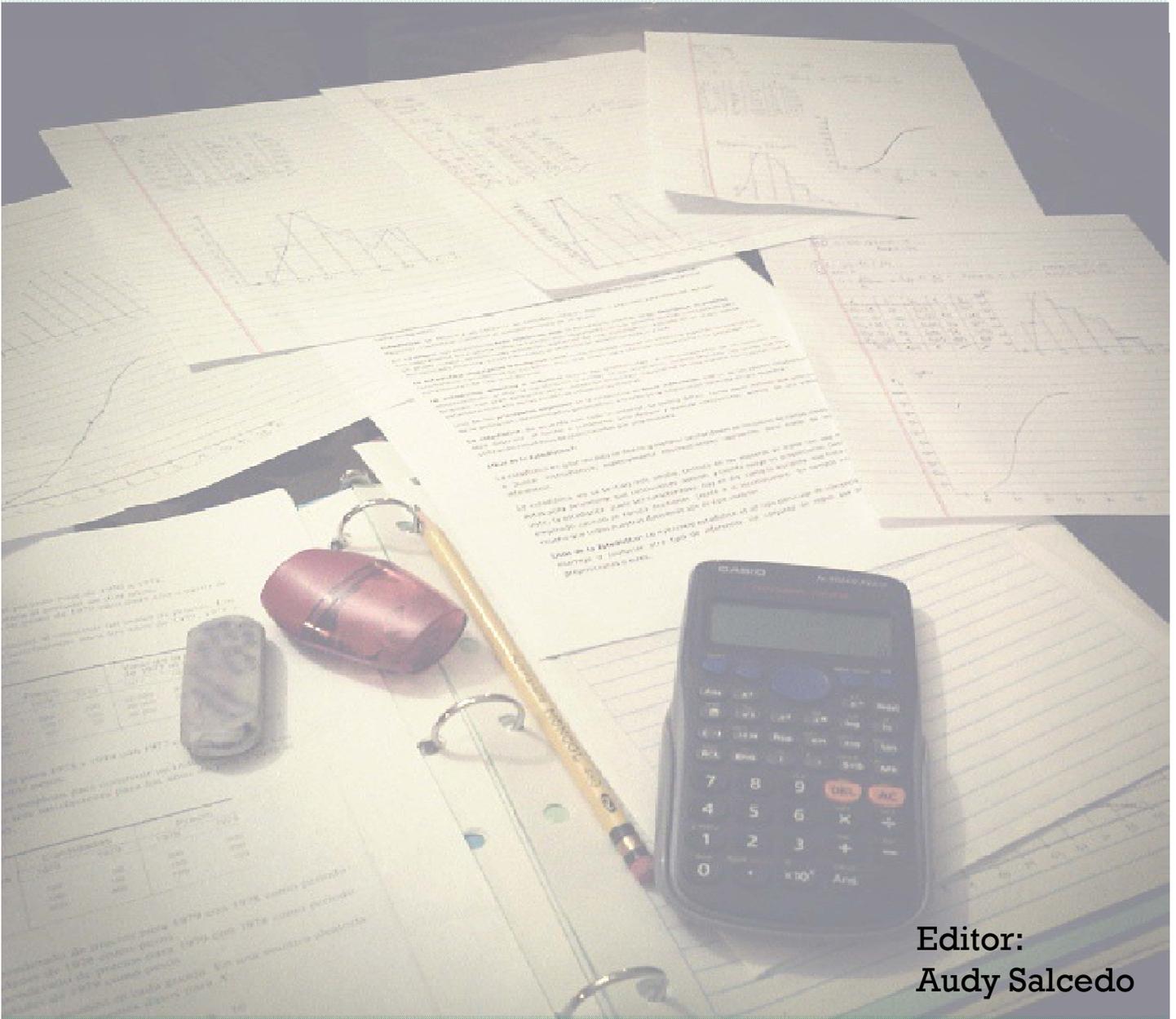


Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas



Editor:
Audy Salcedo

CARACAS - 2013



Educación Estadística en América Latina

Tendencias y Perspectivas



Editor: Audy Salcedo

Comité Académico: Lisbeth K. Cordani
Cileda de Queiroz e Silva Coutinho
Santiago Inzunza Cazares
Audy Salcedo (Coordinador)

Los artículos fueron seleccionados mediante sistema de arbitraje.

Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas.

Octubre 2013

ISBN: 978-980-00-2744-8

Depósito Legal: Ifi17520135102435

Diseño de Portada: Antonio Machado E.

Foto de portada: Vanessa I. Valdes V. (Estudiante Comunicación Social – UCV)
vanessavaldesv@hotmail.com

Diseño y diagramación: Audy Salcedo

Publicado por:
Programa de Cooperación Interfacultades
Vicerrectorado Académico
Universidad Central de Venezuela
Av. Carlos Raúl Villanueva Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales Rodolfo
Quintero, piso 1, Ofic. 203. UCV. Teléfonos: +58 212 605 – 2597
<http://www.ucv.ve/portal-pci.html> E-mail: pciucv@ucv.ve; pciucv@gmail.com

AUTORIDADES DE LA UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA

Dra. Cecilia García Arocha, Rectora

Dr. Nicolás Bianco C., Vicerrector Académico

Dr. Bernardo Méndez, Vicerrector Administrativo

Dr. Amalio Belmonte, Secretario

Presentación	7
Capítulo 1: Simulación y modelos en la enseñanza de la probabilidad: un análisis del potencial de los applets y la hoja de cálculo. <i>Santiago Inzunza Cazares</i>	9
Capítulo 2: Efecto de los formatos y el tipo de información en la resolución de problemas de probabilidad condicional. <i>Gabriel Yañez Canal, Ana Rátiva Hernández y Diana Lozano Rodríguez</i>	31
Capítulo 3: La utilización del razonamiento deductivo en eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes. <i>Adriana G. D'Amelio</i>	57
Capítulo 4: La búsqueda del espacio muestral 'original': una necesidad para la enseñanza. <i>Felipe Fernández, Luisa Andrade y Benjamín Sarmiento</i>	81
Capítulo 5: Profesorado de estadística en América latina: necesidad de su caracterización desde la perspectiva social, pedagógica y disciplinar. <i>Jesús Humberto Cuevas Acosta y Greivin Ramírez Arce</i>	99
Capítulo 6: El conocimiento didáctico del contenido estadístico del maestro. <i>Julia Elena Sanoja y José Ortiz Buitrago</i>	125
Capítulo 7: La clase de estadística más allá del currículo. <i>Lucia Zapata-Cardona y Pedro G. Rocha S.</i>	153
Capítulo 8: Estudio de clases para el mejoramiento de la enseñanza de la estadística en Chile. <i>Soledad Estrella y Raimundo Olfos</i>	167
Capítulo 9: Introdução ao conceito de probabilidade e os livros didáticos para Ensino Médio no Brasil. <i>Cileda de Queiroz e Silva Coutinho</i>	193
Capítulo 10: La estadística y la propuesta de un currículo por competencias. <i>Ernesto A. Sánchez Sánchez y Verónica Hoyos</i>	211
Capítulo 11: O desenvolvimento profissional de professores em educação estatística nas pesquisas brasileiras. <i>Celi Espasandin Lopes</i>	229
Capítulo 12: Uma primeira aproximação na avaliação dos cursos de graduação e pós graduação em estatística em universidades de São Paulo. <i>Ana Aparicio, Oscar João Abdounur y Jorge Luis Bazán</i>	257
Capítulo 13: Uso de estatística na opinião de egressos de licenciatura em matemática de uma universidade pública. <i>Marcos Nascimento Magalhaes y Renan M. Barros Dos Santos</i>	283

Capítulo 14: Uso de software, grupos, proyectos y presentaciones, para enseñar y fomentar la estadística aplicada. <i>Jorge Luis Romeu</i>	299
Capítulo 15: Didáctica de la estadística en la educación superior. <i>Hugo Alvarado Martínez</i>	319
Capítulo 16: Educación estadística en cursos introductorios a nivel universitario: algunas reflexiones. <i>Roberto Behar, Pere Grima Cintas, Mario Miguel Ojeda Ramírez y Cecilia Cruz López</i>	343
Capítulo 17: La estimación de la correlación: variables de tarea y sesgos de razonamiento. <i>María M. Gea, Carmen Batanero, Gustavo R. Cañadas, Pedro Arteaga y José M. Contreras</i>	361

Presentación

El año 2013 se fue declarado como el Año Internacional de la Estadística (International Year of Statistics – Statistics 2013), con el propósito de celebrar y reconocer los aportes de la Estadística al quehacer diario en la sociedad actual. Los objetivos que se persiguen son:

- ✓ Aumentar la conciencia pública sobre el poder y el impacto de la Estadística en todos los aspectos de nuestra sociedad.
- ✓ Promover la Estadística como una profesión, especialmente entre la gente joven.
- ✓ Fomentar la creatividad y el desarrollo de las ciencias de la Probabilidad y la Estadística.

Como parte de la celebración de este Año Internacional de la Estadística (Estadística 2013), en la Universidad Central de Venezuela, a través del *Programa de Cooperación Interfacultades*, decidimos publicar dos libros, en formato electrónico: *La Estadística en la Investigación: competencia transversal en la formación universitaria* y *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas*.

Este volumen, *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas*, reúne trabajos de investigadores oriundos de distintos países latinoamericanos, se trata de una muestra incompleta de nuestra región. Pero también se encuentran presentes investigadores de España, en un caso, formando equipo con investigadores latinoamericanos y en otro como grupo; como es el caso del *Grupo de Investigación sobre Educación Estadística* de la Universidad de Granada; el cual, sin duda, tiene gran influencia en América Latina. Los trabajos aquí publicados tienen en común su preocupación por la enseñanza, aprendizaje y evaluación de la Estadística en distintos niveles de la educación. Con esta obra se busca dar evidencia del desarrollo de la Educación Estadística en Latinoamérica.

Queremos dar las gracias a todos los investigadores que enviaron sus trabajos para ser considerados en esta publicación, incluyendo aquellos que no fueron seleccionados. Asimismo, agradecemos a los miembros del Comité Académico, por sus recomendaciones y orientaciones para la selección de los trabajos y los árbitros. Por último, queremos expresar nuestro infinito agradecimiento a todos los investigadores que, de forma desinteresada, revisaron todos los trabajos preseleccionados. La labor realizada por todo este grupo de personas permitió la evaluación y selección de los trabajos que conforma esta obra.

Audy Salcedo
Coordinador Ejecutivo
Programa de Cooperación Interfacultades
Octubre 2013

SIMULACIÓN Y MODELOS EN LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD: UN ANÁLISIS DEL POTENCIAL DE LOS APPLETS Y LA HOJA DE CÁLCULO

SANTIAGO INZUNSA CAZARES

RESUMEN

En el presente capítulo hacemos un análisis del potencial de la simulación y la construcción de modelos en la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad. Con base en la revisión de la literatura identificamos diversas ventajas y dificultades que se han observado después de su implementación por medio de diversas herramientas computacionales. Hacemos énfasis en dos herramientas de software como son la hoja de cálculo y los applets, y presentamos algunos resultados de un trabajo de investigación sobre modelación con la hoja de cálculo Excel que realizamos con estudiantes en un curso universitario a nivel introductorio.

Palabras clave: Simulación, probabilidad, applets, hojas de cálculo.

1. INTRODUCCION

El enfoque de modelación para la resolución de problemas ha venido adquiriendo cada vez mayor importancia; de tal forma, las prácticas de modelación que involucran situaciones de la vida real son cada vez más frecuentes en la enseñanza y aprendizaje de diversas áreas de las matemáticas. Romberg, Carpenter y Kwako (2005) señalan que la modelación puede ayudar a los estudiantes a desarrollar una comprensión de un amplio rango de importantes ideas matemáticas y de otras ciencias, por lo que las prácticas de modelación deberían ser fomentadas en cada nivel educativo. Goldstein y Hall (2007) consideran que con el planteamiento de situaciones de modelación se busca estimular el interés de los estudiantes por problemas del mundo real, y de esta manera, generar un aprendizaje más significativo y una adecuada comprensión de diversos conceptos matemáticos. Por su parte, English y Sriraman (2010) identifican en el enfoque de modelación diversas ventajas didácticas, entre las cuales destacan las siguientes:

1. Las cantidades y operaciones que son necesarias para matematizar situaciones reales, con frecuencia van más allá de las que son enseñadas en el currículo tradicional de matemáticas. Ejemplos de estas cantidades son: acumulaciones, probabilidades, frecuencias, rangos y vectores; mientras que las operaciones necesarias incluyen, ordenamientos, selección, cuantificación y transformación de conjuntos de datos.

2. El ambiente de modelación ofrece ricas experiencias de aprendizaje que no se encuentran fácilmente en la enseñanza tradicional, ya que los estudiantes requieren generar sus propias ideas matemáticas conforme resuelven el problema, lo que exige a su vez, que tomen sentido de él para poder matematizarlo.
3. En la modelación se pueden utilizar contextos del mundo real extraídos de diversas disciplinas (transversalidad), con lo cual los estudiantes pueden comprender el verdadero valor de las matemáticas en las ciencias y vida cotidiana.
4. Mediante prácticas de modelación de mayor alcance se puede estimular el desarrollo de modelos generalizables que son aplicables a un amplio rango de situaciones relacionadas.

En el caso particular de la probabilidad -campo de estudio que se aborda en el presente trabajo-, la importancia de los modelos ha sido señalada por diversos autores y organismos que promueven la enseñanza de la probabilidad (Heitele, 1975; Borovcnik, Bentz y Kapadia, 1991; NCTM, 2000; Sánchez y Canal, 2003). Por ejemplo, Heitele (1975) identifica al *modelo de urna y simulación* como una de varias ideas estocásticas fundamentales que deben ser abordadas de forma continua y con diferentes niveles cognitivos y de formalidad a lo largo de un currículo en espiral, que empieza desde la educación elemental.

A través de modelos de urna es posible representar una diversidad de experimentos aleatorios – sobre todo aquellos con espacios muestrales contables- mediante los cuales los estudiantes pueden construir modelos explicativos intuitivos correctos de diversos conceptos de probabilidad desde edades tempranas, ya que son relativamente sencillos y para su elaboración no se requiere una enseñanza formal y analítica, ya sea en forma física o en ambientes virtuales. Además, diversos experimentos aleatorios pueden ser analizados mediante la composición o secuencia de varias urnas (hiperurna), lo que permite estudiar procesos aleatorios de mayor complejidad como los que se establecen en el currículo de probabilidad en grados superiores.

2. MODELOS Y SIMULACION COMPUTACIONAL

Gottfried (1984) considera a la simulación como una actividad mediante la cual se pueden extraer conclusiones acerca del comportamiento de un sistema, estudiando el comportamiento de un modelo cuyas relaciones de causa y efecto son las mismas (o similares) a las del sistema original. En nuestro caso nos interesamos en un tipo particular de simulación, como es la simulación aleatoria, en la cual el sistema contiene variables con elementos de incertidumbre (variables aleatorias).

Las situaciones aleatorias de interés en la clase de probabilidad pueden ser representadas mediante modelos matemáticos, modelos físicos (por ejemplo: urnas o ruletas) o modelos computacionales. Según Biehler (1991) los modelos computacionales tienen una naturaleza dual, ya que son a su vez

modelos simbólicos como los modelos matemáticos (representados en lenguaje formal) y al mismo tiempo son modelos físicos (representados en una máquina real). Señala a su vez que “los modelos computacionales son más cercanos a las características hipotéticas y exploratorias de la modelación matemática tradicional que de los modelos físicos” (p. 173).

En didáctica de la probabilidad el interés se ha centrado en el uso de modelos computacionales para simular sistemas o situaciones aleatorias, el modelo matemático de la situación puede ser representado mediante un lenguaje de computadora y tiene como base primitiva al comando *random*. De esta manera, con el avance de la tecnología y los ambientes virtuales con interfaces altamente interactivas que hoy existen, la simulación computacional permite explorar la potencialidad de los diferentes tipos de modelos (matemático, computacional y físico) de forma simultánea, ya que cuando se construye el modelo se utilizan argumentos, símbolos y razonamiento matemático, el cual se convierte en alguna medida, –dependiendo del software utilizado- en un modelo físico virtual o en un modelo computacional más formal.

Así, la introducción de la probabilidad a través de modelos puede realizarse a distintos niveles de abstracción y formalismo como lo sugiere Heitele (1975). Chaput, Girard y Henry (2008) consideran que algunos modelos básicos pueden ser presentados usando terminología de la vida diaria. Los objetos son idealizados mediante la selección de sus características más relevantes y de esta manera se obtiene un modelo pseudo-concreto de la realidad. Un ejemplo muy ilustrativo es el modelo de urna: en un primer momento se puede presentar una urna real conteniendo canicas (indistinguibles al tacto), la cual puede ser representada por una urna ideal con un modelo probabilístico basado en la hipótesis de equiprobabilidad en la selección aleatoria de las canicas (distribución de probabilidad uniforme). A mayor nivel de formalidad y abstracción, es necesario utilizar representaciones, lenguaje y simbolismo matemático para construir un modelo (por ejemplo, el modelo Bernoulli) que describa las propiedades generales del modelo de urna y los algoritmos con los cuales se pueden realizar operaciones sobre el modelo.

Para contextualizar lo anterior consideremos la siguiente situación: En una población el 42.8% de los habitantes se opone a una ley que está orientada a cobrar más impuestos, el resto de los habitantes (57.2%) está de acuerdo con dicha ley; si se selecciona una muestra aleatoria de 5 personas, ¿cuál es la probabilidad de que todas estén de acuerdo con la nueva ley? Una idealización del problema nos permite establecer como características e hipótesis relevantes, las dos posibles respuestas (acuerdo o desacuerdo) que se pueden obtener al plantear la pregunta a una persona, las cuales se consideran independientes y con probabilidades constantes cada vez que se realice la entrevista a una persona. Es posible entonces, diseñar una urna real con 7 canicas de dos colores, donde un color (por ejemplo, verde) representa a las personas que están de acuerdo (42.8%) y el otro color (por ejemplo, rojo) a los

que están en desacuerdo (57.2%). Se deben colocar entonces 4 canicas rojas y 3 canicas verdes para representar los porcentajes indicados en el enunciado del problema. Se debe establecer además que se seleccionará con reemplazo una canica (para mantener constante la probabilidad y cumplir la independencia), se observa su color y se anota el resultado.

Además del modelo físico anterior se puede generar un modelo pseudo-concreto virtual a través de un programa de computadora considerando las mismas condiciones ya especificadas. En este caso utilizaremos el software SimulaProb (Gastélum y Inzunza, 2007). El software tiene en su diseño incorporada la hipótesis de otorgar la misma probabilidad a cada canica que sea seleccionada, por lo que la selección parte de una distribución de probabilidad uniforme (ver figura 1). Al definir los elementos y condiciones establecidos en el software, los estudiantes están realizando una traducción del problema real al contexto computacional y el modelo generado debe reproducir los mismos resultados que si el experimento se realiza con la urna real. A un nivel más abstracto, se pueden poner en correspondencia los resultados obtenidos físicamente y con la computadora, con el modelo matemático que correspondiente, que es la distribución de probabilidad binomial con parámetros $n=5$ y $p=0.572$.

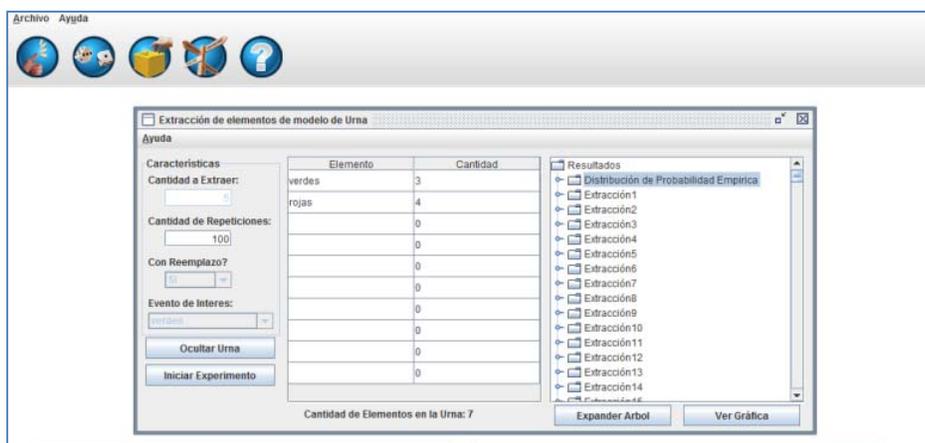


Fig. 1: Ventana de diseño para la definición de un modelo de urna en el software SimulaProb.

3. EL POTENCIAL DE LA SIMULACIÓN Y LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS

Biehler (1991) señala dos aspectos de la enseñanza de la probabilidad en los que la simulación computacional con una metodología pedagógica apropiada puede ser de gran apoyo. Estos son la “carencia de experiencia” y lo que él llama “puente concepto-herramienta”. Respecto a la carencia de experiencia, señala que las computadoras pueden proporcionar mucho más experiencia en el manejo y representación de los datos a como sería posible en forma manual en el mismo período de tiempo. Por lo que se refiere al puente concepto-herramienta, indica que muchos problemas de matemáticas dependen tradicionalmente de la capacidad de cálculo de los estudiantes. Así, la computadora

proporciona a través de la simulación una estrategia alternativa para la resolución de problemas y nos permite investigar situaciones más realistas que antes no eran posibles. Señala a su vez, los siguientes aspectos que él considera ventajosos con el enfoque computacional.

1. El número de repeticiones es fácilmente incrementado, haciendo que la incertidumbre y la variabilidad de los resultados se reduzcan; nuevas clases de patrones pueden ser detectados.
2. Es posible una exploración extensiva cambiando los supuestos del modelo, haciendo experimentos adicionales, cambiando la forma de generar los datos, etc.
3. Representaciones nuevas y más flexibles están disponibles para expresar modelos y procesos estocásticos y despliegue de datos con facilidades gráficas.

Otro aspecto interesante señalado por Biehler tiene que ver con el potencial experimental e interactivo de las computadoras. Al respecto, Thistead y Velleman (1992), describen a la simulación “como la cara experimental de la ciencia del análisis de datos. En el salón de clase la simulación de experimentos juega el mismo rol para la estadística, como el laboratorio de experimentos lo hace para muchas ciencias. El profesor puede usar simulaciones para ilustrar principios o procedimientos, para demostrar hechos y métodos” (p. 45). Por su parte, Batanero (2001), resalta la importancia de la simulación como recurso didáctico, ya que puede ayudar a comprender la diferencia entre modelo y realidad y a mejorar las intuiciones sobre la aleatoriedad.

Desde nuestra perspectiva, la simulación computacional, integra diversos aspectos que son importantes en la enseñanza de la probabilidad:

1. Requiere de una actividad de modelización matemática en la cual los estudiantes necesitan desarrollar ciertas competencias, tales como hacer supuestos para simplificar el problema, identificar y simbolizar variables y parámetros, formular el modelo tomando en cuenta los supuestos y las condiciones del problema, para finalmente resolverlo e interpretar la solución.
2. Cuando es posible una solución analítica del problema, se pueden contrastar los resultados experimentales generados por la simulación con los resultados teóricos. En casos donde no es posible una solución analítica o es demasiado compleja, la simulación constituye una herramienta de fundamental importancia.
3. Permite abordar problemas abstractos en términos más concretos, sobre todo cuando la simulación se realiza en ambientes computacionales provistos de diversas representaciones (gráficas, simbólicas, numéricas) ligadas entre sí, que hacen posible una visualización y retroalimentación de las diversas componentes del modelo.

El fundamento de la simulación de fenómenos aleatorios está basado en la concepción frecuencial de la probabilidad, que considera ésta como el número al que tiende la frecuencia relativa de un evento al repetir indefinidamente un experimento aleatorio, y avalada teóricamente por la ley de los grandes

números. Hay que tener en cuenta sin embargo que el uso de este enfoque permite encontrar una solución aproximada del problema y no proporciona la justificación del porqué esa solución es correcta. Será necesario un estudio matemático formal de la distribución de resultados para probar de manera definitiva cuál es la solución correcta.

4. LA SIMULACIÓN EN EL CURRÍCULO DE PROBABILIDAD

Algunas reflexiones y discusiones sobre el potencial de la simulación en la enseñanza de la probabilidad datan desde la década de los años 70 y 80 de siglo pasado. Biehler (1991) en su artículo “Computadoras en la Enseñanza de la Probabilidad”, el cual ha sido referente para muchos trabajos de investigación actuales, realiza un recuento de la investigación realizada hasta la fecha y encuentra que más allá del optimismo que generó la introducción de la tecnología, existía poca evidencia empírica sobre el uso de simulaciones en la enseñanza de la probabilidad. Entre las causas que atribuye a la escasez de resultados de investigación por la época, menciona la reciente incorporación de la probabilidad al currículo y la falta de software adecuado para la simulación.

Sin embargo, en los últimos años la situación ha cambiado, y la propuesta de introducir la simulación como un enfoque alternativo para la enseñanza de la probabilidad ha cobrado gran auge, teniendo como marco un enfoque de la enseñanza de las matemáticas a través de actividades más experimentales ligadas a la vida real, la accesibilidad de la tecnología computacional y el software estadístico. Adicionalmente, el enfoque de simulación permite ligar y establecer una relación entre los enfoques clásico y frecuencial de la probabilidad, situación muy sugerida por diversos autores y estudios de investigación (por ejemplo, Fischbein y Gazit, 1984; Batanero, Henry y Parzysz, 2005; Garutti, Orlandoni, Ricci, 2008). Una revisión del currículo en los niveles preuniversitarios en Estados Unidos, Inglaterra y Australia realizada por Jones, Langrall y Mooney (2007) muestra que entre las grandes ideas de probabilidad se encuentra el uso de simulaciones para modelar fenómenos inciertos y estimar probabilidades. Igualmente Chaput, Girard y Henry (2010) dan cuenta de la incorporación de la simulación y modelación en el currículo francés desde la década de 1990. De esta manera, diversas reformas curriculares en la última década, recomiendan iniciar con un enfoque experimental mediante la construcción de simulaciones de experimentos aleatorios para preparar a los estudiantes para la teoría. En el caso de Francia, se implementó el enfoque frecuencial mediante simulaciones (Chaput, Girard, Henry, 2008). El propósito es preparar a los estudiantes para la ley de los grandes números y comprender la relación entre frecuencia relativa y probabilidad. Investigadores franceses han desarrollado diversas ideas interesantes y han realizado un análisis didáctico en torno a la perspectiva de modelación y simulación en probabilidad (por ejemplo: Girard, 1997; Henry, 1997; Dantal, 1997). Al respecto, Henry (1997) establece la siguiente definición de modelo que adoptamos en este trabajo:

“un modelo es una representación abstracta, simplificada e idealizada de un objeto real, un sistema de relaciones o un proceso evolutivo, dentro de una descripción de la realidad” (p. 78). El proceso de construcción de un modelo y su simulación consta de diferentes etapas. Por ejemplo, Henry (1997) propone la siguiente secuencia:

1. *Elaborar un modelo pseudo-concreto y descripción de la realidad.*

Este paso consiste en observar una situación concreta y describirla en términos simples. Los estudiantes requieren traducir la descripción a una versión de un sistema simplificado y estructurado que permita seleccionar las propiedades de los objetos reales para así diseñar el modelo pseudo-concreto. Por ejemplo en el modelo de urna, se asume que las canicas tienen la misma probabilidad de ser seleccionadas y se determina si la selección será con o sin reemplazo.

2. *Matematización y formalización.*

Con base en las hipótesis establecidas, los estudiantes deben representar el modelo en un adecuado simbolismo. El modelo debe ser formalizado y las hipótesis verificadas. Finalmente se deben elegir los procedimientos y herramientas correctas para resolver el problema.

3. *Validación e interpretación en el contexto.*

Los resultados obtenidos se traducen de acuerdo con el modelo pseudo-concreto construido y se da significado a los resultados para responder la pregunta planteada y finalmente confrontar los resultados con la hipótesis del modelo.

Una propuesta más detallada para la formulación de un modelo de simulación mediante el uso de una computadora, la sugieren Gnanadesikan, Scheaffer y Swift (1987):

1. *Establecer el problema claramente.*

Es importante que el problema se establezca con toda la información necesaria y el objetivo de la simulación sea claro.

2. *Definir las componentes clave.*

Los resultados de la mayoría de las situaciones reales constan de una serie de componentes clave. Es importante definir estas componentes claramente ya que forman la base de la simulación.

3. *Establecer los supuestos del problema.*

La mayoría de los problemas reales requieren algunas hipótesis simplificadoras antes de resolverlos. Estas hipótesis deben estar claramente establecidas.

4. *Seleccionar el modelo para generar los resultados para una componente clave.*

Modelamos una componente clave mediante un mecanismo que genere resultados aleatorios con probabilidades que correspondan a la situación real.

5. *Realizar una prueba para un caso.*

Una prueba consiste de una serie de simulaciones de componentes clave que se detiene cuando la situación de interés ha sido simulada una vez.

6. *Registrar la observación de interés.*

Se registra la información necesaria para alcanzar el objetivo del paso 1 y se registra si la prueba fue favorable al evento de interés.

7. *Repetir los pasos 5 y 6 un gran número de veces.*

La estimación de la precisión de una probabilidad requiere que el experimento conste de muchas pruebas.

8. *Resumir la información y extraer conclusiones.*

Se calculan las frecuencia con las que ocurrió el evento de interés. Otros estadísticos también pueden ser calculados.

5. HERRAMIENTAS COMPUTACIONALES PARA LA SIMULACIÓN Y MODELACIÓN

En la actualidad existe una diversidad de herramientas de software que pueden ser utilizadas en la enseñanza de la probabilidad. El proceso de modelación que subyace en cada una de ellas varía en su nivel de abstracción de acuerdo con los propósitos y el nivel educativo para el que fueron pensadas. De tal forma, herramientas que fueron diseñadas con propósitos meramente de exploración de conceptos o para alumnos de niveles básicos de escolaridad, el software incorpora dispositivos aleatorios virtuales lo más parecidos a la realidad (por ejemplo, urnas, dados, ruletas), en los que el usuario puede elegir fácilmente los parámetros del modelo para la simulación. En esta categoría se encuentran herramientas de software como los applets, ProbSim (ver figura 2), ChanceMaker (Pratt, 1998) y SimulaProb (ver figura 3). Otras herramientas de software ofrecen representaciones más formales para la construcción del modelo y la simulación, las cuales son más apropiadas en niveles de bachillerato o superiores, donde además de la exploración de conceptos de pretende desarrollar habilidades de modelación matemática. Ejemplo de estas herramientas son las hojas de cálculo (ver figura 4) y el software estadístico (por ejemplo: Fathom). Sin embargo, en este trabajo restringimos nuestro análisis a dos tipos particulares de herramientas de software como son las hojas de cálculo y los applets.

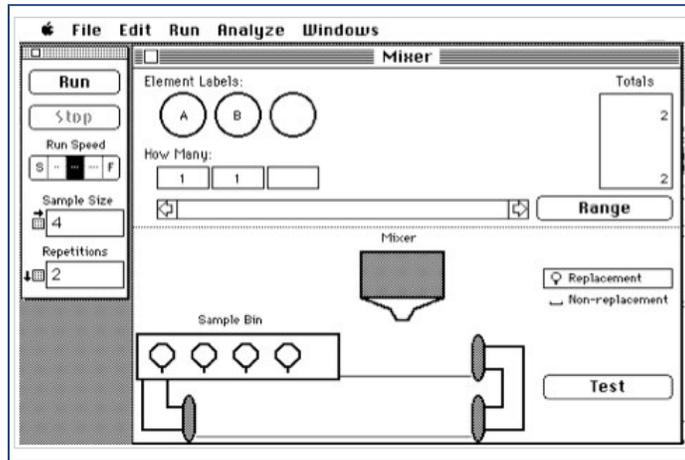


Fig. 2: Ventana principal de ProbSim (Konold y Miller, 1992)

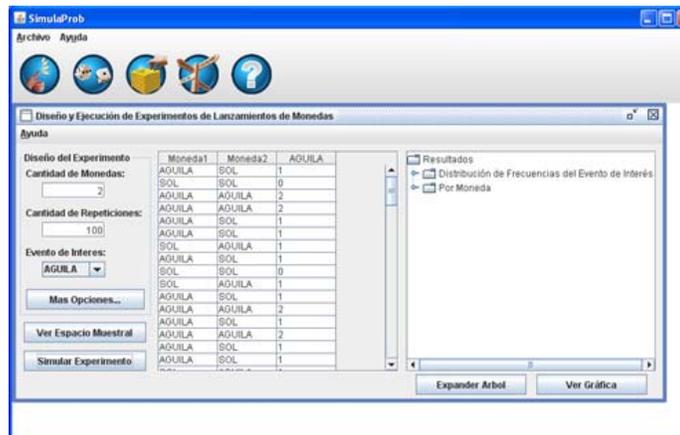


Fig. 3: Ventana de SimulaProb (Gastélum y Inzunza, 2007).

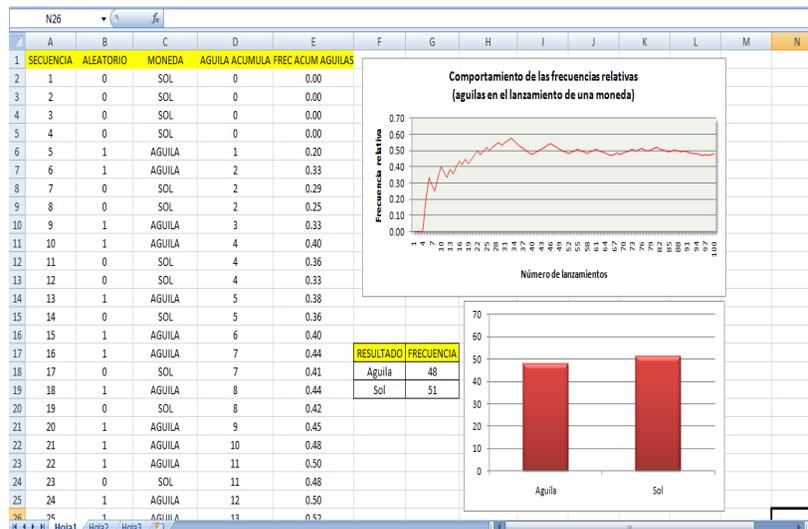


Fig. 4: Ejemplo de una actividad desarrollada en la hoja de cálculo Excel (Inzunza, 2010)

El proceso de simulación liga a las situaciones y problemas con los comandos del software a través de los modelos, por lo que la construcción del modelo apropiado es fundamental para llevar a cabo la simulación, es evidente entonces la relación de dependencia entre modelos y simulación. Sin embargo, Schwartz (2007) identifica algunas diferencias entre ambos: el propósito de hacer un modelo y explorarlo es para exponer los mecanismos subyacentes que gobiernan las relaciones entre las entidades que lo constituyen. En contraste, el propósito de realizar una simulación y correrla es proporcionar a los usuarios una experiencia sustituta de la realidad externa que representa la simulación. Entonces los modelos buscan explicar complejos sistemas referentes, mientras las simulaciones buscan describir situaciones referentes, con frecuencia ofreciendo un rico estímulo multisensorial que ubica a los usuarios en un rico simulacro tanto como sea posible.

De esta manera, los desarrolladores de modelos buscan limitar su complejidad para hacer las causas subyacentes más salientes, mientras que los diseñadores de simulaciones buscan tanta riqueza y complejidad del referente como sea posible para una experiencia perceptualmente tan rica como sea posible. En los ambientes educativos esta diferencia en propósitos hace bastante diferentes los roles para los modelos y las simulaciones.

5.1 ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LAS CAPACIDADES DE SIMULACION DE LOS APPLETS

Los Java applets son pequeños programas de computadora escritos en lenguaje JAVA que un navegador de internet ejecuta en el espacio de una página web (ver figura 5). Su propósito es ilustrar, simular y explorar conceptos y principios en un ambiente dinámico y gráfico. El usuario puede acceder a estos programas y ejecutarlos desde su computadora. En conjunto pueden formar un laboratorio virtual donde es posible realizar exploraciones y simulaciones de diversos conceptos. En Inzunza (2007) realizamos una revisión del potencial de estos recursos para la educación estadística.

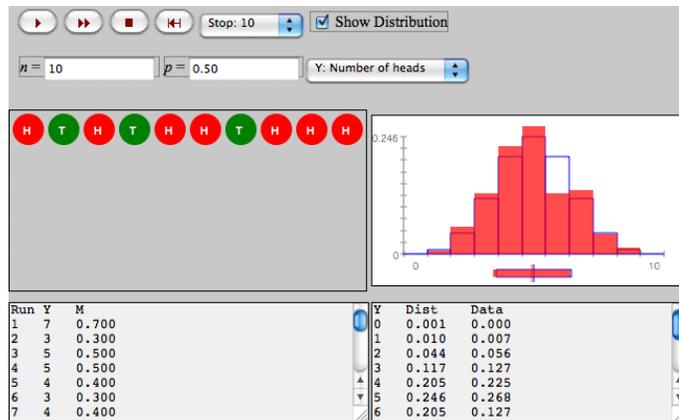


Fig. 5: Applet que simula el lanzamiento de una moneda e ilustra la proporción de caras en muestras de tamaño 10. Tomado de <http://www.math.uah.edu/stat/applets/index.html>

El applet de la figura 5 simula un experimento de 10 lanzamientos de una moneda, determina la proporción de caras y grafica su distribución para una cantidad especificada de experimentos. El applet proporciona opciones para definir los parámetros del modelo como es la variable aleatoria (número de caras), el tamaño de la muestra ($n=10$) y la probabilidad de éxito en cada ensayo o lanzamiento ($p=0.5$), que son los parámetros requeridos por el modelo de probabilidad binomial; proporciona además, la opción de superponer la distribución teórica con la distribución de frecuencias obtenida de la simulación. Como resultado de la simulación emite la secuencia que muestra tal como sucedieron los resultados de la moneda, permitiendo con ello analizar el concepto de aleatoriedad mediante el análisis de rachas y frecuencias de resultados. Proporciona una representación tabular de la frecuencia del resultado de la variable (número de caras) para cada experimento y una distribución de frecuencias de dichas proporciones tanto en su versión tabular como gráfica mediante un histograma de frecuencias.

De esta manera, gran parte del potencial de los applets radica en la variedad de representaciones visuales y numéricas que se utilizan para mostrar el comportamiento de un fenómeno aleatorio. Adicionalmente, la retroalimentación inmediata permite observar algún cambio en las representaciones cuando un parámetro o una condición del problema son modificadas. Las representaciones simbólicas que se requieren en otros ambientes para generar el modelo, en estos instrumentos se suplen mediante ventanas o botones que permiten asignar valores al usuario, dotándolos de interactividad tanto en los valores de entrada como en la generación de resultados. Los siguientes applets (ver figuras 6 y 7) permiten estudiar el efecto que tienen sobre la distribución normal, sus parámetros (media y desviación estándar) y la diferencia entre distribución empírica teórica de probabilidad respectivamente.

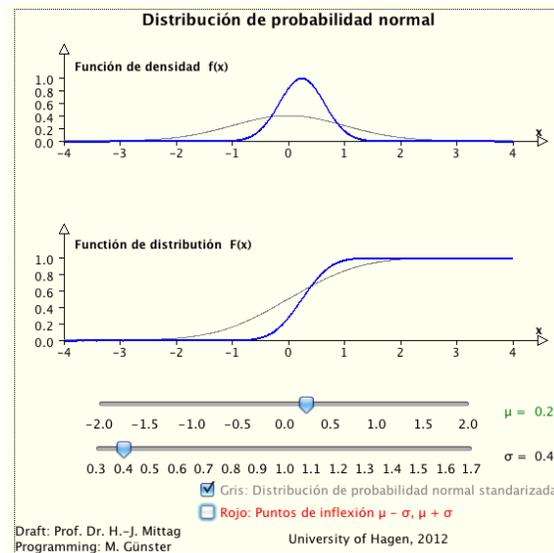


Figura 6: Efecto de los parámetros en la distribución de probabilidad normal
 Tomado de: http://www.fernuni-hagen.de/jmittag/repository_es/distributions/normal.html

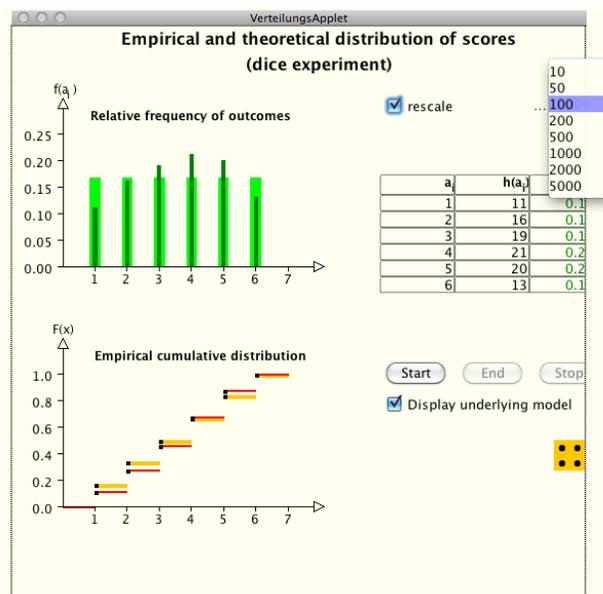


Figura 7: Distribución teórica contra distribución empírica del lanzamiento de un dado (distribución uniforme discreta)
 Tomado de: <http://www.fernuni-hagen.de/jmittag/repository/dice/uniform.html>

En los años recientes ha habido un crecimiento notable en el desarrollo de applets y otros materiales accesibles a través del internet. Investigadores, profesores y organizaciones que promueven la enseñanza de la probabilidad y la estadística se han dado a la tarea de desarrollar applets prácticamente para todos los conceptos que forman parte de un curso de bachillerato y nivel universitario; incluso, se ha empezado a generar investigación en torno a su impacto en el aprendizaje

de los estudiantes y sobre el uso que hacen de ellos los profesores en el aula de clase. Dichos resultados están siendo retomados por los desarrolladores de software para generar ciclos de mejora en la producción de estos componentes.

De tal forma, la Asociación Internacional de Educación Estadística (IASE por sus siglas en inglés) en el Congreso Satélite de 2003, dedicó el tema de Internet en la Educación Estadística. A su vez, en otros congresos de la misma IASE, los trabajos sobre el desarrollo de applets y otro tipo de materiales en línea son cada vez más frecuentes. Análisis y resultados de investigación sobre este tipo de herramientas son aún escasos por lo que constituyen un amplio campo de oportunidades de desarrollo y de investigación. Entre los trabajos de investigación que reportan resultados con el uso de applets se encuentran los realizados por Godino et al (2003); Lipson et al (2003); Cunliffe et al (2003) y Cristou, Dinov y Sánchez, (2007).

En tiempos muy recientes se ha empezado a desarrollar herramientas que permiten la creación de applets a través del software Geogebra. Dicho software es una aplicación de software libre con código abierto que entre otras muchas ventajas permite la creación de applets interactivos. El desarrollo de applets a través de Geogebra solo requiere que el usuario desarrolle una actividad con ciertos propósitos didácticos y el software convierte la actividad en un applet que puede ser insertado en una página de internet (ver figura 8), exportando las ventanas interactivas con la actividad diseñada a código HTML e incrustando las ventanas en aplicaciones de creación de contenidos de formato universal.

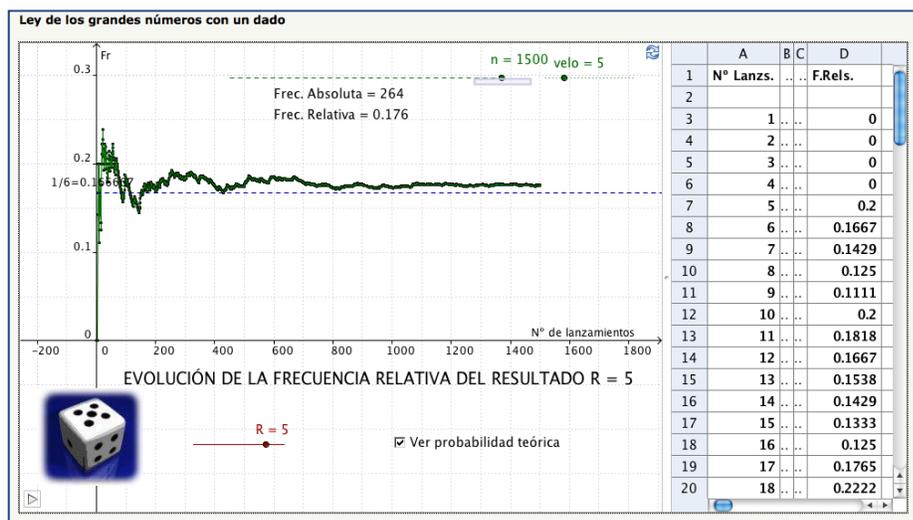


Fig. 8: Frecuencia relativa de los resultados de una moneda (Simulación con 1500 lanzamientos)
Tomado de: <http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/dado1grafica.htm>

5.2 ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LAS CAPACIDADES DE SIMULACIÓN DE LA HOJA DE CÁLCULO

No obstante que la hoja de cálculo fue concebida para automatizar cálculos contables y realizar simulaciones en este dominio, actualmente ha expandido su uso a otras áreas, como es el caso de la educación. De acuerdo a lo señalado por Artigue (2011), en Francia, la hoja de cálculo es utilizada en la enseñanza de las matemáticas desde los primeros años de la secundaria, y su uso es preconizado en aritmética, cálculo, estadística y probabilidad. En la literatura existen diversos trabajos que señalan el potencial de esta herramienta para diversos tópicos de probabilidad y estadística (por ejemplo, Konold, 1994; McClintock y Zhonghong, 1997; Lesser, 1999; Beigie, 2010).

Un tipo de hoja de cálculo ampliamente conocida por su facilidad de acceso por los usuarios es la hoja de cálculo Excel, la cual analizamos en el presente trabajo. Excel posee diversas potencialidades en los aspectos representacional, de cálculo y de comunicación, características importantes en la enseñanza de las matemáticas. En el aspecto de comunicación, los usuarios introducen la información de un problema a través de un lenguaje aritmético-algebraico interactivo. Dicha interactividad permite una retroalimentación inmediata cuando se trabaja con una fórmula presionando la tecla F9, con lo cual los usuarios pueden experimentar, conjeturar y encontrar errores en sus procesos de solución. En el aspecto representacional dispone de múltiples representaciones de los objetos matemáticos, permitiendo que varios registros semióticos puedan ser presentados en forma simultánea sobre la pantalla, tal es el caso del registro de fórmulas para expresar relaciones entre celdas, el registro numérico para representar datos o resultados de los cálculos, el registro gráfico que permite al usuario construir varios tipos de representaciones gráficas dinámicamente ligadas a datos numéricos. En el aspecto de cálculo, dispone de una amplia gama de fórmulas que permiten formular modelos, generar datos y realizar cálculos.

En el caso específico de la modelación de fenómenos aleatorios, la hoja de cálculo Excel dispone de comandos para generar números pseudoaleatorios, los cuales son la base de la simulación. Cuando los fenómenos aleatorios son simulables a través de modelos de urna –caso que nos ocupa en nuestro trabajo–, Excel dispone de dos comandos que generan números provenientes de una distribución de probabilidad uniforme: *aleatorio()* y *aleatorio.entre(a,b)*. El comando *aleatorio()* devuelve un número aleatorio mayor que 0 y menor que 1, mientras que el comando *aleatorio.entre(a,b)* devuelve un número aleatorio entero entre los límites a y b que se especifican. Con ambos comandos se pueden construir modelos de urna simples (por ejemplo, para simular una moneda), hasta modelos de urna mucho más complejos (por ejemplo, para simular problemas que implican al Teorema de Bayes). Ambos comandos en su forma básica se muestran en las figuras 9 y 10.

=ALEATORIO.ENTRE(1,10)		
D	E	F
5		
3		
1		
1		
7		
6		

Fig. 9: Comando aleatorio.entre(a,b)

=ALEATORIO()		
D	E	F
0.55377255		
0.23272124		
0.95755418		
0.59694944		
0.52570303		
0.43585699		

Fig. 10: Comando aleatorio()

Los números pseudoaleatorios generados a través de estas funciones tienen dos propiedades que los hacen equiparables a números completamente aleatorios:

1. Cualquier número entre 0 y 1 tiene la misma probabilidad de ser generado.
2. Los números generados son independientes unos de otros.

De esta manera, los usuarios pueden realizar la actividad de matematización para generar los modelos y validar sus resultados, poniendo en juego diversas funciones e involucrando diferentes pasos y operaciones de acuerdo a sus esquemas mentales y la permisibilidad la herramienta (hoja de cálculo). De acuerdo con la teoría de la instrumentación (Guin y Trouche, 1999, Artigue, 2002), en el proceso de uso y apropiación de un artefacto el usuario desarrolla esquemas mentales para tareas específicas, en los cuales el conocimiento técnico (habilidades para usar el artefacto) y el conocimiento sobre el dominio específico del contenido matemático se entrelazan o complementan. En el caso de una tarea matemática, un esquema mental involucra la estrategia global de solución, los medios técnicos que el artefacto ofrece y los conceptos matemáticos que subyacen a la estrategia.

Para ejemplificar en el contexto de la enseñanza de la probabilidad, cuando los estudiantes utilizan una herramienta como la hoja de cálculo, trabajan con representaciones de objetos matemáticos tales como generadores de números aleatorios, un simbolismo para modelarlos (comandos o funciones) que requieren de sintaxis en sus valores de entrada o parámetros, diferentes tipos gráficas para representar los resultados y medidas estadísticas para describir su comportamiento y resumir los resultados (por ejemplo, frecuencias de eventos favorables). A través de su trabajo e interacción, los estudiantes pueden gradualmente desarrollar la hoja de cálculo como una fuente de aprendizaje, de tal forma que la hoja de cálculo puede llegar a ser un instrumento en cierto nivel para cada estudiante a través de su uso.

En este contexto hemos realizado un estudio con estudiantes de primer grado universitario (Inzuna, 2012). A partir de la actividad matemática realizada por los estudiantes para desarrollar el proceso de simulación con la hoja de cálculo Excel, identificamos tres etapas importantes, con conceptos y características propias que requieren diferentes actividades de matematización por parte de los estudiantes:

1. Producir los resultados a través de comandos basados en generadores de números aleatorios.
2. Realizar operaciones (aritméticas, lógicas, condicionales) para cumplir con las condiciones del problema.
3. Identificar los resultados favorables para calcular su frecuencia relativa.

Como ejemplo de lo anterior mostramos el modelo desarrollado por dos estudiantes sobre un sencillo problema que trataba de simular el lanzamiento de dos dados y calcular la probabilidad de que la suma de los puntos sea igual a 7. Un estudiante identificó y acumuló los casos favorables a la vez en la misma columna (columna de frecuencia), lo que implicó introducir una fórmula recursiva a partir del segundo renglón (ver figura 11). Los estudiantes que siguieron este mismo esquema cometieron diversos errores por las dificultades que les representaba la recursividad. Un esquema más sencillo utilizado por otro estudiante (ver figura 12), consistió en identificar los casos favorables a través de un 1 (columna frecuencia) y al final realizar el conteo de casos favorables a través de una suma en una celda determinada de la hoja, evitando así la recursividad. Ambos modelos involucraban diferentes comandos y operaciones matemáticas pero generaban resultados equivalentes.

A	B	C	D	E
LANZAMIENTOS	DADO 1	DADO 2	SUMA	FRECUENCIA
1	1	5	6	0
2	2	5	7	1
3	3	4	7	2
4	6	5	11	2
5	4	6	10	2

Lanzamientos	Dado 1	Dado 2	Suma	Frecuencia
1	5	4	9	0
2	4	2	6	0
3	3	2	5	0
4	2	6	8	0
5	4	3	7	1
6	6	1	7	1
7	3	5	8	0
8	3	5	8	0
9	2	3	5	0
10	5	2	7	1

Fig. 11: Modelo desarrollado por estudiante 1 Fig. 12: Modelo desarrollado por estudiante 2

Los resultados del presente trabajo muestran que la hoja de cálculo tiene potencialidades que hacen posible que estudiantes universitarios desarrollen un proceso de instrumentación adecuado para resolver problemas de probabilidad a través del método de simulación. Los recursos de la hoja de cálculo, como son las diversas representaciones simbólicas para formular modelos, identificar resultados favorables y calcular frecuencias; la interactividad en la comunicación entre usuario que permite una visualización inmediata de los resultados para retroalimentar y monitorear el proceso de solución, así como su capacidad de cálculo, constituyen elementos importantes que los estudiantes pueden manipular para convertir la hoja de cálculo en una herramienta para resolver problemas de probabilidad desde una perspectiva frecuencial.

Sin embargo, el proceso de instrumentación de la hoja de cálculo para simular fenómenos aleatorios no estuvo exento de dificultades. Una de las principales dificultades que identificamos tiene que ver con una concepción de la hoja de cálculo que se deriva del uso que hasta ese momento le

habían dado los estudiantes: la hoja de cálculo como una herramienta que les permite la captura y procesamiento de información de tipo contable y financiera. De esta manera, se explica la estrategia utilizada por muchos estudiantes de capturar información en forma directa para posteriormente realizar cálculos a través de la fórmula clásica de probabilidad, en lugar de utilizar generadores de números aleatorios. La simulación como método de solución de problemas de probabilidad les resultó desafiante, en tanto requiere del uso de diversas representaciones simbólicas para matematizar las relaciones entre las variables y parámetros, por lo que les resultaba más fácil recurrir al enfoque clásico que ellos habían trabajado en sus estudios previos.

El estudio nos reveló que el proceso de convertir un artefacto tecnológico en instrumento para la simulación no se constituye de manera inmediata, lo que nos conduce a pensar que es necesaria una planeación didáctica cuidadosa para presentar a los estudiantes el método de simulación como una alternativa confiable para resolver problemas de probabilidad; a su vez es importante un adecuado conocimiento de los aspectos técnicos de la herramienta para que los estudiantes pueden integrarla a sus fines de forma progresiva conforme avanzan en la solución de los problemas.

6. CONCLUSIONES

Entre las diversas formas de utilizar la computadora en la enseñanza de la probabilidad ha sobresalido la construcción de modelos de fenómenos aleatorios y su simulación. El potencial didáctico que se le atribuye tiene en cuenta diversos factores, entre los que podemos destacar la posibilidad de modelar problemas más reales y con menos formalismo matemático a los que son posibles desde la perspectiva clásica y axiomática de la probabilidad, factibilidad de desarrollar ideas estocásticas correctas desde los grados elementales, multiplicidad de representaciones dinámicas simultáneas del mismo concepto visibles y ejecutables en una misma pantalla, interactividad y retroalimentación que permiten al usuario un diálogo directo con la computadora.

Si bien la investigación realizada hasta ahora ha reportado diversas ventajas de la simulación en la enseñanza de la probabilidad, los resultados no son completamente satisfactorios, ya que muchos estudiantes no logran desarrollar una comprensión conceptual adecuada de los conceptos en cuestión, a pesar de utilizar herramientas tecnológicas diseñadas con propósitos específicos y de fácil manejo. En el caso de herramientas tecnológicas con diseños más abiertos (por ejemplo: la hoja de cálculo) en las que la modelación requiere de un manejo simbólico más abstracto, la simulación constituye todo un desafío para muchos estudiantes, e incluso para muchos profesores. Diversos estudios han mostrado evidencia de dichas dificultades (por ejemplo: delMas, Chance y Garfield, 1999; Sánchez, 2002; Maxara y Biehler, 2010; Galarza, 2011).

Se requiere aún de mucha investigación tanto con estudiantes como con profesores para conocer las formas más adecuadas para su implementación y los factores que limitan su utilidad en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad. Ello es necesario además porque nuevas tecnologías están surgiendo, y las existentes mejoran día con día su potencial didáctico. Por otra parte, es necesaria la actualización y formación de profesores de probabilidad en la perspectiva de la construcción de modelos y simulación, sobre todo en aquellos países donde estas ideas tienen poco tiempo de haber llegado al currículo escolar.

5. REFERENCIAS

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274.
- Artigue M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. (pp. 13-33), 6(8). Costa Rica.
- Batanero, C. (2001). Aleatoriedad, Modelización, Simulación. Artículo presentado en la *X Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, Zaragoza, España.
- Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Editor). *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning*. Springer Science+Business Media, Inc. 15-37.
- Beigie, D. (2010). Probability experiments with shared spreadsheets. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(8). NCTM.
- Biehler, R. (1991). Computers in probability education. En R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds.). *Chance Encounters: probability in education. A review of research and pedagogical perspectives*, (pp. 169-212). Dordrecht: Kluwer.
- Borovcnick, M., Bentz, H. y Kapadia, R. (1991). A Perspective Probabilistic. En R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds.), *Chance Encounters: probability in education. A review of research and pedagogical perspectives*, (pp. 27-71). Dordrecht: Kluwer
- Chaput, B., Girard, J. C. y Henry, M. (2008). Modeling and simulations in statistics education. *Proceedings of the ICMI Study 18 Conference and IASE 2008 Round Table Conference*. C. Batanero.; G. Burrill y Ch. Reading (Ed.). Joint ICMI/IASE Study. Monterrey México.
- Chaput, B., Girard, J. & Henry, M. (2011). Frequentist Approach: Modeling and Simulation in Statistics and Probability Teaching. In C. Batanero, G. Burril & Ch. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study*. The 18th ICMI Study, (pp. 85-95). Springer Science+Business Media.
- Cristou, N., Dinov, I. y Sánchez, J. (2007). Design and Evaluation of SOCR Tools for Simulation. *Proceedings of the IASE/ISI Sattellite*. Berlin Germany.
- Cunliffe, R., Regan, M. y Wild, Ch. (2003). Flexible Learning and Large Numbers (A Case Study). *Proceedings of the IASE/ISI Sattellite*. Berlin Germany.
- Dantal, B. (1997). Les enjeux de la modélisation en probabilité. En *Enseigner les probabilités au lycée* (pp.57-59). Reims: Commission Inter-IREM.

- DelMas, R., Garfield, J. & Chance, B. L. (1999). A Model of Classroom Research in Action: Developing Simulation Activities to Improve Students' Statistical Reasoning. *Journal of Statistics Education*, 7(3).
- English, L. y Sriraman, B. (2010). Problem Solving for the 21st Century. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers*. Springer, (pp. 263-290). Springer.
- Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15, 1-24.
- Galarza, M. D. (2011). *Dificultades que profesores de secundaria tienen en el diseño de actividades de simulación de fenómenos aleatorios en modelos de urna*. Tesis de Maestría en Docencia de las Matemáticas. Universidad Autónoma de Sinaloa.
- Garuti, R. A., Orlandon, R, Ricci (2008). Which probability we have to meet? A case study about statistical and classical approach to probability in student's behaviour. En C. Batanero, G. Burrill y Ch. Reading (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 Conference and IASE 18 Round Table Conference Joint ICMI/STUDY*, Monterrey México.
- Gastélum, D. A. y Inzunsa, S. (2007). *SimulaProb Software*. Facultad de Informática de la Universidad Autónoma de Sinaloa.
- Girard, J. (1997). Modélisation et simulation. *Enseigner les probabilités au lycée. Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*. Commission inter-IREM STATISTIQUE ET PROBABILITÉS. 245-250.
- Gnanadesikan, Scheaffer & Swift (1987). *The Art and Techniques of Simulation*. Quantitative Literacy Series. Dale Seymour Publications.
- Godino, J., Ruiz, F., Roa, R., Pareja, J. y Recio, A. (2003). Analysis of two internet interactive applets for teaching statistics in schools. *Proceedings of the IASE/ISI Satellite*. Berlin Germany.
- Goldstein, B. E. y Hall, R. (2007). Modeling without end: conflict across organizational and disciplinary boundaries in habitat conservation planning. En R. Lesh, E. Hamilton y J. Kaput (Eds.), *Foundations for the future in mathematics education*, (pp. 57-76). Lawrence Erlbaum Associates.
- Gottfried, B. (1984). *Elements of Stochastic Process Simulation*. New Jersey: Prentice Hall.
- Guin, D. y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments. The case of calculators. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning*. 3(3), 195-197.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- Henry, M. (1997). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. *Enseigner les probabilités au lycée. Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*. Commission inter-IREM STATISTIQUE ET PROBABILITÉS. 77-84.
- Inzunsa, S. (2007). Recursos de internet para apoyo de la investigación y educación e estadística. *Revista Iberoamericana de Educación*, 41(4). Disponible en: <http://www.rieoei.org/experiencias142.htm>
- Inzunsa, S. (2012). Ambientes virtuales de aprendizaje: Un enfoque alternativo para la enseñanza y aprendizaje de la inferencia estadística. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. 15(45), 423-452. Consejo Mexicano de Investigación Educativa.

- Jones, A. G., Langrall, C. W. & Mooney, S. (2007). Research in probability: Responding to Classroom Realities. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 909-949), National Council of Teachers of Mathematics.
- Konold, C. (1994). Teaching probability through modeling real problems. *Mathematics Teacher*, 87, 232-235. NCTM.
- Konold, C. y Miller, C. (1992). *ProbSim Software*. Scientific Reasoning Research Institute University of Massachusetts, Amherst, MA.
- Lesser, L. (1999). Exploring the birthday problema with spreadsheets. *Mathematics Teacher*, 92(5), 407-411. NCTM.
- Lipson, K., Kokonis, S, y Francis, G. (2003). Investigation of students' experiences with a web-based computer simulation. *Proceedings of the IASE/ISI Sattellite*. Berlin Germany.
- Maxara, C. y Biehler, R. (2007). Constructing Stochastic Simulations with a Computer Tool- Students' Competencies and Difficulties. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (pp. 1-13). Disponible en: ermeweb.free.fr/CERME%205/WG5/5_Maxara.pdf.
- McClintock, E. y Zhonghong, J. (1997). Spreadsheets: Powerful Tools for Probability Simulations. *Mathematics Teacher*, 90, 572-579.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA.
- Pratt, D. (1998). *ChanceMaker Software*.
- Romerg, T. A., Carpenter, T. P. y Kwako, J. (2005). Standards-Based Reform and Teaching for Understanding. En T. Romberg, T. Carpenter y F. Dremock (Eds.), *Understanding Mathematics and Science Matters*, (pp. 3-26). Lawrence Erlbaum Associates.
- Sánchez, E. (2002). Teacher's Beliefs about usefulness of Simulation with the Educational Software Fathom for Developing Probability Concepts in Statistics Classroom. En B. Phillips (Ed.). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. International Association for Statistical Education.
- Sánchez, E. y Canal, G. (2003). Computational Simulation and Conditional Probability Problem Solving. *Proceedings of the International Statistical Institute 54 Session*. Berlin Germany. Disponible en : <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/3/3638.pdf>
- Schwartz, J. L. (2007). Models, simulations, and exploratory environments: a tentative taxonomy. En Richard Lesh, Eric Hamilton y James Kaput (Eds.). *Foundations for the future in mathematics education*, (pp. 161-171). Lawrence Erlbaum Associates.
- Thistead, R. y Velleman, P. F. (1992). Computer and Modern Statistics. En D. Hoaglin y D. S. Moore (Eds.), *Perspectives on Contemporary Statistics* (pp. 41-53). Notes No. 21. Mathematical Association of America.

SIMULATION AND MODELS IN TEACHING PROBABILITY: AN ANALYSIS OF THE POTENTIAL OF APPLETS AND SPREADSHEETS

ABSTRACT

In this chapter we analyze the potential of simulation and construction of models in the teaching and learning of probability. Based on the review of literature we identified several advantages and difficulties have been observed after implementation using various computational tools. We emphasize on two software tools such as spreadsheets and applets, and present some results of a research on modeling with Excel spreadsheet with students in a basic course at university level.

Keywords: *Simulation, Probability, Applets, Spreadsheets*

MODELOS E SIMULAÇÃO NO ENSINO DE PROBABILIDADE: UMA ANÁLISE DO POTENCIAL DO APPLETS E PLANILHAS

RESUMO

Neste capítulo fazemos uma análise do potencial de simulação e modelagem no ensino e aprendizagem de probabilidade. Com base na revisão da literatura identificou várias vantagens e dificuldades têm sido observadas após sua implementação por meio várias ferramentas computacionais. Nossa ênfase é sobre duas ferramentas computacionais, tais como planilhas e applets, e apresentar alguns resultados da pesquisa em modelagem com planilha do Excel que fazemos com os alunos em um curso universitário de nível introdutório.

Palavras-chave: *Simulação, probabilidade, applets, planilhas.*

SANTIAGO INZUNSA CAZARES
Universidad Autónoma de Sinaloa, México
sinzunza@uas.edu.mx

Especialista en Estadística, Maestro y Doctor en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa. Profesor e Investigador de Tiempo Completo Titular C en la Facultad de Informática Campus Culiacán de la Universidad Autónoma de Sinaloa. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores, miembro del Sistema Sinaloense de Investigadores y Tecnólogos y Responsable del Cuerpo Académico “Investigación en Tecnologías de la Información y de la Comunicación y sus Aplicaciones.

EFFECTO DEL TIPO DE INFORMACIÓN Y DEL FORMATO DE LOS DATOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

GABRIEL YÁÑEZ CANAL

ANA RÁTIVA HERNÁNDEZ

DIANA LOZANO RODRÍGUEZ

RESUMEN

Se presentan en este trabajo los resultados de una investigación sobre el efecto de los formatos y el tipo de información sobre las respuestas, los errores cometidos y las formas de representación en estudiantes universitarios al resolver cierta clase de problemas binarios (con dos eventos y sus complementos) de probabilidad condicional. Los problemas aplicados se diferencian por el tipo de información que presentan: en algunos de ellos la información estaba constituida por dos probabilidades conjuntas y una probabilidad marginal, en tanto que para otros la información eran dos probabilidades conjuntas y una probabilidad condicional, y por el formato de presentación: frecuencias naturales, porcentajes y decimales. El estudio se realizó con estudiantes de diversas carreras de la Universidad Industrial de Santander en Bucaramanga, Colombia. Los resultados mostraron que el tipo de información, más que el formato utilizado, tiene efectos en la resolución del problema. De otro lado, el estudio mostró que la confusión entre probabilidad condicional y probabilidad conjunta es refractaria tanto al formato como al tipo de información, al menos para el tipo de problemas propuestos. La representación algebraica fue la más utilizada por los estudiantes.

Palabras claves: *Problema binario de probabilidad condicional; tipo de información; formato de presentación y representaciones.*

1. INTRODUCCIÓN

La probabilidad condicional es un concepto fundamental de la probabilidad que muestra el efecto que puede tener la ocurrencia previa de un evento sobre la probabilidad de ocurrencia de otro. Si bien el cálculo de la probabilidad condicional solamente requiere tomar como nuevo espacio muestral el evento que ya sucedió y calcular las probabilidades de los eventos inciertos ajustados a este nuevo espacio, su comprensión y aprendizaje encierran muchas dificultades de diversa índole.

La investigación sobre estas dificultades se ha afrontado desde muy diversos puntos de vista. En un principio, la investigación estuvo dirigida a identificar las concepciones y sesgos que las personas poseen sobre la probabilidad condicional. En esta dirección son clásicos los resultados de Kahneman y Tversky, producto de sus investigaciones en los años 70 del siglo pasado, y que se pueden consultar en

el texto Judgment Under Uncertainty: Heuristic and Biases (1982), editado por estos autores junto a Slovic. Entre sus hallazgos se destaca el *olvido de la tasa base* para el cálculo de probabilidades condicionales utilizando el teorema de Bayes, que hace referencia a la desconsideración de las probabilidades a priori para el cálculo de las probabilidades a posteriori (Kahneman y Tversky, 1982a). Sin embargo, también hallaron que este olvido se morigera cuando existe una clara *relación causal* entre los dos eventos (Tversky y Kahneman, 1982). Estos autores recurren al uso de las *heurísticas* para explicar el olvido de la tasa de base. La heurística que la explica, según Kahneman y Tversky, es la *heurística de la representatividad*, que consiste en calcular la probabilidad de un evento con base en su representatividad respecto a la población de la cual proviene. Esta heurística que refleja un pensamiento muy válido en los procesos de muestreo estadísticos, en muchas ocasiones conduce a sesgos en los juicios que se realizan.

