] y por ende, de la definición general de velocidad de una onda en un medio $v = c/n$, β_1 queda definida como el inverso de la velocidad de grupo del pulso:

$$\beta_1 = \frac{1}{V_g}$$

y por lo tanto:

$$T = t - \beta_1 z.$$

Análogamente por la expansión de Taylor, β_2 se relaciona con las variaciones en esta velocidad con respecto a las diferentes componentes espectrales presentes en el no nulo ancho de banda $\Delta\omega$, dada la dependencia sobre la frecuencia del índice de refracción de la fibra [1]:

$$\beta_2 = \left. \frac{d^2\beta(\omega)}{d\omega^2} \right|_{\omega=\omega_o} = \left. \frac{d\beta_1}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_o}$$

y por lo tanto:

$$\beta_2 = \frac{1}{c} \left[2 \frac{d\tilde{n}(\omega)}{d\omega} + \omega \frac{d^2\tilde{n}(\omega)}{d\omega^2} \right]. \quad (1.19)$$

Esto conlleva a la dispersión temporal del pulso ya que las diferentes componentes espectrales se propagan a diferentes velocidades de grupo (efecto de dispersión cromática). Por esta razón β_2 es conocido como el parámetro de *Dispersión de Velocidad de Grupo* o “GVD” por sus siglas en Inglés, fenómeno que de actuar por sí solo tendría la tendencia a esparcir o contraer el pulso en el tiempo, modificando así el perfil de intensidad de la envolvente $|\psi|$ durante su propagación, pero dejando intacto el espectro de frecuencias $\Delta\omega$ excepto por un cambio de fase en cada componente espectral, dependiente de la frecuencia en sí de la componente y de la distancia propagada [1, 7, 8].

El signo positivo o negativo de β_2 determina el tipo de dispersión presente en el medio, normal o anómala respectivamente. Para un λ_D característico a una fibra particular, conocido como su longitud de onda de *dispersión cero*, el parámetro β_2 correspondiente es igual a cero, pasando a ser positivo para longitudes de onda $\lambda < \lambda_D$ y negativo cuando $\lambda > \lambda_D$.

El régimen de *dispersión anómala*, $\beta_2 < 0$, es de primordial importancia en la formación de los solitones temporales en el medio de Kerr, ya que es bajo esta condición particular que el pulso experimenta el conocido fenómeno de *auto-modulación de fase* (o “self-phase modulation” en Inglés), el cual se debe a la dependencia del índice de refracción del medio sobre la intensidad (1.7). De actuar por sí solo sobre la envolvente, la auto-modulación de fase tendería a dispersar su espectro de frecuencias $\Delta\omega$ ante la creación de nuevas componentes espectrales durante la propagación junto con la alteración de la fase de éstas, mas sin modificar el perfil de intensidad $|\psi|$ en el dominio temporal [1, 7, 8].

Es el balance delicado entre los fenómenos de dispersión de velocidad de grupo y auto-modulación de fase, al actuar en conjunto sobre el pulso óptico, lo que hace posible la formación del solitón temporal dentro del medio de Kerr, debido a la cancelación mutua e instantánea de sus efectos sobre la envolvente ψ , dejándola solamente con un

cambio de fase neto y común a los dos fenómenos, dependiente de la distancia recorrida [1, 7, 8].

Visto desde el dominio temporal, el esparcimiento de la envolvente como consecuencia de las distintas velocidades de cada componente espectral es exactamente balanceado de forma instantánea (i. e. punto a punto en intervalos dz) por la alteración del espectro de frecuencias causado por la auto-modulación de fase, lo cual genera nuevas velocidades tales que mantienen al pulso propagándose sin distorsionarse ni alterar su forma a través de la fibra [8].

El primer trabajo que sugirió la existencia de estos solitones temporales en fibras de Kerr con una distribución $F(x, y)$ uni-modal y en el régimen de dispersión anómala fue el de A. Hasegawa et al., como resultado de sus investigaciones en el campo de las telecomunicaciones y la óptica no lineal [4, 8]. Hasegawa se basó en las investigaciones de V. E. Zakharov et al. que trataron sobre las propiedades matemáticas de la ENLS relacionada [6]:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \pm |\psi|^2 \psi = 0. \quad (1.20)$$

Zakharov resolvió esta ecuación por el método analítico de la *transformada de dispersión inversa*, conocido como el “inverse scattering transform” en Inglés y comúnmente descrito como un análogo no-lineal de la transformada de Fourier, determinando que para el signo positivo del término no-lineal, equivalente a la dispersión anómala en medios de Kerr, sus soluciones se manifestaban como paquetes robustos de ondas que modulan a un grupo de modos de oscilación [1, 8, 11, 15–17, 26, 33]. Estas soluciones son los “*solitones brillantes*” (“bright solitons”) de la fibra, llamados de esta forma debido al perfil de intensidad $|\psi|$ no nulo que se propaga de forma altamente localizada y tiende a cero rápidamente en el infinito, y cuyas perturbaciones es objeto de estudio en el presente trabajo.

El caso antagónico, los “*solitones oscuros*” (“dark solitons”), se forman en el régimen de dispersión normal (i.e. $\beta_2 > 0$) o ante el signo negativo del término no-lineal en la ENLS equivalente (1.20), y se manifiestan como huecos de intensidad que se propagan sin distorsión ante un fondo continuo de radiación electromagnética que no tiende a cero en el infinito [1, 7, 8, 11, 26].

1.2.3. Solitones Brillantes de la ENLS Normalizada

La ENLS (1.20), que se encuentra escrita en forma adimensional y normalizada, es *integrable* por el método de la transformada de dispersión inversa, según fue demostrado por Zakharov [6]. El proceso análogo para la ENLS (1.17) que gobierna la evolución de la envolvente ψ en el medio de Kerr comienza por definir un nuevo grupo de variables que la normalizan equivalentemente.

Se introducen los factores T_o y L_D , definidos como el ancho temporal inicial del pulso y la *longitud de dispersión*, respectivamente. El primero es característico al pulso en sí, mientras que el segundo es dependiente de un parámetro de dispersión de velocidad de grupo β_2 dado y por ende característico a la fibra correspondiente. Se entiende como la longitud a la cual los efectos de la dispersión pasan a ser prominentes en la evolución del pulso y no pueden ser ignorados, e.g. la distancia a la cual un perfil Gaussiano de entrada se esparciría por un factor de $\sqrt{2}$ por sobre su ancho inicial al ignorarse los efectos de auto-modulación de fase [1, 8, 40]. Matemáticamente, L_D se define como:

$$L_D = \frac{T_o^2}{|\beta_2|}. \quad (1.21)$$

La adimensionalidad de la ENLS (1.17) se consigue en primera instancia al definir variables τ y ξ que normalizan a T y z respectivamente contra estos nuevos factores:

$$\tau = \frac{T}{T_o}$$

y

$$\xi = \frac{z}{L_D}.$$

Seguidamente, teniendo ahora una envolvente $\psi(\xi, \tau)$ en función de las nuevas variables, se pasa a una nueva envolvente $U(\xi, \tau)$ que se define normalizada con respecto a la potencia de entrada del pulso, P_o :

$$P_o = |\psi(\xi, \tau)|^2 \Big|_{\xi=0}$$

y por lo tanto:

$$U(\xi, \tau) = \frac{\psi(\xi, \tau)}{\sqrt{P_o}}.$$

La definición de esta nueva envolvente facilita apreciar la transformación de la ecuación (1.14) al sistema retardado definido en (1.16), dada las dependencias de las variables normalizadas con respecto a las físicas:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{1}{L_D} \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\beta_1}{T_o} \frac{\partial U}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{T_o} \frac{\partial U}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{1}{T_o^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}.$$

Incorporar todos estos cambios en la ecuación (1.14) lleva al sistema a ser gobernado por una ENLS que contiene un par de cambios adicionales, uno de ellos subrayando las consecuencias fundamentales que la “magnitud del balance” entre los efectos dispersivos y los no-lineales tiene sobre las soluciones de la ecuación:

$$i \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + N^2 |U|^2 U = 0.$$

1.2. Ecuación No-Lineal de Schrödinger

El factor N es conocido como el *orden del solitón*. Matemáticamente, su cuadrado se define como el cociente entre la longitud de dispersión y la *longitud no-lineal* L_{NL} [1, 8]:

$$N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}} = \frac{\gamma P_o T_o^2}{|\beta_2|}, \quad (1.22)$$

donde

$$L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_o}. \quad (1.23)$$

Equivalente a L_D , la longitud no-lineal describe la escala de distancia a la cual los efectos de auto-modulación de fase pasan a ser prominentes en la evolución del pulso y no pueden ser ignorados a través de aproximaciones, e.g la distancia a la cual el cambio de fase del pulso es igual a un radian al ignorarse los efectos de dispersión de velocidad de grupo debidos a β_2 .

El valor numérico de N no solo es de crucial importancia al momento de determinar la forma de la solución de la ENLS por el rol que juega dentro del método de la transformada de dispersión inversa [1, 8, 11, 17], sino que también ofrece una visión aproximada de los tres posibles regímenes de evolución del pulso dentro de la fibra:

- si $N \ll 1$, los efectos de dispersión debidos a β_2 cobran importancia considerablemente más temprano que los efectos de auto-modulación de fase debidos a γ , puesto que $L_D \ll L_{NL}$ y la evolución del pulso se puede describir como netamente dispersiva.
- si por el contrario $N \gg 1$, los efectos no-lineales de γ dominarán la evolución ya que $L_{NL} \ll L_D$, y el pulso tenderá a esparcirse constantemente en el dominio de frecuencias considerablemente antes que la dispersión de velocidad de grupo entre en efecto.

- finalmente, si $N \approx 1$ los efectos debido a β_2 y γ alternarán la evolución del pulso aproximadamente al mismo tiempo, puesto que $L_{NL} \approx L_D$, dándose así el balance necesario entre los dos fenómenos para la formación del solitón brillante que se propaga en la fibra sin distorsión temporal ni espectral.

El orden del solitón puede ser abstraído del tratamiento de la ENLS a través de un último cambio de variables que define una envolvente $u(\xi, \tau)$, la cual absorbe a N y por ende representa una solución genérica de una ecuación adimensional y generalizada para cualquier orden de solitón [1]:

$$u = NU \quad \Longrightarrow \quad i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = 0, \quad (1.24)$$

con

$$\text{sgn}(\beta_2) = -1 \text{ (dispersión anómala).}$$

La ecuación (1.24), central al presente estudio, es integrable a través del método de la transformada de dispersión inversa por medio del par de Lax \hat{L} y \hat{M} , operadores estos que gobiernan la evolución lineal de un vector de onda Φ que es dispersada por el potencial de dispersión u . \hat{L} y \hat{M} vienen dados por el operador de Schrödinger matricial llevado a las coordenadas del problema óptico presente, junto a las condiciones de evolución del problema de Lax [1, 3, 11, 41]:

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial \xi} = [\hat{L}, \hat{M}],$$

con

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} i \frac{\partial}{\partial \tau} & u \\ -u^* & -i \frac{\partial}{\partial \tau} \end{bmatrix}$$

y

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} i \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{i}{2} |u|^2 & u \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \tau} \\ -u^* \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial u^*}{\partial \tau} & -i \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{i}{2} |u|^2 \end{bmatrix}.$$

El problema inverso que finalmente intenta determinar u se resuelve después de calcular el problema directo que determina la evolución de Φ , es decir, la *data de dispersión*:

$$\hat{L}\Phi = \zeta\Phi$$

y

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = \hat{M}\Phi,$$

con $d\zeta/d\xi = 0$. Los autovalores ζ son generalmente complejos, escritos $\zeta_j = (\delta_j + i\eta_j)/2$ [1], donde $j = 1 \dots N$ da cuenta de la cantidad de autovalores para una solución ligada $u(\xi, \tau)$ particular, siendo este número la parte entera del coeficiente L_D/L_{NL} , es decir, el orden del solitón [12, 41].

1.2.4. El Solitón Fundamental

El caso de $j = N = 1$, i.e. un solo autovalor para el operador \hat{L} de Lax, producido cuando L_D y L_{NL} y los factores relacionados tienen los valores adecuados, es conocido como el *solitón fundamental*, una solución $u(\xi, \tau)$ para la ENLS (1.24) que consiste de una sola onda solitaria que se propaga sin distorsión de algún tipo en el medio de Kerr con dispersión anómala. Matemáticamente, se escribe de la forma general:

$$u(\xi, \tau) = A\Theta[B(\xi), Q(\xi, \tau)]e^{i\phi(\xi, \tau)},$$

donde A y $\phi(\xi, \tau)$ son la amplitud y fase del solitón, respectivamente, y la función Θ es la envolvente que modula la distribución de modos $F(x, y)$ soportados por la fibra, con dependencias funcionales sobre el ancho $B(\xi)$ del solitón y su posición $Q(\xi, \tau)$ [16]. El desarrollo detallado del método de la transformada de dispersión inversa revela que el solitón fundamental se puede escribir como un paquete de onda plano hiperbólico [1, 8, 12, 17]:

$$u(\xi, \tau) = \eta \operatorname{sech}[\eta(\tau - \tau_o + \delta\xi)] e^{i(\kappa\tau - \Omega\xi - \phi_o)}. \quad (1.25)$$

1.2. Ecuación No-Lineal de Schrödinger

Los términos τ_o y ϕ_o son las condiciones iniciales temporales y de fase, respectivamente, que pueden ser anuladas fácilmente mediante reajustes apropiados del sistema, i.e. $\tau_o = \phi_o = 0$.

La reinscripción de este perfil (1.25) en la ecuación (1.24) permite investigar ciertas relaciones que deberían existir entre los parámetros de fase del pulso, κ y Ω , y los de la envolvente, η y δ , estos últimos representando en términos adimensionales, respectivamente, la amplitud del solitón y su corrimiento de frecuencia con respecto a la portadora ω_o , en función del ancho inicial T_o [1]:

$$\omega'_o = \omega_o + \delta/T_o,$$

por lo cual:

$$\delta = \Delta\omega T_o;$$

a su vez, el inverso del parámetro η representa el ancho T_1 del solitón a lo largo de su propagación, en función también de T_o :

$$T_1 = \frac{T_o}{\eta}.$$

De la forma general del solitón fundamental, escrito en función de la amplitud η , la envolvente hiperbólica Θ y una fase plana ϕ , se ve fácilmente que:

$$\partial_\mu u = \eta e^{i\phi} \partial_\mu \Theta + iu \partial_\mu \phi, \quad \text{donde } \mu = \{\xi, \tau\},$$

$$\text{con } \begin{cases} \partial_\xi \Theta = -\delta\eta \tanh[\eta(\tau + \delta\xi)] \Theta \\ \partial_\tau \Theta = -\eta \tanh[\eta(\tau + \delta\xi)] \Theta \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \partial_\xi \phi = -\Omega \\ \partial_\tau \phi = \kappa \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad \partial_{\xi} u &= -\delta \eta \tanh [\eta (\tau + \delta \xi)] u - i \Omega u, \\ \longrightarrow \quad \partial_{\tau}^2 u &= \eta^2 \left\{ 1 - 2 \operatorname{sech}^2 [\eta (\tau + \delta \xi)] \right\} u - \kappa^2 u - i 2 \kappa \eta \tanh [\eta (\tau + \delta \xi)] u, \\ \longrightarrow \quad |u|^2 &= \eta^2 \operatorname{sech}^2 [\eta (\tau + \delta \xi)], \end{aligned}$$

Finalmente, re-introduciendo todos estos resultados en la ecuación principal (1.24), se obtiene una ecuación algebraica compleja escrita en términos de los parámetros η , δ , κ y Ω que revela las relaciones entre ellos, al requerir que las partes real e imaginaria se anulen independientemente en cumplimiento de la igualdad con cero en (1.24):

$$\Omega - \frac{1}{2} (\kappa^2 - \eta^2) - i \eta (\kappa + \delta) \tanh [\eta (\tau + \delta \xi)] = 0,$$

por lo tanto:

$$\kappa = -\delta$$

y

$$\Omega = \frac{\delta^2 - \eta^2}{2},$$

encontrando finalmente que:

$$u(\xi, \tau) = \eta \operatorname{sech} [\eta (\tau + \delta \xi)] \exp \left[i \left(\eta^2 - \delta^2 \right) \frac{\xi}{2} - i \delta \tau \right]. \quad (1.26)$$

Una forma convencional de escribir el solitón fundamental es en términos de sus *coordenadas colectivas*, el conjunto η , q , δ y ϕ , que generalizan la representación (1.26) [1, 3], en donde $q = q(\xi)$ es una función que representa el movimiento del *centroide* de la envolvente con respecto al sistema retardado (que se mueve a velocidad de grupo V_g) y $\phi = \phi(\xi)$ es una función que describe la variación de la fase a través de la propagación. Con este formalismo, el solitón fundamental de la ENLS (1.24) queda escrito como:

$$u(\xi, \tau) = \eta \operatorname{sech} [\eta (\tau - q)] \exp [i (\phi - \delta \tau)], \quad (1.27)$$

donde

$$q(\xi) = -\delta\xi$$

y

$$\phi(\xi) = (\eta^2 - \delta^2) \frac{\xi}{2}.$$

Diversas combinaciones de estas cuatro coordenadas que mantienen la condición $N = 1$ del solitón fundamental pueden ser construidas. Una muy útil es la conocida como la *forma canónica* del solitón, en la cual la frecuencia de la onda portadora es escogida cuidadosamente con el objetivo de eliminar el corrimiento del pulso, $\delta = 0$, y la amplitud inicial $u(0, 0)$ es unitaria, de modo que $\eta = 1$:

$$u(\xi, \tau) = \operatorname{sech}(\tau) e^{i\xi/2} \quad (1.28)$$

por lo que:

$$T_1 = T_0.$$

La utilidad de la forma canónica es resaltar algunas de las propiedades principales del solitón, tales como:

- su carácter netamente no dispersivo, al estar su fase definida solamente en términos del desplazamiento ξ mas no del tiempo τ .
- el cambio de fase neto $\xi/2$ que el pulso experimenta con respecto a la frecuencia portadora a medida que se propaga.
- la invariancia de la forma del pulso durante la propagación, al ser su envolvente Θ dependiente solamente de la variable temporal τ más no de la de desplazamiento ξ , y al ser su ancho T_1 siempre igual al inicial T_0 .

1.2. Ecuación No-Lineal de Schrödinger

Cuando $\delta \neq 0$, la definición de la frecuencia ω'_o del solitón también implica una velocidad de grupo V_g' para éste, debido a la alteración del factor β_1 en el argumento de la envolvente Θ como consecuencia de la dispersión en la fibra [1]:

$$\tau + \delta\xi = \frac{1}{T_o} \left[t - \left(\beta_1 - \frac{\delta T_o}{L_D} \right) z \right] = \frac{1}{T_o} (t - \beta'_1 z),$$

por lo que:

$$V_g' = \left(\beta_1 - \frac{\delta |\beta_2|}{T_o} \right)^{-1}. \quad (1.29)$$

La estabilidad de las soluciones de la ENLS (1.24) queda de manifiesto, entre otros fenómenos, como la tendencia que muestran a evolucionar y adaptarse hasta convertirse en solitones de órdenes N específicos, cuando sus perfiles iniciales difieren de ellos, por ejemplo, debido a parámetros de entrada T_o y P_o inadecuados para el N buscado. En el caso del solitón fundamental, el perfil u inicial de la solución puede auto-adaptarse a la condición $N = 1$ cuando el N inicial se encuentra en el rango $0,5 < N < 1,5$, por medio de la dispersión de parte de su energía en forma de radiación continua a medida que se propaga en la fibra de Kerr [1].

Ecuación No-Lineal de Schrödinger Perturbada

La evolución de la envolvente ψ en el pulso (1.10) a través de una fibra óptica de Kerr *no ideal*, i.e. aquella en la cual efectos como los de disipación de energía y/u otros no son ignorados en el estudio de la propagación, es gobernada por una ENLS que se diferencia de la forma (1.17) en la inclusión de términos adicionales que dan cuenta de estos efectos.

Esto invalida la integrabilidad de la ecuación resultante y por ende no la hace apta para el tratamiento por el método de la transformada de dispersión inversa [14, 16, 19]. No obstante, la naturaleza del medio de Kerr limita estos efectos a magnitudes pequeñas en comparación a la evolución ideal de la envolvente, razón por la cual estas “ampliaciones” a la ENLS pueden ser agrupadas en un término general R que se asume de carácter *levemente perturbativo* al caso ideal (1.17), dependiendo posiblemente de la solución modificada $\tilde{\psi}$, de su compleja conjugada $\tilde{\psi}^*$ y de las derivadas respectivas. En su forma normalizada y en el régimen de dispersión anómala, la *Ecuación No-Lineal de Schrödinger Perturbada* que gobierna la evolución de \tilde{u} en la fibra de Kerr no ideal queda escrita como [3, 16, 26]:

$$i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} + |\tilde{u}|^2 \tilde{u} = i \varepsilon R(\tilde{u}, \tilde{u}^*), \quad (2.1)$$

donde ε es conocida como el *parámetro de la perturbación* en el contexto presente, definido numéricamente como $|\varepsilon| \ll 1$, para controlar así el carácter levemente perturbativo de R [16].

Este enfoque permite asumir que, en el caso de un sistema acondicionado para producir un solitón fundamental ($L_D = L_{NL}$), el perfil general de la solución \tilde{u} de (2.1) preserva la forma de (1.27) del caso de la ENLS no perturbada (1.24) ($R = 0$), lo cual es conocido como el *principio de optimización de Rayleigh-Ritz* [17]. La diferencia primordial cuando $R \neq 0$ radica en que la evolución del solitón a lo largo de la fibra va a ser gobernada por el comportamiento del conjunto de sus coordenadas colectivas η , q , δ y ϕ , las cuales pasan a ser funciones aún por determinar de la variable de propagación ξ [1, 3, 16, 18]. Esto permite escribir a $\tilde{u}(\xi, \tau)$ de la forma generalizada:

$$\tilde{u}(\xi, \tau) = \eta(\xi) \operatorname{sech} \{ \eta(\xi) [\tau - q(\xi)] \} e^{i[\phi(\xi) - \delta(\xi)\tau]} . \quad (2.2)$$

En otras palabras, el estudio perturbativo asume que los efectos de la perturbación R pueden ser satisfactoriamente descritos solamente a través del comportamiento de las coordenadas colectivas, cuyas formas funcionales serán unívocamente determinadas por la forma de la perturbación en sí.