De otro lado, diversas investigaciones son reiterativas en las confusiones que se presentan a la hora de definir la probabilidad condicional. Una de estas confusiones es la conocida como *la falacia de la condicional transpuesta* que no es otra cosa que asumir la probabilidad $P(B|A)$ cuando en realidad se trata de la transpuesta $P(A|B)$ (Falk, 1986, Ojeda, 1994, Yáñez, 2003, Díaz y De la Fuente, 2006). Si bien la expresión matemática de estas condicionales no da lugar a confusiones, el asunto estriba en la interpretación de los múltiples contextos y de las distintas formas en que se puede presentar la probabilidad condicional. Esta confusión, que prevalece entre estudiantes y profesionales de todos los niveles, y que está especialmente relacionada con la interpretación de los test estadísticos de significancia, también es citada por Eddy (1982) en referencia a contextos médicos. Vallecillos (1995), dice que esta confusión aparece cuando ven el test de hipótesis como procedimiento inductivo que permite calcular la probabilidad “a posteriori” de la hipótesis nula. Más específicamente, la confusión se observa en la interpretación que dan unos estudiantes al nivel de significación en un contraste de hipótesis. A su vez, otras investigaciones reportan que para algunos estudiantes la suma de estas condicionales es 100% (Pollatsek et al., 1987; Yáñez, 2003).

Otra de las confusiones a que da lugar el lenguaje natural en sus diversas manifestaciones, se da entre probabilidades condicionales y probabilidades conjuntas, aspecto éste que se relata en muchas de las investigaciones realizadas sobre probabilidad condicional (Falk, 1986; Pollatsek et al., 1987; Yáñez, 2003; Estrada, et. al., 2005; Díaz y de la Fuente, 2005).

Adicionalmente, Falk (1986) y Gras y Totohasina (1995) describen la interpretación de la condicionalidad como causalidad que es cuando las personas interpretan la probabilidad condicional $P(A|B)$ como una relación causal implícita, donde el suceso condicionante es la causa y el condicionado es la consecuencia. Asociado con esta concepción causal de la probabilidad condicional

se presenta la concepción cronologista que se manifiesta cuando los eventos condicionante y condicionado están separados en el tiempo, es decir, no ocurren simultáneamente sino que media un espacio de tiempo entre sus ocurrencias. En estas situaciones muchas personas manifiestan la imposibilidad de que un evento que ocurre después pueda condicionar o afectar la probabilidad de ocurrencia de un evento que es anterior en el tiempo (Falk, 1996; Gras y Totohasina, 1995). Falk (1996) relata esta concepción con el experimento de extracción sin reposición de dos bolas de una urna que contiene dos bolas blancas y dos bolas negras al preguntar: ¿cuál es la probabilidad de haber obtenido una bola blanca en la primera extracción cuando se sabe que en la segunda extracción se obtuvo una bola blanca? Una gran parte de los sujetos responden que es $\frac{1}{2}$ porque la segunda bola extraída no influye sobre la primera extracción. Gras y Totohasina (1995) arguyen que estas concepciones causal y cronológica de la probabilidad condicional pueden estar siendo inducidas por las expresiones con las que se suele enunciar la probabilidad condicional: “A si B” y “A dado B”, respectivamente.

Otra corriente de investigación en probabilidad condicional la constituyen el uso de diversas representaciones semióticas en la resolución de problemas. Estudios como los de Parzys (1990), Dupuis y Rousset-Bert (1996) y Ávila (2001), evidencian cómo se potencializa la capacidad de resolver problemas de probabilidad condicional al utilizar diagramas de árbol, tablas de doble entrada y, en algunas ocasiones, los diagramas de Venn. Shaughnessy (2002) destaca la utilización de las tablas de contingencia o de doble entrada cuando se asume un enfoque de frecuencias naturales para resolver problemas de probabilidad condicional. En este mismo contexto, Yáñez (2001), asumiendo problemas binarios de probabilidad condicional, en el sentido de que solo se consideran dos eventos y sus complementos, determina claramente el alcance y las limitaciones de los diagramas de árbol y de las tablas para resolver problemas de probabilidad condicional, así como las exigencias operativas que exige la solución algebraica.

Otra línea de investigación relacionada con la dificultad para resolver problemas de probabilidad condicional hace referencia a la forma en que se presenta la información: formato de probabilidad¹,

¹ Formato de probabilidad: la información está dada en probabilidades y los valores numéricos en porcentajes; formatos de frecuencias relativas: igual que el formato de probabilidad pero sin utilizar la palabra probabilidad en la información, esta solo aparece en la pregunta final. Formato de frecuencias naturales: los porcentajes se traducen en función de un universo que permita trabajar con expresiones enteras, por ejemplo si el problema en formato de probabilidad tiene la forma: “La probabilidad de cáncer de pecho es 1% en una mujer de cuarenta años que participa en un estudio de rutina. Si una mujer tiene cáncer de pecho, la probabilidad de que obtenga una mamografía positiva es 80%,... se traduce en formato de frecuencias de la siguiente forma: “10 de cada 1000 mujeres de 40 años que participaron en un estudio de rutina tienen cáncer de pecho. 8 de cada 10 mujeres con cáncer de pecho obtienen una mamografía positiva...”

formato de frecuencias relativas o porcentajes, o formato de frecuencias naturales. Gigerenzer y Hoffrage (1995) realizaron una investigación del razonamiento involucrado en los problemas que implican el uso del teorema de Bayes, llegando a la conclusión de que dicho razonamiento se mejora cuando a las personas se les presenta la información en formato de frecuencias naturales. Los formatos en frecuencias relativas producen la misma proporción de buenas respuestas que los formatos de probabilidad. En consecuencia, dicen los autores, la enseñanza de estos temas debe estar dirigida fundamentalmente a que los estudiantes puedan pasar del formato de probabilidades o porcentajes al formato de frecuencias naturales y evitar enseñar a insertar probabilidades en la fórmula de Bayes. En esta misma dirección están las investigaciones de Cosmides y Toby (1996); Hoffrage, et. al (2002), y Martignon y Wassner (2002) y Sin embargo, los resultados de otras investigaciones conducen a pensar que no siempre las frecuencias naturales facilitan la resolución de un problema de probabilidad condicional (Lewis y Keren, 1999; Mellers y McGraw, 1999; Evans y et.al., 2000; Girotto y González 2002).

Lewis y Keren (1999), para destacar la cercana relación entre los formatos y el tipo de información, realizaron una investigación con el ánimo de probar que las mejoras reportadas por Gigerenzer y Hoffrage (1995) son producto más de la información que se suministra que del formato en que se presenta. Aclaran que la presentación de las probabilidades condicionales en formato de frecuencias naturales contiene algo más que esto, existe una continuidad en la información dada en el sentido de que la información condicional se da sobre los resultados favorables al evento marginal condicionante, logrando que las probabilidades condicionales se asimilen con las probabilidades conjuntas, facilitando de esta manera la solución de los problemas. En conclusión, añaden los autores, lo que hace más fácil el problema es el tipo de información y no el formato en que se presenta. Gigerenzer & Hoffrage (1999) responden a Lewis & Keren (1999) diciendo que si el efecto del formato de frecuencias fuera debido fundamentalmente a que la información se presenta con intersecciones, como Lewis & Keren (1999) afirman, entonces el formato de probabilidad con intersecciones conduciría a un rendimiento similar al obtenido con el formato de frecuencias. Pero no es el caso, los resultados del estudio de 1995 muestran que con formato de probabilidades sólo se obtuvo 28% de respuestas bayesianas, en tanto que con el formato de frecuencias se alcanzó el 50%.

A su vez, Mellers & McGraw (1999), introducen otro punto de vista en esta discusión: el valor de la probabilidad de los eventos en juego. Los autores definen eventos raros como aquellos cuyas probabilidades oscilan alrededor del 0.5%, y eventos frecuentes son los que tienen probabilidades de ocurrencia alejadas de esas vecindades. Los autores realizaron dos estudios: en el primero, considerando eventos raros obtuvieron resultados que muestran el buen efecto de los formatos de frecuencia frente a los de probabilidad. En el segundo estudio, los eventos considerados son más

comunes y se obtienen resultados opuestos: el rendimiento depende del tipo de información más que de la forma. Ni las probabilidades ni las frecuencias producen consistentemente un mejor rendimiento. Las frecuencias en las tareas con información conjunta en muestreo natural producen mejores respuestas (17%) que las probabilidades en el formato estándar (4%). No obstante, las probabilidades en formato corto producen un mejor porcentaje de respuestas acertadas (16%) que las frecuencias en formato estándar ²(8%). En conclusión, dicen los autores, si tuviéramos que seleccionar una forma simple en la cual presentar información, recomendaríamos las frecuencias. Con eventos raros (5%), las frecuencias facilitan el razonamiento bayesiano. Si uno tuviera que seleccionar un solo tipo de información, recomendaríamos el menú corto o, más generalmente, cualquier tipo de información que permita a las personas visualizar conjuntos encajados (uno contenido en el otro).

En un estudio sobre formatos de presentación de problemas de probabilidad condicional en el que mostraron los resultados de tres experimentos, Evans y et.al., (2000) apoyan la hipótesis de que no necesariamente las frecuencias naturales facilitan el proceso de solución de un problema de probabilidad condicional. Incluso, mostraron cómo el uso de frecuencias puede promover sesgos influenciados por la información. Entre sus conclusiones se destaca el hecho de que *el olvido de la tasa de base* podría deberse a la congruencia entre el formato de la pregunta y el formato de la tasa de base, es decir, si la pregunta y la tasa base se presentan en el mismo formato, la ocurrencia de este sesgo es mayor. A su vez, destacan que la manera como los participantes responden está fuertemente influenciada por variaciones sutiles en la presentación de la tarea, la cual hace más o menos fácil la construcción de modelos mentales que ayudan a encontrar la solución.

Algo común que poseen la gran mayoría de las referencias citadas, referentes al estudio del efecto del formato y del tipo de información sobre la capacidad de resolver problemas de probabilidad condicional, es que se han concentrado básicamente en problemas asociados con el razonamiento bayesiano en el sentido de calcular probabilidades condicionales inversas a partir del conocimiento de probabilidades condicionales, probabilidades marginales y verosimilitudes. Si bien este tipo de problemas son los de mayor utilidad y aplicación práctica, no son los únicos que se relacionan con la comprensión de la probabilidad condicional, al contrario, existe una variedad distinta de problemas que, si bien no son tan interesantes, sí pueden ayudar a identificar las dificultades que representan los

² En el menú estándar se da como información $P(H)$, $P(D|H)$ y $P(D|\bar{H})$, y en el menú corto se da $P(D \cap H)$ y $P(D \cap \bar{H})$ o $P(D \cap H)$ y $P(D)$, donde H (o \bar{H} su negación) es el evento del que se quiere conocer su probabilidad dado el evento D .

problemas bayesianos en la medida que pueden brindar luces sobre la forma de razonar de las personas alrededor de la probabilidad condicional.

Los problemas de probabilidad condicional más frecuentes en los textos escolares y, a su vez, los más simples, son los que en este artículo denominamos *binarios* que son aquellos en que intervienen dos eventos A y B junto con sus complementos. Un problema binario contiene cuatro probabilidades marginales, cuatro intersecciones y ocho probabilidades condicionales, dando lugar a una enorme variedad de tipos de problemas de acuerdo a la información presentada y a las preguntas formuladas. Con el ánimo de estudiar teóricamente la dificultad de los problemas binarios de probabilidad condicional, Yáñez (2001) los clasifica en consonancia con la cantidad de probabilidades condicionales, probabilidades conjuntas y probabilidades marginales presentes en la parte informativa del problema, después de demostrar que para resolver *totalmente* un problema binario de probabilidad condicional, —encontrar las 16 probabilidades que contiene—, solo se requiere conocer tres probabilidades que guarden entre sí cierto tipo de relaciones. Yáñez (2001), como consecuencia de un análisis a priori del número de operaciones algebraicas necesarias para resolver completamente un problema de probabilidad condicional, y de la dificultad que encierran cada una de ellas, conjetura que la dificultad para resolver un problema es directamente proporcional al número de probabilidades condicionales que el problema contiene en su parte informativa. Esta clasificación de los problemas binarios generales de probabilidad condicional, dan lugar a un sinnúmero de problemas particulares en relación directa con la información suministrada, las preguntas realizadas y el formato en que se presente la información.

Lonjedo (2007) y Carles et. al. (2009) en la dirección propuesta por Yáñez (2001), realizan variadas investigaciones para diversos tipos de problemas de probabilidad condicional con el ánimo de investigar el efecto que sobre su facilidad de solución tienen variables como la información suministrada, la pregunta a resolver, el formato utilizado y el uso de variadas expresiones para referirse a la condicionalidad. Con relación al efecto de los formatos de presentación de la información, los autores concluyen que presentar el dato condicional como porcentaje, cuando todos los demás datos se dan en frecuencias naturales, contribuye positivamente a disminuir el porcentaje de estudiantes que confunden la probabilidad condicional con la conjunta. A su vez, el porcentaje de estudiantes que resuelve correctamente el problema es mayor para el caso del formato de porcentajes que para el formato de probabilidades.

Motivados por estos antecedentes, y ante la importancia del tema, nos propusimos realizar una investigación que diera respuesta a las siguientes preguntas: si se asumen otros problemas de probabilidad condicional diferentes a los directamente relacionados con el teorema de Bayes: 1. ¿Qué efectos tiene el formato de presentación del problema y el tipo de información suministrado sobre la

capacidad de resolverlos? 2. ¿Qué efectos tiene la información y el formato sobre la aparición de sesgos y malas concepciones relacionados con la probabilidad condicional? y 3. ¿El formato y la información influyen sobre la adopción de una cierta representación para resolver el problema?

Para responder estas preguntas se elaboraron dos cuestionarios que fueron aplicados a estudiantes universitarios de ciencias o ingeniería que ya habían cursado un curso básico de probabilidad y estadística. En este artículo presentamos algunos de los resultados de esta investigación.

El artículo está organizado de la siguiente forma: iniciamos explicando brevemente la clasificación de Yáñez (2001) de los problemas de probabilidad condicional, ya que es el soporte para el tipo de problemas que abordamos en esta investigación, luego describimos la metodología utilizada y presentamos una discusión de los resultados obtenidos. Finalmente se presentan las conclusiones, las referencias citadas a lo largo del trabajo y los cuestionarios aplicados.

2. CLASIFICACIÓN DE LOS PROBLEMAS BINARIOS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Yáñez (2001), con base en un análisis algebraico sobre las relaciones fundamentales que existen entre probabilidades conjuntas, marginales y condicionales, clasifica los problemas binarios (los que solo tienen dos eventos A y B con sus respectivos complementos) resolubles de probabilidad condicional en los siguientes cuatro niveles que, a su vez, agrupan varios casos dependiendo de la información que contengan:

- **De Nivel 0:** aquellos que en su parte informativa no presentan información condicional.
 - ✓ *Caso 1:* Tres intersecciones
 - ✓ *Caso 2:* Dos intersecciones y una marginal
 - ✓ *Caso 3:* Dos marginales y una intersección

- **De Nivel 1:** aquellos que en su parte informativa presentan una condicional.
 - ✓ *Caso 4:* Dos marginales y una condicional
 - ✓ *Caso 5:* Dos intersecciones y una condicional
 - ✓ *Caso 6:* Una marginal, una intersección y una condicional

- **De Nivel 2:** aquellos que en su parte informativa presentan dos condicionales.
 - ✓ *Caso 7:* Una marginal y dos condicionales

De este caso se pueden dar tres tipos de problemas:

- i) Una condicional asociada con la marginal y la otra asociada con el complemento de la marginal.
 - ii) Una condicional asociada con la marginal dada, y la otra asociada con la otra marginal.
 - iii) Las condicionales están asociadas con la otra marginal y su complemento.
 - ✓ *Caso 8*: Una intersección y dos condicionales
- **De Nivel 3**: aquellos que en su parte informativa presentan tres condicionales.
 - ✓ *Caso 9*: Tres condicionales

El análisis del nivel de dificultad de la solución algebraica de los 9 casos considerados permitió a Yáñez conjeturar que el nivel de dificultad de un problema de probabilidad condicional (cuando se pretende hallar todos los elementos faltantes) depende directamente del número de probabilidades condicionales que contenga su parte informativa.

De otro lado, el análisis de la potencia de los diagramas de árbol y de las tablas 2x2 para resolver estos problemas, le permitió definir claramente los límites de la capacidad que tienen estas dos populares representaciones para resolver problemas de probabilidad condicional. Así, por ejemplo, el diagrama de árbol es totalmente congruente con los problemas de probabilidad condicional analizados por Gigerenzer y Hoffrage (1995) y Martignon y Wassner (2002) (caso 7(i)) lo que da fuerza al hecho de que la información dada admite un orden que permite concatenar los razonamientos de forma continua. En la Figura 1 se visualiza la ubicación de la información dada en un problema congruente con el tipo 7(i) (Yáñez, 2001): dos condicionales y una marginal que junto con su complemento son los eventos condicionantes de las condicionales dadas. Obsérvese como rápidamente se hallan los complementos $P(\bar{B})$, $P(\bar{A}|B)$ y $P(\bar{A}|\bar{B})$, y luego, al multiplicar las marginales por las respectivas condicionales en cada rama, se obtienen las intersecciones $P(A \cap B)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(\bar{A} \cap B)$ y $P(\bar{A} \cap \bar{B})$; la suma de las intersecciones adecuadas, como lo indica el mismo diagrama, arroja como resultado las marginales $P(A)$ y $P(\bar{A})$. Con estos datos ya es posible responder a cualquier pregunta que se haga conociendo las relaciones básicas entre probabilidades.

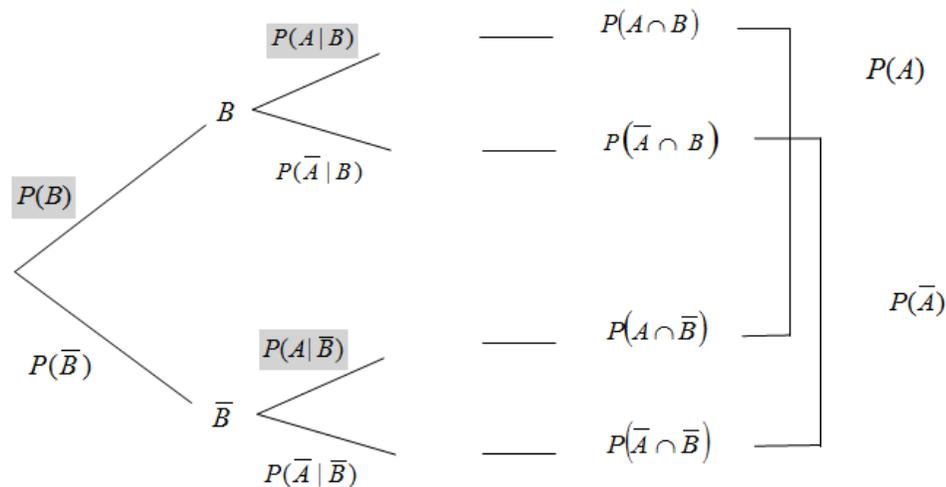


Figura 1. Diagrama de árbol para un problema binario tipo 7(i) de probabilidad condicional.

En este orden de ideas, y con ánimo explicativo, veamos lo que sucede con el árbol cuando se cambia el tipo de información y se pide responder a la misma pregunta. Consideremos el caso 2: dos intersecciones y una marginal. Cualesquiera que sean estas, se observa que su ubicación en el diagrama de árbol ya no es continua, aspecto que dificulta los razonamientos necesarios para resolver el problema. El caso 7 (i) lleva a hacer una construcción en secuencia y siempre hacia adelante del diagrama de árbol, mientras que para el caso 2 la construcción obliga a ir adelante para luego retroceder para completar todos los datos, aspecto que, de alguna manera, complica la obtención de la información necesaria para dar solución al problema. Sin embargo, para el caso 2, por el tipo de información que se presenta, los datos se pueden ajustar mucho mejor a una tabla de doble entrada, lo que facilitaría mucho la obtención de los demás datos y, por ello, la solución del problema. Sin embargo, en problemas que responden, por ejemplo, al caso 5 (dos intersecciones y una condicional) no se puede decir que la tabla o el árbol se comporte uno mejor que otro. Adicionalmente, al resolver completamente los dos problemas con la representación algebraica se observa que los problemas de caso 5 son más exigentes que los de caso 2.

De este análisis se infiere, a priori, que cambiar el tipo de información hace que unos problemas sean más fáciles de resolver que otros y que, por consiguiente, resolver un problema de probabilidad condicional con éxito esté ligado al tipo de información que se presenta. Respecto al efecto que pueda tener el formato de presentación de la información sobre la solución de los problemas de probabilidad condicional no se encuentran razones matemáticas más allá de las aritméticas, en el sentido de que las frecuencias naturales son más simples que las razones involucradas en los formatos de porcentajes y probabilidades.

3. METODOLOGÍA

La población objeto de estudio son los estudiantes universitarios que han tomado al menos un curso de probabilidad y estadística. La muestra estuvo conformada por 457 estudiantes activos de la Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, del primer y segundo semestre académico del 2009 de las carreras de Licenciatura en Matemáticas (101), Economía (21), Ingeniería de Sistemas (68), Ingeniería Industrial (90), Ingeniería Eléctrica (35), Ingeniería Civil (100) e Ingeniería Electrónica (62) que participaron respondiendo solamente alguno de los tres cuestionarios construidos.

La investigación se desarrolló en tres fases que se dieron en momentos distintos y con cuestionarios diferentes.

La primera fase fue un estudio piloto con el objetivo de generar una idea a priori sobre la dificultad de los problemas binarios de probabilidad condicional y evaluar la redacción de los mismos. En esta fase participaron 50 estudiantes de licenciatura en matemáticas que se encontraban tomando un curso de estadística: 32 de ellos se enfrentaron a 5 problemas asociados a los casos 1,2,3,4 y 5 de la clasificación de Yáñez (2001); los otros 18 presentaron otra prueba con 4 problemas pertenecientes a los casos 6,7,8 y 9. Los resultados mostraron que los problemas de nivel 2 y 3 (casos 7, 8 y 9) fueron de enorme dificultad para los estudiantes en tanto que los de nivel 0 y 1 presentaron mayores índices de respuesta. En consecuencia se decidió que en las siguientes fases se presentarían problemas correspondientes a los casos 2 y 5.

Los problemas de los casos 2 y 5, según la clasificación de Yáñez (2001), poseen la siguiente estructura: Caso 2: Dos intersecciones y una marginal (nivel 0, pues no presenta condicionales en su información) que no estén asociadas, es decir, que la suma de las probabilidades conjuntas no sea igual a la probabilidad marginal. Caso 5: Dos intersecciones y una condicional (nivel 1, presenta una condicional en su información) de tal forma que la intersección entre el evento condicionante y el evento condicionado sea una de las intersecciones dadas. Los formatos utilizados fueron el de probabilidad, el de frecuencias naturales o absolutas y el de porcentajes.

Los formatos tienen las siguientes características: en el formato de probabilidad la información es probabilística con datos en expresión decimal y se indaga por una probabilidad; en el formato de frecuencias absolutas la información está dada con valores enteros y solo se menciona la palabra probabilidad en la pregunta; para el caso 5 con información condicional ésta se presenta en formato de muestreo sistemático (Mellers y McGraw, 1999) que tiene la forma: “de cada 100 que están en A, n también están en B”; en el formato de porcentajes o frecuencias relativas se presenta la información en porcentajes y la pregunta indaga por un porcentaje (problema aritmético) o una probabilidad.

En la segunda fase se consideró pertinente dividir la muestra seleccionada de estudiantes en dos grupos: el primero conformado por 281 estudiantes que estaban en su primer curso de estadística; el segundo grupo lo conformaban 151 estudiantes que cursaban un segundo curso de estadística. Ambos grupos ya habían estudiado los temas relacionados con probabilidad condicional, incluido el teorema de Bayes. Para el primer grupo se elaboraron dos problemas de probabilidad condicional de caso 2, y dos problemas de aritmética relacionados con porcentajes con el ánimo de saber si los contextos aleatorios son los que dificultan los problemas o si, en últimas, se trata es de debilidades en el razonamiento proporcional. Todos los problemas planteaban una pregunta de probabilidad condicional y tenían la siguiente estructura: uno con formato de frecuencias absolutas, otro con formato de probabilidades; los dos problemas aritméticos eran uno con formato de frecuencias absolutas y el otro con porcentajes. Para el segundo grupo se diseñaron tres problemas del caso 5: dos de probabilidad y uno aritmético, con diferentes formatos y con preguntas diferentes. El aritmético con formato de porcentajes y pregunta de porcentaje marginal; ambos problemas de probabilidad con formato de probabilidades, en uno se pregunta por una probabilidad marginal y en el otro se pregunta por la probabilidad de una intersección. En el Anexo 1 se encuentra el texto de los problemas aplicados en ambos grupos.

Ya conocidos los resultados de las dos primeras fases, se diseñó una tercera que consistió de dos problemas de caso 5, uno con formato de frecuencias absolutas y otro con formato de porcentajes, y ambos con tres preguntas en formato de probabilidad que indagaban por una condicional, una marginal y una intersección. Se seleccionaron 25 estudiantes de licenciatura en matemáticas que cursaban estadística II y que habían recibido instrucción sobre el manejo de los diagramas de árbol y de las tablas de doble entrada. En esta fase se pretendía conocer si el formato de presentación de los problemas tenía alguna influencia en su solución y en la representación utilizada para resolverlos.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Con el fin de analizar los resultados de la aplicación de los cuestionarios que se aplicaron a los dos grupos de estudiantes en la fase dos, se organizaron sus respuestas según las características que mostraron en el proceso de resolución de cada problema. A continuación se describen los aspectos que se tuvieron en cuenta en el análisis.

- *Respuesta correcta*: tanto los procedimientos como las representaciones utilizadas y la respuesta son correctos.
- *No responde*: no muestra ningún proceso de resolución.

- *Confunde probabilidad condicional y conjunta:* interpreta $P(A|B)$ como $P(A \cap B)$ o viceversa.
- *Confunde una probabilidad condicional con su inversa:* interpreta $P(A|B)$ como $P(B|A)$ o toma $P(A|B) = P(B|A)$.
- *Representaciones utilizadas:* aritmético-algebraicas, tablas de doble entrada, diagramas de árbol y diagramas de Venn.

Tabla 1. Porcentaje de estudiantes en los aspectos considerados en la segunda fase.

RESPUESTA	GRUPO 1 - Caso 2 (281 Estudiantes)				GRUPO 2 - Caso 5 (151 Estudiantes)		
	Problemas de probabilidad		Problemas Aritméticos		Problemas Aritméticos	Problemas de Probabilidad	
	Frec_Cond	Prob_Cond	Frec_Cond	Porc_Cond	Porc_Marg	Prob_Inter	Prob_Cond
	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4	Problema 1	Problema 2	Problema 3
Respuesta correcta	20%	23%	43%	35%	9%	18%	0%
No respondió	23%	46%	0%	6%	26%	24%	48%
Confunde probabilidad condicional y conjunta	17%	25%	38%	21%	24%	28%	55%
Confunde una probabilidad condicional con su inversa	8%	7%	6%	1%	7%	2%	8%
REPRESENTACIONES							
Tabla de doble entrada	2%	0%	5%	4%	7%	6%	0%
Álgebra o aritmética	28%	27%	82%	50%	41%	42%	52%
Diagrama de Venn	35%	12%	4%	37%	29%	22%	5%
Diagrama de Árbol	12%	15%	9%	6%	7%	10%	13%

A partir del análisis de los resultados que se resumen en la Tabla 1, se pueden hacer los siguientes comentarios:

- Salvo el problema 3 (aritmético) del Grupo 1 que todos intentaron resolverlo, los demás tuvieron porcentajes de no respuesta que oscilan entre 6% y 48%. Los más altos porcentajes

corresponden a los problemas con formato de probabilidad (expresión decimal) y pregunta condicional, siendo ligeramente mayor el porcentaje del caso 5 (48% en el problema 3, Grupo 2, frente al 46% del problema 2 en el Grupo 1).

- Se confirma la hipótesis de Yáñez (2001) en el sentido de que los problemas con información condicional son más difíciles de responder: los problemas del caso 2 obtuvieron significativamente mayores porcentajes de respuestas que los de caso 5.
- El efecto formato de información no se presentó en los problemas de probabilidad de caso 2, sin embargo el formato de probabilidad obtuvo un porcentaje de respuestas correctas (23%) ligeramente superior al formato de frecuencias (20%).
- En los problemas aritméticos de caso 2, los porcentajes de buenas respuestas fueron mucho mayores que en los problemas probabilísticos, dando a entender que, si bien existen dificultades con los problemas aritméticos que indagan por frecuencias relativas condicionadas, las mayores dificultades se relacionan con el significado de la probabilidad. En estos problemas, el formato tuvo su efecto: el problema con frecuencias absolutas obtuvo mayor número de buenas respuestas que el formato de porcentajes: 44% y 37.5%.
- Los resultados de los problemas 2 y 3 de caso 5, permiten observar el efecto de la pregunta realizada sobre el éxito al responderla, cuando se utiliza formato de probabilidad: es más exitoso el problema que indaga por una intersección (17%) que el que indaga por una condicional (8%). Con resultados intermedios se encuentra el problema aritmético que indagaba por un porcentaje marginal con información porcentual (11.5%).

En cuanto a las representaciones utilizadas lo primero que salta a la vista es el mayoritario porcentaje de estudiantes que utilizaron la representación aritmético-algebraica, los porcentajes oscilan entre el 27% para el problema 2 del Grupo 1 el 82% para el problema 3 del mismo grupo. Este último problema es un problema aritmético y fue el de mayor éxito: 43% de los estudiantes a los que se aplicó lo resolvieron. Las tablas de doble entrada fueron muy poco usadas por estos estudiantes, no obstante que los problemas de caso 2 todos son congruentes con la tabla. Extrañamente, el problema en el que más se usó (7%) fue en el problema 1 del grupo 2 que es un problema aritmético, en porcentajes y que pregunta por un porcentaje condicional. El diagrama de Venn fue bastante utilizado en algunos problemas: en el problema 1 del Grupo 1 que preguntaba por una probabilidad condicional (35%) y por los problemas 4 del Grupo 1 y 1 del Grupo 2 con porcentajes de 37% y 29% respectivamente, ambos aritméticos, el primero de caso 2 y el segundo de caso 5 y ambos con preguntas condicionales. Es claro que esta representación es apenas parcial para este tipo de problemas ya que no es posible representar en ella la condicionalidad. Los diagramas de árbol, tan útiles en situaciones propias del teorema de

Bayes, también fueron usadas por los estudiantes: menos usados en los problemas aritméticos (menos del 10%) y más usados en los problemas probabilísticos, en especial en los que se requería calcular una probabilidad condicional (problemas 1 y 2 del Grupo 1 y problema 3 del Grupo 2). Ninguno de los problemas en que se utilizó era congruente con el diagrama de árbol por lo que se utilizó no permitía la obtención rápida de la respuesta.

Los problemas de la tercera fase de caso 5 (ver Anexo 2), a diferencia de los de la segunda, preguntan sobre probabilidades condicional, conjunta y marginal. Los resultados indican más éxito para el formato de porcentajes (problema 2) que para el formato de frecuencias absolutas (problema 2): 60% (12) vs 30% (6).

La gran mayoría de los estudiantes intentaron resolver el problema 1 utilizando una tabla de doble entrada (13) en tanto que 5 intentan la solución algebraica y solo 2 usan el árbol. De los 6 que lo resolvieron correctamente, 5 utilizaron la tabla como representación, el otro exitoso utilizó la representación algebraica. Dado que la información condicional no permitía obtener un valor entero para el número de estudiantes que perdieron biología, tal como dice el problema, los estudiantes universitarios que hicieron bien el problema transformaron la información frecuencial a porcentajes, y tres de ellos utilizaron regla de tres para resolverlo adecuadamente.

En lo que se refiere al problema 2, 11 estudiantes utilizaron la tabla (10 lo resolvieron bien); 5 utilizaron álgebra (2 lo resolvieron acertadamente) y 2 intentaron infructuosamente que el árbol les ayudara a resolverlo.

La Figura 2 muestra la forma en que Sebastián utilizó regla de tres para hallar la marginal que requería para completar las tablas en ambos problemas que le permitieron responder exitosamente las tres preguntas propuestas.

La interpretación de la proporcionalidad utilizada por Sebastián se explica con la definición de la probabilidad condicional dada:

$$P(\text{noE} / \text{noB}) = \frac{P(\text{noE y noB})}{P(\text{noB})} \Rightarrow P(\text{noB}) = \frac{P(\text{noE y noB})}{P(\text{noE} / \text{noB})} \quad (1)$$

Ahora bien, en la expresión (1) si se expresan las probabilidades en términos porcentuales, el lado derecho de la igualdad es una expresión decimal en tanto que la del lado izquierdo es un porcentaje, por eso para igualar las unidades es necesario multiplicar el lado derecho por 100% lo que da lugar a la expresión proporcional propuesta por Sebastián:

$$\frac{\%(\text{noB y noE})}{x} = \frac{\%(\text{noE} / \text{noB})}{100\%}$$

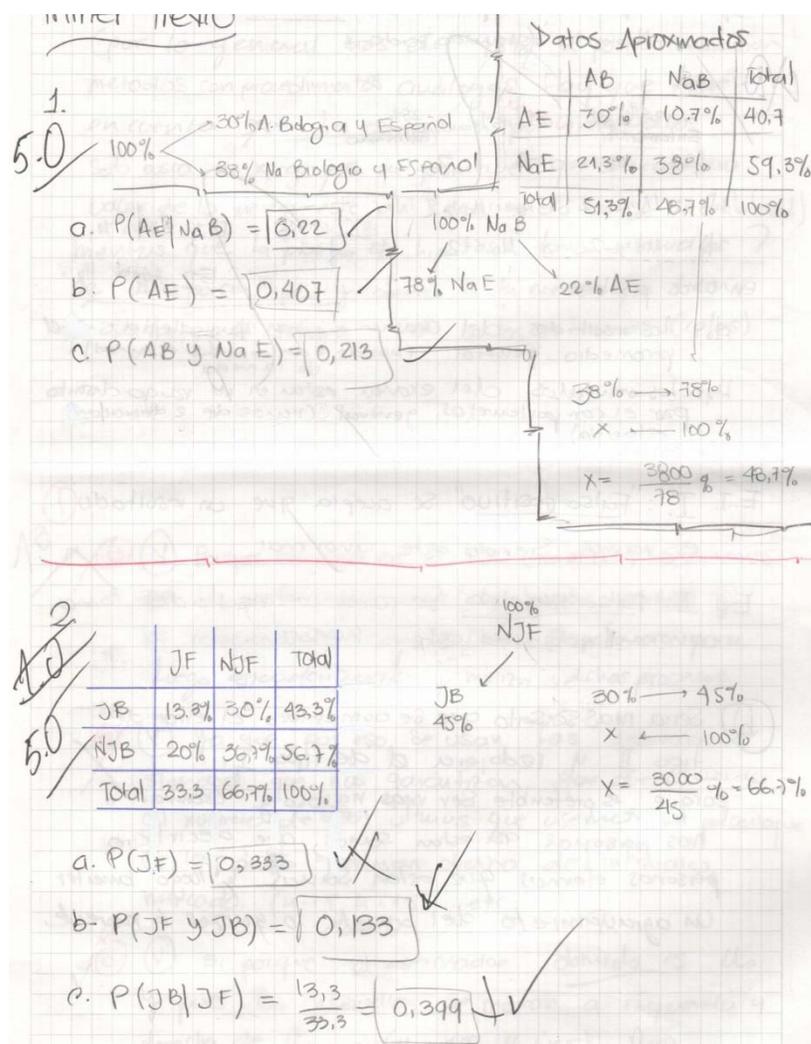


Figura 2. Sebastián aplica la regla de tres para hallar el valor de una marginal y llenar completamente la tabla.

En otras palabras, lo que Sebastián hace es asumir como universo los estudiantes que reprobaron biología y requiere calcular el porcentaje que representan éstos en el total de estudiantes: se conoce el porcentaje de los que perdieron español y biología, para conocer el porcentaje de los que solo perdieron biología lo relaciona con el 100% que es el porcentaje que se corresponde con los que perdieron biología respecto a ellos mismos. Dicho de otra forma, el argumento de Sebastián toma la forma: “¿Cuánto es el total si lo que se tiene representa el 78% de ese total?”.

Esta estrategia de regla de tres utilizada por Sebastián y otros dos estudiantes, estrecha aún más la cercanía que existe entre problemas de probabilidad condicional y problemas aritméticos con

porcentajes (que de acuerdo a los resultados de la segunda fase son más asequibles a los estudiantes) y que podría ser una opción didáctica para la enseñanza de este complicado tema.

Los resultados obtenidos con estos dos problemas permiten observar que los formatos de frecuencia naturales no tienen un efecto uniforme en la resolución de los problemas de probabilidad condicional y que dependen, entre otras cosas, de las relaciones entre los valores dados. En este caso la información condicional dada en la forma “de cada 100 que están en A, n también están en B”, indujo a los estudiantes, que utilizaron tabla de doble entrada, a utilizar porcentajes dado que la información suministrada no permite obtener valores enteros.

También se observa que si los estudiantes implementan la estrategia de llenar la tabla de doble entrada a como dé lugar, las diferencias en los niveles de dificultad que pudieran existir asociadas al tipo de pregunta que se realice pareciera que se desvanecen,

La Tabla 2 da cuenta de los porcentajes de éxito así como los correspondientes a las equivocaciones más comunes y al uso de diversas representaciones en los problemas de la fase tres. En este caso, la confusión entre probabilidad condicional y probabilidad conjunta se presentó mucho más en el problema dado en frecuencias naturales que en porcentajes: 24% vs. 4%. La expresión “de cada 100 estudiantes que no aprobaron biología 78 tampoco aprobaron español” del problema 1 indujo más la confusión mencionada que la expresión del problema 2 “la probabilidad de que un estudiante juegue baloncesto entre los que no juegan fútbol es 45%”. Lo contrario se presentó en la confusión entre una probabilidad condicional y su inversa: 4% para el problema 1 y 16% para el problema 2.

En cuanto a las representaciones utilizadas, además de lo ya previamente comentado respecto al uso mayoritario de las tablas de doble entrada, los estudiantes también utilizaron las otras representaciones consideradas: en alto porcentaje la algebraica en el problema 2 (24%), en bajos porcentajes el diagrama de árbol (8%) en ambos problemas y prácticamente inexistente los diagramas de Venn (0% y 4%).

Tabla 2. Problemas de la Tercera fase.

RESPUESTA	25 Estudiantes	
	Problema 1	Problema 2
Respuesta correcta	24%	48%
No respondió	28%	32%
Confunde probabilidad condicional y conjunta	24%	4%
Confunde una probabilidad condicional con su inversa	4%	16%
REPRESENTACIONES		
Tabla de doble entrada	52%	44%
Álgebra o aritmética	2%	24%
Diagrama de Venn	0%	4%
Diagrama de Árbol	8%	8%

5. CONCLUSIONES

De acuerdo con los resultados obtenidos, se concluye que la principal dificultad al resolver un problema de probabilidad condicional es la probabilidad condicional en sí misma, sin importar si ésta aparece en la parte informativa o en la pregunta del problema. Definitivamente la probabilidad condicional es un concepto que los estudiantes no terminan de entender, dificultad que se ve claramente reflejada en el momento de identificarlas en un problema o de relacionarla con las intersecciones y las marginales.

El tipo de información presentada es un elemento definitorio de la dificultad que presenta un problema de probabilidad condicional. Más que el formato en que se presenta la información, la dificultad de un problema de probabilidad condicional radica en el tipo de información presentada. Esta investigación respalda la conjetura de Yáñez (2001) cuando dice que la dificultad de estos problemas guarda estrecha relación con el número de probabilidades condicionales que contenga en su parte informativa. Los resultados de este estudio no son concluyentes sobre la dificultad adicional que pueda representar proponer una pregunta condicional en lugar de una intersección o una marginal, parece ser que lo complicado es la condicional sin importar si está en la información o en la pregunta.

Tal como lo muestran los resultados de la Tabla 1, los formatos de presentación tienen un efecto sobre el éxito al resolver el problema. En el caso 2, los resultados pocas dudas dejan sobre este aspecto: mejores resultados con el formato de frecuencias, seguido por los porcentajes y luego las probabilidades. En el caso 5, ocurrió lo contrario, cuando se indagaba por probabilidades conjuntas o marginales se comportaron mejor los formatos de probabilidad que los porcentajes. Queda para estudiar con mayor detalle el efecto conjunto del formato y la pregunta realizada sobre el éxito al resolver un problema de probabilidad condicional.

El poco efecto del formato utilizado en la solución de problemas caso 5 encontrado en esta investigación no va en contradicción con los resultados obtenidos por Gigerenzer y Hoffrage (1995), quienes concluyeron que las frecuencias naturales mejoraban los porcentajes de respuestas correctas de manera considerable. Simplemente se trata de problemas distintos, mientras ellos trabajaron exclusivamente con problemas de caso 7 (i), este estudio se centró en problemas de casos 2 y 5. En resumen, esta investigación refuerza la conjetura de que la bondad de los diversos formatos está relacionada con el tipo de problema, esto es, con la información dada.

Para el caso 5, cuando la información condicional se presenta con relación a 100 casos (Ver problema 1 de la Fase 3), se presentó una nueva variable en juego: la viabilidad de transformar los porcentajes en números enteros. Como evidencia de lo anterior, en la fase 3 ocurrió que los estudiantes obtuvieron mejores resultados con el formato de porcentajes (problema 2) que con el formato de

frecuencias (problema 1). Interesante en esta fase el abordaje de algunos estudiantes que, para llenar la casilla de una marginal cuando se conoce una intersección y la condicional que la relaciona, utilizaron la información condicional y la intersección para proponer una regla de tres que les permitió resolver el problema. Este resultado refuerza la idea de que el mejor camino para enseñar probabilidad condicional podría ser la aritmética condicional.

Se ratifica el alto porcentaje de estudiantes que confunden la probabilidad condicional con la probabilidad conjunta. Sin diferencias de casos o de formato, los porcentajes de confusión son muy altos. Esta confusión se muestra independiente tanto del tipo de problema como del formato en que se presente la información.

Las representaciones constituyen una herramienta importante a la hora de resolver un problema de probabilidad condicional y su utilidad está en saber escogerla, ya que hay representaciones apropiadas dependiendo del tipo de información que se da. El análisis de las representaciones usadas por los estudiantes evidenció la poca capacidad que tienen para discriminar entre la representación apropiada, pues con mucha facilidad utilizaron diagramas de Venn para representar información condicional. Para superar estas dificultades los estudiantes deben ser entrenados en el uso de la tabla y el árbol, conocer sus ventajas y el tipo de problema que mejor se les ajusta. Para esta instrucción, análisis como los de Yáñez (2001) son indispensables para contrarrestar la idea que pueden tener muchos estudiantes y, posiblemente, algunos profesores, de que el diagrama de árbol es la mejor herramienta para resolver cualquier tipo de problema de probabilidad condicional, pero esto sólo se puede hacer cuando se enseñan diferentes tipos de problemas.

Adicional a los interrogantes y vacíos que deja esta investigación, que seguramente exigirán nuevas metodologías de indagación, es recomendable extenderla a los demás casos de la clasificación de Yáñez (2001) que no fueron contemplados en este estudio.

REFERENCIAS

- Ávila, R., (2001). Hacia una apropiación operatoria de la estocástica: El caso de la probabilidad condicional. Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.
- Carles, M., Cerdán, F., Huerta, M.P., Lonjedo, M.A., Edo P. (2009). *Influencia de la estructura y del contexto en las dificultades de los problemas de probabilidad condicional de nivel No. Un estudio exploratorio con estudiantes sin enseñanza previa*. En M.J. González, M.T. González y Murillo (Eds.). Investigación en Educación Matemática XIII (pp. 173-185). Santander: SEIEM.
- Cosmides, L., Tobby, J. (1996). *Are humans good intuitive statisticians after all? Rethinking some conclusions from the literature on judgment under uncertainty*. Cognition, 58, 1-73.
- Díaz, C., De la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Épsilon* 59, 245-260.

- Díaz, C. De la Fuente, I. (2006). Dificultades en la resolución de problemas que involucran el teorema de Bayes, un estudio exploratorio en estudiantes españoles de psicología. *Educación matemática: Vol.18*, 75-94.
- Díaz, C., Ortiz, J., Serrano, L. (2007). *Un estudio experimental de las dificultades de los estudiantes en la aplicación del teorema de Bayes*. XI simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. La Laguna, España, p. 199-208.
- Dupuis C., Rousset-Bert, S., (1996). *Arbres et tableaux de probabilité: analyse en termes de registres de représentation*. *Repères-IREM*, N0. 22, 51-72.
- Eddy, D., (1982), Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. En Kahneman, D., Slovic., P., Tversky A., (eds.) *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* 249 – 267. Cambridge University Press.
- Estrada, A., Díaz, C., De la Fuente, I. (2005). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios. X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. En P. Bolea, M.J. Gonzáles y M. Moreno (Eds.). Huesca, España, p. 277-284.
- Evans, J., Handley, S., Perham, N., Over D. y Thompson, V. (2000). Frequency versus probability formats in statistical word problems. *Cognition* 77, 197-203.
- Falk, R. (1986). *Conditional probabilities: insights and difficulties*. II International Conference on Teaching Statistics. En R. Davidson y J (Eds.). Victoria, Canadá, p. 292–297.
- Gigerenzer, G., Hoffrage, U. (1995). *How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency format*. *Psychological Review*, 102, 684-704.
- Gigerenzer, G. , Hoffrage, U. (1999). *Overcoming Difficulties in Bayesian Reasoning: A Reply to Lewis and Keren (1999) and Mellers and McGraw (1999)*. *Psychological Review*, Vol. 106, No. 2, 425-430.
- Girotto, V., & Gonzalez, M. (2002). *Chances and frequencies in probabilistic reasoning: rejoinder to Hoffrage, Gigerenzer, Krauss, and Martignon*. *Cognition*, 84, 353–359.
- Gras, R., Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 15, No. 1, 49-55.
- Hoffrage, U., Gigerenzer, G., Krauss, S. & Martignon, L. (2002). *Representation facilitates reasoning: what natural frequencies are and what they are not*. *Cognition*, 84, 343-352.
- Kahneman, D., Slovic P., Tversky A. (Eds.) (1982). *Judgment Under Uncertainty: Heuristic and Biases*. New York: Cambridge University Press.
- Kahneman, D., Tversky A. (Eds.) (1982a). *Evidential impact of base rates*. En Kahneman, D., Slovic, P., Tversky, A., (eds) *Judgment Under Uncertainty: Heuristic and Biases* (1982), 153-160.
- Lewis, C. & Keren, G. (1999). *On the Difficulties Underlying Bayesian Reasoning: A Comment on Gigerenzer and Hoffrage*. *Psychological Review*, 106, 411-416.
- Lonjedo, M.A. (2007). *Análisis de los problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal y de sus procesos de resolución*. Tesis doctoral publicada en la Universidad de Valencia. España.
- Martignon, L. & Wassner, C. (2002). *Teaching Decision Making and Statistical Thinking With Natural Frequencies*. VI International Conference on Teaching Statistics. En B. Phillips (Ed.). Ciudad del Cabo, Sur África, p. 1-4.

- Mellers, B. & McGraw, P. (1999). *How to Improve Bayesian Reasoning: Comment on Gigerenzer and Hoffrage (1995)*. *Psychological Review*, 106, 417-422.
- Ojeda, A. M. (1994). *Understanding Fundamental Ideas of Probability at Pre-University levels*. Tesis de doctorado no publicada. University of London.
- Parzys, B. (1990). *Un outil sous-estimé: l'arbre probabiliste*. *APMEP*, 69 (372), 47-54.
- Pollatsek, A., Well, A., Konold, C. & Hardiman, P. (1987). *Understanding Conditional Probabilities*. *Organization Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255-269.
- Shaughnessy, J. M., (2002). *Investigación en Probabilidad y Estadística: Reflexiones y orientaciones*. Publicaciones CINVESTAV-IPN, México. Traducido por Ávila, R., Yáñez, G., del original Shaughnessy, J. M., (1992), *Research in probability and statistics: reflections and directions*. En Grows, D. (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, NCTM, 465-494.
- Tversky, A., Kahneman, D. (1982). *Causal schemas in judgment under uncertainty*. En Kahneman, D., Slovic, P., Tversky, A., (eds) *Judgment Under Uncertainty: Heuristic and Biases* (1982), 117-128.
- Vallecillos, A., (1995), *Comprensión de la lógica del contraste de hipótesis en estudiantes universitarios*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 15, N° 3, 53-81.
- Yáñez, G. (2001). *El álgebra, las Tablas y los Árboles en Problemas de Probabilidad Condicional*. *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. En Gómez, P., y Rico, L. Granada, España, p. 355-37.
- Yáñez, G. (2003). *Estudios sobre el papel de la simulación computacional en la comprensión de las secuencias aleatorias, la probabilidad y la probabilidad condicional*. Tesis doctoral no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

EFFECT OF THE TYPE OF INFORMATION AND THE DATA FORMAT IN CONDITIONAL PROBABILITY PROBLEM

ABSTRACT

We present in this paper the results of an investigation on the effect of the format and type of information on the responses and mistakes college students to solve some kind of binary problems (with two events and their complements) of conditional probability. The problems studied differ by the type of information presented: in one of them the information was two joint probabilities and marginal probability, while for the other information were two joint probabilities and conditional probability, and by the format. The questions posed relate to conditional probabilities and marginal intersections. The study was conducted with students of various specialties from the Universidad Industrial de Santander in Bucaramanga, Colombia. The results showed that the type of information, rather than the format used, has effects on problem solving. On the other hand, the study showed that the confusion between conditional probability and joint probability is refractory to both the format and the type of information, at least for the type of problems proposed.

Keywords: *Conditional probability binary problem, type of information, presentation format and representations.*

RESUMO

Apresentam-se neste trabalho os resultados de uma investigação sobre o efeito dos formatos e o tipo de informação sobre as respostas, os erros cometidos e as formas de representação em estudantes universitários ao resolver certa classe de problemas binários (com dois eventos e seus complementos) de probabilidade condicional. Os problemas aplicados diferenciam-se pelo tipo de informação que apresentam: em alguns deles a informação estava constituída por duas probabilidades conjuntas e uma probabilidade marginal, enquanto para outros a informação eram duas probabilidades conjuntas e uma probabilidade condicional, e pelo formato de apresentação: frequências naturais, percentagens e decimais. O estudo realizou-se com estudantes de diversas profissões da Universidade Industrial de Santander em Bucaramanga, Colômbia. Os resultados mostraram que o tipo de informação, mais que o formato utilizado, tem efeitos na resolução do problema. De outro lado, o estudo mostrou que a confusão entre probabilidade condicional e probabilidade conjunta é refractaria tanto ao formato como ao tipo de informação, ao menos para o tipo de problemas propostos. A representação algébrica foi a mais utilizada pelos estudantes.

Palavras chaves: *Problema binário de probabilidade condicional; tipo de informação; formato de apresentação e representações.*

GABRIEL YÁÑEZ CANAL

Universidad Industrial de Santander, Colombia

gyanez@uis.edu.co

Profesor Titular Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia. Licenciado en Matemáticas y Física. Magister en Matemáticas. Mestre en Estadística. Doctor en Matemática Educativa.

ANA RÁTIVA HERNÁNDEZ

Universidad Industrial de Santander, Colombia

mayuyao_4@hotmail.com

Profesora de Matemáticas en Educación a Distancia, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia. Licenciada en Matemáticas.

DIANA LOZANO RODRÍGUEZ
Universidad Industrial de Santander, Colombia
dianalozano28@hotmail.com

Profesora de Matemáticas en el Colegio Agustiniano, Bucaramanga, Colombia. Licenciada en Matemáticas.

ANEXO 1. CUESTIONARIOS DE LA SEGUNDA FASE.

Grupo 1.

Problema 1. *Caso 2. Formato de frecuencias.*

En un salón de clases con 50 estudiantes, 33 aprobaron biología. 15 aprobaron biología y español. 7 aprobaron español y no aprobaron biología. Calcule la probabilidad de que elegido un estudiante al azar de los que no aprobaron biología éste haya aprobado español.

Problema 2. *Caso 2. Formato de probabilidades.*

En un salón de clases la probabilidad de que al seleccionar un estudiante al azar éste haya aprobado biología es 0.66. La probabilidad de que haya aprobado biología y español es 0.3. Se sabe además que la probabilidad de que un estudiante haya aprobado español y no haya aprobado biología es de 0.14. Calcule la probabilidad de que elegido un estudiante al azar de los que no aprobaron biología éste haya aprobado español.

Problema 3. *Caso 2. Formato de frecuencias naturales. Pregunta condicional que exige calcular previamente el evento condicionante y el condicionado.*

Un centro escolar con 1000 alumnos entre niños y niñas tiene 282 estudiantes que usan gafas, 147 niñas que las usan y 368 niñas que no las usan. Entre los niños ¿qué porcentaje usa gafas?

Problema 4. *Caso 2. Formato de porcentajes. Pregunta de porcentaje condicional que se responde directamente con la información dada.*

Para organizar un campeonato deportivo hemos preguntado a todos los inscritos si practican baloncesto y/o tenis. Se encontró que un 15% de los inscritos jugaban baloncesto y tenis, un 50% no jugaba ni baloncesto ni tenis y un 30% juega tenis. ¿Qué porcentaje de los que se sabe juegan tenis, juegan también baloncesto?

Grupo 2.

Problema 1. *Caso 5. Formato de porcentajes. Pregunta marginal.*

De todos los alumnos de un instituto, el 30% de los estudiantes practican baloncesto y fútbol, el 30% practica baloncesto y no practica fútbol, de los que no practican baloncesto el 40% practica fútbol. ¿Qué porcentaje de estudiantes juega fútbol?

Problema 2. *Caso 5. Formato de probabilidades. Pregunta de intersección.*

En un hotel la probabilidad de que elegido un huésped al azar éste practique tenis y golf es de 0.3 y la probabilidad de que practique tenis y no practique golf es 0.3. Si conocemos que la probabilidad de que elegido un huésped de los que no practican tenis este practique golf es 0.4. Calcule la probabilidad de que tomado un huésped al azar no practique ni tenis ni golf.

Problema 3. *Caso 5. Formato de probabilidades. Pregunta condicional.*

En un salón de clase la probabilidad de que al seleccionar aleatoriamente un estudiante éste haya aprobado biología y español es de 0.3, y la probabilidad de que haya aprobado biología y no haya aprobado español es de 0.36. Se sabe además que (la probabilidad de que un estudiantes de los que no aprobaron español tampoco haya aprobado biología es 0.357) si se selecciona aleatoriamente un estudiante entre los que no aprobaron español la probabilidad de que éste no haya aprobado biología es 0.357. Calcule la probabilidad de que elegido un estudiante al azar de los que no aprobaron biología éste haya aprobado español.

ANEXO 2. CUESTIONARIOS DE LA TERCERA FASE

Problema 1. *Caso 5. Formato de frecuencias.*

En un salón de clase de 50 estudiantes, 15 de ellos aprobaron biología y español y 19 perdieron tanto biología como español. Se sabe, además, que de cada 100 estudiantes que no aprobaron biología 78 tampoco aprobaron español.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de que elegido un estudiante al azar de los que no aprobaron biología éste haya aprobado español.
- (b) Calcule la probabilidad de que elegido un estudiante al azar, haya aprobado español.
- (c) Calcule la probabilidad de que elegido un estudiante al azar haya aprobado biología y perdido español.

Problema 2. *Caso 5. Formato de porcentajes.*

En un colegio el 20% de los estudiantes juegan fútbol y no juegan baloncesto, el 30% no juega fútbol y practica baloncesto. La probabilidad de que un estudiante juegue baloncesto entre los que no juegan fútbol es 45%.

- (a) Calcule la probabilidad de que elegido un estudiante al azar, juegue fútbol.
- (b) Calcule la probabilidad de que elegido un estudiante al azar, juegue tanto fútbol como baloncesto.
- (c) Calcule la probabilidad de que elegido un estudiante al azar, entre los que juegan fútbol juegue también baloncesto.

LA UTILIZACIÓN DEL RAZONAMIENTO DEDUCTIVO EN EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES Y EVENTOS INDEPENDIENTES

ADRIANA G. D'AMELIO

RESUMEN

Los conceptos de eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes son fuentes de fenómenos didácticos. En efecto hemos constatado en los cursos de Probabilidad y Estadística en estudiantes universitarios que en las actividades en donde intervienen dichos conceptos, los estudiantes muestran ideas espontáneas erróneas confundiendo ambos y asociándolos de manera incorrecta. El problema didáctico principal consiste entonces en alejar la atención de los alumnos del contenido y centrarla en la forma. Es decir la propiedad de independencia está presente con la regla del producto cómo la más aplicada, pero no se pueden separar del contenido semántico. Sería necesario entonces neutralizar el contenido semántico proponiendo encontrar el valor de verdad de proposiciones para lograr que disocie en un razonamiento la forma lógica y el contenido semántico. El objetivo es poner al alumno en situación de demostrar a través del razonamiento deductivo los objetos estadísticos puestos en juego. El marco teórico didáctico está basado sobre el razonamiento deductivo de Raymond Duval. La metodología de investigación es teórica-metodológica con un estudio de casos. El instrumento se aplicó a 97 estudiantes de la cátedra de estadística de la Facultad de Ciencias Económicas. Este trabajo pretende hacer un aporte a la enseñanza de la probabilidad del concepto de eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes, para su mejor tratamiento en la sala de clase.

Palabras clave: Enseñanza de la estadística; razonamiento deductivo; eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes.

1. INTRODUCCIÓN

Los conceptos de eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes son fuentes de fenómenos didácticos. Los estudiantes universitarios que cursan Probabilidad y Estadística en las actividades en donde intervienen dichos conceptos, muestran ideas espontáneas erróneas confundiendo ambos y asociándolos de manera incorrecta. Estos conceptos son sencillos o aparentemente simples en su definición pero sin embargo entrevistas a colegas reconocen que la confusión persiste en los alumnos universitarios. El fenómeno se da en carreras matemáticas y no matemáticas.

Es por ello que nos preguntamos:

¿En el funcionamiento de un paso de deducción los estudiantes organizan las proposiciones según un estatus operatorio o según su contenido?

El objetivo es poner al alumno en situación de demostrar a través del razonamiento deductivo los objetos estadísticos puestos en juego.

El instrumento se aplicó a 97 estudiantes de la cátedra de estadística divididos cuatro grupos simultáneamente. Se implementó después de tratado el tema.

Se utilizó un problema inscrito en la unidad de probabilidad del programa institucional, con el objeto de estudiar el razonamiento que desarrollan los estudiantes en las estrategias de resolución.

En el análisis a priori se explica la respuesta experta y se analizan las posibles respuestas de los estudiantes. En el análisis a posteriori se utilizó una tabla propuesta por Duval (1999) para el estudio de textos dónde muestra el funcionamiento de los pasos de deducción que realizan los estudiantes.

Este trabajo pretende hacer un aporte a la enseñanza de la probabilidad del concepto de eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes, para su mejor tratamiento en la sala de clase.

2. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Una de las mayores dificultades que presentan los estudiantes universitarios en el tema de probabilidad, es la definición de eventos mutuamente excluyentes y de eventos independientes. Si bien los conceptos de eventos independientes y mutuamente excluyentes son aparentemente sencillos las ideas espontáneas de las personas dan lugar a respuestas equivocadas. La confusión de los alumnos en estos conceptos es reconocida por la mayoría de los docentes de esta asignatura en distintas universidades de Argentina.

En un cuestionario de probabilidad (Alarcón y Sánchez 1987) aplicado a 44 profesores de matemáticas con ciertos conocimientos de probabilidad y estadística, se les pidió que contestaran la siguiente pregunta:

Se extrae una carta al azar de una baraja americana: sea A el evento "se extrae trébol" y B el evento se extrae una reina". ¿los eventos A y B son independientes? Argumentar.

Se esperaba que calcularan las probabilidades de A, B y $A \cap B$ y observaran que satisface la regla del producto $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Sin embargo, esta sencilla operación sólo la realizaron correctamente 4 profesores. Fue la pregunta que tuvo el índice más bajo de respuestas correctas. Las respuestas incorrectas formaban patrones bien definidos:

- Patrón de respuesta I: Creer que eventos independientes es lo mismo que eventos ajenos (o mutuamente excluyentes): No son independientes porque está la reina de trébol.
- Patrón de respuesta II: Creer que sólo se puede aplicar a sucesión de experiencias: Si extraemos una carta para verificar el evento A y se vuelve a colocar en la baraja para verificar el evento B,

entonces A y B son independientes. Si se extrae la carta para verificar A y no se regresa son dependientes.

En los dos tipos de respuestas observamos que los sujetos adjudican la situación en un contexto asociando la palabra independencia incluyendo elementos cercanos a experiencias perceptivas o empíricas, relacionados con la realidad en el primer caso, relaciones temporales en el segundo caso.

En observaciones de actitudes y respuestas a exámenes de mis alumnos universitarios de las carreras de contabilidad y ciencias políticas han indicado algunas de las ideas espontáneas que tienden a elaborar acerca de eventos independientes y mutuamente excluyentes en las diferentes situaciones en las que esta noción entra en juego, pero no se sabe en detalle que relación guardan estas concepciones con las definiciones formales.

Algunas hipótesis:

1. Es usual la confusión que asocia ajeno a independientes, y sólo si uno de ellos es vacío se cumplen ambas.

2. La independencia se confunde con experiencias independientes. Sin que se expliciten la diferencia entre ambas nociones.

3. La confusión se debe a la causalidad.

Nuestras hipótesis para explicar los errores son que podrían provenir de:

- Olvido de los conceptos de independencia y de eventos ajenos.
- Confusión en la terminología
- Poco énfasis en la enseñanza de la diferencia entre eventos y experiencias independientes
- Los formatos de los cuestionarios en los que se piden respuestas rápidas, los cuales probablemente inducen respuestas poco reflexionadas.

Nos preguntamos:

¿En el funcionamiento de un paso de deducción los estudiantes organizan las proposiciones según su estatus operatorio o según su contenido?

El estatus depende de su contexto de enunciación, el cual determina las relaciones posibles con otras proposiciones.

3. MARCO TEÓRICO

Dada la importancia de la semiótica en estas preguntas, hemos tomado como marco teórico a la teoría de las representaciones semióticas propuesta por Raymond Duval con su teoría sobre el razonamiento deductivo.

Son pocos los estudios didácticos sobre estos temas y las propuestas diferentes para implementarlos.

3.1 EL ANÁLISIS FUNCIONAL DEL RAZONAMIENTO

El razonamiento es la expansión discursiva de proposiciones a partir de un enunciado de premisas que tiene por fin probar la verdad de un enunciado.

Tiene el propósito de modificar el valor epistémico, semántico o teórico, que el enunciado-objeto tiene en un estado de conocimiento dado, o en un medio social dado y en consecuencia de modificar el valor de verdad cuando se cumplen las condiciones particulares de una organización del discurso.

Las dos características necesarias del razonamiento para que sea reconocido como tal son:

- Estar orientado hacia la proposición a justificar
- Estar centrado sobre el valor lógico o epistémico de esta proposición y no en su contenido.

Para Duval:

“El funcionamiento cognitivo del razonamiento depende en primera instancia de la interacción de los tres componentes del **sentido** de las proposiciones enunciadas en el razonamiento 1) el contenido semántico, 2) el valor lógico de verdad y 3) el valor epistémico o social”.

El contenido semántico es lo perteneciente o relativo a la significación de las palabras, en cambio el valor epistémico: es el grado de fiabilidad que posee lo que se enuncia en la proposición. Cuando un contenido se aprehende puede parecer evidente, cierto o sólo verosímil, plausible o simplemente posible, imposible o incluso absurdo. Esto depende del estado de los conocimientos que dispone el sujeto y/o del medio socio-cultural en el que se mueve.

La comprensión de una proposición implica la determinación del valor epistémico de su contenido. Para que se explicita el valor epistémico de una proposición, es necesario que haya un conflicto cognitivo. Tal conflicto no surge sólo en presencia de una contradicción lógica entre dos proposiciones, sino en la presencia de una elección de valores epistémicos para una misma proposición. Este conflicto puede ser más fuerte cuando los valores epistémicos pueden ser tan extremos como evidentes y absurdos.

El valor lógico: verdadero o falso. A diferencia del epistémico el lógico no depende sólo de la comprensión de su contenido sino que resulta de procedimientos específicos de verificación.

El valor epistémico de una proposición y su valor de verdad, no proceden de los mismos procesos de determinación: uno procede de la comprensión del contenido y el otro de los procedimiento lógicos.

Una proposición enunciada no tiene solamente un sentido, ella tiene también un **estatus** que depende del contexto de enunciación.

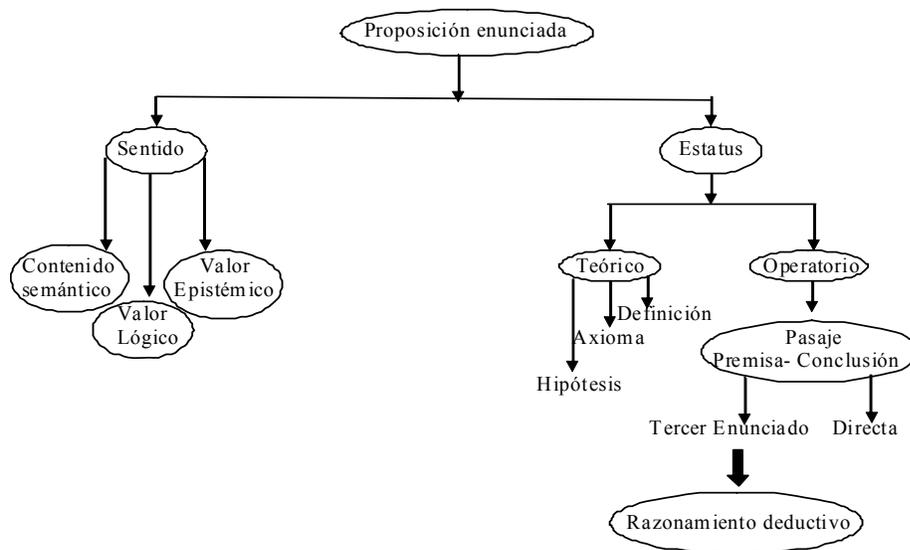


Fig 1 Sentido y estatus del razonamiento

El marco teórico formal funciona **como un contexto global**. Es un conjunto de proposiciones que tienen un estatus teórico de: definición, axioma, regla, hipótesis, teorema, etc. Una proposición no puede ser enunciativa en un marco teórico sin tomar una de ellas. Estas determinan su organización y sus posibilidades de desarrollo. Por otra parte en la proposición enunciativa es importante la organización de pasos de razonamiento. Cada paso funciona como un **contexto local** y se caracteriza a su vez por un conjunto de estatus operatorios que determinan su organización interna y las posibilidades de funcionamiento.

Un razonamiento se caracteriza, por tener un conjunto de estatus en un contexto de enunciación teórico u operatorio que es lo que determina su funcionamiento.

Además Duval afirma que:

“La organización de un paso del razonamiento deductivo requiere que el pasaje de las premisas a la conclusión se haga a través de una **tercera proposición**” (que llamaremos de ahora en más tercer enunciado)

El análisis funcional del razonamiento hace la distinción estricta entre el valor epistémico de una proposición y su valor de verdad, distinciones claves para una definición del razonamiento.