2.1. Análisis Variacional

El objetivo principal del análisis variacional para la ENLS perturbada (2.1) es la búsqueda de un conjunto de ecuaciones diferenciales que determinen la evolución en ξ de cada una de las coordenadas colectivas del solitón fundamental, en función de una perturbación R particular. El método se centra en el formalismo Lagrangiano clásico, a través de la búsqueda de una densidad Lagrangiana \mathcal{L}_g que reproduzca la ENLS en estudio y dé lugar así a las ecuaciones buscadas, partiendo del principio de mínima acción de Hamilton:

$$\frac{\delta S}{\delta y^\mu(\xi)} = 0,$$

donde S es la acción del sistema, con derivadas de Frechet calculadas independientemente para cada coordenada colectiva $y^\mu(\xi) = \{\eta(\xi), q(\xi), \delta(\xi), \phi(\xi)\}$, también conocidas como las *variables de acción* del problema [13]. Dada la forma de la ENLS (1.24), con la variable ξ gobernando la evolución de la solución, y por ende de las coordenadas colectivas en sí, las variaciones totales de éstas (derivadas punto) se encuentran definidas en términos de ξ [1, 3, 13], en comparación a la definición temporal que es común para estas derivadas en otros contextos físicos:

$$\dot{y}^\mu = \frac{dy^\mu}{d\xi} \quad \longrightarrow \quad S = \int_{-\infty}^{\infty} L d\xi.$$

Zakharov demostró que las soluciones de la ecuación (1.20) pertenecen a la familia de los *solitones integrables*, aquellos que cumplen estrictamente con la cuarta propiedad de elasticidad en sus colisiones con otros solitones, como resultado de la estructura Hamiltoniana *completamente integrable* de la dinámica descrita por la ENLS [3, 13, 42, 43]. Al poseer este tipo de integrabilidad, la ENLS (1.20) posee también un conjunto infinito de cantidades conservadas, lo cual la hace apta para el tratamiento por el método de la transformada de dispersión inversa [12, 13, 16, 17].

La extensión inmediata de esta conclusión a la ENSL (1.24) hace posible su estudio por medio del análisis variacional, estando su carácter Hamiltoniano garantizado por la existencia de la \mathcal{L}_g necesaria, escrita en términos de u y u^* como variables canónicas conjugadas [1, 11, 16, 17]. El promedio en τ de tal densidad arroja el Lagrangiano L apropiado para el estudio de las coordenadas colectivas, al quedar escrito en términos de éstas y sus variaciones [1]:

$$L(y^\mu, \dot{y}^\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}_g(u, u_\xi, u_\tau, u^*, u_\xi^*, u_\tau^*) d\tau,$$

con

$$u_\xi = \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

y

$$u_\tau = \frac{\partial u}{\partial \tau}.$$

Por el primer teorema de Noether y la invariancia de la acción de la ENLS (1.24) ante translaciones temporales y espaciales, las cantidades conservadas de momentum lineal y Hamiltoniano, respectivamente, quedan determinadas por [3, 11, 13, 14, 17, 38]:

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i}{2} (uu_\tau^* - u^*u_\tau) d\tau,$$

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} (|u_\tau|^2 - |u|^4) d\tau.$$

Estas simetrías son opuestas al caso más común de la ENSL de Zakharov (1.20), dado los roles invertidos de las variables ξ y τ en la ENLS (1.24). Para esta última, la densidad \mathcal{H} verifica su carácter Hamiltoniano a través de las ecuaciones de Hamilton para las variables canónicas y la definición de los corchetes de Poisson de la mecánica clásica, los cuales reproducen la ENLS como las derivadas de Frechet de \mathcal{H} con respecto a u y u^* [11, 13, 16, 38]:

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} = \{\mathcal{H}, u\} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u^*}$$

y

$$i \frac{\partial u^*}{\partial \xi} = \{\mathcal{H}, u^*\} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta u}.$$

La densidad Lagrangiana \mathcal{L}_g a su vez es calculada a partir de la definición formal del Hamiltoniano, haciendo uso también del valor de \mathcal{H} particular al sistema en estudio:

$$\mathcal{H} = \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}_g$$

y por lo tanto:

$$\mathcal{L}_g = \frac{i}{2} (uu_\xi^* - u^*u_\xi) + \frac{1}{2} (|u_\tau|^2 - |u|^4). \quad (2.3)$$

2.1.1. Ecuación de Euler-Lagrange para Campos

El principio de mínima acción de Hamilton conduce a la conocida ecuación de Euler-Lagrange para un sistema con Lagrangiano L , el cual en el caso de la ENLS y el solitón fundamental se encuentra escrito en término de las coordenadas colectivas $y^\mu(\xi)$. Por tanto:

$$\frac{\partial L}{\partial y^\mu} - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^\mu} \right) = 0. \quad (2.4)$$

Una simplificación importante del estudio variacional se consigue al expresar esta ecuación como la variación de la densidad Lagrangiana \mathcal{L}_g en términos de sus dependencias naturales, i.e. el solitón u , su complejo conjugado u^* y las derivadas parciales ξ y τ correspondientes. A este efecto, cada término de la ecuación de Euler-Lagrange es insertado en la integral de \mathcal{L}_g y expandido en términos de las derivadas implícitas entre las dependencias de L y las de su densidad \mathcal{L}_g .

Para el primer término de la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial y^\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial y^\mu} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\xi} \frac{\partial u_\xi}{\partial y^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\tau} \frac{\partial u_\tau}{\partial y^\mu} \right] d\tau + cc.$$

El último término de esta integral se puede expandir a su vez en una integración por partes, con su primera componente evaluándose a cero por la definición de la solución u como un paquete de onda altamente localizado que tiene rápidamente a cero cuando $\xi, \tau \rightarrow \pm\infty$ [26].

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\tau} \frac{\partial u_\tau}{\partial y^\mu} d\tau = \left[\frac{\partial u}{\partial y^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\tau} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\tau} \right) \frac{\partial u}{\partial y^\mu} d\tau,$$

con

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\tau} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

por lo cual:

$$\frac{\partial L}{\partial y^\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\xi} \frac{\partial u_\xi}{\partial y^\mu} - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\tau} \right) \frac{\partial u}{\partial y^\mu} \right] d\tau + cc. \quad (2.5)$$

Para el segundo término de la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^\mu} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{y}^\mu} \right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \dot{y}^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\xi} \frac{\partial u_\xi}{\partial \dot{y}^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\tau} \frac{\partial u_\tau}{\partial \dot{y}^\mu} \right] d\tau + cc.$$

Provisto que la envolvente y fase del solitón u se encuentran definidas en términos de las coordenadas colectivas, pero no de sus derivadas \dot{y}^μ , y también que estas coordenadas dependen a su vez de la variable de desplazamiento ξ mas no de la temporal τ , el primer y último término de esta expansión se anulan por definición [26]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \dot{y}^\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\tau} \frac{\partial u_\tau}{\partial \dot{y}^\mu} = 0,$$

por lo que:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^\mu} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\xi} \frac{\partial u_\xi}{\partial \dot{y}^\mu} \right] d\tau + cc.$$

Similarmente, el término restante de la expansión se puede re-exresar en términos de la variación del solitón con respecto a las coordenadas colectivas, en base a las provisiones previas:

$$\frac{\partial u_\xi}{\partial \dot{y}^\mu} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}^\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial y^\mu} \frac{\partial y^\mu}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{y}^\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial y^\mu} \right) \dot{y}^\mu + \frac{\partial u}{\partial y^\mu} \frac{\partial \dot{y}^\mu}{\partial \dot{y}^\mu} = \frac{\partial u}{\partial y^\mu},$$

ya que:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{y}^\mu} \left(\frac{\partial u}{\partial y^\mu} \right) = 0,$$

por lo cual:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\xi} \frac{\partial u}{\partial y^\mu} \right] d\tau + cc = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\xi} \right) \frac{\partial u}{\partial y^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial y^\mu} \right) \right] d\tau + cc.$$

Finalmente, por la continuidad de la solución solitónica u con respecto a las coordenadas colectivas y^μ y la variable ξ :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial y^\mu} \right) = \frac{\partial u_\xi}{\partial y^\mu},$$

por lo tanto:

$$\frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^\mu} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\xi} \right) \frac{\partial u}{\partial y^\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\xi} \frac{\partial u_\xi}{\partial y^\mu} \right] d\tau + cc. \quad (2.6)$$

Al juntar los resultados (2.5) y (2.6) se ve la forma final que adopta la expansión de la ecuación de Euler-Lagrange (2.4) en términos de las dependencias de la densidad Lagrangiana \mathcal{L}_g :

$$\frac{\partial L}{\partial y^\mu} - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^\mu} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\tau} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial y^\mu} d\tau + cc = 0. \quad (2.7)$$

La independencia de los complejos conjugados en este último resultado está garantizada, en primera instancia, por la relación algebraica entre un número complejo $a = a_r + ia_i$ y su conjugado a^* cuando la suma de éstos se anula, i.e. $a + a^* = 2a_r = 0$, lo que implica que $a_r = 0$. Adicionalmente, la naturaleza física de la ecuación de Euler-Lagrange garantiza que el resultado final de la expansión (2.7) sea una cantidad real, independientemente del principio de mínima acción de Hamilton, puesto que ésta expresa las variaciones arbitrarias sobre la acción S del sistema, una cantidad real de por sí:

$$\frac{\delta S}{\delta y^\mu(\xi)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial L}{\partial y^\mu} - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^\mu} \right) \right] d\xi \in \mathbb{R},$$

por lo cual:

$$a_i = 0,$$

donde

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\tau} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial y^\mu} d\tau = 0.$$

Dado que este último resultado se debe cumplir para cualquier densidad Lagrangiana con las dependencias descritas, $\mathcal{L}_g = \mathcal{L}_g(u, u_\xi, u_\tau, u^*, u_\xi^*, u_\tau^*)$, se deduce que el integrando se anula por definición. Esto finalmente nos lleva a la *ecuación de Euler-Lagrange para campos y medios continuos* [44, 45]:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\tau} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u} = 0. \quad (2.8)$$

De la misma forma como el Lagrangiano L de un sistema reproduce su dinámica cuando se le aplica el principio de mínima acción de Hamilton, la densidad Lagrangiana \mathcal{L}_g (2.3) reproduce la ENLS (1.24), i.e. la dinámica de la solución u , cuando se le aplica el complejo conjugado de la ecuación de Euler-Lagrange (2.8):

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\xi^*} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u_\tau^*} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial u^*} = i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = 0.$$

Otra forma de expresar este importante resultado es a través de la anulación de la derivada de Frechet de \mathcal{L}_g con respecto a u^* , lo cual subraya el cumplimiento del principio de Hamilton en la dinámica de u [3]:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_g}{\delta u^*} = 0. \quad (2.9)$$

2.1.2. Dinámica Adiabática de las Coordenadas Colectivas

Ante la presencia de una perturbación $R \neq 0$ en la ENLS (2.1), la búsqueda de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la evolución de las coordenadas colectivas se fundamenta en el carácter *adiabático* de las variaciones en el Lagrangiano del sistema, dada la pequeña magnitud de las perturbaciones en comparación a la dinámica ideal. Esto se traduce en una evolución lenta en ξ de las $y^\mu(\xi)$, en comparación a la evolución de la solución \tilde{u} sobre un período completo, lo cual según el teorema de *procesos adiabáticos* permite al sistema re-adaptarse a lo largo de la propagación para preservar el perfil (1.27) de u [45, 46]. Por tanto, la evolución de las coordenadas colectivas es

conocida como la *dinámica adiabática* del solitón, precisa hasta un orden $\mathcal{O}(\varepsilon)$ de aproximación [16, 26, 47].

La aplicación de la ecuación de Euler-Lagrange (2.4) a la ENLS (2.1) revela que, ante la presencia de las perturbaciones, la densidad Lagrangiana (2.3) no preserva el principio de mínima acción de Hamilton para el nuevo sistema, quedando la variación de su acción definida en términos de R y R^* [3, 15, 26]:

$$\frac{\partial L}{\partial y^\mu} - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}^\mu} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} + |\tilde{u}|^2 \tilde{u} \right) \frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial y^\mu} d\tau + cc = i\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} R \frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial y^\mu} d\tau + cc,$$

por lo que:

$$\frac{\delta S}{\delta y^\mu(\xi)} = i\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(R \frac{\partial \tilde{u}^*}{\partial y^\mu} - R^* \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y^\mu} \right) d\tau d\xi. \quad (2.10)$$

Este resultado se puede expresar en forma compacta como la derivada de Frechet de la densidad Lagrangiana \mathcal{L}_g en sí, similar al caso del sistema no perturbado (2.9) [3]:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_g}{\delta u^*} = i\varepsilon R(\tilde{u}, \tilde{u}^*).$$

No obstante, la introducción de una *densidad Lagrangiana perturbada* $\tilde{\mathcal{L}}_g$, que incluye los factores perturbativos dentro de la dinámica del solitón, re-establece el cumplimiento del principio de Hamilton, necesario para la búsqueda de la dinámica de las coordenadas colectivas a partir de la ecuación de Euler-Lagrange [1]:

$$\tilde{\mathcal{L}}_g = \frac{i}{2} (\tilde{u} \tilde{u}_\xi^* - \tilde{u}^* \tilde{u}_\xi) + \frac{1}{2} (|\tilde{u}_\tau|^2 - |\tilde{u}|^4) + i\varepsilon [R \tilde{u}^* - R^* \tilde{u}], \quad (2.11)$$

por lo que:

$$\frac{\delta \tilde{\mathcal{L}}_g}{\delta \tilde{u}^*} = 0$$

y

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial y^\mu} - \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{y}^\mu} \right) = 0.$$

La integración de (2.11) es posible al usar el perfil de solución (2.2), así el término R y por ende las $y^\mu(\xi)$ sean aún desconocidas, puesto que éstas se mantienen fijas durante el proceso de integración en τ de la densidad Lagrangiana [26]. El resultado de este procedimiento será finalmente la dinámica adiabática de las coordenadas colectivas del solitón fundamental, en términos de la perturbación R [1, 3, 38]:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\eta}{d\xi} &= \varepsilon \Re \int_{-\infty}^{\infty} R \tilde{u}^* d\tau, \\
 \frac{d\delta}{d\xi} &= -\varepsilon \Im \int_{-\infty}^{\infty} R \tilde{u}^* \tanh[\eta(\tau - q)] d\tau, \\
 \frac{dq}{d\xi} &= -\delta + \frac{\varepsilon}{\eta^2} \Re \int_{-\infty}^{\infty} (\tau - q) R \tilde{u}^* d\tau, \\
 \frac{d\phi}{d\xi} &= \varepsilon \Im \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\eta} - (\tau - q) \tanh[\eta(\tau - q)] \right\} R \tilde{u}^* d\tau + \frac{1}{2} (\eta^2 - \delta^2) + q \frac{d\delta}{d\xi}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Estas fórmulas revelan que, dependiendo de la forma funcional de las perturbaciones, las características de las coordenadas colectivas del perfil del solitón no perturbado (1.26) se pueden perder, como por ejemplo la invariancia del corrimiento de frecuencia δ , de la amplitud η y del ancho $T_1 = T_o/\eta$. Efectos adicionales también pueden emerger, tales como fluctuaciones en la posición del solitón debido a la dependencia en la evolución del centroide q sobre el δ modificado.

En términos generales, solitones con estas características, como por ejemplo uno con amplitud η variable debido a efectos de disipación, son conocidos como *solitones no integrables*, por emerger de dinámicas que generalmente no son completamente integrables y/o no Hamiltonianas y por no cumplir con la cuarta propiedad de colisiones elásticas [13, 16, 42, 43]. No obstante, ciertos tipos de perturbaciones no disipativas, como algunas debidas a efectos conocidos como de *orden superior*, pueden preservar el carácter Hamiltoniano del nuevo sistema, al mantener un conjunto no nulo de cantidades conservadas [3, 16].

Un ejemplo útil de la dinámica (2.12) es la reproducción del solitón fundamental no perturbado (1.26), tras realizar las integraciones necesarias sobre las ecuaciones que resultan de imponer la condición $R = 0$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\eta}{d\xi} = 0 & \implies \eta(\xi) = \eta_o, \\
 \frac{d\delta}{d\xi} = 0 & \implies \delta(\xi) = \delta_o, \\
 \frac{dq}{d\xi} = -\delta_o & \implies q(\xi) = -\delta_o\xi, \\
 \frac{d\phi}{d\xi} = \frac{1}{2}(\eta_o^2 - \delta_o^2) & \implies \phi(\xi) = (\eta_o^2 - \delta_o^2)\frac{\xi}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Esta dinámica podría obtenerse también a través de la aplicación de la ecuación de Euler-Lagrange (2.4) al lagrangiano L que se calcula por integración directa de la densidad \mathcal{L}_g (2.3) [3, 38]:

$$L = \frac{\eta^3}{3} - 2\eta \left(\delta \frac{dq}{d\xi} + \frac{d\phi}{d\xi} \right) - \eta\delta^2.$$

En cualquiera de los casos, ambos enfoques verifican una vez más el carácter Hamiltoniano de la ENLS (1.24), dado que el solitón fundamental es ahora obtenido a través del principio de mínima acción de Hamilton:

$$u(\xi, \tau) = \eta_o \operatorname{sech}[\eta_o(\tau + \delta_o\xi)] \exp \left[i \left(\eta_o^2 - \delta_o^2 \right) \frac{\xi}{2} - i\delta_o\tau \right].$$

A continuación se procede a estudiar las principales perturbaciones a la propagación ideal del solitón fundamental en el medio de Kerr, tratando tanto sus orígenes físicos como los modelos matemáticos correspondientes que las describen y modifican la ENLS (1.24). Tales perturbaciones son la *disipación energética* debido a la absorción electromagnética del medio, la distorsión del perfil temporal del solitón por el efecto de *auto-escarpado* y la alteración de su espectro de frecuencias por el efecto de *dispersión intra-pulso de Raman*, siendo estos últimos dos pertenecientes al régimen conocido

como de *orden superior*. La dinámica adiabática de las coordenadas colectivas (2.12) es empleada para investigar las diversas consecuencias que estas perturbaciones tiene sobre la evolución del solitón fundamental (1.27).

2.2. Perturbación Disipativa

El principal efecto que puede alterar considerablemente la estabilidad del solitón óptico brillante como ente dinámico robusto es la pérdida de energía del pulso a medida que se propaga en el medio de Kerr, lo cual elimina el carácter Hamiltoniano de la dinámica del solitón [13, 42, 43]. La disipación es debida principalmente a la absorción de energía electromagnética por parte del material que compone al medio (con contribuciones ligeras de otros factores como la dispersión del pulso en la interface núcleo-revestimiento de la fibra), y afecta la estabilidad del solitón ya que su existencia se debe al balance entre los efectos de dispersión de velocidad de grupo y auto-modulación de fase experimentados por el pulso en el régimen de dispersión anómala. Siendo la auto-modulación de fase dependiente de la intensidad, y por ende de la energía del pulso, una reducción de ésta afectaría dicho balance, poniendo en peligro así la integridad del solitón a medida que se propaga.

Matemáticamente, los efectos de disipación se incluyen en la descripción de la respuesta eléctrica del medio a través de la definición (1.6) de su constante dieléctrica, con $\tilde{\alpha} = \alpha + \alpha_2 |E|^2$ dando cuenta tanto de la disipación lineal α como la no-lineal α_2 , esta última dependiente de la intensidad del campo eléctrico del pulso. No obstante, para los medios de interés como las fibras ópticas de sílice, el factor α_2 es generalmente muy pequeño en comparación a la constante de disipación α , razón por la cual es ignorado en el tratamiento perturbativo [1, 10]. El término restante engloba todas las causas de pérdidas en la fibra y queda definido en términos de la relación entre la potencia de entrada al medio P_o y la transmitida P_T al final de su longitud L , asumiendo un comportamiento exponencial y uniforme de las pérdidas a través de

2.2. Perturbación Disipativa

toda la fibra [1, 7, 47]:

$$P_T = P_o e^{-\alpha L},$$

por lo cual:

$$\alpha = -\frac{1}{L} \ln \left(\frac{P_T}{P_o} \right). \quad (2.14)$$

Volviendo sobre la ecuación diferencial (1.14) que describe en primera instancia la evolución de la envolvente ψ en el medio de Kerr, se puede apreciar que para el caso disipativo, con ayuda del proceso de normalización descrito en la Sección 1.2.3 en términos de las distancias L_D y L_{NL} , el término perturbativo normalizado εR definido en la ENLS perturbada (2.1) adopta la forma:

$$\varepsilon R(\tilde{u}, \tilde{u}^*) = -\frac{\Gamma}{2} \tilde{u},$$

resultando en:

$$i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} + |\tilde{u}|^2 \tilde{u} = -i \frac{\Gamma}{2} \tilde{u}, \quad (2.15)$$

con

$$\Gamma = \alpha L_D,$$

por lo cual:

$$\Gamma \xi = \alpha z.$$

Al insertar esta perturbación en el conjunto de ecuaciones (2.12), la dinámica adiabática de las coordenadas colectivas resulta en:

$$\varepsilon R \tilde{u}^* = -\frac{\Gamma}{2} |\tilde{u}|^2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \Re(\varepsilon R \tilde{u}^*) = -\frac{\Gamma}{2} \eta^2 \operatorname{sech}^2[\eta(\tau - q)], \\ \Im(\varepsilon R \tilde{u}^*) = 0, \end{cases}$$

finalmente quedando la dinámica como:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\Gamma}{2}\eta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 [\eta(\tau - q)] d\tau = -\Gamma\eta,$$

$$\frac{d\delta}{d\xi} = 0,$$

$$\frac{dq}{d\xi} = -\delta - \frac{\Gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 [\eta(\tau - q)] (\tau - q) d\tau = -\delta,$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \frac{1}{2} (\eta^2 - \delta^2).$$

Estos resultados ilustran claramente que las únicas dos coordenadas del solitón que sufren cambios ante la presencia de disipación en el medio de propagación son la amplitud η y la fase ϕ , esta última dependiente de la amplitud modificada $\eta(\xi)$; tanto el corrimiento de frecuencia δ como el centroide q permanecen inalterados con respecto a la dinámica no perturbada (2.13). Tomando las condiciones iniciales $q_o = \phi_o = 0$, las coordenadas colectivas que describen la evolución del solitón fundamental disipado quedan descritas por:

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= \eta_o e^{-\Gamma\xi}, \\ \delta(\xi) &= \delta_o, \\ q(\xi) &= -\delta_o\xi, \\ \phi(\xi) &= \frac{1 - \eta_o^2 e^{-2\Gamma\xi}}{4\Gamma} - \frac{\delta_o^2}{2}\xi. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Recordando la forma generalizada del solitón fundamental perturbado (2.2) definido en función de las coordenadas colectivas:

$$\tilde{u}(\xi, \tau) = \eta(\xi) \operatorname{sech} \{ \eta(\xi) [\tau - q(\xi)] \} e^{i[\phi(\xi) - \delta(\xi)\tau]},$$

se ve la forma que éste adopta ante los efectos de disipación:

$$\tilde{u}(\xi, \tau) = \eta_o e^{-\Gamma\xi} \operatorname{sech} \left[\eta_o e^{-\Gamma\xi} (\tau + \delta_o \xi) \right] \exp \left[i \left(\frac{1 - \eta_o^2 e^{-2\Gamma\xi}}{4\Gamma} - \frac{\delta_o^2}{2} \xi \right) - i\delta_o \tau \right],$$

y en forma canónica, donde $\eta_o = 1$ y $\delta_o = 0$, esto se reduce a:

$$\tilde{u}(\xi, \tau) = e^{-\Gamma\xi} \operatorname{sech} \left(\tau e^{-\Gamma\xi} \right) \exp \left(i \frac{1 - e^{-2\Gamma\xi}}{4\Gamma} \right). \quad (2.17)$$

De aquí se observa claramente que el principal efecto que sufrirá el solitón en un medio de Kerr disipativo es la pérdida de amplitud a medida que se propaga en ξ , dado el factor exponencial de atenuación que multiplica a la amplitud inicial. Es fácil concluir que esta evolución eventualmente conllevaría a la desintegración del solitón, debido al esparcimiento temporal progresivo resultante de la relación inversa entre su amplitud y ancho [7]:

$$T_1 = \frac{T_o}{\eta},$$

por lo que:

$$T_1(\xi) = T_o e^{\Gamma\xi}. \quad (2.18)$$

Por esta razón, solamente se puede esperar que el solitón mantenga su estabilidad como ente dinámico robusto en la medida que $\Gamma\xi \ll 1$, bien sea por medio de la acotación de la distancia de propagación ξ para un Γ dado o a través de la reducción de este último parámetro con la construcción de medios de transmisión más eficientes. En general, variaciones de energía de unos pocos puntos porcentuales o menos por cada longitud de dispersión L_D recorrida permitirá que las coordenadas colectivas del solitón disipado evolucionen adiabáticamente [47], lo cual es consistente con la condición $\varepsilon \ll 1$ de la ENLS perturbada general (2.1) que conduce a la dinámica adiabática (2.12).

El resultado (2.17) también revela el cambio de fase neto que sufre el solitón canónico disipado, tendiendo a un límite $\phi_{max} = 1/4\Gamma$ para distancias de propagación $\xi \gg 1$.

2.3. Efectos de Orden Superior

Al considerar pulsos ópticos cuyos anchos iniciales $T_o < 1$ ps, la ecuación diferencial (1.14) de la envolvente ψ pierde validez en la descripción de su propagación a través de los medios de interés, ya que para estas magnitudes de T_o el ancho espectral resultante de la señal óptica induce una respuesta eléctrica en el medio de Kerr distinta a la descrita por la polarización no-lineal \vec{P}_{NL} (1.3) [1, 2, 48], la cual fue usada como base para las variadas aproximaciones que condujeron a la dinámica (1.14) a partir de la ecuación de Maxwell inicial (1.2).

Un tratamiento más detallado de la susceptibilidad eléctrica de tercer orden $\chi^{(3)}$ da origen a una polarización no-lineal que da cuenta no solo del efecto Kerr óptico, sino también de otros efectos generalmente conocidos como de *orden superior*, a través de la expresión [1, 2, 7, 17]:

$$\vec{P}_{NL} = \varepsilon_o \chi^{(3)} \vec{E}(\vec{r}, t) \int_{-\infty}^t R(t - t_1) |\vec{E}(\vec{r}, t_1)|^2 dt_1.$$

El factor $R(t - t_1)$ es la función de respuesta no-lineal que incluye las contribuciones eléctricas y vibracionales del medio a la susceptibilidad eléctrica $\chi^{(3)}$, integrado junto a la intensidad del campo eléctrico hasta el límite superior t para asegurar la causalidad de la polarización en función del campo eléctrico. Un análisis de Helmholtz del campo eléctrico resultante, análogo a aquel aplicado a la ecuación (1.5) para el caso del efecto Kerr como único fenómeno no-lineal presente, y un estudio numérico sobre $R(t - t_1)$ (consultar referencias principales [1, 7, 8, 10], entre otras) conducen a una nueva dinámica no-lineal de la evolución de la envolvente ψ en el régimen de orden superior. No obstante, al usar longitudes de onda alejadas de la longitud de dispersión cero, λ_D , las componentes lineales de la dinámica permanecen inalteradas con respecto a los estudios anteriores, ya que los efectos dispersivos pueden seguir siendo descritos satisfactoriamente sólo con el parámetro de dispersión de velocidad de grupo β_2 , sin

requerir la inclusión de términos superiores de la expansión de Taylor (1.13) sobre la relación de dispersión $\beta(\omega)$. La ENLS resultante queda escrita como:

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\alpha}{2}\psi + i\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial T^2} = i\gamma \left[|\psi|^2\psi + \frac{i}{\omega_o}\frac{\partial}{\partial T} (|\psi|^2\psi) - \text{T}_R \frac{\partial|\psi|^2}{\partial T}\psi \right]. \quad (2.19)$$

Esta dinámica, conocida como la *Ecuación No-Lineal de Schrödinger Generalizada* por incluir dentro de sí a los principales efectos que experimenta el pulso ψ durante su propagación en el medio de Kerr, incluye en el lado derecho de la ecuación a un segundo término no-lineal que da cuenta del efecto de *auto-escarpado*, conocido como “self-steepening” en Inglés, y un tercero que describe al efecto de *dispersión intra-pulso de Raman*, conocido como el “intra-pulse Raman scattering”. Ambos serán estudiados próximamente por separado y a modo perturbativo a través la dinámica de las coordenadas colectivas (2.12), dada la prominencia del efecto Kerr incluso en el régimen de orden superior. Adicionalmente, por simplicidad del estudio, los efectos de disipación serán ignorados en cada caso, es decir $\alpha = 0$ en cada análisis.

2.3.1. Perturbación por Efecto de Auto-Escarpado

El efecto de auto-escarpado o “self-steepening” es una perturbación Hamiltoniana que resulta de la dependencia de la velocidad de grupo V_g del pulso sobre la intensidad de su campo eléctrico \vec{E} [1, 2, 29, 39], a través de la definición (1.18) del coeficiente β_1 en términos del índice de refracción \tilde{n} (1.7). Inicialmente reportado por D. Grischkowsky et al. en [9], el nombre del efecto proviene de la alteración del perfil de la envolvente ψ como resultado de la dependencia inversa entre la velocidad de grupo y la intensidad, causando que el pico del pulso se propague más lentamente que sus bordes, en donde la intensidad es menor.

En ausencia de los efectos de dispersión de velocidad de grupo de β_2 , el pico se inclinaría hacia el borde posterior del pulso de manera progresiva con la propagación, produciendo un perfil asimétrico cada vez más escarpado que eventualmente daría lugar

a un shock óptico. No obstante, la dispersión temporal debida a β_2 tiene el efecto de suavizar la deformación creada al dispersar el borde afectado, de forma análoga al balance establecido con el fenómeno de auto-modulación de fase para producir el solitón brillante en sí. El efecto resultante es un desplazamiento neto progresivo (i.e. dependiente de la propagación) del centro temporal del pulso con respecto al caso no perturbado [1, 2].

Esta compensación entre los efectos de β_2 y auto-escarpado también tiene el efecto de mantener prácticamente inalterado el espectro de frecuencias del pulso, similar al caso de la ENLS no perturbada, manifestando solamente una leve asimetría del espectro en favor de las frecuencias más bajas (“red-shifted”), dado que éstas se propagan más lentamente en el régimen de dispersión anómala ($\beta_2 < 0$) y por ende se encuentran en el borde posterior del pulso.

Matemáticamente, el efecto de auto-escarpado queda representado como un gradiente temporal del término de Kerr, inversamente proporcional a la frecuencia ω_o de la onda portadora y por ende dependiente en magnitud de la longitud de onda λ_o del pulso [1, 9]:

$$\frac{\gamma}{\omega_o} \frac{\partial}{\partial T} (|\psi|^2 \psi) .$$

Volviendo a la definición generalizada (2.1) de la ENLS perturbada, y nuevamente con ayuda del proceso de normalización en base a las longitudes de dispersión y no-lineal, L_D y L_{NL} , el término perturbativo normalizado εR para el caso del efecto de auto-escarpado adopta la forma:

$$\varepsilon R(\tilde{u}, \tilde{u}^*) = -s \frac{\partial}{\partial \tau} (|\tilde{u}|^2 \tilde{u}) ,$$

resultando en:

$$i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} + |\tilde{u}|^2 \tilde{u} = -is \frac{\partial}{\partial \tau} (|\tilde{u}|^2 \tilde{u}) , \quad (2.20)$$

con

$$s = \frac{1}{\omega_o T_o}.$$

Al insertar esta perturbación en el conjunto de ecuaciones (2.12), la dinámica adiabática de las coordenadas colectivas resulta en:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (|\tilde{u}|^2 \tilde{u}) = -\{3\eta \tanh[\eta(\tau - q)] + i\delta\} |\tilde{u}|^2 \tilde{u},$$

por lo cual:

$$\begin{aligned} \varepsilon R \tilde{u}^* &= s \{3\eta \tanh[\eta(\tau - q)] + i\delta\} |\tilde{u}|^4, \\ \Rightarrow \begin{cases} \Re(\varepsilon R \tilde{u}^*) = 3s\eta^5 \operatorname{sech}^4[\eta(\tau - q)] \tanh[\eta(\tau - q)], \\ \Im(\varepsilon R \tilde{u}^*) = s\delta\eta^4 \operatorname{sech}^4[\eta(\tau - q)], \end{cases} \end{aligned}$$

finalmente quedando la dinámica como:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 3s\eta^5 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4[\eta(\tau - q)] \tanh[\eta(\tau - q)] d\tau = 0,$$

$$\frac{d\delta}{d\xi} = -s\delta\eta^4 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4[\eta(\tau - q)] \tanh[\eta(\tau - q)] d\tau = 0,$$

$$\frac{dq}{d\xi} = -\delta + 3s\eta^3 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4[\eta(\tau - q)] \tanh[\eta(\tau - q)] (\tau - q) d\tau = -\delta + s\eta,$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\xi} &= s\delta\eta^3 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4[\eta(\tau - q)] d\tau - s\delta\eta^4 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4[\eta(\tau - q)] \tanh[\eta(\tau - q)] (\tau - q) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} (\eta^2 - \delta^2) = s\delta\eta^2 + \frac{1}{2} (\eta^2 - \delta^2). \end{aligned}$$

Esta dinámica revela que el efecto de auto-escarpado no afecta la amplitud η ni el corrimiento de frecuencia δ del solitón perturbado, puesto que estos se mantienen

inalterados con respecto a la dinámica no perturbada (2.13). En cambio, el centroide q y la fase ϕ sí presentan alteraciones linealmente dependientes del parámetro perturbativo s , en función de las coordenadas constantes η_o y δ_o . Tomando las condiciones iniciales $q_o = \phi_o = 0$, las coordenadas colectivas que describen la evolución del solitón fundamental con efecto de auto-escarpado quedan finalmente descritas por:

$$\begin{aligned}
 \eta(\xi) &= \eta_o, \\
 \delta(\xi) &= \delta_o, \\
 q(\xi) &= (s\eta_o - \delta_o)\xi, \\
 \phi(\xi) &= \left(\eta_o^2 - \delta_o^2\right)\frac{\xi}{2} + s\delta_o\eta_o^2\xi.
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

Recordando la forma generalizada del solitón fundamental perturbado (2.2) definido en función de las coordenadas colectivas:

$$\tilde{u}(\xi, \tau) = \eta(\xi) \operatorname{sech} \left\{ \eta(\xi) [\tau - q(\xi)] \right\} e^{i[\phi(\xi) - \delta(\xi)\tau]},$$

se ve la forma que éste adopta ante los efectos de auto-escarpado:

$$\tilde{u}(\xi, \tau) = \eta_o \operatorname{sech} [\eta_o (\tau + \delta_o \xi - s\eta_o \xi)] \exp \left[i \left(\eta_o^2 - \delta_o^2 \right) \frac{\xi}{2} + i s \delta_o \eta_o^2 \xi - i \delta_o \tau \right],$$

y en forma canónica, donde $\eta_o = 1$ y $\delta_o = 0$, esto se reduce a:

$$\tilde{u}(\xi, \tau) = \operatorname{sech} (\tau - s\xi) e^{i\xi/2}. \tag{2.22}$$

Este resultado demuestra el efecto neto que el balance entre la dispersión de velocidad de grupo y el fenómeno de auto-escarpado tienen sobre el solitón brillante fundamental, dado el desplazamiento del cero del argumento de la envolvente Θ , linealmente proporcional a la magnitud del parámetro perturbativo s y a la propagación en ξ , conocido como el tiempo de retraso τ_d [1]:

$$\tau_d = s\xi. \tag{2.23}$$

Este retraso implica un cambio en la velocidad de grupo V_g del pulso, similar al cambio (1.29) que experimenta el solitón fundamental no perturbado cuando su corrimiento de frecuencia inicial $\delta_o \neq 0$. La principal consecuencia de este efecto es el incremento del ancho temporal T_o' del solitón con efectos de auto-escarpado (2.22), en comparación al caso no perturbado (1.28):

$$\tau - s\xi = \tau' < \tau,$$

con

$$\tau = \frac{T}{T_o},$$

por lo cual:

$$T_o' > T_o.$$

Esto causa una reducción acorde en el pico de intensidad del pulso durante su propagación en el medio de Kerr, dada la conservación de su energía en un medio para el cual los efectos de disipación han sido ignorados ($\alpha = 0$).

Finalmente, se puede observar claramente también cómo, para el caso canónico, la fase del solitón perturbado no sufre modificación alguna con respecto al perfil no perturbado (1.28), dada la anulación del corrimiento de frecuencia inicial δ_o .

2.3.2. Perturbación por Efecto de Dispersión Intra-Pulso de Raman

El segundo pero más importante de los efectos de orden superior que pueden perturbar la evolución ideal del solitón brillante es la dispersión intra-pulso de Raman (“intra-pulse Raman scattering”), proveniente de las interacciones inelásticas entre los fotones de la señal electromagnética que se propaga en el medio y los modos vibrationales de las moléculas que lo componen, lo cual es conocido como la *dispersión de*

Raman o simplemente el *efecto Raman*. Originalmente descubierto por C.V. Raman en 1928, este efecto supone una contribución vibracional a la susceptibilidad eléctrica $\chi^{(3)}$ a una escala temporal considerablemente más larga que las contribuciones electrónicas (responsables del efecto Kerr), con respuestas en el orden de los 100 fs vs. 1 fs, razón por la cual la dispersión intra-pulso de Raman es generalmente ignorada por su relativa debilidad en comparación a los efectos de auto-modulación de fase [2, 10].

La dispersión de Raman puede ser un proceso tanto espontáneo como estimulado, comprendiendo en ambos casos la emisión por parte de las moléculas del medio de fotones de menor frecuencia a los incidentes sobre él, i.e. colisiones inelásticas fotones-moléculas cuyos diferenciales de energía son absorbidas por estas últimas para excitar sus modos vibracionales, los conocidos *fonones ópticos*.

La “faceta” estimulada de este proceso, generalmente desencadenada por una potencia del pulso entrante mayor al nivel umbral del material, tiene la capacidad de fortalecer progresivamente con la propagación a sus componentes de menor frecuencia (las conocidas *ondas de Stokes*), induciendo así una redistribución de la energía del pulso entre las componentes de su espectro, con las de mayor frecuencia haciendo las veces de fuentes energéticas. El resultado acumulado de este proceso para pulsos ópticos ultra-cortos propagándose en un medio de Kerr es un auto-corrIMIENTO neto de su frecuencia central, efecto conocido como la dispersión intra-pulso de Raman y expresado matemáticamente como una perturbación no Hamiltoniana a través del último término no-lineal en el lado derecho de la ENLS Generalizada (2.19) [1, 7]:

$$-\gamma T_R \frac{\partial |\psi|^2}{\partial T} \psi.$$

El factor T_R es conocido como el *primer momento* de la función de respuesta no-lineal $R(t)$, físicamente relacionado a la pendiente de la curva de ganancia del espectro de Raman para un material dado, la cual en sí representa la redistribución de la energía en el espectro del solitón debido al efecto de dispersión intra-pulso de

2.3. Efectos de Orden Superior

Raman [1, 10], en función de la frecuencia central ω_o . Matemáticamente, T_R se define como [1]:

$$T_R \equiv \int_{-\infty}^{\infty} tR(t) dt. \quad (2.24)$$

Volviendo a la definición (2.1) de la ENLS perturbada, el factor $\varepsilon R(\tilde{u}, \tilde{u}^*)$ por efecto de dispersión intra-pulso de Raman queda dado por:

$$\varepsilon R(\tilde{u}, \tilde{u}^*) = -i\tau_r \frac{\partial |\tilde{u}|^2}{\partial \tau} \tilde{u},$$

resultando en:

$$i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tau^2} + |\tilde{u}|^2 \tilde{u} = \tau_r \frac{\partial |\tilde{u}|^2}{\partial \tau} \tilde{u}, \quad (2.25)$$

con

$$\tau_r = \frac{T_R}{T_o}.$$

Para estudiar el efecto de esta perturbación sobre el solitón fundamental (2.2) se vuelve a la dinámica adiabática de las coordenadas colectivas (2.12), produciendo como resultado:

$$\frac{\partial |\tilde{u}|^2}{\partial \tau} = -2\eta \tanh[\eta(\tau - q)] |\tilde{u}|^2,$$

por lo cual:

$$\varepsilon R \tilde{u}^* = i2\tau_r \eta \tanh[\eta(\tau - q)] |\tilde{u}|^4,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Re(\varepsilon R \tilde{u}^*) = 0, \\ \Im(\varepsilon R \tilde{u}^*) = 2\tau_r \eta^5 \operatorname{sech}^4[\eta(\tau - q)] \tanh[\eta(\tau - q)], \end{cases}$$

finalmente quedando la dinámica como:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 0,$$

$$\frac{d\delta}{d\xi} = -2\tau_r\eta^5 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4[\eta(\tau - q)] \tanh^2[\eta(\tau - q)] d\tau = -\frac{8\tau_r\eta^4}{15},$$

$$\frac{dq}{d\xi} = -\delta,$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\xi} &= 2\tau_r\eta^4 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4[\eta(\tau - q)] \tanh[\eta(\tau - q)] d\tau + \\ &\quad - 2\tau_r\eta^5 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4[\eta(\tau - q)] \tanh^2[\eta(\tau - q)] (\tau - q) d\tau + \frac{1}{2}(\eta^2 - \delta^2) - q\frac{8\tau_r\eta^4}{15} = \\ &= \frac{1}{2}(\eta^2 - \delta^2) - q\frac{8\tau_r\eta^4}{15}. \end{aligned}$$

Esta dinámica ilustra claramente como la principal coordenada afectada es el corrimiento de frecuencia δ del solitón, mientras que q y ϕ se modifican a su vez con respecto a la dinámica no perturbada por sus dependencias respectivas sobre δ . Tomar condiciones iniciales $q_o = \phi_o = 0$ llevan finalmente a las coordenadas colectivas que describen la evolución del solitón fundamental con efecto de dispersión intra-pulso de Raman a:

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= \eta_o, \\ \delta(\xi) &= \delta_o - \frac{8\tau_r\eta_o^4}{15}\xi, \\ q(\xi) &= \frac{4\tau_r\eta_o^4}{15}\xi^2 - \delta_o\xi, \\ \phi(\xi) &= (\eta_o^2 - \delta_o^2)\frac{\xi}{2} + \frac{4\tau_r\delta_o\eta_o^4}{15}\xi^2 - \frac{32\tau_r\eta_o^8}{675}\xi^3. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Recordando la forma generalizada del solitón fundamental perturbado (2.2) definido en función de las coordenadas colectivas:

$$\tilde{u}(\xi, \tau) = \eta(\xi) \operatorname{sech}\{\eta(\xi)[\tau - q(\xi)]\} e^{i[\phi(\xi) - \delta(\xi)\tau]},$$

se ve para la perturbación bajo estudio éste adopta la forma:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\xi, \tau) = & \eta_o \operatorname{sech} \left[\eta_o \left(\tau + \delta_o \xi - \frac{4\tau_r \eta_o^4}{15} \xi^2 \right) \right] \\ & \times \exp \left[i \left(\eta_o^2 - \delta_o^2 \right) \frac{\xi}{2} + i \frac{4\tau_r \delta_o \eta_o^4}{15} \xi^2 - i \frac{32\tau_r \eta_o^8}{675} \xi^3 - i \delta_o \tau + i \frac{8\tau_r \eta_o^4}{15} \xi \tau \right], \end{aligned}$$

y en forma canónica, donde $\eta_o = 1$ y $\delta_o = 0$, esto se reduce a:

$$\tilde{u}(\xi, \tau) = \operatorname{sech} \left(\tau - \frac{4\tau_r}{15} \xi^2 \right) \exp \left(i \frac{\xi}{2} - i \frac{32\tau_r}{675} \xi^3 + i \frac{8\tau_r}{15} \xi \tau \right). \quad (2.27)$$

Este resultado revela el auto-corrimento de frecuencia del solitón perturbado y el desplazamiento del centro de la envolvente, lineal en el parámetro perturbativo τ_r pero cuadrático en la distancia de propagación ξ , lo cual lo hace más pronunciado que el desplazamiento por efecto de auto-escarpado. El signo negativo de la coordenada δ resultante resalta el proceso de ampliación de las ondas Stokes, dado que tal expresión se traduce en una reducción neta de la frecuencia del solitón perturbado.