En el contexto de un enunciado la proposición tiene un valor epistémico teórico prioritario al contenido. Un razonamiento válido presupone la toma de conciencia que el valor epistémico teórico sustituye el semántico.

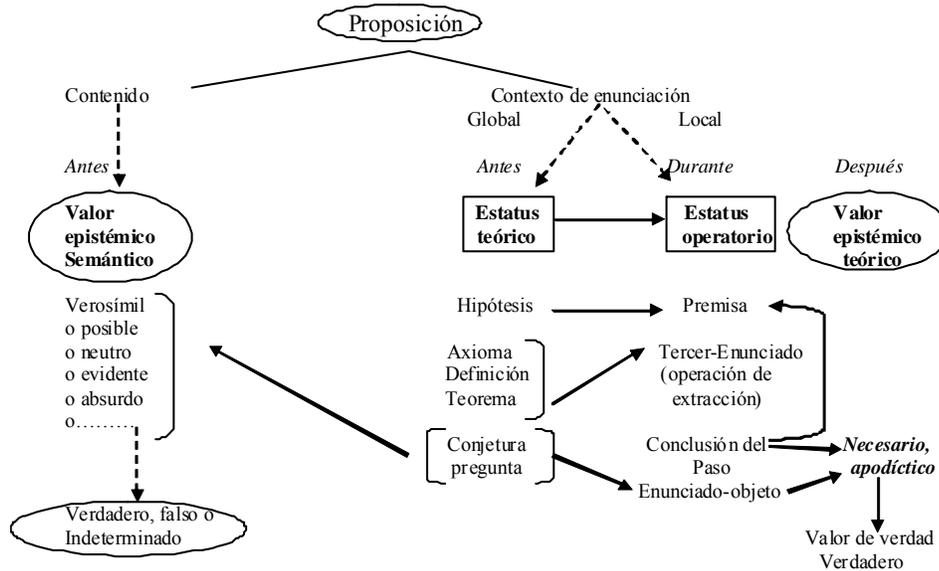


Fig 2: Transformación del valor epistémico teórico y por tanto del sentido de una proposición en el funcionamiento del paso de deducción, el cual pone en juego por lo menos “tres proposiciones”

En el funcionamiento del paso de deducción se parte (**antes**) del contenido de un enunciado con un valor epistémico semántico, que en el contexto global de enunciación tiene un estatus teórico, luego (**durante**) adquiere un estatus operatorio en dónde el pasaje de las premisas a la conclusión se realiza a través del tercer enunciado y termina (**después**) con el valor epistémico teórico.

En general para los estudiantes sólo hay un valor epistémico inducido por la comprensión del contenido de la proposición. Este valor epistémico semántico los estudiantes lo asocian al valor lógico de verdad.

3.2 LA DEDUCCIÓN: ESTATUS OPERATORIO Y RECURSO A UN TERCER ENUNCIADO

Las proposiciones, enunciadas en un contexto teórico, tienen un estatus teórico que determina su estatus operatorio en la organización de un paso de razonamiento

El funcionamiento de un paso de deducción se define de la regla **modus ponens** o de implicación.

Un paso de deducción se organiza en función del estatus operatorio de las proposiciones. Este estatus no depende del contenido de las proposiciones, de lo que ellas enuncian o significan, sino del estatus teórico fijado preliminarmente: hipótesis, teorema, definición, etc.

Las premisas son hipótesis dadas al inicio (o conclusiones obtenidas en pasajes anteriores) y los terceros enunciados se toman de un cuerpo (definiciones, teoremas) construido teóricamente y deben tener un estatus teórico preciso. Esto significa que se deben aceptar sin discusión ya que pertenecen al

marco teórico en juego. El tercer enunciado funciona como operación de extracción implícita y no como justificación. El tercer enunciado teórico conforma dos partes funcionalmente distintas: una de proposición(es) antecedentes que deben verificarse, y otra de proposición consecuente que debe extraerse. Esta organización interna de un enunciado se expresa a través de “si..entonces...” . Esto quiere decir que el tercer enunciado debe leerse como la articulación de dos partes, la primera de las cuales corresponde a una operación de verificación y la segunda a una operación de extracción. Cuando las hipótesis o conclusiones anteriores son proposiciones antecedentes del tercer enunciado la proposición consecuente tiene estatus de conclusión. En este sentido el funcionamiento del paso de deducción tiene un carácter algorítmico.

En la figura 3 se muestra la organización de un paso que funciona según el **modus ponens**. Para poder aplicar el teorema todas las proposiciones antecedentes que forman la parte condición deben verificarse y darse en las hipótesis iniciales o haber sido obtenidas en conclusiones anteriores. Estas se constituyen en las premisas del paso. Luego de la verificación, la proposición consecuente se extrae como conclusión.

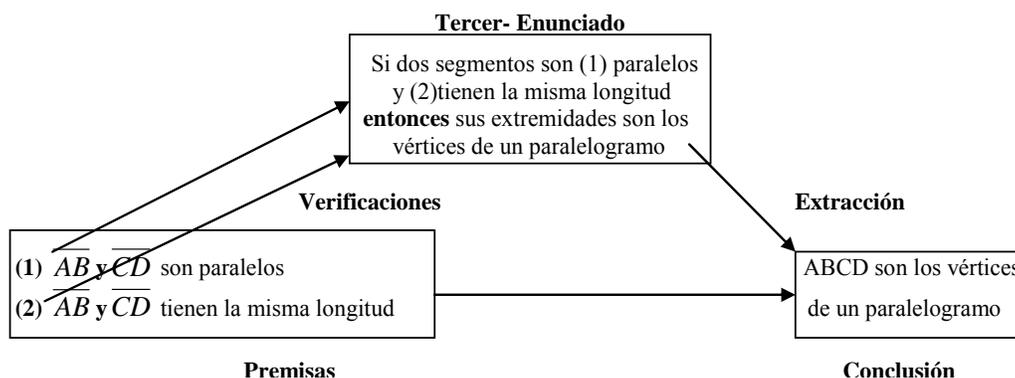


Fig.3 Organización deductiva

La organización del paso de deducción impone la implicación, como conclusión y sólo el de esta parte, independientemente de cualquier interpretación del contenido de las premisas y de la conclusión.

Un valor epistémico teórico se halla ligado al estatus teórico de cada proposición y no al contenido, puesto que cuando el valor epistémico no se funda sobre el estatus teórico sino sobre la comprensión del contenido de las proposiciones, se puede tener un conflicto sobre el valor epistémico de las proposiciones que justifican.

“El razonamiento válido sólo considera el valor epistémico ligado al estatus teórico y la actitud discursiva depende del valor epistémico que deriva de la componente del contenido”.

En la organización deductiva (fig.3), es necesario dar reglas de construcción centradas en el estatus de las proposiciones:

- De las hipótesis sale una flecha pero nunca llega una.
- De un teorema sale una flecha, pueden llegar una o varias.
- De la conclusión que se debe demostrar jamás sale una flecha.

La graduación de la selección de respuestas se basa en el lugar de las proposiciones es decir en su estatus y no en el contenido de las mismas.

La continuidad entre dos pasos de deducción está asegurada cuando se retoma una misma proposición: la conclusión del primer paso se retoma como premisa en el paso siguiente. Al retomarla, la proposición cambia de estatus operatorio.

Ese tipo de encadenamiento presenta dos propiedades esenciales:

1. No necesita ningún conectivo proposicional
2. No implica ninguna continuidad temática.

Los objetos a los cuales se refieren las premisas del primer paso pueden ser diferentes a los objetos que se refieren las premisas siguientes.

El progreso del razonamiento se desarrolla sustituyendo la conclusión anterior por una nueva hasta la obtención del enunciado objeto. No es necesario retener el tercer enunciado ni las premisas de un paso para comprender los que siguen.

Las restricciones de organización propias al funcionamiento del razonamiento deductivo no están vinculadas a ninguna forma lingüística. En efecto estas restricciones se basan en el estatus operatorio.

Para la comprensión del razonamiento deductivo, la organización deductiva del discurso no puede hacerse verdaderamente más que a través de un registro distinto de la lengua natural, esta inferencia, no depende de su contenido sino únicamente de su forma.

Es por ello que el razonamiento deductivo exige centrarse en el estatus de las proposiciones y neutralizar el valor epistémico semántico a favor de un valor epistémico teórico.

3.3 EL RECONOCIMIENTO DE LA VALIDEZ DE UN RAZONAMIENTO DEDUCTIVO

Las premisas son independientes. La única restricción que hay, para permitir la operación de extracción, concierne a la organización interna del tercer enunciado donde se distinguen dos partes, una formada por las proposición (es) antecedente(s) y otra por la proposición consecuente. La conclusión para ser extraída debe estar inscrita en el tercer enunciado. Los alumnos no toman en cuenta las hipótesis o se contentan con verificar una sola condición. Si no comprende la importancia del estatus en la organización de un paso de deducción, una conclusión puede convertirse en hipótesis.

Si no se percibe la validez de los pasos y de su encadenamiento, el razonamiento no provoca ninguna modificación en la aprehensión del sentido de las conclusiones obtenidas. No basta con que el razonamiento sea válido es necesario además que las proposiciones sobre las cuales se apoya sean

verdaderas. Una definición tiene la función de permitir la identificación de objetos reales, o simplemente posibles, sin que haya ningún riesgo de confundirlo con otros objetos.

Esta función cognitiva de identificación no se cumple de la misma manera si el objeto que debe ser reconocido pertenece al universo del entorno, o si se inscribe en un conjunto complejo del marco teórico. Las definiciones que nos interesan son las llamadas “proposiciones primitivas”. Estas son tomadas de un cuerpo de proposiciones reconocidas como verdaderas y separan las proposiciones planteadas como primeras proposiciones para derivar deductivamente todas las proposiciones de ese corpus. Naturalmente estas “proposiciones primitivas” pueden conducir a la demostración de otras que no estaban en el corpus inicial. La prueba de aceptabilidad de una definición primitiva es que ella no introduce ninguna debilidad en una u otra demostración cuya cadena explicita el orden de derivabilidad deductiva del conjunto de proposiciones planteadas.

El otro tipo de proposiciones que usaremos son las definiciones características: aquellas que entre las propiedades que entran en la descripción del objeto, seleccionan la que permite identificarlo de manera más económica. Su prueba de aceptabilidad es la rapidez de tratamiento en las situaciones en que este objeto debe ser reconocido.

3.4 APLICACIÓN DEL MARCO TEÓRICO AL PROBLEMA PROPUESTO PARA ESTA INVESTIGACIÓN

Situación problema:

Sea (S, P) un espacio de probabilidad, A y B sucesos de S tales que $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$. Analice si la siguiente afirmación es V o F. En caso de ser V justifique y cuando sea F escriba la expresión correcta.

“Si A y B son mutuamente excluyentes entonces la probabilidad de que ocurra al menos uno de ellos está dada por $P(A).P(B)$ ”

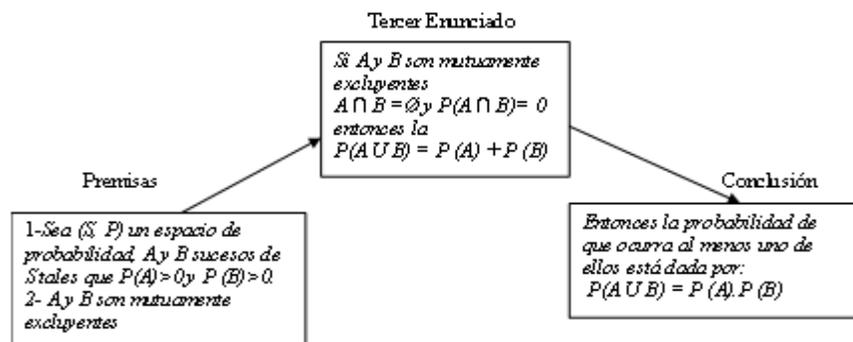


Fig.4 Organización deductiva de la situación propuesta

3.5 ORGANIZACIÓN EN PASOS DE LA DEDUCCIÓN DE LA SITUACIÓN PROPUESTA

En la figura 5 se muestra el grafo proposicional de la demostración en la situación problema base de esta investigación. Cada flecha marca un paso del razonamiento. Las definiciones de partida DI, DII y DIII tienen estatus teórico de definición pertenecen al marco teórico en juego.

En el paso 1 se concluye que A y B son $\neq \emptyset$ y $A \cap B = \emptyset$ estas resultan de las hipótesis de partida y son reutilizadas en el paso 2 como premisas de entrada que a través del tercer enunciado se obtiene la proposición consecuente con estatus de conclusión. Es decir $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

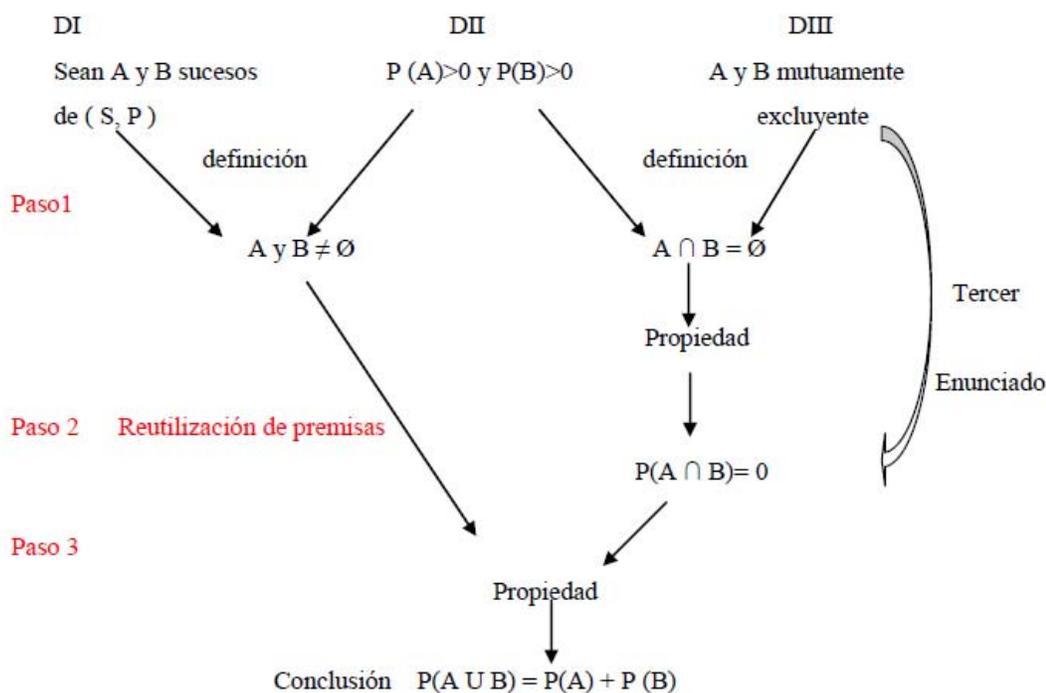


Fig5 Organización en pasos de la deducción de la situación propuesta

DI, DII y DIII son las definiciones de partida

4. METODOLOGÍA

La metodología de investigación que utilizamos es y sigue las siguientes etapas: el análisis exploratorio (concepciones de los alumnos), construcción del problema y análisis a priori, la experiencia, análisis a posteriori, confrontación de los análisis y conclusión. El instrumento que se utilizó fue un problema inscrito en la unidad de probabilidad del programa institucional, con el objeto de estudiar el razonamiento que desarrollan los estudiantes en las estrategias de resolución.

4.1 ESTRUCTURA DEL PROBLEMA

Sea (S, P) un espacio de probabilidad, A y B sucesos de S tales que $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$. Analice si la siguiente afirmación es V o F. En caso de ser V justifique y cuando sea F escriba la expresión correcta.

“Si A y B son mutuamente excluyentes entonces la probabilidad de que ocurra al menos uno de ellos está dada por $P(A) \cdot P(B)$ ”

a) Premisas (condición de entrada)

1. (S, P) un espacio de probabilidad, A y B sucesos de S tales que $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$
2. A y B mutuamente excluyente.

b) Terceros enunciados involucrados:

- Eventos mutuamente excluyentes definición : $A \cap B = \emptyset$
- Propiedad : $P(A \cap B) = 0$
- Propiedad $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

c) Conclusión:

Propuesta en el enunciado (contenido): $P(A \cup B) = P(A) \cdot P(B)$

Valor Lógico: Falso

4.2 ANÁLISIS A PRIORI

4.2.1 Respuesta experta

Respuesta correcta F

Puesto que: Si A y B son mutuamente excluyentes entonces $A \cap B = \emptyset$ y $P(A \cap B) = 0$ luego la probabilidad de que ocurra al menos uno de ellos está dada por $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

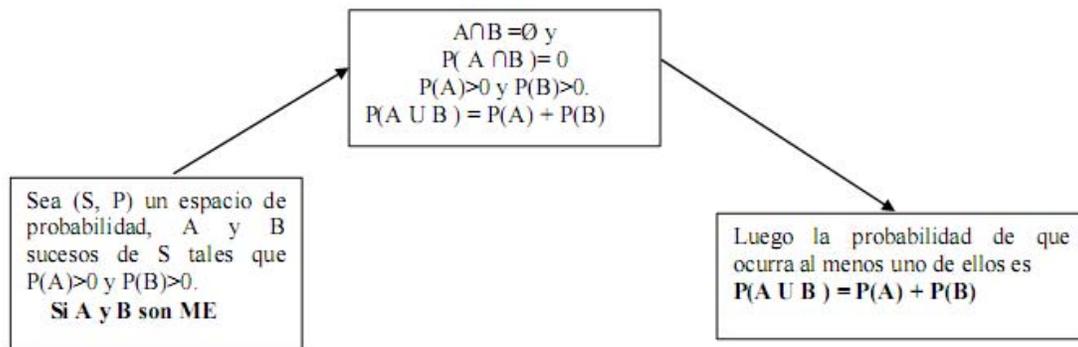


Fig. 6 Organización deductiva de la respuesta experta

4.2.2 Posibles respuestas

1. Una de las respuestas esperadas es :

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow$ la probabilidad de ocurrencia está dada por $P(A).P(B)$.

Es decir $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

El estudiante usa un tercer enunciado incorrecto y le asigna la propiedad de independencia a los sucesos

2. Un segundo tipo de respuesta

Si A y B son me $A \cap B = \emptyset$ luego $P(A) = 1 - P(B)$ ó $P(B) = 1 - P(A)$ entonces $P(A).P(B) = P(A \cap B) = \emptyset$

Además puede hacer la gráfica y representar en un diagrama de Venn. Este tipo de respuesta se diferencia de la respuesta experta por que el alumno considera a los conjuntos A y B sucesos complementarios del espacio muestral y en general no siempre ocurre.

3. La tercera respuesta esperada es:

Si son mutuamente excluyentes entonces tiene que cumplirse al menos 1 de las siguientes afirmaciones:

i) $P(A/B) = P(A).P(A) \neq 0$

ii) $P(B/A) = P(B).P(B) \neq 0$

iii) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{x definición}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A).P(B)}{P(B)} \quad \text{x ser mutuamente excluyentes}$$

$$P(A/B) = P(A) \quad \text{La probabilidad de que ocurra al menos uno de ellos}$$

En este tipo de respuesta el alumno utiliza premisas no pertinentes y concluye de manera incorrecta.

4.3 EXPERIENCIA

El instrumento se aplicó a 97 estudiantes de la cátedra de estadística agrupados en cuatro comisiones simultáneamente. Se aplicó después de tratado el tema en clase. Del problema objetivo se analizó la producción escrita y si los estudiantes justifican siguiendo todos los pasos de la deducción.

De esas producciones sólo se analizaron 38 que son las que tenían valor de verdad Falso (el correcto) pero justificadas de manera incorrecta ya que usaron diferentes recursos que no se ajustan a la respuesta experta. Sólo 14 alumnos contestaron Falso y justificaron bien.

Tabla I. Resumen de los valores de verdad de las respuestas de los alumnos

	F Bien	F no resp.	F no justif	F justif mal	F justif. reg	V justif.	V no justif.	Total
Total	14	12	7	38	10	10	4	97

4.4 ANÁLISIS A POSTERIORI

A continuación se mostrarán las producciones de algunos alumnos que caracterizan los patrones de respuestas. Se seleccionaron sólo aquellas que más se repiten y tienen la misma intención de justificación.

Tipo de justificación 1: Utiliza complementos para justificar

No expresa la unión con el símbolo. Utiliza lenguaje natural para marcar los estatus.

Supone sucesos complementarios que particionan el espacio muestral por eso

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

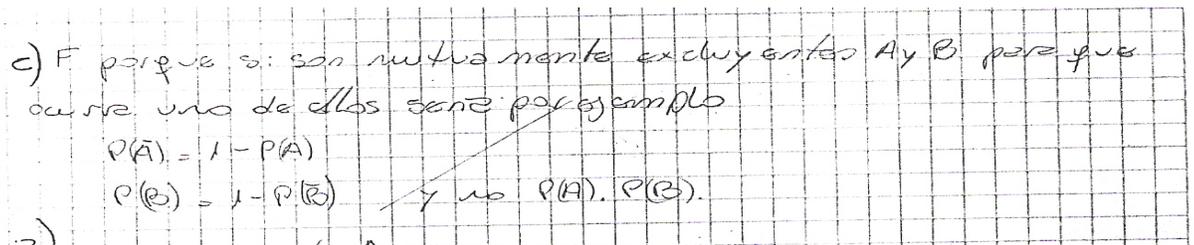


Fig.7 Tipo de justificación 1

Tipo de justificación 2: Confunde la simbología $P(A \cap B) = \emptyset$ y utiliza ejemplo numérico en la justificación.

Escribe la definición de eventos mutuamente excluyentes en vez de

$$P(A \cap B) = 0 \text{ escribe } P(A \cap B) = \emptyset$$

Utiliza lenguaje natural para marcar los estatus. Da ejemplo numérico, expresa independencia entre sucesos. No expresa la probabilidad de la unión

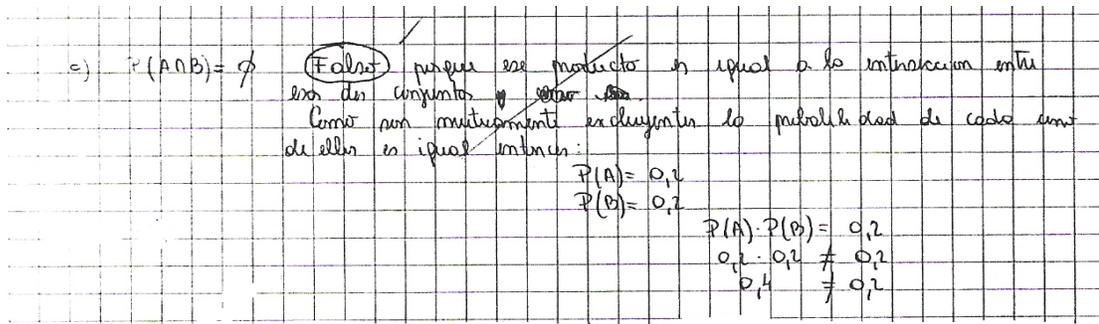


Fig.8 Tipo de justificación 2

Tipo de justificación 3: Utiliza eventos complementarios dividiendo el espacio muestral en sólo dos sucesos.

Utiliza lenguaje natural para marcar los estatus. Expresa sucesos complementarios que particionan el espacio muestral por eso $1 - P(A) = P(B)$.

No expresa la probabilidad de la unión con el símbolo

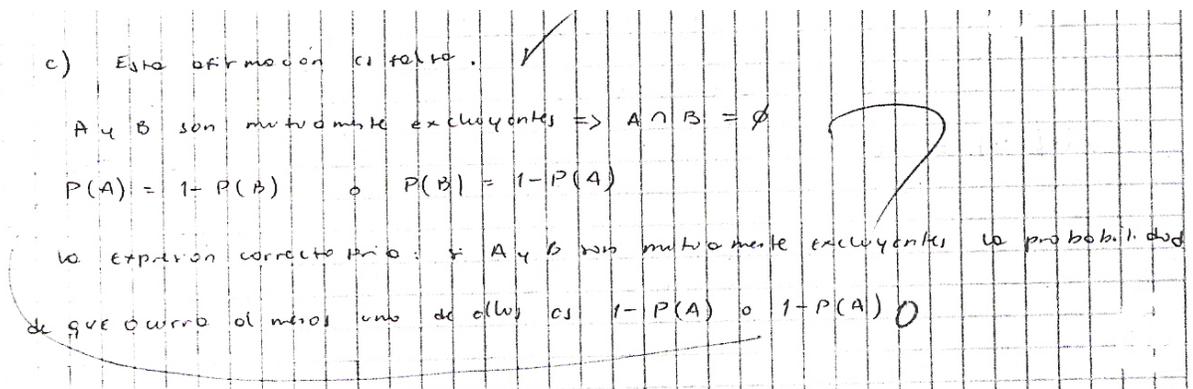


Fig.9 Tipo de justificación 3

Tipo de justificación 4: Este alumno tiene la característica particular que utiliza conjuntos complementarios, ejemplo numérico y gráfico

Escribe el enunciado. Expresa sucesos complementarios en el espacio muestral por eso

$$1 - P(A) = P(B)$$

Reutiliza premisas no pertinentes. Expresa la definición de eventos mutuamente excluyentes. Utiliza lenguaje natural para marcar los estatus. No expresa la probabilidad de la unión. Da ejemplo numérico

Realiza un gráfico. Expresa independendencia entre sucesos.

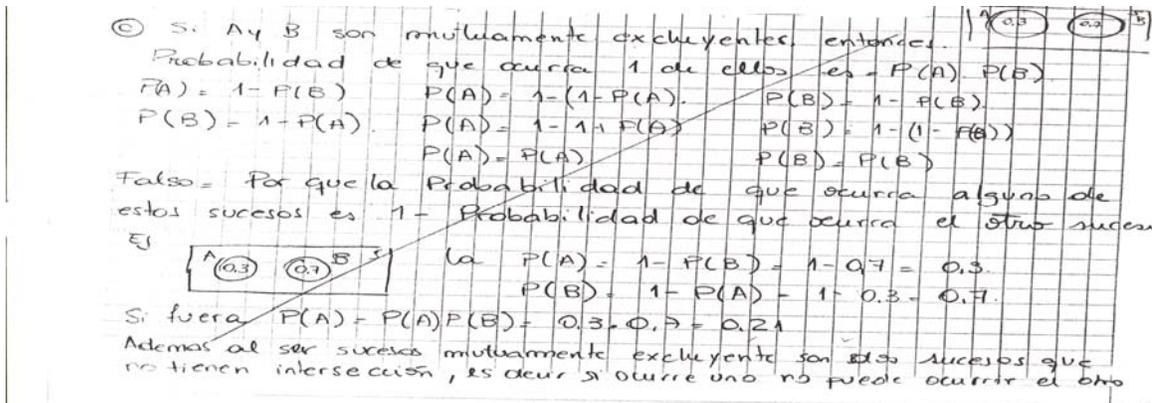


Fig.10 Tipo de justificación 4

Tipo de justificación 5: Utiliza lenguaje natural

Expresa la probabilidad de que ocurra al menos uno de ellos como $P(A).P(B)$ en vez de $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$. Escribe el enunciado. Expresa independencia entre sucesos. Emplea verbos para marcar los estatus. No expresa la probabilidad de la unión en símbolos

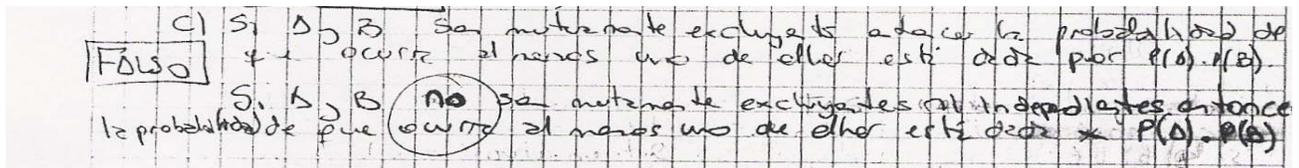


Fig.11 Tipo de justificación 5

Tipo de justificación 6: Utiliza probabilidad condicional

Escribe el enunciado
 Utiliza lenguaje natural para marcar los estatus.
 Escribe para que ocurra al menos uno de ellos $P(A/B) = P(A)$ o bien $P(B/A) = P(B)$ expresando independencia en vez de la probabilidad de la unión de sucesos mutuamente excluyentes

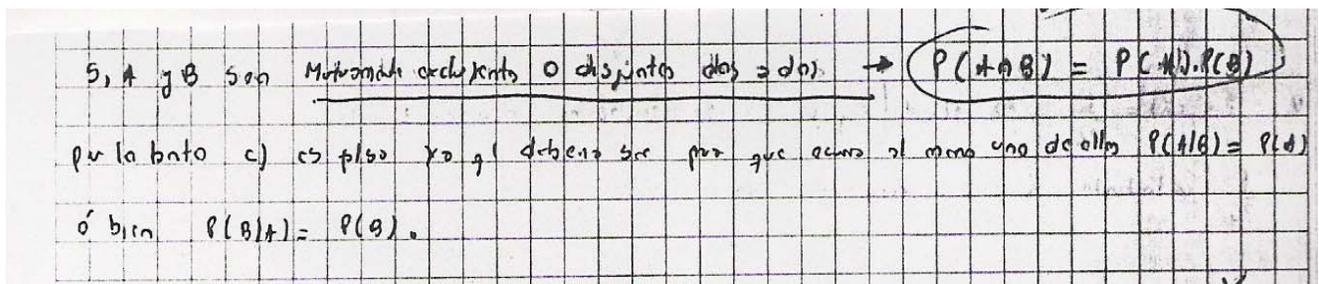


Fig.12 Tipo de justificación 6

Tipo de justificación 7: Confunde símbolos y utiliza la regla de la adición

No asigna el valor lógico de verdad
 Escribe $P(A \cap B) = \emptyset$ en vez de $P(A \cap B) = 0$

c- A y B m.e. $P(A \cap B) = \emptyset$
 $P(A) \text{ o } P(B) = P(A) \cup P(B)$ $P(A \cup B)$
 $= P(A) + P(B)$

Fig.13 Tipo de justificación 7

4.4.1. Respuestas más utilizadas por los alumnos

Las definiciones que utilizan los alumnos para justificar su respuesta se caracterizaron en diez tipos. Para ello se tuvo en cuenta las definiciones del objeto estadístico, tipo de premisas y conclusión.

- 1- Escribe la definición de eventos mutuamente excluyentes
- 2- Escribe la definición de eventos independientes
- 3- Escribe $P(A \cap B) = \emptyset$
- 4- Expresa la probabilidad de la unión
- 5- Escribe el enunciado
- 6- Expresa sucesos complementarios que particionan el espacio muestral
- 7- Utiliza lenguaje natural para marcar los estatus
- 8- Realiza un gráfico
- 9- Da un ejemplo
- 10- Usa la probabilidad condicional

El gráfico siguiente expresa las frecuencias absolutas de las respuestas utilizadas por los alumnos.



Gráfico 1. Diagrama de barras del tipo de respuestas utilizadas por los alumnos

Se puede observar que las respuestas más frecuentes son la 1, 2 y 7 de la que se deduce que los alumnos expresan de manera correcta las definiciones de eventos mutuamente excluyentes (1) y de eventos independientes (2).

Para analizar los resultados se buscaron distintas metodologías, por un lado se hizo un análisis a priori del cual los alumnos utilizaron, como muestra la tabla resumen, las estrategias previstas.

Los alumnos se clasifican en dos grupos de actitudes semejantes unos tienen claro el estatus operatorio de las premisas, utilizando el tercer enunciado con su estatus teórico fijado de antemano, los pasos de organización y la reutilización de las mismas; y el otro grupo se caracteriza por las marcas redaccionales del razonamiento deductivo.

Usaron la mayoría de las premisas no pertinentes. Se marcaron grupos de estudiantes con patrones de respuestas. Unos utilizaron el enunciado y luego justificaron para llegar a la conclusión. Casi nadie la expresó en símbolos, de los que la expresaron la hicieron a través del contenido del enunciado (*la probabilidad de al menos uno de ellos*).

Pocos usaron ejemplos numéricos y otros diagrama de Venn. Otros usaron la probabilidad condicional para demostrar la ocurrencia de al menos uno de ellos. Y otros usaron sucesos complementarios.

Todos determinaron el valor lógico correcto pero no demostraron la probabilidad de la unión. La mayoría enuncia las definiciones de eventos mutuamente excluyentes y de eventos independientes sin embargo confunde ambos conceptos y los asocia.

5. CONCLUSIONES

La metodología de investigación en este trabajo, nos permitió analizar las producciones que realizaron los estudiantes enfrentados a un problema de probabilidad. En esta investigación el objeto estadístico estudiado se refiere a los eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes. La situación problema enfrenta al alumno a una demostración en la que se solicita justificar el valor de verdad. Por lo tanto se esperaba que el estudiante ponga en juego varias definiciones para llegar a la justificación correcta a través de un razonamiento deductivo.

Feller (1975) asegura que en la práctica se tiene la intuición de que ciertos eventos son estocásticamente independientes, sin embargo sólo se descubre por los cálculos. Esta afirmación podría explicar que los estudiantes al no poder realizar cálculos en la situación propuesta le asignan la propiedad de independencia. Esto pone de manifiesto nuevamente que si bien los estudiantes tienen el estatus teórico de las premisas no se separan del estatus del contenido.

Kahneman y Tversky demuestran que las personas con poco o ningún conocimiento de estadística estiman la probabilidad de eventos por medio de ciertos juicios heurísticos, como la representatividad y la disponibilidad

De acuerdo con la heurística de la representatividad, las personas estiman las probabilidades de los eventos con base en lo bien que un resultado representa cierto aspecto de su población original (Kahneman y Tversky, 1972).

Aunque los conceptos de conjunción, probabilidad condicional y eventos independientes son bastante difíciles de enseñar, la investigación de Tversky y Kahneman sugiere que hay una interferencia psicológica que hace que la enseñanza de estas ideas sea mucho más compleja. La mayoría de los sujetos, aún con conocimientos de la teoría de la probabilidad, no aplican propiedades ni matematizan. Sus respuestas subjetivas se basarán en la representatividad, disponibilidad o el error de atribución fundamental, más que en un modelo normativo de la probabilidad de los eventos.

Lo anterior corrobora también nuestros resultados ya que los alumnos contestan falso por la subjetividad y representatividad que tiene de los objetos puestos en consideración. Sin embargo cometen errores en el desarrollo de la demostración de la afirmación.

Cuando al alumno se le plantean problemas en que intervienen características de los sucesos y luego se les pide una justificación tienden a aplicar lo que tienen como representación general de los conceptos y asocian *excluyentes a independiente* esto aparece particularmente con la regla del producto y la de adición.

La comprensión de un razonamiento válido presupone la toma de conciencia que el valor epistémico teórico sustituye el semántico. Para los alumnos sólo hay un valor epistémico inducido por la comprensión del contenido de la proposición, este valor epistémico semántico está asociado al valor lógico de verdad

Nuestra situación problema muestra que para los estudiantes interrogados el estatus de las premisas no está adquirido, lo que quiere decir que hay un valor epistémico en el discurso, para ellos la palabra excluyente significa independiente ignorando las definiciones dadas. Pareciera que no lo relacionan con el marco teórico en cuestión y se quedan en palabras no técnicas que forman parte de lo cotidiano. Al contestar falso el estudiante muestra el valor lógico correcto de la conclusión y tiene en cuenta el tercer enunciado pero no considera el estatus de las premisas y lo confunde con el estatus del contenido.

Otra constatación de esta investigación muestra que los estudiantes no tienen en cuenta las definiciones iniciales, es decir las premisas de entrada de la organización de los pasos de deducción: que afirman que la probabilidad de los sucesos considerados es mayor que cero con lo cual nunca los sucesos son imposibles (conjunto vacío)

Cuando al alumno se le plantean problemas en que intervienen características de los sucesos y luego se les pide una justificación tienden a aplicar lo que tienen como representación general (valor epistémico semántico asociado al contenido) de los conceptos y asocian excluyentes a independiente esto aparece particularmente con la regla del producto y la de adición

Los estudiantes tienen el estatus teórico de las premisas pero no se separan del estatus del contenido. Al no realizar cálculos en la situación propuesta sólo aplican definiciones y le asignan la propiedad de independencia a sucesos mutuamente excluyentes es decir utilizan premisas no pertinentes.

Podemos decir que el razonamiento deductivo está incompleto porque se queda en el estatus del contenido y no en el estatus teórico de las premisas, aunque lo conoce porque lo escribe, pero lo confunde.

Los alumnos determinan el valor de verdad correcto pero sus justificaciones son basadas en la subjetividad y representatividad que tiene de los objetos puestos en consideración cometiendo errores en el desarrollo de la demostración de la afirmación.

El problema didáctico principal consiste entonces en alejar la atención de los alumnos del contenido y centrarla en la forma. Pero como en realidad no se pueden separar el contenido semántico y la forma en el registro de la lengua natural, sería necesario entonces neutralizar el contenido semántico proponiendo razonar con proposiciones absurdas: es necesario conducir al alumno a que disocie en un razonamiento la forma lógica y el contenido semántico

6. SUGERENCIAS

La superación de dichos obstáculos ha de surgir de un tratamiento didáctico del objeto, el cual tenga en consideración distintas actividades y problemas que involucren ambos conceptos y exijan distintos tratamientos y pasajes entre distintos registros de representación semiótica, y coordinación entre ellos.

Además se debe hacer hincapié en la utilización de ambos conceptos tanto en forma teórica como con ejercicios de aplicación, previa aclaración de que dos sucesos son mutuamente excluyentes e independientes sí y sólo sí uno de ellos o ambos es el conjunto vacío, en otro caso son dependientes

Por una parte al principio, han asociado representaciones inmediatamente concretas de las dependencias de los hechos reales. Por otra por la regla de la multiplicación el desarrollo del concepto de independientes debe ser organizado estableciendo una relación permanente entre las representaciones del contenido (objeto) y la definición matemáticas (signos, fórmulas).

Es necesario entonces proponer un medio de representación que ofrezca una aprehensión sinóptica de la organización de un paso de deducción debido a que es esta organización la que constituye el contexto de enunciación del cual depende el estatus operatorio de las proposiciones.

Para que la tarea sea una tarea de organización deductiva, es necesario dar reglas de construcción centradas en el estatus objetivo la comprensión de la dualidad de la noción de probabilidad y su traducción en objeto matemático de las proposiciones: de las hipótesis sale una flecha pero nunca llega una; de un teorema sale una flecha pero pueden llegar varias, de la conclusión que se debe demostrar jamás sale una flecha.

En esta tarea de organización deductiva, requiere pues que los alumnos previamente hayan encontrado los teoremas y las definiciones que se van a poner en práctica en la demostración. En ese momento del aprendizaje es necesario separar meticulosamente el descubrimiento de la organización deductiva de un conjunto de proposiciones y los métodos heurísticos

REFERENCIAS

- Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Cádiz.
- Batanero, C., Serrano, L. y Garfield, J. (1996). *Heuristics and biases in secondary students' reasoning about probability*. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the XX PME Conference*, (v.2, pp. 43-50). Universidad de Valencia.
- D'Amelio Adriana, (2002). CLATSE V “*Dificultades y obstáculos en eventos mutuamente excluyentes e independiente*”
- D'Amelio Adriana, (2006) “*Analysis of didactic situations suggested to distinguish mutually exclusive and independent events*” ICOTS 7. Salvador de Bahía. Brasil
- D'Amelio Adriana, (2009) “*El razonamiento deductivo en eventos mutuamente excluyentes e independientes*” Tesis de Magister en Didáctica de las Ciencias con mención en Didáctica de las Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile
- Duval R.,(1995) “*Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*”, Peter Lang, Suisse.
- Duval, Raymond (1999) “Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento.” *Revista Investigaciones en Matemática Educativa II*. Madrid:Grupo Editorial Iberoamericana,.
- Feller, W. (1975) (1950 An Introduction to probability Theory and its Applications Vol.1) *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones. Vol 1*. Limusa . México.
- Guzmán R, Ismenia. (1999) “*Fundamentos Teóricos de la Didáctica de las matemáticas*” Lecciones para un curso del Programa de Magister ECDIMAT (Magister en Enseñanza de las ciencias con mención en Didáctica de la Matemática) Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Guzmán R, Ismenia. (2000). “Transposición didáctica” Lecciones para un curso del Programa de Magister ECDIMAT (Magister en Enseñanza de las ciencias con mención en Didáctica de la Matemática) Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
- Kac, Mark. (1982) *The Search for the Meaning of independence*. Gani J.(Ed) .The Making of Statistica , Springer. Verlag, New York.

- Kahneman D. E Tversky A. (1979), *Prospect Theory : An Analysis of Decisions Under Risk*, *Econometría*, 47,pp. 313-327
- Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.) (1982). *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge: University Press.
- Kilpatrick J., Gómez P., Rico, L. (1995). *Educación Matemática* Grupo Ed. Iberoamericana.
- Sánchez, E. (1996) *Conceptos teóricos e ideas espontáneas sobre la noción de independencia estocástica en profesores de bachillerato : Un estudio de casos*. Tesis Doctoral. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.
- Sánchez ,E.(1996)“*Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes*” págs.384-404. *Investigaciones en Matemática Educativa*. Grupo Editorial Iberoamericana. Cinvestav. Méjico
- Sánchez, E (2000) *Investigaciones Didácticas sobre el concepto de eventos independientes en probabilidad* . *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 20 n°3,pp. 305 - 330 .2000.
- Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J. y Cañizares, M. J. (1998). Un estudio componencial de heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, 10 (1), 7-26.
- Shaughnessy, J. M. (1983). The psychology of inference and the teaching of probability and statistics: Two sides of the same coin? En R. W. Scholz (Ed.), *Decision making under uncertainty*, (pp. 363-374). Amsterdam: North Holland.
- Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, (pp.465-494). New York: Mac Millan.
- Slovic y A. Tversky (Eds.), *Juicio Bajo la Incertidumbre: Heuristics y Prejuicios*, (el pp. 153 - 160). Nueva York: Cambridge la Prensa Universitaria.
- Steinbring, H. (1986). L'independance stochastique. *Recherches en didactique des Mathematiques*, 7, (3), 99-118.
- Steinbring, H. (1991): The concept of chance in everyday teaching: a study of a social epistemology of mathematical knowledge. *Educational Studies of Mathematics*, 22, 503- 522.
- Truran, J.M. y Truran, K.M. (1997). la independencia Estadística: ¿Un concepto o dos? En B. Phillips (Ed.), *Papeles de Educación Estadística Presentada al Tema Grupo 9, ICME 8*, Sevilla, (el pp. 87–100). el Majuelo, Victoria,: La Universidad de Swinburne de Tecnología.
- Tversky A. E Kahneman D. (1987), *Rational Choice and the Framing of Decisions*, in Hogart R.M. e Reder M., *Rational Choice – The Contrast between Economics and Psycology*, The University of Chicago Press, Chicago

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la Dra Ismenia Guzmán, al Dr Ernesto Sánchez y a la Dra Angela Diblasi por su apoyo en la realización de esta investigación.

THE USE OF DEDUCTIVE REASONING IN MUTUALLY EXCLUSIVE EVENTS AND INDEPENDENT EVENTS

ABSTRACT

*The concepts of **mutually exclusive** events and **independent** events are our targets of study in this paper. This study has been motivated by the observation that our College students confuse these concepts and improperly associate them in Probability and Statistics courses. The main educational problem is focused in the form and not in the meaning of these concepts. The concept of independence is mostly taught through the Probability product rule and it cannot be separated from the semantic content. Then, it is important that the teacher can neutralize the semantic content by mean of a logical reasoning. The aim of the educational procedure is the student can cope with statistical meanings of these concepts. The theoretical educational frame is based on the deductive reasoning proposed by Raymond Duval. The methodology used in this paper is theoretical-methodological. A questionnaire with this subject was designed for the students. It was filled up by 97 students taking a Statistical course in the Faculty of Economy. The aim of this work is to make a contribution towards teaching of **mutually exclusive** events and **independent** events*

Keywords: *Statistics teaching; Deductive Reasoning; Mutually Exclusive events and Independent events.*

O USO DO RACIOCÍNIO DEDUTIVO EM EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUDENTES E EVENTOS INDEPENDENTES

RESUMO

*Os conceitos de eventos **mutuamente excludentes** e eventos **independentes** são fontes de fenômenos didáticos. Efetivamente temos constatado nos cursos de Probabilidade e Estatística em estudantes universitários que nas atividades em onde intervêm ditos conceitos, os estudantes mostram ideias espontâneas errôneas confundindo ambos e associando de maneira incorreta. O principal problema educacional então consiste em afastar a atenção dos alunos do conteúdo e centrar na forma. Isto é a propriedade de independência está presente com a regra do produto como a mais aplicada, mas não se podem separar do conteúdo semântico. O objetivo é colocar o aluno em situação de demonstrar através do raciocínio dedutivo os objetos estatísticos postos em jogo. O marco teórico didático está baseado sobre o raciocínio dedutivo de Raymond Duval. A metodologia de investigação é teórico-metodológica com um estudo de casos. Seria necessário então neutralizar o conteúdo semântico oferecendo-se encontrar o valor para valer de proposições para torná-lo se dissociam em raciocínio lógico e o conteúdo semântico. O instrumento foi aplicado a 97 estudantes da cátedra de estatística da Faculdade de Ciências Económicas. Este trabalho tem como objetivo contribuir ao ensino da probabilidade do conceito de eventos **mutuamente excludentes** e eventos **independentes**, para seu melhor tratamento na sala de classe.*

Palavras-chave: *Ensino da Estatística; raciocínio dedutivo; Eventos mutuamente excludentes e eventos independentes.*

ADRIANA G. D'AMELIO
Universidad Nacional de Cuyo, Argentina
adameliol@fce.uncu.edu.ar

Magíster en Didáctica de las Ciencias, Especialista en Docencia Universitaria trabaja en la Universidad Nacional de Cuyo, Argentina. Con más de veinticinco años de experiencia docente ha trabajado en una amplia y variada gama de establecimientos educativos. Ha participado en numerosos proyectos de investigación en Educación Matemática y en Estadística además ha sido expositora en numerosos congresos nacionales e internacionales. Premio “Juarez Lincol Martí” 2009. Miembro Consultivo Internacional (Advisory Board) del ISLP (International Statistical Literacy Project). Jurado del Best CooperativenProject Award 2011. Jurado del concurso de Poster del ISLP 2013. Colaboradora de los contributed papers del ICOTS 2014. Miembro de la Comisión directiva de la Sociedad Argentina de Estadística.

LA BÚSQUEDA DEL ESPACIO MUESTRAL ‘ORIGINAL’: UNA NECESIDAD PARA LA ENSEÑANZA

LUISA ANDRADE

FELIPE FERNÁNDEZ

BENJAMÍN SARMIENTO

RESUMEN

En las fases sucesivas de un proyecto de investigación que apunta a la promoción de razonamiento estadístico en torno a la variable aleatoria, se detectan dificultades de los estudiantes en la conceptualización de nociones como ‘experimento aleatorio’ y ‘espacio muestral’, que llevan a una prolongada reflexión donde se pone de relieve la incidencia de la enseñanza en tales dificultades. Este artículo presenta dicha reflexión y la manera cómo evoluciona en una comprensión por parte del grupo de investigación, la cual además sugiere ideas para un aprendizaje interconectado y con sentido de los conceptos mencionados.

Palabras clave: *Palabra probabilidad; experimento aleatorio; espacio muestral; variable aleatoria.*

1. INTRODUCCIÓN

La variable aleatoria se posiciona como un concepto cuya perspectiva se ha transformado dentro de la educación estadística, y de verse como una magnitud, es decir, como un conjunto de valores numéricos diferentes que corresponden a resultados de una medición, ha pasado a establecerse como una relación funcional (ver por ejemplo: Miller (1998), Ortiz (2002), Ruiz (2006) y Ruiz, Albert y Batanero (2006)). El contexto de trabajo que dio origen a la idea de escribir este ensayo es el de un proyecto de investigación que se desarrolló durante los años 2010 y 2011 por parte de la Línea de investigación en Educación Estadística de la Universidad Pedagógica Nacional en Bogotá, Colombia, con estudiantes de la Licenciatura en matemáticas de la misma universidad¹. En dicha investigación se plantea una secuencia de enseñanza en torno a la comprensión de la variable aleatoria con el fin de asumir la nueva conceptualización, atendiendo a las dificultades iniciales de los estudiantes que surgen y que ponen de relieve la relevancia de los conceptos de ‘espacio muestral’ y ‘experimento aleatorio’ en la exploración de la variable aleatoria (Fernández, Andrade y Sarmiento, 2012).

En la secuencia de enseñanza se proponen situaciones que involucran fenómenos aleatorios que dan lugar únicamente al tratamiento de espacios muestrales finitos. Alrededor de estas situaciones se

¹ Ese proyecto fue financiado por el Centro de Investigaciones (CIUP) y el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

plantean tareas que persiguen objetivos de aprendizaje concernientes a diferentes aspectos de la comprensión del concepto de variable aleatoria (ver Fernández, Andrade y Montañez, 2011). La situación que se trabaja en la mayoría de las tareas alude a la realización de la rifa de un viaje para la familia del ganador, lo que involucra estimar con anterioridad el número de personas del núcleo familiar y el lugar de destino preferido (ver Anexo 1), con el fin de comprar el paquete turístico previamente; otras tareas hacen referencia a juegos de azar y artículos defectuosos (ver Anexo 2). Se esperaba que los estudiantes pudieran distinguir las variables aleatorias implicadas al identificar el espacio muestral y las relaciones entre los puntos muestrales y los valores de dichas variables.

2. ERRORES Y DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES

En el trabajo en torno a las tareas durante el desarrollo del proyecto, los estudiantes presentan errores tanto en la determinación de los experimentos aleatorios como en la explicitación de los espacios muestrales.

En la identificación del experimento aleatorio de la situación de la rifa se manifiestan dificultades que conducen a que los estudiantes lo determinen como alguno de los sucesos de la situación relacionado con los datos relevantes para responder la pregunta que se desea contestar, la cual usualmente solicita determinar una probabilidad. Por ejemplo, en la situación de la rifa (ver Anexo 1, Taller Variable aleatoria), algunos estudiantes señalan que el experimento aleatorio consiste en: “determinar cuáles son las posibilidades de escoger al empleado, la cantidad de familiares y la ciudad que desea conocer” o “determinar cuántos tiquetes de viaje y gastos de hotel a un destino hay que comprar antes de la rifa”, es decir, las respuestas están dadas en términos de la información del enunciado que consideran importante para responder la pregunta. Pareciera que el origen de estas dificultades es el hecho de que la situación propuesta no sea habitual en la enseñanza y por lo tanto, de que una rifa no se ha establecido explícitamente como un fenómeno aleatorio que es plausible de trabajar matemáticamente. Quizás también por la definición de experimento aleatorio que pueden haber formado los estudiantes limitada a los ejercicios y tareas de los libros de texto que han trabajado, constituidas por un enunciado corto donde se describe la acción que genera los resultados aleatorios de manera concisa y se señala la observación que enfoca la atención, en contraste con la situación de la rifa que es rica en información, no es solo la descripción de una acción no determinista y para la cual la observación se especifica de manera indirecta. Si en el experimento de la rifa se explicitara qué es lo que se va a anotar, quizá se detectarían menos errores en las respuestas de los estudiantes.

Los estudiantes tienen problemas para establecer los espacios muestrales correspondientes a experimentos aleatorios, incluso tras identificar éstos adecuadamente. A pesar de que la situación de la rifa es reconocida por algunos estudiantes como el experimento aleatorio, el espacio muestral que

registran es “un ganador y el resto perdedores” o “ $S = \{G_1, P_1, P_2, \dots, P_{119}\}$ ”. En estas respuestas de los estudiantes se percibe cómo de alguna manera intentan encajar el espacio muestral dentro de las características de los espacios muestrales que han trabajado con mayor énfasis, en particular, para situaciones cuyos valores se comportan de manera binomial. Es de anotar que se refleja una confusión, quizás motivada por la rifa como un suceso familiar de la vida cotidiana que no se ha trabajado matemáticamente y por el enunciado mismo de la situación, pues aunque el espacio muestral no está constituido por dos puntos muestrales hay evidentemente solo dos posibles resultados para un participante: ganar o perder. Otro ejemplo de respuesta que muestra esta tendencia se ve claramente en la siguiente situación: “Se selecciona al azar, un computador de la sala B-224 (que tiene 25 computadores) para verificar el funcionamiento de su sistema operacional”, donde los estudiantes reconocen el experimento aleatorio al señalar que “el experimento aleatorio es seleccionar al azar 1 de los 25 computadores de la sala B-224”, pero afirman que el espacio muestral es “ $S = \{\text{funciona el sistema operacional (F), No funciona el sistema operacional (NF)}\}$ ” (ver Anexo 2, Taller Espacio muestral). Hay una marcada tendencia a confundir la observación mediada por el propósito del experimento (observar el funcionamiento) con la observación de la acción aleatoria misma, y proponer espacios muestrales en términos de dos resultados como ‘sí’ y ‘no’, ‘falso’ y ‘verdadero’, ‘0’ y ‘1’.

Varios de los estudiantes aún después de puntualizar los posibles resultados del experimento aleatorio, no reconocen el espacio muestral como el conjunto conformado por ellos, quizás porque a pesar de conocer la definición de espacio muestral, en las tareas que se abordan usualmente en la enseñanza, es decir, situaciones que corresponden a juegos de azar, como por ejemplo, lanzar dos dados y observar la suma de los puntos de las caras superiores y fabricaciones de artículos defectuosos, el espacio muestral se piensa ligado a la observación solicitada, es decir, en términos de la característica que interesa observar, más que a los resultados mismos del experimento aleatorio. Así, reflejan en el espacio muestral consideraciones del enunciado que muchas veces coinciden con los valores de las variables, ya sean variables aleatorias o no, o combinaciones de esos valores. En esto también puede incidir el hecho de que el enunciado que describe la situación involucra información adicional al fenómeno aleatorio mismo, que hace que consideren la necesidad de incluir en el espacio muestral tal información. Por ejemplo en la situación de la rifa, algunos estudiantes señalan como posibles resultados de ésta, cualquiera de los 120 empleados, pero al estipular el espacio muestral hablan de “Se motiva, No se motiva”², , o “los posibles resultados son ganar o perder”, o “ $S = \{(E), (E,M), (E,M,H_1), (E,M,H_1,H_2), (E,M,H_1,H_2, \dots, H_n)\}$ ” donde “E =Empleado, M=Esposa y H=Hijos”. De manera similar, otros errores en los que incurren los estudiantes al identificar el espacio muestral,

² Como se ve en el enunciado de la situación de la rifa, se indica que ésta se lleva a cabo para motivar a los empleados de una empresa. De ahí que algunos de los estudiantes tomen esta información como relevante para establecer el espacio muestral (ver Anexo 1, Taller Variable aleatoria).

parecieran estar ligados a la interpretación de la situación, la cual no siempre es fácil; así, reflejan en el espacio muestral consideraciones del enunciado que muchas veces coinciden con los valores de las variables, ya sean variables aleatorias o no, o combinaciones de esos valores. Es el caso de respuestas como “ $S = \{1L, 1R, 1P, 2L, 2R, 2P, 3L, 3R, 3P, \dots, 22L, 22R, 22P\}$ ” en la situación de la rifa, donde el número hace referencia a la cantidad de familiares y la letra corresponde a la letra inicial de la ciudad de preferencia.

Cuando se solicita expresar el espacio muestral en notación formal de conjunto, los estudiantes aún después de reconocer los posibles resultados del experimento que han sido descritos de manera informal, presentan problemas tanto en la expresión por comprensión como por extensión; las siguientes respuestas ejemplifican esto: “ $S = \{\text{empleados}\}$ ” o “ $S = \text{Ganadores: Todos los empleados}$ ” o “ $S = \{\{CCC\}, \{SSS\}, \{CCS\}, \{CSC\}, \{SCC\}, \{CSS\}, \{SCS\}, \{SSC\}\}$ ”(ver Anexo 2, Taller Espacio muestral). Esta solicitud con respecto a la notación lleva en ocasiones a que los estudiantes busquen más bien el cardinal del espacio muestral como conjunto, es decir, el número de posibles resultados más no los resultados; por ejemplo en el caso de la rifa entre 120 empleados, algunos estudiantes responden “ $S = \binom{120}{1}$ ”. Concerniente al número de puntos muestrales del espacio muestral, hay igualmente indicios de la necesidad de emplear fórmulas, aunque a simple vista pueda establecerse esa cantidad, tal como se percibe en la siguiente respuesta para expresar el número de puntos muestrales en la situación de la rifa: “número de resultados = $\frac{120!}{1!119!}$ ”.

Otras dificultades que se detectan en los estudiantes a través de los errores al explicitar los puntos muestrales del espacio muestral, tocan aspectos relativos a la formación de los puntos muestrales, como determinar si se trata de una permutación o una combinación y valorar si la repetición o no-repetición de elementos es relevante. Por ejemplo, en la situación de la rifa para algunos estudiantes el espacio muestral está compuesto por arreglos de 120 elementos “ $S = \{GPPP\dots P, PGPP\dots P, PPGP\dots P, \dots\}$ ”; esta respuesta parece estar directamente vinculada al número de resultados que calculan con la fórmula, expuesto en el párrafo anterior, que tiene una alta influencia del trabajo en combinatoria que se realiza en los cursos de probabilidad. Similarmente en la situación “De un listado de 8 estudiantes del primer semestre de matemáticas de 2011-1 se eligen al azar 2 estudiantes para ayudar en la organización de la semana del educador matemático”, los estudiantes reconocen el experimento aleatorio como “elegir dos estudiantes de una lista de ocho”, y sin embargo, el espacio muestral que consideran es el listado de los ocho estudiantes, y no las posibles parejas que podrían ser seleccionadas. De nuevo aquí es relevante el hecho de que la situación es ajena a los experimentos aleatorios regularmente presentados en los libros de texto para los que los estudiantes conocen la configuración de los espacios muestrales respectivos; así los estudiantes asocian la situación

desconocida con una ya trabajada como la de establecer el número de ordenaciones con elementos repetidos. Al respecto, en libros de texto se identifican inconsistencias al denotar, por ejemplo, en forma de parejas ordenadas configuraciones de elementos que corresponden a combinaciones donde el orden no es relevante (Wisniewski y Bali, 1998, p. 50).

La evidencia de estos errores y las posibles dificultades que los subyacen, llama fuertemente la atención pues pese a ellas, los estudiantes son capaces de emplear diagramas y fórmulas combinatorias para contar, y de esta manera calcular exitosamente probabilidades relacionadas con las situaciones. Por ejemplo en la situación “Se selecciona una bola de una urna, que contiene 3 bolas rojas, 4 verdes y 2 amarillas”, los estudiantes calculan sin problema la probabilidad de que la bola seleccionada sea verde como “ $4/9$ ” por conteo de posibilidades, pero al preguntar por el espacio muestral lo establecen como “ $S = \{\text{rojo, verde, amarillo}\}$ ” que corresponde al conjunto de valores de la variable aleatoria y no tienen en cuenta el número de bolas de cada color, que las bolas son distinguibles; tampoco relacionan el conteo del total de bolas que hacen, con el número de puntos muestrales del espacio muestral.

3. DISCUSIÓN

Al estudiar con detenimiento las situaciones propuestas en los talleres de los experimentos de enseñanza, las respuestas de los estudiantes, los errores identificados y las posibles dificultades que los subyacen, la primera pregunta que surge es en torno a la noción de experimento aleatorio. Esta noción fuera de la acción misma que genera los resultados aleatorios incluye una acción implícita de observación de tales resultados que puede explicitarse o no. Por ejemplo, lanzar una moneda implica observar el resultado que sale, ya que esta es la razón por la cual se realiza el experimento de lanzar la moneda. Adicionalmente en algunos experimentos aleatorios se agrega otra observación en la que también está presente el azar -pues toma un valor particular en cada ejecución del experimento-, que indica el foco específico de atención sobre los resultados; en el caso del experimento aleatorio de lanzar la moneda podría señalarse que se anota 1 si sale sello y 0 si no. Mediante esta última acción se organizan los resultados posibles y se da lugar a la variable aleatoria.

También emergen preguntas acerca de cómo se constituyen los elementos llamados puntos muestrales que hacen parte del conjunto denominado espacio muestral, es decir, cuáles son realmente los resultados posibles asociados a un experimento aleatorio. La consulta de bibliografía conduce a notar que muchas veces los espacios muestrales finitos considerados en los libros de texto para las diferentes situaciones, corresponden a los conjuntos de valores que toman las posibles variables aleatorias o pseudo aleatorias³. El hecho de que la definición formal para espacio muestral expuesta en

³ Algunas de las variables involucradas en una situación ligada a un experimento aleatorio pueden tener características similares a una variable aleatoria en el sentido de que dan lugar a una partición del espacio muestral, y por lo tanto a una

libros de texto, que alude al conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio, sea flexible y permita en algunos casos considerar como puntos muestrales los valores de las variables aleatorias, es decir, como los elementos del espacio muestral, motiva a que con frecuencia se admita la coexistencia de varios espacios muestrales en una misma situación y para el mismo experimento aleatorio. Se encuentran entonces referencias a que el espacio muestral de un experimento aleatorio no es único y así un experimento aleatorio puede constar de varios espacios muestrales (ver Larson, 1995; Wisniewski y Bali, 1998; y Montgomery y Runger, 2004). Se explica así la tendencia de los estudiantes a involucrar los valores de variables aleatorias en los espacios muestrales. Esta ‘flexibilidad’ puede reflejar un significado para experimento aleatorio diferente al establecido anteriormente pues incluiría la acción adicional que en algunos casos se añade para precisar la observación.

Se considera entonces conveniente hacer una distinción entre espacio muestral ‘original’ y espacio muestral ‘adoptado’. El primero es el conjunto que resulta de explicitar directamente todos los posibles resultados del experimento aleatorio. El segundo es la colección de todos los eventos simples o elementales que interesa identificar en la realización del experimento según la observación puesta en juego, que se adopta como espacio muestral en concordancia con lo sugerido en libros de texto (ver Larson, 1995, p. 35). Algunos ejemplos de experimentos aleatorios sencillos, que surgen de considerar el lanzamiento de un dado, sirven para ilustrar la distinción planteada.

Experimento aleatorio 1. Se lanza un dado normal y se anota el número que resulta en la cara superior.

Experimento aleatorio 2. Se lanza un dado normal y se anota ‘SI’ si el número que resulta es divisible por 3, o se anota ‘NO’ si no es divisible por 3.

Experimento aleatorio 3. Se lanza un dado y se anota ‘1’ si el número que resulta es divisible por 3 o se anota ‘0’ si no es divisible por 3.

Claramente en el primer experimento aleatorio el espacio muestral es el conjunto $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y no hay ambigüedad respecto al posible espacio muestral ‘adoptado’; ambos espacios muestrales, el ‘original’ y el ‘adoptado’, son el mismo. Sin embargo, cuando se pide determinar el espacio muestral asociado al segundo o tercer experimento aleatorio, la respuesta que suele encontrarse en textos de probabilidad es $S_2 = \{SI, NO\}$ y $S_3 = \{1, 0\}$ respectivamente. Entonces en el segundo experimento aleatorio, S_2 es el espacio muestral ‘adoptado’ mientras que el espacio muestral ‘original’ es S_1 ; y en el caso del tercer experimento aleatorio, la situación es similar, con la diferencia de que el espacio muestral ‘adoptado’ S_3 , es un conjunto numérico.

relación funcional entre el espacio muestral y un conjunto, pero dado que éste no es numérico no se consideran variables aleatorias. Estas variables se han llamado en el proyecto, variables ‘seudo aleatorias’.

La falta de distinción entre el espacio muestral y los conjuntos de valores de las variables aleatorias que se presenta en los libros de texto, es explicada por Ruiz (2006) para los experimentos aleatorios cuyos resultados son numéricos, quien señala que en esos casos “las variables aleatorias están ya implícitas en los puntos muestrales”, es decir, los valores de una variable aleatoria hacen parte del espacio muestral, por ejemplo, si el experimento aleatorio consiste en observar el tiempo de espera a un autobús. En esta situación y como se vio en el ejemplo del primer experimento aleatorio expuesto antes, no hay confusión, ya que el espacio muestral y el conjunto de valores de la variable aleatoria son el mismo. Empero, en los libros de texto es usual que, independientemente de si los resultados del experimento aleatorio son numéricos o no, el espacio muestral indicado sea en realidad el espacio muestral que se ha denominado ‘adoptado’. Por ejemplo, al lanzar tres monedas al aire el número de caras constituye una variable aleatoria, pero se encuentra que los valores de ésta se consideran como el espacio muestral $S = \{0, 1, 2, 3\}$, cuando en realidad el espacio muestral ‘original’ es $S = \{CCC, SSS, CCS, CSS, SCC, SSC, CSC, SCS\}$. Esto sucede igualmente en experimentos aleatorios en los cuales hay variables que no se consideran como variables aleatorias por no ser numéricas, es decir, en el caso de las que se han llamado aquí variables pseudo aleatorias. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado de seis caras para determinar si el número que sale es par o impar, estos valores comúnmente se toman como el espacio muestral $S_4 = \{\text{par}, \text{impar}\}$, que en realidad es el espacio muestral ‘adoptado’ pues el espacio muestral ‘original’ es $S_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. En suma, es frecuente encontrar en los libros de texto, que la pregunta central de la situación que se quiere responder, sea el factor que determina el espacio muestral (ver Wisniewski y Bali, 1998, p. 41), y en consecuencia la identificación del espacio muestral dependa de aquélla. Algunos autores sustentan esta selección a conveniencia del espacio muestral, cuando argumentan que el espacio muestral apropiado “depende del problema que se tenga en mano” (Freund y Walpole, 1990, p. 29).

Siguiendo el análisis en esta dirección, es fácil percibir que en ocasiones el proceso de cálculo de las probabilidades ayuda a ocultar la importancia de distinguir entre espacio muestral, el que se ha llamado ‘original’, y el conjunto de valores de una variable aleatoria, el denominado espacio muestral ‘adoptado’, pues la misma probabilidad puede obtenerse a partir de cualquiera de los dos conjuntos, y por lo tanto es suficiente aludir a uno, generalmente el espacio muestral ‘adoptado’, sin necesidad de indicar el otro. Un caso típico es el anterior ejemplo del lanzamiento de un dado para determinar si sale un número par o impar, donde partiendo de cualquiera de los dos espacios muestrales, ‘original’, S_5 , o ‘adoptado’, S_4 , la probabilidad de que el número que sale sea par o impar es $1/2$ pues hay tres caras con números pares y tres caras con números impares. Se encuentra así que la falta de referencia al espacio muestral ‘original’ de los libros de texto está relacionada con el tipo de situaciones que se abordan, en las cuales es común que la probabilidad de un evento se pueda calcular con base en el espacio muestral

‘adoptado’ bien sea por conteo o mediante el uso de una fórmula preestablecida y conocida. Esto implica que en las situaciones que se presentan con frecuencia en los libros de texto y en la práctica educativa, en donde es razonable asumir la condición de equiprobabilidad para espacios muestrales ‘originales’ finitos, éstos no se consideren a la hora del cálculo de las probabilidades y por el contrario, se enfatice la relevancia de distinguir las situaciones donde el espacio muestral es equiprobable y donde no lo es, claro aludiendo tácitamente unas veces al espacio muestral ‘original’ y otras al espacio muestral ‘adoptado’.

Se ve entonces la conveniencia de trabajar situaciones que motiven determinar el espacio muestral ‘original’ para el cálculo de probabilidades. Por ejemplo, el experimento aleatorio que ocurre al girar una ruleta de siete dígitos, del 1 a 7, donde el espacio muestral ‘original’ $S_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ es equiprobable, mientras que el espacio muestral ‘adoptado’ $S_7 = \{\text{PAR}, \text{IMPAR}\}$ no es equiprobable, dado que hay tres números pares y cuatro números impares. Aquí entonces calcular la probabilidad de que el número que sale sea impar, no puede hacerse a partir del espacio muestral ‘adoptado’, sino que es necesario recurrir al espacio muestral ‘original’. Otro ejemplo, enmarcado en escenarios de experimentos binomiales, que también podría abordarse desde el espacio muestral finito ‘original’ equiprobable para el cálculo de probabilidades y que regularmente es tratado en libros de texto solo desde el modelo probabilístico, es el siguiente.

Experimento aleatorio 4. Un estudiante contesta al azar n preguntas de un examen, y se anota la opción que elige como respuesta. Cada pregunta tiene k opciones de respuesta, pero solo una opción es la respuesta correcta.

Para empezar, suponga que $n = 2$ y $k = 2$. Esto significa que se trata de un examen de dos preguntas cada una de las cuales solo tiene dos opciones de respuesta A o B. Al considerar este experimento binomial, el hecho de $n = 2$ indica que el experimento se repite dos veces, y es claro entonces para los estudiantes que la variable aleatoria asociada tomaría los valores $X = 0, 1, 2$, la cual corresponde al número de aciertos del estudiante al contestar el examen de dos preguntas. Las probabilidades calculadas a través de las fórmulas del modelo binomial serían $\Pr(X=0) = 1/4$, $\Pr(X=1) = 1/2$ y $\Pr(X=2) = 1/4$. Es usual que también en la enseñanza, se aluda a un diagrama de árbol que ilustre los puntos muestrales o eventos simples que se originan en cada rama, y que permiten el cálculo de las probabilidades fundamentado en la probabilidad de éxito de la prueba de Bernoulli, en este caso $1/2$, igual a la probabilidad del fracaso; en este diagrama de árbol se muestra entonces el espacio muestral denominado ‘adoptado’, sin que sea expresado con notación de conjunto.

Las preguntas relativas a este experimento se pueden trabajar con base en el espacio muestral ‘adoptado’ $S_A = \{EE, EF, FE, FF\}$ asociado a los posibles éxitos (E) y fracasos (F), el cual es equiprobable y así calcular las probabilidades $\Pr(X=0) = \Pr(\{FF\}) = 1/4$, $\Pr(X=1) = \Pr(\{EF, FE\}) =$

$1/4 + 1/4 = 1/2$ y $\Pr(X=2) = \Pr(\{EE\}) = 1/4$. También tales preguntas se podrían abordar a partir del espacio muestral ‘original’, construido a partir de la siguiente tabla:

Pregunta	Opciones de respuesta	
1	A	B
2	A	B

Todas las posibles respuestas del estudiante conforman el espacio muestral ‘original’ $S_B = \{AA, AB, BA, BB\}$ que también es equiprobable, de manera que si por ejemplo la respuesta correcta es el evento $\{BA\}$, entonces $\Pr(\{BA\}) = 1/4$, y lo mismo vale para el resto de puntos muestrales; además, nótese que se puede establecer una correspondencia uno a uno entre cada elemento del espacio muestral original y un elemento del espacio muestral adoptado. Se concluye entonces que los dos espacios muestrales, el ‘adoptado’ y el ‘original’ S , son equivalentes y equiprobables.

Cuando $n = 2$ y $k = 3$, la variable aleatoria asociada toma los mismos valores, $X = 0, 1, 2$. Empero, dado que ahora hay tres posibles respuestas para cada pregunta, la probabilidad de éxito de la prueba de Bernoulli es entonces $1/3$ y la probabilidad del fracaso es $2/3$; al aplicar el modelo Binomial se obtienen las probabilidades $\Pr(X=0) = 4/9$, $\Pr(X=1) = 4/9$ y $\Pr(X=2) = 1/9$. Por otro lado, es fácil ver que el espacio muestral ‘adoptado’ sigue siendo el mismo que el del caso anterior $S_A = \{EE, EF, FE, FF\}$; no obstante es posible notar que éste no es equiprobable, pues por ejemplo, $\Pr(\{EE\}) = 1/3 * 1/3 = 1/9$ y $\Pr(\{EF\}) = 1/3 * 2/3 = 2/9$. Para buscar el espacio muestral ‘original’ se puede argumentar de manera similar al caso anterior:

Pregunta	Opciones de respuesta		
1	A	B	C
2	A	B	C

Entonces las posibles respuestas del estudiante, configuran el espacio muestral ‘original’ $S = \{AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC\}$, para el cual es razonable asumir el supuesto de equiprobabilidad y además aclara, sin necesidad de recurrir a cálculos basados en el modelo Binomial, las asignaciones de probabilidad; por ejemplo, si la respuesta correcta es BA, entonces $\Pr(X=0) = \Pr(\{AB, AC, CB, CC\}) = 4/9$, $\Pr(X=1) = \Pr(\{AA, BB, CA, BC\}) = 4/9$ y $\Pr(X=2) = \Pr(\{AB\}) = 1/9$.

Supongamos ahora que $n = 5$ y $k = 3$. En estas condiciones el proceso de responder al azar una pregunta del examen se identifica con un experimento aleatorio Binomial de cinco ensayos, en el que la probabilidad de acertar o tener éxito es $1/3$ y la probabilidad de no acertar o fracasar es $2/3$ en cada

prueba de Bernoulli. Al calcular las probabilidades para estos valores utilizando el modelo Binomial resulta la Tabla 1.

Tabla 1. Modelo Binomial para el caso $n = 5$ y $k = 3$

Cantidad de Aciertos	Eventos $X=x$	$P(X=x)$	$P(X=x)$
0	$X=0$	$3^2/243$	0.1316872427
1	$X=1$	$8^0/243$	0.3292181069
2	$X=2$	$8^0/243$	0.3292181069
3	$X=3$	$4^0/243$	0.1646090534
4	$X=4$	$1^0/243$	0.0411522633
5	$X=5$	$1/243$	0.0041152263

Se ve que el espacio muestral ‘adoptado’, en este caso compuesto por 32 puntos muestrales correspondientes a arreglos de las posibilidades de acertar (E) o no acertar (F) a las 5 preguntas, $S_A = \{EEEEEE, EEEEF, EEEFE, EEFEE, EFEEE, FEEEE, EEEFF, EEFEF, \dots, FFFFF\}$, no satisface las condiciones de equiprobabilidad; esto se comprueba al calcular la probabilidad, por ejemplo, $\Pr(\{EEEEEE\}) = 1/3 * 1/3 * 1/3 * 1/3 * 1/3 = 1/243$ mientras que $\Pr(\{EEEEF\}) = 1/3 * 1/3 * 1/3 * 1/3 * 2/3 = 2/243$. Emplear el espacio muestral ‘adoptado’ podría llevar a asignaciones de probabilidad incorrectas, como por ejemplo calcular la probabilidad de cinco aciertos como $1/32$.

Sin embargo, la construcción del espacio muestral ‘original’ que es equiprobable, permite establecer los tamaños del evento y del mismo espacio muestral, con el fin de calcular la probabilidad de los eventos. Como se ha hecho antes, en este experimento los posibles resultados o puntos muestrales son las diferentes formas como se puede contestar el examen, entonces los puntos muestrales serán arreglos de 5 componentes, en donde cada componente es una de las letras A, B y C.

Pregunta	Opciones de respuesta		
1	A	B	C
2	A	B	C
3	A	B	C
4	A	B	C
5	A	B	C

Ejemplos de estos puntos muestrales serían AACBC y CCBBA. Si suponemos que la solución correcta del examen es 1) A, 2) B, 3) C, 4) B y 5) A, en el punto muestral AACBC hay tres aciertos, y en el punto CCBBA hay un acierto. Como la variable aleatoria es el número de aciertos al contestar el examen, toma valores de 0 a 5 y por lo tanto para cualquier punto muestral la cantidad de aciertos posibles varía entre estos valores. En consecuencia, si se genera una partición del espacio muestral $P_S = \{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, donde A_k es el conjunto que contiene todos los puntos muestrales con k aciertos, y se hacen los respectivos conteos combinatorios de cada caso⁴, se puede construir la Tabla 2, donde se representa esta partición y la cantidad de puntos muestrales en cada subconjunto A_k .

Tabla 2. Probabilidades asociadas a las particiones A_k

Eventos A_k	Cantidad de aciertos (X)	Cantidad de puntos muestrales	Probabilidad de A_k
A_0	0	32	0.1316872427
A_1	1	80	0.3292181069
A_2	2	80	0.3292181069
A_3	3	40	0.1646090534
A_4	4	10	0.0411522633
A_5	5	1	0.0041152263
	TOTAL	243	1.00

Dado que cada posible forma de contestar el examen, o punto muestral, tiene la misma posibilidad (probabilidad) de resultar, el espacio muestral ‘original’ es equiprobable. Por lo tanto, la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los eventos A_k es proporcional a la cantidad de puntos que contiene, y es consonante con los valores mostrados en la Tabla 1.

Cabe anotar que como se ha señalado previamente en la reflexión, las anteriores consideraciones se refieren solamente a las situaciones donde los posibles resultados del experimento aleatorio son finitos, y no necesariamente son válidas para el caso de experimentos aleatorios infinitos.

⁴ Por ejemplo, para tener 0 aciertos las posibilidades de respuesta a cada pregunta son 2, por lo tanto habría $2^5 = 32$ posibilidades, para A_0 , para tener sólo un acierto, si la respuesta acertada fuera la primera, habría $2^4 = 16$ posibilidades para el resto de preguntas, pero como se puede responder bien a cualquiera de las 5 preguntas, las posibilidades en total para responder bien a una pregunta serían de $16 \times 5 = 80$. Por lo tanto A_1 tiene 80 elementos. Para el resto de casos las argumentaciones son similares.

4. CONCLUSIONES

La discusión en torno al análisis de las dificultades que subyacen a los errores en que incurren los estudiantes, pone de relieve, en primer lugar, la necesidad de trabajar en probabilidad diversas situaciones que se refieran a experimentos aleatorios no sólo relativos a juegos de azar y artículos defectuosos, sino que atiendan a otros fenómenos aleatorios de la vida cotidiana, de manera tal que los estudiantes amplíen el repertorio de situaciones ligadas con la aleatoriedad. Son indispensables también situaciones que sean ricas en información donde los estudiantes puedan reconocer el experimento aleatorio independientemente de otros sucesos que aparezcan en el enunciado, incluso cuando estos sucesos son relevantes para dar solución a las preguntas planteadas. En el caso de este proyecto, dadas las dificultades iniciales de los estudiantes, una estrategia que se consideró para contribuir a la identificación del experimento aleatorio fue dividir el enunciado de la situación de la rifa en dos partes, para así aislar el experimento aleatorio de otra información.

Como se vio, aunque muchas veces los estudiantes son capaces de seleccionar la fórmula o modelo probabilístico pertinente a la situación, por ejemplo el modelo binomial, y pueden usarlo adecuadamente para obtener la probabilidad solicitada, no siempre comprenden por qué la fórmula es así o de dónde proviene; trabajar las situaciones se convierte entonces en un ejercicio de memorización y reemplazo de fórmulas. Así, abordar el cálculo de probabilidades a partir del espacio muestral que se ha denominado 'original', para las situaciones donde el número de posibles resultados es finito y moderado, y donde los puntos muestrales se pueden establecer, no solo facilita la asignación de probabilidades sino contribuye a la comprensión de los estudiantes relativa a dichas probabilidades. Al determinar el espacio muestral 'original', los estudiantes pueden notar el papel del espacio muestral en dicho cálculo, por ser equiprobable y porque es posible comprobar por una lado, si la probabilidad calculada es correcta y por otro lado, entender por qué esos son los números que intervienen en el cálculo.

El foco de la enseñanza en contestar preguntas de probabilidad cuyo cálculo se facilita empleando fórmulas que sintetizan los procesos, y el tratamiento del espacio muestral que con frecuencia evita la alusión y explicitación del espacio muestral 'original', explica así mismo la manera en que se trabaja la variable aleatoria con los estudiantes, sin enfatizar su significado como una relación funcional -cuyo dominio es precisamente el espacio muestral-, sin explicitar las particiones del espacio muestral generadas por las variables aleatorias, y donde la variable aleatoria es simplemente el conjunto de valores del recorrido de la relación funcional. En la confusión de los estudiantes también puede incidir el nombre de 'variable aleatoria' pues tal y como lo señala Goldberg (1974), "Llamar variable aleatoria a una función de valores numéricos definida respecto a un espacio muestral es singularmente

inadecuado [...] las variable aleatorias, ni son variables... ni son aleatorias”; en esta expresión variable se interpreta desde una perspectiva clásica del álgebra, como una colección de distintos valores asociados a una medición. Vale la pena destacar que en los libros de texto cuando se alude a variables aleatorias con nombre propio como la binomial, la hipergeométrica, etc., también se está apuntando básicamente al recorrido de la variable aleatoria o dominio de la relación funcional que constituye la función de distribución de probabilidades.

Explicitar la distinción entre el espacio muestral ‘original’ y los espacios muestrales ‘adoptados’, también ayuda a dotar de significado a la variable aleatoria. En situaciones donde el espacio muestral ‘original’ tiene un tamaño moderado (de no más de 40 elementos, por poner una cota), hacer esta diferencia ilustra la generación de agrupaciones ligadas a la construcción de particiones del espacio muestral, y establece de manera natural la correspondencia entre los subconjuntos de la partición y los valores de la observación puesta en juego, ideas que hacen parte inherente de la comprensión de la variable aleatoria desde su perspectiva funcional. Igualmente el trabajo con la seudo variable aleatoria en la enseñanza contribuye a consolidar la idea de variable aleatoria dado que también involucra también una partición del espacio muestral y una relación funcional entre el espacio muestral ‘original’ y un espacio muestral ‘adoptado’ no numérico.

Sin embargo, es claro que cuando en situaciones como el ejemplo del experimento aleatorio 4 con $n = 5$ y $k = 3$, planteado en la discusión anterior, el espacio muestral ‘original’ es de tamaño no moderado, por lo tanto su consideración puede parecer caprichosa y poco eficiente desde lo didáctico dado que el desarrollo de los procesos de recuento para su establecimiento exige una mayor habilidad combinatoria. Se ve entonces que tiene sentido robustecer la búsqueda del espacio muestral ‘original’ y la distinción explícita con el espacio muestral ‘adoptado’, al iniciar la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad y en especial de la variable aleatoria, de manera que desde el comienzo el estudiante trabaje de manera comprensiva.

De la discusión planteada surgen otras ideas para la enseñanza como la de contemplar posibles modificaciones en el currículo de la licenciatura en matemáticas respecto al tratamiento, secuenciación y énfasis dados al tratar temas particulares de estadística y probabilidad. En el curso de estadística por ejemplo, la idea de ‘población objetivo y población de datos’ se ve como similar en el curso de probabilidad, a la idea de espacio muestral ‘original’ y espacio muestral ‘adoptado’. Así pues, si la población objetivo configura el conjunto de unidades muestrales que determinan un marco de muestreo, una población de datos deviene de la medición de alguna característica y es consonante con la observación adoptada para determinar un valor que se asigna a cada unidad muestral, en el mismo sentido funcional que define a la variable aleatoria o seudo aleatoria. Además, esta similitud conceptual sugiere la posibilidad de considerar tareas para promover el desarrollo de pensamiento combinatorio,

no sólo en escenarios de situaciones de probabilidad dirigidas, por ejemplo, a la asignación de probabilidades en el sentido clásico de Laplace, sino a extenderlas o anticiparlas a escenarios de situaciones de conjuntos de datos en donde se trabaje con la asignación de frecuencias relativas asociadas a poblaciones de datos que requieran de la búsqueda o la concreción de una población objetivo, por medio de recuentos combinatorios.

REFERENCIAS

- Fernández, F. Andrade, L. y Sarmiento, B. (2012). Variación y diseño de experimentos de enseñanza para la educación estadística (reporte de investigación). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional
- Fernández, F., Andrade, L. y Montañez, J. (2011). Hacia una posible aproximación comprensiva de la variable aleatoria. *XIII CIAEM-IACME, Recife: Brasil*
- Freund, J.E. y Walpole, R. (1990). *Estadística Matemática con aplicaciones*. México, D.F.: Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.
- Goldberg, S. (1974). *Cálculo de probabilidades*. Bilbao: Ediciones Urmo S.A.
- Larson, H. (1995). Introducción a la teoría de probabilidades e inferencia estadística.
- Miller, T.K. (1998). The random variable concept in introductory statistics. In L. Pereira- Mendoza (Ed.). *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 1221-1222). Singapore: IASE.
- Montgomery, D. y Runger, G. (2004) Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería. México, D.F.: Limusa Wiley.
- Ortiz, J. (2002) La probabilidad en los libros de texto. (Tesis doctoral). España: Grupo de Educación Estadística de la Universidad de Granada.
- Ruiz, B. (2006). Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria (Tesis de maestría). México: Instituto Politécnico Nacional.
- Ruiz, B., Albert, J. y Batanero, C. (2006). An exploratory study of students' difficulties with random variables. México: ICOTS 7.
- Wisniewski, P. y Bali, G. (1998). *Ejercicios y problemas de Teoría de las probabilidades*. México D.F.: Editorial Trillas.

**SEARCHING THE ‘ORIGINAL’ SAMPLE SPACE:
A NEED FOR PROBABILISTIC EDUCATION**

ABSTRACT

In the successive stages of a research project aimed at the promotion of statistical reasoning concerning the random variable, students show difficulties in the conceptualization of notions such as 'random experiment' and 'sample space', which lead to a extended discussion that reveals the impact of teaching in such difficulties. This article presents such discussion and the way how it evolves in an understanding of the research group, which also suggests ideas for a connected and meaningful learning of the above-mentioned concepts.

Keywords: *probability, random experiment, sample space, random variable.*

**A BUSCA DUM ESPAÇO AMOSTRA ‘ORIGINAL’:
UMA NECESSIDADE PARA O ENSINO**

RESUMO

Nas fases sucessivas dum projeto de pesquisa em fim da promoção do raciocínio estatístico em torno da variável aleatória, se encontram dificuldades dos alunos na conceitualização das noções como ‘experimento aleatório’ e ‘espaço amostra’, que levam uma longa reflexão onde se ressalta a incidência do ensino em tais dificuldades. Este artigo apresenta dita reflexão e a maneira como evolui numa compreensão pelo grupo de pesquisa, o que também sugere idéias para a aprendizagem interconectada e com sentido dos conceitos mencionados.

Palavras chave: *Probabilidade, experimento aleatório, espaço amostra, variável aleatória*

LUISA ANDRADE
Universidad Pedagógica Nacional
landrade@pedagogica.edu.co

Trabajó como profesora investigadora en “una empresa docente” de la Universidad de los Andes, en donde participó en el desarrollo de varios proyectos de investigación y de formación de profesores así como de editora de la revista EMA. Actualmente se desempeña como profesora catedrática en la Universidad Pedagógica Nacional y apoya el desarrollo de proyectos de formación de profesores y de investigación en educación estadística

FELIPE FERNÁNDEZ
Universidad Pedagógica Nacional
ffernandez@pedagogica.edu.co

Desde 2005, se desempeña como profesor de planta de la Universidad Pedagógica Nacional. También trabajó como profesor de planta en la Universidad de los Andes en “una empresa docente” desempeñando cargos como profesor investigador y coordinador de publicaciones. Ha participado en varios proyectos de investigación, de publicaciones y de formación de profesores y desde el 2006, ha liderado varios proyectos de investigación relacionados con educación estadística

BENJAMÍN SARMIENTO
Universidad Pedagógica Nacional
bsarmiento@pedagogica.edu.co

Docente universitario desde 1993. Profesor de planta de la Universidad Pedagógica Nacional desde 2003. También se ha desempeñado como docente en las líneas de Estadística, Geometría, Álgebra y Cálculo de otras universidades de Bogotá, como la Universidad Sergio Arboleda, Escuela de Administración de Negocios EAN, Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito ECI, Universidad Autónoma de Colombia y Universidad Incca de Colombia. Ha participado en varios proyectos de investigación relacionados con temas de Estadística y Tecnología en la enseñanza. Ha asesorado varias tesis de licenciatura en Matemáticas, Especialización en Educación Matemática y Maestría en Educación Matemática, la gran mayoría de ellas relacionadas con el uso de la tecnología como apoyo en la enseñanza de las matemáticas.

ANEXO 1

TALLER VARIABLE ALEATORIA (PRIMERA VERSIÓN)

La rifa

Como parte de sus políticas de motivación laboral el departamento de recursos humanos del centro comercial “Centro Zeta” está organizando la rifa de un viaje a una ciudad europea en la que participen 120 empleados. Para participar, es necesario que el empleado indique cuántos hijos tiene y la ciudad que preferiría visitar (Londres; Roma o Paris). La rifa pretende premiar al empleado, y a su familia (cónyuge e hijos) si es casado, con tiquetes de viaje y gastos de hotel. Los organizadores deben tomar una decisión sobre la compra de los tiquetes, el hospedaje y el destino, ya que si compran más tiquetes y reservas de lo necesario, y la familia del ganador es pequeña, perderán dinero; y viceversa, si la familia del ganador está compuesta por muchas personas y no compran suficientes tiquetes, los organizadores le incumplirán al ganador.

1. Determine y describa en qué consiste el experimento aleatorio de la situación.
2. Piense en el espacio muestral del experimento aleatorio y establezca el tipo de resultados que hacen parte de él.
3. Uno de sus compañeros sugiere que los resultados del experimento son ganar y perder. Otro compañero alega que los resultados son el ganador y todos los perdedores. Un tercero afirma que es un ganador. Compare su respuesta con la del ítem anterior y asuma una posición con respecto a las afirmaciones de sus compañeros. Explique.
4. De acuerdo a la respuesta anterior, precise cuáles y cuántos son los posibles resultados del experimento, es decir, describa el espacio muestral.
5. Identifique las variables con base en las cuales los organizadores deben tomar la decisión.
6. ¿Cómo se imagina que es la matriz o base de datos elaborada para la rifa que contienen la información de los empleados y qué tipo de datos contendría un registro típico de ésta? Especifique los títulos de las columnas de esta matriz.
7. Con base en la matriz anterior indique para cada una de las variables consideradas, cómo se pueden agrupar los diferentes resultados del experimento.
8. Para los organizadores de la rifa es importante determinar la probabilidad de ciertos eventos, dados por las agrupaciones anteriores, antes de tomar la decisión. ¿Cuáles podrían ser las probabilidades que se deberían conocer de antemano?
9. ¿Cómo se pueden calcular estas probabilidades?

ANEXO 2

Taller Espacio muestral

Parte 1. Cálculo de probabilidades

1. Resuelva las siguientes situaciones:
 - a. Se lanza una moneda normal tres veces, calcular la probabilidad de que salgan dos caras.
 - b. Se selecciona una bola de una urna, que contiene 3 bolas rojas, 4 verdes y 2 amarillas, calcular la probabilidad de que salga verde.
2. Compare y discuta sus respuestas con su compañero hasta llegar a un consenso sobre cuáles son las adecuadas; escríbalas.
3. En cada situación determine y describa el experimento aleatorio que se realiza y explique por qué es aleatorio.
4. En cada situación reconstruya el proceso que siguió al calcular las probabilidades pedidas, y escríbalo paso a paso en palabras.

Parte 2. Experimento aleatorio y espacio muestral

1. Note que al calcular las probabilidades tuvo necesidad de tener en cuenta la cantidad total de los posibles resultados del experimento. Queremos ahora que no solo considere cuántos resultados son sino además cuáles son. Identifíquelos y escríbalos.
2. Para cada situación y utilizando una notación apropiada, exprese estos resultados como un conjunto de elementos. ¿Cómo se llama este conjunto en la teoría de probabilidad?
3. Para cada situación, calcule las probabilidades pedidas en el ítem 1, con base en los espacios muestrales encontrados.
4. Compare las respuestas anteriores encontradas en los ítems 1-a y 1-b, y si son diferentes, revise el espacio muestral para verificar si tuvo en cuenta todos los posibles resultados. De ser posible, escriba el espacio muestral de una manera diferente.
5. Con base en el trabajo realizado en los ítems anteriores, identifique cual es el experimento aleatorio y los posibles resultados que conforman el espacio muestral del experimento, en las siguientes situaciones:

Situación 1. Se selecciona al azar, un computador de la sala del B224 (que tiene 25 computadores) para verificar el funcionamiento de su sistema operacional.

Situación 2. De un listado de 8 estudiantes del primer semestre de matemáticas de 2011-1 se eligen al azar 2 estudiantes para ayudar en la organización de la semana del educador matemático.

PROFESORADO DE ESTADÍSTICA EN AMÉRICA LATINA: NECESIDAD DE SU CARACTERIZACIÓN DESDE LA PERSPECTIVA SOCIAL, PEDAGÓGICA Y DISCIPLINAR

JESÚS HUMBERTO CUEVAS ACOSTA

GREIVIN RAMÍREZ ARCE

RESUMEN

En este trabajo se describe de forma general los efectos del movimiento de mejora y cambio educativo en el profesorado de estadística de dos naciones latinoamericanas. Paralelamente se enuncian algunas acciones de impulso a la educación estadística por parte de diversas comunidades de académicos expertos. Finalmente, se hace una propuesta para conducir un estudio sistemático que permita caracterizar al profesorado que enseña esta disciplina del séptimo al duodécimo grado en instituciones educativas del estado de Chihuahua, México y la provincia de Cartago, Costa Rica.

Palabras clave: Educación estadística; perfil del profesorado; reforma educativa; minería de datos

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad hay un consenso internacional acerca de la importancia de la estadística y el análisis de datos como parte integral de la formación de un ciudadano moderno. Por ende, se han creado y aplicado programas para promover el desarrollo de una alfabetización estadística en todos los estratos sociales. Habitualmente se ha reconocido a la institución escolar y al profesorado como ejes indispensables en el logro de este propósito. A la escuela como contexto óptimo y al profesor como mediador en el logro de aprendizajes de calidad. Lo anterior se ha hecho patente en la literatura especializada; algunos trabajos recientes en el campo son los de Hans-Joachim, 2010; Del Pino y Estrella, 2012; Zapata, 2011; Kuntze, Engel, Martignon y Gundlach, 2010; Tishkovskaya y Lancaster, 2010; Francois y Van Bendegem, 2010; Campelos y Moreira, 2012; Meletieu-Mavrotheris y Serradó, 2012; Zieffel, Park, Garfield, delMas y Bjornsdottir, 2012.

Este proceso de alfabetización ha transitado por diversas etapas en su camino para materializarse. Una de ellas constituyó la discusión sobre el estado de la estadística como disciplina científica, donde principalmente se debatió su uso como mera herramienta de apoyo a la investigación y se ponderó el grado de dependencia con la matemática como ente integrador. De igual forma, influyó que en la última década del siglo XX, se generó un movimiento de mejora y cambio educativo que contribuyó para que naciones de los cinco continentes confeccionaran políticas educativas de gran calado o reorientaran las ya existentes. Producto de lo anterior se han formulado e implantado reformas en las

que mayormente se ha impulsado la educación científica donde la enseñanza de la estadística comenzó a formar parte de manera más activa en los currículos escolares, especialmente en los niveles educativos iniciales.

En el caso de América Latina, este *movimiento* ha tenido gran efecto y presencia en las nuevas reformas educativas implantadas durante la última década en naciones como Argentina, Brasil, Costa Rica, Chile, México y Perú, donde se ha hecho énfasis en el mejoramiento de la calidad en los aprendizajes y en el logro de la equidad en el acceso al conocimiento a través de la instrucción escolar. Algunas de las diferencias más importantes entre las nuevas reformas y las anteriores son los mecanismos contemplados para evaluar dichos aprendizajes en los estudiantes y en el grado de equidad respecto del acceso a la educación. Así, el reconocimiento a la importancia de incorporar tópicos estadísticos en el currículo se ha reflejado principalmente en las reformas efectuadas en la última década, empero, al igual que en otras latitudes, también han enfrentado obstáculos en su implementación y monitoreo.

Es importante señalar que el gremio docente de las naciones anteriormente enunciadas ha mostrado signos de preocupación en relación a estas reformas. Entre los argumentos centrales han aducido que: (1) son procesos de elaboración inconsultos a todos los entes debido a la participación casi exclusiva de las élites académico-políticas, (2) existe un notorio desconocimiento de la realidad y problemática educativa en cada nación particular, (3) hay una propensión a seguir lineamientos y estándares educativos propuestos por organismos multilaterales con orientación eminentemente empresarial, económica y financiera, (4) subsiste una alarmante confusión entre procesos de medición y evaluación de los aprendizajes, y (5) están preocupados porque los reformadores visualizan al profesorado como parte del problema y no como medio de solución para el mejoramiento de la educación.

En virtud de las características, el alcance y el posible impacto de esta problemática, se considera pertinente efectuar un análisis sobre los aspectos relacionados con la incorporación de tópicos estocásticos en los planes y programas de estudio en niveles educativos iniciales de dos naciones latinoamericanas que consideran la educación estadística como parte esencial del currículo escolar. Especialmente interesa examinar el papel del profesorado de estadística en las nuevas reformas educativas implantadas recientemente. Por lo anterior, en los apartados siguientes se intenta valorar los posibles efectos del *movimiento de mejora y cambio educativo* en el gremio docente de este campo del saber. Paralelamente se hace una propuesta para efectuar un estudio sistemático y en modalidad comparada que permita caracterizar al profesorado de estadística desde la perspectiva social, pedagógica y disciplinar.

2. MOVIMIENTO SOBRE EL CAMBIO EDUCATIVO Y SU RELACIÓN CON LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA

Hoy en día nos encontramos en tiempos de cambios notables en el ámbito internacional. Destacan las transformaciones en los mecanismos de interacción entre diversas áreas de interés para la sociedad como la economía, las finanzas, los vínculos laborales, la comunicación, las relaciones humanas y la educación. En el caso específico de la educación, a partir de la década final del siglo XX se ha promovido la realización de reformas profundas, especialmente se ha intensificado la promoción de *movimientos de mejora y cambio educativo* en el plano internacional, principalmente instrumentados desde el marco discursivo y normativo de organismos multilaterales como el Banco Mundial (BM), el Fondo Monetario Internacional (FMI), la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL), el Banco Interamericano de Desarrollo, entre otros. Estos organismos tienen una larga tradición en el fomento de políticas de apertura financiera, comercial y de libre tránsito de productos y servicios de bien común en el que incluyen la educación en todos los niveles.

Debido a que esta promoción se inscribe en el contexto internacional, ha resultado difícil obtener un consenso respecto a la orientación que deben tener las nuevas políticas educativas. Así, se han identificado al menos dos grandes comunidades de académicos expertos de reconocido prestigio con posiciones encontradas respecto a los fines de la educación. Ambas tienen integrantes de larga, exitosa y respetada trayectoria académica en su campo de estudio.

Una de estas comunidades ha pugnado durante años por el establecimiento de estándares educativos de alcance internacional como mecanismo de apoyo para el logro de metas homogéneas entre las naciones. Particularmente centran su argumento en dos aspectos fundamentales, (1) la necesidad de asegurar y evaluar de forma continua la calidad de los aprendizajes, y (2) lograr equidad en el acceso al conocimiento a través de la institución escolar. Los integrantes de esta comunidad cuestionan las reformas implantadas en las últimas décadas del siglo XX y hacen hincapié en que el problema esencial en la gestión de los sistemas educativos estriba en la ausencia de estándares de calidad respecto de los resultados que obtienen los estudiantes en términos de aprendizaje. También hacen alusión al fracaso de dichas reformas por el incumplimiento de las metas de calidad y equidad originalmente planteadas (Ferrer, 2008). Estas colectividades plantean varias premisas respecto de la confección de políticas educativas –y sus correspondientes reformas–, entre las más notables se encuentran la existencia de una correlación positiva entre productividad educativa y competitividad económica, además de asumir que el desarrollo de capital humano, productivo y eficiente es una de las metas fundamentales a lograr.

Por otra parte, existe otra comunidad de expertos con similitud en el perfil académico de sus integrantes, pero con posturas diametralmente opuestas respecto de la orientación que deben tener las nuevas políticas y reformas. Sus integrantes sugieren que los contextos sociales, económicos y la tradición cultural de cada nación hacen difícil el establecimiento de esquemas estandarizados, por lo que cualquier movimiento de reforma debe contemplar las particularidades de cada entorno, hacerse patentes en las acciones y no solo en los discursos. Indican que el interés por la mejora y cambio educativo impulsado por los organismos multilaterales se debe al fracaso evidente del modelo económico imperante en las últimas décadas. Según Ralston (2005), el siglo XXI enmascara una vuelta al determinismo económico del siglo XIX. En el ámbito educativo, Hargreaves y Fink (2006) denuncian que diversas naciones han adoptado políticas del racionalismo económico con el propósito de mejorar el desempeño en la escuela, y que por esa razón desde el inicio del siglo XXI surgió un interés extraordinario por medir el grado de competencia académica mediante la aplicación de pruebas estandarizadas. Para esta comunidad, el cambio educativo está más allá del establecimiento de estándares y proponen rescatar el papel del profesorado como parte cardinal en el éxito de cualquier reforma. (Hargreaves, Earl, Moore y Manning, 2001)

Es necesario decir que los conceptos de mejora y cambio educativo pueden resultar polisémicos para un amplio sector de docentes, lo que implica que estas colectividades tengan planteamientos educativos opuestos. Aun así, se considera posible elaborar propuestas alternas que integren postulados representativos de las comunidades anteriormente mencionadas, aunque deben señalarse los peligros inherentes, por lo que se sugiere tener presentes los siguientes aspectos:

- a. El establecimiento de estándares en la educación resulta necesario y atractivo para intentar medir y evaluar la calidad de los aprendizajes y el logro de metas en relación al desarrollo humano, productivo y eficiente. Sin embargo, debe tenerse presente que el estándar es un ideal que no todos alcanzan, por lo que surge una interrogante que obliga a una pronta y estricta respuesta, a saber, ¿Cómo puede evitarse que el establecimiento de estándares en educación se convierta en un mecanismo de discriminación social?
- b. Debido a la problemática económica y social que impera en el plano internacional, difícilmente se puede entender que el fin último de la educación sea únicamente la formación de personas productivas y eficientes en el campo laboral. En este punto cabe preguntarse ¿En qué medida la educación para la vida en armonía debe ser el eje rector? y por tanto, ¿Hasta qué punto la productividad y eficiencia son una consecuencia natural de lo anterior?
- c. Es indispensable que todo proyecto de mejora contemple la articulación de todos los participantes en el proceso educativo –estudiantes, profesores, investigadores,

administradores y padres de familia– en comunidades de aprendizaje colaborativo. No obstante, surge la siguiente interrogante ¿De qué manera puede asegurarse que estas comunidades no elaborarán propuestas “vacías” en las que se haga un uso “abusivo” del lenguaje y del discurso?

En tanto, el movimiento de mejora y cambio educativo es una realidad en el plano internacional. Las reformas recientes en diferentes naciones de los cinco continentes así lo demuestran. Entre sus efectos más representativos se pueden mencionar la polarización en las posturas de distintas comunidades de expertos respecto de su orientación, implantación, monitoreo y evaluación.

Debe señalarse que en estas nuevas reformas se le otorga mucha importancia a la estadística y el análisis de datos como parte integral en la formación de los educandos, por lo que diversas colectividades han emprendido acciones para analizar el proceso de incorporación de tópicos estocásticos en los planes y programas de estudio. Por lo anterior, se hace necesario describir de forma breve algunas actividades representativas de impulso a la educación en esta disciplina.

2.1. ACTIVIDADES DE IMPULSO A LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA

Las actividades efectuadas para incorporar la estadística y el análisis de datos en sus planes y programas de estudio están ampliamente documentadas, algunos trabajos representativos al respecto son los de Burrill y Camden (2005), Estrada (2002), Kucukbeyaz, Batto y Rosa (2006), y, Aravena, Del Pino e Iglesias (2001).

Es importante señalar que este esfuerzo se vio materializado por el impulso de la comunidad académica internacional a la realización de investigaciones en las áreas de la educación estadística y en la creación de espacios académicos para divulgar, examinar y debatir propuestas educativas y resultados de investigación en el campo. De acuerdo con Cuevas, Hernández, Ruíz, Albert y Pinto (2012),

“Originalmente se abrieron espacios dentro de reuniones con tradición ya consolidada, como en el *ISI Word Statistics Congress*, que organiza el *International Statistical Institute* (ISI), aunque gradualmente creció la necesidad de establecer espacios propios. Así, a partir del ISI, se formó la *International Association for Statistical Education* (IASE), que se encargaría de establecer espacios específicos para la educación estadística. Actualmente la IASE no sólo cuenta con un congreso propio, la *Conferencia Internacional sobre la Enseñanza de la Estadística* (ICOTS, por sus siglas en inglés), sino también con una revista internacional (*Statistics Education Research Journal*) y con una página de internet en donde se interacciona y difunden trabajos sobre el área. La IASE también se encarga de la organización del espacio de educación

estadística dentro del congreso bianual del ISI y de diversas reuniones, proyectos y concursos enfocados hacia la difusión y reflexión sobre la cultura estadística (IASE, 2012). Asimismo, se ha incrementado el apoyo a la educación en estas disciplinas por parte de organismos colegiados legalmente constituidos, de larga tradición y reconocido prestigio. Uno de los más representativos es la *American Statistical Association* (ASA) que está también vinculada con la IASE y el ISI para estos fines.” (Cuevas, et al, 2012: 139)

De igual forma, el interés por la educación estadística trascendió fronteras disciplinares, ya que también se vio reflejado en comunidades epistémicas especializadas en didáctica de la matemática. Organismos como el ICMI (*International Committee on Mathematical Instruction*) crearon espacios de trabajo académico a grupos interesados en la investigación sobre la didáctica de la probabilidad y estadística en cada uno de sus eventos (ICMI, 2012). Esta influencia internacional tuvo eco en el contexto latinoamericano, donde se conformaron espacios de trabajo análogos. Un ejemplo de lo anterior es el notable esfuerzo de la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica por crear un foro académico de este tipo con su *Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos* (EDEPA). El objetivo central de este evento es el de constituir un espacio de crítica, debate y comunicación sobre el estado actual y desarrollo reciente de la investigación en la didáctica disciplinar a nivel internacional. Se realiza de forma bianual y su inicio se remonta al año 2009. En todas sus ediciones ha logrado reunir a estudiantes, profesores, investigadores educativos, matemáticos, estadísticos y administradores educativos de varias naciones iberoamericanas que han interactuado de manera respetuosa, abierta y rigurosa sobre la situación actual que impera en la didáctica de esta disciplina. El *Encuentro Internacional de la Enseñanza en la Probabilidad y la Estadística* (EIEPE) es otro foro académico de reciente creación impulsado por la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. El propósito de este encuentro es servir como espacio para que académicos compartan experiencias de trabajo y analicen la problemática actual en la enseñanza de estas disciplinas y someter a la crítica de expertos diversas propuestas didácticas. Otro espacio de reciente creación son las *Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* que son organizadas por el Grupo de Investigación en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) y el Grupo de Educación Estadística de la Universidad de Granada. Entre las razones más significativas de la fundación de este evento académico destacan el enorme protagonismo de estos campos del saber, su inclusión en los nuevos planes curriculares y las nuevas metodologías propuestas para su tratamiento, especialmente en contextos no universitarios. (JVDEPC, 2013)

En suma, estos espacios académicos surgieron a partir del interés de las comunidades de profesores de estadística por mejorar la enseñanza de su área, por lo que están específicamente orientados a la educación en este campo en todos los niveles educativos.

La incorporación en el currículo de tópicos relacionados con la estadística y el análisis de datos ha generado reacciones variadas entre los principales actores del proceso educativo debido a que el desempeño estudiantil no ha sido el esperado. Al parecer los estudiantes no aprenden ni desarrollan las habilidades mínimas para desempeñarse en forma adecuada en sus tareas académicas y tienen problemas para extrapolar lo aprendido a situaciones distintas; pareciera que la estadística es considerada una disciplina “árida” y “difícil” para ellos y sus maestros. Investigadores destacados han examinado esta problemática desde distintos enfoques, especialmente desde la perspectiva pedagógica (v. gr Gal, Rothschild & Wagner, 1989; Gal, 2002, 2003; Gal & Garfield, 1997; Gal, & Ginsburg; 1994; Garfield, 1994, 1995, 1999, 2002, 2003; Garfield & Ben-Zvi, 2005; Garfield, del Mas & Chance, 2007), prestando menor atención al aspecto social.

En el contexto latinoamericano, naciones como Argentina, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica y México han reconocido la importancia de incorporar tópicos estocásticos en su currículo escolar. Este reconocimiento se ha reflejado en las nuevas reformas educativas efectuadas en la última década, empero, al igual que en otras latitudes, también han enfrentado obstáculos en su implementación y monitoreo. Sobresalen los casos de Costa Rica y México por la magnitud de las reformas realizadas y el interés por desarrollar programas de capacitación, actualización y formación del profesorado que las enseña, especialmente en educación primaria y secundaria.

2.2. EL CASO DE COSTA RICA

En ambas naciones se han modificado los currículos escolares en la última década, consecuentemente se han creado espacios de interacción entre académicos y estudiantes. En el caso de Costa Rica, el Ministerio de Educación Pública (MEP) realizó ajustes en su currículo en marzo de 2012. En el área de matemática, el nuevo programa de estudios se organizó en cinco áreas claramente diferenciadas, a saber, *números; geometría; medidas, relaciones y álgebra*; además de *probabilidad y estadística* (MEP, 2012). Destaca el espacio asignado a los tópicos estocásticos en todos los ciclos de estudio, desde el primero hasta el diversificado –del primero al duodécimo grado–, lo que demuestra el interés de este país por alfabetizar a su población en estos campos, así, en los nuevos programas se hace patente lo siguiente:

“*Estadística y Probabilidad* adquiere un relieve mucho mayor en este plan de estudios que en los anteriores. Antes, al desvanecerse en el Ciclo diversificado y al no incluirse probabilidad aplicada o estadística, quedando por fuera de las pruebas del Bachillerato,

se quitaban poderosos medios para la comprensión y organización de la información. A partir de los años Noventa se ha generalizado su uso y potenciado su lugar en los programas de los distintos países por su notable presencia en la vida cotidiana... La adición de más tópicos de probabilidad ... busca formar en el pensamiento aleatorio y en el desarrollo de capacidades para abordar el azar, lo impredecible, la incertidumbre, características que participan en el conocimiento y en la vida de múltiples maneras... El lugar relevante que se da a esta área obedece al papel que juega la información y el manejo del azar en la sociedad moderna. En el siglo XXI se requiere de personas capaces de comprender, interpretar y usar la información para entender la realidad, resolver distintos problemas y tomar decisiones inteligentes. Los temas de la Estadística y la Probabilidad son cada día un requisito para poder comprender lo que pasa en el mundo y poder actuar... Un egresado de la educación Secundaria costarricense debe ser capaz de comparar y juzgar en la vida cotidiana la validez de argumentos basados en datos, identificar los errores y distorsiones comunes en los medios de información, descubrir la racionalidad de afirmaciones sobre la probabilidad de eventos, así como manejar las ideas básicas de muestreo y realizar estadísticas aplicadas simples. Al igual que la lectura y escritura, el manejo de la Aritmética, la Geometría, el Álgebra y otras formas de matemáticas han sido parte de la alfabetización de la ciudadanía durante épocas: la Estadística y la Probabilidad deben concebirse como parte de la alfabetización ciudadana en el actual escenario histórico.” (MEP, 2012:55)

2.3. EL CASO DE MÉXICO

De manera similar, en México se han efectuado adecuaciones al currículo escolar en los niveles educativos iniciales. La más reciente –Reforma Integral de la Educación Básica (RIEB)- tuvo lugar en 2011 y estuvo a cargo de la Dirección General de Desarrollo Curricular (DGDC) perteneciente a la Secretaría de Educación Pública. (SEP). Este organismo menciona que:

“... la RIEB es una política pública que impulsa la formación integral de todos los alumnos de preescolar, primaria y secundaria con el objetivo de favorecer el desarrollo de competencias para la vida y el logro del perfil de egreso, a partir de aprendizajes esperados y del establecimiento de Estándares Curriculares, de Desempeño Docente y de Gestión” (DGDC, 2011: 17).

También señala que el mapa curricular en educación básica se representa por espacios organizados en cuatro campos de formación: lenguaje y comunicación; pensamiento matemático; exploración y comprensión del mundo natural y social; desarrollo personal y para la convivencia.

En el caso de la matemática, los estándares curriculares están organizados en cuatro rubros: *sentido numérico y pensamiento algebraico; forma, espacio y medida; manejo de información, y, actitud hacia el estudio de las matemáticas*. En el rubro del manejo de información se establecen estándares relacionados con la solución de fenómenos en los que interviene el azar y se exige a los aprendices la obtención y tratamiento estadístico de datos reales.

Puede notarse entonces que ambas naciones están haciendo esfuerzos por alfabetizar en estadística a su población y reconoce a la institución escolar como el entorno adecuado para lograrlo.

3. EL PAPEL DEL PROFESORADO DE ESTADÍSTICA EN LAS REFORMAS EDUCATIVAS

Actualmente existe consenso acerca de la importancia de la incorporación docente en las agendas de política educativa a nivel internacional (Poggi, 2011; citada por Tenti y Steinberg, 2011). Sin embargo, Fullan y Hargreaves (2006) advierten que por nobles, refinadas o esclarecidas que puedan ser las propuestas de cambio y mejora, no servirán de nada si los maestros no las adoptan en el aula y si no las traducen en una práctica docente eficaz. Hoy en día existe necesidad de un cambio fundamental en la enseñanza, en los currículos y en el papel de los liderazgos pedagógicos para todos los niveles del sistema educativo. También es indispensable volver a valorar y apreciar el papel del profesorado como ente integrador en toda propuesta de reforma. Existe una gran experiencia acumulada en los docentes experimentados de larga, fructífera y honesta trayectoria en el ámbito escolar. Pese a ello, al parecer están desaprovechados, no se les consulta ni se toma en cuenta en los proyectos de mejora.

Como se mencionó anteriormente, el gremio docente ha mostrado signos de preocupación al respecto. Observan que el acatamiento irrestricto de las políticas sugeridas por organismos multilaterales quizá conlleve a un deterioro mayor de la escuela pública. No están en contra del establecimiento de estándares educativos en las distintas disciplinas científicas, pero sí cuestionan el proceso que se sigue para su establecimiento porque regularmente no se les consulta su opinión. También consideran que existe un desconocimiento de la realidad que se vive en las aulas, de los problemas cotidianos, de las carencias y necesidades de estudiantes y profesores. De forma paralela, perciben que las dependencias gubernamentales conciben al profesorado como parte central del problema educativo, del declive paulatino en la calidad de los aprendizajes y del “bajo” rendimiento en las pruebas internacionales a las que son sometidos sus estudiantes.

El profesorado que entre sus deberes tiene la enseñanza de la estadística no ha escapado a esta situación. Ha observado la incorporación de temas estadísticos en los programas de estudio en todos los grados escolares, la incorporación de mecanismos novedosos para evaluar los aprendizajes estudiantiles en términos del cumplimiento de estándares, y un nuevo catálogo de recomendaciones

para promover el desarrollo de una cultura estadística en sus aprendices. Luego, al parecer los artífices de los programas de estudio han pasado por alto aspectos esenciales para que los objetivos propuestos se alcancen. Algunos están estrechamente ligados a la formación profesional y pedagógica del profesorado, otros tienen que ver más con cuestiones de tipo social y económico. Entre las omisiones o deficiencias más representativas se encuentran: (1) dificultad para determinar con minuciosidad el perfil profesional del cuerpo docente; (2) desconocen en qué medida los docentes cuentan con el dominio disciplinar exigido por los nuevos estándares; (3) no examinan variables e indicadores relacionados con las condiciones laborales y sus posibles efectos en su desempeño profesional; (4) faltan indagaciones que permitan identificar, describir y comparar los métodos didácticos y de evaluación utilizados en el tratamiento de tópicos estadísticos, y contrastarlos con los planteados en los planes de estudio.

Producto de lo anterior, en Costa Rica y México se ha generado un interés por caracterizar desde distintas perspectivas al profesorado que enseña estadística como parte toral en el proceso de configurar o readaptar los currículos escolares.

4. PERFIL DEL PROFESORADO DE ESTADÍSTICA. PROPUESTA PARA UN ESTUDIO SISTEMÁTICO

Debido a la atención internacional que ha recibido la educación estadística, a su rápida incursión en los currículos escolares de todos los niveles educativos, a los nuevos métodos y tecnologías sugeridas en los programas de trabajo y a los múltiples retos que enfrenta la enseñanza y valoración de su aprendizaje, se considera oportuno realizar un estudio que permita caracterizar de manera integral al profesorado que enseña esta disciplina en ambas naciones. Efectuar lo anterior desde la perspectiva social, disciplinar y pedagógica, coadyuvará a dar respuesta a múltiples interrogantes enmarcadas en distintas facetas.

4.1. PERSPECTIVA SOCIAL

Desde esta perspectiva se pretende indagar: ¿En qué medida existe similitud entre los atributos sociales de los profesores en ambas naciones?, ¿Cuál es el perfil profesional del profesorado de estadística entre el séptimo y duodécimo grado?, y, ¿Cuáles son las diferencias y similitudes en las condiciones laborales entre los docentes de ambas regiones? Entre los aspectos que se desea conocer y contrastar desde esta perspectiva se encuentran: *edad, sexo, estado civil, posición económica en el seno familiar, antecedentes docentes en la familia de la que proviene, formación profesional e institución que otorgó el título, posgrado cursado e institución que otorgó el grado, tipo de plaza laboral, años de*

servicio, escuelas en la que desempeña sus labores, grados escolares en que enseña, materias que imparte, horas frente a grupo por semana, actividades laborales alternas al ejercicio de la docencia y nivel socioeconómico del estudiantado en la escuela donde trabaja.

4.2. PERSPECTIVA DISCIPLINAR

En lo referente a esta perspectiva, se necesita dar respuesta a las siguientes interrogantes: ¿Cuál es el grado de dominio en las disciplinas de probabilidad y estadística por parte de profesores Chihuahuenses y Cartagineses?, ¿Qué características comparten los profesores respecto de su dominio en estas disciplinas?, ¿En qué medida dicho dominio es suficiente para cumplir con los estándares curriculares exigidos en las nuevas reformas educativas de ambas regiones?, ¿Cuáles son los textos y materiales de estudio de mayor recomendación y uso en la formación académica de los futuros docentes en estas áreas del saber?, y, ¿Cuáles son los textos señalados en los nuevos programas de estudio de matemática o probabilidad y estadística? Se espera que las respuestas a estas cuestiones permitan saber cuál es la situación actual en relación al grado de conocimiento en estas áreas y compararlo con el estándar exigido. Interesa además examinar el grado de articulación que tienen los textos recomendados en su proceso de formación y los textos aconsejados para su uso en la enseñanza. En el Anexo 1 se muestra la primera parte de un instrumento diseñado para obtener información del grado de dominio en probabilidad y estadística. Los contenidos a evaluar y el grado de dificultad se establecieron en función de los nuevos estándares integrados en los nuevos planes de estudio en Costa Rica y México.

4.3. PERSPECTIVA PEDAGÓGICA

En esta faceta se considera necesario conocer: ¿Qué diferencias y similitudes existen entre los métodos didácticos que utilizan los profesores de ambas regiones para el tratamiento de tópicos estocásticos en el aula?, ¿Cómo evalúan los aprendizajes?, ¿En qué grado se han aceptado los nuevos programas de estudio por parte del gremio docente?, y ¿Cuál es la valoración que ha realizado dicho gremio respecto a los programas de capacitación recibida al momento para la enseñanza de éstos tópicos?

En suma, el propósito es efectuar un estudio para caracterizar al profesorado que enseña estadística entre el séptimo y el duodécimo grado. Se propone indagar aspectos sociales, pedagógicos y disciplinares de profesores adscritos a instituciones de educación básica de dos regiones específicas, la Provincia de Cartago, Costa Rica y la región centro sur del Estado de Chihuahua, México.

Realizar lo anterior, coadyuvará para que las autoridades educativas conozcan el perfil de los maestros que integran el subsistema educativo en el que se han aplicado las nuevas reformas y les permitirá diseñar iniciativas integrales de desarrollo docente, es decir, tendrán la posibilidad de estructurar programas de actualización, capacitación y formación profesional y pedagógica congruentes con las necesidades educativas internacionales y de sus naciones en particular. Por otra parte, contrastar los datos de docentes chihuahuenses y cartagineses proporcionará una imagen más clara de los problemas que comparten, sus diferencias y similitudes, además de la posibilidad de compartir experiencias. Los profesores se podrán beneficiar porque tendrán un panorama general de sus fortalezas y las áreas en que requieren mejorar. Los estudiantes pueden favorecerse porque se espera que la información obtenida de este estudio permita a profesores y administradores afinar programas de estudio que demandan el desarrollo de habilidades de pensamiento estadístico y de solución de problemas reales o ficticios, por lo que su experiencia de aprendizaje podrá ser más fructífera.

4.4. ORIENTACIÓN DEL ESTUDIO

Las características de la problemática a examinar, las interrogantes planteadas y el objetivo propuesto demandan un análisis de los aspectos sociológicos, disciplinares y pedagógicos en relación al profesorado. Es necesario efectuar una revisión exhaustiva de fuentes de información altamente representativas en los campos de *educación estadística y su evolución en el currículo escolar, sociología del profesorado, formación del profesorado y educación comparada*.

Educación estadística y su evolución en el currículo escolar. En esta sección es oportuno revisar cual ha sido la evolución de la estadística como disciplina científica, enunciar y describir los estándares educativos en estadística y su implantación en el plano internacional, examinar esta rama del saber como disciplina de estudio y analizar las experiencias en países que la han incorporado en sus currículos en educación inicial, especialmente los casos de México y Costa Rica.

Análisis sociológico del profesorado. En virtud de que la dimensión sociológica regularmente se deja de lado en variados estudios, se requiere examinar estudios representativos en el ámbito internacional.

Formación del profesorado de matemática y estadística. En el campo de la formación, es indispensable revisar *modelos teóricos relacionados con la formación de profesores de matemática* que de alguna manera se han extrapolado al que enseña estadística.

4.5. ALGUNOS APUNTES SOBRE EL MÉTODO DE TRABAJO

Inicialmente, es necesario señalar el problema que se presenta en el campo de la epistemología de la investigación y que consiste en el falso dilema que enfrentan los investigadores, según el cual, tienen que optar por utilizar un enfoque cuantitativo o cualitativo, pero no ambos porque se contraponen. Este falso dilema se presenta con mayor fuerza en el campo de las ciencias sociales y en la educación en particular. Algunos académicos creen que los estudios realizados en estos campos no son confiables porque tienen problemas de validez interna y externa. En este estudio se asume que esta postura es falsa; lo que sí se reconoce es que el investigador necesita entender la parte subjetiva y compleja de los fenómenos que estudia; y que al final, necesita seleccionar o crear la metodología que mejor se acomode a la naturaleza de los fenómenos sociales que requiere examinar.

No obstante, hablar de tópicos relacionados con el entendimiento, objetividad y subjetividad en la investigación implica analizar el modelo de ciencia e investigación en que fue formado el investigador. Hasta finales del siglo XX el enfoque dominante fue el cuantitativo, es en las últimas dos décadas que el enfoque cualitativo ha ganado adeptos en diversas comunidades epistémicas. Tradicionalmente estos enfoques han tenido posiciones encontradas, al grado de emitirse descalificaciones de ambos lados. Muchos argumentos se han esgrimido a favor y en contra, insistiendo que cada método obedecía a una visión diferente del mundo, cada una con sus posturas particulares que las hacían incompatibles entre sí, por lo que debían separarse. Los objetivos de investigación también han formado parte de la discordia entre seguidores de uno y otro enfoque metodológico. Generalmente se aduce que para el cuantitativo el objetivo de toda investigación en educación, al igual que en el mundo físico, es la producción de conocimiento nomotético, leyes y generalizaciones abstractas de verdad duradera, independientemente del contexto. En cambio para el cualitativo, la finalidad no es la predicción y control, sino el entendimiento de los fenómenos y la formación de los que participan en ellos para que su actuación sea más reflexiva, rica y eficaz. Las estrategias de investigación varían también de un método a otro. Mientras que en el enfoque cuantitativo se reconoce como ideal el modelo hipotético – deductivo de razonamiento; en el cualitativo se opta por lo mixto de la lógica, inductivo – deductivo.

Es importante reconocer que los dos métodos son necesarios para resolver problemas. No se puede sostener que un método es mejor que otro al margen de la problemática que se va a estudiar y del marco teórico que justifica su empleo.

Enfoque. Debido a la naturaleza de las interrogantes planteadas y al objetivo del estudio, se considera pertinente la utilización de un método que no puede ser ni cuantitativo ni cualitativo en el sentido estricto de cada término. La naturaleza del objeto bajo análisis demanda el uso de ambos métodos ya que implica examinar situaciones individuales, de grupo y de contexto que exigen técnicas

y procedimientos mixtos, ya que combina técnicas de naturaleza cuantitativa –contar, medir- y de técnicas cualitativas –interpretación a partir de datos recolectados-. Es necesario indicar que este enfoque no es novedoso, pues ya se ha utilizado en infinidad de investigaciones en el campo social.

Diseño propuesto. Para realizar esta indagación, se propone un *Diseño Explicativo Secuencial* (DEXPLIS). Hernández et al (2010) hacen alusión a este diseño de investigación y señalan que una de las ventajas de éste es que tiene etapas claramente diferenciadas. En la siguiente figura se muestra el esquema general del DEXPLIS:

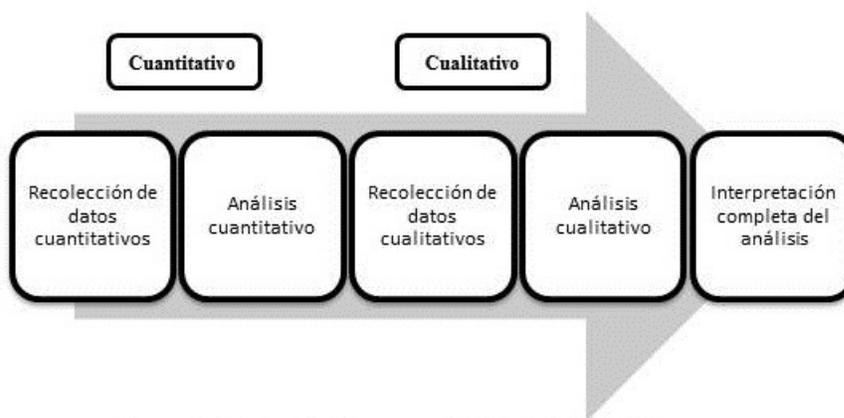


Figura 1. Adaptación del esquema del diseño DEXPLIS

Se propone que en una fase inicial se acopien y analicen datos cuantitativos y los resultados de su análisis sirvan para estructurar y afinar las actividades de una fase posterior en la que se sugiere realizar una recopilación de datos cualitativos. Posteriormente, los hallazgos de ambas fases se examinarán de manera global y se integrarán en un informe final. Es importante indicar que en el estudio se dará prioridad a la fase cuantitativa.

Población bajo estudio. En la indagación se contempla examinar a un grupo de profesores que enseña estadística en instituciones educativas de la región centro sur del Estado de Chihuahua, México y a otro que ejerce la misma actividad en la Provincia de Cartago, Costa Rica. Particularmente los que imparten tópicos de esta disciplina en algún periodo entre el séptimo y duodécimo grado.

Herramientas para el acopio, tratamiento y análisis de la información. Se considera necesario emplear varios instrumentos para recabar información confiable. Entre los más distintivos se encuentran cuestionarios electrónicos y entrevistas en grupos de enfoque. En virtud de la cantidad de variables con las que se proyecta trabajar, se hace necesaria la utilización de métodos provenientes de la ciencia computacional. Específicamente, se propone seguir las fases del proceso llamado *Extracción de Conocimiento en Bases de Datos* (Knowledge Discovery in Databases, KDD). Este proceso utiliza métodos provenientes de varias disciplinas como la *inteligencia artificial*, *aprendizaje automático* e

inteligente, sistemas de bases de datos, cómputo paralelo, matemática y estadística. Según Hernández, Ramírez y Ferri (2008):

“... los sistemas KDD permiten la selección, limpieza, transformación y proyección de los datos; analizar los datos para extraer patrones y modelos adecuados evaluar e interpretar los patrones para convertirlos en conocimiento; consolidar el conocimiento resolviendo posibles conflictos con conocimiento previamente extraído; y hacer el conocimiento disponible para su uso. Esta definición del proceso clarifica la relación entre KDD y la minería de datos: el KDD es el proceso global de descubrir conocimiento útil desde las bases de datos mientras que la minería de datos se refiere a la aplicación de los métodos de aprendizaje y estadísticos para la obtención de patrones y modelos”. (Hernández, et al, 2008: 14)

En la siguiente figura, se muestran cada una de las fases del proceso.

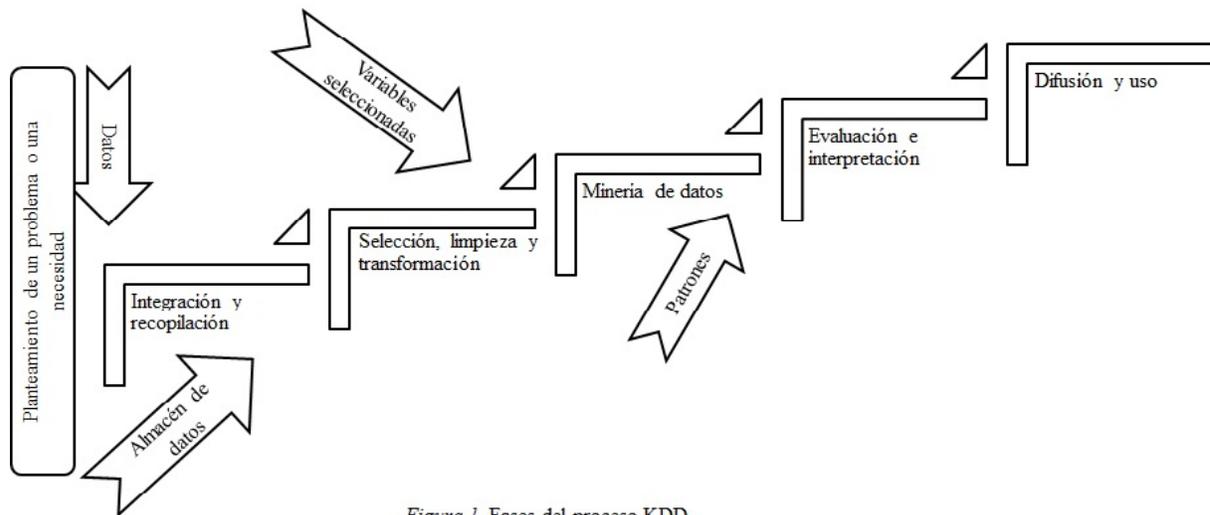


Figura 1. Fases del proceso KDD

Las aplicaciones de la metodología KDD son múltiples. Lo mismo se ha usado en tópicos relacionados con la *inteligencia de negocios* que en ramas de saber cómo *psicología, psiquiatría, sociología, informática, bibliotecología, ciencias biomédicas, ingeniería*. En el caso de la educación hay estudios representativos en varios campos, así, Begueri, Malberti y Klenzi (2012) aplican la fase de minería de datos para medir el índice de satisfacción de profesores con el servicio bibliotecario en una reconocida universidad; De La Red, Acosta, Cutro y Rambo (2010) usan almacenes de datos y aplican algoritmos de minería para investigar el rendimiento académico de estudiantes con el objetivo de obtener su perfil y establecer probabilidades de éxito académico o en su defecto, instrumentar medidas de apoyo para estudiantes con alta probabilidad de fracaso; Durán y Costaguta (2007) usan minería de datos para descubrir estilos de aprendizaje; Sosa, Dima, Urdaneta y Esperón (2011) también emplean herramientas de minería de datos y un sistema experto para detectar factores socioeconómicos y

contextuales que podrían tener efectos en el aprendizaje estudiantil de la matemática. En consonancia con lo anterior, para dar tratamiento cuantitativo a la información se sugiere usar entornos de cómputo especializado en minería de datos como *Weka*, *Rapidminer* o *Knime*, debido a que son de uso libre y proveen suficientes herramientas algorítmicas para efectuar las tareas que el estudio demanda. En la siguiente figura, se muestra un panorama general de la propuesta de trabajo para caracterizar al profesorado de estadística en estas dos regiones latinoamericanas.

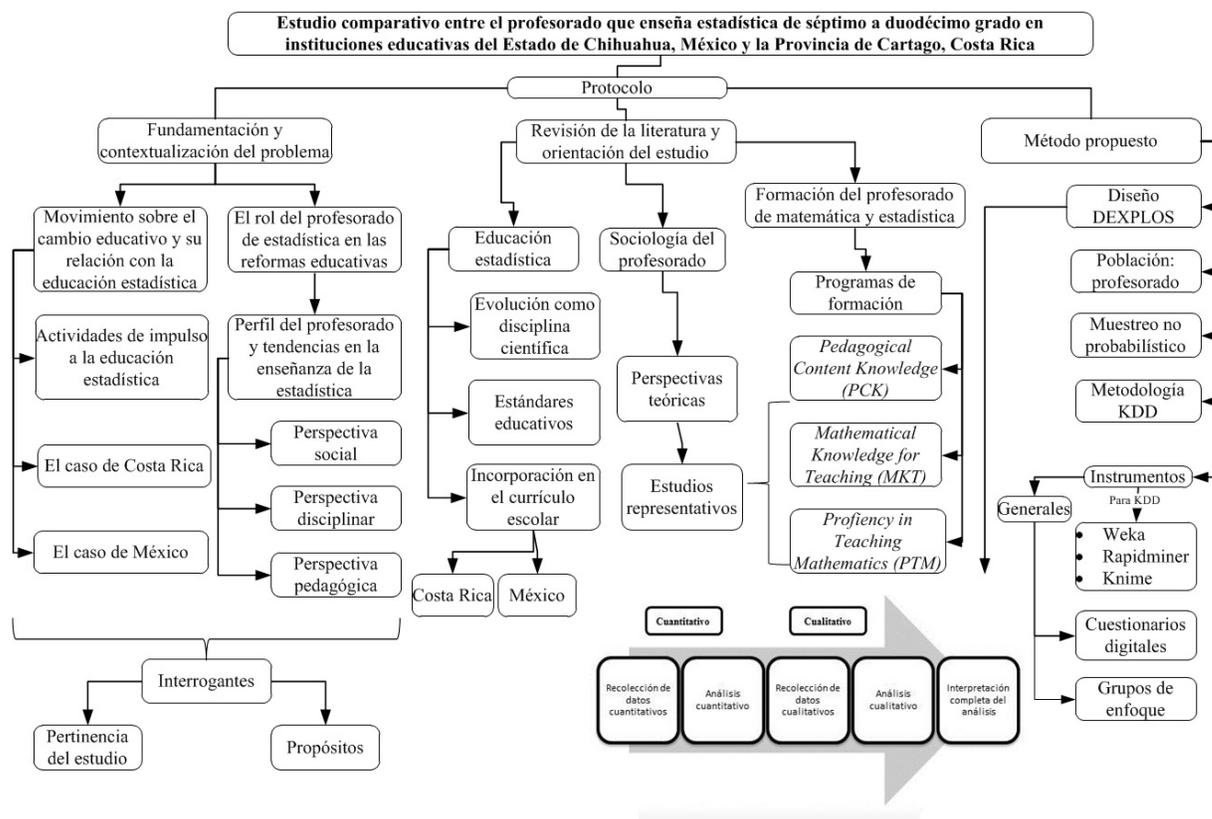


Figura 2. Estructura general de la propuesta

Para su realización, se partió de varias premisas globales claramente diferenciadas. La primera de ellas indica que por mejor intencionada, estructurada y elegante que pueda ser una reforma educativa, ésta no tendrá éxito si los profesores no adoptan las adecuaciones pedagógicas y de contenido para aplicarlas en el aula de clase (Fullan & Hargreaves, 2006). La segunda plantea la pertinencia de volver a valorar y apreciar el papel de los profesores como ente integrador en toda propuesta de reforma, ya que existe una gran experiencia acumulada por la extensa, fructífera y honesta trayectoria en el ámbito escolar de muchos de ellos. La tercera premisa sugiere que antes de iniciar un proceso de reforma y poner en práctica un programa de formación profesional, es

necesario efectuar un diagnóstico del sistema educativo a la luz de las tendencias internacionales y las necesidades sociales y culturales del contexto en el que se inscribe. La cuarta premisa señala que realizar estudios comparativos a la luz de indicadores claros y medibles permite acceder al conocimiento de una manera más real.