Importante también es el cambio inducido en la fase del solitón, la cual crece en el tiempo τ , a diferencia de todos los casos anteriores, pero se retrasa con respecto al caso no perturbado $\xi/2$ a razón cúbica de la propagación, debido a la naturaleza de respuesta lenta vibracional del efecto Raman.

Capítulo 3

Estudio Numérico

La inclusión de términos perturbativos en la descripción de la evolución del solitón \tilde{u} en el medio de Kerr apartan la ENLS (2.1) de la dinámica completamente integrable que la hace apta para el tratamiento analítico por el método de la transformada de dispersión inversa, correspondiente al caso $R = 0$, así algunas perturbaciones como el efecto de auto-escarpado preserven el carácter Hamiltoniano del sistema.

Aproximaciones analíticas como la dinámica adiabática de las coordenadas colectivas ofrecen una primera visión del comportamiento de las soluciones de la ENLS perturbada, al asumir la preservación de una forma funcional de \tilde{u} a través de su propagación por la fibra cuando el parámetro de perturbación $\varepsilon \ll 1$, según el principio de optimización de Rayleigh-Ritz. Para el solitón temporal-brillante fundamental, el ansatz preservado es la envolvente secante hiperbólica (2.2), cuyas perturbaciones fueron estudiadas adiabáticamente en el Capítulo 2.

El objetivo principal del estudio numérico es resolver la ENLS (2.1) directamente para una perturbación R dada a través de aproximaciones numéricas progresivas, lo cual permite estudiar la evolución de \tilde{u} independientemente de las características y/o limitaciones impuestas por cualquier ansatz. Esto permite comprobar el rango de validez de las predicciones hechas por aproximaciones analíticas como la adiabática.

3.1. Método Split-Step de Fourier

La técnica conocida como *split-step de Fourier* fue el método de análisis numérico escogido en este trabajo para el estudio de las distintas formas tratadas de la ENLS perturbada, dada la amplia gama de antecedentes que tiene no solo en el área de las simulaciones de problemas de la óptica no-lineal sino también en el estudio de diversos problemas de naturaleza ondulatorios en otros campos de la Física [1–3, 10, 21, 22, 26, 29, 40, 49, 50].

Esa técnica, conocida también como “SFM” por sus siglas en Inglés, es un método *pseudoespectral* que realiza parte del análisis de la evolución del problema en el dominio temporal y otra en el dominio de frecuencias correspondiente, razón por la cual es uno de los métodos preferidos para el estudio numérico de fenómenos gobernados por ecuaciones de tipo No-Lineal de Schrödinger y afines, dada la naturaleza ondulatoria de los sistemas en los cuales éstas emergen. Este tipo de análisis espectral, con la ayuda de algoritmos altamente eficientes como el de la Transformada Rápida de Fourier (“FFT” por sus siglas en Inglés), hacen que, para órdenes comparables de precisión, métodos como el split-step de Fourier sea más rápido hasta por un orden de magnitud que los implícitos que operan solamente en el dominio temporal, como el de diferencias finitas y afines [1, 7, 10, 21, 48].

Otra diferencia importante entre métodos implícitos y el split-step de Fourier es el carácter explícito de este último, al expresar la solución del problema en estudio al tiempo $t + \Delta t$ como una función explícita y conocida de la solución en el tiempo anterior t :

$$y(t + \Delta t) = f(y(t))$$

Para el caso de la ENLS perturbada (2.1) de la óptica no-lineal, llevada a su forma no normalizada y escrita sin la notación tilde de las perturbaciones, la evolución de la solución ψ ocurre en la variable de propagación z en intervalos espaciales pequeños

3.1. Método Split-Step de Fourier

$h = \Delta z$, en vez de en el tiempo, mientras que para esta última variable el presente trabajo asume el uso del mismo tiempo retardado T introducido en la transformación (1.16). Con este formalismo, el análisis por split-step de Fourier expresa la evolución de la solución ψ de la ENLS como el resultado de la acción combinada sobre ella misma de dos operadores \hat{L} y \hat{N} desacoplados, con \hat{L} comprendiendo los efectos lineales que el pulso experimenta a medida que se propaga por el medio de Kerr y \hat{N} los no-lineales:

$$\frac{\partial \psi(z, T)}{\partial z} = (\hat{L} + \hat{N}) \psi(z, T), \quad (3.1)$$

por lo cual:

$$\psi(z + h, T) = e^{h(\hat{L} + \hat{N})} \psi(z, T) \quad (|h| < 1). \quad (3.2)$$

Tomando como referencia la Ecuación No-Lineal de Schrödinger Generalizada y no normalizada (2.19), es fácil ver que el operador lineal \hat{L} engloba los efectos de disipación y dispersión de segundo orden, mientras que \hat{N} da cuenta de los efectos de auto-modulación de fase de Kerr, auto-escarpado y dispersión intra-pulso de Raman [1, 10]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{\alpha}{2} \psi - i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} + i \gamma |\psi|^2 \psi - \frac{\gamma}{\omega_o} \frac{\partial}{\partial T} (|\psi|^2 \psi) - i \gamma T_R \frac{\partial |\psi|^2}{\partial T} \psi,$$

de donde:

$$\hat{L} = -\frac{\alpha}{2} - i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial T^2}, \quad (3.3)$$

y

$$\hat{N} = i \gamma \left[|\psi|^2 + i \frac{1}{\omega_o \psi} \frac{\partial}{\partial T} (|\psi|^2 \psi) - T_R \frac{\partial |\psi|^2}{\partial T} \right]. \quad (3.4)$$

La naturaleza compleja de estos operadores sugiere que la solución ψ en el resultado (3.2) lo es también, conteniendo información de la evolución de la intensidad y fase del pulso a medida que se propaga por el medio de Kerr.

El método split-step de Fourier intenta conseguir una solución aproximada de la ENLS escrita en su forma operacional (3.1) al asumir que en cada intervalo de propagación $h = \Delta z$, los efectos lineales actúan sobre el pulso ψ independientemente de los no-lineales. Esto implica una expansión del término exponencial de la solución (3.2):

$$\psi(z + h, T) \approx e^{(h\hat{L})} e^{(h\hat{N})} \psi(z, T) . \quad (3.5)$$

Esta suposición incurre en un término dominante de error de orden $\mathcal{O}(h^2)$ en cada intervalo recorrido, dada la naturaleza no conmutativa de los operadores \hat{L} y \hat{N} (atribuible a la acción inherentemente acoplada de los efectos lineales y no-lineales del medio sobre el pulso) y el resultado de la serie de *Baker-Campbell-Hausdorf* para dos operadores \hat{a} y \hat{b} tales [1, 3, 10, 22]:

$$\exp(\hat{a} + \hat{b}) = \exp(\hat{a}) \exp(\hat{b}) \exp\left(\frac{1}{2} [\hat{a}, \hat{b}]\right) \exp\left(\frac{1}{12} [\hat{a} - \hat{b}, [\hat{a}, \hat{b}]]\right) \exp\left(-\frac{1}{12} [\hat{b} - \hat{a}, [\hat{b}, \hat{a}]]\right) \dots ,$$

donde

$$\hat{a} = h\hat{L}$$

y

$$\hat{b} = h\hat{N} ,$$

por lo cual:

$$[\hat{a}, \hat{b}] = h^2 [\hat{L}, \hat{N}] .$$

Dado que el número total de intervalos h necesarios para recorrer la longitud entera del medio es inversamente proporcional al tamaño de cada intervalo en sí, el *error global* acumulado en la solución aproximada (3.5) tras un recorrido completo es de orden $\mathcal{O}(h)$ [3, 22]. Esto impulsa la búsqueda de mejoras en la precisión de la solución numérica, sin necesariamente incurrir en el potencialmente elevado costo de cómputo que significaría la reducción del tamaño de h .

3.1.1. Simetrización

La técnica más común en la mejora de la precisión numérica del método split-step de Fourier es conocida como *simetrización*, y consta de dos modificaciones importantes al esquema matemático de la primera aproximación ofrecida por el resultado (3.5).

El primer cambio, que en sí da origen al nombre de la técnica *split-step de Fourier simetrizado* (“SSFM” por sus siglas en Inglés), consta de la división del intervalo h en dos subintervalos $h/2$ individuales, dentro de los cuales se considera la acción solitaria del operador lineal \hat{L} sobre el pulso [1, 3, 10]:

$$\psi(z+h, T) \approx \exp\left(\frac{h}{2}\hat{L}\right) \exp(h\hat{N}) \exp\left(\frac{h}{2}\hat{L}\right) \psi(z, T) .$$

Este esquema efectivamente confina la acción del operador no-lineal \hat{N} a exactamente la mitad del intervalo, al estilo de una delta de Dirac en el punto específico $h/2$. El segundo cambio aplicado a la aproximación (3.5) consta de una descripción de la acción de \hat{N} más apropiada que ésta, al dar cuenta de su dependencia sobre z por ser éste un operador que no sólo actúa sobre el pulso sino que también depende de él, según su definición (3.4). Esta descripción se logra a través de la integración de $\hat{N}(z')$ desde z hasta $z+h$, con el empleo de la *regla trapezoidal* para la aproximación numérica de la integral [1, 3]:

$$\psi(z+h, T) \approx \exp\left(\frac{h}{2}\hat{L}\right) \exp\left[\int_z^{z+h} \hat{N}(z') dz'\right] \exp\left(\frac{h}{2}\hat{L}\right) \psi(z, T) , \quad (3.6)$$

donde

$$\int_z^{z+h} \hat{N}(z') dz' \approx \frac{h}{2} [\hat{N}(z) + \hat{N}(z+h)] .$$

Dado que el valor de $\hat{N}(z+h)$ no es conocido la hora en aplicar esta aproximación en el cálculo de $\psi(z+h)$, una metodología al estilo predictor-corrector de dos pasos se puede emplear para preservar el esquema mejorado (3.6). En primera instancia, y

partiendo de un $\psi(z, T)$ ya conocido (e.g. la condición de frontera $\psi(0, T)$), una acción no-lineal aproximada por $\exp[h\hat{N}(z)]$ es insertada en (3.6) para predecir el valor de $\psi(z+h, T)$, el cual a su vez es usado para estimar el $\hat{N}(z+h)$ correspondiente; seguidamente, la regla trapezoidal para la integral del operador $\hat{N}(z')$ es usada para corregir el valor final de $\psi(z+h, T)$, en base al mismo $\psi(z, T)$ usado en la predicción inicial y mediante el uso del valor estimado de $\hat{N}(z+h)$ [1, 48].

El esquema (3.6) para la implementación del método split-step de Fourier simetrizado significa una mejora de un orden de magnitud en la precisión de las aproximaciones numéricas, al compararlas con aquellas del esquema (3.5) para un intervalo h de igual magnitud, siendo que ahora el término dominante de error se debe a los dobles conmutadores en la serie de Baker-Campbell-Hausdorff y por ende de orden $\mathcal{O}(h^3)$ [1, 3, 10, 22]:

$$[\hat{a} - \hat{b}, [\hat{a}, \hat{b}]] = [h(\hat{L} - \hat{N}), h^2[\hat{L}, \hat{N}]] = h^3[\hat{L} - \hat{N}, [\hat{L}, \hat{N}]].$$

Consecuentemente, se ve que el error global acumulado al recorrer toda la longitud del medio es ahora de orden $\mathcal{O}(h^2)$ [22].

El paso final en la implementación del esquema (3.6) es la transformación del operador lineal $\hat{L}(T)$ a su representación espectral $\hat{\mathcal{L}}(\omega)$, en búsqueda de ahorro de tiempo de cómputo gracias a la forma matemática simplificada del dominio de frecuencias [10]:

$$\hat{\mathcal{L}}(\omega) = \mathcal{F} \left\{ -\frac{\alpha}{2} - \sum_{m=2} \left(\frac{i}{2}\right)^{m-1} \beta_m \frac{\partial^m}{\partial T^m} \right\} = -\frac{\alpha}{2} - \sum_{m=2} \left(\frac{i}{2}\right)^{m-1} \beta_m (i\omega)^m,$$

por lo tanto:

$$\hat{\mathcal{L}}(\omega) = -\frac{\alpha}{2} + i\frac{\beta_2}{2}\omega^2, \quad (3.7)$$

donde \mathcal{F} representa la operación transformada de Fourier. Este cambio implica la conversión numérica del valor del pulso $\psi(z, T)$ del dominio temporal al de frecuencias,

y de vuelta al temporal por medio de la transformada inversa \mathcal{F}^{-1} , a medida que los operadores $\hat{\mathcal{L}}$ y \hat{N} intercalan su acción sobre el pulso a través del recorrido del intervalo h . El resultado es una regla de cuatro operaciones progresivas para el cálculo predictor de $\psi(z+h, T)$ según el esquema (3.6) del método split-step de Fourier simetrizado, y cuatro análogas para el cálculo corrector, llevando así a ψ paso a paso en intervalos h hasta cubrir toda la longitud del medio de propagación:

$$a_\omega = \exp\left(\frac{h}{2}\hat{\mathcal{L}}\right) \mathcal{F}\{\psi(z, T)\},$$

$$b_t = \exp\left[\int_z^{z+h} \hat{N}(z') dz'\right] \mathcal{F}^{-1}\{a_\omega\},$$

$$c_\omega = \exp\left(\frac{h}{2}\hat{\mathcal{L}}\right) \mathcal{F}\{b_t\},$$

$$\psi(z+h, T) = \mathcal{F}^{-1}\{c_\omega\},$$

por lo cual:

$$\psi(z+h, T) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\exp\left(\frac{h}{2}\hat{\mathcal{L}}\right) \mathcal{F}\left\{\exp\left[\int_z^{z+h} \hat{N}(z') dz'\right] \mathcal{F}^{-1}\left\{\exp\left(\frac{h}{2}\hat{\mathcal{L}}\right) \mathcal{F}\{\psi(z, T)\}\right\}\right\}\right\}. \quad (3.8)$$

3.1.2. Estabilidad Numérica

La no conmutatividad de los operadores $\hat{\mathcal{L}}$ y \hat{N} no es la única fuente de error numérico en el análisis por split-step de Fourier simetrizado, si bien es la de mayor peso. Un aspecto muy importante en la discusión de la precisión de las predicciones de este método es el relativo a su *estabilidad numérica*, la cual depende críticamente de un apropiado acondicionamiento del problema a estudiar [3, 10].

En el caso de simulaciones de los problemas que emergen de las variadas formas de la ENLS, el acondicionamiento apropiado de un problema dado se basa principalmente

en el uso de valores numéricos de las cantidades físicas involucradas lo más precisos posible con respecto a sus valores teóricos correspondientes, como por ejemplo para los cuatro parámetros básicos del solitón brillante: la potencia de entrada P_o , su ancho temporal inicial T_o , el coeficiente de dispersión de velocidad de grupo β_2 del medio y el coeficiente no-lineal de Kerr γ . Estos parámetros definen las magnitudes de las longitudes características L_D (dispersión) y L_{NL} (no-lineal) del solitón, según las ecuaciones (1.21) y (1.23), y el conocimiento preciso de éstas es indispensable para la estimación apropiada del intervalo espacial h .

Para valores de h aproximados a cualquiera de estas dos longitudes características (que en el caso del solitón fundamental son iguales entre sí, según la relación (1.22)), las predicciones del este análisis numérico son tales que, de intervalo h en intervalo, la energía del pulso no se conserva para de un valor de tolerancia numérica predefinido, incluso en el caso de simulaciones sobre la ENLS no perturbada (1.17). Esto acusa un proceso de ampliación progresiva del error introducido por la no conmutatividad de $\hat{\mathcal{L}}$ y \hat{N} , por lo cual se concluye que la estabilidad numérica del método depende muy sensiblemente sobre la escogencia adecuada de h , tal que $h \ll L_D$ y/o $h \ll L_{NL}$ [10, 22, 49].

Definiendo la energía del pulso en el punto $z + h$ como E_{z+h} y en z como E_z , la condición de estabilidad numérica del método split-step de Fourier simetrizado se puede definir como [3, 11, 49]:

$$\left| \frac{\Delta E}{E_z} \right| \ll 1, \quad (3.9)$$

donde

$$\Delta E = E_{z+h} - E_z,$$

con

$$E_z = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |\psi(z, T')|^2 dT' \quad (3.10)$$

y

$$E_{z+h} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |\psi(z+h, T')|^2 dT'. \quad (3.11)$$

Para simulaciones de efectos como la dispersión intra-pulso de Raman, el cual de por sí no conserva la energía debido a la excitación de los fonones ópticos del medio, la cantidad que se busca monitorear para asegurar la estabilidad numérica de la simulación es el número clásico de fotones [10].

La reducción del tamaño de h no es arbitraria, sin embargo, puesto que este parámetro tiene una cota inferior natural en la longitud de onda λ_o del pulso, dado que información espacial a una escala menor que ésta no tendría significado físico; por lo tanto, la condición $h \geq \lambda_o$ siempre se debería cumplir. No obstante, para los valores típicos de λ_o que logran la condición de dispersión anómala en los medios de Kerr, $\lambda_o \approx 1,55 \mu\text{m}$ [1–3, 8], un valor de h cercano a este límite incurriría en un costo de cómputo sumamente elevado para las longitudes típicas de propagación en la gran mayoría de las simulaciones.

Otra metodología para el cálculo del intervalo h , común en las simulaciones de sistemas de comunicación basados en la transferencia de solitones como bits de información, se centra en la minimización del cambio de fase que sufre el solitón en cada paso h tomado, ignorando los efectos de dispersión de velocidad de grupo del factor β_2 [1]:

$$\frac{d\psi}{dz} = -i\gamma |\psi|^2 \psi \quad \implies \quad \psi(z) = \psi(0) \exp[-i\gamma |\psi(0)|^2 z].$$

Diversos estudios muestran que, para un valor pico de potencia del pulso $P = |\psi_p|^2$, un h apropiado que mantenga al cambio de fase menor a la cota $\Phi_{\max} = \gamma |\psi_p|^2 h = 0,05 \text{ rad}$ produce resultados numéricos dentro de un rango de precisión y estabilidad aceptable [48].

Finalmente, otra fuente de error en el análisis numérico por el método split-step de Fourier simetrizado es debido al muestreo temporal posiblemente inadecuado del pulso $\psi(z, T)$ durante su transformación a la representación espectral $\Psi(z, \omega)$, necesaria para la acción del operador $\hat{\mathcal{L}}(\omega)$. La ventana temporal escogida para este muestreo debe ser lo suficientemente amplia como para que el cálculo de la energía ilustrado en las definiciones (3.10) y (3.11) produzca un valor aceptable dentro del rango de tolerancia escogido. En la práctica, esto quiere decir que el valor límite de T en la integral de la energía, T_m , debe ser entre 10 y 20 veces mayor que el ancho temporal T_o del pulso [1], de modo que:

$$|T_m| = NT_o, \quad (3.12)$$

con

$$5 < N < 10.$$

Una vez determinada la ventana de muestreo, el número de puntos $n = 2^m$ dentro de ella en los cuales se toma el valor numérico de $\psi(z, T)$ debe ser tal que el algoritmo de FFT no produzca efectos de *aliasing* en el espectro de frecuencias al producir el valor de $\Psi(z, \omega)$, i.e. la creación de componentes espectrales espurias debido a una frecuencia de muestreo inadecuada. Esto ocurre cuando esta frecuencia es menor a la proscrita por el *teorema de Nyquist-Shannon*, según el cual la ventana temporal se debe muestrear mínimo a una tasa dos veces mayor que la frecuencia más alta de amplitud significativa en el espectro del pulso [10]. En otras palabras, dada una frecuencia máxima ν_{max} en el espectro de ψ para la cual su energía todavía no se considera despreciable, el espaciado mayor posible ΔT entre las medidas de $\psi(z, T)$ que evita los efectos de aliasing en la ventana escogida viene dado por:

$$\Delta T = \frac{1}{2\nu_{max}}.$$

En la práctica, una frecuencia de muestreo tal que produzca un número $n = 1024$

puntos en la ventana temporal cumple con el requisito del teorema de Nyquist-Shannon [50].

3.1.3. Perfil de Entrada

La simulación de cualquier ENLS por el método split-step de Fourier simetrizado comienza con la definición de una condición de frontera $\psi(0, T)$, conocida como la condición inicial del problema o *perfil de entrada*, a partir del cual se inicia el proceso descrito por el esquema (3.8) para obtener el valor de $\psi(h, T)$ en función de él, dada cualquier forma particular que adopten los operadores \mathcal{L} y \hat{N} para el problema específico bajo estudio.