5. CONCLUSIONES

Actualmente existe consenso internacional acerca de lo necesario que es incorporar al profesorado en las agendas de política educativa y valorar su rol como ente integrador en toda propuesta de reforma. También se reconoce que una cantidad importante de ellos están desaprovechados, ya que no se les consulta ni se les toma en cuenta en los proyectos de mejora.

Paralelamente, durante los últimos años México y Costa Rica han hecho patente su compromiso por mejorar la calidad de los aprendizajes en áreas científicas. La educación estadística ha logrado posicionarse como una parte total en la formación integral de un ciudadano educado en ambas naciones, motivo por el cual cada vez gana más espacios en el currículo escolar de las nuevas reformas educativas.

Sin embargo, al parecer las reformas implantadas recientemente han omitido examinar aspectos académicos y de formación social, pedagógica y disciplinar, esenciales para el logro de los objetivos planteados. Pareciera que sus ideólogos desconocen total o parcialmente el perfil profesional del cuerpo docente que imparte estadística, además de tener dificultades para precisar si cuenta con el dominio disciplinar y pedagógico que se exige en los nuevos estándares contenidos en los programas de trabajo.

En consecuencia, en este trabajo se presenta una propuesta para realizar un estudio sistemático con el objetivo de caracterizar y comparar a un grupo de docentes que enseñan estadística de séptimo a duodécimo grado en instituciones educativas de una región particular del norte de México y una provincia del centro de Costa Rica.

La realización de este estudio puede generar información valiosa que permita, por una parte, conocer cómo es el profesor de estadística, cómo enseña y evalúa a sus estudiantes, qué sabe y qué no sabe de la disciplina, cómo entiende el papel de la estadística en la formación de sus aprendices, qué opina de los programas de capacitación y actualización docente en los que ha participado o debe participar. Por otra parte, el estudio puede coadyuvar a entender y conocer a los profesores desde la perspectiva social que comúnmente se olvida en los planteamientos de los ministerios de educación.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a la Dirección General de Educación Superior Tecnológica de México, al Instituto Tecnológico de Chihuahua II y a la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica por el apoyo que actualmente otorga para efectuar este proyecto.

REFERENCIAS

- Aravena, R., Del Pino & G., Iglesias, P. (2001). Explora: Un programa Chileno de extensión en ciencia y tecnología en probabilidad y estadística. *Actas de las Jornadas Europeas sobre la Enseñanza y la Difusión de la Estadística*, (pp. 391-402).
- Begueri, G., Malberti, A. & Klenzi, R. (2012). Integrando tecnología y educación mediante minería de datos, una aplicación práctica. *WICC 2012-XIV Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación*. p. 970-973. Recuperado de http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/19409/Documento_completo.pdf?sequence=1
- Burrill, G. & Camden, M. (Eds.). (2005). *Curricular development in statistics education: International Association for Statistical Education 2004 Roundtable*. Voorburg, the Netherlands: International Statistical Institute.
- Campelos, S. & Moreira, D. (2012). Developing statistical literacy: a design experiment approach to probabilities applied in natural sciences. *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 4, Taiwan : PME.
- Cuevas, JH., Hernández, S., Ruiz, B., Albert, J. & Pinto, J. (2012). *Educación estocástica y comunidades epistémicas: propuesta para conformar una red de trabajo en México*. P. 137-151. En *Contribuciones a la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad y la estadística*. Dirección de Fomento Editorial de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla: México
- De La Red, J. Acosta, L., Cutro, V. & Rambo, A. (2010). Data Warehouse y Data Mining aplicados al rendimiento académicos y de perfiles de alumnos. *WICC 2010-XII Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación*. p. 162-166. Recuperado de http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/19461/Documento_completo.pdf?sequence=1
- Del Pino, G. & Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 49, 1, 53-64. Recuperado de <http://www.pensamientoeducativo.uc.cl/files/journals/2/articles/483/public/483-1238-1-PB.pdf>
- Dirección General de Desarrollo Curricular. (2011). *Plan de estudios 2011. Educación básica*. México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado de <http://basica.sep.gob.mx/reformaintegral/sitio/pdf/secundaria/plan/PlanEstudios11.pdf>
- Durán, E. & Costaguta, R. (2007). Minería de datos para descubrir patrones de aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*. 42, (2) Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI). Recuperado de <http://www.rieoei.org/deloslectores/1674Duran.pdf>
- Estrada, M. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*. [Tesis Doctoral, no publicada], Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra.
- Ferrer, G. (2008). *Estudio comparado internacional sobre procesos de elaboración e implementación de estándares de curriculum en América Latina*. PREAL.

- Francois, K & Van Bendegem, J. (2010). Ethical-political aspects of statistical literacy. *Contributed Paper Refereed 8th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)*. Ljubljana, Slovenia.
- Fullan, M. & Hargreaves, A. (2006). *La escuela que queremos. Los objetivos por los que vale la pena luchar*. Argentina: Amorrortu.
- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70 (1), 1-51.
- Gal, I. (2003). Expanding conceptions of statistical literacy: An analysis of products from statistics agencies. *Statistics Education Research Journal*, 2 (1), 3- 21. Recuperado de <http://fehps.une.edu.au/serj>
- Gal, I. & Garfield, J. (1997). *Curricular goals and assessment challenges in statistics education*. En I. Gal y J. B. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 1-13). Amsterdam: IOS Press.
- Gal, I. & Ginsburg, L. (1994). The role of beliefs and attitudes in learning statistics: Toward an assessment framework. *Journal of Statistics Education*, 2 (2). Recuperado de <http://www.amstat.org/publications/jse/v2n2/gal.html>
- Gal, I., Rothschild, K. & Wagner, D. (1989). Which group is better? The development of statistical reasoning in elementary school children. *Society for Research in Child Development*. Kansas City.
- Garfield, J. (1994). Beyond testing and grading: Using assessment to improve student learning. *Journal of Statistics Education*, 2 (1). Recuperado de www.amstat.org/publications/jse/v2n1/Garfield.html
- Garfield, J. (1995). How Students Learn Statistics. *International Statistical Review*, 63, 25-34.
- Garfield, J. (1999). Thinking about statistical reasoning, thinking and literacy. *First Annual Roundtable on Statistical Thinking, Reasoning, and Literacy. (STRL-1)*.
- Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education*, 10 (3). Recuperado de www.amstat.org/publications/jse/v10n3/garfield.html
- Garfield, J. (2003). Assessing statistical reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 2 (1), 23-38.
- Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2005). A framework for teaching and assessing reasoning about variability. *Statistics Education Research Journal*, 4 (1), 92-99.
- Garfield, J., del Mas, B. & Chance, B. (2007). *Using students' informal notions of variability to develop an understanding of formal measures of variability*. En M. C. Lovett y P. Shah, (Eds). *Thinking With Data*. EUA: Psychology Press.
- Hans-Joachim, M. (2010). Promoting statistical literacy: a european pilot project to bring official statistics into university and secondary school classrooms. *8th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)*. Ljubljana, Slovenia.
- Hargreaves, A. & Fink, D. (2006). Estrategias de cambio y mejora en educación caracterizadas por su relevancia, difusión y continuidad en el tiempo. *Revista de Educación*, (339), 43-58.
- Hargreaves, A., Earl, L., Moore, S. & Manning, S. (2001). *Aprender a cambiar. La enseñanza más allá de las materias y los niveles*. Barcelona: Octaedro.
- Hernández, J., Ramírez, M. & Ferri, C. (2008). *Introducción a la minería de datos*. Madrid: Pearson
- Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. Perú: McGraw-Hill.

- International Commission on Mathematical Instruction [ICMI]. (2012). <http://www.mathunion.org/ICMI/>
- International Association for Statistical Education [IASE]. (2012). The University of Auckland. <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/>
- Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria [JVDEPC]. (2013). <http://www.jvdiesproyco.es/>
- Kucukbeyaz, D., Batto, M. & Rosa, E. (2006). Development of statistics methods teaching in primary and secondary education. *International Conference on Statistical Education*.
- Kuntze, S., Engel, J., Martignon, L. & Gundlach, M. (2010). Aspects of statistical literacy between competency measures and indicators for conceptual knowledge: empirical research in the project “Riko-Stat”. *8th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)*. Ljubljana, Slovenia.
- Meletieu-Mavrotheris, M. & Serradó, A. (2012). Formación a distancia para profesores de matemáticas: la experiencia de Early Statistics. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento (RUSC)*. 9,1, 150-165. Recuperado de <http://www.raco.cat/index.php/RUSC/article/view/249888/334379>
- MEP. (2012). *Programas de estudio en matemáticas*. República de Costa Rica. Recuperado de <http://www.mep.go.cr/despachos/Anuncio.aspx>
- Ralston, S. (2005). *The Collapse of Globalism: And the reinvention of the world*. Toronto: Viking Canada.
- Sosa, G., Dima, L., Urdaneta, R. & Esperón, G. (2011). Inteligencia artificial aplicada al desarrollo de evaluaciones de matemática. *Ciencia y Tecnología*, 11, (2), p. 155-166. Recuperado de http://www.palermo.edu/ingenieria/pdf2012/cyt/numero11/CyT11_10.pdf
- Tenti, E., y Steinberg, C. (2010). *Los docentes mexicanos. Datos e interpretaciones en perspectiva comparada*. Argentina: Siglo xxi editores.
- Tishkovskaya, S. & Lancaster, G. (2010). Teaching strategies to promote statistical literacy: review and implementation. *8th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)*. Ljubljana, Slovenia
- Zapata, L. (2011). ¿Cómo contribuir a la alfabetización estadística? *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 33, 234-247
- Zieffler, A., Park, J., Garfield, J., delMas, R. & Bjornsdottir, A. (2012). The Statistics Teaching Inventory: A Survey on Statistics Teachers’ Classroom, Practices and Beliefs. *Journal of Statistics Education*, 20, 1, 1-29. Recuperado de <http://www.amstat.org/publications/jse/v20n1/zieffler.pdf>

TEACHERS OF STATISTICS IN LATIN AMERICA: NEED FOR CHARACTERIZATION SOCIAL, PEDAGOGICAL AND DISCIPLINARY PERSPECTIVES

ABSTRACT

This paper gives an overview of the effects of improvement movement and educational change in teachers of statistics of two Latin American nations. Same time sets out some actions of promotion of education statistics by diverse epistemic communities. Finally, is done a proposal to drive a systematic study that allows characterize to teachers that teaches this discipline from seventh to twelfth grade in state educational institutions of Chihuahua, Mexico and the province of Cartago, Costa Rica.

Keywords: *statistical education; teacher profile; educational reform; data mining*

RESUMO

Nesta obra descreve uma visão geral dos efeitos do movimento pelo aperfeiçoamento e mudança educacional entre os professores no ensino da estatística em duas nações latino-americanas. Ao mesmo tempo, propomos certas ações da promoção da educação estatística, propostas pelo especialistas na matéria. Por fim, há uma proposta para conduzir um estudo e determinar o perfil dos professores neste campo entre o sétimo eo décimo segundo grau nas escolas do Estado de Chihuahua, México e na Província de Cartago, Costa Rica.

Palavras-chave: *educação estatística, perfil do professor, reforma da educação, Mineração do Dados*

JESÚS HUMBERTO CUEVAS ACOSTA
Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México
jesus.humberto.cuevas@outlook.com

Profesor e Investigador en el Departamento de Ciencias Básicas del Instituto Tecnológico de Chihuahua II. Doctor en Educación, Maestro en Ciencias en Enseñanza de la Ciencia, Especialista en Docencia e Ingeniero Industrial. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores en México. Sus líneas de trabajo son: *educación en probabilidad, estadística y análisis de datos; formación del profesorado de estadística; aplicación de tecnología informática en educación*. Ha dictado conferencias y publicado trabajos de investigación en foros y medios nacionales e internacionales.

GREIVIN RAMÍREZ ARCE
Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica
gramirez@gmail.com

Profesor e investigador titular de la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Máster en Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México. Sus líneas de investigación son: *educación en probabilidad, estadística, y ecuaciones diferenciales*. Recibió el Premio Simón Bolívar a la mejor tesis en Matemática Educativa, CLAME, 2007. Ha sido expositor en números congresos y publicado decenas de artículos.

Anexo 1

INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA E INSTITUTO TECNOLÓGICO DE CHIHUAHUA II, CÓDIGO: __

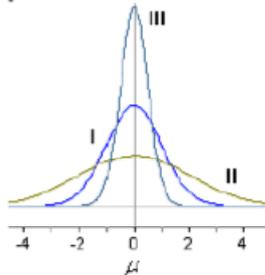
Fórmula 1

INSTRUCCIONES GENERALES

Este es un cuestionario cuya finalidad es obtener información sobre sus conocimientos básicos en probabilidad y estadística. Los datos serán manejados en forma confidencial.

I Parte. Selección Única. Marque con una equis (X) la opción que corresponde a la respuesta correcta.

1. En la siguiente representación, se muestra la gráfica de tres distribuciones normales con media μ y desviación estándar σ



Se cumple que:

- En la gráfica I hay mayor variación
 - En la gráfica II hay mayor variación
 - En la gráfica III hay mayor variación
 - Las tres se distribuyen con igual variación
2. Un estudiante lanza un dado justo de seis caras numeradas del 1 al 6, el siguiente evento es siempre seguro:
- Obtener un número par en el lanzamiento
 - Obtener un tres en el lanzamiento
 - Obtener un siete en el lanzamiento
 - Obtener cualquier valor entre uno y seis en el lanzamiento
3. Se desea realizar un análisis sobre las diferencias entre experimentos aleatorios y determinista (no aleatorios). ¿Cuál de los siguientes experimentos es un ejemplo de una situación determinista?
- Sacar una bola negra de una caja que contiene cinco bolas negras
 - En el próximo año lloverá menos en el mes de agosto que en el presente año
 - Lugar exacto donde caerá una piedra al lanzarla hacia arriba
 - Identificar la temperatura exacta a las 9:21 am en la ciudad de New York

4. La siguiente tabla presenta una muestra de 400 personas según el hábito de fumar y el padecimiento de bronquitis.

Hábito de Fumar	Bronquitis		Total
	Si	No	
Fuma	140	110	250
No Fuma	50	100	150
Total	190	210	400

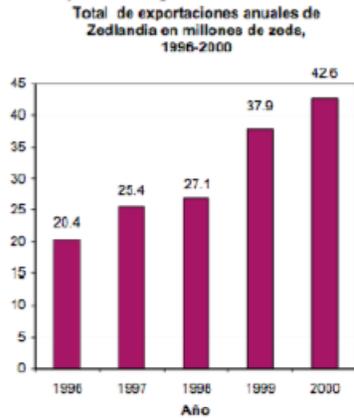
De acuerdo con esta muestra, ¿cuál de las siguientes proposiciones es correcta?

- Es más probable que un fumador padezca de bronquitis que un no fumador no padezca.
 - Es más probable que un fumador padezca de bronquitis que un no fumador padezca
 - Es más probable que un no fumador padezca de bronquitis que un fumador padezca
 - Es igualmente probable que un fumador padezca de bronquitis que un no fumador padezca
5. Al realizar el lanzamiento de una moneda no cargada 11 veces, ¿cuál de las siguientes secuencias considera que resulte más probable? (S: sol, C: cara)
- SCCCCSSSCS
 - CSCSSCSCCS
 - CSCSCSCSCS
 - Todas las secuencias son igualmente probables

6. En un pequeño barrio hay un total de 50 casas. El comité de bienestar estudiantil de este barrio ha decidido determinar el número promedio de menores que hay por casa en este barrio. Los encargados del comité dividieron el total de infantes entre 50, el promedio de menores que obtuvieron fue de 2,2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones considera que es siempre verdadera?

- La mitad de las casas tienen más de dos menores
- Existen un total de 110 menores en el barrio
- Existen 2,2 menores en el pueblo por cada casa
- El número más común de niños en una casa es dos

7. En la gráfica siguiente se muestra información sobre las exportaciones de Zedlandia, un país que utiliza el zed como moneda. ¿Cuál es el valor total (en millones de zeds) de las exportaciones de Zedlandia en 1998?



- 30,7 millones de zeds
- 37,9 millones de zeds
- 25,4 millones de zeds
- 27,1 millones de zeds

8. En una caja hay bolígrafos de tres colores: 10 azules, 8 negros y 7 rojos. Se extraen aleatoriamente dos bolígrafos sin reemplazo, considere las siguientes proposiciones:

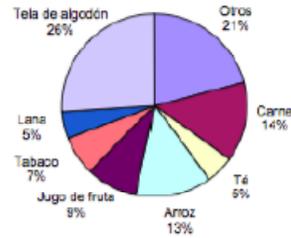
- I. Si el primer bolígrafo es negro, entonces la probabilidad de que el segundo sea también negro es $\frac{8}{25}$.
- II. Si el primer bolígrafo es azul, entonces el color que tiene más probabilidad para el segundo bolígrafo es también azul.
- III. Si el primer bolígrafo es negro, la probabilidad de que el segundo bolígrafo sea negro es igual a que sea rojo.

De las proposiciones anteriores son verdaderas (s)

- Solamente la II
- Solamente la III
- Solamente la I y la II
- Solamente la II y la III

9. Con base en la gráfica de la pregunta 19 y el siguiente gráfico, ¿cuál fue el valor del jugo de fruta que exportó Zedlandia en 2000?

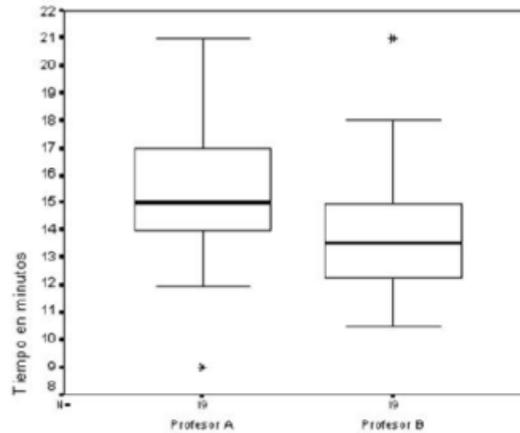
Distribución de las exportaciones de Zedlandia en 2000



- 1,8 millones de zeds aproximadamente
- 2,3 millones de zeds aproximadamente
- 3,4 millones de zeds aproximadamente
- 3,8 millones de zeds aproximadamente

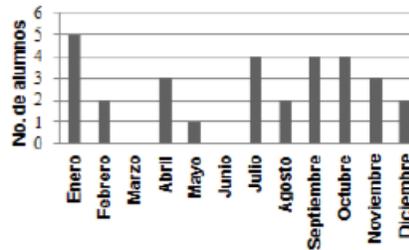
II Parte. Desarrollo. Los siguientes items corresponden a desarrollo, por tanto debe presentar **TODOS** los pasos necesarios que le permitan obtener su respuesta.

10. Dos profesores A y B, están interesados en estudiar los hábitos de sueño de los estudiantes en sus clases. Ambos profesores registran el tiempo (en minutos) que demoran en quedarse dormidos sus alumnos desde que empieza la clase. La siguiente gráfica muestra los tiempos que demoran en quedarse dormidos los estudiantes, tanto del profesor A como del profesor B.



De acuerdo con la información dada, ¿qué puede concluir acerca de la información que suministra la gráfica?

11. A un grupo de 30 alumnos se les preguntó el mes en que cumplían años, estos datos fueron graficados como se muestra a continuación:



¿El día de la encuesta faltó Rocío a clases, en cuál mes cree que cumple años Rocío? ¿Por qué?

12. Suponga que tenemos un circuito como el mostrado en la figura adjunta y que por la parte superior se lanzan 100 bolitas.



De acuerdo a la información anterior, ¿en cual de los depósitos (A, B, C, D) caerán más bolitas? ¿Por qué?

13. En primera columna del siguiente cuadro se presentan 3 variables. Léalas detenidamente y marque con una (X) en las siguientes 3 columnas el tipo de variable, medida de tendencia central y gráfica asociada.

Definición de variable	Tipo de variable	Medida de tendencia central (puede marcar varias)	Gráfica asociada al tipo de dato (puede seleccionar varias)
Género: <input type="checkbox"/> Femenino <input type="checkbox"/> Masculino	<input type="checkbox"/> Cualitativa <input type="checkbox"/> Cuantitativa discreta <input type="checkbox"/> Cuantitativa continua	<input type="checkbox"/> Media aritmética <input type="checkbox"/> Mediana <input type="checkbox"/> Moda	<input type="checkbox"/> Circular <input type="checkbox"/> Barras <input type="checkbox"/> Histograma <input type="checkbox"/> Diagrama de caja (Bigote) <input type="checkbox"/> Polígono de frecuencias
Núm de habitaciones que tiene la casa que habita: <input type="checkbox"/> Menos de 3 <input type="checkbox"/> 3 <input type="checkbox"/> 4 <input type="checkbox"/> 5 <input type="checkbox"/> Más de 5	<input type="checkbox"/> Cualitativa <input type="checkbox"/> Cuantitativa discreta <input type="checkbox"/> Cuantitativa continua	<input type="checkbox"/> Media aritmética <input type="checkbox"/> Mediana <input type="checkbox"/> Moda	<input type="checkbox"/> Circular <input type="checkbox"/> Barras <input type="checkbox"/> Histograma <input type="checkbox"/> Diagrama de caja (Bigote) <input type="checkbox"/> Polígono de frecuencias
Peso en libras: <input type="checkbox"/> Menos de 100 <input type="checkbox"/> Entre 100 y 120 <input type="checkbox"/> Entre 121 y 140 <input type="checkbox"/> Entre 141 y 160 <input type="checkbox"/> Entre 161 y 180 <input type="checkbox"/> Más de 180	<input type="checkbox"/> Cualitativa <input type="checkbox"/> Cuantitativa discreta <input type="checkbox"/> Cuantitativa continua	<input type="checkbox"/> Media aritmética <input type="checkbox"/> Mediana <input type="checkbox"/> Moda	<input type="checkbox"/> Circular <input type="checkbox"/> Barras <input type="checkbox"/> Histograma <input type="checkbox"/> Diagrama de caja (Bigote) <input type="checkbox"/> Polígono de frecuencias

EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO ESTADÍSTICO DEL MAESTRO

JULIA ELENA SANOJA

JOSÉ ORTIZ BUITRAGO

RESUMEN

La estadística es una parte de la educación general deseable en todo ciudadano, que debe iniciarse desde la escuela primaria, según lo contemplado en los currícula de la escuela venezolana. En consecuencia, el docente de primaria debería poseer la formación adecuada para impartirla. Lo antes expuesto orientó el interés por indagar respecto al conocimiento didáctico del contenido estadístico del docente de primaria. La investigación se enmarcó bajo el enfoque cualitativo, con un diseño etnometodológico. Los informantes clave fueron docentes de una escuela estatal ubicada en Maracay, Aragua, Venezuela. Los resultados revelaron que, en el grupo estudiado, los docentes ponen en práctica diversas estrategias que hacen comprensible la estadística, facilitando la adquisición de conocimientos y orientando la atención del niño. Asimismo, para los docentes, el uso del método por proyecto, genera en los niños una actitud positiva hacia el aprendizaje de la estadística. En cuanto a la enseñanza, los sujetos consideraron que se debe emplear un lenguaje apropiado al nivel que se enseña, lo cual contribuye a minimizar las dificultades de aprendizaje en el niño. Por otra parte, se logró evidenciar que el docente de primaria, no solamente requiere un conocimiento disciplinar de la estadística sino, además, una formación didáctica, de manera que en el proceso de enseñanza se tienda a fortalecer el pensamiento estadístico en el niño.

Palabras clave: *Didáctica de la estadística; pensamiento estadístico; conocimiento didáctico del contenido; escuela primaria.*

1. CONSTRUCCIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

El estudio de la Estadística cada día adquiere mayor importancia. A diario vemos como en los medios de comunicación aparecen tablas y gráficos estadísticos presentando información económica, deportiva, social, educativa, entre otras, que amerita que el ciudadano común tenga la capacidad de su lectura, análisis, interpretación y síntesis. Por ello “la Estadística se considera hoy día como parte de la herencia cultural necesaria para el ciudadano educado” (Batanero, 2002, p.2).

Es así como vemos que la Estadística está incorporada en los currícula de matemática en la enseñanza primaria y media y como un curso propio en las diferentes carreras universitarias. Batanero (2002), Garfield y Ahlgren (1998), León (1998) y Sanoja (2007), señalan que la Estadística está presente en forma generalizada en los diferentes niveles educativos debido a su carácter instrumental; además por el valor en el desarrollo del pensamiento estadístico, en una sociedad caracterizada por la disponibilidad de información y la necesidad de analizarla y tomar decisiones ante tanta incertidumbre.

No escapa a este hecho la educación venezolana, donde en todos los niveles del sector educativo se ha

incluido la Estadística, específicamente desde 1980 se incluye como tema dentro del programa de matemática en toda la escuela primaria (Ministerio de Educación, 1980).

Aún más, los lineamientos para la enseñanza de la Estadística en el Currículo Nacional Bolivariano (CNB) de la Escuela Primaria venezolana (Ministerio del Poder Popular para la Educación, 2007), están orientados a la aplicación de la Estadística en lo cotidiano, a la exploración del mundo real a través de la Estadística. Lo que implicaría un enfoque de la Estadística hacia el Análisis Exploratorio de Datos (AED) y para abordarlo requiere que los docentes de primaria modelen y apliquen el pensamiento estadístico en sus clases; lo cual concuerda con Wild y Pfannkuch (1999) cuando afirman que los docentes de primaria deben ser capaces de modelar los elementos del pensamiento estadístico por ser un componente esencial del aprendizaje de la Estadística, esto con una visión de enseñar para desarrollar el pensamiento estadístico en los niños.

Todo esto indica que el docente de primaria debe estar preparado para enseñar los contenidos de Estadística en la escuela y por tanto promover el proceso de aprendizaje en sus alumnos. En este sentido, Azcárate (2006) señala que aún cuando institucionalmente se reconoce y promueve la integración de la Estadística en los planes de estudio, paralelamente no se ha dedicado la necesaria atención a la formación de los profesores, lo que ha provocado una preparación insuficiente para enseñar estos conceptos.

Sin embargo, el docente en su praxis educativa debe, entre otras tareas, organizar y desarrollar los contenidos de Estadística y por ende tiene que tomar una serie de decisiones referidas al diseño, análisis y selección de unidades didácticas. Considerando que habitualmente los docentes de primaria tienen una forma de enseñar determinada, es decir un modelo didáctico establecido, su práctica de aula suele estar basada en sus concepciones sobre la enseñanza, el valor que da a los proyectos de aula, las posibilidades de obtener resultados, la importancia de los contenidos, sus propias convicciones personales, los alumnos; es decir, hechos más o menos cercanos al propio instante de su actuación que pueden tener un carácter personal, social, estratégico o profesional. Es así que suele estar inspirada en una representación o imagen de la realidad, en una simplificación de la misma, estando debajo de ese quehacer razones que no siempre son explícitas.

En este caso no solo se trata de si el docente de primaria tiene unos determinados conocimientos del contenido sino que además posea las competencias para enseñar dicho contenido. En ese sentido, investigadores como Shaughnessy (1992), Díaz, Batanero y Flores (1998), Carvalho (2001), Lee y Mojica (2008), Burgess (2008), Eichler (2008), entre otros, han hecho hincapié en la necesidad de formación del profesor en Estadística y Probabilidad. Pero esta formación del docente de primaria exige indicar qué conocimientos necesitan los maestros para enseñar adecuadamente un contenido.

En función a los planteamientos anteriores, los investigadores opinan el docente de primaria debería: (a) tener una comprensión de los contenidos elementales de Estadística, (b) entender el papel de la Estadística en la sociedad actual, los problemas que puede resolver y los ámbitos en los que se puede aplicar, (c) comprender el pensamiento estadístico, (d) conocer los resultados de las investigaciones en Educación Estadística relacionadas con los niveles de escuela primaria, (e) conocer los avances en la metodología para la enseñanza de la Estadística, y (f) adquirir la capacidad de diseñar estrategias de enseñanza que permitan la construcción del pensamiento estadístico en el alumno.

De acuerdo con estas ideas, Ball y Cohen (1999) expresan que los *conocimientos* que necesitan tener los profesores son: (a) los contenidos que enseña, en diferentes formas a como ellos lo aprendieron como estudiantes, por ejemplo necesitan saber significados y ver conexiones; (b) conocimiento acerca de sus alumnos: qué les gusta, qué encuentran interesante y con qué tienen problemas en cada tema en particular; (c) acerca del conocimiento estudiantil, necesitan comunicarse con los estudiantes, esperar que todos sus estudiantes aprendan; y (d) pedagogía, para transmitir a sus estudiantes los contenidos en forma efectiva.

Los conocimientos pedagógicos de los docentes de primaria incluyen las formas de representación de las ideas, las analogías, los ejemplos, las explicaciones y las demostraciones, es decir, las formas de representar y formular los temas para hacerlos comprensibles a los estudiantes (ob. cit.). Estos planteamientos coinciden con lo señalado por Shulman (1987) cuando establece el mínimo de categorías del conocimiento del profesor, indicando que en ellas se debe incluir: (1) conocimiento de contenido (CC), (2) conocimiento pedagógico general, (3) conocimiento del currículo, (4) Conocimiento pedagógico del contenido, (5) Conocimiento de los aprendices y sus características, y (6) conocimiento de los fines educativos.

Ahora bien el Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) (Shulman, 1987) es:

de especial interés porque identifica un cuerpo distintivo del conocimiento del profesor. Este representa la mezcla de contenido y la pedagogía en una comprensión de cómo determinados temas y problemas están organizados, representados y adaptados a los diversos intereses y habilidades de los alumnos, y presentados para la instrucción. El conocimiento Didáctico del Contenido es la categoría más apropiada a distinguir la comprensión del especialista en contenido de la del pedagogo (p. 8).

Sobre la base de que el CDC fundamenta las acciones del docente de primaria, el conocimiento del contenido (CC) le aporta al docente ese conocimiento de la materia que debe poseer y por su parte el pensamiento estadístico es un componente esencial para el docente de primaria en la enseñanza de la Estadística, por cuanto le aportará la lógica para la resolución de problemas reales que emplea el conocimiento de una ciencia y/o disciplina. Es conveniente que exista una sinergia entre estos conceptos, debido a que aportarán el camino más idóneo para que el docente de primaria enseñe

Estadística adaptada al contexto de la escuela primaria y a las exigencias que establece el currículo. Esta interacción le provee al docente de primaria los conocimientos, capacidades y actitudes – competencias - necesarias para enseñar estadística en la escuela.

Si bien es cierto que el conocimiento didáctico del contenido, el conocimiento del contenido y el pensamiento estadístico, en la enseñanza de la Estadística, no están en compartimentos estancos sino que mantienen relaciones entre sí, entonces es necesario entretejerlas, para ello se busca conocer cómo las desarrolla el docente de primaria en su práctica, para así realizar una representación simbólica conceptual de la realidad educativa que dibuje el camino que permita orientar al docente de primaria en el proceso de enseñanza de la Estadística en la escuela.

Ahora bien, el interés primordial de esta investigación es el proceso de enseñanza de la Estadística en la escuela primaria, desde la óptica de ¿Qué conocimiento didáctico del contenido estadístico posee el docente de primaria?

Esto nos permite plantear como objetivo de la investigación: *Caracterizar el Conocimiento Didáctico del Contenido estadístico del docente de primaria de la Unidad Básica pública estatal “Lucas Guillermo Castillo”, Maracay Edo. Aragua*

2. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO

El conocimiento didáctico del contenido (CDC) representa el conocimiento que es único para la profesión docente. En particular, el CDC es una mezcla de conocimiento del contenido y los conocimientos pedagógicos que subyacen en la comprensión de los profesores la necesidad de promover la comprensión de los estudiantes. El CDC representa la mejor base de conocimientos para la enseñanza (Shulman, 1987):

La clave para distinguir la base de conocimientos de la enseñanza está en la intersección de contenido y pedagogía, en la capacidad de un profesor de transformar el conocimiento del contenido que él posee en formas que son pedagógicamente poderosas y adaptables a las variaciones en capacidad y los antecedentes presentados por los estudiantes. (p.15).

Es así como Shulman establece un vínculo entre el contenido y la pedagogía, expresando que el CDC es “una especie de amalgama de contenido y pedagogía” (Shulman, 1987, p.8). Shulman aporta un argumento convincente: el conocimiento de un matemático experto no es suficiente para la enseñanza de las matemáticas, y que las cualidades tales como la gestión del aula, que está completamente vacía de materia, sería insuficiente para una comprensión profunda de los conocimientos necesarios para enseñar matemáticas. En particular, Shulman (1986) define el CDC como el conocimiento del contenido (CC) que "va más allá del conocimiento de la materia per se a la dimensión del conocimiento de la materia específica a enseñar" (p.9). Es decir, para el autor, CDC es

un tipo de conocimiento del contenido que representa la "enseñanza" de la materia a los estudiantes que se encuentran con los conceptos por primera vez.

Dentro de las categorías que Shulman (1986, 1987) considera integrantes del CDC del docente se encuentran: (1) las más usuales formas de representación de las ideas; (2) las maneras de formular y representar la materia para que sea comprensible por otros; (3) las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones y (4) conocimiento de la comprensión del estudiante: dificultades y facilidades en el aprendizaje. De allí que los profesores necesitan conocer las estrategias más adecuadas para que el estudiante reorganice su entendimiento.

Asimismo, diversas investigaciones realizadas sobre el trabajo de Shulman, han propuesto diferentes conceptualizaciones de las características incluidas o integradas en el CDC (Grossman, 1990; Loughran, Milroy, Berry, Gunstone y Mulhall, 2001; Magnusson Krajcik y Borko, 1999; Watson, Callingham y Donne, 2008). Al respecto Segall (2004) define el "conocimiento didáctico del contenido en la enseñanza de las matemáticas como el tipo de conocimiento que los profesores poseen cuando entienden las matemáticas que enseñan y son capaces de aprovechar ese conocimiento, con flexibilidad, mediante la búsqueda de formas de representar las ideas matemáticas, incluyendo una variedad de modelos para fomentar la comprensión conceptual de los estudiantes" (p. 6).

En este orden de ideas, Grossman (1990) define cuatro componentes centrales del CDC: (a) las concepciones de los propósitos para la enseñanza de la materia (es decir, la formación de metas), (b) el conocimiento de la comprensión de los estudiantes: concepciones y errores de temas concretos en una materia; (c) conocimiento curricular, y (d) conocimiento de las estrategias de enseñanza y de las representaciones para la enseñanza de temas específicos. Grossman reconoció que "estos componentes son menos claros en la práctica que en teoría" (p. 9), pero su marco general es útil para examinar las formas en que los profesores desarrollan su CDC.

Podemos notar que aún cuando existe una gran coincidencia entre los elementos que componen el CDC establecido por Shulman y los componentes definidos por Grossman, vemos como éste último considera el conocimiento curricular por parte del profesor dentro del CDC, por considerarlo como un aspecto interconectado con los otros componentes; mientras que Shulman lo considera como un componente del conocimiento de un buen profesor.

2.1. EL CDC EN ESTADÍSTICA

Respecto al CDC en la enseñanza de la Estadística se han encontrado relativamente pocas investigaciones. En primer lugar, Pinto (2010) explora el CDC de dos profesores noveles (uno con formación matemática y otro psicólogo) que enseñan Estadística a estudiantes de Educación y Psicología, respectivamente. El estudio tuvo como objetivos describir las concepciones que tienen los

profesores sobre la Estadística, su enseñanza y aprendizaje y, más concretamente, sobre la representación gráfica (RG), así como el conocimiento que tienen del tópico, de las estrategias y representaciones instruccionales y del conocimiento del estudiante sobre la representación gráfica en Estadística. Los resultados reflejan que los profesores sostienen una concepción diferente sobre la Estadística que sobre la RG, su aprendizaje y enseñanza. Asimismo, presentan algunas dificultades relacionadas con la adquisición del CDC o de su integración, como son: (a) relacionar el conocimiento del contenido a enseñar con las representaciones instruccionales y el conocimiento del proceso de aprendizaje del estudiante; (b) utilizar una variedad de recursos y materiales para la enseñanza de la representación gráfica; y (c) conocer el contenido y estudio de la representación gráfica, más allá de la construcción de gráficos.

Por su parte, Chick y Pierce (2008) analizan el CDC con 27 futuros profesores de primaria, el análisis de los planes de enseñanza revelan una actitud ambivalente hacia la estadística y la incapacidad o falta de voluntad para comprometerse profundamente con el recurso. La mayoría de los planes de enseñanza se centran en los gráficos correctos y las normas para la presentación o el cálculo de las estadísticas, pero pone poco o ningún énfasis en la comprensión del origen de los datos o de sus implicaciones y pocas actividades de interpretación, los conceptos mencionados o ideas no eran claramente articulados. Evidenciaron que los profesores de primaria necesitan formación en cuanto a conocimiento del contenido estadístico y el conocimiento didáctico del contenido estadístico, para identificar cuáles son los conceptos importantes que se pueden desarrollar a partir de un recurso que utiliza datos del mundo real.

Al respecto, Gómez y Sánchez (2008), analizan el discurso de cinco profesores de secundaria, durante la planificación de una lección sobre gráficas y medidas de tendencia central como parte de tres actividades profesionales (planificación, enseñanza y análisis de lecciones de clase), donde tenían que considerar algunos de los elementos del modelo del pensamiento estadístico de Wild y Pfannkuch (1999). En la fase de planificación se identificaron las dificultades y posibilidades que los profesores poseen para diseñar estrategias de enseñanza; también se estudió en qué medida se reflejaron los elementos del pensamiento estadístico en la lección planificada. El modelo del pensamiento estadístico de Wild y Pfannkuch fue una herramienta muy útil, a dos niveles, en este trabajo. Por un lado, permitió extraer ciertos principios para orientar a los profesores en la elaboración de la lección. Por otro lado, permitió detectar ciertas zonas de dificultad de los profesores en el diseño de la lección, a saber: la falta de habilidad para proponer un problema estadístico aunado a la poca valoración de su importancia para el diseño de la lección y la definición de los objetivos específicos. A pesar de que los profesores asumieron el trabajo con datos reales, no le dan importancia al análisis de los datos para dar respuesta al problema, sino que lo importante era que los datos permitían trabajar gráficas y

medidas de tendencia central. Esto refleja la persistencia de la idea de que el objetivo de la enseñanza es la transmisión de conceptos y no el desarrollo de un pensamiento estadístico, lo que muestra que aún queda trabajo por hacer.

Burgess (2007) analiza los conocimientos necesarios para la enseñanza de la estadística en cuatro (4) profesores de primaria realizando un perfil del conocimiento de cada profesor. Los hallazgos le proporcionan una descripción detallada del conocimiento del profesor en relación a los componentes del pensamiento estadístico que se necesitan y se utilizan en el aula. Estos perfiles describen las "oportunidades perdidas", que fueron consideradas como incidentes en el aula, en los cuales los profesores no toman ventaja de las oportunidades para mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Las investigaciones presentadas dan orientaciones teóricas y metodológicas de gran utilidad para el desarrollo de la presente investigación. Con lo que hemos escrito sobre el CDC basta para dar una idea de la revolución que han traído las ideas de Shulman al proceso de formación y evaluación del profesorado; además de que las escasas investigaciones en el conocimiento didáctico del contenido estadístico indican que todavía es un campo con mucho que explorar.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

La investigación se desarrolló bajo el paradigma interpretativo-fenomenológico, ya que lo que se buscaba era la comprensión de una realidad educativa concreta y compleja, como es el Conocimiento Didáctico del Contenido estadístico del docente de primaria. Según Guba y Lincoln (2005) en la tradición interpretativa se sustituyen las ideales teorías de explicación, predicción y control por las de comprensión, significado y acción; su finalidad no es buscar explicaciones causales o funcionales de la vida social o humana, sino profundizar nuestro conocimiento y comprensión de por qué la vida social se percibe y experimenta tal y como ocurre.

Partiendo de esta concepción y como esta investigación pretende generar un saber didáctico, y escenarios para la innovación en el proceso de enseñanza de la estadística, estudiando el CDC del profesor, la investigación se desarrollará con un abordaje metodológico cualitativo; con una concepción abierta, flexible y emergente de abordar una realidad. Siguiendo a Denzin y Lincoln (2005), este trabajo se corresponde con una investigación multimetódica en el enfoque; implica un enfoque interpretativo, naturalista hacia su objeto de estudio. Asimismo, tomamos en cuenta que los investigadores cualitativos estudian la realidad, en el mismo contexto, donde se suceden los acontecimientos, con el objeto de interpretar los hechos al máximo.

En esta investigación del tipo cualitativa, y de naturaleza exploratoria, descriptiva e interpretativa, se realizó una mirada a los procesos y conocimientos que los docentes de primaria utilizan para enseñar Estadística, con el objeto de conocer e interpretar el cómo del Conocimiento Didáctico del Contenido

estadístico del docente de primaria, de ahí que se utilizó el diseño etnometodológico. Se pretende describir el mundo social tal y como se está continuamente construyendo, emergiendo como una realidad objetiva, ordenada, inteligible, centrando la atención en la acción y en la interacción procedente de la actividad de los docentes de primaria en su praxis de enseñanza.

Según Rodríguez, Gil y García (1996) la etnometodología:

Intenta estudiar los fenómenos sociales incorporados a nuestros discursos y nuestras acciones a través del análisis de las actividades humanas. La característica distintiva de este método radica en su interés por centrarse en el estudio de los métodos o estrategias empleadas por las personas para construir, dar sentido y significado a sus prácticas sociales cotidianas (p. 50)

La etnometodología es interpretativa debido a que estudia los métodos o procedimientos con los que los integrantes de las sociedades dan sentido a la vida cotidiana o actúan en ella; desde la consideración de que el orden social está determinado por los continuos actos interpretativos de los sujetos implicados.

Contexto de la investigación Esta investigación tiene como contexto la escuela primaria venezolana, específicamente en la Unidad Básica pública estatal: “Lucas Guillermo Castillo”, ubicada en la ciudad de Maracay, Estado Aragua, identificada en adelante como “la escuela”; tendrá como informantes clave a los docentes de primaria que en ella laboran, que de aquí en adelante serán llamados “los docentes”. Cabe destacar que en la escuela laboran en dos turnos (mañana y tarde) y en cada turno existen dos secciones de cada grado de primaria, lo que constituye un total de veinticuatro (24) docentes.

Estrategias de recolección de datos El investigador, como tal, debe convertirse en el principal instrumento de recogida de información con la ayuda de técnicas que permitan la adaptación y consecución de los objetivos deseados. Durante el desarrollo de esta investigación se utilizaron las técnicas de observación participante y entrevista conversacional.

La observación participante facilitará estudiar el comportamiento no verbal de los informantes y tener una relación más cercana e informal con los docentes de primaria que se observaron en su ambiente natural. Para Stake (2003) la observación participante es “una forma activa de la observación donde el investigador se une a la actividad como participante, no sólo para acercarse a los demás, sino para tratar de conseguir algo de la experiencia que tienen en el papel.” (p. 94). La observación participante, se desarrolló a través de una actividad denominada “Taller de reflexión y discusión”, permitió la reconstrucción de las experiencias de los docentes en su aula de clase cuando impartían el contenido de Estadística previsto en el currículo. Este Taller fue concebido como una propuesta didáctica para la enseñanza de la Estadística en la escuela primaria, enmarcada en el Análisis

exploratorio de datos (AED) para el desarrollo del pensamiento estadístico. En cada sesión del taller se buscó explorar los componentes del conocimiento didáctico del contenido (CDC) (Shulman, 1986, 1987): (1) conocimiento sobre la enseñanza; (2) conocimiento de la comprensión de los niños. A tal efecto, se diseñaron como instrumentos de recolección de información: hojas de trabajo (HT), hojas de notas (HN) y cuaderno de notas.

El Taller se estructuró en cuatro (4) partes, fue aplicado en dieciséis (16) sesiones, cada parte tiene correspondencia con los contenidos de Estadística presentes en el currículo (Conceptos básicos de Estadística; Organización de datos; Medidas de tendencia central y Azar y probabilidad). En cada sesión del taller se buscó explorar los componentes del CDC (Shulman, 1986, 1987): (1) conocimiento sobre la enseñanza; (2) conocimiento de la comprensión de los niños.

La entrevista conversacional empleada con un propósito exploratorio fenomenológico, se realizó a través de diálogos abiertos e informales con los docentes antes y después de las sesiones del taller, donde el investigador y los informantes dialogaron de una forma que es una mezcla de conversación y preguntas insertadas. Esto permitió, desde un acercamiento informal, establecer una relación de mayor confianza con los docentes, con su actividad académica más allá de las clases, indagar de forma inmediata sobre los significados que otorgan a su accionar dentro del aula. Para Patton (2002) es una técnica:

sumamente eficiente [que proporciona] algunos controles de calidad sobre la recogida de datos, ya que los participantes tienden a proporcionarse controles y comprobaciones los unos a los otros que suprimen las opiniones falsas o extremas.... Y es bastante sencillo evaluar hasta que punto hay una visión relativamente coherente compartida entre los participantes. (p. 335-336).

La aplicación de esta técnica permitió que se estimularan las respuestas y participación de los docentes y entre ellos se apoyaron en el recuerdo de sus experiencias en el aula. Cabe destacar que la recolección de la información se realizó en los dos turnos de trabajo de la escuela.

Análisis de Datos. En primera instancia se empleó la metodología de Inducción Analítica, por partir de algunos supuestos a priori, para el análisis del conocimiento didáctico del contenido, supuestos estos establecidos por Shulman (1987, 1988), a saber: conocimiento sobre la enseñanza de la estadística (estrategias, recursos y evaluación) y conocimiento sobre la comprensión del niño (actitud, dificultades y errores). Al respecto, Taylor y Bogdan (1987, p. 156) se refieren a “un procedimiento para verificar teorías y proposiciones, basado en datos cualitativos. Tal como lo formuló Znaniecki en 1934, su finalidad consiste en identificar proposiciones universales y leyes causales”.

Sin embargo por ser un estudio exploratorio donde se pretendió conocer el conocimiento didáctico del contenido estadístico del docente de primaria y por ser un constructo teórico poco explorado en Educación Estadística, esto hace que la investigación no sea cerrada únicamente a estos supuestos a

priori, sino llegar más allá, a lo que exige una investigación cualitativa, al reconocimiento de la realidad capturando la perspectiva del investigado. Por lo tanto, también se empleó la Teoría Fundamentada, con el objeto de explorar todo lo que subyace el proceso de enseñanza de la Estadística en la escuela primaria.

Para conseguir el rigor y validez de los datos se empleó la triangulación, con el fin de develar el conocimiento didáctico del contenido (CDC) en los docentes de primaria, se realizó un análisis progresivo de la información, empleándose a través de la integración de los datos, provenientes de las entrevistas conversacionales y de las hojas de notas, la triangulación metodológica.

4. HALLAZGOS DEL CDC DEL DOCENTE DE PRIMARIA

La sistematización de los hallazgos se hizo a través de un proceso de categorización, donde se realizó una descripción de cada categoría, la cual se ejemplifica presentando un extracto de las transcripciones de las entrevistas conversacionales y de las diferentes sesiones del taller. Posteriormente, se reagruparon las categorías emergiendo así las dimensiones.

Ya con las categorías se comienza a explorar y describir las concepciones de los docentes en cuanto al Conocimiento Didáctico del Contenido estadístico. Con esta multiplicidad de categorías se realizó un proceso de comparación constante entre ellas mismas. Este proceso denominado codificación axial por Strauss y Corbin (2002, p.135), "...la codificación ocurre alrededor del eje de una categoría, y enlaza las categorías en cuanto a sus propiedades y dimensiones". La finalidad, entonces, es comenzar a reagrupar estos hallazgos que fueron segmentados en categorías y buscar en ellos las características y propiedades que permitan identificar las diferentes dimensiones.

4.1. DIMENSIONES DEL CDC

Dimensión Estrategias. La dimensión ESTRATEGIAS hace referencia a los modos de intervención que emplean los docentes, en sus aulas de clase, cuando hacen realidad los objetivos y contenidos de estadística presentes en el currículo. Las categorías que conforman esta dimensión (Tabla 1): *pregunta, ejemplificación, ejercicios, exposición, dramatización, proyecto y grupales*; caracterizan y definen la manera de enseñar de los docentes.

En función a las evidencias, hay indicios que indican que estas estrategias las utilizan los docentes tanto para hacer comprensible el contenido al niño como para detectar dificultades, reforzar o afianzar conceptos; así como para incentivar en el niño el desarrollo del pensamiento estadístico.

Tabla 1. Categorías de la dimensión ESTRATEGIAS

Categoría	Descripción	Ejemplos de las repuestas de los docentes
Proyecto	El empleo del método por proyecto como estrategia de enseñanza permite la conexión de los conceptos básicos de la estadística, planteando situaciones de su vida diaria y contexto social, pero además se señala la importancia de tener presente el desarrollo cognitivo del niño.	[HN1 3L1] ...Se desarrollará con el proyecto “ya se medir”... [HN1 3 L35] ...aplicando la estadística en los proyectos de aula. Que el niño elabora encuestas en cuanto a informaciones del acontecer diario...
Dramatización	Los docentes emplean la dramatización como una manera de enseñanza participativa, propicia la adquisición de conocimientos y el desarrollo de habilidades, además que contribuye al logro de la motivación por la Estadística. Reconocen que su uso en la enseñanza de la Estadística, donde se involucra y considera al niño como actor, promueve la construcción de las concepciones del niño acerca de la estadística, además de ayudar a su socialización.	[EC2 L46] ...cada niño representa su actividad y se agrupan en función a eso, hay ellos se enteran que hay varios niños y niñas que hacen karate, que hay otros que hacen natación, que hay unas niñas que hacen danza y otros beisbol....., entonces una vez que están los grupos, les digo que voy a escribir en la pizarra el nombre de cada grupo y ello empiezan a decirme el nombre... [HN1 5L52] ...Proponer situaciones reales donde los niños sean protagonistas de una recreación o representación práctica de cada concepto, para que así sea un aprendizaje significativo y no crear un rechazo en el niño en cuanto a la estadística....
Grupales	Los docentes dan muestra de que emplean diversas maneras grupales de enseñanza: debates, juego, lluvia de ideas, que le permiten mostrar al niño el vínculo entre el conocimiento estadístico y su entorno además de inducir al desarrollo del pensamiento estadístico en el niño. También utilizan la colaboración entre los niños, estrategias por reforzamiento, ayuda a una enseñanza más amena y motivadora para el niño. Estas estrategias la ofrecen a los docentes un medio para el trabajo en equipo de manera agradable y satisfactoria, empleando un lenguaje sencillo.	[EC3 L21] ...les enseño las palabras básicas, a través del juego, hago equipos de 5 niños cada grupo, para hacer una competencia, los pongo a buscar en el diccionario las palabras de: población probabilidad, frecuencia, variable. Para que hagan un glosario, esto lo hago para que ellos manejen el vocabulario... [EC4 L3] ...Fijate ayer comencé el tema de probabilidades con los niños, con los dados, cada niño lanzaba una vez el dado y otro anotaba en la pizarra el resultado, así, hasta que todos lanzaron el dado y construimos la tabla de frecuencia para calcular la probabilidad... [HN2 5L6] ...Agrupar a los niños y niñas que dominen el contenido con los niños y niñas que presenten dificultad en el dominio del contenido...
Pregunta	Los docentes consideran que la pregunta insertada en la situación de enseñanza logra mantener la atención, activa conocimientos previos, favorece la obtención de información relevante, va induciendo al niño en el concepto que se está desarrollando, además promueve el desarrollo del pensamiento estadístico porque va llevando al niño a desarrollar los elementos de éste.	[EC3 L53] ...para buscar la frecuencia, según el grado, les hago la pregunta de maneras distintas: si es para un primer grado los pongo a contarse directamente, les pregunto ¿cuántas niñas son?¿cuántos niños son?., En cambio para los de quinto a sexto grado ya ahí si les hago la pregunta directa en cuanto a ¿cuál es la frecuencia?.. [HN3 3L4] ...En el mismo salón de clase, como a ellos les gusta mucho el deporte y jugar metras, bueno con las metras les preguntaría ¿cuál es la metra más frecuente? ahí ello se pondría a contarlas para dar respuesta y estamos manejando el concepto de moda...

Tabla 1. Categorías de la dimensión ESTRATEGIAS (Cont.)

Categoría	Descripción	Ejemplos de las repuestas de los docentes
Ejercicios	Los docentes proporcionan ejercicios o los construyen en el aula a través de situaciones de la cotidianidad del niño. En este sentido, dan muestra de conocer modos y maneras de enseñar que ayudan a afrontar y/o minimizar las dificultades que puede presentar el niño al momento de la adquisición del conocimiento. También lo emplean como medio para reforzar y afianzar el conocimiento en el niño	[HN1 5L18] ...Crear constantemente ejercicios en cualquier área del conocimiento para que sea entendido y razonado todo sobre estos conceptos y así integrarlo y demostrarle a los niños que la estadística puede ser aplicada en las diferentes áreas del conocimiento, en la vida cotidiana y que es sencillo comprenderla.... [HN2 5L1] Tratando de organizar actividades en donde ellos mismos participen, ordenen la información. En fin sean parte del ejercicio, para que así ellos produzcan el aprendizaje significativo.... [HN3 1L7] ...y le hacemos ejercicios en la pizarra...
Ejemplificación	Con el empleo del ejemplo, los docentes le llevan, al niño, de una manera más práctica y concreta el contenido, adecuándose al grado en que se está impartiendo el contenido estadístico. Además los docentes consideran que con el ejemplo el niño conecta los conceptos básicos de Estadística, así va descubriendo por sí mismo el significado de los conceptos.	[HN1 5L11] ...Con un ejemplo real, puede ser dentro del aula de una manera sencilla con la clasificación de edad y sexo... [HN4 2L15] ... Si se empieza realizando una explicación de lo que queremos que ellos conozcan (conceptos de azar y probabilidad) a través de ejemplos ...
Exposición	Los docentes emplean la exposición como manera de enseñanza para llevar el contenido al niño. Le comunica al niño el conocimiento específico, en un ambiente controlado.	[EC1 L20] ...claro, yo les hago en la pizarra un ejercicio: escribo diferentes datos asociados con alimentos, les explico cómo se ordenan,....., tu sabes escribo el nombre de los alimentos y al lado voy colocando tantas rayitas como haya,....., y les hago la tabla de frecuencia y el gráfico de barras....

Se aprecia como los docentes utilizan la ejemplificación, la pregunta, la exposición y los ejercicios desde la cotidianidad del niño; buscando, con ello, motivar y despertar en el niño el interés por el tema y la adquisición del conocimiento, además de mostrarle la utilidad para la vida. Más aún, cuando el docente emplea el proyecto, la dramatización y diferentes estrategias grupales (juego, debates, lluvia de ideas) manifiesta que lo que pretende es hacer que el niño sea el protagonista que toma un papel fundamental en su proceso de formación, a pesar de que el docente se encuentra a su lado con el propósito de dirigir y tratar de asegurar la efectividad del aprendizaje. Con esta diversidad de técnicas, el docente pretende que el niño vaya descubriendo por sí mismo el significado de los conceptos estadísticos y por ende la construcción de su conocimiento. Al respecto Moore (1997) señala:

Lo que se necesita es una variedad de actividades, incluyendo la discusión entre los alumnos, el trabajo práctico, la práctica de las técnicas importantes, la resolución de problemas, la aplicación a situaciones cotidianas, el trabajo de investigación, y la exposición por el profesor. (p.125).

Los hallazgos indican que el juego y la pregunta son las maneras de enseñar que utilizan habitualmente los docentes, al evidenciarse desde los inicios del taller, las concepciones sobre la enseñanza que manifiestan tener los docentes, al señalar el uso frecuente de estas técnicas. Los docentes expresan que las emplean como recurso para hacer pensar al niño y así propiciar el desarrollo del pensamiento estadístico. Esto les permitiría conocer si el niño comprendió el concepto o para reforzar conocimientos adquiridos:

“...hacen, por lo menos un grupo de cambures, otro de naranjas, otro de limones, fresas y duraznos. Les hago preguntas como ¿Cuál es el color que más se repite?. ¿cuál es la fruta que menos se repite? Y me dicen cual es, y yo les pregunto porque y ellos la cuentan y me dicen el número...” [EC2 L31]

“... Niños empiezan a decirme mae ganó karate, por decirte y yo les pregunto ¿por qué? Mae porque es donde hay más. Hay aprovechado a llevarles el concepto de moda sin formalizar tú sabes de manera intuitiva, para decirles que ese es el más frecuente y les hago preguntas como ¿cuál es el que menos frecuente?,...” [EC2 L59]

Dentro de esta diversidad de estrategias se pudieran diferenciar dos grupos, esto en función a los elementos básicos del proceso de enseñanza: profesor, alumno; a saber, las estrategias referidas al docente y las estrategias referidas al alumno. Rajadell (2001) señala la presencia de tres categorías que facilitan la adquisición o la ampliación de conocimientos desde realidades concretas y específicas más simples: Las estrategias centradas en el formador, las estrategias centradas en el alumno y las estrategias centradas en el medio.

En función a los planteamientos de Rajadell, en cuanto a la formas de las estrategias que utilizan los docentes, las categorías: *exposición, pregunta, ejemplificación y ejercicios* están referidas al docente; donde éste es el principal protagonista que planifica y expone los contenidos al niño y a su vez trata de promover el conocimiento en el niño, en un ambiente específico y controlado. Sobre las formas de las estrategias, nuestros hallazgos coinciden en cierta manera con Pinto (2010), quien encontró que los profesores utilizan estrategias y representaciones instruccionales centradas en el profesor; sin embargo, contrario a nuestro hallazgo, no encontró el empleo de estrategias centradas en el alumno por parte de los docentes.

Por otra parte, las categorías *proyecto, dramatización y grupales* están referidas al niño, donde este es el protagonista del acto educativo, pero estas técnicas no prescinden del todo de la acción del docente. En este tipo de técnicas, diera la impresión que el docente involucra al niño, de manera directa y activa, en las actividades de construcción de su conocimiento.

Para Rajadell (2001) “la ventaja más destacada se centra en la adaptabilidad a partir de los conocimientos previos, de las capacidades e intereses de los alumnos” (p. 12). El docente con estas estrategias considera que logra y motiva la participación de los niños, al crear un ambiente que

estimula al niño a la construcción de su conocimiento y facilita el aprendizaje a través de la reflexión. Además, el docente logra afianzar en el niño conceptos y procedimientos.

Dimensión Recursos Los recursos son necesarios para la puesta en marcha de la planificación del docente, hacen referencia al *con qué* enseñar. En tabla 2 se presentan las categorías que al agruparse dieron cabida a la dimensión **RECURSOS**

Tabla 2. Categorías de la dimensión **RECURSOS**

Categoría	Descripción	Ejemplos de las repuestas de los docentes
Comunicacional	Los docentes dan muestras de conocer la utilidad de la prensa, o los libros de texto como herramientas que facilitan la enseñanza de la Estadística.	[HN1 3L9]...Lo recursos: Periódicos, revistas... [HN1 3I2] ...Los útiles escolares ... libro de texto...
Franelógrafo	Los docentes emplean herramientas que son atractivas para el niño y le permiten a través de la simulación y el juego apropiarse del conocimiento.	[EC2 L28] yo hago así les llevo una serie de imágenes de diversas frutas y les pido que hagan grupos en el franelógrafo, (risas)..., eso les gusta mucho, y como les llevo frutas repetidas...
Guías	Los docentes emplean guías que contengan juegos, sopa de letras, diversidad de actividades que la hacen más atractivo el aprendizaje al niño.	[HN1 5L24] Guías instructivas... [HN2 5L17] ...con material fotocopiado...
Material concreto	Los docentes emplean una variedad de materiales para la enseñanza de la estadística. Recursos de la cotidianidad del niño que le son atractivos y que ayudan a corregir o evitar las dificultades que se le presentan.	[HN3 4L4] ...Balones, cancha, pizarrón, marcadores, hojas, lápices [HN1 3I2] ...Los útiles escolares (cuadernos, colores, reglas, lápices, sacapuntas... [HN4 4L2] Metras, pelotas, chapas,...
Tecnología	Los docentes consideran que el uso de la tecnología, en la enseñanza de la Estadística, ayuda, motiva, le es agradable y facilita los procesos de aprendizaje. El niño ya está familiarizado con ella.	[HN3 4L2]La computadora, internet... [HN2 7L12] ...uso de DVD y tv sirve para la transmisión de videos relacionados con el contenido...

Los hallazgos muestran indicios, por parte de los docentes, del conocimiento y uso de diferentes herramientas o materiales didácticos para la enseñanza de la estadística. En el caso del uso de los libros de texto, los docentes manifiestan el empleo de estos para la planificación de la clase: “...profesora, déjame decirte que yo me guío por el manual del docente de Santillana y el libro que ellos editan para primer grado...” [EC1 L50]. Situación similar reporta Pinto (2010), en su investigación con profesores de estadística, cuando señala que los profesores emplean al libro de texto como fuente para organizar la clase.

En la variedad de herramientas que emplean los docentes, algunas son materiales de la cotidianidad del niño, a lo que Medina y Salvador (2002) llaman “*recursos o medios instruccionales*”; considerando a aquellos materiales del contexto que sirven de experiencia directa al niño. En función a los

planteamientos de los docentes, este tipo de recurso enriquecen las actividades y mejorar la motivación.

Por otra parte, se tienen materiales cuyo destino es colaborar y facilitar el proceso de enseñanza como son: *tecnología* y *franelógrafo*. Ambos recursos permiten la realización de actividades orientadas a la construcción del conocimiento.

En el caso de las categorías *comunicacional* y *guías* son recursos, que pareciera, emplea el docente para aproximar la realidad al niño y facilitar el aprendizaje de los contenidos. Según los hallazgos, el empleo de estos recursos, por parte del docente, ayudan a minimizar las dificultades que se la pudiesen presentar al niño.

Dimensión Evaluación Esta dimensión, hace referencia a la forma de evaluar el aprendizaje del niño. Las categorías que conforman esta dimensión (Tabla 3): *continua*, *tarea* y *pregunta*. Los hallazgos indican que, dentro de las múltiples perspectivas bajo las que puede ser considerada la *evaluación* del niño, pareciera que los docentes emplearan la *evaluación formativa*, por pretender apoyar o reforzar el desarrollo continuado del niño, al emplear de manera continua y reiterada: *la pregunta*, *ejercicios* y *tareas*, que el niño debe responder o realizar de manera inmediata a lo impartido. Esto le permitiría al docente: (a) constatar el proceso de aprendizaje, (b) modificar las estrategias a lo largo del proceso de enseñanza en caso de detectar errores y/o dificultades, en el niño, acerca de los contenidos impartidos; y (c) seguir el ritmo de aprendizaje del niño.

Tabla 3. Categorías de la dimensión EVALUACIÓN

Categoría	Descripción	Ejemplos de las repuestas de los docentes
Continua	Los docentes aplican la evaluación continua, a través de las estrategias instruccionales que emplea en el aula	[EC2 L62] ... y les hago preguntas como ¿cuál es el que menos frecuente?, y así.... [EC3 L31] ...Y les hago en la pizarra la tabla de datos. Después les pongo un ejercicio para que ellos lo hagan...
Tarea	Los docentes le colocan ejercicios para la casa, tarea, de esta manera evalúa al niño	[EC2 L10] ... Y bueno, los evaluó colocándoles unos ejercicios para la casa...
Interroga	Los docentes emplean la pregunta para evaluar la comprensión de lo enseñando	[EC3 L45] ... y les pregunto ¿cuál es la vegetación más frecuente?... [Hn4 5L11] ... le preguntaría cosas como: ¿Cuál es la fruta más frecuente?¿es probable que tengan una fruta ácida?....

En general le permitiría, al docente, evaluar el proceso completo de aprendizaje que el niño sigue en sus tareas, a través de las respuestas dadas a los cuestionamientos realizados por el docente. De esta manera, el docente introduce sobre la marcha del mismo las modificaciones oportunas referidas al cambio de actividades, la intervención oportuna del docente para corregir errores y/o dificultades que se le presenten al niño, entre otras. Estos hallazgos concuerdan con Pinto (2010), quien señala que los

profesores emplean la evaluación de carácter formativa para valorar el conocimiento y habilidades de los estudiantes.

Dimensión Actitud La dimensión ACTITUD emerge sobre la base del conocimiento que parecen tener los docentes acerca de la predisposición hacia la estadística que pudiese presentar el niño. Las categorías que conforman esta dimensión (tabla 4): *agrado, ansiedad, valor, utilidad, comprende y cognición*, que se integran para dar origen a esta dimensión.

Tabla 4. Categorías de la dimensión ACTITUD

Categoría	Descripción	Ejemplos de las repuestas de los docentes
Utilidad	Los docentes consideran que el empleo de la tecnología motiva al niño, ayuda a su desenvolvimiento y facilita el aprendizaje de los contenidos de estadística. Los docentes toman en cuenta y conocen la actitud del niño hacia el uso de la tecnología en la enseñanza de la estadística	[HN2 7L1] ... El niño trabaja con el uso de la tecnología sin problema, usa la computadora para hacer gráficos de barras... [HN2 7L5] ... El niño está familiarizado con el manejo de la computadora, ello construyen los gráficos con facilidad y les agrada...
Comprende	Los docentes consideran que el desarrollo del pensamiento estadístico en el niño ayuda a que tenga una mejor comprensión de los conceptos estadísticos.	[HN1 1L51] ...El niño desde muy temprana edad debe ir conociendo y desarrollando la capacidad del pensamiento estadístico, que se puede presentar dentro de cualquier contexto, y de esta forma pueda adquirir los conocimientos básicos y la aceptación de la estadística. ...
Agrado	Los docentes reconocen que hay maneras de enseñar que le son de agrado para el niño, lo motiva para la adquisición de conocimientos y a la vez le hacen divertido su aprendizaje, fortaleciendo así valores como el respeto el trabajo en grupo.	[EC2 L 30] ...y les pido que hagan grupos en el franelógrafo, (risas)..., eso les gusta mucho, y como les llevo frutas repetidas, ellos hacen, por lo menos un grupo... [EC4 L 29] ...Para los niños esto es muy divertido, porque para ellos es un juego,,....., y así más o menos...
Ansiedad	Los docentes consideran necesario emplear un lenguaje adecuado para la comprensión del niño, evitando generar aprensión e incertidumbre hacia la Estadística, así como la necesidad de conocer la parte afectiva del niño, para diseñar estrategias de enseñanza que faciliten el aprendizaje, en un ambiente cómodo.	[HN1 1L7] ... canalizamos a los niños(as) desde la cotidianidad a que puede detectar diversos problemas, desde lo más insignificantes hasta más adelantados, sin que ellos se vean afectados con el temor de utilizar las probabilidades.... [HN4 1L4] ... grado se le puede dar con más o menos profundidad según el caso. Siempre con palabras acordes (comunes) que lo ayuden a los niños(as) a dar sus respuestas y reflexiones, sin que por ello quede trauma....
Valor	Los docentes consideran la utilidad y valor de la estadística para el niño y su desenvolvimiento en la vida y como esto ayuda al desarrollo del pensamiento estadístico en el niño. Además reconocen que nuevas estrategias de enseñanza motivaría más al niño, le haría ver el valor y utilidad de la Estadística,	[EC2 L18] ..., eso sería interesante, y creo que se les haría más emocionante el aprender estadística, porque creo que así ellos le verían la utilidad a eso que aprenden... [HN1 1L23] ... El niño debe tener una visión práctica del uso de la estadística para aplicar este conocimiento en su vida diaria, con un valor cognitivo asertivo para el desarrollo del pensamiento estadístico....

Tabla 4. Categorías de la dimensión ACTITUD (Cont.)

Categoría	Descripción	Ejemplos de las repuestas de los docentes
Cognición	Consideran necesario conocer las necesidades del niño y sus procesos de aprendizaje para llevarle el contenido con un lenguaje acorde a su nivel de desarrollo cognitivo, donde se planteen situaciones de la cotidianidad del niño. A su vez reflexionan sobre la necesidad de conocer las creencias y habilidades intelectuales del niño. En cuanto a los grados inferiores, al desarrollar el contenido, el niño no presenta dificultad siempre y cuando se emplee un lenguaje acorde al desarrollo cognitivo del niño.	[EC1 L66]generalmente uso la expresión “el que más se repite” o “cuál es el menos frecuente”..... Pero emplear la expresión “es probable” no lo hago creo que es mucho para los niños.... [EC3 L53] ... por lo menos, para buscar la frecuencia, según el grado, les hago la pregunta de maneras distintas: si es para un primer grado los pongo a contarse directamente, les pregunto ¿cuántas niñas son?¿cuántos niños son?.., En cambio para los de quinto a sexto grado ya ahí si les hago la pregunta directa en cuanto a ¿cuál es la frecuencia? ¿cuál es la frecuencia relativa?...

Los hallazgos dan indicios sobre el conocimiento que expresaron los docentes de primaria acerca de la actitud del niño frente a los contenidos de estadística; consideran que una enseñanza basada en la cotidianidad evitaría el rechazo del niño hacia estos contenidos, cuando hacen referencia al empleo del método por proyectos y la actitud que tendría el niño, al expresar:

Pienso que la actitud del niño(a) sería, frente a este tipo de estrategias o formas de aplicarles la estadística, de curiosidad y de agrado ya que se le aplicaría con situaciones de su cotidianidad y esto le permite conocerla... [HN2 2L25].

Por otra parte, los docentes consideran importante que el lenguaje empleado esté enfocado de acuerdo al nivel de desarrollo cognitivo del niño, al argumentar que al tomar en cuenta estos aspectos se evita el trauma y temor del niño hacia la estadística, cuando hacen señalamientos tales como:

...Empleando términos acordes con el nivel y aplicando actividades donde ellos mismos construyan los conceptos y despertando la creatividad en ellos. Se les proporcionarían los temas a tratar y a través de votaciones se escogería (uno) el cual deberá ser donde ello tengan más inquietudes. Por ejemplo, como es la temporada de beisbol, allí hay mucha información que los niños puedan buscar y se trabajan los conceptos de población, muestra y variables cualitativas y cuantitativas, que para ello serían no numéricas y numéricas. Siempre hay que ubicarse en el nivel donde se está para evitar la angustia en el niño hacia la estadística....[HN1 5L36]

... Es una actividad común para el niño, por ser situaciones de su entorno, claro dependiendo el grado y el nivel de complejidad utilizado por el docente, este debe ser acorde al niño.... [HN4 1L1]

De acuerdo a las evidencias, los docentes reflejan que la importancia de emplear estrategias motivadoras, un lenguaje acorde al grado en que se esté enseñando y una enseñanza de la estadística basada en la cotidianidad del niño, hacen que el niño vea la relevancia y el valor de la estadística en el desenvolvimiento de su vida diaria.

Del análisis realizado se desprende que, conocer al niño es un punto fundamental en el proceso de enseñanza, ya que le permite al docente llevar el contenido de estadística sin que esto genere

frustraciones en el niño. Además, al llevar el contenido de estadística empleando la cotidianidad del niño, es aceptado por éste y permite generar un ambiente propicio para su participación activa, facilitando así la construcción de su conocimiento.

Dimensión Dificultad Esta dimensión hace referencia al conocimiento que manifiestan tener los docentes acerca de la fácil o difícil que pueda ser la estadística para el niño. En este contexto las categorías: *previo, dificultad, superar*, se reagrupan para formar esta dimensión (Tabla 5).

Tabla 5. Categorías de la dimensión Dificultad

Categoría	Descripción	Ejemplos de las repuestas de los docentes
Previo	Los docentes consideran que los conocimientos previos ayudan a una adecuada prosecución escolar, actúan como fundamento para la comprensión y el dominio de los conocimientos estadísticos, minimizando las dificultades de aprendizaje.	[HN1 1L45] ...Se debe introducir al niño, en un comienzo de la educación básica, en la estadística, para que cuando lleguen a una etapa o grado superior lleven conocimiento previo de lo que es población, muestra y variable, y no se sientan perdidos y se les dificulte la estadística... [HN2 3L13] ...Claro que sí pues parten de conocimientos que manejan según el grado,...
Dificultad	Los docentes consideran que se debe llevar el contenido al niño de manera clara y sencilla pero a la vez atractiva con el propósito de mostrarlo de una manera diferente, además de considerar la importancia de seleccionar las estrategias de enseñanza apropiadas, que faciliten la adquisición de conocimientos en el niño, y que minimice o evite generar dificultad en el niño	[HN2 4L28] ... Las dificultad sería las que se presentan cuando se le lleva el contenido en forma abstracta que dificultan la comprensión en el niño, el necesita llevarle el contenido por medio de situaciones de su cotidianidad... [HN4 2L14] ... La dificultad sería presentárselo con palabras o contenido que no entienda. Si se empieza realizando una explicación de lo que queremos que ellos conozcan (conceptos de azar y probabilidad) con ejemplos o juegos. De lo contrario estos conceptos se les dificulta si se les dan muy técnicos....
Superar	Para superar las dificultades de la enseñanza consideran una metodología más activa y una aproximación más intuitiva, que le permita relacionar los conceptos con la cotidianidad ofreciendo mecanismos que proporcionen al niño la posibilidad de reconocer errores.	[Hn1 4L13] ... Confunde conceptos; pero a través de actividades metodológicas se pueden ir aclarando en el desarrollo de las actividades, como explicarles a través de un censo el concepto de población y muestra para que pueda diferenciarlos,...

En relación al conocimiento que manifiestan tener los docentes acerca de las dificultades que pudiesen presentar los niños cuando aprenden los contenidos de estadística, los hallazgos muestran indicios de que los docentes consideran necesario el empleo de estrategias motivadoras, como el juego, y con ejemplos concretos extraídos de la cotidianidad del niño, que favorezcan el aprendizaje en el niño, y en consecuencia una clase que llegue más a este.

Puede ser un contenido difícil, dependiendo de las estrategias que el docente utilice para enfocar el mismo.... [HN2 4 L10]

Ahora bien, pareciera destacarse que los docentes consideran importante el conocer las dificultades que manifiestan los niños ante estos contenidos así como los conocimientos previos que este trae, esto le facilitaría, al niño, la comprensión de los contenidos de estadística y, para el docente, el poder planificar a la luz de estos conocimientos las estrategias para abordar estos temas.

Dimensión Errores La dimensión ERRORES (tabla 6) emerge de la reagrupación de las categorías *ejemplos concretos* y *error cognitivo*

Tabla 6. Categorías de la dimensión ERRORES

Categoría	Descripción	Ejemplos de las repuestas de los docentes
Error cognitivo	Los docentes consideran que el error que comete el niño va asociado a su desarrollo cognitivo y su experiencia con estos contenidos.	[HN4 6L6] ...Los errores que cometa el niño va a depender de la capacidad que este pueda tener al aplicarle algunas actividades establecidas....
Ejemplos concretos	Los docentes son capaces de identificar los errores que comete el niño cuando le enseña Estadística, a tal efecto reconocen la necesidad de emplear ejemplos concretos de la cotidianidad del niño y con un lenguaje claro.	[HN1 4L1] Confunde las variables, hay que darle ejemplos muy concretos y claros para que capte con claridad los tipos de variables y así evitar que cometa estos errores... [HN3 6L1] ... Confunde media con mediana, hay que hacerle ejemplos de su cotidianidad para que le sea atractivo y así comprende....

Los hallazgos dan indicios de que los docentes identifican y reconocen los errores que cometen los niños cuando aprenden los contenidos de estadística. Estos hacen énfasis en ciertos errores, que pudiesen llamarse cognitivos, a saber: confunden las variables y la confusión de la media y la mediana; pero acotan que estos errores se pueden evitar si el docente emplea un lenguaje acorde con el nivel del niño:

... No diferencia entre variable categórica y numérica si no se le habla claro, hay que adecuarse al grado en que se está trabajando para darle ejemplos que entienda y pueda diferenciar las variables ...[HN1 4L4]

De acuerdo a las ideas expuestas, vemos como los docentes hacen énfasis en el uso de la cotidianidad para enseñar estadística; indicando cómo el extraer ejemplos de la cotidianidad del niño ayuda a evitar errores en su aprendizaje:

...Confunde media con mediana, hay que hacerle ejemplos de su cotidianidad para que le sea atractivo y así comprende...[HN33 6L1]

En tal sentido, hay indicios de que los docentes pareciera que reconocen la necesidad de conocer el proceso cognitivo del niño, así como *estrategias* y recursos para la enseñanza de la estadística.

Dimensión Preparación Académica Esta dimensión hace referencia a las necesidades de formación que manifestaron los docentes. Es una dimensión que se origina de categorías emergentes (Tabla 7)

Tabla 7. Categorías de la dimensión PREPARACIÓN ACADÉMICA

Categoría	Descripción	Ejemplos de las repuestas de los docentes
Deficiencia	Los docentes dan indicios de que carecen del conocimiento de estrategias de enseñanza específicas para la Estadística, sin embargo la consideran de gran utilidad y valor para el desenvolvimiento del niño en su contexto.	[EC2 L70] ...siento que me falta preparación para llevarles el contenido de estadística y que sea de utilidad para ellos... [EC3 L13] ... necesidad de conocer cómo integrar estos temas con otras áreas, sobre todo con geografía y ciencias.....
Actualizado	Los docentes consideran la necesidad de estar capacitados para desarrollar una enseñanza efectiva y eficiente. El continuo crecimiento profesional le provee el conocimiento de diversas estrategias de enseñanza que le ayuden a controlar el miedo hacia la estadística por parte del niño.	[HN1 1L43] Esto se va a dar con la ayuda del docente que este actualizado en los términos estadísticos... [HN1 1L61]...Esto en la medida que el docente se encuentre preparado y actualizado, además tener dominio de la terminología y conceptos se la hará más fácil ejercitar al niño [HN4 2L5] ...El deber ser es documentarte en todo momento (el docente),...

Los hallazgos muestran que hay indicios de una necesidad de formación en una didáctica específica para enseñar los contenidos de estadística. Desde el momento en que el docente realiza una reflexión sobre su propia práctica, señalando las necesidades de conocer cómo vincular los contenidos de estadística con otras áreas.

Por otra parte, en esta reflexión los docentes señalan que estar actualizado y preparado, les facilita y ayuda a emplear estrategias de enseñanza motivadoras para el niño y le facilitan el aprendizaje.

5. REFLEXIONES FINALES

Los hallazgos que aquí se han expuesto dan indicios de la presencia de las categorías que para Shulman (1986; 1987) integran el conocimiento didáctico del contenido (CDC); a saber: (1) conocimiento sobre la enseñanza (estrategias, recursos y evaluación); (2) conocimiento sobre la comprensión del niño (dificultades, errores y actitud). En tal sentido, se pone de manifiesto ese conocimiento específico que los profesores deben desarrollar para enseñar un contenido específico, como es el caso de la Estadística. Es así como se evidencian los esquemas de trabajo que siguen los docentes de primaria para llevar el contenido de estadística. No obstante, de las reflexiones de los docentes ante el taller, surge una nueva dimensión, no contemplada en los supuestos a priori, como lo es la dimensión *preparación académica*

Conocimiento sobre la enseñanza Se aprecia como el docente pone atención a la manera, que puede considerar, más conveniente para abordar los contenidos de Estadística en el aula de clase y que sean trabajados por los niños, al considerar una variedad de estrategias vinculadas con la promoción del aprendizaje; a saber, el juego, la dramatización, proyectos, pregunta, entre otros. A su vez con el empleo de estas estrategias busca promover en el niño el desarrollo del pensamiento estadístico. El docente se aprovecha de esta diversidad de estrategias para intercalar la evaluación a través de ellas, realizando así una evaluación formativa y continua.

El docente de primaria emplea el libro de texto de matemática y el manual docente como recursos para planificar la clase, esto trae limitaciones en el proceso de enseñanza de la estadística, debido al enfoque tradicional que tienen estos recursos. Es decir, los libros y el manual del docente no presentan los contenidos de estadística orientados a contribuir con el desarrollo del pensamiento estadístico en el niño.

Sin embargo el docente simula una enseñanza dinámica, participativa e interactiva con el niño, dejando ver una auténtica construcción del conocimiento operada por el niño que aprende; pero, realiza su accionar en el aula con un ambiente controlado y dirigido, donde privan las estrategias centradas en el docente a través de una secuencia cerrada y escalonada de actividades.

En ese enseñar Estadística el docente reconoce y emplea una diversidad de recursos para el desarrollo cognitivo del niño. Por ejemplo, al utilizar recursos de la cotidianidad del niño, tales como metras, dados, revistas, periódicos, alimentos, entre otros, hacen atractivo y motivador el proceso de enseñanza de la Estadística, pues el niño logra verse identificado con su entorno.

Conocimiento de la comprensión del niño El docente toma muy en cuenta la parte afectiva del niño, considera que este aspecto incide en su aprendizaje. Manifiesta la necesidad de conocer al niño, sus inquietudes, la actitud que tome ante una estrategia o el empleo de un recurso instruccional. En tal sentido, el docente identifica así cuales son los contextos de aprendizaje que le son significativos al niño. Reconoce la aplicación del método por proyecto como una estrategia de agrado, motivadora y enriquecedora para el aprendizaje del niño.

Los docentes muestran un profundo conocimiento acerca de los errores y dificultades que presentan los niños cuando se enfrentan a los conceptos de estadística. Estas situaciones son tomadas en cuenta por los docentes al estudiar y buscar estrategias de enseñanza alternativas, para evitar, corregir o modificar este aprendizaje. Sin embargo, los docentes de primaria no consideran estas situaciones como oportunidades para enseñar. Los profesores no consideran el conocimiento que aportan los errores y dificultades que cometen sus alumnos, como parte de la base del conocimiento que deben tener para enseñar (Sosa, 2010).

En atención a lo antes expuesto, se ve como los docentes de primaria le dan relevancia al uso de un lenguaje adecuado al nivel del niño y a tomar en cuenta el desarrollo cognitivo del niño para enseñarle los contenidos de estadística sin que cause trauma.

Preparación académica El docente de manera insistente da indicios de cómo a través de situaciones de enseñanza entretije los contenidos de Estadística con otras áreas como geografía y ciencias. No obstante, aún cuando el docente imparte el contenido de estadística se detectó una necesidad sentida de formación docente, en cuanto a conocer una didáctica específica para enseñar estadística. En esta perspectiva, se aprecia como el docente de primaria refleja una actitud positiva hacia su formación permanente como profesional de la docencia. En este orden de ideas, Chick y Pierce (2008) destacan que los profesores de primaria necesitan formación en cuanto a conocimiento didáctico del contenido estadístico para diseñar estrategias e identificar cuáles conceptos se pueden desarrollar a partir de un recurso que utiliza datos del mundo real

Por su parte, los docentes en función a las características de su enseñanza se perciben como si navegaran entre dos modelos didácticos o pudiésemos decir que emplean una mezcla de modelos didácticos, alternándose entre el tradicional y el tecnológico. Sin embargo, en función a los elementos de cada uno de los modelos didácticos expuestos por Gimeno (1985) se detectó que hay un predominio de elementos (elección de contenidos, programación, fuentes del conocimiento, experiencias e ideas iniciales de los alumnos, actividades, ¿qué evaluar?) del modelo tradicional, sobre los elementos (contenidos, estructura del discurso, estrategias metodológicas e interacción) del modelo tecnológico, lo que nos lleva a concluir que los docentes emplean una enseñanza sustentada en el modelo didáctico tradicional que en ocasiones la combinan con aspectos del modelo tecnológico, al mostrar la manera en que llevan al niño para que construya sus conocimientos. En este aspecto podemos inferir la influencia que tienen los libros de texto sobre el accionar del docente, desde el momento en que los docentes toman el libro de texto como recurso para planificar sus clases, en este sentido estos le transmiten la tendencia didáctica presente en su contenido.

Todo esto nos conduce a expresar que los modelos didácticos que prevalecen en el proceso de enseñanza de la Estadística en la escuela primaria son en primera instancia el *modelo didáctico tradicional* acompañado del *modelo didáctico tecnológico*.

El proceso de enseñanza de la Estadística cae en un bucle donde intervienen docentes, libros de texto de matemática y los niños; en el sentido de que el docente planifica las clases sustentado en los libros de texto, los cuales a su vez contienen errores conceptuales, aunado a que el propio docente carece de una sólida formación en estadística y en su didáctica, lo cual conlleva a que enseñe los contenidos de estadística al niño tal y como el docente de primaria los ve y comprende.

En función a los hallazgos, podemos decir que el docente de primaria no solamente requiere un conocimiento adecuado del tema a enseñar sino sobre el tema, lo que implica un conocimiento profesional del contenido. A causa de que carece de sólidos conocimientos de estadística y su didáctica, los cuales necesita fortalecer.

Un conocimiento profundo del contenido entrelazado con el sentido didáctico del conocimiento docente permite al docente de primaria tomar decisiones fundamentales y sólidas, una solidez no entendida como algo rígido, sino dada por un sentido que va más allá, el sentido del conocimiento profesional sobre el contenido estadístico.

Los docentes reflexionaron y dejan en claro la necesidad e importancia de conocer la parte afectiva del niño, sus actitudes, esto le permite al docente la selección adecuada de estrategias y recursos para enseñar estadística.

Finalmente, se aprecia, en los docentes de primaria, un interés por mejorar su accionar docente, referido a la enseñanza de la estadística; lo cual revela un aspecto de atracción muy importante para dirigir programas de formación en ese sentido. Es decir, es una buena oportunidad para diseñar, implementar y evaluar propuestas didácticas en el área de la educación estadística, específicamente en la educación primaria.

REFERENCIAS

- Azcárate, P. (2006). ¿Por qué no nos gusta enseñar Estadística y probabilidad? [Documento en línea] Disponible: http://earlystatistics.net/template/pdf/Azcarate_thales2006_Conferencia.doc. [Consulta: 2008, Abril 18]
- Ball, D. y Cohen, D. (1999). Developing Practice, Developing Practitioners. Toward a Practice-Based Theory of Professional Education. En G. Sykes y L. Darling-Hammond (eds.), *Teaching as the Learning Profession. Handbook of Policy and Practice*. (pp. 3-32) .San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Batanero, C. (2002). *Los Retos de la Cultura Estadística*. [Documento en línea]. Conferencia inaugural dictada en las Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística, Buenos Aires. Disponible: <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/CULTURA.PDF>. [Consulta: 2004, Octubre 15].
- Burgess, T. (2007). *Investigating the nature of teacher knowledge needed and used in teaching statistics*. [Documento en línea]. Tesis doctoral no publicada, Massey University, Palmerston North, New Zeland Disponible: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/dissertations/dissertations.php> [Consulta: 2010, Julio 10].
- Burgess, T. (2008). Teacher knowledge for teaching statistics through investigations. En C. Batanero, G. Burril, C. Reading y A. Rossman (eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Theaching and Teachers Education. Proceedings of the ICMI Study 18 y 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: ICMI/IASE.
- Carvalho, C. (2001). *Interacção entre pares: contributos para a promoção do Desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico, no 7o. Ano de escolaridade*. Tesis de Doctorado. Lisboa: APM.

- Chick, H. y Pierce, R. (2008). Teaching statistics at the primary school level: beliefs, affordances and pedagogical content knowledge. En C. Batanero, G. Burril, C. Reading y A. Rossman (eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teachers Education. Proceedings of the ICMI Study 18 y 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: ICMI/IASE.
- Denzin, N. y Lincoln, Y. S. (2005). The discipline and practice of qualitative research. En N. K. Denzin y Y. Lincoln (eds.) *The Sage handbook of qualitative research* (3a. ed.) (pp. 1-31). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Díaz G., J.; Batanero, C. y Flores, P. (1998). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores de matemáticas. En A. Olivier y K. Newstead (Eds), *Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Sud-África: University of Stellenbosch.
- Eichler, A. (2008). Teachers' classroom practice and students' learning. . En C. Batanero, G. Burril, C. Reading y A. Rossman (eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teachers Education. Proceedings of the ICMI Study 18 y 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: ICMI/IASE.
- Garfield, J. y Ahlgren, A. (1998). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 44-63.
- Gimeno, J. (1985). *Teoría de la enseñanza y desarrollo del currículo*. Madrid: Anaya
- Gómez, A. y Sánchez, E. (2008). El pensamiento estadístico en la planificación de lecciones de estadística por profesores de secundaria. En R. Luengo; B. Gómez; M. Camacho y L. Blanco (eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 359-368). Bajadoz, España: SEIEM.
- Grossman, P.L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press.
- Guba, E. G. y Lincoln, Y. S. (2005). Paradigmatic controversies, contradictions, and emerging confluences. En N. K. Denzin y Y. Lincoln (eds.) *The Sage handbook of qualitative research* (3a. ed.) (pp. 191-215). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Lee, H. y Mojica, G. (2008). Examining how teachers' practice support statistical investigations. En C. Batanero, G. Burril, C. Reading y A. Rossman (eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teachers Education. Proceedings of the ICMI Study 18 y 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: ICMI/IASE
- León, N. (1998). Explorando las nociones básicas de probabilidad a nivel superior. *Revista Paradigma*. [Revista en línea] Disponible: <http://www.revistaparadigma.org.ve/Doc/Paradigma982/Art7.htm> [Consulta: 2007, marzo 17]
- Loughran, J., Milroy, P., Berry, A., Gunstone, R., y Mulhall, P. (2001). Documenting science teachers' pedagogical content knowledge through papers. *Research in Science Education*, 31, 289-307.
- Magnusson, S., Krajcik, J., y Borko, H. (1999). Nature, sources, and development of pedagogical content knowledge. En J. Gess-Newsome y N. B. Lederman (Eds.), *Examining pedagogical content knowledge: The construct and its implications for science education* (pp. 95-132). Kluwer.
- Medina, A. y Salvador, F. (2002). *Didáctica general*. Madrid, España: Prentice Hall.
- Ministerio de Educación. (1980). Currículo Básico Nacional. Caracas: Autor
- Ministerio del Poder Popular para la Educación (M.P.P.E.) (2007). *Currículo del Subsistema educación primaria bolivariana*. Caracas: CENAMEC

- Moore, D. S. (1997). New pedagogy and new content: the case for statistics. *International statistical review*, 65: 123-165
- Patton, M. (2002). *Qualitative evaluation and research methods*. (3a e.d.) USA: Sage
- Pinto, J. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: Estudios de casos con profesores de estadística e carreras de Psicología y Educación*. [Documento en línea]. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Salamanca, España. Disponible: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/dissertations/dissertations.php> [Consulta: 2011, Octubre 19].
- Rajadell, N. (2001). Los procesos formativos en el aula: estrategias de enseñanza-aprendizaje. En F. Sepulveda y N. Rajadell (coords.), *Didáctica general para psicopedagogos*. (pp. 465-525). Madrid, España: Eds. De la UNED.
- Rodríguez, G.; Gil, J. y García, E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Granada, España: Aljibe.
- Sanoja, J. (2007). *Análisis de las actitudes hacia la Estadística en los futuros profesores de educación integral*. Trabajo de ascenso no publicado, Universidad Pedagógica Libertador. Maracay.
- Segall, A. (2004). Revisiting pedagogical content knowledge: the pedagogy of content/the content of pedagogy. *Teaching and Teacher Education* 20, 489-504.
- Shaughnessy, J.M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15, 4-14.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1-22.
- Stake, R. (2010). *Qualitative research: Studying how things work*. USA: The Guilford Press.
- Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Colombia: Universidad de Antioquia
- Taylor, S. y Bogdan, R. (1987). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación*. España: Paidós
- Watson, J.; Callingham, R. y Donne, J. (2008). Establishing PCK for teaching statistics. En C. Batanero, G. Burril, C. Reading y A. Rossman (eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teachers Education. Proceedings of the ICMI Study 18 y 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: ICMI/IASE
- Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-265.

THE PRIMARY SCHOOL TEACHER'S DIDACTICAL CONTENT KNOWLEDGE OF STATISTICAL

ABSTRACT

Statistics is a part of general education desirable in every citizen, which should begin from the elementary school, as contemplated in Venezuelan school curriculum. Consequently, the primary teacher should have the proper training to impart. The above directed interested in finding out about the didactical content knowledge statistical elementary teacher. The research was framed under the qualitative approach with an ethnomethodological design. Key informants were teachers of a school estatal located in Maracay, Aragua, Venezuela. The results revealed that, in the study group, teachers implement various strategies that make statistics understandable, facilitating knowledge acquisition and guiding the child's attention. Also, for teachers, using the project method, generates in children a positive attitude towards learning statistics. As for teaching, the subjects considered to be employed appropriate language level taught, which helps minimize the learning difficulties in the child. Moreover, it was possible to demonstrate that the primary teacher, not only requires knowledge of the statistical discipline but also didactic training, so that the process tends to strengthen teaching statistical thinking in the child.

Keywords: *Teaching Statistics, Statistical Thinking, pedagogical content knowledge, primary school.*

O CONHECIMENTO PEDAGÓGICO DO CONTEÚDO ESTATÍSTICO PROFESSORES DA EDUCAÇÃO INFANTIL

RESUMO

A estatística é uma parte da educação geral desejável em cada cidadão, que deve começar a partir do ensino fundamental, conforme previsto no currículo escolar venezuelano. Consequentemente, o professor primário deve ter a formação adequada para dar. A descrição acima dirigido interessado em saber sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo estatístico professores da educação infantil. A pesquisa foi enquadrada sob a abordagem qualitativa com um design etnometodológica. Informantes-chave foram professores de estatal escola localizada em Maracay, Aragua, Venezuela. Os resultados revelaram que, no grupo de estudo, os professores implementar várias estratégias que fazem estatísticas compreensível, facilitando a aquisição de conhecimentos e orientar a atenção da criança. Além disso, para os professores que utilizam o método de projeto, gera na criança uma atitude positiva para as estatísticas de aprendizado. Quanto à educação, os indivíduos considerados a ser empregada no idioma adequado nível é ensinado, o que ajuda a minimizar as dificuldades de aprendizagem em crianças. Além disso, foi possível demonstrar que o professor primário, não só requer o conhecimento da disciplina estatística, mas também a formação didático, de modo que o processo tende a reforçar a ensinar o pensamento estatístico na criança.

Palavras-chave: ensino da estatística, o pensamento estatístico, o conhecimento pedagógico do conteúdo, escola primária.

JULIA ELENA SANOJA
Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Maracay, Venezuela
jusanoja@gmail.com

Doctor en Educación, Magíster Scientiarum en Estadística, Ingeniero Industrial. Actualmente es Profesor Asociado del Dpto.-Matemática, UPEL-Maracay, Estado Aragua, Venezuela, donde coordina: *Centro de Investigación en Enseñanza de la Matemática usando nuevas tecnologías* (CEINEM-NT), y la línea de investigación: *Educación Estadística*. Miembro activo de la ASOVEMAT-ARAGUA desde el 2006. Tutora de tesis de maestría y doctorado. Entre sus publicaciones: “*Actitudes y conocimiento acerca de la Estadística en secundaria*”. Memorias de la V JIEM y VI JIDM, UPEL Maracay. (2011) “*Explorando Las ideas acerca de estadística en estudiantes universitarios*”, “*Explorando los conceptos básicos de estadística en estudiantes de segundo año*” en Memorias del VII Congreso Venezolano de Educación Matemática (2010); “*Explorando las ideas sobre los promedios en estudiantes universitarios*” en memorias de XIII Jornada de Investigación, UPEL Maracay (2009); “*Las actitudes hacia la Estadística en los futuros docentes*”, en Memorias del VI Congreso Venezolano de Educación Matemática (2007); *Las actitudes hacia la estadística en los futuros docentes* en Enseñanza de la Matemática, Volumen 12 al 16, número extraordinario, (2007); *Paquetes tecnológicos para el tratamiento de datos en investigación en educación matemática*. Paradigma, 28(1), y *Análisis de Regresión Logística Múltiple y su aplicación en la biomedicina*. Revista de la Facultad de Agronomía-UCV. 29(1)

JOSÉ ORTIZ BUITRAGO
Universidad de Carabobo, Venezuela
ortizbuitrigo@gmail.com

Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada, España. Actualmente es profesor Titular de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, Universidad de Carabobo, Campus La Morita, Maracay, Estado Aragua, Venezuela, donde es docente de matemáticas y director de proyectos de la Unidad de Investigación del Ciclo Básico y dirige la línea de investigación en Educación Matemática: Pensamiento Numérico y Algebraico. Investigador acreditado del Programa de Promoción de la Investigación y la Innovación. Profesor invitado por las Universidades de Córdoba y Granada, España. Tutor de varias tesis de maestría y doctorado. Miembro del comité científico de las revistas: *UNIÓN (Revista Iberoamericana de Educación Matemática)*; *EPSILON (Revista de Educación Matemática)*; y, *Revista Digital Educativa Hekademos*. Coordinador, en Venezuela, del grupo internacional de innovación educativa INNOVAGOGÍA, con sede en España. Miembro del grupo de investigación y difusión en educación matemática GIDEM. Ha participado como ponente en eventos, de carácter nacional e internacional, relacionados con Educación Matemática. Tiene más de 50 publicaciones en revistas científicas, actas de congresos y capítulos de libros; entre las cuales destacan: *Formación inicial de profesores de matemáticas y la modelización en ambientes tecnológicos*; y, *Organizadores del Currículo como Plataforma para el Conocimiento Didáctico*; entre otras.

LA CLASE DE ESTADÍSTICA MÁS ALLA DEL CURRÍCULO: UN ESTUDIO DE CASO EN LA ESCUELA PRIMARIA COLOMBIANA¹

LUCIA ZAPATA-CARDONA

PEDRO ROCHA SALAMANCA

RESUMEN

El presente artículo describe una clase de estadística en un grado quinto de la básica primaria en una institución educativa colombiana. Se contrasta esta clase con las demandas del currículo nacional oficial que establece los estándares mínimos de calidad para el área de matemáticas. Este artículo plantea reflexiones sobre las tensiones que una profesora de estadística tiene que enfrentar para atender las demandas curriculares actuales; un currículo que por primera vez incluye la estadística en la matemática escolar de primaria y secundaria. Finalmente, se resalta la importancia de los programas de desarrollo profesional como aliados en el éxito de la implementación de cualquier reforma curricular.

Palabras clave: Currículo; formación de profesores; educación estadística.

1. INTRODUCCION

La presente reflexión surge de un estudio cuyo propósito fundamental fue investigar el conocimiento pedagógico estadístico de los profesores que tienen bajo su responsabilidad la enseñanza de esta área. La investigación de referencia tuvo como participantes dieciocho profesores de estadística de la educación básica y media de dos grandes ciudades colombianas. La información para dicho estudio fue recogida de video grabaciones de clase, entrevistas a profundidad con los profesores antes y después de las clases y artefactos documentales (los resultados del estudio en mención se encuentran disponibles en otras fuentes [Zapata-Cardona y Rocha, 2011; Zapata-Cardona, 2012; Zapata-Cardona y Rocha, 2013]). El análisis profundo de una clase de estadística de uno de los participantes de la investigación en mención orientó la reflexión en torno a las tensiones que viven los profesores colombianos cuando tienen que asumir las demandas de un currículo nacional que incluye por primera vez la estadística en los niveles preuniversitarios. La problemática descrita en este manuscrito es un ejemplo de lo que sucede en el día a día de muchos salones de clase colombianos, es una problemática recurrente y debe ser urgentemente atendida. No hay certeza que esta sea una problemática compartida

¹ Trabajo auspiciado por el Instituto colombiano para el desarrollo de la ciencia y la tecnología–Colciencias–bajo el contrato 782 de 2009 Código 1115-489-25309

en otros países latinoamericanos, pero explicitar lo que sucede en una clase en particular podría hacer evidente las complejidades de la enseñanza de la estadística y ulteriormente orientar la reflexión en términos de la formación de profesores de estadística.

Colombia ha tenido grandes reformas en educación, pero la historia ha mostrado que los resultados de la implementación de dichas reformas son simplemente modestos, pues la dinámica de los salones de clase cambia muy poco. Incluso profesores ávidos de cambio no logran transformar su enseñanza porque asimilan las estrategias de las reformas a su actual repertorio con muy poco cambio sustantivo (Penuel, Fishman, Yamaguchi, y Gallagher, 2007). La última directriz que tienen los profesores de Colombia en cuanto a la enseñanza de la estadística son los lineamientos curriculares (MEN, 1998) y los estándares de calidad para el pensamiento aleatorio (Ministerio de Educación Nacional, 2003). Esta reforma curricular es trascendental en muchos aspectos pero especialmente en el área de matemáticas porque es la primera vez que la estadística hace parte oficial del currículo de matemáticas. Con la mencionada reforma se espera que los estudiantes de ciclos preuniversitarios sean expuestos a contenidos estadísticos y que los utilicen apropiadamente para clasificar, organizar, describir, representar, explicar y predecir fenómenos fundamentados en datos reales. También se espera que los estudiantes desarrollen habilidades para formular y resolver problemas, interpretar información estadística, diseñar experimentos y desarrollar razonamiento estadístico (Ministerio de Educación Nacional, 2003).

En este artículo describimos las tensiones por las que pasa Carmen², una profesora de matemáticas que tiene bajo su responsabilidad la enseñanza de la estadística, en su afán de atender las demandas del currículo nacional. La historia de Carmen es ejemplar y especialmente llamativa si se intuye que muchos profesores en otros contextos socioculturales también podrían pasar por tensiones similares. Estudios como el de Estrada y colaboradores (2004) y Zapata y Rocha (2011) revelan la dificultad de los profesores con la estadística y esto es determinante para la acción en el aula. Carmen es una profesora con cerca de quince años de experiencia docente quien orienta el área de matemáticas en los grados cuarto y quinto de la educación básica. Ella tiene un título profesional en educación (licenciada en educación primaria), lo cual la certifica para enseñar todas las áreas de formación en la escuela primaria. Carmen se describe a sí misma como una profesora que le gusta partir de los intereses de sus estudiantes, que favorece el trabajo colaborativo y que le gusta aprender. Es una profesora de mente abierta y quien constantemente está en busca de nuevas formas y nuevas prácticas para implementarlas en su salón de clases. Ella misma percibe sus clases de matemáticas como exitosas, pero en la clase que se describe en este manuscrito se observa complejidad. Las excepcionales cualidades de Carmen no

² Los nombres usados en este reporte son seudónimos para proteger la identidad de los participantes.

parecen suficientes para promover el razonamiento estadístico de los estudiantes y esto es lo que se intenta discutir a continuación.

Para que el lector tenga una idea del contexto sociocultural en el cual se ubica la institución educativa donde Carmen es profesora, se mencionarán algunas características. La institución es un centro educativo de carácter público y está ubicado en una zona rural, en jurisdicción de la segunda ciudad más grande de Colombia y en un barrio relativamente nuevo. El barrio nació hace unos veinte años como respuesta a un proyecto de reubicación de familias que habían padecido desastres naturales y posteriormente para acoger a familias desplazadas por la violencia. La comunidad donde está ubicada la institución se caracteriza por los bajos ingresos económicos de sus habitantes (aproximadamente el 87% de la población es desempleada), altos índices de maternidad adolescente y de hogares monoparentales. Para la época en la cual se llevó a cabo este estudio, los resultados de las pruebas SABER³ del área de matemáticas para el grado 5° de esta institución revelan que el 50% de los estudiantes se ubica en los niveles de desempeño insuficiente y mínimo, y únicamente un 2% se ubica el nivel avanzado (Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación–ICFES, 2010).

En este artículo se describe una clase de estadística diseñada y gestionada por Carmen para el grado quinto de la básica primaria y se resaltan las tensiones que enfrenta esta profesora en la enseñanza de la estadística. La temática de la clase en palabras de Carmen fue “recolección, organización e interpretación de datos” y también en palabras de Carmen “diseñada atendiendo a las exigencias del currículo” (entrevista Carmen, mayo 2010).

2. LA DINÁMICA DE LA CLASE DE ESTADÍSTICA

Antes de la clase, Carmen expresó en una entrevista que el objetivo de la lección era que “los estudiantes aprendieran a recolectar datos, ubicarlos en una gráfica e interpretarlos”. Además señaló varias razones para enseñar este tema en su clase. Primero, es un tema que generalmente aparece en las pruebas estandarizadas que deben tomar los estudiantes al finalizar la básica primaria. Segundo, desde la coordinación del área de matemáticas de la institución educativa en la que se desempeña ha habido una extensa discusión sobre la importancia de la estadística en todos los niveles. Tercero, el currículo colombiano actual para la educación básica demanda la inclusión del pensamiento aleatorio y los sistemas de datos en la clase de matemáticas (entrevista Carmen, mayo 2010).

Al iniciar la clase los estudiantes estaban ubicados en asientos individuales, dispuestos en forma semicircular y dejando libre el espacio del centro del salón. Carmen presentó a los estudiantes el objetivo de la lección escribiendo en el tablero el logro esperado. Luego, escribió el título *Actividad* y

³ La prueba SABER es una prueba estandarizada nacional que se aplica en los grados quinto y noveno cada tres años y se evalúa en cuatro niveles de desempeño: insuficiente, mínimo (básico), satisfactorio y avanzado.

seguidamente preguntó a un estudiante “María, ¿usted cuánto calza?” Hasta ese momento los estudiantes aún no conocían la pretensión de la profesora ni la razón de la pregunta. A medida que avanzaba la clase, se hizo evidente que esta pregunta era esencial para Carmen poder establecer ciertos límites de una distribución de frecuencias que se generaría. En seguida, la profesora hizo que los estudiantes escribieran en sus cuadernos el siguiente enunciado: “Pregunto a mis compañeros cuánto calzan y ubico los datos en el *cuadro*.” Carmen dibujó entonces en el tablero un cuadro como el mostrado en la Figura 1 y explicó a los estudiantes que debían pasar por el puesto de cada compañero, preguntar la talla del calzado y registrar el valor en la columna “compañero” con una marca vertical. Carmen insistió que el número 30 en el cuadro significaba que eran 30 compañeros y que cuando llegaran a 30 marcas debían parar de preguntar. Carmen comunicó a los estudiantes que tendrían alrededor de 15 minutos para recoger los datos. Con este anuncio los estudiantes empezaron su acción, recolectando la información de sus compañeros.

Talla	Compañero	Total
33		
34		
35		
36		
37		
38		
		30

Figura 1: Propuesta de Carmen para organizar la información

Hay varios aspectos interesantes hasta el momento de la descripción que vale la pena resaltar. La clase empezó con una actividad cuya ventaja fue que permitió a los estudiantes recolectar sus propios datos, los que además tenían relevancia para el grupo. No obstante, el hecho de enunciar esta situación como una actividad y no como un problema redujo el potencial en la construcción de conocimiento de los estudiantes. El solo hecho de sugerir el cuadro para organizar los datos condicionó a los estudiantes quienes no tuvieron ninguna posibilidad de proponer estrategias diferentes de organización de la información. La dinámica de la clase hubiese sido diferente planteando la misma situación en términos de problema y no en términos de actividad. La actividad, concebida desde el punto de vista de Carmen, sugiere una acción, mientras el problema sugiere la búsqueda de solución y bajo esta perspectiva el problema tiene mayor potencial didáctico. Un problema por definición “exige experimentar, es en cierta forma una aventura intelectual completa” (Pérez, 2009, p.5). Enunciar la misma situación en

términos de problema hubiera llevado a preguntas como: (1) ¿Qué tan grande es el pie de mis compañeros de clase?; (2) Si fuéramos a comprar zapatos para los compañeros de mi clase, ¿qué números tendríamos que comprar?; (3) Si fuéramos a comprar un par de zapatos para rifar en nuestra clase ¿qué número compraríamos para que se beneficiaran más estudiantes? Note que enunciarlo en términos de problema hubiera llevado no solamente a preguntar a los compañeros de la clase por su talla en calzado, sino que hubiera llevado a plantear el diseño para la recolección de datos, estrategias de organización de los datos, análisis e interpretación. Es decir, se hubiera llevado a los estudiantes a simular la ruta que siguen los estadísticos en la resolución de problemas. Esta ruta ha sido sugerida por varios educadores estadísticos en: (1) La GAISE (por sus siglas en inglés): Guía para la instrucción y la evaluación en educación estadística (Franklin y otros 2007; Aliaga, Cobb, Cuff, y Garfield 2007) y (2) El ciclo investigativo PPDAC: Problema, Plan, Datos, Análisis y Conclusiones (Pfannkuch y Wild 1998; Wild y Pfannkuch 1999; Pfannkuch y Wild 2000).

La forma en la que se orientó la actividad dejó varios asuntos que al parecer Carmen no pudo predecir en la gestión de su clase. Tan pronto anunció a sus estudiantes que podían empezar a recoger información, muchos salieron de sus lugares preguntando a sus compañeros “¿cuánto calza?”. El caos generado hizo que los estudiantes recogieran la información sin llevar un registro para no repetir o suprimir informantes.

Una vez los estudiantes terminaron la recolección de datos y los ubicaron en el cuadro sugerido, Carmen anunció la segunda parte de la actividad diciendo: “ubica los datos en el gráfico”. Hasta el momento los estudiantes parecían no saber a qué tipo de gráfico se refería el enunciado de la actividad. Ellos se miraban, pero no emprendían acción alguna y parecían esperar indicaciones mucho más específicas con respecto a la actividad. Por tal razón, Carmen dibujó en el tablero una línea horizontal y una línea vertical que se cortaban como formando el primer cuadrante de un plano cartesiano. Luego indicó que en el eje horizontal se ubicaría la talla y en el eje vertical la cantidad de alumnos. Carmen nunca se refirió a esta cantidad de alumnos usando el término estadístico de *frecuencia*. Carmen pretendía hacer las marcas para el eje de la frecuencia y preguntó a los estudiantes: “¿cuál fue el máximo número que les dio?”. La pregunta generó múltiples respuestas por parte de los estudiantes tales como: treinta, ocho, seis, siete, nueve y diez. Carmen sistemáticamente ignoró las respuestas incorrectas y solamente admitió las que ella pensó que respondían cercanamente a su pregunta. No se detuvo a indagar por qué algunos estudiantes dieron *treinta* como respuesta a su pregunta. En este momento de la clase, Carmen ya había notado que los estudiantes habían conseguido diferentes conjuntos de datos y tuvo que ingeniarse una forma de solucionar este inconveniente. Ella aclaró:

Si las tablas nos dieron diferentes fue porque hubo compañeros que nos dieron tallas diferentes, a unos les dieron una y a otros les dieron otra. Pero no importa. Quiere decir que este gráfico a todos les va a quedar diferente.

En una entrevista posterior se preguntó a Carmen como podía explicar que los estudiantes habían obtenido conjuntos de datos diferentes y ella lo explicó así: “cuando estuve revisando [los cuadernos de los estudiantes] inmediatamente se detectó que les dieron valores diferentes. Lo que pasa es que hay niños que a unos les dan una información y a otros les dan otra. Cambian la información” (entrevista Carmen, mayo 2010). Es claro que Carmen no relacionó las diferencias en los conjuntos de datos a la falta de un plan de recolección de la información. A pesar de esta situación, que parecía inconveniente, Carmen pudo orientar el resto de la clase. Eventualmente, esta dificultad no se habría presentado si todos los estudiantes hubieran tenido la posibilidad de tener el mismo conjunto de datos.

Aunque parece que Carmen no le dio mucha importancia a la diferencia en los conjuntos de datos generados por los estudiantes, este si es un asunto importante. Todos los estudiantes estaban interesados en la misma población y los resultados debían ser los mismos, no había posibilidad de variación como sucede en las distribuciones muestrales. Posiblemente, el mensaje que recibieron los estudiantes es que si una distribución de frecuencia de un conjunto de datos es realizada por diferentes personas los resultados pueden variar, lo cual no es cierto. La distribución de frecuencias de un conjunto de datos es única. Además, esta forma de orientar la recolección de los datos pudo haber generado confusión en los estudiantes en los conceptos de muestra y censo.

Una vez resuelto como proceder con las diferencias en los conjuntos de datos, Carmen pidió a los estudiantes que ubicaran los datos del cuadro en el gráfico que les había sugerido pero los estudiantes empezaron a hacer preguntas de aclaración. Las preguntas de los estudiantes indicaron que aún no estaban seguros acerca de lo que tenían que hacer en el gráfico. Carmen no respondió a las preguntas sino que decidió darles una ayuda adicional: “voy a mostrarles con un ejemplo y ya el resto lo hacen ustedes”. Inmediatamente, Carmen hizo la primera barra de lo que sería un gráfico de barras, pero al que no llamó así. Una vez Carmen ubicó el primer dato dijo a la clase: “Muy bien cada uno hace su tabla [refiriéndose al gráfico de barras] y me la muestra”. Es necesario recordar que previamente Carmen había usado la palabra *cuadro* para referirse a la *tabla de distribución de frecuencias* y en el episodio que recién se describe usó la palabra *tabla* para referirse al *gráfico de barras*. La falta de consistencia en el lenguaje podría ser problemático. Con el propósito de estimular la clase a la acción, Carmen dijo a sus estudiantes: “Voy a poner quince excelentes a los primeros quince que me muestren la tabla”.

Los estudiantes continuaron haciendo preguntas de aclaración y Carmen terminó por acceder a ubicar en el gráfico el segundo dato. La Figura 2 muestra los esbozos que Carmen hizo en el tablero para sugerir a los estudiantes como realizar el gráfico. Similar a como sucedió con la primera actividad, solamente se esperaba que los estudiantes ubicaran los datos en formatos predeterminados. No se les

dio la oportunidad de crear gráficos que tuvieran sentido para ellos. En relación a los gráficos, hay estudios que reportan la dificultad que tienen los estudiantes tanto de nivel secundario como terciario, en la interpretación de gráficos estadísticos (Watson y Moritz, 2001). Si los estudiantes no están involucrados en la manipulación de los datos y en la construcción de formas significativas de representar visualmente la distribución en estudio, estas dificultades podrían persistir. Una de las recomendaciones en la literatura es implicar a los estudiantes en la solución de problemas que los lleven por las diferentes etapas de un proceso investigativo. Bajo esta mirada el diseño de formas de representación de los datos está inmerso en el proceso investigativo y es competencia directa del investigador (Pfannkuch y Wild, 2000).



Figura 2: Representación sugerida por Carmen en el tablero

En las actividades propuestas por Carmen, la variable de interés era *talla en el calzado*. Sin embargo, durante la clase no se mencionó el término *variable*. Se asumió que los estudiantes comprendían que se estaba manejando un atributo. Es interesante resaltar que la variable *talla en el calzado* es una variable de tipo discreto, pero en el gráfico que insinuó Carmen (Figura 2) parece sugerir que se manejó como una variable de tipo continuo. Note que en la Figura 2 las categorías están juntas; en vez de un gráfico de barras Carmen dibujó un histograma.

Cuando los estudiantes terminaron los gráficos sugeridos, Carmen les propuso unas tareas adicionales: (a) Responder las preguntas *¿cuánto calza la mayoría?* y *¿cuál es la talla que menos calzan?*; (b) Se hizo una encuesta en 5^o2 y estos fueron los datos (Tabla 1), ubícalos en el gráfico.

Tabla 1: Datos dados por Carmen para la tercera actividad

Calzado	Niños
33	2
34	1
35	15
36	7

Para esta actividad los estudiantes respondieron las preguntas en forma individual en sus cuadernos y se acercaban a Carmen con sus producciones en busca de aprobación. En algunos momentos, Carmen enseñó a la clase unos cuadernos de estudiantes que habían hecho gráficos organizados y que habían puesto color. No hubo discusión ni puesta en común de las respuestas que dieron los estudiantes. Estas preguntas eran buenas oportunidades para introducir y aclarar conceptos, pero esto no tuvo lugar en la clase. Es de resaltar que las preguntas propuestas a los estudiantes en esta actividad eran preguntas que únicamente demandaban una lectura literal de los datos. No hubo preguntas que llevaran a los estudiantes a establecer comparaciones o a pensar más allá de los datos. De acuerdo con Curcio (1989, citado por Batanero, Godino, Green, Holmes, y Vallecillos 1994), un componente esencial en la alfabetización cuantitativa es la destreza en la lectura crítica de datos. Curcio enuncia tres niveles: (a) leer los datos, (b) leer entre los datos y (c) leer más allá de los datos. El primer nivel es literal mientras que los dos siguientes requieren interpretar y hacer inferencias. Es evidente que la clase de Carmen no llevó a los estudiantes más allá del primer nivel.

Adicionalmente, los estándares de calidad (Ministerio de Educación Nacional, 2003) sugieren que los estudiantes recojan datos relevantes a su entorno, pero que esta acción conlleve al desarrollo de habilidades y de formas de pensamiento superiores como clasificar, organizar, representar, explicar, justificar, resolver, predecir, interpretar, modelar, reformular, y sugerir nuevas formas. No obstante, la clase de Carmen parece estar más intencionada a seguir procedimientos que a fortalecer estas formas superiores de pensamiento. Así lo confirmó Carmen en una entrevista posterior en la cual se le preguntó qué era lo que privilegiaba en una clase y ella respondió:

Para mí es muy importante el procedimiento [...] porque me parece que la comprensión es el resultado del procedimiento. De un buen procedimiento ya los niños comprenden lo que están haciendo. Mientras haya un buen procedimiento es mucho más fácil que ellos comprendan. En caso de que no, ahí es donde yo ya intervengo y vengo a orientarlos. Pues si no hay una adecuada comprensión, entonces ahí es donde está mi labor; pero yo si le hago mucho énfasis al procedimiento (entrevista Carmen, agosto, 2010).

Aunque el objetivo de la clase era: “aprender a recolectar datos, ubicarlos en una gráfica e interpretarlos” parece que la mayor parte del tiempo de la clase se dedicó a la recolección y fueron pocos los elementos que estimularon la interpretación. Para contrastar estas apreciaciones, se le

preguntó a Carmen en una entrevista posterior acerca del componente interpretativo de la clase y ella dijo: “Pues la interpretación la enfoqué desde las preguntas. En el momento en que hicimos las preguntas de cuánto calza la mayoría, [...] hasta ahí llegó la interpretación. Ahí fue donde yo enfoqué la interpretación, con esas preguntitas” (entrevista Carmen, agosto, 2010).

La evaluación propuesta por Carmen fue una actividad para hacer en casa y se enunció así: “Realiza la misma encuesta en tu casa y ubica los datos en el gráfico”. Esta actividad tiene varios inconvenientes. Primero, se favorece el aspecto procedimental más que el conceptual. El estudiante fue estimulado exclusivamente a repetir lo que hizo en clase y no hubo mayores retos. Segundo, el promedio de personas por familia en esta comunidad es cinco, pero hay familias compuestas únicamente por dos miembros. Esto hace que una distribución de frecuencias tenga poco sentido. Tercero, las condiciones de la tarea son diferentes a las condiciones en la clase. En una familia de dos personas, por ejemplo, es muy poco probable que se repitan tallas de calzado.

En la clase de Carmen ningún estudiante fue invitado a explicar su razonamiento. Fue difícil detectar cómo los estudiantes entendieron o qué tan bien entendieron el tema porque la actividad de evaluación fue replicar exactamente lo que se había hecho en la clase. ¿Podría esta actividad revelar las dificultades del estudiante? ¿Podría esta actividad revelar los aciertos del estudiante? ¿Podría esta actividad revelar el grado en el que se cumplió el objetivo? En una entrevista posterior a la clase se le preguntó a Carmen si la actividad evaluativa fue suficiente para dar cuenta del aprendizaje de los estudiantes a lo cual respondió: “No, todavía quedan faltando más actividades. Uno en una clase no detecta las dificultades y las fortalezas. De pronto se detectan las fortalezas en los primeros que terminan, en los que están más activos”. Carmen percibió que la actividad propuesta fue insuficiente para evaluar el conocimiento de los estudiantes y al mismo tiempo indicó que podría dar cuenta de los avances de algunos estudiantes. Esta percepción, sin embargo, pudo haber sido motivada por la estrategia competitiva que Carmen dispuso en la clase al incentivar a quienes terminaran primero. No hubo forma de tener un indicio del progreso en la actividad de quienes no se acercaron a Carmen.

3. DISCUSIÓN

En efecto, la clase de Carmen es muy diferente a la que se puede encontrar tradicionalmente en un salón de matemáticas. Carmen hizo un esfuerzo consciente para involucrar los aspectos sugeridos por el currículo nacional y por las nuevas tendencias en educación estadística en su salón de clases. Ella incluyó actividades que son de interés para los estudiantes, pero pareciera asumir que con el desarrollo de las actividades todas las ideas estadísticas están implícitas o que el desarrollo de estas ideas es

espontáneo. Infortunadamente, la realidad es mucho más compleja. Con la información disponible, no hay evidencia para determinar la profundidad del desarrollo de las ideas de los estudiantes.

La organización de los estudiantes en la clase no fue convencional. Los estudiantes estaban organizados en semicírculo. Parece que esta distribución es favorable porque los estudiantes tienen la posibilidad de mirarse los unos a los otros cuando comparten su punto de vista. Sin embargo, en esta clase no hubo discusiones. No hubo argumentación por parte de los estudiantes, el trabajo principal lo hizo la profesora. Aunque el salón estaba dispuesto para favorecer la discusión y la argumentación, la clase se llevó a cabo centrada en la profesora. Ningún estudiante habló con otro acerca de ideas estadísticas y Carmen tampoco animó este tipo de conversaciones entre los estudiantes. Carmen siempre inició todas las interacciones en el salón de clase, bien fuera con toda la clase o con cada estudiante. El papel de estudiante fue responder, no iniciar. Sin duda alguna, la clase estaba dispuesta en una forma relajada. Esta es una innovación de la profesora, disponer el salón en una forma no tradicional, pero no se le sacó ventaja a esta disposición.

La clase de Carmen se desarrolló dócilmente. Es decir, los estudiantes atendían con prontitud las propuestas y demandas de la profesora. Una de las razones para que el control de la clase, en términos de las normas, haya sido tan tranquilo podría estar asociada con la cultura de este salón de clases. Los estudiantes hacen silencio cuando la profesora habla. La voz de Carmen es suave, pero enérgica y los estudiantes atienden lo que se les propone; la profesora inicia las interacciones y el rol de los estudiantes es responder a ellas. Esta forma de interacción podría ser debido a que Carmen no tenía un conocimiento estadístico profundo. Quienes carecen de un conocimiento profundo podrían no ser conscientes de todas las formas que puede tomar la temática enseñada. Adicionalmente, aunque Carmen tuviera un conocimiento estadístico, este parecía ser un conocimiento estático, una cadena de verdades y no un conocimiento flexible y una forma de solucionar problemas. Preguntar, explicar, justificar y argumentar parecían formas extrañas de orientar su clase. Su rol al parecer era hacer el conocimiento accesible a los estudiantes. En otras palabras, explicarles detalladamente que era lo que se esperaba que ellos hicieran. Carmen, sin duda alguna es una profesora comprometida. No obstante, la enseñanza de la estadística de esta forma superficial oculta muchas posibilidades pedagógicas. Aunque también podría ser una protección ante preguntas profundas, confusiones e incertidumbres.

La forma de orientar la clase no garantiza que los estudiantes hayan logrado el objetivo propuesto. A los estudiantes se les pidió sistematizar los datos en una tabla, pero esta acción pudo haber sido llevada a cabo por estudiantes sin comprender el resultado final de la tabla. No hubo oportunidad de contrastar esta información con los estudiantes.

Aunque en la clase hubo lugar para el conocimiento estadístico, el lenguaje estadístico fue el más ausente. Carmen usó el mismo término para referirse a dos conceptos diferentes y usó términos que no

corresponden al lenguaje estadístico. Esta es una más de las tensiones con las que los profesores de estadística tienen que luchar cada día.

4. REFLEXIONES EN TORNO AL CURRÍCULO

Muchas de las reformas en educación demandan de los profesores acciones para las que ellos no han sido preparados. Los profesores con el ánimo de responder a los requerimientos de la reforma emprenden nuevas formas que pretenden innovar su enseñanza. Infortunadamente, estas nuevas formas se construyen fundamentadas en prácticas anteriores, en muchos casos en la experiencia que los profesores han tenido como estudiantes. Recordemos que hace veinte años, cuando Carmen aún era estudiante, la estadística no aparecía en los currículos colombianos. Mucho de lo que Carmen enseña es lo que ella considera que se debe enseñar y no necesariamente porque haya tenido una sólida formación estadística en su preparación profesional.

Los estándares de calidad sugieren cambios fundamentales en la enseñanza y como consecuencia en el aprendizaje de los estudiantes. Parece ser que el Ministerio de Educación Nacional (2003) ha diseñado un ambicioso programa y ha establecido ciertos estándares para mejorar la educación, pero ha fracasado al identificar las dificultades que los profesores tienen en la instrucción y al diseñar programas para el desarrollo profesional que les permita superar estas dificultades. Es claro que los estudiantes no aprenderán estadística si los profesores no tienen un conocimiento estadístico flexible y menos aún si la estadística no se enseña en la escuela. Esto sugiere que las prácticas del salón de clase no se transforman únicamente con la divulgación de las apuestas del currículo, es necesario que quienes enseñan estadística tomen un rol activo y reflexivo en el cambio y tengan los recursos necesarios que los apoyen en la transición. Si ya se ha reportado que los estudiantes tienen dificultades aprendiendo estadística (Batanero, Godino, Green, Holmes, y Vallecillos 1994), ¿qué nos hace pensar que es más sencillo para los profesores? Muchos profesores, como Carmen, no aprendieron estadística cuando eran estudiantes, así que el desafío es doble. Muchos otros que sí tuvieron la fortuna, la aprendieron desde un punto de vista formal, bajo la concepción de la estadística como un conjunto de procedimientos (Watson, 1998). Para estos profesores el desafío no es más sencillo. Tendrán que reaprender una nueva versión de la estadística de modo que se ajuste a los requerimientos de las demandas del currículo actual. Esto es, desaprender lo aprendido, adoptar una nueva forma de pensar acerca de la estadística y adoptar una nueva forma de enseñarla. La concepción de la estadística como un conjunto de herramientas que se aprende *a priori* para solucionar problemas que se tendrán *a posteriori* no es pertinente. El punto de partida de la enseñanza de la estadística debe ser el planteamiento y solución de problemas reales. ¿Cómo pueden los profesores de estadística ser

responsables del aprendizaje estadístico de sus estudiantes si ellos apenas están aprendiendo la estadística? Visto así, Carmen realmente progresó en la enseñanza de la estadística. Es fácil para los diseñadores de políticas educativas proponer modificaciones en los currículos. Infortunadamente, los profesores tienen pocas posibilidades de aprendizaje en sus instituciones y muy poca ayuda para afrontar los problemas que este aprendizaje conlleva.

Los estándares de calidad para el pensamiento aleatorio (Ministerio de Educación Nacional, 2003) parecen reconocer algunos problemas que los estudiantes tendrían aprendiendo estadística, pero desde la perspectiva de Carmen el estado no ha actuado como si reconociera los problemas de los profesores. El estado ha actuado como si asumiera que el currículo se pondrá en marcha si a los profesores se les dice que hay que hacerlo. El currículo actual estableció nuevas metas y también nuevas demandas para conseguir las metas. ¿Por qué si los estudiantes necesitan tiempo para aprender no se considera que los profesores también necesitan este espacio? ¿Cuál es la ayuda que los profesores necesitan para asumir este cambio?

El salón de Carmen revela muchas ambigüedades. No obstante, ella ha sido más exitosa apoyando a sus estudiantes en el aprendizaje de la estadística que lo que ha sido el currículo nacional apoyándola a ella en la enseñanza de la estadística como está descrito en los estándares de calidad. Esto parece admirable. Carmen buscó la forma de incluir la enseñanza de la estadística en su currículo de matemáticas y lo hizo de una forma que parece bien adaptada a su institución. Carmen sin duda alguna es una profesora excepcional. Aunque ella no había tenido preparación formal para enseñar estadística, buscó los medios para que la estadística tuviera un lugar en su aula de clase. Esto es único, pues numerosos son los casos de profesores que sintiéndose no competentes para enseñar estadística simplemente la excluyen de los currículos. Sabemos que allá, en la realidad escolar, hay muchos profesores que como Carmen están haciendo un gran esfuerzo por incluir la estadística en el aula de clase, pero también sabemos que hay muchos otros que al contrario de Carmen excluyen la estadística de la enseñanza. Tanto los primeros como los últimos necesitan de comunidades de apoyo para conseguir retroalimentación en sus esfuerzos y para ganar la confianza necesaria para iniciar algún esfuerzo.

5. CONCLUSIONES

La descripción presentada en este artículo ejemplifica lo que pasa en una clase de matemáticas de la escuela primaria en Colombia. Una profesora generalista que tiene la responsabilidad de la enseñanza de la estadística debe atender varias demandas del currículo. Ella pone en marcha algunos esfuerzos que considera están encaminados a la incorporación exitosa del currículo en el aula de clase. Sin embargo, las descripciones y reflexiones presentadas aquí muestran que la clase queda corta para

atender al desafío de promover el razonamiento estadístico de los estudiantes que demanda el currículo colombiano.

La clase de Carmen fluyó tranquilamente y a los ojos de muchos podría considerarse una clase modelo. Los estudiantes hicieron lo que se les propuso, estuvieron involucrados en las actividades, Carmen tuvo el control de la clase (en términos de las normas), pero el lenguaje estadístico estuvo ausente. Aunque en esta clase se estudió una *distribución de frecuencias*, el lenguaje asociado a esta temática (frecuencias, variable, tabla de frecuencias, gráfico de barras, histograma, muestra, población) no fue evidente. Carmen reconoce que el lenguaje es importante, pero reconoce también que no lo hace porque no sabe cómo hacerlo.

La clase de Carmen se fundamentó en la acción del estudiante, pero fue una acción que siguió paso a paso las orientaciones de la profesora. Al estudiante se le demandó acción, pero estas acciones correspondían a seguir formatos predeterminados que ayudaron poco a la comprensión de los conceptos estadísticos y a la comprensión de la estadística como una herramienta metodológica en la resolución de problemas. En esta clase el procedimiento primó sobre la comprensión y los estudiantes no tuvieron oportunidad de explicar, justificar, resolver, predecir, modelar, reformular y sugerir nuevos modos como es indicado en el currículo. Aunque Carmen declaró seguir las orientaciones curriculares, la clase muestra que es necesario incluir elementos adicionales para que la clase de cuenta de los nuevos desafíos.

Es este entonces un llamado a escuchar la voz de los profesores. Muchos profesores, como Carmen, están interesados, abiertos y dispuestos, pero necesitan colaboración. Es necesario el diseño de propuestas de desarrollo profesional para apoyar a los profesores como Carmen, que tienen bajo su responsabilidad la enseñanza de cursos que no son su especialidad. Hay cantidad de profesores que están asumiendo la enseñanza de la estadística y no están preparados para ello (Zapata-Cardona & Rocha, 2011). Estimular la reflexión crítica y profunda de los profesores sobre su propia práctica podría ser un camino para apoyar la adopción del currículo. No obstante, esto requiere del diseño e implementación de programas de formación continuada de profesores que dialoguen con su propia práctica (Penuel, Fishman, Yamaguchi, y Gallagher, 2007) y que tomen como punto de partida su acción en el aula.

AGRADECIMIENTOS

Agradecimientos especiales a Carmen, una profesora excepcional y comprometida que muy amablemente nos abrió su salón de clases y estuvo dispuesta a compartir con nosotros su experiencia y las tensiones que enfrenta en la enseñanza de la estadística.

Agradecimientos al Instituto colombiano para el fomento de la ciencia y la tecnología –Colciencias– por su apoyo bajo el contrato 782 de 2009 Código 1115-489-25309

REFERENCIAS

- Aliaga, M., Cobb, G., Cuff, C., & Garfield, J. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE): College report*. (R. Gould, L. Robin, T. Moore, A. Rossman, B. Stephenson, J. Utts, . . . J. Witmer, Edits.) Alexandria, VA: American Statistical Association.
- Batanero, C., Godino, J. D., Green, D. R., Holmes, P., & Vallecillos, A. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527–547.
- Estrada, A., Batanero, C., & Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(2), 263–274.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-K-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association.
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación–ICFES. (2010). *ICFES mejor Saber 5º y 9º*. Recuperado el 5 de Agosto de 2012, de Instituto colombiano para la evaluación de la educación: <http://www.icfes.gov.co/saber59/>
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Santa Fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Ministerio de Educación Nacional. (2003). *Estándares básicos de matemáticas*. Santa Fe de Bogotá: Centro de Pedagogía Participativa.
- Penuel, W. R., Fishman, B. J., Yamaguchi, R., & Gallagher, L. P. (2007). What makes professional development effective? Strategies that foster curriculum implementation. *American Educational Research Journal*, 44(4), 921–958.
- Pérez, P. (2009). Problemas y ejercicios en matemáticas. *Innovación y Experiencias Educativas*, 15, 1–9.
- Pfannkuch, M., & Wild, C. (1998). Investigating the nature of statistical thinking. *Fifth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 5)*. Singapore: IASE.
- Pfannkuch, M., & Wild, C. (2000). Statistical Thinking and Statistical Practice: Themes Gleaned from Professional Statisticians. *Statistical Science*, 15(2), 132–152.
- Watson, J. M. (1998). Professional development for teachers of probability and statistics: Into an era of technology. *International Statistical Review*, 66(3), 271–289.
- Watson, J. M., & Moritz, J. (2001). Development of reasoning associated with pictographs: representing, interpreting, and predicting. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 47–81.
- Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry (with discussion). *International Statistical Review*, 67(3), 223–265.
- Zapata-Cardona, L. (2012). Dime que preguntas y te diré como enseñas en la clase de estadística. *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa-ECME*. Medellín: ASOCOLME.
- Zapata-Cardona, L., & Rocha, P. (2011). Actitudes de profesores hacia la estadística y su enseñanza. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recife, Brasil.
- Zapata-Cardona, L., & Rocha, P. (2013). *Discriminación por género en la clase de matemáticas*. Manuscrito no publicado.

THE STATISTICS CLASS BEYOND THE CURRICULUM: A CASE STUDY IN THE COLOMBIAN PRIMARY SCHOOL

ABSTRACT

The present manuscript describes a fifth grade statistics class at the primary school level in a Colombian school. The class is contrasted with the demands of the official national curriculum which states the minimum performance standards for school mathematics. This article proposes some reflections on the tensions that a statistics teacher has to face to meet the demands of the actual curriculum; a curriculum that for the first time includes the statistics in the primary and secondary school mathematics. Finally, the importance of professional development programs is highlighted as allies in the successful implementation of any curricular reform.