El presente trabajo se centra en el estudio de la propagación en un medio de Kerr del solitón fundamental (2.2) bajo los efectos de diversos tipos de perturbaciones, asumiéndolo como el ansatz de la dinámica adiabática (2.12) que ofrece una aproximación analítica de su evolución para cada perturbación individual. Por esta razón, para todos los análisis numéricos realizados el perfil de entrada del problema se definió como la evaluación correspondiente de la forma canónica (1.28) en el extremo $z = 0$ del medio, dado que siempre es posible imponer las condiciones iniciales necesarias $\{\eta_o, q_o, \delta_o, \phi_o\}$ al sistema [1, 10, 22, 48]. Devolviendo el proceso de normalización que transforma el pulso ψ en el solitón canónico (1.28), descrito en la Sección 1.2.3, se ve que en sus unidades físicas naturales éste adopta la forma:

$$u = \frac{N\psi}{\sqrt{P_o}} = \frac{\psi}{\sqrt{P_o}} \quad \Longrightarrow \quad \psi(z, T) = \sqrt{P_o} \operatorname{sech}\left(\frac{T}{T_o}\right) e^{iz/2L_D}, \quad (3.13)$$

con

$$N = 1,$$

por lo cual:

$$\psi(0, t) = \sqrt{P_o} \operatorname{sech}\left(\frac{t}{T_o}\right), \quad (3.14)$$

donde

$$T \Big|_{z=0} = (t - \beta_1 z) \Big|_{z=0} = t.$$

Una de las condiciones necesarias para que este perfil evolucione como un solitón fundamental en el medio de Kerr es el cumplimiento del valor unitario del orden N en la relación (1.22), para un conjunto de parámetros β_2 , γ , T_o y P_o usados. Quedando los valores de β_2 y γ determinados por la longitud de onda λ_o empleada en el perfil de entrada, según las relaciones (1.19) y (1.15) respectivamente, el ancho temporal inicial T_o y la potencia de entrada P_o pasan a estar unívocamente relacionadas por:

$$N = 1 \quad \implies \quad P_o = \frac{|\beta_2|}{\gamma T_o^2}. \quad (3.15)$$

Respetar esta regla en la selección de la potencia de entrada, para un T_o dado, es lo que garantiza que el pulso (3.14) evolucione al solitón fundamental canónico (1.28) en el caso de la ENLS no perturbada (1.24), y por ende se propague en el medio de Kerr como un ente dinámico robusto que no sufre alteraciones de tipo temporal ni espectral.

3.2. Simulación No Perturbada

Como un primer paso en el estudio numérico de las perturbaciones a la ENLS, se procedió a simular por medio del método split-step de Fourier simetrizado la solución de la ENLS no perturbada y no normalizada (1.17), el solitón fundamental canónico escrito en unidades físicas (3.13), con el propósito de confirmar la predicción analítica de la transformada de dispersión inversa cuando se cumple la condición (3.15) para el orden N del solitón. Siendo que esta solución es un caso particular del ansatz (2.2) de la dinámica adiabática (2.12) de las coordenadas colectivas, la confirmación numérica de sus diversas características puede aportar un primer indicio de validez a las predicciones

hechas por esta aproximación teórica sobre el comportamiento del sistema ante las distintas perturbaciones.

Para esta ENLS, los operadores $\hat{\mathcal{L}}$ y \hat{N} adoptan una forma simplificada, en base a sus definiciones iniciales (3.7) y (3.4):

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} + i \gamma |\psi|^2 \psi, \quad (3.16)$$

por lo cual:

$$\hat{\mathcal{L}} = i \frac{\beta_2}{2} \omega^2 \quad \text{y} \quad \hat{N} = i \gamma |\psi|^2. \quad (3.17)$$

La primera simulación realizada es la reproducción numérica del primer experimento que confirmó la existencia del solitón óptico brillante en sí, conducido por L. F. Mollenauer et al. y reportado en [5], tras el descubrimiento teórico de Hasegawa et al. [4]. El trabajo de Mollenauer documentó los resultados observados sobre la propagación bajo diversas condiciones de pulsos ultra-cortos en lo que fue una de las primeras fibras ópticas a base de sílice con polarización fija, distribución $F(x, y)$ uni-modal – ver ecuación (1.9) – y tasas muy bajas de pérdida energética al usar longitudes de onda cercanas a los $1,55 \mu\text{m}$, haciendo posible así modelar la dinámica de pulsos en este rango de λ con la ENLS no perturbada (3.16).

Para una longitud de onda del perfil de entrada (3.14) $\lambda_0 = 1,55 \mu\text{m} = 1,55 \times 10^{-6} \text{m}$, esta fibra exhibió un parámetro de dispersión de velocidad de grupo β_2 , un índice de refracción no-lineal n_2 y un coeficiente de no-linealidad de Kerr γ tales [1, 8]:

$$\begin{aligned} \beta_2 &\approx -18 \times 10^{-27} \frac{\text{s}^2}{\text{m}}, \\ n_2 &\approx 2,6 \times 10^{-20} \frac{\text{m}^2}{\text{W}}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\gamma \approx 1,36 \times 10^{-3} (\text{W} \cdot \text{m})^{-1}.$$

El valor de γ viene dado también en función de un área efectiva típica para esta fibra $A_{\text{eff}} = 80 \mu\text{m} = 80 \times 10^{-12} \text{m}^2$ [8]. Con un láser de alto vacío como la única fuente disponible al momento de pulsos ópticos ultra-cortos, con $T_o = 4 \text{ps} = 4 \times 10^{-12} \text{s}$, la potencia de entrada P_o requerida para inyectar el solitón fundamental canónico dentro de la fibra fue, según la relación (3.15):

$$T_o = 4 \times 10^{-12} \text{s} \quad \implies \quad P_o \approx 0,827 \text{ W}. \quad (3.19)$$

En base a estos parámetros, y partiendo de las ecuaciones (1.21), (1.23) y (1.22), obtenemos $L_D = 889 \text{ m}$, $L_{\text{NL}} = 889 \text{ m}$ y por ende $N = 1$.

En su experimento, Mollenauer y su equipo pudieron propagar el pulso a través de una distancia solamente de 700 m, puesto que ésta era la longitud máxima de la única fibra no disipativa con los parámetros (3.18) que poseían al momento. La Figura 3.1 muestra la superposición del perfil temporal de intensidad $|\psi(T)|^2$ de la entrada (3.14) y de la solución numérica de la ENLS (3.16), con operadores $\hat{\mathcal{L}}$ y \hat{N} (3.17), tras una propagación $L = 3556 \text{ m}$ ($\xi = z/L_D = 4$) cubierta en su totalidad en pasos de tamaño fijo $h = 0,1 \text{ m} \ll L_D$, los cuales en todo momento conservaron la energía del pulso. La prácticamente perfecta coincidencia de los dos perfiles confirma la propiedad principal del solitón fundamental predicha por la solución analítica, i.e. su capacidad de propagarse grandes distancias, virtualmente ilimitadas en el caso no perturbado, sin sufrir distorsión alguna, subrayando así su carácter de entidad dinámica robusta.

La Figura 3.2 muestra la superposición equivalente para los espectros de frecuencia $|\psi(\omega)|^2$ del perfil de entrada y de la solución numérica de la ENLS (3.16) bajo las mismas condiciones, revelando nuevamente la ausencia de distorsiones en el pulso propagado y además el cumplimiento de la condición de monocromaticidad $\omega_o \gg \Delta\omega$ en ambos perfiles, puesto que claramente $\delta(0) = \delta(L) = \delta_o \approx 0$ en la figura.

La segunda y tercera simulación hacen uso de los parámetros de las fibras conocidas como “dispersion-shifted”, es decir, aquellas para las cuales la longitud de onda

3.2. Simulación No Perturbada

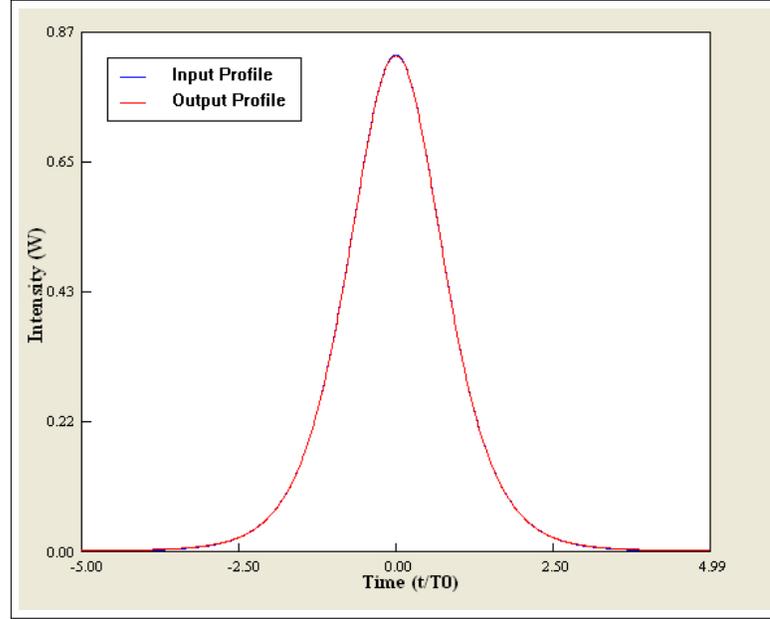


Figura 3.1: Simulación conservativa con parámetros de fibra regular (3.18) y de solitón (3.19). Dominio temporal.

de dispersión cero λ_D ha sido desplazada hacia las cercanías de $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$, generalmente a través del ajuste cuidadoso de propiedades como el radio del núcleo y/o la diferencia de índices de refracción en la interface núcleo-revestimiento (“core-cladding interface”), ya que en este régimen las pérdidas energéticas por disipación son aún menores [1, 7, 47]. Para estas fibras, el parámetro de dispersión de velocidad de grupo β_2 se ve substancialmente reducido en valor absoluto con respecto al de las fibras regulares, pero no lo suficiente como para hacer necesaria la inclusión del parámetro de dispersión de tercer orden β_3 en la descripción de la dinámica del pulso. Los valores experimentales son, en función de un área efectiva $A_{\text{eff}} \approx 34 \mu\text{m}^2$ [1]:

$$\begin{aligned} \beta_2 &\approx -1 \times 10^{-27} \frac{\text{s}^2}{\text{m}}, \\ n_2 &\approx 2,5 \times 10^{-20} \frac{\text{m}^2}{\text{W}}, \\ \gamma &\approx 3 \times 10^{-3} (\text{W} - \text{m})^{-1}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Haciendo uso nuevamente de la relación (3.15) para conocer la potencia de entrada

3.2. Simulación No Perturbada

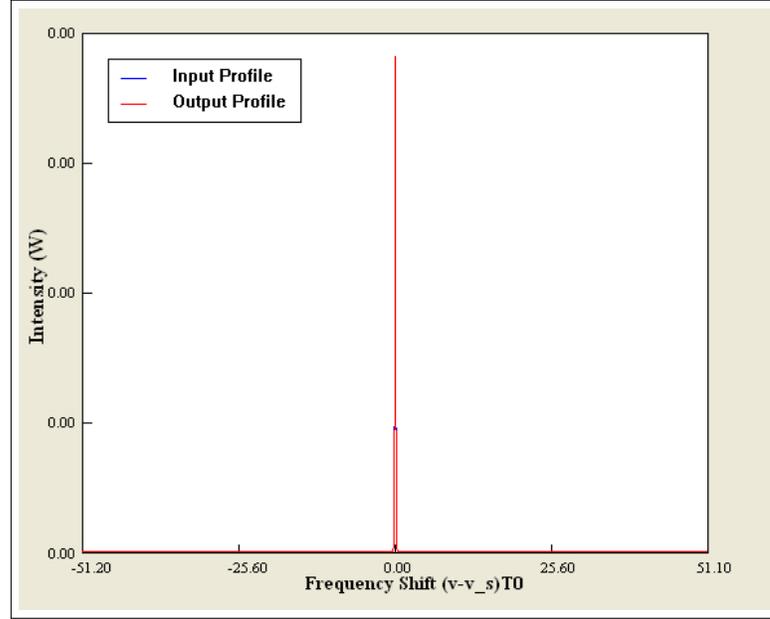


Figura 3.2: Simulación conservativa con parámetros de fibra regular (3.18) y de solitón (3.19). Dominio de frecuencias.

necesaria para la estabilidad del solitón fundamental, en base a un ancho temporal dado, se obtienen los valores respectivos para la segunda y tercera simulación, junto a las longitudes características de los solitones correspondientes:

$$2. \quad T_o = 1 \times 10^{-12} \text{ s} \quad \implies \quad P_o \approx 0,333 \text{ W}, \quad (3.21)$$

$$L_D = 1 \text{ Km}, \quad L_{NL} = 1 \text{ Km} \quad \text{y} \quad N = 1.$$

$$3. \quad T_o = 10 \times 10^{-12} \text{ s} \quad \implies \quad P_o \approx 0,00333 \text{ W}, \quad (3.22)$$

$$L_D = 100 \text{ Km}, \quad L_{NL} = 100 \text{ Km} \quad \text{y} \quad N = 1.$$

Las Figuras 3.3 y 3.4 muestran nuevamente la superposición del perfil temporal de intensidad $|\psi(T)|^2$ de la entrada (3.14) junto a las soluciones numéricas de la ENLS (3.16) para cada grupo de parámetros, (3.21) y (3.22) respectivamente, con el propósito de demostrar la formación exitosa del solitón fundamental en dos casos distintos que comparten dentro de la misma fibra la característica de respetar la condición $N = 1$

3.2. Simulación No Perturbada

del orden del solitón. En la segunda simulación el pulso fue propagado una distancia $L = 4000$ m ($\xi = 4$) en pasos fijos de $h = 0,1$ m, y en la tercera los valores correspondientes fueron solamente de $L = 8000$ m ($\xi = 0,08$) y $h = 0,2$ m debido al alto costo computacional de los cálculos para un $\xi = 4$ equivalente ($L = 400000$ m). No obstante, en ambos casos se puede apreciar por igual el casi perfecto solapamiento de los perfiles de entrada y salida, demostrando nuevamente la ausencia de distorsiones durante la propagación y así la robustez del solitón fundamental.

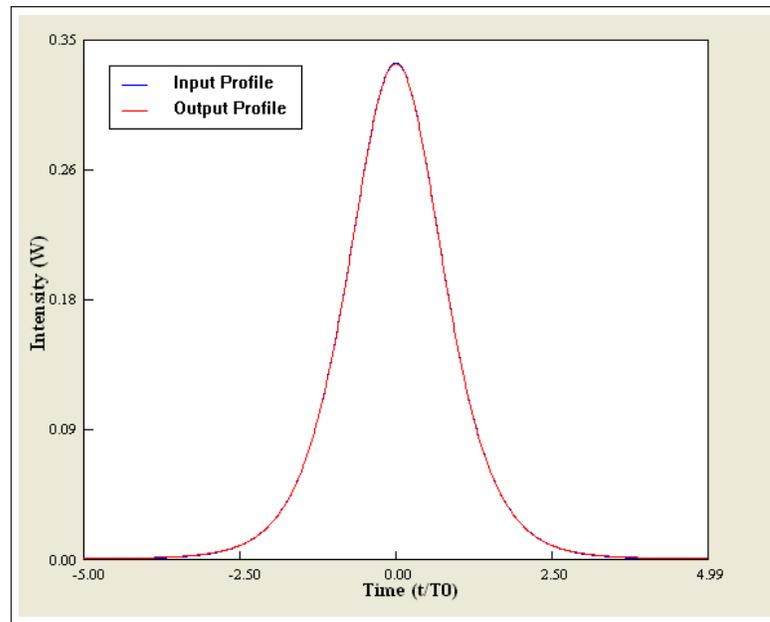


Figura 3.3: Simulación conservativa con parámetros de fibra “dispersion-shifted” (3.20) y de solitón (3.21). Dominio temporal.

La última simulación de la ENLS no perturbada (3.16) consta de la verificación de una las propiedades más importantes de estabilidad del solitón fundamental, i.e. su capacidad de tolerar cierto rango de desviaciones en los valores óptimos de los parámetros de entrada, de modo que su orden $N \neq 1$, y aún así sobrevivir durante la propagación como ente dinámico robusto después de un proceso de adaptación que lo lleva a dispersar una parte de su energía en forma de radiación continua. El resultado es su transformación asintótica en el solitón fundamental correspondiente a un nuevo grupo equivalente de parámetros de entrada adecuados [1].

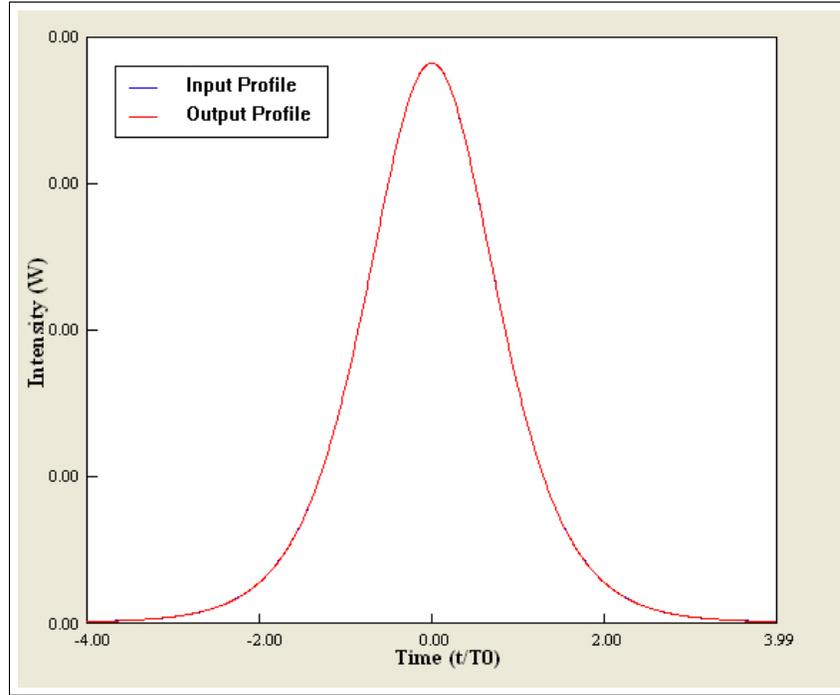


Figura 3.4: Simulación conservativa con parámetros de fibra “dispersion-shifted” (3.20) y de solitón (3.22). Dominio temporal.

Para la demostración se tomaron como referencia los parámetros (3.20) de la fibra “dispersion-shifted” y el $T_o = 1$ ps, pero el valor de la potencia inicial se modificó levemente a $P_o = 0,4$ W para producir así un orden modificado del solitón, tal que:

$$\tilde{N} = \frac{\gamma P_o T_o^2}{|\beta_2|} = 1,2.$$

Este orden se puede escribir como la combinación de una perturbación ε que se suma al orden N entero más cercano, al cual el solitón evoluciona asintóticamente mediante su proceso de adaptación a medida que se propaga. Para el caso presente:

$$\tilde{N} = N + \varepsilon = 1,2;$$

por lo cual:

$$\varepsilon = 0,2$$

3.2. Simulación No Perturbada

Buscando volver a cumplir con la condición $N = 1$, el solitón readapta su geometría a un ancho temporal $T_1 < T_o$, reducción que según la teoría ocurre siempre y cuando la perturbación $\varepsilon > 0$ [1]. Esto se puede observar claramente en la Figura 3.5, la cual muestra la comparación de los perfiles de intensidad $|\psi(T)|^2$ del pulso de entrada (3.14) vs. el de la solución numérica correspondiente al solitón de $\tilde{N} = 1,2$, después de ser propagado una distancia $L = 4000$ m ($\xi = 4$) por medio del split-step de Fourier simetrizado en pasos $h = 0,1$ m.

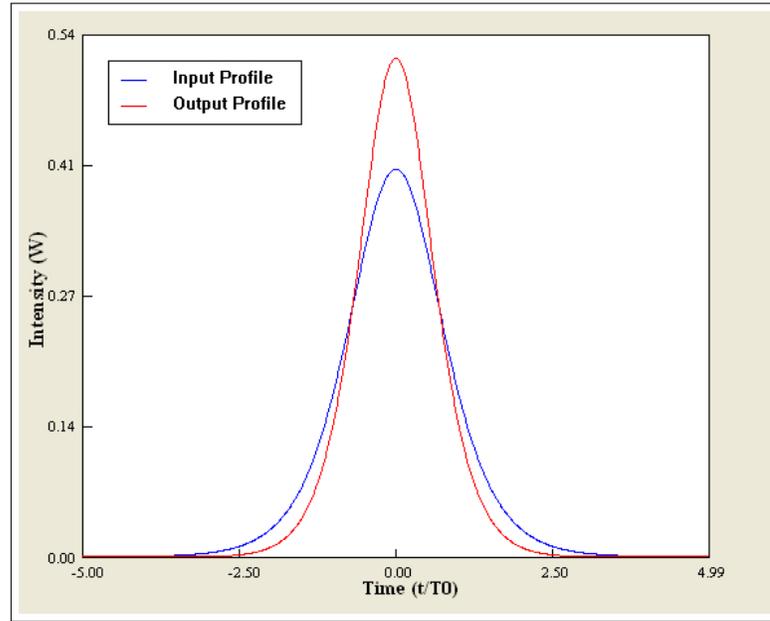


Figura 3.5: Simulación conservativa con parámetros de fibra “dispersion-shifted” (3.20) y orden de solitón $\tilde{N} = 1,2$. Dominio temporal.