Keywords: curriculum, teacher education, statistics education

Resumo

Este artigo descreve uma aula de estatística na quinta série do ensino fundamental numa instituição educacional da Colômbia. Esta aula é contrastada com as exigências do currículo nacional que estabelece padrões mínimos de qualidade para a área de matemática. Nesse sentido, este artigo apresenta reflexões sobre as tensões que uma professora de estatística tem de enfrentar para atender as demandas curriculares atuais; um currículo que inclui pela primeira vez a estatística na matemática escolar do ensino fundamental e secundária. Finalmente, destaca-se a importância dos programas de desenvolvimento profissional como parceiros na implementação bem sucedida de qualquer reforma curricular.

Palavras chave: Currículo, formação de professores; educação estatística.

LUCIA ZAPATA-CARDONA

Universidad de Antioquia

luzapata@ayura.udea.edu.co

Es profesora de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia en Medellín, Colombia. Es doctora en Educación Matemática por la Universidad de Georgia y tiene estudios de postgrado en estadística. Es miembro del Grupo de Educación en Enseñanza de las Ciencias Experimentales y Matemáticas–GECM, contribuye como revisora de varias revistas académicas entre ellas el *Statistics Education Research Journal* [Revista de Investigación en Educación Estadística]. Sus intereses investigativos se centran en la enseñanza y el aprendizaje de la estadística y en la formación de maestros.

PEDRO ROCHA SALAMANCA

Universidad Distrital, Francisco José de Caldas

pgrocha@distrital.edu.co

Es profesor de la Facultad de Educación de la Universidad Distrital–Francisco José de Caldas en Bogotá, Colombia. Su formación básica es en ingeniería pero tiene una vasta experiencia en educación y tiene estudios de posgrado en estadística. Actualmente es candidato a Doctor en el programa del Doctorado Interinstitucional en Educación. Sus intereses investigativos se centran en la enseñanza y el aprendizaje de la estadística.

ESTUDIO DE CLASES PARA EL MEJORAMIENTO DE LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA EN CHILE

SOLEDAD ESTRELLA

RAIMUNDO OLFOS

RESUMEN

En Chile existen algunos esfuerzos educativos que promueven el Estudio de Clases como comunidades de mejoramiento profesional de la enseñanza, pero ello no es como en países orientales, donde es una metodología arraigada y constituye una tradición en la enseñanza. En este estudio se describe una clase de Estadística –dos implementaciones de la misma clase– y los cambios ocurridos en la planificación de esa clase, lo cual puede mostrar parte de un recorrido de cómo las clases fueron continuamente desarrollándose en el Grupo de Estudio de Clases. Se empleó el modelo de ambiente de aprendizaje, SRLE, de Garfield, y Ben-Zvi (2008) y Pfannkuch y Ben-Zvi (2011); y el Análisis de la Tarea y los Factores Asociados con la Mantención y Declinación de las Demandas Cognitivas de Alto Nivel (Stein y Smith, 1998; Stein et al., 2000). En este estudio, el cual es parte de una investigación más amplia, se describe el cambio de la segunda clase implementada desde la perspectiva del Análisis de la Tarea y se presenta una instantánea de cómo gradualmente la comprensión de una profesora chilena va mejorando sus clases basadas en un ambiente de aprendizaje que promueve el razonamiento estadístico y apoyada por las actividades del Grupo de Estudio de Clase.

Palabras clave: Educación estadística; estudio de caso; estudio de clase; investigación de la enseñanza; clases de estadística; formación continua

1. INTRODUCCIÓN

1.1.LA ESTADÍSTICA EN EL CURRÍCULO CHILENO

En Chile, como muchos otros países, la Estadística y Probabilidad se ha incluido en el currículo de matemática durante toda la etapa escolar, desde el nivel 1 al 12. La incorporación del eje Estadística y Probabilidades en el currículo chileno, provoca nuevas exigencias a los profesores que tienen a su cargo la implementación de ésta componente del programa de estudios de matemática, un desafío no tan solo para los profesores sino también para la formación de profesores. En Chile, la mayoría de los profesores no ha tenido en su formación inicial estudios en Estadística o en Inferencia o en Probabilidades. Además, a nivel nacional son pocos los profesores de primaria con mención en matemática quienes, durante un breve lapso de formación continua se han enfrentado al desafío de adquirir los conocimientos y habilidades para responder a las exigencias de la enseñanza de la Estadística y Probabilidad. A su vez, los profesores de matemática en ejercicio de secundaria han tenido estudios teóricos sobre Probabilidad pero no sobre su enseñanza.

En esta dirección, el profesor debe saber lo que enseña y cómo enseñarlo. Cada contenido estadístico posee una complejidad diferente de los contenidos matemáticos, al menos a nivel escolar, la matemática y la estadística trabajan en mundos distintos, con lenguajes y concepciones diferentes (Del Pino & Estrella, 2012; Estrella, 2010).

Por otra parte, respecto a la calidad de la educación chilena el informe de la OECD (2010) aconseja a nuestro país dirigir sus esfuerzos a mejorar la formación de los profesores en todos los niveles de educación, incluyendo la calidad de los programas de educación inicial de los profesores, la calidad de sus formadores y sus programas pedagógicos. Este informe señala “De manera general, el gobierno... debería identificar las buenas prácticas y otorgar a las escuelas la ayuda necesaria para difundirlas por todo el sistema escolar”, OECD (2010: 9).

1.2. UN MODELO DE EDUCACION ESTADÍSTICA

La abundante investigación en educación estadística en las últimas décadas, y algunos artículos de destacados profesionales estadísticos han ayudado a conformar un cambio de paradigma en la conceptualización de la enseñanza estadística. Pfannkuch y Ben-Zvi (2011) señalan que esta reforma en la enseñanza ha evolucionado a partir de los avances tecnológicos, y la identificación y precisión de las características del pensamiento estadístico y de las "grandes ideas" que sustentan a la Estadística. Estos investigadores señalan que la explicación y exploración de estas ideas han contribuido a enfoques de enseñanza que enfatizan el Análisis Exploratorio de Datos (EDA), la atención a la construcción de comprensiones conceptuales de los estudiantes, y al currículo que tiene como objetivo desarrollar el razonamiento de los estudiantes, el pensamiento y la alfabetización.

Los alumnos y profesores necesitan comprender a un nivel conceptual profundo varias de las ideas estadísticas fundamentales, las cuales sirven como guías de la enseñanza, y motivan y cubren el aprendizaje de los alumnos. Estas ideas incluyen entre otros conceptos, a los datos, variabilidad, distribución, centro, representaciones, modelos estadísticos, aleatoriedad, covariación, muestreo e inferencia (Garfield & Ben-Zvi, 2008; Burrill & Biehler, 2011).

Precisamos sucintamente algunos de estos conceptos claves de la Estadística, detallados en Burrill y Biehler (2011). Los *datos* son el centro principal del trabajo estadístico, los alumnos necesitan comprender la necesidad de datos para tomar decisiones y evaluar información, los diferentes tipos de datos, los métodos para recolectarlos (vía encuestas) y producirlos (en experimentos) hacen la diferencia en los tipos de conclusiones que se pueden extraer; también deben conocer las características de los buenos datos que ayudan a evitar el sesgo y el error de medición. Las *representaciones* gráficas o tabulares ayudan a revelar las historias en los datos. El concepto de *distribución* permite comprender que un conjunto de datos puede examinarse y ser explorado como una entidad (una distribución) más

que como un conjunto de casos separados; que un gráfico puede resumir en términos de forma, centro y dispersión, pueden revelar distintos aspectos de la distribución. La *variabilidad* es una característica omnipresente del ciclo investigativo estadístico, permite comprender que los datos varían, algunas veces en forma predecible. Algunas veces la variabilidad es debida al muestreo aleatorio o al error de medición; otras veces, es debida a las propiedades inherentes de lo que se mide. Una parte importante del examen de datos es determinar cuán desviados están los datos en la distribución. Usualmente sirve conocer una medida de *centro* cuando se interpretan medidas de variabilidad, y la elección de estas medidas depende de la forma y otras características de la distribución. La idea de centro de una distribución puede resumirse por una medida estadística (como la media o mediana), y es muy útil interpretarla junto a una medida de dispersión, para tomar decisiones basadas en la forma y características de la distribución. Asimismo, los *modelos estadísticos* ayudan a explicar o predecir los valores de los datos, por ejemplo, ver que tan bien se ajustan los datos al modelo examinando las desviaciones al modelo. El concepto de *aleatoriedad* permite comprender que cada resultado de un evento aleatorio es impredecible, y aun así, podemos predecir los patrones a largo plazo. La *asociación entre dos variables* permite comprender que la relación entre las variables cuantitativas puede variar de una forma predecible, relación que puede modelarse, permitiendo predecir valores de una variable usando los valores de la otra. Mucho del trabajo estadístico incluye el *muestreo*, tomar muestras y usarlas para estimar o tomar decisiones acerca de la población desde la cual se extrae, pues las muestras extraídas de la población varían con cierta predicibilidad. La *inferencia* estadística permite hacer estimaciones o tomar decisiones basadas sobre las muestras de los datos en estudios observacionales y experimentales, la exactitud de las inferencias se basa en la variabilidad de los datos, el tamaño muestral y lo apropiado de los supuestos que subyacen a las muestras aleatorias.

El razonamiento estadístico de los estudiantes se nutre del conocimiento estadístico, el conocimiento acerca del contexto del problema, las normas sociales y hábitos desarrollados en el tiempo, y el apoyo de un ambiente basado en la indagación que incluye actividades, herramientas y andamiajes (Makar, Bakker & Ben-Zvi, 2011). En particular, se trata de actividades que proporcionan a los estudiantes oportunidades para pensar y reflexionar sobre su aprendizaje, debatir y reflexionar con sus compañeros. Este enfoque presupone que el aprendizaje mejora cuando los profesores prestan atención a los conocimientos previos y creencias de los estudiantes, y utilizan ese conocimiento como punto de partida para una nueva enseñanza, monitoreando el cambio de las concepciones de los alumnos a medida que avanza la enseñanza.

Ben-Zvi (2011) considera que en general es más fácil preparar una clase expositiva que diseñar un ambiente de aprendizaje, donde los estudiantes participan en actividades y discusiones y/o proyectos colaborativos con el apoyo de herramientas tecnológicas. Este autor afirma que mientras el primer

enfoque está centrado en el profesor: "¿qué quiero decirle a mis estudiantes", "qué quiero abarcar", etc., el segundo enfoque está más centrado en el estudiante: "¿qué puedo hacer para promover el aprendizaje en los estudiantes", "cómo puedo involucrar a los estudiantes en el aprendizaje, en las actividades prácticas, en el desarrollo del razonamiento, en la discusión de ideas, el trabajo en equipo", etc. De acuerdo con este último enfoque, el profesor se presenta como un facilitador de la enseñanza, en vez de conducir la adquisición de conocimientos en una clase centrada en el profesor.

La razón principal para cambiar a un enfoque centrado en el estudiante, es que este es más eficaz en ayudar a los estudiantes a construir una comprensión más profunda de la estadística y de transferir lo que han aprendido en las clases siguientes o en la vida real. Un problema del enfoque centrado en el profesor es que los estudiantes rara vez tienen la oportunidad de desarrollar una comprensión más profunda de lo que han "aprendido" y lo olvidan con rapidez (Ben-Zvi, op.cit.).

Ambiente de Aprendizaje para el Razonamiento Estadístico

El Ambiente de Aprendizaje de Razonamiento Estadístico (SRLE, por sus siglas en inglés) es un ambiente de aprendizaje estadístico que pretende desarrollar en los estudiantes una comprensión de la estadística profunda y significativa, y promueve el razonar estadísticamente (Garfield & Ben-Zvi, 2008); como se señalaba, este ambiente combina materiales, actividades, normas de la clase, andamiajes, discusión, tecnología, enfoque de enseñanza y evaluación.

El modelo está basado en cinco principios del diseño de enseñanza (Cobb & McClain, 2004, citado en Ben-Zvi, 2011) (ver figura 1):

1. Enfocarse en el desarrollo de la comprensión de las ideas estadísticas fundamentales, que centran el diseño de enseñanza (en vez de presentar conjuntos de herramientas y procedimientos estadísticos).
2. Utilizar datos reales y motivadores que involucren a los estudiantes en la elaboración y prueba de conjeturas e inferencias estadísticas.
3. Usar actividades de clase colaborativas basadas en la indagación para apoyar el desarrollo del razonamiento de los estudiantes.
4. Integrar el uso de herramientas tecnológicas que permitan a los estudiantes poner a prueba sus conjeturas, explorar y analizar datos de manera interactiva.
5. Promover normas del aula, que incluyen el discurso y argumentación estadística centrados en ideas estadísticas significativas.
6. Usar métodos de evaluación alternativos para comprender lo que los alumnos saben y cómo desarrollan su aprendizaje estadístico, y evaluar los planes y progreso de la enseñanza.



Fig. 1: Seis elementos claves del Ambiente de Aprendizaje para el Razonamiento Estadístico (SRLE).

Pfannkuch & Ben-Zvi (2011) proponen extender el modelo SRLE a un curso para formación de profesores cuyas componentes incluyen: profundizar la comprensión de conceptos estadísticos claves; desarrollar la habilidad para explorar y aprender desde los datos; desarrollar la argumentación estadística; usar evaluación formativa; y comprender el razonamiento de los alumnos (ver figura 2).



Fig. 2: Cinco componentes fundamentales para la educación de profesores (Pfannkuch y Ben-Zvi, 2011: 25).

El curso entregado a los profesores que se detalla en este estudio abordó ambos modelos, pues la clase que se planifica grupalmente tiene en cuenta el aprendizaje tanto de los profesores participantes

como del aprendizaje de los alumnos a los cuales se les implementa la clase estudiada. Los componentes del modelo se evidencian en la operacionalización del Plan de Clases que precisa: la situación problema de estadística y las preguntas claves (conceptos estadísticos fundamentales, datos reales, e indagación); las posibles respuestas de los alumnos (comprensión del razonamiento de los alumnos y argumentación estadística); la intervención docente (explorar y aprender desde datos, y la argumentación estadística); y la evaluación de la marcha de la clase (evaluación formativa).

1.3. EL ESTUDIO CLASES

A diferencia de la cultura occidental, en Japón como en China, la enseñanza en la sala de clases de profesores de matemáticas, está abierta a la observación de sus colegas, a su estudio y discusión. Por ejemplo, en China, los Grupos de Investigación de la Enseñanza (TRG) en matemática existen en cada escuela en la parte continental de China a causa del sistema educativo desde 1952 (Yang, 2009). En Japón, el estudio de clases se lleva adelante hace ya 140 años, tanto con el objeto de mejorar en las clases los aprendizajes escolares, como con el propósito de favorecer el desarrollo docente y curricular. En la actualidad existen distintos formatos, algunos estudios los realizan profesores en su propia comunidad educativa, quienes son observados por sus pares, otros Estudios de Clases son realizados por profesores expertos en grandes teatros, acogiendo algunas veces a cientos de profesores que muestran innovaciones y excelencia en sus clases. Cualquiera sea la modalidad del estudio, siempre se da una implementación abierta a observadores y finalizada la clase se abre un debate en atención a la misma, a través del cual se analizan los puntos críticos de la clase, en cuanto a la disciplina y su propuesta, y se proyecta para una próxima eventual implementación, por lo general a cargo de otro profesor con otros alumnos.

En las aulas de matemática en Chile, la evidencia dada por la investigación permite reconocer, que si bien la solución de problemas matemáticos es una herramienta utilizada en el trabajo de la disciplina, el énfasis mayoritario en las salas de clases chilenas es la adquisición de conceptos y la práctica reiterativa de procedimientos (Preiss, 2010). Otras investigaciones de las clases de matemáticas en Chile, han mostrado la poca eficacia en la utilización del tiempo de permanencia en la escuela (Valenzuela *et. al.*, 2009) y una escasa estructura de la clase que no promueve el razonamiento matemático (Manzi, 2007; Olfos, Guzmán y Estrella, 2014).

2. METODOLOGÍA

2.1. PERSPECTIVA TEORICA PARA ANALIZAR LAS TAREAS

La importancia de las tareas en el desarrollo de una forma matemática de pensar ha sido reconocida en diversas propuestas (por ejemplo en Isoda & Olfos, 2009). Algunos autores consideran que las tareas usadas en el aula determinan el tipo de aprendizaje que construyen los estudiantes (Stein & Smith, 1998; Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2000). El uso de tareas que ejecutan procedimientos memorísticos de forma rutinaria permite a los estudiantes desarrollar una cierta forma de pensar que difiere de aquella que obtendrían al abordar tareas en las que deben pensar y razonar conceptualmente y establecer conexiones. Estos autores encontraron que una tarea de alto nivel cognitivo puede mantenerse en el mismo nivel por los estudiantes o declinar a un nivel inferior, en cambio una tarea de bajo nivel cognitivo no tiene la posibilidad de ser convertida por los estudiantes en una tarea de alto nivel cognitivo. Su estudio les permitió dilucidar los factores asociados al mantenimiento y la declinación de demandas cognitivas de alto nivel (ver Tabla 2).

En el marco de las tareas matemáticas (Stein & Smith, 1998) se establece una característica importante de las tareas: el nivel de demanda cognitiva. En las tareas con un nivel bajo de demanda cognitiva se privilegia la memorización y el uso de procedimientos o algoritmos simples, sin conexiones a otras ideas o conceptos matemáticos, mientras que en las tareas con un nivel alto de demanda cognitiva se favorece la realización de procedimientos que favorecen un razonamiento conceptual y la construcción de conexiones entre los conceptos involucrados en la resolución de la tarea. Las actividades con un nivel alto de demanda cognitiva permiten al estudiante *hacer matemáticas* –estadística en nuestro estudio– lo cual significa que el estudiante desarrolle actividades que involucren explorar, observar, conjeturar, detectar relaciones e invariantes, así como justificar y comunicar resultados (ver Tabla 1).

Tabla 1. Guía de Análisis de la Tarea (Stein & Smith, 1998; Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2000)

Nivel Cognitivo	Tipo de Tareas	Características
Demandas de Bajo Nivel	Tareas de memorización	<p>Reproducen lo aprendido previamente respecto a hechos, reglas, fórmulas o definiciones.</p> <p>Resuelven sin usar procedimientos o el tiempo no es bastante para usar un procedimiento.</p> <p>Reproducen exactamente el material visto previamente el cual está declarado clara y directamente.</p> <p>No hay conexión a los conceptos o los significados que subyacen a los hechos, reglas, fórmulas o definiciones que están siendo aprendidas o reproducidas</p>
	Procedimientos sin conexión a las tareas	<p>Se convierte en algorítmico porque el uso de procedimientos es especialmente solicitado o su uso está basado en la instrucción previa.</p> <p>Requiere demanda cognitiva limitada para completar con éxito.</p> <p>Sin conexión a los conceptos o al significado que subyace en el procedimiento que se utiliza.</p> <p>Esta centrado en la producción de respuestas correctas en lugar de desarrollar la comprensión matemática (estadística).</p> <p>No requiere explicaciones, o las explicaciones se centran únicamente en describir el procedimiento que se utilizó.</p>
Demandas de Alto Nivel	Procedimientos con conexiones a las tareas	<p>Se enfoca la atención de los alumnos sobre la comprensión de los conceptos e ideas matemáticas (estadísticas).</p> <p>Se sugieren caminos a seguir (explícita o implícitamente) que son procedimientos generales amplios que tienen estrecha conexión a la idea conceptual subyacente.</p> <p>Establecen conexiones entre múltiples representaciones que ayudan a desarrollar el significado en múltiples maneras (p. e., diagramas visuales, manipulativos, símbolos, situaciones problemas).</p> <p>Requieren algún grado de esfuerzo cognitivo para comprender las ideas conceptuales que subyacen a los procedimientos.</p>
	Hacer tareas matemáticas (estadísticas)	<p>Requiere pensamiento complejo y no algorítmico.</p> <p>Requiere a los alumnos explorar y comprender la naturaleza de los conceptos matemáticos (estadísticos), procesos o relaciones.</p> <p>Demanda el auto-monitoreo o la auto-regulación de los propios procesos cognitivos.</p> <p>Requiere el conocimiento relevante y las experiencias de los alumnos para utilizarlos de manera apropiada al resolver la tarea.</p> <p>Requiere que los alumnos examinen las restricciones de la tarea que podrían limitar las posibles estrategias de solución y las soluciones.</p> <p>Requiere un considerable esfuerzo cognitivo y puede involucrar un cierto nivel de ansiedad para el alumno.</p>

Tabla 2. Factores asociados con la mantención o declinación de demandas cognitivas de nivel alto (Stein & Smith, 1998; Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2000)

Factores de mantención o declinación	Explicaciones
<i>Factores asociados con la mantención de demandas cognitivas de alto nivel</i>	
M1	Se entrega andamiaje para el pensamiento y razonamiento de los alumnos.
M2	A los alumnos se les dan medios para monitorear su propio progreso.
M3	El profesor o alumnos capaces modelan un rendimiento de nivel alto.
M4	Profesor presiona para que emerjan justificaciones, explicaciones y significados a través de preguntas, comentarios y retroalimentación.
M5	Las tareas se basan en el conocimiento previo de los alumnos.
M6	Profesor realiza frecuentes conexiones conceptuales.
M7	Se concede tiempo suficiente para la exploración ni muy poco ni demasiado.
<i>Factores asociados con la declinación de demandas cognitivas de alto nivel</i>	
D1	Aspectos problemáticos de la tarea se convierten en rutinas.
D2	Profesor ajusta el énfasis de significado, conceptos, o la comprensión de la exactitud o completitud de la respuesta.
D3	No se proporciona tiempo suficiente para lidiar con los aspectos más exigentes de la tarea
D4	Problemas de gestión de aula impiden un compromiso sostenido en actividades de alto nivel cognitivo.
D5	Tarea no es apropiada para el grupo de alumnos.
D6	Los alumnos no tienen que rendir cuentas de productos o procesos de alto nivel.

2.2. FUENTE DE DATOS

2.2.1 La escuela y la profesora

La escuela estudiada es un establecimiento particular subvencionado de la comuna de Quilpúe, Valparaíso, Chile; con alumnado desde los niveles preescolares hasta el fin de Educación Media, se reconoce como perteneciente al grupo socioeconómico “medio”; su desempeño en las pruebas nacionales de matemática es más bajo respecto al promedio nacional (-31 puntos). El curso en el cual se implementa la clase es de nivel 3, incluido en la sede de primaria del establecimiento que abarca hasta el nivel 5.

La docente posee título de profesora de primaria, realiza clases de matemática en los niveles 1, 2 3 y 4. Integra el grupo de diez profesores que fueron elegidos para participar en un proyecto de Educación Estadística de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y del Centro de Estudios Avanzados en Educación; es una participante que se caracteriza por su entusiasmo y actitud proactiva en el Grupo de Estudio de Clases convocado en este proyecto.

2.2.2 La preparación de la clase

La clase se realizó la segunda semana de mayo de 2013 por la profesora, que llamaremos Srita. C, que posee 5 años de experiencia en primaria. El curso es un nivel 3, con 38 alumnos, 16 niñas y 22 niños, de edades entre 7 y 8 años.

La profesora pertenece al grupo de cinco profesores que componen el Grupo de Estudio de Clases para el nivel 3. En conjunto los cinco profesores diseñaron una situación de enseñanza para el contenido curricular de Datos y Probabilidades. Los profesores investigadores han propuesto al Grupo de profesores trabajar en torno al modelo SRLE de enseñanza de la Estadística, a las ideas estadísticas fundamentales y a desarrollar clases con alta demanda cognitiva.

El análisis que se detalla corresponde a la segunda implementación de la clase estudiada por este Grupo de Estudio de Clases. La primera clase fue implementada por otra profesora del mismo grupo y la Srita. C asistió como observadora. Se eligió la segunda clase –que llevo a cabo la Srita. C– por presentar mejora en el nivel de demandas cognitivas exigidas a los alumnos.

La situación de aprendizaje responde al eje Datos y Probabilidades que solicita a los alumnos de nivel 3 “Realizar encuestas, clasificar y organizar los datos obtenidos en tablas y visualizarlos en gráficos de barra”. El objetivo de la clase fue organizar y clasificar datos para obtener información. En torno al objetivo, los profesores idearon un contexto de interés para los alumnos relativo a la calidad de las colaciones que consumen. La pregunta central fue ¿De qué manera podemos ordenar y organizar los datos de nuestras colaciones para saber si estamos en riesgo de contraer alguna enfermedad?

Respondiendo al modelo SRLE, en cuanto los datos fuesen reales y motivadores para los alumnos, los profesores idearon el contexto de las colaciones que los alumnos llevan a la escuela diariamente. Establecido este contexto, la profesora preguntó con anterioridad a cada uno de los alumnos de su clase la colación que llevó ese día indicando solo una de ellas “la que más le gustaba”. La profesora, con los datos recolectados construyó una imagen de todas las colaciones señaladas por sus alumnos, y obtuvo la siguiente lámina que a través de iconos representaba el tipo de las colaciones y el número de las mismas.

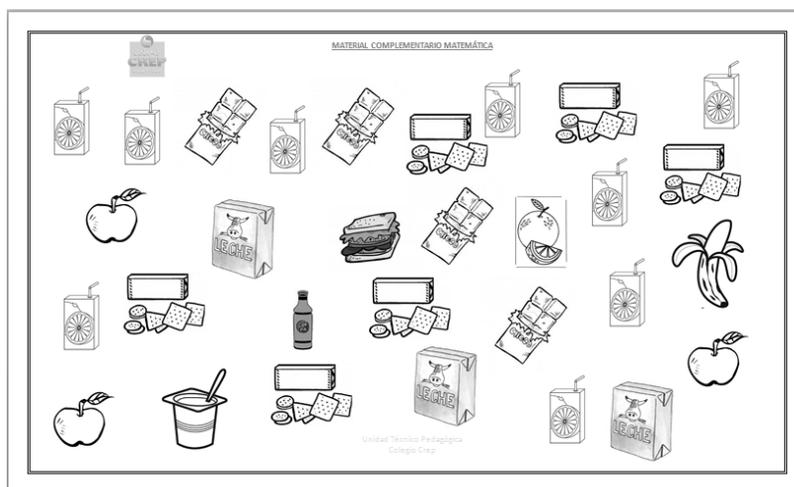


Fig. 3: Lámina de las colaciones de los niños.

La profesora entregó una lámina a cada uno de sus alumnos (ver figura 3); en el Plan de Clases elaborado por el Grupo de Estudio de Clases los profesores precisan la actividad del alumno como “Observan su hoja sobre las colaciones que mencionaron en la clase anterior y comentan con su compañero cómo harán la clasificación” (ver Plan de Clases en Anexo).

2.3. ANÁLISIS DE LOS DATOS

2.3.1 *Análisis de las clases*

Actualmente en la mayoría de las clases en Chile, los profesores presentan un formato general que distingue un inicio, desarrollo y cierre. En este estudio analizamos una clase completa, precisando las tareas propuestas por el profesor y las tareas realmente realizadas por los alumnos.

La Guía de Análisis de la Tarea (ver Tabla 1) se usó para definir el nivel cognitivo de las tareas propuestas por la profesora y las tareas realizadas por los alumnos. Se consideraron demandas de bajo nivel las *Tareas de memorización* y los *Procedimientos sin conexión a las tareas*; y como demandas de alto nivel, a *Procedimientos con conexiones a las tareas* y *Hacer tareas matemáticas (estadísticas)*.

Los Factores asociados con la mantención o declinación de demandas cognitivas de nivel alto (ver Tabla 2) permitió reconocer los principales factores que influenciaron la implementación de las tareas por el profesor. En la Tabla 2, se describen siete factores asociados con la mantención de demandas cognitivas de nivel alto y seis factores comunes asociados con la declinación de demandas cognitivas de nivel alto.

2.3.2 *Análisis de las entrevistas a la profesora*

Se realizaron entrevistas a la profesora antes y después de la clase implementada, respecto a su opinión sobre la clase llevada a cabo y respecto a la discusión de la clase elaborada en el Grupo de Estudio de Clases. La entrevista versó sobre lo que: 1) la profesora consideraba importante de la clase y 2) su apreciación de la discusión en el Grupo de Estudio de Clases.

En la entrevista previa a la segunda implementación de la clase, la Srta. C consideraba

“En la primera clase puede ver los problemas de nuestra planificación, al darnos cuenta de ello [el Grupo sobre que la clase había fallado] cambiamos la planificación para que los niños la sintieran más cercana, se motivaran porque necesitaban saber algo, por eso acercamos el contexto para los niños, para que fuera de su interés, que fueran su propios datos los que importaban.” (Entrevista a la Srta. C.)

Después de implementar la clase,

Creo que mejoramos la clase. Estoy muy sorprendida del trabajo de los niños, solo una alumna dijo que con una tabla podríamos ordenar, y un alumno también dijo tabla como concepto estadístico. Ellos pueden ver una tabla, con divisiones, que tiene columnas, lo entienden pero no pueden verbalizarlo [la tabla].Creo que nos faltó

[en la planificación] estar más preparados para las preguntas de los niños y para precisar lo estadístico que se aprendió. (Entrevista a la Srita. C.)

2.3.3. Análisis del grupo de la discusión del Grupo de Estudio de Clases

Antes de implementar la clase, las profesoras del Grupo de Estudio de Clases discutieron sobre la clase elaborada. También, después de la clase implementada, el grupo se informó de las apreciaciones de la profesora respecto a la clase, y pudieron ver y discutir algunos episodios de la clase implementada por la profesora –episodios claves elegidos por los profesores investigadores–. El análisis de las transcripciones de estas discusiones videograbadas se abocaron a: 1) ¿qué consideraban importante de la clase? y 2) ¿cuáles eran la apreciación de la discusión de los profesores integrantes del grupo de Estudio de Clases? (por lo extenso del análisis, en este artículo no se presenta el desarrollo de la discusión del Grupo de Estudio de Clases).

3. RESULTADOS

3.1. LA PRIMERA CLASE

3.1.1 La estructura de la clase

La clase estaba planificada para 90 minutos, pero realmente tomó cerca de 80 minutos. Los diferentes contenidos de la actividad, las intervenciones de la docente, y sus duraciones se describen sucintamente en la siguiente secuencia:

1. Profesora motiva la problemática a través de la lectura de una carta de un niño en situación de obesidad (7 minutos y 2 segundos). Activa el rol del alumno a través de preguntas con las experiencias previas de los niños respecto a la salud y los alimentos.
2. Pide que los alumnos recuerden lo que ella les preguntó. Mientras entrega la hoja con las imágenes va estimulando el interés de los alumnos con la encuesta realizada de las colaciones anteriormente. Una alumna declara que esa imagen representa sus respuestas de las colaciones y los alumnos afirman que los dibujos son sus colaciones (2 minutos y 54 minutos). Da tiempo para observar la imagen.
3. La profesora pregunta ¿Les llama algo la atención respecto a sus colaciones? Una alumna señala que son sus colaciones, otra alumna observa que las colaciones se ven desordenadas. La profesora consulta, ¿Qué podríamos hacer con esta imagen que ven desordenada? (1 minuto y 31 segundos).
4. Un alumno señala que podrían ordenarlos, la profesora contra pregunta ¿Cómo podríamos hacerlo?, ¿Alguien se acuerda cómo podríamos ordenar? Los niños comienzan a dar ideas y la profesora registra en una columna en la pizarra la mayoría de los aportes: “ordenar de menor a mayor”, “ordenar por filas”, “ordenar por sano o no sano”, “pintar de rojo lo no sano y lo otro marcarlo con otra figura”, “separar”, “tablas”, (2 minutos y 19 segundos).

5. Profesora presenta problema ¿Por qué creen ustedes que les pregunto de las colaciones? Un alumno responde “*por la historia [carta]*”, ¿Qué podremos saber con la actividad de hoy? “*de las enfermedades*”, “*la salud*”. La profesora propone el desafío de la clase y lo escribe en forma de pregunta en la pizarra. ¿De qué manera podemos ordenar y organizar los datos de nuestras colaciones para saber si estamos en riesgo de contraer alguna de las enfermedades antes mencionadas? Los alumnos preguntan cómo hacerlo y la profesora les responde varias veces “como ustedes quieran” y establece como norma de la clase que pueden compartir su estrategia de trabajo y comentarios con su compañero, (8 minutos y 3 segundos).
6. Alumnos trabajan libre e independientemente diversas propuestas para solucionar el desafío, (33 minutos y 29 segundos).
7. Profesora monitorea continuamente las distintas estrategias de los alumnos, y elige a tres alumnos para que escriban su trabajo en la pizarra y muestren al curso (7 minutos y 31 segundos).
8. Profesora les pregunta a los alumnos que no han pasado a la pizarra ¿Ustedes recuerdan por qué estamos haciendo esto? ¿Cómo estaremos comiendo? ¿Cómo estará la mayoría del curso? ¿Qué va a pasar si seguimos así? (3 minutos y 35 segundos)
9. Profesora invita a comparar sus trabajos con los presentados en la pizarra, ¿Qué es igual?, ¿Qué es distinto? ¿Lo que estamos haciendo tiene relación con matemática? Alumnos responden “*¡la tabla!... ¡el orden!... ¡los números!...*” (4 minutos y 34 segundos).
10. Profesora propone elegir una de las tres estrategias presentadas por sus compañeros “¿Cuál creen ustedes que es la mejor opción para poder responder nuestro desafío?” (casi todos los alumnos proponen elegir aquella que corresponde a una tabla con frecuencias). ¿Podríamos saber si estamos en riesgo de contraer alguna enfermedad? “*Siiii*”. Yo les pregunto, ¿Qué hemos aprendido hoy? “*Comer saludable y evitar algunos alimentos que hacen mal*”. Profesora recapitula indicando sin darle un nombre “esta es la más clara [tabla] para responder el problema” (5 minutos y 35 segundos).
11. Profesora les da tiempo para que copien la estrategia de la tabla en sus cuadernos. Alumna se da cuenta de un error en el conteo de la tabla y le avisa a su profesora. La profesora comenta el error al curso y ella lo corrige en la pizarra, (2 minutos y 32 segundos).

3.1.2 La tarea clave

La tarea principal

1. Producción de las representaciones estadísticas para ordenar y obtener información

¿Cómo la profesora establece la tarea?

Después de introducir el tema de la alimentación y ocupar datos reales de los mismos alumnos, la profesora les presenta la lámina de las colaciones de los alumnos, una alumna señala que las colaciones

están desordenadas en la lámina. La profesora pregunta ¿cómo ordenarlas?, los niños comienzan a dar ideas y la profesora registra las posibles estrategias que indican los alumnos en la pizarra. Después comenta ¿por qué les preguntó por las colaciones? ¿qué podremos llegar a saber con la actividad que haremos hoy? (los alumnos predicen “sabremos de enfermedades”, “comer más sano”). La profesora afirma “Vamos a ver si la actividad que haremos les puede ayudar a responder eso”, y escribe el desafío en la pizarra como una pregunta. Al terminar les lee textualmente el desafío y vuelve a releer con distintos énfasis. “Cada uno de sus dibujos es una colación que a Ud. más les gusta [señalada por el niño el día anterior]” ¿Podremos ordenar los datos que tenemos aquí para saber si podemos tener alguna enfermedad? ¿Muy difícil la actividad? (“¡No!”[coro]) “Van a escribir el desafío en su cuaderno y con las mismas respuestas que ustedes me dieron [indica las estrategias escritas en la pizarra] van a tratar de ordenar esto [muestra la lámina dada]”.

La profesora propone un problema abierto, da libertad para responder, sugiere caminos a seguir implícitamente, y también explícitamente enmarca las posibles soluciones a través de las estrategias propuestas por los alumnos para la resolución. Mediante la reiteración de la tarea demanda a los alumnos examinarla. El desafío que propone activa pensamientos más complejos que los algorítmicos, y exige esfuerzos cognitivos y decisiones para poder responderlo. Así la profesora propone una tarea de alta demanda cognitiva.

¿Cómo los estudiantes ponen en práctica la tarea?

Como lo señalan Stein y Smith (1998, 2000) sólo si el docente propone altas demandas cognitivas existe la posibilidad que los alumnos movilicen demandas de alto nivel cognitivo.

Un alumno traza un cuadrado con una escuadra y señala “*voy a hacer un cuadrado y aquí voy a poner lo saludable y aquí lo que no es saludable*”. Otra alumna dibuja cinco columnas y dice “*estoy ordenando...es un recuadro, y voy a poner la fruta, el yogurt, la leche y así...* [señala con su mano cada columna]”. Un alumno pide poder recortar la lámina y poner cada alimento en forma ordenada [indica en su cuaderno que los colocará en columnas]. En otros cuadernos se observan tablas de dos columnas con encabezados elegidos y escritos por los niños “*comida sana o comida no sana*”, “*malos o buenos*”, “*lo sano o lo malo*”, “*comida sana o comida chatarra*”, “*no saludable o saludable*”. Una alumna enmarca sobre la misma lámina los alimentos que ella considera “*no saludable*”; otra niña realiza el conteo de los alimentos y los va tachando en la lámina para no volver a contarlos. Sin realizar conteo, otros alumnos dibujan solo una imagen representante en forma de listas horizontales; otros dibujan la imagen dentro de tablas con encabezados y celdas. Algunos alumnos dibujan tantas imágenes como aparecen en la lámina [aparecen tablas gráficas tipo pictogramas]. Una niña crea una tabla a dos columnas con encabezado, en la que dibuja la imagen y al lado coloca el conteo respectivo. Un niño crea un pictograma sin separar por categorías y sin palabras. Solo una niña crea una tabla [de

frecuencias] usando palabras y el conteo respectivo de las imágenes. Otros realizaron representaciones de pirámides nutricionales de comida saludable y no.

2. Justificación de las representaciones

¿Cómo la profesora establece la tarea?

La profesora tras haber concedido tiempo para el trabajo libre e individual, señala ¿alguien me podría contar cómo se les ocurrió ordenar las colaciones [que estaban en la lámina]? Una niña responde “*lo hice con números y separe en comida saludable y no saludable. Los conté*”. ¿Alguien más quiere compartir cómo lo hizo? “*Hice una tabla y puse lo no saludable y lo sí saludable*”.

La profesora resume “la mayoría ordenó lo que estaba en la hoja en saludable y no saludable [...] ustedes separaron sus colaciones porque son de ustedes mismos, ¿qué colocaron ahí?...¿de qué forma lo dejaron ahí en su cuaderno”. La profesora invita a tres alumnos, dos niñas y un niño, y les pide que tomen su cuaderno y que transcriban en la pizarra lo hecho en sus cuadernos, “todos lo hicieron bien,...como se les ocurrió ordenar esto que estaba desordenado, pero quiero que vean lo que hicieron sus compañeros, porque lo que esta acá...” algunos alumnos tratan de terminar la idea “*es igual o es diferente...*”. ¿Ve algo distinto entre estas estrategias y lo que Ud. hizo? ¿Cuál creen que es la mejor opción para responder nuestro desafío [profesora señala las tres estrategias que los alumnos escribieron en la pizarra]?

La profesora establece una demanda cognitiva de alto nivel al escuchar las estrategias de los alumnos y recapitular. Al invitar a tres alumnos con distintas estrategias a la pizarra, la profesora permite que los alumnos más capaces entreguen modelos de solución. Reiteradamente la profesora fuerza a los alumnos para que emerjan justificaciones, explicaciones y significados a través de preguntas, comentarios y retroalimentaciones.

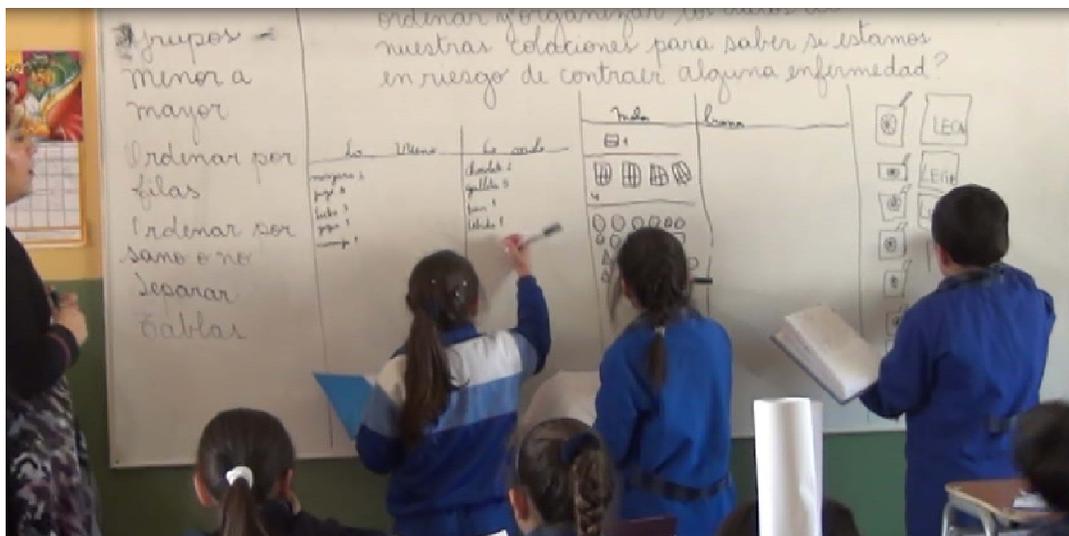


Figura 4: Representaciones producidas por tres alumnos, de izquierda a derecha: tabla con datos y conteo, tabla con iconos y conteo; y pictograma.

¿Cómo los estudiantes ponen en práctica la tarea?

Los alumnos señalan que lo observado desde las representaciones de la pizarra “*acá vimos el orden*”... “*las tablas*”, “*los dibujos, los números, sumas...*” y la mayoría de los alumnos elige como mejor opción para responder el desafío planteado: la tabla [de frecuencias] con palabras y conteo de los elementos.

A continuación se muestran algunas evidencias de los productos realizados por los alumnos y se resumen características de la representación tabular:

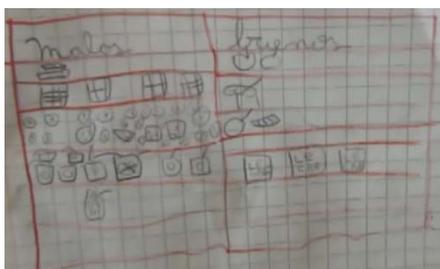


Figura 5. Tabla con una variable y sus categorías, con datos representados a través de íconos y sin conteo.

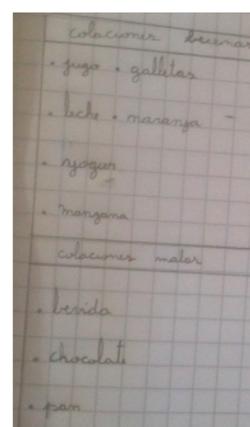


Figura 6. Tabla con una variable y sus categorías, con datos representados a través de texto y sin conteo.

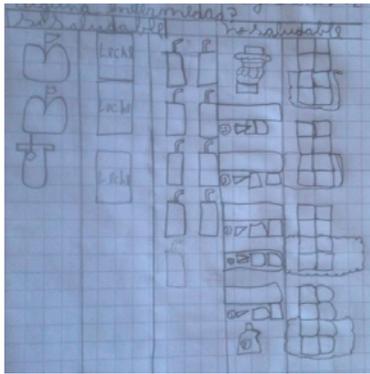


Figura 7. Tabla gráfica con una variable y sus categorías, con datos representados a través de íconos y sin conteo.

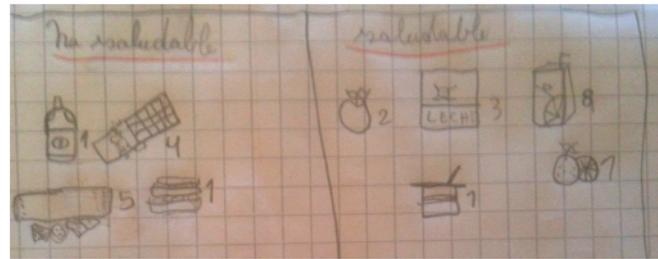


Figura 8. Tabla con una variable y sus categorías, con datos representados a través de íconos y con conteo.



Figura 9. Tabla con una variable y sus categorías, con datos representados a través de texto y con conteo.

La Tabla 3 muestra un segmento de la clase que representa a la generalidad de la clase implementada. Los factores asociados a las demandas cognitivas de alto nivel de la clase, en su primera y segunda versión. En la primera clase implementada se observa mayoritariamente declinación de las demandas cognitivas, cuestión que cambia preponderantemente a mantención de demandas cognitivas de alto nivel en la implementación de la segunda clase.

Tabla 3. Caracterización de un segmento representativo de la primera y segunda clase en cuanto a factores asociados con la mantención (M) o declinación (D) de demandas cognitivas de nivel alto

1ra clase	Factores	2da clase	Factores
D	La profesora da demasiado tiempo de exploración	M	La profesora da un tiempo de exploración apropiado
D	La profesora no entrega andamiajes para el razonamiento de los alumnos	M	La profesora entrega andamiajes para el pensamiento y razonamiento de los alumnos
M	La profesora propone la tarea sobre el trabajo previo de los alumnos	M	La profesora propone la tarea sobre el trabajo previo de los alumnos
D	La profesora no escucha realmente las estrategias de los alumnos	M	La profesora escucha las estrategias de los alumnos y recapitula
D	La profesora no permite que los alumnos observen las distintas estrategias de sus compañeros	M	La profesora permite que los alumnos observen distintas estrategias de sus compañeros
D	La profesora es quien habla de las estrategias de los alumnos y ella es quien recapitula	D	La profesora es quien habla de las estrategias de los alumnos y ella es quien recapitula
D	La profesora no se hace cargo del razonamiento del alumno	M	La profesora se hace cargo del razonamiento del alumno
D	La profesora no permite que los alumnos más capaces entreguen modelos de solución	M	La profesora y los alumnos más capaces entregan modelos de solución
D	La profesora no realiza conexiones con los conocimientos ya adquiridos de los alumnos	D	La profesora hace conexiones con los conocimientos previos de los alumnos
D	La profesora no realiza ninguna conexión conceptual	M	La profesora realiza frecuentes conexiones conceptuales
D	La profesora no realiza contrapreguntas	M	La profesora presiona a través de contrapreguntas
D	La profesora acuerda el énfasis de significado, conceptos, o la comprensión de la exactitud o completitud de la respuesta	D	La profesora acuerda el énfasis de significado, conceptos, o la comprensión de la exactitud o completitud de la respuesta

4. RESUMEN Y DISCUSIÓN

4.1. ¿QUÉ CAMBIÓ?

En la primera clase implementada no se consiguió que los alumnos trabajaran en torno al problema, permanentemente hubo declinación a un nivel bajo de demandas cognitivas por parte de la profesora que la implementó, los alumnos no comprendieron el problema, la profesora sostenía un rol preponderante en desmedro de la participación de los alumnos, y el material ocupado de las colaciones fue mucho (en cantidad de láminas) y presentado solamente en la pizarra.

En la segunda clase –implementada por la Srta. C–, los alumnos comprendieron el problema y la tarea, además a cada alumno se le entregó una lámina desde donde obtener los datos de las colaciones.

4.2. ¿CÓMO MEJORÓ LA CLASE?

4.2.1 Aprendizaje desde otros y desde sí mismo

Una vez a la semana, y durante 4 semanas, cinco profesoras del Grupo de Estudio de Clases de Estadística se reunieron durante 2 horas. Esas sesiones les permitieron interactuar en torno a la planificación de una clase con un objeto estadístico. En todas las sesiones presenciales, las profesoras fueron mejorando y discutiendo el Plan de Clases. Además, y por motivación propia, crearon instancias tecnológicas, no presenciales, que les permitía adecuar y discutir sobre la clase que planificaban juntas, e iban algunas de ellas implementando.

La Srta. C pudo observar in situ la implementación de la primera clase, las dificultades de los alumnos y la puesta en obra de la primera versión del Plan de Clases realizado en conjunto con las demás profesoras, ello contribuyó a desarrollar una mejora de la clase, especialmente se precisó la pregunta central, se diseñó un nuevo material: la lámina individual para los alumnos.

4.2.2 Construcción de una comprensión profunda de la Estadística en el Grupo de Estudio de Clases

Los investigadores actuaron como monitores, interviniendo en el Grupo de Estudio de Clases para centrar el trabajo a los objetos estadísticos en juego y desarrollar la comprensión de ellos, y a poner en obra el ambiente de aprendizaje SRLE; ampliar la habilidad de los profesores para explorar y aprender desde los datos; desarrollar la argumentación estadística en torno a una pregunta central; y anticipar y comprender el razonamiento de los alumnos.

“Creo que [de las 5 profesoras del Grupo de Estudio de Clases], nunca he sentido que las opiniones sean destructivas o para criticar de mala forma la ejecución de la planificación que en conjunto se construye.”
(Entrevista a la Srta. C.)

Las falencias en los conceptos estadísticos, los posibles errores de los alumnos y las respuestas anticipadas que ellos darían a preguntas de los alumnos para que ellos conecten sus conceptos e interrelaciones, es parte de un enfoque de enseñanza al que no están acostumbrados.

Creo que nos faltó [en la planificación] estar más preparados para las preguntas de los niños y para precisar lo estadístico que se aprendía. (Entrevista a la Srta. C.)

Las preguntas entre las profesoras del Grupo permitieron debatir, precisar y comprender la diferencia entre dato e información; o las características diferenciadoras entre una lista o una tabla; o cómo intervenir en las producciones de sus alumnos para ayudarles a “ver y cuestionar” una representación construida con algunos errores; la relevancia de utilizar datos reales y de interés de los alumnos; la importancia de centrar el desarrollo y el producto en torno a una pregunta central que requiere datos y que motiva la planificación, análisis y conclusiones que den respuesta a la pregunta central del trabajo indagatorio de la clase de Estadística.

Los investigadores presionaban para promover cuestionamientos de las declaraciones de las profesoras de la implementación de la clase en cuanto al Plan de Clases realmente implementado. La discusión de la primera clase implementada y la relectura del Plan de Clases preparado permitieron que los profesores constataran que la clase no había funcionado, no había sido exitosa la planificación de la misma. En un principio la profesora que implementó la primera clase y la Srta. C creían que la clase había funcionado, porque la profesora planteó el problema y el objetivo de la clase, los alumnos habían trabajado en sus cuadernos, y la profesora había concluido y “cerrado la clase”. La constatación del fracaso de la clase en la reunión del Grupo de Clases, surgió desde la misma planificación pues al cotejar la columna "evaluación de la marcha de la clase", la lectura dejó en evidencia que la planificación falló: los niños no se motivaron con la presentación del problema, el material era difícil de manipular (porque estaba pegado en la pizarra y anotar desde lejos era difícil para los niños; habían muchas fichas), cuestiones que los profesores consideraron clave para el éxito de la clase. Al evaluar en conciencia la clase realmente implementada, volvieron a rehacer el Plan de Clases (ver Anexo), principalmente en cuanto al tema motivador introductorio, los datos a entregar, la pregunta central y la exposición de las representaciones estadísticas de los alumnos; todo ello redundó en una mantención de altas demandas cognitivas.

Otra cuestión de interés tanto para el aprendizaje de los profesores dentro del grupo como para los alumnos a los cuales se les implementó la clase, fueron las distintas estrategias desplegadas por los ellos y la emergencia de la tabla de frecuencia como construcción cultural y con sentido. Dicha tabla emergió entre las distintas representaciones elaboradas por los 38 alumnos para ordenar los datos de sus colaciones, entre las que se observó, listas simples sin conteo a listas con conteo; tablas simples con iconos en vez de palabras y sin repetición de iconos como expresión del conteo; tablas con iconos de las categorías y conteo; tablas con las categorías en palabras y conteo; tablas-gráficas, es decir, tablas con iconos repetidos en columnas, entre otras. Todas las representaciones servían en mayor o menor grado para cumplir con la tarea de clasificar y representar los datos; lo interesante de la propuesta que describe este artículo, es que todas las estrategias son respetadas pues dan respuesta al problema planteado, y es elegida como mejor estrategia por los mismos alumnos, la tabla de frecuencias fue considerada por los niños como la representación tabular que entrega mayor comprensión entre todas las presentadas.

4.2.3 Teoría de la enseñanza aprendizaje en acción

En un enfoque de enseñanza centrado en el alumno, el modelo SRLE –Ambiente de Aprendizaje de Razonamiento Estadístico– favorece el desarrollo de una comprensión profunda y significativa de la estadística, y promueve demandas cognitivas altas con el fin que lleguen a razonar estadísticamente “haciendo estadística”. La clase implementada, plasmada en el Plan de Clases construido,

principalmente estuvo cimentada en actividades que proporcionan a los alumnos oportunidades para explorar, observar, detectar relaciones, pensar y reflexionar, debatir con sus compañeros en cuanto a las representaciones estadísticas –tablas y gráficos–, proveyendo andamiajes y fomentando la discusión y argumentación estadística para justificar y comunicar resultados, al igual que lo evidencian a nivel escolar Ben-Zvi y Sharett-Amir, (2005), y Estrella y Olfos, (2012).

“Me sorprendí mucho, porque los niños que salieron a explicar sus estrategias no son los alumnos destacados en matemática. El trabajo en el Grupo [de profesores] fue muy enriquecedor, la clase que implementamos me sirvió para ver cómo aprenden los alumnos. Debo empezar a trabajar más abiertamente con los niños, no limitarlos dándole todo hecho, nuestros niños tienen muchas capacidades.” (Extracto de entrevista a Srta. C.).

El Estudio de Clases, como instancia de desarrollo profesional, constituyó para la profesora una nueva manera de ver y actuar en su aula. Le permitió precisar su comprensión de los objetos estadísticos y su enseñanza. También, como ella misma reconoce que se sorprendió al darse cuenta que su rol podía ser distinto a lo usual y traer beneficios para los alumnos. La interacción con sus pares e investigadores participantes le dio a la profesora nuevas perspectivas y un auditorio distinto al de sus alumnos, que le podían rebatir, asentir e incluso colaborar en la creación de las propuestas de actividades y tareas para la clase.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos el financiamiento del proyecto Conicyt – PIA, CIE-05 del Centro de Investigación Avanzada en Educación y a VRIEA de Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

REFERENCIAS

- Ben-Zvi, D. (2011). Helping students develop statistical reasoning: implementing a statistical reasoning learning environment (SRLE). In R. Borba & C. Monteiro (Eds.), *Proceedings of the Encontro Interamericano de Educação Estatística*. Recife, Brazil: Federal University of Pernambuco.
- Ben-Zvi, D. & Sharett-Amir, Y. (2005). How do Primary School Students Begin to Reason about Distributions? In K. Makar (Ed.), *Reasoning about distribution: A collection of current research studies*.
- Burrill, G. & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. In *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 57-69). Netherlands: Springer.
- del Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación Estadística: relaciones con la matemática, *Revista de Investigación Educativa Latinoamericana, Pensamiento Educativo*, PUC, 49(1), 53-64.

- Estrella, S. (2010). Instrumento para la evaluación del Conocimiento Pedagógico del Contenido de Estadística en profesores de Educación Básica (Tesis de magíster inédita) Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.
- Estrella, S. y Olfos, R. (2012). La taxonomía de comprensión gráfica de Curcio a través del gráfico de Minard: una clase en séptimo grado. *Revista Educación Matemática*, 24(2), 119-129.
- Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning Research and Teaching Practice*. New York: Springer.
- Makar, K., Bakker, A. & Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 152-173.
- Manzi, J. (2007). Evaluación Docente: Antecedentes, resultados y proyecciones [Versión electrónica]. Seminario Evaluación Docente en Chile: Fundamentos, experiencias y resultados. Obtenido el 10 de Enero, 2010 de <http://mideuc.cl/seminario/presentaciones.html> National Council of Teachers of Mathematics (2000) Principles and Standards for School Mathematics, Reston: VA.
- OECD. (2010). *Síntesis Estudio Económico de Chile, 2010*. Recuperado desde <http://www.oecd.org/dataoecd/7/38/44493040.pdf>
- Olfos, R., Guzmán, I., & Estrella, S. (2014). Gestión Didáctica en Clases y su relación con las decisiones del profesor. *Bolema: Mathematics Education Bulletin= Bolema: Boletim de Educação Matemática*, (en Prensa).
- Pfannkuch, M. & Ben-Zvi, D. (2011). Developing teachers' statistical thinking. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education (A joint ICMI/IASE Study)* (pp. 323–333). New York: Springer.
- Preiss, D. (2010). Folk Pedagogy and Cultural Markers in Teaching: Three Illustrations from Chile. In Preiss, D.D., & Sternberg, R.J. Eds. *Innovations in educational psychology: Perspectives on Learning, Teaching, and Human Development* (ps. 325-356). New York: Springer .
- Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 268-275.
- Stein, M., Smith, M., Henningsen, M. & Silver, E. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York: Teachers College Press.
- Valenzuela, J., Bellei, C., Sevilla, A. & Osses, A. (2009). ¿Qué explica las diferencias de resultados PISA Matemática entre Chile y algunos países de la OCDE y América Latina? En L. Cariola, g. Cares & e. Lagos (eds.), *¿qué nos dice PISA sobre la educación de los jóvenes en Chile?* (pp. 105-148). Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.
- Yang, Y. (2009). How a Chinese teacher improved classroom teaching in Teaching Research Group: A case study on Pythagoras theorem teaching in Shanghai. *ZDM*, 41(3), 279-296.

**A LESSON STUDY GROUP
FOR IMPROVING THE TEACHING OF STATISTICS IN CHILE**

ABSTRACT

In Chile there are some educational efforts that promote the Lesson Study as communities of professional improvement of teaching, but it is not as in East Asian countries, which is a methodology and is a tradition rooted in education. This study describes a lesson of statistics -two versions of the same lesson-, and the changes in their planning, which might show a track of how lessons were continuously developed in the Lesson Study Group. We used the model of learning environment, SRLE, Garfield and Ben-Zvi (2008) and Pfannkuch and Ben-Zvi (2011) and the Task Analysis Guide and Factors Associated with the Maintenance and Decline of High-Level Cognitive Demands (Stein and Smith, 1998; Stein et al., 2000). In this study, which is part of a wider investigation, describes the change of the second lesson implemented from the perspective of Task Analysis and presents a snapshot of how gradually understanding a Chilean professor is improving based lesson in a learning environment that promotes statistical reasoning and supported by the activities of the Lesson Study Group.

Keywords: *Statistics Education; Case Study; Lesson Study; Teaching Research; Statistical Lessons; Training Teacher*

SOLEDAD ESTRELLA

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

soledad.estrella@gmail.com

Dra. (c) Soledad Estrella, Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Línea de investigación en Educación Estadística, las problemáticas de la Didáctica de la Estadística y la formación inicial y continua de profesores desde nivel preescolar a educación media, las representaciones estadísticas y sus demandas cognitivas. Ha colaborado en textos educativos de la NCTM, y en textos de formación de profesores Japón-México. Es miembro del grupo de Educación Estadística de la Sociedad Chilena de Estadística; y de la Sociedad Chilena de Educación Matemática.

RAIMUNDO OLFOS

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile

raimundo.olfos@ucv.cl

Ph.D. Raimundo Olfos, Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Es especialista en Didáctica de la Matemática, formación docente, evaluación y Estudio de Clases. Miembro del Centro de Investigación Avanzada en Educación. Ha escrito numerosos libros sobre la matemática escolar y el Estudio de Clases japonés. Y ha desarrollado varios proyectos sobre el conocimiento pedagógico del contenido relativos a matemática y estadística. Es miembro y fundador de la Sociedad Chilena de Educación Matemática.

ANEXO: Plan de Clases, nivel 3.

Fecha: 16 de Mayo, de 2013 - Grado: 3 Profesor: Srta. C Nombre de la unidad: Estadística y Probabilidades			
I. Plan de la unidad A. Meta(s) de la unidad: B. Cómo está la unidad relacionada con el currículum:			
II. Planifique de la lección de estudio A. Meta(s) de la clase: Organizar, clasificar y obtener información. B. Descripción de la clase: Con sus datos de colaciones, clasificarlos y producir representaciones estadísticas (tablas, gráficos) para mostrar información. C. Proceso de la clase:			
ACTIVIDAD DE APRENDIZAJE: Actividades y preguntas claves	ACTIVIDAD DE LOS ESTUDIANTES Y POSIBLES RESPUESTAS	INTERVENCIÓN DOCENTE (Respuesta del profesor a reacciones de alumnos)	EVALUACIÓN DE LA MARCHA DE LA CLASE
1. Puesta en juego de conocimientos previos: -Presentación de una carta en la que se expone una historia vinculada a una problemática de alimentación (obesidad y sus consecuencias).  -¿Han escuchado antes sobre este tema? ¿Qué opinan? ¿Se relaciona el tema con tu forma de alimentarte? ¿Por qué o cómo?	-Escuchar la historia. -Exposición de sus propias experiencias en forma oral, a través de una lluvia de ideas. Dan ejemplos.	-Simular que a los estudiantes les ha llegado carta y leérselas. Relatar la historia presentada en la carta. Generar y guiar la lluvia de ideas. Mediante las preguntas el profesor intenciona y motiva a los alumnos para el problema – desafío de la clase. Aclarar conceptos o palabras desconocidas (comer a deshoras, autoestima, etc.)	¿Los alumnos prestan atención a la situación problemática? ¿Se motivan mientras la escuchan? Los alumnos comprenden que una alimentación inadecuada conlleva a ciertas enfermedades o situaciones de riesgo: desánimo, obesidad, cansancio, etc. <i>Tiempo: 10 min.</i>

<p>2. Planteamiento del problema: -Presentación lámina (colaciones).</p>  <p>Los alumnos observan la lámina de las colaciones</p> <p><u>Pregunta problema:</u> <i>¿De qué manera podemos ordenar y organizar los datos de nuestras colaciones para saber si estamos en riesgo de contraer alguna de las enfermedades mencionadas?</i></p>	<p>Observan su lámina sobre las colaciones que mencionaron en la clase anterior y comentan con su compañero en cómo harán la clasificación.</p> <p>Posibles respuestas: Hacen un listado, tablas, columnas comparativas, tablas con dibujos (pictogramas).</p> <p>Los alumnos infieren que algunas colaciones son menos saludables que otras.</p>	<p>Se pide a los alumnos que observen las imágenes que se encuentran en la lámina. ¿Qué observan?</p> <p>¿Qué podemos decir de estos datos?</p> <p>¿Se relacionan estas imágenes con la situación que han escuchado?</p> <p>Plantea la pregunta problema.</p>	<p>¿Los alumnos se sienten interesados en el problema?</p> <p>¿Los alumnos relacionan los datos entregados con la situación problemática planteada anteriormente?</p> <p><i>Tiempo: 15 min.</i></p>
<p>3. Resolución del problema en los cuadernos:</p> <p>Los alumnos trabajan, en parejas, ordenando y clasificando los datos de las colaciones del curso.</p>	<p>Clasificación de colaciones en forma arbitraria.</p> <p>Elijen la forma de cómo clasificarlas.</p> <p>Escriben o pegan en el cuaderno la lámina con los datos de sus colaciones.</p>	<p>Observa las producciones de los alumnos, e identifica 3 de ellos con clasificaciones distintas; simples, elaboradas y muy elaboradas que serán presentadas en el pizarrón, a modo de que los alumnos diferencien y definan cual es la mejor opción y la que les permite interpretar los datos para contestar la pregunta.</p>	<p>¿Los alumnos entienden la tarea asignada?</p> <p>¿Trabajan colaborativamente?</p> <p>¿Las clasificaciones de las colaciones son acordes a lo planteado?</p> <p><i>Tiempo: 30 min.</i></p>

<p>4. Compartiendo ideas y estrategias de resolución:</p> <p>-¿Cómo ordenaron la información de las colaciones?</p> <p>-¿Cómo clasificaron las colaciones?</p> <p>-Pedir específicamente a 3 estudiantes presentar en la pizarra las estrategias utilizadas según diferentes criterios de clasificación.</p>	<p>En forma oral ellos responden cómo clasificaron las colaciones, nombrando solo el criterio de clasificación: líquido – sólido, dulce – salado, frutas y no frutas, saludables o no saludables, etc.</p> <p>Exposición de trabajos de 3 alumnos frente al curso en forma oral (listado de colaciones con distintas clasificaciones, o tablas o pictogramas). Los alumnos en conjunto deciden cuál de las tres opciones responde mejor a la pregunta planteada.</p>	<p>Selecciona alumnos que piden la palabra para compartir las estrategias orales.</p> <p>Selecciona los alumnos para compartir las representaciones en el pizarrón.</p> <p>Pregunta al curso cuál de las tres opciones expresadas consideran como mejor para responder <i>¿De qué manera podemos ordenar y organizar los datos de nuestras colaciones para saber si estamos en riesgo de contraer enfermedad?</i></p>	<p>¿Los alumnos son capaces de explicar las clasificaciones de sus colaciones por medio de tablas de conteo?</p> <p><i>Tiempo: 15 min.</i></p>
<p>5. Sintetizando ideas desde aprendizajes de los estudiantes:</p> <p>-Puesta en común: Según los datos que han ordenado y clasificado ¿estamos en riesgo de contraer las enfermedades antes mencionadas? ¿Por qué?</p> <p>¿Cómo puedes mostrarlo?</p> <p>-Redacción de comentarios breves: ¿Qué descubrieron y cómo lo descubrieron?</p>	<p>Conclusión sobre los alimentos que ayudan a desarrollar la enfermedad de la obesidad.</p> <p>Los alumnos comentan si existe relación entre las colaciones que ellos comen y la información escuchada.</p> <p>Los alumnos registran en su cuaderno cuál de las tres estrategias planteadas por sus compañeros, responde mejor a la pregunta.</p>	<p>Se realizan preguntas inductoras para comentar la relación entre la situación narrada y los tipos de colaciones del curso.</p> <p>Se comenta además si la alimentación que ellos tienen en el colegio podría verse relacionada con algunas enfermedades nombradas.</p>	<p>Las construcciones realizadas por los alumnos ¿permiten relacionar las colaciones con las enfermedades o situaciones de riesgo?</p> <p>¿Registran en sus cuadernos lo que han aprendido en la clase?</p> <p><i>Tiempo: 20 min.</i></p>

INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE PROBABILIDADE E OS LIVROS DIDÁTICOS PARA ENSINO MÉDIO NO BRASIL

CILEDA DE QUEIROZ E SILVA COUTINHO

RESUMO

A probabilidade é hoje um dos conteúdos mais importantes na Escola Básica devido à sua aplicabilidade, não apenas em outras áreas do conhecimento, como também devido à sua contribuição para o desenvolvimento de uma postura crítica e leitura do mundo. Nessa perspectiva, o presente texto discute o letramento probabilístico que se deseja para alunos do Ensino Médio brasileiro – 15 a 17 anos de idade - a partir da análise de livros didáticos de Matemática destinados a esse nível de escolaridade. Para isso, realizamos um estudo do Guia de Livros Didáticos de Matemática – PNLD2012, no que se refere à presença desse conteúdo, à proporção de páginas destinadas a ele, à metodologia anunciada, em todas as coleções aprovadas no edital do Programa Nacional de Livros Didáticos – PNLD – 2012. Em seguida, analisamos as tarefas propostas em uma das coleções, escolhida por ser a que apresentou a menor proporção de páginas destinadas à probabilidade. Entendemos como tarefa a ação demandada pelo problema proposto, no sentido adotado pela Teoria Antropológica do Didático. Verificamos que a proporção de páginas destinadas à Probabilidade não tem correlação com a abordagem, ou seja, não indica se é adequada ou não para o desenvolvimento do letramento probabilístico. A obra analisada apresentou uma boa abordagem, que contemplou desde a percepção do acaso, passando pela descrição de um experimento aleatório e enumeração dos resultados possíveis desse experimento, para então abordar a definição clássica de probabilidade. Verificou-se também que a visão frequentista não é adequadamente explorada nas coleções aprovadas e apresentadas no Guia.

Palavras-chave: Educação estatística; letramento probabilístico; conceito de probabilidade; ensino médio; livro didático.