El pico de potencia $P > P_o$ puede ser explicado en base a la nueva familia de parámetros que producen el nuevo orden $N = 1$, y por medio de la conservación de la energía del solitón fundamental emergente, el cual corresponde a un perfil equivalente de entrada:

$$\tilde{\psi}(0, t) = (N + 2\varepsilon) \sqrt{P} \operatorname{sech} \left[\left(1 + \frac{2\varepsilon}{N}\right) \frac{t}{T_o} \right] = 1,4\sqrt{P} \operatorname{sech} \left(1,4 \frac{t}{T_o}\right),$$

por lo tanto:

$$P = \frac{1,4 |\beta_2|}{\gamma T_o^2} \approx 0,467 \text{ W}.$$

Con esta potencia, y cumpliendo con la condición $N = 1$ de la familia de parámetros de la geometría límite, se obtiene el ancho T_1 del nuevo solitón:

$$N = 1 \quad \Longrightarrow \quad T_1 = \sqrt{\frac{|\beta_2|}{\gamma P}},$$

resultando en:

$$T_1 = 0,844 \text{ ps}.$$

3.3. Simulación Disipativa

El próximo paso en el estudio numérico de las perturbaciones a la ENLS es la simulación de los efectos de disipación que sufre el solitón fundamental en un medio no conservativo, estudiados adiabáticamente en la Sección 2.2 en base a la ENSL perturbada (2.15). Llevada a unidades físicas, esta ENLS y los operadores $\hat{\mathcal{L}}$ y \hat{N} correspondientes adoptan la forma:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{\alpha}{2} \psi - i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} + i \gamma |\psi|^2 \psi, \quad (3.23)$$

por lo que:

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{\alpha}{2} + i \frac{\beta_2}{2} \omega^2 \quad \text{y} \quad \hat{N} = i \gamma |\psi|^2. \quad (3.24)$$

Del resultado teórico (2.17) de la dinámica de las coordenadas colectivas para la perturbación disipativa, y recordando que $\Gamma = \alpha L_D$, se ve que el solitón fundamental canónico con efectos de disipación se puede escribir en unidades físicas como:

$$\tilde{\psi}(z, T) = \sqrt{P_o} e^{-\alpha z} \operatorname{sech} \left(\frac{T}{T_o} e^{-\alpha z} \right) \exp \left[i \frac{1 - e^{-2\alpha z}}{4\alpha L_D} \right], \quad (3.25)$$

por lo cual:

$$\tilde{\psi}(0, T) = \sqrt{P_o} \operatorname{sech} \left(\frac{t}{T_o} \right).$$

Este último resultado revela que el perfil de entrada (3.14) coincide con la forma del solitón disipado en la frontera de entrada de la fibra, $z = 0$, por lo cual se le considera apropiado como condición inicial de la simulación al igual que en el caso del sistema no perturbado simulado en la Sección 3.2.

Una forma muy común de escribir los factores de disipación es en decibeles por unidad de distancia recorrida, i.e. dB/m, lo que junto a la definición (2.14) de la constante de disipación α revela que la relación entre ésta y α_{dB} es [1]:

$$\alpha_{\text{dB}} = -\frac{10}{L} \log \left(\frac{P_{\text{T}}}{P_{\text{o}}} \right),$$

por lo que:

$$\alpha \approx \frac{\alpha_{\text{dB}}}{4,343}.$$

Un valor típico de disipación en fibras con parámetros standards (3.18), dentro del mismo rango de longitudes de onda en torno a $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$, es $\alpha_{\text{dB}} = 2 \times 10^{-4}$ dB/m, dada la poca absorción electromagnética que presenta el vidrio de sílice en este rango [1]. Por lo tanto:

$$\alpha = 4,605 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}. \quad (3.26)$$

La Figura 3.6 muestra la superposición de los perfiles de intensidad $|\psi(\text{T})|^2$ del perfil de entrada (3.14) vs. el de la solución numérica de la ENLS (3.23), después de haber sido propagada una distancia $L = 3556$ m ($\xi = 4$) en pasos $h = 0,1$ m, nuevamente haciendo uso de los parámetros de fibra (3.18) y los valores (3.19) para los parámetros de entrada del perfil, además de la constante de disipación α (3.26). La predicción adiabática plasmada en la solución (3.25) queda confirmada por esta simulación, al observarse claramente la preservación de la geometría de la envolvente secante hiperbólica del solitón pero con una reducción progresiva de su amplitud, lo cual a su vez conlleva al incremento de su ancho temporal T_1 en comparación al

inicial T_o , efecto predicho en el resultado (2.18). Por su parte, la ausencia de cambios en el corrimiento de frecuencia δ del solitón disipado, según el resultado (2.16) de su dinámica adiabática, queda evidenciado en la Figura 3.7, mostrando la solución numérica del perfil de intensidad $|\psi(\omega)|^2$ correspondiente a la simulación plasmada en la Figura 3.6.

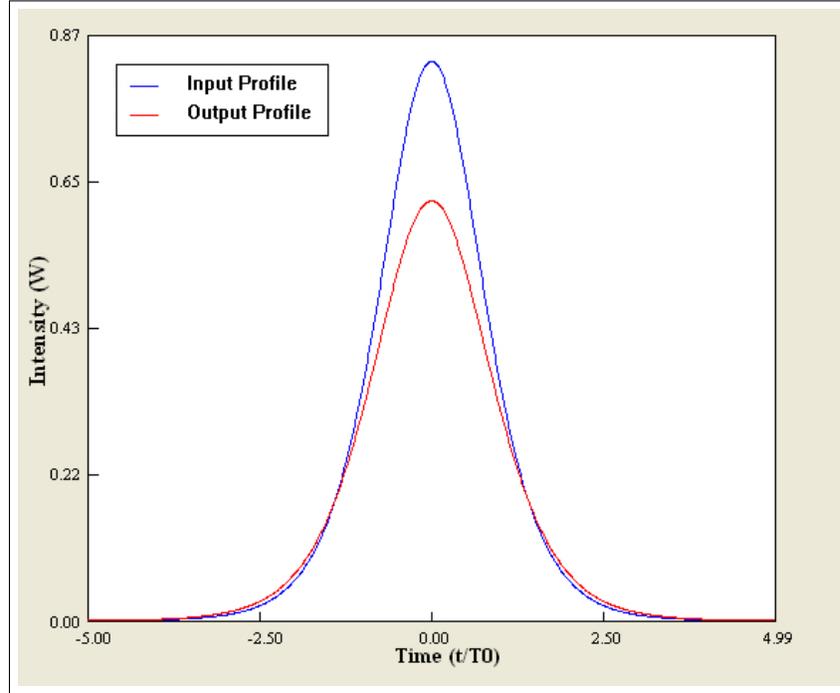


Figura 3.6: Simulación disipativa con parámetros de fibra regular (3.18) y de solitón (3.19). Dominio temporal.

Usando los mismos valores de T_o , P_o y α , la Figura 3.8 muestra la gráfica del perfil de intensidad $|\psi(T)|^2$ de la solución adiabática (3.25), evaluada en una distancia $L = 3556$ m y dentro de una ventana temporal $\tau = T/T_o = [-5; 5]$, con el propósito de compararla directamente al resultado numérico mostrado en la Figura 3.6. La marcada congruencia entre las escalas temporales y los picos de intensidad de estas dos gráficas confirma la validez del modelo adiabático en la descripción de los efectos disipativos sobre las coordenadas colectivas del solitón fundamental (2.2), dada la magnitud de la disipación modelada y la distancia L recorrida. Estos valores cumplen con la condición

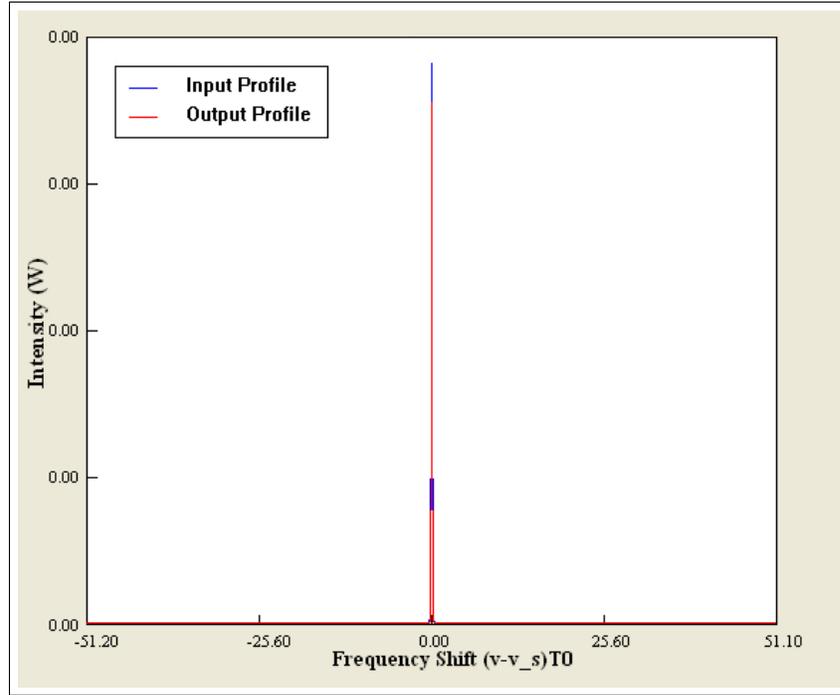


Figura 3.7: Simulación disipativa con parámetros de fibra regular (3.18) y de solitón (3.19). Dominio de frecuencias.

de estabilidad del solitón fundamental con efectos de disipación, deducida en el análisis de los resultados (2.17) y (2.18) en la Sección 2.2:

$$\Gamma\xi_f = \alpha L \approx 0,164 \ll 1.$$

Tomando una distancia z_m como la propagación máxima para la cual el resultado adiabático (3.25) es aún aceptado como válido, de modo que $\alpha z_m \approx 1$ [1], se ve que en base al valor (3.26) de α esta distancia es:

$$z_m = 21714,724 \text{ m} \quad \text{ó} \quad \xi_m \approx 24,426.$$

Una forma de confirmar la condición de validez de la predicción adiabática es mediante la construcción de una constante de disipación artificial α' para la cual la distancia máxima equivalente z'_m esté dentro del rango de la simulación numérica de

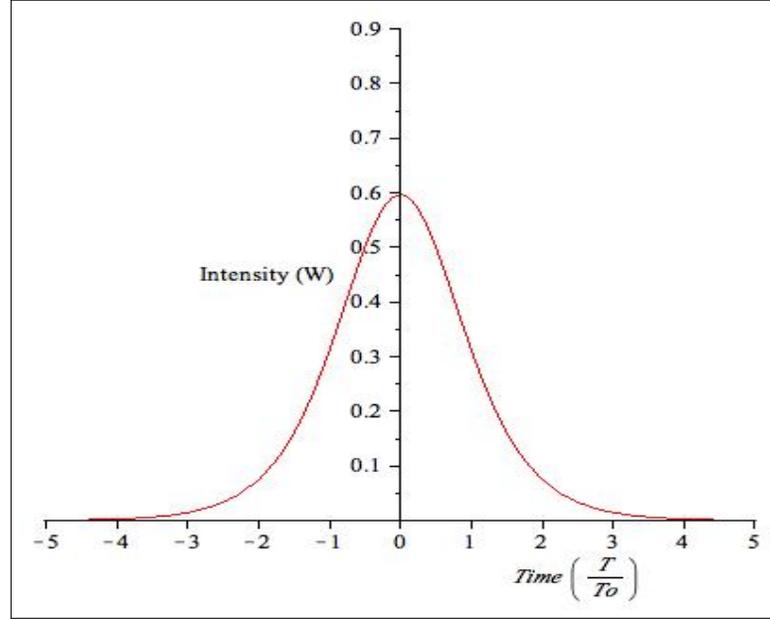


Figura 3.8: Solución analítica (3.25) de la dinámica adiabática de la ENLS (3.23), con parámetros de solitón (3.19) y α (3.26).

la Figura 3.6, i.e. $L = 4L_D$, con el $L_D = 889$ m calculado en base a los parámetros (3.18) de la fibra y (3.19) del perfil de entrada. Imponiendo manualmente la condición $\alpha' z'_m \approx 1$ para un $z'_m = 3L_D$, se ve que esta constante de disipación artificial tiene un valor:

$$\alpha' = \frac{1}{3L_D} \quad \implies \quad \alpha' = 3,750 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}. \quad (3.27)$$

La Figura 3.9 muestra la superposición del perfil de intensidad $|\psi(T)|^2$ de la entrada (3.14) vs. el de la solución numérica de la ENLS (3.23), tras ser propagada nuevamente una distancia $L = 3556$ m ($\xi = 4$) en intervalos $h = 0,1$ m, con los parámetros (3.18) de la fibra y (3.19) del perfil de entrada, mas con la constante de disipación α' (3.27) calculada previamente. En comparación, la Figura 3.10 muestra la gráfica del perfil de intensidad de la solución adiabática (3.25) para el mismo grupo de valores P_o , T_o y α' , dentro de la ventana temporal $\tau = T/T_o = [-7,5 \ 7,5]$. Es clara la discrepancia entre los picos de intensidad de ambos perfiles de salida, demostrando así la limitación de la predicción adiabática al describir la evolución del solitón disipado

3.4. Simulación de Auto-Escarpado

una vez recorrida distancias $z > z'_m$ a la tasa de pérdida energética α' , dado que en este caso $\alpha'z > 1$.

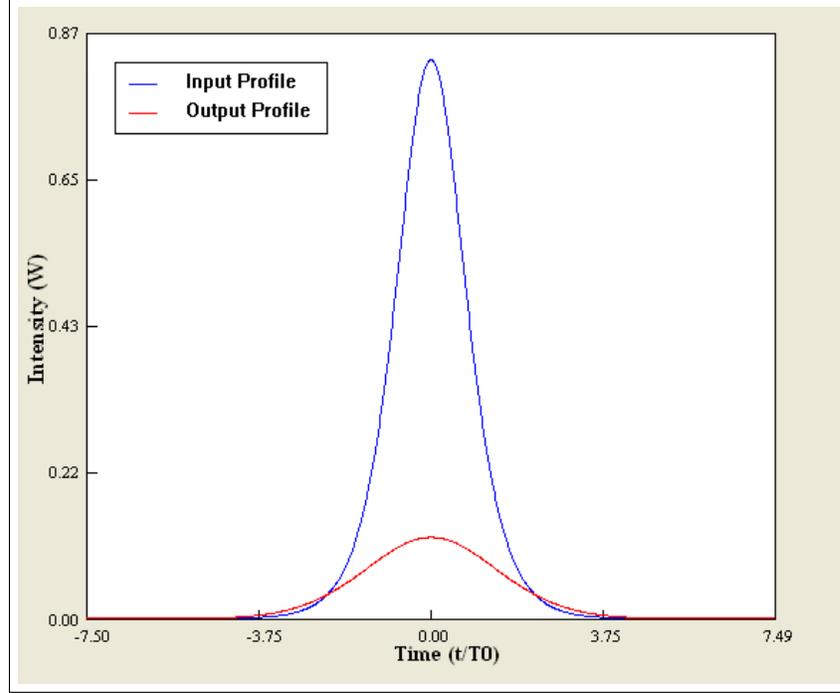


Figura 3.9: Simulación disipativa con parámetros de fibra regular (3.18), de solitón (3.19) y α' (3.27). Dominio temporal.

3.4. Simulación de Auto-Escarpado

El efecto de orden superior de auto-escarpado fue estudiado adiabáticamente en la Sección 2.3.1 en base a la ENLS perturbada y normalizada (2.20), ignorando la disipación del medio y demás efectos de orden superior. Escrita en unidades físicas, esta ENLS y los operadores $\hat{\mathcal{L}}$ y $\hat{\mathcal{N}}$ correspondientes adoptan la forma:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} + i \gamma |\psi|^2 \psi - \frac{\gamma}{\omega_o} \frac{\partial}{\partial T} (|\psi|^2 \psi), \quad (3.28)$$

por lo que:

$$\hat{\mathcal{L}} = i \frac{\beta_2}{2} \omega^2 \quad \text{y} \quad \hat{\mathcal{N}} = i \gamma \left[|\psi|^2 + i \frac{1}{\omega_o \psi} \frac{\partial}{\partial T} (|\psi|^2 \psi) \right]. \quad (3.29)$$

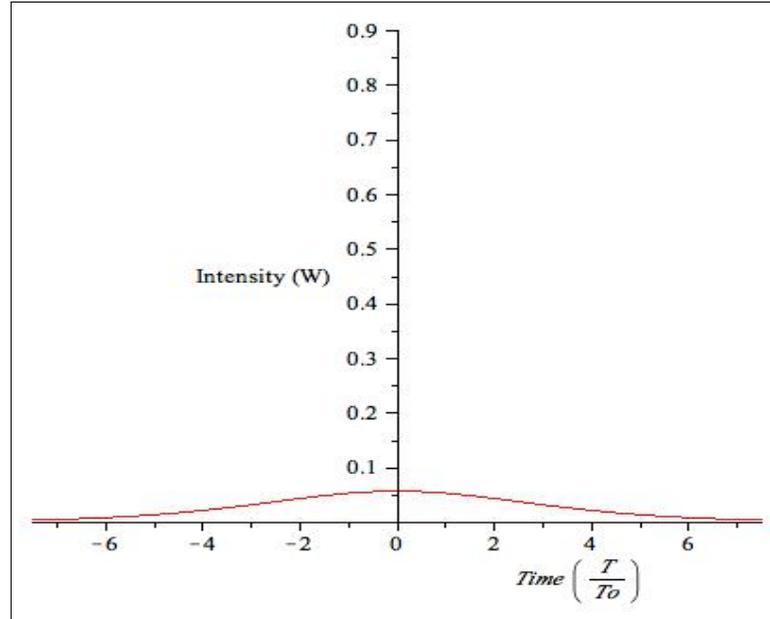


Figura 3.10: Solución analítica (3.25) de la dinámica adiabática de la ENLS (3.23), con parámetros de solitón (3.19) y α' (3.27).

El estudio de la dinámica de las coordenadas colectivas para la perturbación de auto-escarpado arroja como resultado el solitón fundamental modificado (2.22), que a su vez escrito en unidades físicas, y recordando que el factor de perturbación normalizado $s = (\omega_o T_o)^{-1}$, queda escrito como:

$$\tilde{\psi}(z, T) = \sqrt{P_o} \operatorname{sech} \left(\frac{T}{T_o} - \frac{z}{\omega_o T_o L_D} \right) e^{iz/2L_D}, \quad (3.30)$$

por lo cual:

$$\tilde{\psi}(0, T) = \sqrt{P_o} \operatorname{sech} \left(\frac{t}{T_o} \right).$$

La evaluación de esta solución en la frontera $z = 0$ del medio revela nuevamente que el perfil de entrada (3.14) es una condición de frontera apropiada para el análisis numérico actual, en este caso en base a la ENLS (3.28) para el estudio de los efectos de auto-escarpado sobre el solitón fundamental que el perfil (3.14) inyecta en la fibra.

En función de la definición (3.29) del operador no-lineal \hat{N} , el parámetro de perturbación $S = sT_o = 1/\omega_o$ queda definido únicamente en términos de la frecuencia

3.4. Simulación de Auto-Escarpado

portadora del pulso de entrada, y por ende es determinado unívocamente por su longitud de onda. Tomando nuevamente el valor típico de λ_o para medios de Kerr con parámetros β_2 y γ (3.18) y tasas ignorables de pérdidas energéticas, se ve que la perturbación de auto-escarpado adopta el valor:

$$S = \frac{1}{\omega_o} = \frac{\lambda_o}{2\pi c},$$

con

$$\lambda_o = 1,55 \times 10^{-6} \text{ m},$$

por lo que:

$$S = 8,223 \times 10^{-16} \text{ s}. \quad (3.31)$$

Perteneciendo al régimen de orden superior, el auto-escarpado se transforma en un efecto importante y no descartable en la descripción de la evolución del solitón fundamental cuando su ancho temporal inicial $T_o < 1$ ps. Un valor típico del factor perturbativo normalizado es $s = 0,2$ para diversos sistemas de fibras ópticas [1, 2, 10], lo cual implica un T_o específico del pulso y, consecuentemente, una potencia P_o según la relación (3.15), tales que:

$$T_o = \frac{S}{s} = 4,111 \times 10^{-15} \text{ s} \quad \implies \quad P_o = 78,314 \times 10^4 \text{ W}. \quad (3.32)$$

Estos valores producen, según las relaciones (1.21) y (1.23), unas longitudes características de dispersión y no-lineal $L_D = L_{NL} = 9,389 \times 10^{-4} \text{ m}$, considerablemente menores a las tratadas hasta ahora en los casos de los solitones de las ENLS no perturbada y disipada. Esto sugiere que, si bien los efectos de orden superior son sólo apreciables ante el uso de pulsos ultra-cortos en el orden de los femto-segundos (10^{-15} s), sus consecuencias sobre la evolución del solitón se hacen manifiestas considerablemente más rápido en comparación.

La Figura 3.11 muestra la superposición de los perfiles $|\psi(T)|^2$ de la entrada (3.14) vs. el de la solución numérica de la ENLS (3.28), tras ser propagada una distancia $L = 4L_D = 0,00375$ m, en pasos conservativos $h = 3,329 \times 10^{-6}$ m $> \lambda_o$. En comparación, la Figura 3.12 muestra la gráfica del mismo perfil $|\psi(T)|^2$ de la solución adiabática (3.30), evaluada por igual a la misma distancia L y con el conjunto de parámetros (3.18) de la fibra y (3.32) del solitón, dentro de la ventana temporal $\tau = T/T_o = [-7,3; 7,3]$. Las concordancias entre los picos de intensidad y anchos temporales ilustrados por las dos gráficas son claras, verificando nuevamente la validez de las predicciones de la dinámica adiabática de las coordenadas colectivas (2.12) en su descripción del solitón fundamental canónico perturbado. En ambos casos se puede apreciar también el tiempo de retraso neto τ_d (2.23) resultante del balance entre auto-escarpado y la dispersión de velocidad de grupo, junto al reajuste acorde del pico de intensidad del pulso propagado debido a la conservación de la energía en un medio sin disipación. En unidades físicas, el factor τ_d queda expresado como:

$$T_d = T_o \tau_d = \frac{L}{\omega_o L_D}, \quad (3.33)$$

por lo que:

$$T_d = S \frac{L}{L_D},$$

resultando en:

$$T_d = 3,284 \times 10^{-15} \text{ s}$$

El corrimiento de frecuencias δ nulo, anticipado por el resultado de la dinámica adiabática (2.21) del solitón perturbado por efecto de auto-escarpado, queda evidenciado en la Figura 3.13, la cual muestra la solución numérica del perfil de intensidad espectral $|\psi(\omega)|^2$ correspondiente a la simulación ilustrada en la Figura 3.11, con iguales parámetros de fibra (3.18), de solitón (3.32) y perturbativo (3.31), tras la misma propagación $L = 0,00375$ m.

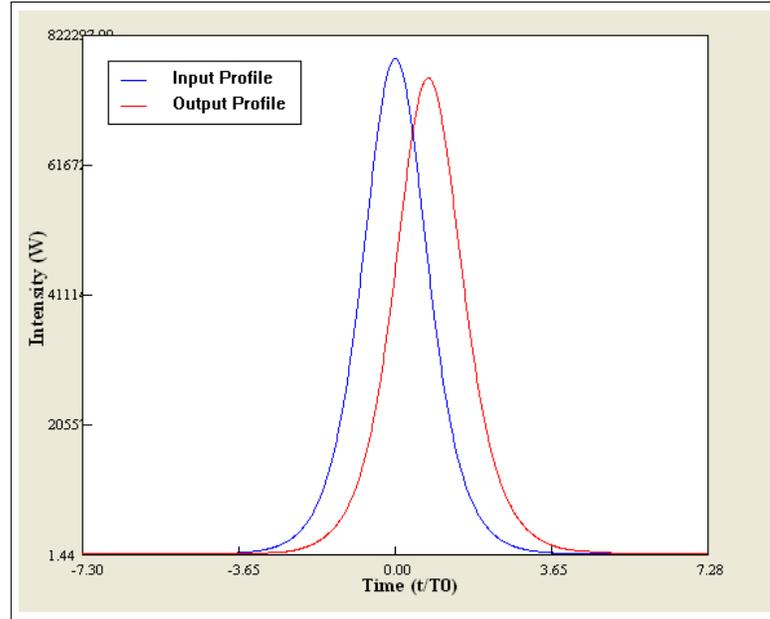


Figura 3.11: Simulación de un solitón de parámetros (3.32) y con efecto de auto-escarpado, con S (3.31), en una fibra regular de parámetros (3.18). Dominio temporal.

Finalmente, para tener una apreciación de la magnitud de la influencia del efecto de auto-escarpado sobre un solitón fundamental que se define alejado del régimen de orden superior, con $T_0 > 1$ ps, la Figura 3.14 muestra la superposición de los perfiles de intensidad del perfil de entrada (3.14) vs. el de la solución numérica de la ENLS (3.28), haciendo uso del grupo de parámetros (3.18) de la fibra y (3.19) del solitón fundamental, propagándolo una distancia $L = 3556$ m ($\xi = 4$) en intervalos $h = 0,1$ m. La prácticamente completa coincidencia entre los dos perfiles revela claramente la debilidad del efecto de auto-escarpado fuera del régimen de orden superior, al ser la evolución de la solución virtualmente indistinguible de aquellas de la ENLS no perturbada.

3.5. Simulación de Dispersión Intra-Pulso de Raman

La última perturbación del solitón fundamental canónico a estudiar numéricamente es la debida a la dispersión intra-pulso de Raman, el más importante de los

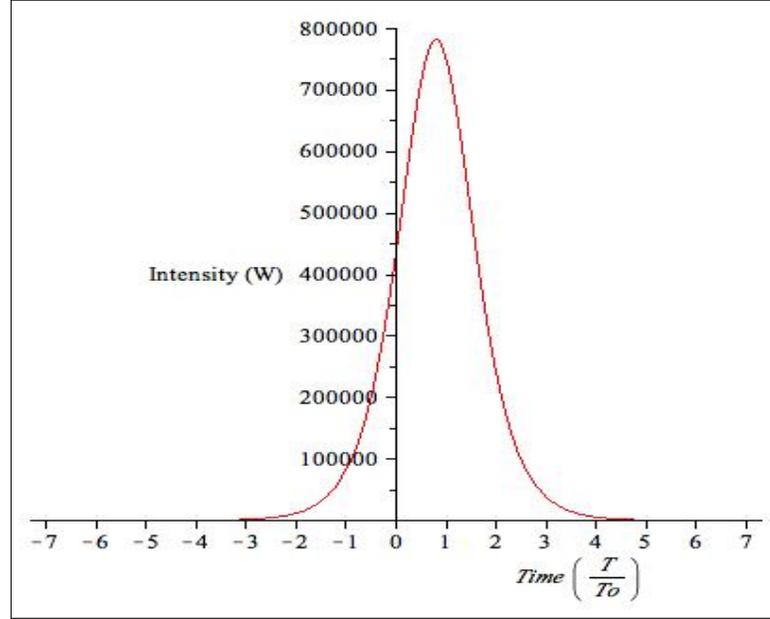


Figura 3.12: Solución analítica (3.30) de la dinámica adiabática de la ENLS (3.28), con parámetros de solitón (3.32) y $s = 0,2$.

efectos de orden superior gracias a la gran magnitud de su impacto sobre el espectro de frecuencias de pulsos ópticos cuyos anchos temporales $T_o < 1$ ps. Este efecto fue estudiado adiabáticamente en la Sección 2.3.2 en base a la ENLS perturbada y normalizada (2.25), que llevada a unidades físicas queda escrita como, junto a los operadores $\hat{\mathcal{L}}$ y \hat{N} correspondientes:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} + i \gamma |\psi|^2 \psi - i \gamma T_R \frac{\partial |\psi|^2}{\partial T} \psi, \quad (3.34)$$

por lo que:

$$\hat{\mathcal{L}} = i \frac{\beta_2}{2} \omega^2 \quad \text{y} \quad \hat{N} = i \gamma \left[|\psi|^2 - T_R \frac{\partial |\psi|^2}{\partial T} \right]. \quad (3.35)$$

La dinámica de las coordenadas colectivas para esta perturbación producen el solitón fundamental modificado (2.27), llevado a coordenadas físicas a través de las relaciones de normalización de ξ , τ y del parámetro perturbativo $\tau_r = T_R/T_o$, quedando

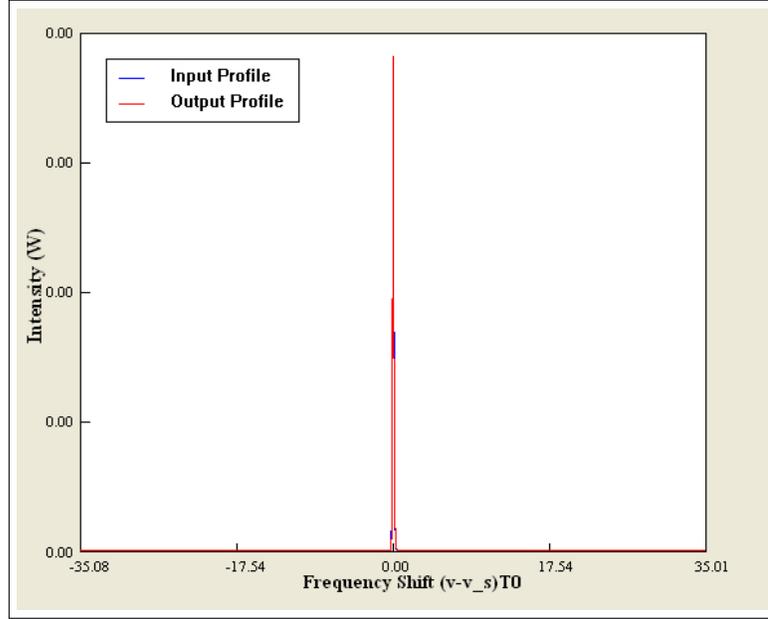


Figura 3.13: Simulación de un solitón de parámetros (3.32) y con efecto de auto-escarpado, con S (3.31), en una fibra regular de parámetros (3.18). Dominio de frecuencias.

finalmente como:

$$\tilde{\psi}(z, T) = \sqrt{P_o} \operatorname{sech} \left(\frac{T}{T_o} - \frac{4T_R z^2}{15T_o L_D^2} \right) \exp \left[i \frac{z}{2L_D} - i \frac{64T_R z^3}{675T_o L_D^3} + i \frac{8T_R T z}{15T_o^2 L_D} \right], \quad (3.36)$$

por lo cual:

$$\tilde{\psi}(0, T) = \sqrt{P_o} \operatorname{sech} \left(\frac{t}{T_o} \right).$$

Nuevamente, el perfil de entrada (3.14) coincide en la frontera $z = 0$ con la forma del solitón perturbado, por lo que se le considera como condición inicial apropiada para el estudio numérico por split-step de Fourier simetrizado de la ENLS (3.34) en cuestión.

El parámetro perturbativo no normalizado T_R se define como la pendiente de la curva del espectro de ganancia de Raman para un material dado, en función de la frecuencia del pulso bajo estudio, según la ecuación (2.24). Para fibras standard

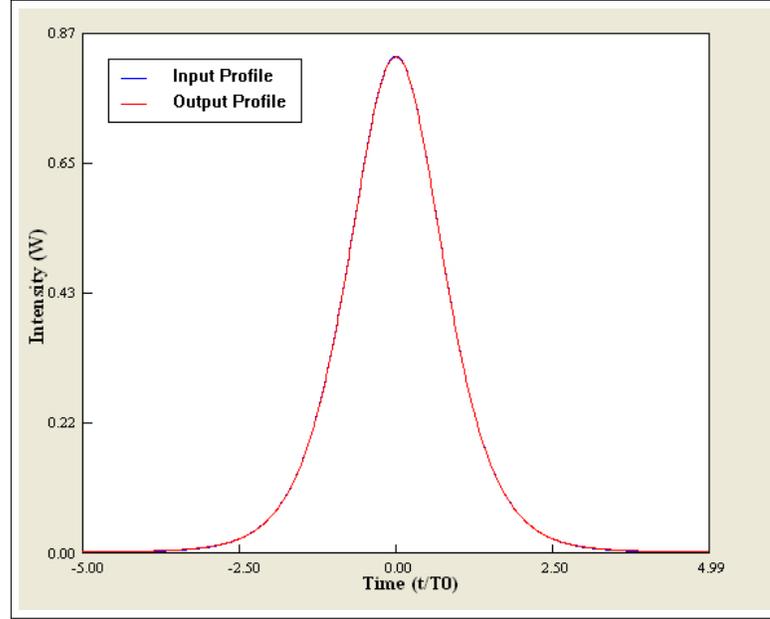


Figura 3.14: Simulación de un solitón de parámetros (3.19) y con efecto de auto-escarpado, con S (3.31), en una fibra regular de parámetros (3.18). Dominio temporal.

de sílice con las características (3.18), y ante la inyección de solitones fundamentales (3.14) con longitudes de onda standard $\lambda_o = 1,55 \mu\text{m}$ y ancho temporal $T_o = 0,57 \text{ ps}$, este parámetro ha sido determinado experimentalmente a un valor de [1, 2, 8, 10]:

$$T_R = 3 \times 10^{-15} \text{ s} . \quad (3.37)$$

Haciendo uso de la relación (3.15) para conocer la potencia P_o necesaria para la estabilidad del solitón fundamental, se ve que sus parámetros y longitudes características ante el T_o dado quedan siendo:

$$T_o = 0,57 \times 10^{-12} \text{ s} \quad \implies \quad P_o = 40,736 \text{ W} , \quad (3.38)$$

de donde:

$$L_D = L_{NL} = 18,05 \text{ m} .$$

Ante una distancia característica de dispersión de esta magnitud es fácil llevar la simulación numérica de la ENLS (3.34) a distancias ξ considerablemente mayo-

3.5. Simulación de Dispersión Intra-Pulso de Raman

res hasta las ahora tratadas, para así observar claramente el efecto acumulado de auto-corrimento de la frecuencia del solitón por dispersión de Raman y ampliación resultante de las ondas Stokes, dependiente entre otras variables de la distancia recorrida. La Figura 3.15 muestra la superposición de los perfiles $|\psi(T)|^2$ del perfil de entrada (3.14) vs. el de la solución numérica propagada un $L = 902,5$ m ($\xi = 50$) en intervalos $h = 0,1$ m, usando los parámetros de fibra (3.18) y (3.38) del solitón.

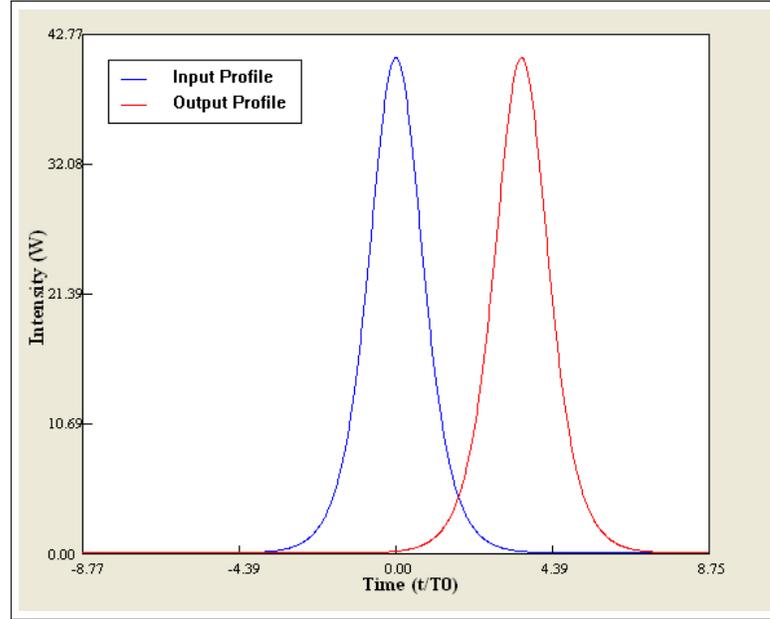


Figura 3.15: Simulación de un solitón de parámetros (3.38) y con efecto de dispersión intra-pulso de Raman, con T_R (3.37), en una fibra regular de parámetros (3.18). Dominio temporal.

A su vez, la Figura 3.16 muestra la gráfica del perfil $|\psi(T)|^2$ de la predicción adiabática (3.36) del solitón fundamental modificado por la perturbación, evaluada apropiadamente para los valores P_o , T_o , T_R , L_D y L dados, dentro de la ventana temporal $\tau = T/T_o = [-8,5; 8,5]$. La concordancia entre los picos de intensidad y desplazamientos temporales de los perfiles propagados por estos dos métodos confirma nuevamente la precisión de la dinámica de las coordenadas colectivas (2.12) en su descripción de los efectos de la perturbación, en este caso aún para distancias $\xi \gg 1$, quedando verificados los comportamientos de las coordenadas η y q según los resultados (2.26).

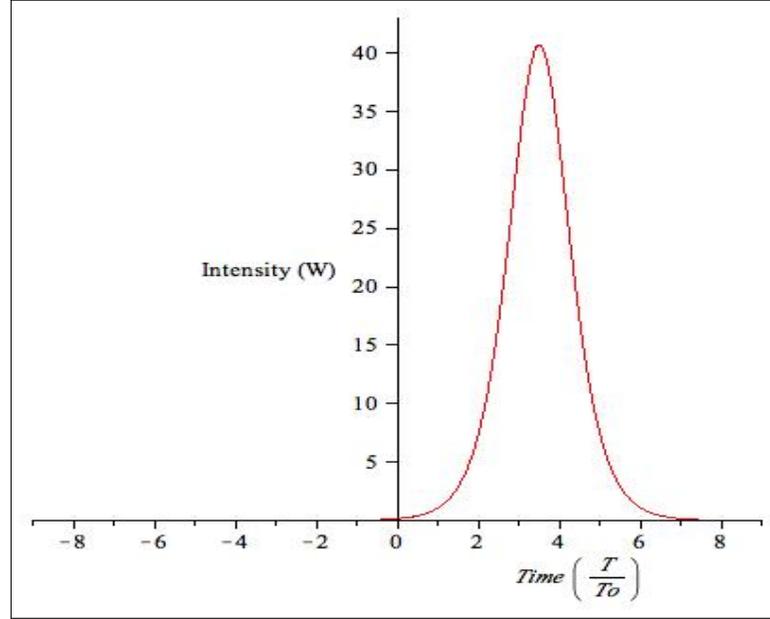


Figura 3.16: Solución analítica (3.36) de la dinámica adiabática de la ENLS (3.34), con parámetros de solitón (3.38) y T_R (3.37).

Para el efecto de dispersión intra-pulso de Raman, esta dinámica revela un corrimiento de frecuencia modificado $\delta(\xi) = -8\tau_r\xi/15$, según el resultado (2.26) de las coordenadas colectivas correspondientes. Recordando las relaciones de normalización para L_D y $\xi = |\beta_2|z/T_o^2$ expuestas en la Sección 1.2.3, y la definición del corrimiento de frecuencia normalizado $\delta = \Delta\omega T_o$ expuesto en la Sección 1.2.4, es fácil ver que el desplazamiento por efecto Raman $\Delta\omega_R$ para la distancia propagada adopta el valor:

$$\Delta\omega_R(z) = -\frac{8|\beta_2|T_R}{15T_o^4}z, \quad (3.39)$$

por lo que:

$$\Delta\omega_R(L) \approx -24622,960 \times 10^7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Esto revela que para una distancia propagada de menos de 1 Km, el solitón perturbado por la dispersión intra-pulso de Raman, con un tiempo de respuesta $T_R = 3\text{ fs}$, puede llegar a modificar su propia frecuencia en un corrimiento neto $\Delta\nu \approx -39,188\text{ GHz}$, hacia las componentes rojas del espectro (ondas Stokes). Tal

3.5. Simulación de Dispersión Intra-Pulso de Raman

magnitud de cambio, originalmente documentado como su “auto-corrimento de frecuencia” y hoy en día origen del nombre de la perturbación en sí [1–3, 8, 10], hace a esta perturbación no ignorable cuando el ancho inicial del solitón $T_o < 1$ ps. La Figura 3.17 muestra la solución numérica del perfil de intensidad espectral $|\psi(\omega)|^2$ correspondiente a la simulación en la Figura 3.15, con parámetros de fibra (3.18) y (3.38) del solitón, propagado la misma distancia $L = 902,5$ m ante la perturbación (3.37) de Raman. La aparentemente pequeña variación en el espectro corresponde a las unidades reportadas:

$$(\nu - \nu_o) T_o = \frac{\delta}{2\pi} \approx 2,233 \times 10^{-2}.$$

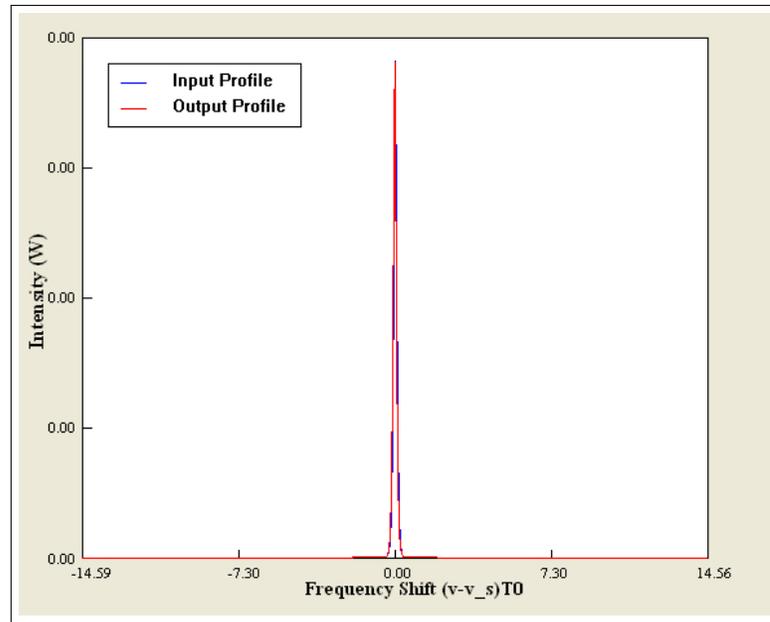


Figura 3.17: Simulación de un solitón de parámetros (3.38) y con efecto de dispersión intra-pulso de Raman, con T_R (3.37), en una fibra regular de parámetros (3.18). Dominio de frecuencias.

En contraste, para resaltar la debilidad del efecto Raman sobre pulsos fuera del régimen de orden superior, con $T_o > 1$ ps, las Figuras 3.18 y 3.19 muestran las superposiciones de los perfiles $|\psi(T)|^2$ y $|\psi(\omega)|^2$, respectivamente, para el perfil de entrada (3.14) y la solución numérica de la ENLS (3.34), haciendo uso de los parámetros (3.18)

3.5. Simulación de Dispersión Intra-Pulso de Raman

de la fibra y (3.19) del solitón fundamental, propagándolo una distancia $L = 3556$ m ($\xi = 4$) en intervalos $h = 0,1$ m. Nuevamente, la prácticamente completa coincidencia entre los dos perfiles temporales y el prácticamente nulo corrimiento δ a una distancia $L > 1$ Km, en comparación a las Figuras 3.15 y 3.17, revela que fuera del régimen de orden superior la perturbación por dispersión intra-pulso de Raman puede ser ignorada en la descripción del solitón fundamental, considerando así su propagación como no perturbada y conservativa.

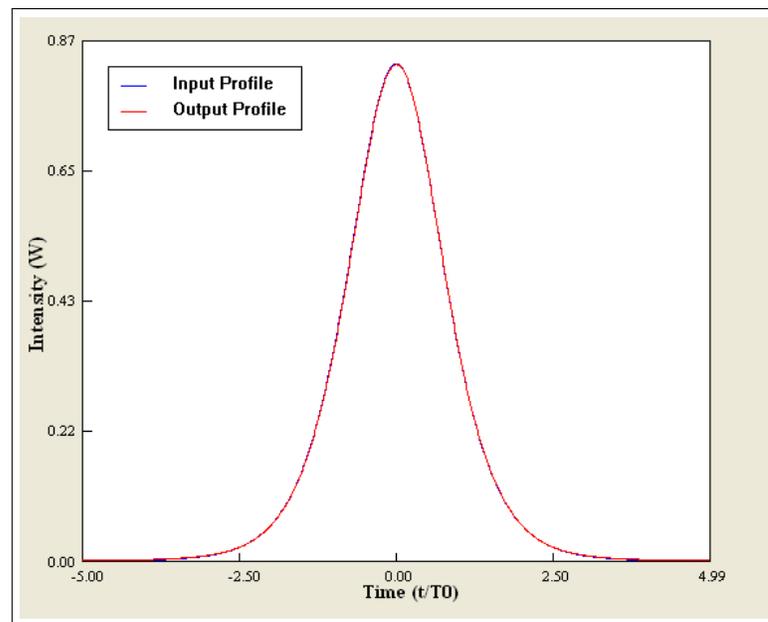


Figura 3.18: Simulación de un solitón de parámetros (3.19) y con efecto de dispersión intra-pulso de Raman, con T_R (3.37), en una fibra regular de parámetros (3.18). Dominio temporal.

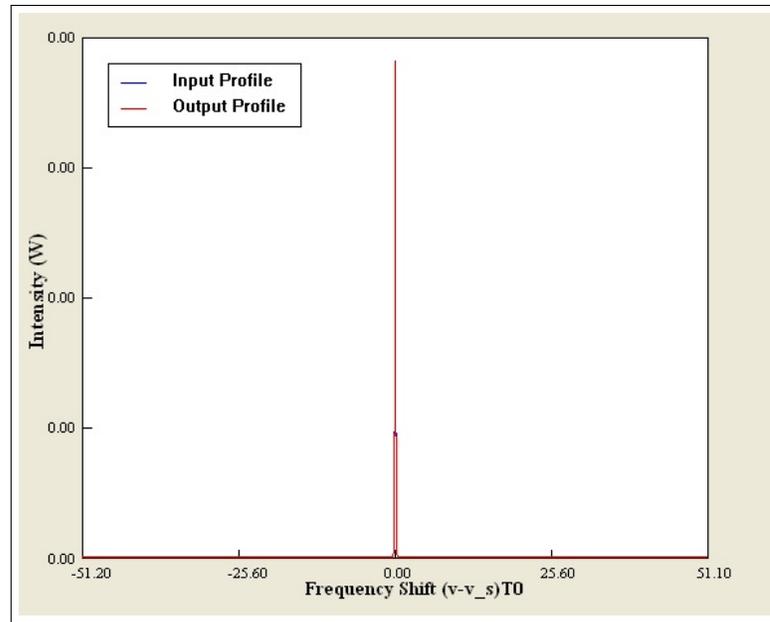


Figura 3.19: Simulación de un solitón de parámetros (3.19) y con efecto de dispersión intra-pulso de Raman, con T_R (3.37), en una fibra regular de parámetros (3.18). Dominio de frecuencias.

Conclusiones

El estudio del comportamiento de las soluciones solitónicas de la Ecuación No-Linear de Schrödinger comienza en este trabajo por la identificación de esta EDP como un modelo matemático universal que emerge en una muy variada gama de sistemas físicos ondulatorios, gobernando la evolución de paquetes de onda planos y lentamente modulados cuando el medio de propagación posee características dispersivas y al mismo tiempo da origen a interacciones débilmente no-lineales. Dado este conjunto de características, todos estos sistemas, cualesquiera su naturaleza, son capaces de soportar solitones.

En el campo de la óptica no-lineal se demostró que la ENLS emerge para gobernar la propagación de pulsos ópticos ultra-cortos en fibras de sílice, cuando los fenómenos de dispersión de velocidad de grupo y auto-modulación de fase se combinan dentro de ellas para balancear sus efectos individuales sobre el pulso. Este proceso da origen a los solitones temporales-brillantes que fueron objeto de estudio en este trabajo.

El análisis de las perturbaciones de estos solitones, en su faceta fundamental con orden $N = 1$, se comenzó con la demostración de la estructura Hamiltoniana completamente integrable que posee la ENLS (1.24), con el objetivo inicial de encontrar una densidad Lagrangiana que reprodujera su dinámica no perturbada. En base a esto, se consiguió la dinámica adiabática de las coordenadas colectivas (2.12) del solitón fundamental, escritas en función de los modelos matemáticos de las diversas perturbaciones

tratadas y bajo el supuesto de la preservación del ansatz secante hiperbólico (2.2) en las dinámicas no integrables, resultantes de la ENLS (2.1) (principio de optimización de Rayleigh-Ritz).

La validez de la dinámica adiabática para describir la evolución del solitón fundamental ante las diversas perturbaciones quedó demostrada, entre otras formas, por la reproducción de su modelo matemático a través de la dinámica (2.13), a la cual se le impuso la condición $R = 0$ correspondiente a la ausencia de perturbaciones. Sobre este fundamento, solitones fundamentales modificados fueron determinados como soluciones aproximadas a distintas ENLS, perturbadas individualmente por efectos de disipación, auto-escarpado y dispersión intra-pulso de Raman.

A su vez, la verificación de la validez de estas aproximaciones analíticas se llevó a cabo mediante el estudio numérico de sus distintas ENLS por medio del método split-step de Fourier, habiendo hecho un previo análisis del error numérico incurrido por su modelo matemático y de los requisitos que presenta para cumplir con criterios básicos de estabilidad numérica. En el caso de la variante simetrizada del método, se demostró que el error incurrido tras recorrer la longitud completa de la fibra en pasos de tamaño h es de orden $\mathcal{O}(h^2)$.

La estabilidad numérica del análisis fue garantizada a través del monitoreo de la conservación de la energía del solitón en cada paso h tomado. Ante este criterio, expresado matemáticamente como la condición (3.9), el método split-step de Fourier demostró ser particularmente sensible a la escogencia de la magnitud de h , en comparación a las longitudes características de dispersión y no-lineal del solitón fundamental bajo estudio. El uso de intervalos que no cumplieran con la condición $h \ll L_D$ siempre conllevó a la pérdida de energía y a la producción de resultados espúreos, e.g. llegando a producir un perfil de ruido blanco como solución de la ENLS no perturbada (3.16).

Otro factor que demostró ser de primordial importancia en la estabilidad numérica del análisis y conservación de la energía del solitón fue el tamaño de la ventana

temporal empleada en su cálculo, según las definiciones (3.10) y (3.11). Nuevamente, ventanas que no cumplieran con la condición (3.12) para ser entre 10 y 20 veces mayor que el ancho T_o del solitón bajo estudio produjeron resultados espúreos, al no preservar la energía.

Las simulaciones sobre la ENLS no perturbada (3.16) comprobaron las principales características del solitón fundamental, al comparar las soluciones numéricas contra la analítica (3.13) predicha por el método de la transformada de dispersión inversa. Se comprobó la característica primordial de este dinámico robusto del solitón, al propagarlo exitosamente distancias virtualmente ilimitadas sin que sufriera distorsiones de tipo temporal ni espectral, según lo revelado en las Figuras 3.1, 3.3 y 3.4.

Estas últimas dos gráficas demostraron también la capacidad por parte del medio de propagación de soportar al solitón fundamental ante distintos grupos de parámetros β_2 , γ , T_o y P_o que en conjunto cumplieran con la condición $N = 1$, según la definición (1.22) del orden del solitón. Además, la relación cuadrática inversa entre los valores de potencia y ancho temporal necesarios para su estabilidad quedó demostrada en estas simulaciones, ante los grupos de parámetros T_o y P_o (3.21) y (3.22) empleados, respectivamente.

La condición de monocromaticidad $\omega_o \gg \Delta\omega$ también quedó demostrada para el caso del solitón presentado en la Figura 3.1, según lo revelado en el espectro de frecuencias correspondiente en la Figura 3.2, en donde se puede apreciar un corrimiento de frecuencia $\delta \approx 0$.

Finalmente para el caso no perturbado, la estabilidad del solitón fundamental se comprobó mediante la demostración de su habilidad para sobrevivir como ente dinámico robusto ante el suministro de parámetros T_o y P_o subóptimos, produciendo un orden $\tilde{N} \neq 1$. La Figura 3.5 de un solitón bajo estas condiciones muestra el proceso de readaptación que éste emprende para lograr una nueva geometría asintótica, co-

rrespondiente a un grupo de parámetros equivalente que cumplan con la condición $N = 1$.

El estudio numérico de los efectos disipativos sobre el solitón fundamental, representados por la ENLS perturbada (3.23), confirmó las predicciones adiabáticas de las coordenadas colectivas (2.16). Las Figuras 3.6 y 3.8, mostrando las soluciones numéricas y analíticas de esta ENLS para el factor disipativo α (3.26) tal que $\alpha L \ll 1$, mostraron congruentemente la reducción de la amplitud del solitón y el consecuente incremento de su ancho temporal T_1 , según la relación (2.18). En contraparte, las Figuras 3.9 y 3.10, soluciones numéricas y analíticas para el factor disipativo α' (3.27), discreparon sobre la amplitud y ancho del solitón propagado, dado que en este caso el criterio $\alpha' L \ll 1$ de la dinámica adiabática no fue cumplido. En otras palabras, el estudio numérico comprobó que la dinámica adiabática no es precisa para describir los efectos de disipación sobre el solitón fundamental ante tasas de pérdida energética y/o propagaciones tales que $\alpha z \geq 1$.

Adicionalmente, el estudio numérico de la disipación confirmó la preservación de la condición de monocromaticidad del solitón, según el corrimiento $\delta \approx 0$ observado en la Figura 3.7, análogo al caso del solitón no perturbado.

Pasando al análisis del régimen de orden superior, los efectos de auto-escarpado y dispersión intra-pulso de Raman demostraron ser completamente ignorables en la evolución del solitón fundamental cuando su ancho inicial $T_o > 1$ ps, según lo observado en las Figuras 3.14 y 3.18 para las soluciones numéricas con ancho $T_o = 4$ ps de las ENLS (3.28) y (3.34), correspondientes a las perturbaciones por auto-escarpado y dispersión de Raman, respectivamente. Fuera del régimen de orden superior, el efecto Kerr óptico siempre predomina como fenómeno no-lineal principal en la fibras de sílice, dada la escala temporal corta de la respuesta electrónica del medio vs. la vibracional.

Ante anchos temporales $T_o < 1$ ps, las longitudes características de dispersión resultantes para solitones dentro de este régimen son considerablemente más pequeñas

que sus contrapartes fuera de él, dada las pequeñas magnitudes de T_o y la dependencia cuadrática sobre ellos en la definición (1.21) de L_D . La consecuencia principal de esto es que las consecuencias de las perturbaciones por efectos de auto-escarpado y dispersión intra-pulso de Raman se manifiestan sobre el solitón fundamental a escalas espaciales absolutas (i.e. medidas por la variable z) mucho menores que en el caso de la perturbación disipativa.

En el caso específico de la perturbación por efecto de auto-escarpado, la magnitud de la longitud de dispersión resultó tan pequeña que el intervalo h necesario para conservar la energía en el análisis por split-step de Fourier dificultó propagar la solución numérica a distancias ξ tan grandes como las usadas en el caso de dispersión intra-pulso de Raman. Con un $L_D = 9,389 \times 10^{-4}$ m, el intervalo resultó en $h = 3,329 \times 10^{-6}$ m, cercano a la longitud de onda $\lambda_o = 1,55 \times 10^{-6}$ m. Ante este h , el costo de cómputo de cualquier simulación con un L en el orden de tan sólo unos cuantos metros es prohibitivo, mientras que intervalos mayores no conservaron la energía del solitón en el análisis numérico.

En su defecto, el análisis numérico de esta perturbación a una distancia máxima $L = 4L_D$ nuevamente comprobó los resultados de la dinámica adiabática correspondiente, plasmados en las coordenadas colectivas (2.21). La solución por split-step de Fourier vs. el analítico (3.30) de la ENLS (3.28) se compararon en las Figuras 3.11 y 3.12, respectivamente, ambas mostrando el efecto neto sobre el solitón resultante del balance entre los efectos de dispersión de velocidad de grupo y deformación del frente por auto-escarpado, expresados como el tiempo de retraso T_d de su centro (3.33). La Figura 3.11 muestra también la reducción de la amplitud del solitón propagado, consecuencia del tiempo de retardo, dada la necesidad de compensar el ancho $T_1 > T_o$ por la conservación de su energía en el medio no disipativo. Esta reducción es de naturaleza opuesta a la experimentada por el solitón ante la perturbación disipativa, en donde el causal es precisamente la pérdida energética.

En cuanto al espectro de frecuencias, el análisis por split-step de Fourier confirmó

en la Figura 3.13 su invariancia ante el efecto de auto-escarpado, mostrando un $\delta \approx 0$ análogo al corrimiento del solitón fundamental y del solitón disipado.

En comparación al auto-escarpado, la longitud de dispersión del solitón fundamental perturbado por efecto de dispersión intra-pulso de Raman, gobernado por la ENLS (3.34) y con parámetros T_o y P_o (3.38), permitió llevar el estudio numérico hasta una distancia considerablemente mayor $L = 50L_D$. Las Figuras 3.15 y 3.16 para la solución numérica y analítica (3.36), respectivamente, demuestran que el análisis por split-step de Fourier una vez más validó las predicciones de la dinámica adiabática, plasmadas en este caso en las coordenadas colectivas (2.26). Son evidentes en la solución numérica tanto el desplazamiento del centro temporal del solitón perturbado (mayor al experimentado en el caso de auto-escarpado) como la invariancia de su amplitud, independientemente de la no conservación de su energía ante la excitación de los fonones ópticos del medio, efecto que no obstante preserva el número clásico de fotones.

No obstante, el efecto más importante de esta perturbación, en sí la más importante del régimen de orden superior, es el gran corrimiento de frecuencia que experimenta el solitón durante su propagación, ampliando la intensidad de las ondas Stokes de su espectro (“red-shift”). Dado el signo de la coordenada colectiva δ en el resultado analítico (2.26), y la dependencia como T_o^{-4} sobre el ancho inicial en el $\Delta\omega$ correspondiente, según la relación (3.39), el solitón fundamental con T_o (3.38) y T_R (3.37) experimenta una gran reducción de su frecuencia en $\Delta\nu \approx -39,188$ GHz, aún a distancias de propagación tan pequeñas como $L < 1$ Km. Este efecto es apreciado en la Figura 3.17 para el espectro de frecuencias del solitón perturbado.

La debilidad del efecto Raman fuera del régimen de orden superior queda nuevamente evidenciado en la Figura 3.19, mostrando el prácticamente nulo corrimiento de frecuencia que experimenta el solitón perturbado cuando su ancho inicial $T_o = 4$ ps.

Bibliografía

- [1] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*, Academic Press, San Diego, USA, 2001.
- [2] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, Third Edition, Academic Press, USA, 2008.
- [3] K. Porsezian, V. C. Kuriakose (Eds.), *Optical Solitons: Theoretical and Experimental Challenges*, Springer, Berlin, Germany, 2003.
- [4] A. Hasegawa, F. D. Tappert, Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. i. Anomalous dispersion, *Applied Physics Letters* 23 (3) (1973) 142 – 144.
- [5] L. F. Mollenauer, R. H. Stolen, J. P. Gordon, Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers, *Physical Review Letters* 45 (13) (1980) 1095 – 1098.
- [6] V. E. Zakharov, A. B. Shabat, Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, *Soviet Physics JETP* 34 (1972) 62 – 69.
- [7] Y. S. Kivshar, G. P. Agrawal, *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals*, Academic Press, USA, 2003.
- [8] L. F. Mollenauer, J. P. Gordon, *Solitons in Optical Fibers, Fundamentals and Applications*, Academic Press, USA, 2006.

- [9] D. Grischkowsky, E. Courtens, J. A. J. Armstrong, Observation of self-steepening of optical pulses with possible shock formation, *Physical Review Letters* 31 (7) (1973) 422 – 425.
- [10] B. R. Washburn, Dispersion and nonlinearities associated with supercontinuum generation in microstructure fibers, Ph.D. thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta, USA (April 2002).
- [11] M. J. Ablowitz, B. Prinari, A. D. Trubatch, *Discrete and Continuous Nonlinear Schrödinger Systems*, Cambridge University Press, New York, USA, 2004.
- [12] M. J. Ablowitz, B. Prinari, A. D. Trubatch, Integrable nonlinear Schrödinger systems and their soliton dynamics, *International Press, Dynamics of PDE* 1 (3) (2004) 239 – 299.
- [13] L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan, *Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons*, Springer, Berlin, Germany, 2007.
- [14] A. Biswas, Dynamics of optical solitons with dispersion-management, *Chaos, Solitons & Fractals* 14 (3) (2002) 447 – 468.
- [15] A. Biswas, S. Konar, Theory of dispersion-managed Optical Solitons, *Progress in Electromagnetics Research* 50 (2005) 83 – 134.
- [16] A. Biswas, K. Porsezian, Soliton perturbation theory for the modified nonlinear Schrödinger's equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 12 (6) (2007) 886 – 903.
- [17] C. Sulem, P.-L. Sulem, *The Nonlinear Schrödinger Equation, Self-focusing and Wave Collapse*, Springer, New York, USA, 1999.
- [18] A. E. Bondeson, M. Lisak, D. Anderson, Soliton perturbations: A variational principle for the soliton parameters, *Physica Scripta* 20 (3 - 4) (1979) 479 – 485.

- [19] Y. S. Kivshar, A. M. Kosevich, Evolution of a soliton under the action of small perturbations, *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki* 37 (11) (1983) 542 – 545.
- [20] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley-Interscience, New York, USA, 1974.
- [21] B. Fornberg, *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*, Cambridge University Press, USA, 1996.
- [22] O. V. Sinkin, R. Holzlöhner, J. Zweck, C. R. Menyuk, Optimization of the split-step fourier method in modeling optical fiber communications systems, *Journal of Lightwave Technology* 21 (1) (2003) 61 – 68.
- [23] J. S. Russell, Report on waves, made to the Meetings of the British Association in 1842-43, Report of the British Association for the Advancement of Science Plates XLVII-LVII (1845) 311 – 390.
- [24] E. M. de Jager, On the origin of the Korteweg-de Vries equation, arXiv:math/0602661v1 [math.HO].
- [25] D. J. Korteweg, G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Philosophical Magazine* 39 (1895) 422 – 443.
- [26] A. Scott, *Nonlinear Science: Emergence and Dynamics of Coherent Structures*, Oxford University Press, Oxford, England, 1999.
- [27] A. Scott, Solitons, a brief history, <http://www.weizmann.ac.il/home/fnfal/soliton.pdf> (June 6, 2004).
- [28] L. Munteanu, S. Donescu, *Introduction to Soliton Theory: Applications to Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, USA, 2005.

- [29] A. Scott (Ed.), *Encyclopedia of Nonlinear Science*, Routledge, New York, USA, 2005.
- [30] M. J. Ablowitz, B. Prinari, A. D. Trubatch, Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems, *American Mathematical Society* 43 (1) (2005) 127 – 132.
- [31] F. Abdullaev, *Theory of Solitons in Inhomogeneous Media*, Academic Press, USA, 1994.
- [32] V. E. Zakharov, Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* 9 (2) (1968) 190 – 194.
- [33] V. E. Zakharov, L. A. Ostrovky, Modulation Instability: The beginning, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 238 (5) (2008) 540 – 548.
- [34] V. I. Talanov, Self-focusing of waves in nonlinear media, *JETP Letters* 2 (1965) 138 – 141.
- [35] R. Y. Chiao, E. Garmire, C. H. Townes, Self-trapping of optical beams, *Physical Review Letters* 13 (15) (1964) 479 – 482.
- [36] I. S. Aranson, L. Kramer, The world of the complex Ginzburg-Landau equation, *Reviews of Modern Physics* 74 (2002) 99 – 143.
- [37] A. Farina, J. Saut (Eds.), *Stationary and Time Dependent Gross-Pitaevskii Equations*, American Mathematical Society, USA, 2008.
- [38] A. Biswas, S. Konar, *Introduction to non-Kerr Law Optical Solitons*, Chapman & Hall/CRC, USA, 2007.
- [39] R. W. Boyd, S. G. Lukishova, Y.-R. Shen (Eds.), *Self-focusing: Past and Present*, Springer, USA, 2009.

- [40] Z. M. Liao, Design of high-capacity fiber-optic transport systems, Ph.D. thesis, School of Engineering and Applied Sciences, University of Rochester, Rochester, USA (2001).
- [41] S. Karigiannis, The inverse scattering transform and integrability of nonlinear evolution equations, Master's thesis, Department of Pure Mathematics, University of Waterloo, Ontario, Canada (June 5, 1998).
- [42] N. N. Akhmediev, A. Ankiewicz (Eds.), Dissipative Solitons, Springer, Berlin, Germany, 2005.
- [43] A. Ankiewicz, N. Akhmediev, N. Devine, Dissipative solitons with a Lagrangian approach, *Optical Fiber Technology* 13 (2) (2007) 91 – 97.
- [44] H. C. Corben, P. Stehle, Classical Mechanics, 2nd Edition, Dover Publications, New York, USA, 1994.
- [45] H. Goldstein, C. P. Poole, J. L. Safko, Classical Mechanics, 3rd Edition, Addison Wesley, USA, 2001.
- [46] D. J. Griffiths, Introduction to Quantum Mechanics, Prentice Hall, Inc., New Jersey, USA, 1995.
- [47] G. P. Agrawal, Applications of Nonlinear Fiber Optics, Academic Press, London, England, 2001.
- [48] J.-H. Lee, Analysis and characterization of fiber nonlinearities with deterministic and stochastic signal sources, Ph.D. thesis, Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, USA (February 10, 2000).
- [49] S. L. Aguayo, Estudio de simulación de propagación de solitones en fibra óptica mediante el método del Split-Step Fourier Simétrico, Master's thesis, División de Electrónica, Computación, Información y Comunicaciones. Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, Monterrey, México (Mayo, 2002).

- [50] L. N. Binh, J. Armstrong, A simulink model for simulation of optical communication systems: Part i – single channel transmission, Tech. Rep. MECSE-31-2004, Monash University, Department of Electrical and Computer Systems Engineering, Victoria, Australia (2004).