1. INTRODUÇÃO

Os conteúdos de Probabilidade e Estatística, que constituem saberes indicados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) como parte integrante do currículo da escola básica, são temas que ainda não possuem pesquisas suficientes para a compreensão dos mecanismos utilizados na formação dos respectivos conceitos. No cenário internacional, em relação a esse tema, temos um campo em franca expansão: as pesquisas começam a aparecer e tomar corpo, constituindo-se grupos de pesquisadores específicos desta área de conhecimento. Citamos como exemplo a “*Comission Inter-IREM de Probabilité et Statistique*”, na França, ou ainda, o grupo da Universidade de Granada, na Espanha, coordenado pela Prof^a Dr^a Carmen Batanero. Citamos, também, o IASE, *International Association for Statistical Education*, que procura congrega pesquisadores da comunidade internacional na área de Didática da Estatística. No Brasil, percebe-se um início de trabalho de

mobilização e sensibilização dos pesquisadores em Educação Matemática com os trabalhos do GT12, de Probabilidade e Estatística, mantido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Da mesma forma, no interior dos Programas de Pós-Graduação nos quais estão se organizando novos grupos de pesquisa em Educação Estatística, como na PUC-SP, o grupo PEA-ESTAT, que está inserido no grupo PEA-MAT, cadastrado no CNPq.

Coutinho (2002) mostrou aspectos institucionais do ensino da Probabilidade por meio de um estudo detalhado dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – para o Ensino Fundamental (1997), mostrando que os alunos têm os conhecimentos, habilidades e competências necessários à formação dos conceitos probabilísticos de base, já no final do terceiro ciclo do Ensino Fundamental, isto é, os alunos possuem, neste nível, a prontidão necessária para uma formalização de tais conceitos. Neste estudo, livros didáticos foram analisados e ficou constatado que diversos autores já apresentam capítulos inteiros dedicados ao estudo do raciocínio combinatório e probabilístico, sendo que, nas séries iniciais, o enfoque refere-se às concepções espontâneas dos alunos sobre as ideias de acaso, chance e possibilidade. Os resultados mostraram, porém, que tanto os Parâmetros Curriculares como os livros didáticos analisados são insuficientes para a instrumentalização do professor, visando um trabalho que possa, realmente, guiar os alunos em uma aprendizagem significativa dos conceitos estocásticos de base.

Observa-se, também, que as situações propostas pelos diversos autores analisados limitam-se às situações de equiprobabilidade, o que está em acordo com as orientações dos PCN do Ensino Fundamental (Brasil, 1998), embora pesquisas internacionais mostram que tal abordagem pode se constituir em fonte de obstáculos, difíceis de serem superados. Neste sentido, o trabalho de Coutinho (2001), indica a possibilidade da introdução ao conceito de probabilidade, por atividades contextualizadas no cotidiano dos alunos, em situações aleatórias não equiprováveis. Mostrou-se que tais atividades permitem que os alunos construam o conceito de probabilidade com significado, por meio de um trabalho de realização efetiva de experimentos aleatórios e de sua interpretação por meio de um modelo pseudo-concreto de urna de Bernoulli¹.

O presente texto busca uma análise similar, mas agora em relação aos livros didáticos destinados ao Ensino Médio brasileiro (três anos finais da escolaridade básica – alunos com 15 a 17 anos de idade, em média). Para isso, analisamos o Guia de Livros Didáticos – PNLD2012 (Brasil, 2011) e uma das coleções nele apresentada, à luz dos resultados de pesquisa observados em Coutinho (2001) e da ideia de Letramento Probabilístico, anunciada por Gal (2005).

¹ A ideia de modelo pseudo-concreto foi primeiramente apresentada por Michel Henry em um artigo publicado em 1997 e desenvolvida em Coutinho (2001).

O Programa Nacional do Livro Didático – PNLD – tem como principal objetivo subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de coleções de livros didáticos aos alunos da educação básica. As avaliações são periódicas, e a próxima compra de livros destinados ao Ensino Médio ocorrerá em 2015 (PNLD 2015). Após a avaliação das obras, o Ministério da Educação (MEC) publica o Guia de Livros Didáticos com resenhas das coleções consideradas aprovadas. O guia é encaminhado às escolas, que escolhem, entre os títulos disponíveis, aqueles que melhor atendem ao seu projeto político pedagógico. Tais coleções são adquiridas pelo MEC e enviadas para os alunos, que as recebem gratuitamente.

O Programa Nacional do Livro Didático é o mais antigo dos programas voltados à distribuição de obras didáticas aos estudantes da rede pública de ensino brasileira e iniciou-se, com outra denominação, em 1929. Ao longo desses 80 anos, o programa foi aperfeiçoado e teve diferentes nomes e formas de execução. Atualmente, o PNLD é voltado à educação básica brasileira, tendo como única exceção os alunos da educação infantil (Brasil, FNDE, s/d).

2. PESQUISAS QUE VERSEM SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PROBABILIDADE

Visando melhor fundamentar nossa análise, buscamos levantar alguns resultados de pesquisas de mestrado e de doutorado realizadas no Brasil. Justificamos essa escolha para limitação do campo de pesquisas realizadas pela hipótese de que a maior parte dos artigos publicados nos anais de eventos e em revistas da área refletem recortes de pesquisas de mestrado e doutorado realizadas no interior dos Programas de Pós-graduação. No Brasil, as dissertações e teses defendidas estão cadastradas em um banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES – e têm seu resumo e dados principais disponibilizados na página <http://www.capes.gov.br/servicos/banco-de-teses>. Realizamos nossa busca nesse banco de dados sem limitação de período de tempo. Nossa busca resultou em 31 trabalhos, incluindo dissertações e teses, com a distribuição ilustrada na Tabela 1.

Sabemos que podem existir outros artigos oriundos de pesquisas que não foram desenvolvidas nesse contexto, mas optamos pela limitação apresentada de forma a operacionalizar nossa busca. Citamos, apenas a título de exemplo, o número temático publicado pela revista *Bolema* em 2011, que compreendia dois volumes (volumes 39 e 40), apenas tratando da Educação Estatística². Cada um dos volumes apresentou 13 artigos, dos quais oito tratavam do ensino e da aprendizagem de Probabilidade, incluindo-se artigos sobre currículos. Novamente, pode-se destacar a pouca pesquisa na área,

² <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/858> e <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/863> .

reforçando o indicado pela Tabela 1. Note-se também que, entre os artigos citados, nenhum deles trata da análise de livros didáticos.

Tabela 1. Distribuição das pesquisas sobre ensino e aprendizagem da Probabilidade segundo o objetivo principal

Objetivo principal	Número de pesquisas
Ensino e aprendizagem por sequência didática	14
Diagnóstico de conhecimentos discentes	7
Diagnóstico de conhecimentos docentes	5
Análises de livros didáticos e exames	2
Estado da arte	1
Currículo	2
Total	31

É fácil observar nessa Tabela 1 a pouca incidência de pesquisas na área e a necessidade de ampliar esse campo. Vale ressaltar que alguns dos trabalhos aí relacionados apresentam um capítulo ou subcapítulo contendo a análise de livros didáticos com o objetivo de estudar o estado do ensino na época da pesquisa. Falamos particularmente dos trabalhos desenvolvidos no Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC-SP, que constituem parte das pesquisas citadas (12 pesquisas entre as 31 identificadas).

Além das dissertações e teses desenvolvidas no interior dos Programas de Pós-graduação (mestrados e doutorados), algumas pesquisas são retratadas em artigos publicados em revistas da área ou apresentados em congressos, mas esse levantamento não foi realizado por nós.

Entre as pesquisas citadas na Tabela 1 e os artigos publicados na edição temática da revista *Bolema*, não são poucos os que apontam para uma abordagem determinista da Probabilidade. Citamos particularmente dois trabalhos recentes que pudemos acompanhar: Oliveira (2010) e Correa (2010), cujo objetivo foi a identificação de concepções de alunos (Oliveira) e de docentes (Correa).

Oliveira (2010) fez um profundo estudo dos materiais didáticos disponíveis para alunos do Ensino Médio no Estado de São Paulo, no que se refere aos capítulos destinados à Probabilidade (materiais distribuídos pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo), antes de elaborar e aplicar um conjunto de atividades de forma a diagnosticar elementos invariantes na mobilização do conhecimento probabilístico destes alunos. Correa (2010) analisou alguns livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático com o objetivo de levantar pontos a serem abordados em entrevista realizada com seis professores de Matemática em exercício em classes do Ensino Médio, visando diagnosticar as concepções probabilísticas dos mesmos. Esse mestrado acadêmico visou ampliar e aprofundar os resultados já observados por Gonçalves (2004), que estudou a relação entre as concepções probabilísticas de professores de Matemática em exercício na Escola Básica e a abordagem

feita por livros didáticos quanto a este conteúdo, considerando livros utilizados nos anos nos quais estes professores passaram pela Escola Básica e livros utilizados por eles em sua prática docente. Em seu estudo, Gonçalves utilizou como referencial para a categorização das concepções probabilísticas o proposto por Azcárate (1996), mostrando que, para os professores pesquisados, os critérios estabelecidos para a análise de categorias emergentes conduziam às mesmas propostas pela autora citada, que havia realizado sua pesquisa com professores das séries iniciais na Espanha.

No que se refere à análise da abordagem proposta nos livros didáticos para o Ensino Médio e o tipo de questão presente no Exame Nacional para o Ensino Médio (ENEM), citamos o trabalho de Goulart (2007). O ENEM foi criado pelo Ministério da Educação em 1998 com o objetivo de avaliar os alunos que estão concluindo ou já concluíram a educação básica, e teve seus objetivos ampliados pela utilização de seus resultados como critério de seleção para ingresso em universidades públicas. Para melhor esclarecer sobre esse exame, consultamos a página dedicada a ele no portal do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP:

O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) foi criado em 1998 com o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da educação básica, buscando contribuir para a melhoria da qualidade desse nível de escolaridade. A partir de 2009 passou a ser utilizado também como mecanismo de seleção para o ingresso no ensino superior. Foram implementadas mudanças no Exame que contribuem para a democratização das oportunidades de acesso às vagas oferecidas por Instituições Federais de Ensino Superior (IFES), para a mobilidade acadêmica e para induzir a reestruturação dos currículos do ensino médio. Respeitando a autonomia das universidades, a utilização dos resultados do Enem para acesso ao ensino superior pode ocorrer como fase única de seleção ou combinado com seus processos seletivos próprios. O Enem também é utilizado para o acesso a programas oferecidos pelo Governo Federal, tais como o Programa Universidade para Todos – ProUni. (BRASIL, INEP, S/D)

Como um dos resultados observados por Goulart (2007), constatou-se que esse exame impacta a formulação dos livros didáticos, mas o abordado quanto aos conteúdos de Probabilidade não é suficiente para que o aluno tenha sucesso na resolução das questões do ENEM.

No que se refere ao desempenho de alunos brasileiros em exames de larga escala, citamos o apontado por Nunes (2013) quanto ao Pisa 2003: os itens desse exame relativos ao tema Incerteza (no qual se inserem questões que abordam os conteúdos de Probabilidade e Estatística) foram os de maior percentual de acerto. No entanto, observa-se que apenas 10,5% dos alunos participantes tiveram

proficiência maior ou igual a 3, em uma escala de sete níveis: abaixo de 1 (43,5% dos alunos), 1 (29,1%), 2 (17%), 3 (7%), 4 (2,6%), 5 (0,7%), 6 (0,2%).

Justificamos assim nossa escolha pelo estudo do estado atual do ensino de probabilidades no Brasil por meio da análise de livros didáticos: os conteúdos trabalhados nas coleções permitem ao aluno construir habilidades que lhe permitam resolver problemas probabilísticos em contexto escolar e em contextos da vida real? Utilizaremos como pano de fundo para tal estudo o conceito de letramento probabilístico, que passamos a apresentar.

3. CONCEITOS DE BASE E O LETRAMENTO PROBABILÍSTICO

Iniciamos este item abordando o que entendemos por letramento. Para tal, nos fundamentamos em Shamos (1995), para quem o letramento científico requer algum nível de compreensão da ciência. Esse autor propõe três níveis para a categorização do letramento estatístico apresentado por indivíduos. O conhecimento científico cultural, que é o nível mais básico, abrange a compreensão dos termos comumente utilizados para comunicar informações sobre assuntos científicos. O segundo nível exige que o indivíduo, além de dominar a linguagem científica específica, seja capaz de conversar, ler e escrever coerentemente sobre informações estatísticas presentes em contextos significativos. Isso lhe permite ter acesso a fatos do cotidiano e da natureza em geral. O terceiro nível, do conhecimento científico, requer do indivíduo uma compreensão da ciência em geral, incluindo teorias científicas de base e o modo como se chegou aos conhecimentos hoje disponíveis, incluindo a compreensão dos processos científicos de investigação – ou seja, requer consciência de como se acumula e se verifica o conhecimento, além da capacidade de dar sentido às comunicações públicas e de entender e analisar como a ciência e a tecnologia incidem na vida pública.

Em sua pesquisa de doutorado, Nunes (2013) assume o conceito de letramento segundo o utilizado no Pisa: “uma pessoa letrada deve possuir competência e/ou habilidade para fazer uso da alfabetização” (p.43), sendo que a alfabetização é entendida como a simples aquisição de uma tecnologia para a leitura e escrita.

Nesse sentido, adotamos como indícios para o desenvolvimento do letramento científico probabilístico presentes nos livros didáticos o conjunto de habilidades que a abordagem escolhida na coleção permite que o aluno desenvolva. Para Nunes (2013), uma habilidade “é o talento de ser capaz de resolver uma dada situação referindo-se especificamente ao plano objetivo do saber-fazer.” (p.44).

Gal (2005) define letramento probabilístico como “o conjunto de disposições que os estudantes necessitam desenvolver para que sejam considerados letrados em relação aos temas probabilísticos ligados ao mundo real” (p.40). Observemos que tal definição pode ser entendida como uma extensão

daquela fornecida por Shamos (1995), além de ser coerente com a adotada no exame Pisa, apresentada por Nunes (2013), e que Gal também aponta em seu texto:

O termo letramento tem sido tradicionalmente associado com o nível de habilidades de leitura e escrita que as pessoas necessitam para o mínimo funcionamento em sociedade. Por associação, o uso de “letramento” quando comparado com um termo denotando uma área de atividade humana (por exemplo, “letramento computacional”) pode provocar uma imagem do conjunto *minimal* de habilidades básicas esperadas para *todos* os cidadãos nessa área, se opondo ao conjunto de habilidades mais avançadas que apenas algumas pessoas podem alcançar. (Gal, 2005: 41-42).

Em seu texto, esse autor discute diversos aspectos do que considera necessário para o desenvolvimento do letramento probabilístico por alunos, discutindo cada uma das habilidades por ele elencadas como pertencentes ao conjunto minimal citado a partir do que ele denomina “quadro mais geral”, compostos pelo elementos de conhecimento e e de disposição para tal, e destacando a necessidade da não separação destes dois tipos de elementos na construção de um comportamento “probabilisticamente letrado”. Reproduzimos o quadro apresentado pelo autor, elencando tais blocos de elementos.

Quadro 1. Letramento Probabilístico – construindo blocos

Elementos de Conhecimento	<ol style="list-style-type: none"> 1. Grandes ideias: variação, aleatoriedade, independência, preditibilidade/incerteza. 2. Encontrar probabilidades: formas de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos. 3. Linguagem: os termos e métodos utilizados para a comunicação sobre chance. 4. Contexto: a compreensão do papel e implicações de resultados probabilísticos e mensagens em vários contextos e em discursos pessoais e públicos. 5. Questões críticas: resultados de reflexões realizadas quando tratamos com probabilidades.
Elementos disposicionais	<ol style="list-style-type: none"> 1. Postura crítica. 2. Crenças e atitudes. 3. Sentimentos pessoais no que se refere à incerteza e risco (por exemplo, aversão ao risco).

Fonte: Gal (2005, p.46)

Acrescentaremos a esse referencial, alguns dos resultados observados em Coutinho (2001), revistos em Coutinho (2002). Em pesquisa que utilizou a engenharia didática como metodologia, a autora estudou a construção de conhecimento probabilístico em alunos do último ano do ensino fundamental

francês (collège) e primeiro ano do ensino médio francês (lycée), ou seja, alunos de 14-15 anos de idade, com nove a dez anos de escolaridade.

Os resultados observados em Coutinho (2001, 2002) indicam a possibilidade da introdução ao conceito de probabilidade, por atividades contextualizadas no cotidiano dos alunos, em situações aleatórias não equiprováveis. Tais atividades permitem que os alunos construam o conceito de probabilidade com significado, por meio de um trabalho de realização efetiva de experimentos aleatórios e de sua interpretação por meio de um modelo pseudo-concreto de urna de Bernoulli. Particularmente, a atividade proposta em contexto geométrico, o jogo do Franc-Carreau (Coutinho, 2001, 2002), permite aos alunos uma apreensão do conceito de probabilidade a partir da dualidade de dois pontos de vista: o frequentista, que entende a probabilidade de um evento como o valor em torno do qual as frequências relativas se estabilizam, e o ponto de vista Laplaciano, que define a probabilidade como a razão entre o número de possibilidades de ocorrência do evento e o total de resultados possíveis.

Essa autora propõe, em sua pesquisa, que para tal desenvolvimento, a base a ser trabalhada com os alunos seriam a percepção do acaso, a ideia de experiência aleatória e a noção de probabilidade, e para isso, organizou uma sequência didática contendo três situações organizadas segundo os pressupostos da Teoria das Situações Didáticas, compreendendo atividades desenvolvidas em ambiente computacional (simulação de experiências aleatórias em contexto de probabilidade geométrica).

Buscaremos, assim, em nossas análises, identificar os elementos de letramento probabilístico propostos por Gal (2005), acrescentando os elementos apontados em Coutinho (2001) como base da construção do conceito de Probabilidade: como se dá a abordagem dos conteúdos probabilísticos feita por alguns dos livros didáticos aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), em sua versão para 2012, que avaliou coleções de Matemática destinadas ao Ensino Médio?

4. O PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO E A ANÁLISE DE UMA DAS COLEÇÕES APROVADAS

Abordaremos primeiramente algumas observações sobre a abordagem relativa ao conteúdo de Probabilidades, nos termos do Guia de Livros Didáticos – PNLD2012 (Brasil, 2011). A organização desse guia traz, em sua parte inicial, uma apresentação geral das coleções aprovadas e disponíveis para escolha, tratando de cada um dos campos da Matemática. No que se refere à Probabilidade, indica a presença desse conteúdo em todas as coleções, embora com algumas limitações, tais como contextualizações inadequadas e artificiais. Existe uma crítica também à excessiva vinculação da apresentação dos conteúdos de probabilidade aos conteúdos de combinatória, o que pode induzir o

aluno a pensar que, sem todo aquele arsenal, não é possível compreender probabilidades (nem estatística).

O guia aponta ainda que todas as coleções adotam a chamada definição clássica de probabilidade de ocorrência de um evento num determinado experimento aleatório, ou seja, a definição laplaciana (número de sucessos dividido pelo número total de casos possíveis). Tal definição tem como premissa fundamental que o espaço amostral desse experimento aleatório seja equiprovável, mas é observado que tal suposição nem sempre é explicitada nos textos analisados. Essa forma de apresentação também é problemática, pois pode induzir a construção, pelo aluno, do viés da equiprobabilidade: na falta de informações, todos os eventos são sempre equiprováveis, conforme constatado em Coutinho (1994).

Ainda no guia, buscamos informações sobre a metodologia adotada em cada uma das obras, o que nos é fornecido pela figura 1, que apresenta um quadro com a distribuição das obras segundo os conteúdos pré-definidos na análise estabelecida pelo PNLD.

ESTRATÉGIAS	25042	25116	25117	25121	25122	25125	25133
Introduzir os conteúdos por explanação teórica, seguida de atividades resolvidas de cunho aplicativo e exercícios.			X				
Introduzir o conteúdo apresentando um ou poucos exemplos, usados para fazer generalizações que levam à apresentação sistematizada dos conteúdos.	X						
Iniciar por atividades propostas, e, logo em seguida, apresentar os conteúdos sistematizados, sem dar oportunidade ao aluno de tirar conclusões próprias.		X		X			
Iniciar pela apresentação de textos que contextualizam histórica ou socialmente o conhecimento e contribuem para motivar a sistematização do conteúdo, seguida de novos problemas resolvidos e propostos.					X	X	X

Figura 1. Quadro caracterização da metodologia das obras aprovadas no PNLD 2012
Fonte: Brasil, 2011: 39.

Observando o sumário de cada uma das coleções pudemos estabelecer a proporção das páginas destinadas à abordagem dos conteúdos relativos à Probabilidade, ilustrada na Tabela 2. Vale destacar que todas as coleções possuem três volumes, uma para cada ano do Ensino Médio, e que todas apresentam um capítulo exclusivamente destinado à Probabilidade, sempre no segundo volume da coleção. Ou seja, o tema é abordado no segundo ano do Ensino Médio, juntamente com capítulo destinado à Combinatória e, em alguns casos, capítulo destinado à abordagem da Estatística. Vale destacar que, usualmente, os conteúdos relativos à Probabilidade e à Estatística ocupam, juntos, cerca de 7% do total da coleção, segundo se pode verificar nos últimos guias do PNLD.

Tabela 2. Distribuição do número de páginas que abordam Probabilidade nas coleções aprovadas pelo PNL D 2012

Coleção	N. páginas abordando Probabilidade	N. total de páginas do volume	Porcentagem
C1	26	440	5,91%
C2	35	384	9,11%
C3	19	312	6,09%
C4	25	320	7,81%
C5	40	328	12,20%
C6	25	448	5,58%
C7	34	320	10,63%

Na sequência, olharemos mais de perto para o tipo de exercício proposto nos livros. Em um primeiro momento, pudemos constatar que a proporção de páginas destinadas à abordagem da Probabilidade não significa que esta traz os elementos necessários para o desenvolvimento do letramento probabilístico, nos termos apresentados na seção 3 deste texto. Para um estudo mais aprofundado escolhemos duas das coleções, mas uma análise mais completa encontra-se em andamento como parte de um mestrado acadêmico do qual somos professora-orientadora.

A coleção que abordaremos é a C6, e limitaremos nossas análises às atividades relativas à introdução ao conceito de Probabilidade. Essa coleção é a que traz a menor porcentagem de conteúdos de Probabilidade, no entanto, pudemos constatar que os exercícios propostos conduzem o aluno desde o reconhecimento e descrição de uma experiência aleatória até os cálculos de probabilidades em contextos variados. Tal abordagem pode favorecer a apreensão do acaso que intervém nas situações apresentadas, tal como proposto em Coutinho (2001).

A apresentação do tema é feita por meio de exemplo, contextualizando o tema em problemas que apresentam situações da realidade. Apresenta as definições e retoma os exemplos. Introduz, dessa forma, o que chama de linguagem das probabilidades: experimento aleatório, espaço amostral e evento. Propõe aos alunos 12 exercícios que trabalham a noção de experimento aleatório e eventos solicitando descrição de experimentos e enumeração dos elementos do espaço amostral produzidos por tais experimentos. Exemplos de tipos de tarefas³ propostas:

- a) Pegue duas moedas e faça vários lançamentos sobre uma mesa. Descreva o espaço amostral. Descreva o evento A: obtenção de faces com mesmo nome.
- b) Repita o experimento aleatório anterior... (e assim indica para o aluno que o lançamento de moedas é um experimento aleatório).

³ Adotamos como tarefa a ação demandada pelo problema, nos termos propostos na Organização Praxeológica (Chevallard, 1996). Ressaltamos que, para Chevallard, a cada tarefa está associada pelo menos uma técnica, que é a forma de se realizar a tarefa.

c) A respeito do problema anterior, pesquise no dicionário os significados da palavra aleatório.

Com essa série de exercícios, o professor, se orientado, pode discutir com os alunos sobre percepção do acaso, ideia de experimento aleatório (condições para que um experimento seja aleatório, nos termos propostos em Coutinho (2001, 2002): experimentos que compreendem a intervenção do acaso, que podem ser reproduzidos nas mesmas condições tantas vezes quantas se queira, para os quais não se pode determinar ou calcular o resultado final, mas que se pode enumerar todas as possibilidades de resultado).

O capítulo introduz, na sequência, a definição clássica de probabilidade, explicitando que os espaços amostrais apresentados serão todos equiprováveis. Em Coutinho (1994) e Coutinho (2001), os estudos teóricos realizados e a pesquisa de intervenção (ambas foram engenharias didáticas) indicam que tal limitação potencializa a construção de concepção errônea de equiprobabilidade. No entanto, pode-se observar nos próprios Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino da Matemática – PCN, a orientação para que a abordagem da Probabilidade seja feita limitando-se aos espaços equiprováveis. Esse é um indicador bastante forte de que as pesquisas realizadas no campo da Educação Matemática ainda não chegam com facilidade às salas de aula, ou mesmo aos livros didáticos, reforçando a necessidade de um maior número de publicações com os resultados de tais pesquisas, de tal forma que autores, professores e responsáveis pela discussão e concepção de currículos possam ter acesso e incorporar tais resultados à realidade escolar.

Essa coleção apresenta a probabilidade como uma medida de tendência e não de certeza, o que é bastante interessante, pois minimiza a chance de uma percepção determinista dos experimentos observados. Tal percepção é bastante comum nos materiais didáticos utilizados, conforme indicam os resultados de Oliveira (2010). A coleção também indica aos alunos a existência de links com jogos virtuais para que se compreenda melhor o conceito de probabilidade, e fornece um endereço do próprio Ministério da Educação - MEC (Smole & Diniz, 2010, p.165): http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/recursos/917/probabilidades/mat5_ativ1.htm.

Após a apresentação da definição de probabilidades, o capítulo traz dois exemplos resolvidos, ambos na página 166, envolvendo as seguintes tarefas:

- Tarefa 1: determinar a probabilidade de um evento simples resultante de uma experiência aleatória identificada em texto simples (*Uma urna contém 6 bolas vermelhas e 4 pretas. Retirando-se ao acaso uma bola, qual é a probabilidade de...*).

- Técnica associada: contagem do número de elementos do espaço amostral e do número de elementos do evento visado, substituindo na expressão fornecida na definição de probabilidade, ou seja, em $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$. Tal técnica é apresentada ao aluno da

seguinte forma: Há 10 bolas na urna, sendo 6 vermelhas. Logo, a probabilidade de sortearmos uma bola ao acaso e ela ser vermelha é dada por $P(A) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 60\%$. Vale destacar aqui que a notação para representar o valor de uma probabilidade é apresentada ao aluno imediatamente antes da definição, por meio de um exemplo que tratou da probabilidade de se observar uma determinada face quando do lançamento de um dado: 1 em 6 ou $\frac{1}{6}$ ou 0,167 ou 16,7%. Os exemplos resolvidos apresentados para ilustrar a definição exprimem sempre a probabilidade em sua representação fracionária, transformando-a em porcentagem.

- Tarefa 2: analisar um texto para identificar a experiência aleatória em jogo, para depois determinar a probabilidade de um evento resultante dessa experiência a partir dos dados fornecidos no texto (*Fernando e Cláudio foram pescar em um lago onde só existem trutas e carpas. Fernando pescou, no total, o triplo da quantidade pescada por Cláudio. Fernando pescou duas vezes mais trutas do que carpas, enquanto Cláudio pescou quantidades iguais de carpas e trutas. Os peixes foram todos jogados em um balaio e uma truta foi escolhida ao acaso desse balaio. Determine a probabilidade de que esta truta tenha sido pescada por Fernando*).
 - Técnica associada. O livro didático apresenta a seguinte resolução: *vamos indicar por n o número de peixes pescados por Cláudio, sendo $n/2$ trutas e $n/2$ carpas. Fernando pescou $3n$ peixes, sendo $2n$ trutas e n carpas. A probabilidade de que uma truta escolhida ao acaso tenha sido pescada por Fernando é de: $\frac{2n}{2n + \frac{n}{2}} = \frac{4}{5} = 80\%$*

Observemos que a forma pela qual a leitura do texto proposto pelo problema foi apresentada, com a indicação das informações e a transformação dessas informações em uma expressão algébrica, visa orientar o aluno na leitura de enunciados matemáticos.

Na sequência destes dois exemplos são propostos 11 exercícios, dos quais quatro deles são do mesmo tipo do que a Tarefa 1 e seis são de mesmo tipo do que a Tarefa 2, o que nos faz inferir que o aluno utilizará técnicas semelhantes às apresentadas nos exemplos resolvidos. Tal escolha da coleção limita a possibilidade do aluno buscar, de forma autônoma, individual ou coletivamente, estratégias de resolução para os problemas propostos e, em consequência, limita o desenvolvimento do letramento probabilístico (conforme Quadro 1, Elementos de Conhecimento, item 2). Observamos também que não é solicitado ao aluno uma análise crítica de seus resultados, contrariando o disposto no mesmo Quadro 1. Vale destacar que tal análise é raramente percebida nas coleções aprovadas no PNLD 2012.

Na sequência dessa lista de exercícios propostos, o capítulo apresenta um quadro destacado com o título *Para Saber Mais*, contendo o que a coleção designou por *Probabilidade Experimental*. Trata-se

de um conjunto de quatro exercícios que solicitam ao aluno a análise da repetição do lançamento de uma moeda. No primeiro exercício, a moeda deve ser lançada 20 vezes, e o aluno deve anotar em um quadro o resultado de cada ocorrência, cara ou coroa. Neste exercício é solicitado que o aluno determine a probabilidade experimental de sair cara no lançamento de uma moeda. No exercício seguinte, solicita-se que o aluno lance a moeda 30 e 40 vezes anotando o número de ocorrências de cara e determinando a probabilidade experimental. Na sequência, o livro traz resultados obtidos por matemáticos: George Louis Leclerc Buffon (na realidade, o nome é George Louis Leclerc, conde de Buffon, segundo a pesquisa realizada em Coutinho 2001), John Kerrich e Karl Pearson, que realizaram o experimento 4040 vezes, 5067 e 24000 vezes, respectivamente. Não é discutida a estabilização da série de frequências relativas acumuladas como ferramenta de estimação para o valor da probabilidade do evento “sair Cara no lançamento de uma moeda honesta”, que é o princípio fundamental para a compreensão do enfoque frequentista da probabilidade. Dessa forma, observa-se uma tentativa de abordar o conceito de probabilidade por meio da visão frequentista, em contraposição com a definição clássica ou laplaciana, mas sem que se façam discussões suficientes para que o aluno perceba que o valor observado (frequência de ocorrência) não é a probabilidade, mas sim um valor que permite a estimação dessa probabilidade. Coutinho (2001) observa que a confrontação dos dois enfoques, clássico e frequentista, permite ao aluno validar seus resultados, atribuindo significado aos valores observados na resolução dos problemas.

Na sequência do capítulo, o livro aborda a probabilidade de eventos complementares, da união de eventos, probabilidade condicional, probabilidade da intersecção de eventos, uma seção que articula a probabilidade com a combinatória para concluir o capítulo com a abordagem da distribuição binomial.

5. ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

O presente texto teve como objetivo discutir a abordagem do conceito de Probabilidade encontrada em livros didáticos do Ensino Médio no Brasil. Para tal, levantamos dados no Guia de Livros Didáticos de Matemática – PNLD 2012, e analisamos um dos livros aprovados no processo de avaliação e apresentado nesse guia. Escolhemos analisar o livro que apresentava a menor proporção de páginas destinadas aos conteúdos probabilísticos, mas lembramos que tal proporção não se mostrou relacionada com a suficiência na abordagem, quando visamos o letramento probabilístico dos alunos.

Uma análise mais aprofundada de outras coleções aprovadas no Programa Nacional de Livros Didáticos – Ensino Médio – 2012 encontra-se em andamento, como parte da pesquisa de mestrado acadêmico em desenvolvimento no Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática da PUC-SP.

Pudemos observar que apesar de ter uma abordagem adequada, que se inicia pela descrição de experimentos aleatórios e dos espaços amostrais de tais experimentos para depois apresentar a definição de probabilidade de um evento, as discussões que podem favorecer o desenvolvimento do letramento probabilístico do aluno, nos termos propostos por Gal (2005), ainda não são suficientes. Após análise do manual do professor da coleção escolhida, pudemos verificar que o professor não é suficientemente orientado para a gestão das atividades em sala de aula de forma a desenvolver as habilidades necessárias a tal letramento. Tendo em vista que as pesquisas na área indicam o pouco preparo do professor de Matemática para o trabalho com tais conteúdos, a orientação fornecida pelo próprio material didático a ser adotado em suas classes é fundamental para que ele possa ampliar a discussão com seus alunos para situações não equiprováveis (as mais comuns se considerarmos situações reais da vida das pessoas).

A visão frequentista da probabilidade, pouco encontrada nas coleções aprovadas, também merece maior atenção pelos professores e, em consequência, pelos materiais didáticos disponíveis. Coutinho (1994) aponta para a insuficiência de uma abordagem da probabilidade apenas por essa visão, mas Coutinho (2001) observa que a confrontação das definições clássica e frequentista permite ao aluno a atribuição de significados às probabilidades por ele calculadas ou estimadas na resolução de problemas.

Finalizamos assinalando para a necessidade de que essa discussão aqui iniciada seja considerada e ampliada pelos responsáveis pelas ementas das disciplinas de Probabilidade e de Prática de Ensino nos cursos de formação inicial e de formação continuada para professores de Matemática.

REFERÊNCIAS

- AZCÁRATE, P. G. (1996) *Estudio de las Concepciones disciplinares de futuros Profesores de Primaria en torno a las nociones de Aleatoriedad y Probabilidad*. Granada: Comares.
- BRASIL. (1998) Secretaria de educação média e tecnológica. *Parâmetros curriculares nacionais (Ensino médio): Parte III – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília.
- BRASIL. FNDE. (2011) Secretaria da Educação Básica. *Guia dos Livros Didáticos: PNLD2012*. Disponível em <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guia-do-livro/item/2988-guia-pnld-2012-ensino-medio>, acesso em 30 de maio de 2013.
- BRASIL. FNDE. (S/D). *Programa Nacional do Livro Didático*. Disponível em <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-historico>, acesso em 30 de maio de 2013.
- BRASIL. INEP. (S/D). *Exame Nacional do Ensino Médio*. Disponível em <http://portal.inep.gov.br/web/enem/sobre-o-enem>, acesso em 30 de maio de 2013.
- CHEVALLARD, Y. (1996) La fonction professorale: Esquisse d'un modele didactique. In: *École et Université d'Été de Didactique des Mathématiques, 1995, Saint-Sauves d'Auvergne*. Actes de l'école d'été. Saint-Sauves d'Auvergne : IREM de Clermont-Ferrand. p. 83-122.

- CORREA, M. W. (2010) *O conhecimento Profissional e a abordagem do Ensino de Probabilidade: um estudo de caso*. Dissertação de Mestrado Acadêmico. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.
- COUTINHO, C. Q. S. (1994) *Introdução ao conceito de probabilidade pela visão frequentista – estudo epistemológico e didático*. Dissertação de Mestrado Acadêmico. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/cileda_coutinho.pdf , acesso em 30 de maio de 2013.
- COUTINHO, C. Q. S. (2001) *Introduction aux situations aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II*. Doutorado em Didática da Matemática pela Université Joseph Fourier - Grenoble I, UJF, França. Disponível em <http://www4.pucsp.br/~cileda/publicacoes.html> , acesso em 30 de maio de 2013.
- COUTINHO, C. Q. S. (2002) Probabilidade Geométrica: Um contexto para a modelização e a simulação de situações aleatórias com Cabri II. In: *Anais da 25ª Reunião Anual da Associação Nacional Depós-Graduação e Pesquisa Em Educação*, Caxambu. Disponível em <http://www.anped.org.br/app/webroot/files/probabilidade.pdf> , acesso em 30 de maio de 2013.
- GAL, I. (2005) Towards “probability literacy” for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In Graham A. Jones (eds) *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 39-63.
- GONÇALVES, M. C. (2004) *Concepções dos professores e o ensino de probabilidade na escola básica*. Dissertação de Mestrado Acadêmico. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/mauro_cesar_goncalves.pdf acesso em 30 de maio de 2013.
- GOULART, A. (2007) *O discurso sobre os conceitos probabilísticos para a escola básica*. Dissertação de Mestrado Acadêmico. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/amari_goulart.pdf acesso em 30 de maio de 2013.
- NUNES, S. M. L. (2013). *A proficiência matemática dos alunos brasileiros no Pisa 2003: uma análise dos itens de Incerteza*. Tese de Doutorado. Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte.
- OLIVEIRA, P. G. (2010) *Probabilidade: Concepções construídas e mobilizadas pelos alunos à luz da Teoria das Concepções (ckc)*. Dissertação de Mestrado Acadêmico. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/priscila_glauce_oliveira.pdf acesso em 30 de maio de 2013.
- SHAMOS, M.H. (1995). *The myth of scientific literacy*. Rutgers University Press. New Jersey.
- SMOLE, K.& DINIZ, M. I. (2010). *Matemática. Ensino Médio*. 6ª Edição. Volume 2. São Paulo: Editora Saraiva.

INTRODUCTION TO THE CONCEPT OF PROBABILITY AND TEXTBOOKS FOR SECONDARY EDUCATION IN BRAZIL

ABSTRACT

Probability is now one of the most important contents in Basic School because of its applicability, not only in other areas of knowledge, but also because of its contribution to the development of a critical reading of the world. In this perspective, this paper discusses the desired probabilistic literacy for students in secondary education in Brazil - 15 to 17 years old - from the analysis of mathematics textbooks aimed at this level of schooling. For this, we have studied the Guide Textbooks Mathematics - PNLD2012 for the presence of this content, the proportion of pages aimed at him, the announced methodology, considering the set of collections approved by the National Textbook Program - PNLD - 2012. We analyze also the set of tasks proposed in one of the collections, chosen because it is the one with the lowest proportion of pages designed to probability. We understand the task as the action demanded by the problem posed in the sense adopted by praxeological organization present in Anthropological Theory of Didactics (TAD). We have found that the proportion of pages intended for the probability does not correlate with the approach, ie, it does not indicate whether it is adequate or not for the development of probabilistic literacy. The book analyzed had a good approach: it included since the perception of chance, through the description of a random experiment and enumeration of the possible outcomes of this experiment, and then discusses the classical definition of probability. It was also found that the frequentist approach is not adequately explored in the collections approved and presented in the Guide.

Keywords: *Statistics Education, Probabilistic Literacy, Concepts of Probability, High School, Mathematics Textbook.*

RESUMEN

La probabilidad es hoy en día uno de los contenidos más importantes de la Escuela Básica debido a su aplicación, no sólo en otras áreas del conocimiento, sino también por su contribución al desarrollo de una postura crítica y la lectura del mundo. En esta perspectiva, el presente trabajo analiza la alfabetización probabilística que se desea para estudiantes brasileños de secundaria, 15 – 17 años, a partir del análisis de libros de texto de matemáticas dirigidos a este nivel de escolaridad. Para ello, se han estudiado lo Guía de Libros de Texto de Matemáticas - PNLD2012, en lo que respecta a la presencia de estos contenidos, la proporción de páginas destinadas a ese tópico, la metodología anunciada, en todas la colección aprobada en el Programa Nacional de Libros de Texto - PNLD - 2012. A continuación se analizan las tareas propuestas en las colecciones, seleccionadas para ser la que tiene la menor proporción de páginas destinadas a la probabilidad. Consideramos que la tarea es la acción exigida por el problema propuesto, en el sentido adoptado por la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Se encontró que la proporción de páginas destinadas a Probabilidad no tiene correlación con el enfoque, es decir, no indica si es o no apropiado para el desarrollo de la alfabetización probabilística. La muestra analizada tiene un buen enfoque metodológico, ya que incluye desde la percepción del azar, a través de la descripción de un experimento aleatorio y enumeración de los posibles resultados de este experimento, y luego se analiza la definición clásica de probabilidad. También se encontró que la visión frecuencial no se explora adecuadamente en las colecciones aprobadas y se presenta en la Guía.

Palabras clave : *Educación Estadística, alfabetización probabilística ; concepto de probabilidad , enseñanza media, libro de texto.*

CILEDA DE QUEIROZ E SILVA COUTINHO
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil

cileda@pucsp.br

Possui Licenciatura Plena e Bacharelado em Matemática pela PUC-SP, Mestrado em Educação Matemática pela PUC-SP e doutorado em Didática da Matemática na Université Joseph Fourier - Grenoble I. Atua como professora e pesquisadora no programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática e no curso de Licenciatura em Matemática, modalidade a distância, ambos da PUC-SP. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: ensino-aprendizagem, educação estatística e financeira, formação de professores. Participa do grupo de pesquisa PEA-MAT, coordenado pelo prof. Dr. Saddo Ag Almouloud, no qual desenvolveu o projeto PEA-ESTAT, que trata especificamente do Ensino e da Aprendizagem da Estatística (Descritiva, Probabilidade e Inferencial) e da Combinatória, com financiamento da FAPESP. Ainda trabalha na análise dos dados coletados nesse projeto, hoje atualizado para um novo projeto, ainda na área de Educação Estatística, incluindo Educação Financeira. Coordenadora do GT12-Ensino de Probabilidade e Estatística, pertencente à Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM, no período 2009-2012.

LA ESTADÍSTICA Y LA PROPUESTA DE UN CURRÍCULO POR COMPETENCIAS

ERNESTO SÁNCHEZ

VERÓNICA HOYOS

RESUMEN

En este artículo se discute la interrelación que existe entre la investigación en educación estadística y el currículo escolar que promueve el desarrollo de competencias. En primer lugar presentamos algunas características de la noción general de competencia y de competencia matemática. En segundo, se destacan las relaciones de la estadística con las matemáticas y se revisan entonces las contribuciones de algunos investigadores en educación estadística que favorecen la comprensión del significado de la competencia estadística (o alfabetismo estadístico). Específicamente se consideran el modelo de pensamiento estadístico de Wild y Pfannkuch (1999) y el marco para el análisis curricular de los niveles preuniversitarios de Franklin y colaboradores (2001). Por último se resalta el importante papel que ha jugado la comunidad de investigadores en educación estadística en la construcción de un currículo de estadística basado en competencias.

Palabras clave: Competencia, currículo; competencia matemática; competencia estadística.

1. INTRODUCCIÓN

La estadística juega un papel fundamental en las sociedades actuales en las que se producen y utilizan grandes cantidades de información, pues tiene que ver con las formas en que se recogen, organizan y comunican conjuntos de datos y con la manera en que estos se analizan para hacer inferencias y predicciones, y para tomar decisiones. La estadística extiende su radio de influencia a todas las disciplinas científicas y sociales ya que como afirma Moore (2000) proporciona un método general útil para tratar datos, estimar su variación y el riesgo de predicciones en situaciones de azar, de manera que es importante en la cultura y en la toma de decisiones de la mayoría de las personas. La caracterización de Moore no excluye la importancia de la estadística en la vida cotidiana de la personas, pues los individuos a lo largo de su vida pasan por tener que entender diversidad de información estadística que puede afectar sus vidas. Asimismo, tienen que contender con fenómenos variables y azarosos frente a los cuales es necesario tomar decisiones racionales. Probablemente es el reconocimiento de todas estas razones lo que ha hecho que se incluya la estadística en el currículo de la educación preuniversitaria desde hace varias décadas.

Por otra parte, en los últimos años también ha surgido con fuerza la idea de que la educación debe asegurar la formación de ciudadanos competentes, en el sentido de que puedan hacer funcionar o utilizar el conocimiento adquirido en la escuela de manera efectiva en su vida personal, social y

profesional. Sin embargo, hay evidencias de que esto es difícil de alcanzar, y de que los anteriores currículos, distintos al enfoque actual en el desarrollo de competencias, no propiciaban este tipo de educación. En gran medida, las evidencias mencionadas se derivan de los resultados obtenidos en las pruebas de evaluación nacionales e internacionales. En particular, cuando estos resultados han sido negativos la sociedad los ha interpretado como deficiencias o bajos logros en los objetivos educativos nacionales. Con la intención de revertir esta situación, diversos autores han sugerido replantear los contenidos curriculares, reforzar la formación y actualización de profesores y promover el cambio de las prácticas docentes en las aulas. En este capítulo se aborda en particular el primer punto aunque solamente referido al desarrollo de las competencias en estadística. Específicamente, se revisan cuáles son las relaciones entre la educación estadística y la propuesta de un currículo por competencias. Se argumenta que la estadística, por su propia naturaleza, es especialmente adaptable a dicha propuesta, como se muestra en trabajos como los de Gal (2004) y Watson (2006). Estos autores han reflexionado sobre el concepto de Statistical Literacy, el cual literalmente se puede traducir como alfabetismo estadístico. No obstante, las características de este concepto –las cuales se especificarán en las secciones siguientes–, hacen que sea más apropiado entenderlo como competencia estadística. Además también se exponen varios desarrollos teóricos y experimentales realizados por la comunidad de educadores estadísticos, lo que contribuye favorablemente a clarificar el papel de la estadística en un currículo por competencias. Finalmente se muestra que hace falta que los elaboradores del currículo y funcionarios educativos, al menos en México, entiendan mejor tales aportaciones para que esto se exprese en las reformas curriculares.

2. ¿QUÉ SON LAS COMPETENCIAS?

El concepto de competencia tiene diversas definiciones y no hay un consenso sobre cuál es la mejor forma de expresar lo que socialmente se desea que sea una competencia. Conviene entonces revisar algunas de ellas para formarse una idea del núcleo común que comparten. Para Perrenoud (2002) “una competencia es una capacidad para movilizar diversos recursos cognitivos para hacer frente a un tipo de situaciones”. Las personas tienen recursos cognitivos variados, se dice que son competentes si saben ponerlos en acción y los movilizan para realizar las tareas derivadas de las situaciones que enfrentan. Una definición más conocida es la que se formula en el proyecto Tunning (Beneitone et al. 2007): “El concepto de competencia se entiende como una combinación dinámica de atributos, en relación con conocimientos, habilidades, actitudes y responsabilidades, que describen los resultados de los aprendizajes de un programa educativo o lo que los estudiantes son capaces de demostrar al final del proceso educativo”. Esta caracterización es criticada por Goñi (2008) quien opina que “Definir la competencia como tener “conocimientos, habilidades y destrezas” [...] es confuso y

ambiguo. La mejor definición es capacidad relacionada con la resolución de situaciones problemáticas".

Las competencias se ubican en la relación entre conocimiento y acción, entre teoría y práctica. De lo que se trata es de que en la educación se asuma el compromiso de formar ciudadanos capaces de utilizar sus conocimientos en la solución de los problemas que encontrarán en su vida personal, social y laboral. Aunque nunca se ha dicho que la educación persiga lo contrario, en realidad se ha asumido que la adquisición de conocimientos es una condición previa para su aplicación y que la escuela se encarga de proporcionarlos. Se supone que una base sólida en este sentido servirá para aplicar tales conocimientos en la vida personal, social y laboral/profesional. Pero estos supuestos, aparentemente válidos, los cuestiona una realidad en la que la gente aprende a actuar al margen de los conocimientos adquiridos. Peor aún, cuando se intenta ponerlos en juego no se sabe cómo hacerlo o se hace de manera deficiente o equivocada.

Por otro lado, es erróneo pensar que un enfoque de competencias significa poner mayor énfasis en la práctica, tal vez hasta ahora abandonada por un sesgo hacia la teoría. Más bien lo que se propone es evitar que la educación sea transmisora de un conocimiento enciclopédico, aparentemente disponible potencialmente para diversas aplicaciones. Goñi (2008) lo formula así: "No es una cuestión de teoría y práctica sino de capacidad para resolver situaciones. Hay teorías cuyo dominio y comprensión nos hacen competentes para explicar y prever situaciones resolviendo de esta manera problemas bien complicados. Hay prácticas obsoletas cuyo dominio no nos vuelve más competentes. Así pues, lo que importa no es más teoría o más práctica sino buscar el saber competente. No se aprende y luego se aplica, aprender implica aplicar. Todo saber aspira a ser competente, saber que puede ser usado para resolver situaciones problemáticas" (2005).

3. LA COMPETENCIA MATEMÁTICA

Aunque las formulaciones anteriores dan una idea general del concepto de competencia, enseguida se continuará con la caracterización de las competencias específicas relacionadas con las matemáticas. En algunos ámbitos (por ejemplo, académicos y curriculares) la estadística se ubica como parte de las matemáticas. En particular, en la mayoría de los currículos la estadística forma parte los temas de matemáticas. Por ejemplo, en los documentos de PISA la competencia matemática se menciona como parte de las competencias básicas y no se dice nada acerca de la competencia estadística. Más adelante comentaremos con más detalle estos hechos. Por ahora, si se reconoce que hay una estrecha relación entre la matemática y la estadística, conviene entonces repasar algunas formulaciones que aspiran a aclarar lo que significa la competencia matemática.

En el proyecto PISA se define competencia como la “capacidad de un individuo para identificar y comprender el papel que las matemáticas juegan en el mundo, realizar razonamientos bien fundados y utilizar e involucrarse en las matemáticas de manera que satisfaga las necesidades de la vida del individuo como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo” (INCE 2004, p. 12) [PISA]

En esta declaración se subrayan los aspectos que diferencian a la propuesta de la educación por competencias de otras, como la de resolución de problemas o la guiada por el constructivismo. Esto es, se enfatiza la relación con el mundo (aplicaciones) y la utilidad en la vida del individuo. Parece mentira que la sencillez y especificidad de esta declaración origine serias discusiones. En primer lugar, porque nadie nunca ha pretendido que lo que se enseñe y aprenda de las matemáticas en la escuela no le sirva mayormente al estudiante en su vida; y, en segundo lugar, porque tampoco se sostiene que la utilidad de su estudio se reduzca a no suspender la materia y a librar un obstáculo para realizar el proyecto de obtener un título profesional. Sin embargo, vale la pena mencionar que muchas personas están convencidas de que eso es lo que ocurre, independientemente de las buenas intenciones subyacentes a las declaraciones curriculares. Se podría decir que, en general, éste es el caso para los estudiantes de carreras con contenidos que no están estrechamente vinculados con las matemáticas.

Goñi (2005) considera que en lugar de referirse a la utilidad de la matemática en la vida del individuo es conveniente reflexionar en el concepto de “contextos o situaciones socialmente relevantes” en las cuales el conocimiento matemático es significativo. Desarrollar la competencia matemática sería entonces ser capaz de utilizar el conocimiento matemático en las situaciones socialmente relevantes. Reconoce, sin embargo, que en el caso de la matemática no hay consenso acerca de cuáles son dichas situaciones y que la elaboración de un currículo por competencias debería partir de su constitución. En este capítulo, no se profundizará más en este punto, crucial para la comprensión y desarrollo de las competencias matemáticas; en lugar de ello, aquí se abordará el significado de la competencia estadística. En particular, se hará ver que este concepto no enfrenta las mismas dificultades.

4. RELACIONES ENTRE LA MATEMÁTICA Y LA ESTADÍSTICA

Para entender el papel de la estadística en el currículo por competencias, conviene tener en cuenta cuál es la discusión acerca de la relación entre la estadística y la matemática. Aunque la tradición escolar incluye a la estadística dentro de la matemática, varios investigadores en didáctica de la estadística han defendido que esta disciplina no es una rama de la matemática (Batanero 2000, DelMas 2004, Rossman et al. 2006). Entre las diferencias fundamentales se encuentran: a) La consideración de los datos, los cuales en estadística, a diferencia de las matemáticas, no se pueden separar del contexto del que provienen (Moore 1992); b) La importancia de la recolección de datos, así como las

circunstancias en las que se lleva a cabo (Rossman et al. 2006); c) La centralidad de la variabilidad (Franklin et al. 2005; Wild y Pfannkuch 1999); d) la presencia de la incertidumbre en sus resultados (Rossman et al. 2006).

Este deslinde es necesario para entender las contribuciones de la comunidad de educadores estadísticos en la configuración del significado de la competencia estadística. Sin menoscabo de mantener una definición de competencia estadística que no se confunda con la de competencia matemática, hay otra perspectiva desde la cual se puede aprovechar la importante intersección que tienen ambas disciplinas. Teniendo en cuenta la definición de Moore (2000), arriba citada, se puede hallar en los problemas estadísticos un medio para encontrar o definir contextos socialmente relevantes para las matemáticas; es decir, la estadística puede proporcionar situaciones para el desarrollo de competencias matemáticas. Al final del capítulo volveré a esta discusión. Antes se revisarán las contribuciones que configuran al concepto de la competencia en estadística.

5. CONTRIBUCIONES AL CONCEPTO DE COMPETENCIA ESTADÍSTICA

Para Gal (2004: 49) el concepto de competencia (Literacy) “es lo que se espera de los adultos [...], particularmente de aquellos que viven en una sociedad industrializada”. “Se propone aquí, en este contexto, que el término competencia estadística (statistical literacy) se refiera de manera amplia a dos componentes interrelacionadas, en primer lugar (a) la habilidad de la gente para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, argumentos relacionados con los datos o con fenómenos estocásticos, que se pueden encontrar en diversos contextos, (b) su habilidad para discutir y comunicar sus reacciones a tal información estadística, tal como comprender el significado de la información, sus opiniones acerca de las implicaciones de esta información o su interés con respecto a la aceptabilidad de conclusiones dadas”.

Para Watson (2006: 11) la “competencia estadística es el punto de encuentro del currículo de azar y datos con el mundo de la vida diaria, donde tal encuentro involucra contextos inexplorados y tomas de decisiones espontáneas con base en la habilidad para aplicar las herramientas estadísticas, el conocimiento general del contexto y las habilidades críticas”.

En otras palabras, la estadística tiene características tales que encajan naturalmente con un enfoque de competencias. Como antes se mencionó, lo que hace diferente a un currículo para el desarrollo de competencias de otras propuestas curriculares de las matemáticas (como la de resolución de problemas o las derivadas de una concepción constructivista del aprendizaje) es el énfasis en las aplicaciones de las matemáticas a contextos socialmente relevantes. Sin embargo, de acuerdo a Rossman (2006: 323): “una diferencia entre las dos disciplinas [la matemática y la estadística] es que en estadística el contexto es crucial. Las matemáticas son un campo abstracto de estudio; ellas pueden existir

independientemente del contexto...”. En consecuencia, mientras que en la educación matemática el currículo por competencias no es muy afín con la naturaleza abstracta de las matemáticas, en la educación estadística hay un acoplamiento completo, pues los problemas en estadística son de relevancia social.

Por otro lado, la formulación de un currículo por competencias contribuiría a corregir muchos de los actuales programas de estudio de estadística que han sido diseñados bajo una concepción de presentar una organización lógica y secuencial de unidades de contenido específico como: gráficas, medidas de tendencia central, medidas de variación,... etc. Un enfoque por competencias, según algunos teóricos, no sólo tendría que terminar con la estructura lógica y secuencial de unidades de contenido, sino que incluso debería romper con la estructura que lo organiza por disciplinas:

“Y a pesar de que en la última década se habla de la proliferación del currículo por competencias o por lo menos del fomento de las capacidades cognitivas y habilidades específicas de dominio, la realidad es que la lógica imperante en el diseño del currículo sigue siendo la mirada positivista que conduce al recorte unidisciplinar y a su estructuración en asignaturas más bien insulares” (Díaz-Barriga 2012: 31).

La estadística es naturalmente multidisciplinar, en el sentido de que su campo de acción se sobrepone con otras disciplinas. La definición de Moore (1998: 134) es relevante en este sentido, pues “la estadística es un método intelectual general que se aplica dondequiera que haya datos, variación y azar. Es un método fundamental porque los datos, la variación y el azar son omnipresentes en la vida moderna”. Para Cobb y Moore (2000) “la estadística es una disciplina metodológica. Ella existe no por sí misma sino para ofrecer a otros campos de estudio un conjunto coherente de ideas y herramientas para tratar con datos. La necesidad de una disciplina como esta, surge de la omni-presencia de la variabilidad”. Sin duda, esta característica de la estadística la hace favorable al enfoque por competencias.

El desarrollo de la educación estadística se ha adelantado y corrido de manera paralela al aspecto pluridisciplinar del desarrollo por competencias, pues cada vez más investigadores defienden que la enseñanza de la materia debiera tener como objetivo el desarrollo del pensamiento estadístico de los estudiantes, en lugar de transmitirles conocimientos específicos aislados. Esta idea en general se concreta en propuestas de que la enseñanza de la estadística se base en el desarrollo de investigaciones de naturaleza estadística (MacGillivray y Pereira-Mendoza, 2011) o en proyectos estadísticos (Batanero y Díaz, 2011). Nótese que sin que sea explícito, hay un supuesto detrás de estas propuestas, el cual consiste en llevar a cabo una reestructuración curricular, pues las genuinas investigaciones estadísticas no pueden estar constreñidas a la condición de cubrir una unidad de contenido específico.

Por ejemplo, no tiene sentido desarrollar una investigación o un proyecto para cubrir el contenido de media aritmética, por mencionar una unidad de un contenido estadístico paradigmático.

Las unidades de contenido que la enseñanza de la estadística debe considerar deben depender del tipo de investigaciones o proyectos estadísticos de relevancia social, susceptibles de ser realizados en el contexto de un aula y no al revés. Esto es, por ejemplo, dado un contenido específico a cubrir en el currículo como mediana, no tendría sentido darse a la búsqueda y diseño de investigaciones o proyectos para cubrirlo. Es en este sentido que un currículo que prescriba unidades de contenido en un orden determinado resulta en un despropósito para una enseñanza de la estadística que pretenda desarrollar el pensamiento y razonamiento estadístico a través de investigaciones o proyectos estadísticos con relevancia social.

Un fenómeno interesante que priva en muchos currículos actuales, por lo menos en México, es que los programas de estadística (de educación básica y bachilleratos de la SEP) se declaran, en sus principios y enfoque didáctico, abiertamente a favor de un enfoque por competencias, para enseguida ser complementados por prescripciones de secuencias de unidades de contenido que no cambian para nada las estructuras curriculares de antaño. Por ejemplo, la organización general del currículo de estadística en el bachillerato en México es como sigue: estadística descriptiva, probabilidad, distribuciones e inferencia. Tal estructura resulta bien conocida desde hace más de medio siglo. En el caso de la educación secundaria, en México se sugieren contenidos atomizados, los cuales deben atenderse mediante lecciones separadas. Por ejemplo, los siguientes tres contenidos pertenecen al primer grado de secundaria (12-años):

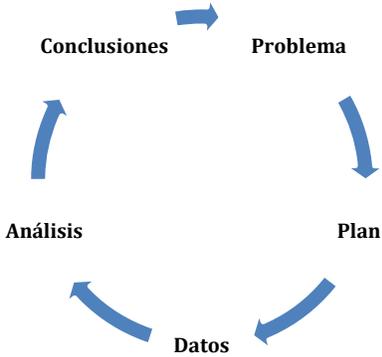
- Lectura y comunicación de información mediante el uso de tablas de frecuencia absoluta y relativa.
- Lectura de información representada en gráficas de barras y circulares, provenientes de diarios o revistas y de otras fuentes.
- Comunicación de información proveniente de estudios sencillos, eligiendo la representación gráfica más adecuada (SEP, 2011)

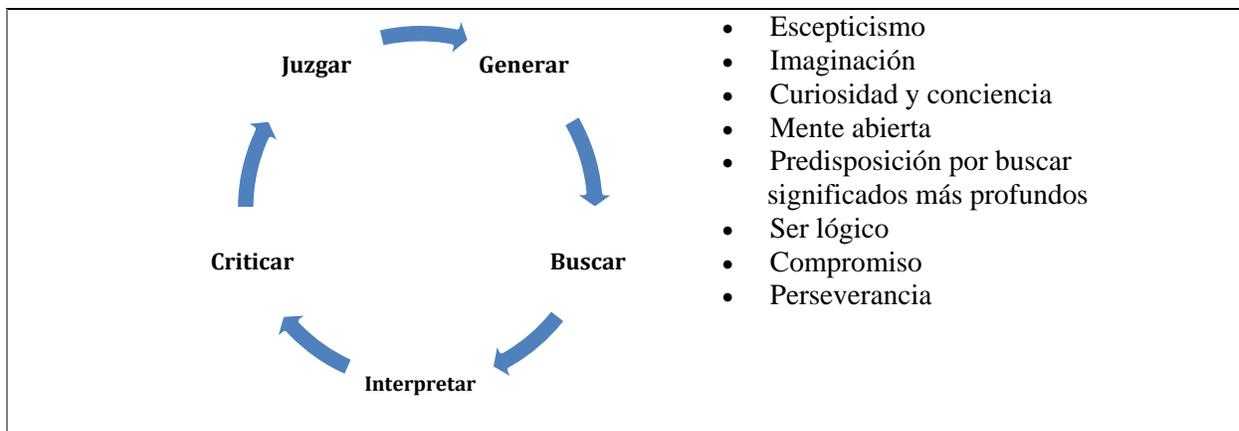
Sin embargo, un currículo o programa de educación estadística para el desarrollo de competencias debe romper con el currículo organizado por secuencias lógicas de unidades de contenido, estar a favor de prescripciones que sean indicativas en relación con problemas y situaciones de relevancia social y a través de las cuales los estudiantes aprendan a pensar estadísticamente, de manera que sea posible que distingan y entiendan las ideas fundamentales de la estadística (Burril y Bielher, 2011). En este punto, es importante mencionar que los investigadores en educación estadística han avanzado en caracterizar el pensamiento estadístico y en proponer un conjunto de ideas fundamentales, lo cual enseguida se revisa.

6. EL MODELO DE PENSAMIENTO ESTADÍSTICO DE WILD Y PFANKUCH (1999)

El currículo por competencias no es una propuesta totalmente nueva, pues dos de sus características clave, a saber, las habilidades de pensamiento y las actitudes, han sido antes consideradas en los objetivos de otras propuestas curriculares, como la que enfatiza la resolución de problemas. En este sentido cabe recordar que una metodología de investigación asociada al enfoque de resolución de problemas en psicología consiste en comparar la manera de resolver un problema de un novato con la de un experto (Chase y Simon, 1973). En la educación matemática se realizaron estudios de este tipo para determinar las competencias subyacentes y estrategias que permitían a los expertos tener éxito en la solución de los problemas y entonces buscar que los estudiantes las desarrollaran (Schoenfeld y Hermann, 1982). Estos estudios implicaban que desde el punto de vista de la enseñanza no era suficiente que los estudiantes aprendieran un conjunto de nociones o conceptos, sino también que desarrollaran habilidades de pensamiento y actitudes hacia la resolución de problemas que los contuvieran; habilidades y actitudes que tendieran a ser similares a los de los expertos. Enseguida se verá que el modelo del pensamiento estadístico de Wild y Pfankuch (1999) refleja todas estas características. Este modelo tiene cuatro dimensiones (ver Tabla 1), las cuales organizan el conjunto de aspectos que pone en juego un estadístico cuando resuelve problemas estadísticos. Estas dimensiones, así como sus contenidos constituyen una información fundamental para el diseño de un currículo que contenga entre sus objetivos el desarrollo de competencias estadísticas. Específicamente tales competencias se reflejan en el desarrollo de un pensamiento estadístico.

Tabla 1. Dimensiones del modelo del pensamiento estadístico (Wild y Pfankuch 1999)

<p>Dimensión 1: Ciclo investigativo PPDAC</p>	<p>Dimensión 2: Tipos fundamentales del pensamiento estadístico</p>
 <pre> graph TD Problema --> Plan Plan --> Datos Datos --> Analisis Analisis --> Conclusiones Conclusiones --> Problema </pre>	<ul style="list-style-type: none"> • Reconocer la necesidad de los datos • Transnumeración • Consideración de la variación • Razonamiento con modelos • Integración de la estadística y el contexto
<p>Dimensión 3: Ciclo interrogativo</p>	<p>Dimensión 4. Disposiciones</p>



Las dimensiones del pensamiento estadístico están en un nivel superior al contenido estadístico, pues orientan acerca de cómo utilizar éste de una manera provechosa en la resolución de problemas estadísticos. Entre las características del modelo anterior y las unidades de contenido específico que suelen encontrarse en los currículos, se localizan las ideas (estadísticas) fundamentales.

7. LAS IDEAS ESTADÍSTICAS FUNDAMENTALES

Un currículo basado en competencias debiera privilegiar las situaciones socialmente relevantes sobre contenidos específicos, esto implica que se debe renunciar a incluir en el currículo el catálogo tradicional de los contenidos. En este sentido, Díaz-Barriga (2012: 31) opina:

“... hay que entender que no se ha logrado superar del todo al currículo enciclopedista, tan denostado en el discurso educativo de la innovación debido a que se encuentra cargado de contenidos factuales”

Sin embargo, llevar a cabo una reducción radical presuntamente implicada por un enfoque por competencias, es una decisión difícil de tomar. En particular porque los contenidos del catálogo de contenidos del currículo vigente tienen una tradición y una aceptación social firmemente establecida. Díaz-Barriga (2012: 31) lo expresa en los siguientes términos, citando a Coll

“cuando los diseñadores curriculares o los docentes mismos enfrentan las tareas de selección, caracterización y organización de los contenidos curriculares y por ende la delimitación de los aprendizajes esperados y su evaluación, existe la tentación que menciona César Coll de no renunciar a nada”

Si los contenidos del catálogo han pasado la prueba del tiempo y se han mantenido en la opinión favorable de los científicos, los elaboradores de currículo, los profesores y los padres de familia, ¿cómo elegir unos contenidos por sobre otros? O, ¿cómo explicar su posible ausencia en el currículo? Este es un problema difícil de resolver, al menos en el currículo de las matemáticas. Por ejemplo, omitir en éste algunos contenidos, tales como números primos o polinomios, bajo la justificación de que no son

relevantes en la vida social de las personas, sería una afrenta para la comunidad de los matemáticos y los educadores matemáticos. En cambio, en la investigación en educación estadística se ha avanzado en proporcionar (ya sea de manera consciente o no) una salida a esta problemática, la cual ha consistido en definir ideas (estadísticas) fundamentales para organizar el currículo, estas pueden ser desarrolladas apoyándose en contenidos específicos, pero sin imponer la necesidad de cubrirlos todos, pues ellos no son los importantes, sino tales ideas fundamentales. Los investigadores en educación estadística Burril y Bielher (2011) propusieron las ideas o nociones siguientes:

- *Datos*. Los ladrillos con los que se construyen conocimientos derivados del análisis estadístico son los datos. Los problemas en los que la estadística presta ayuda son aquellos en los cuales se pueden coleccionar y analizar datos.
- *Variación*. La variabilidad está presente en cualquier fenómeno y la estadística identifica, describe, mide, explica y/o predice dicha variabilidad. A la descripción o medida de la variabilidad se le llama variación.
- *Distribución*. Una distribución es el instrumento matemático idóneo para describir un conjunto de datos y permitir a los estadísticos observar y analizar la variación presente en ellos. Una distribución teórica es la descripción de un patrón de variación de una variable aleatoria.
- *Representación*. Los diagramas y representaciones gráficas permiten descubrir y destacar diferentes ángulos de los datos y sus distribuciones, gracias a que permiten su visualización. La potencia de las representaciones se expresa cuando son utilizadas en el análisis, y no sólo como vehículos de comunicación.
- *Asociación y correlación*. Establecer relaciones entre variables es un objetivo que suele presentarse en todas las disciplinas científicas y la estadística aporta los instrumentos para analizar los distintos grados de asociación o correlación que pueden presentarse entre variables estocásticas (categóricas o numéricas).
- *Probabilidad*. En la caracterización de Moore de la estadística, éste menciona tres elementos: datos, variación y azar; estos últimos se modelan a través de la probabilidad. En cualquier resultado de la estadística se presenta incertidumbre que se describe y mide mediante modelos probabilísticos.
- *Muestreo e Inferencia*. La posibilidad de hacer afirmaciones con cierto grado de certeza acerca de una población con base en el análisis de una muestra es un objetivo fundamental de la Estadística. Los instrumentos derivados de las ideas anteriores se articulan para llevar a cabo este propósito.

La presencia de estas ideas en el currículo no es suficiente para pensar que éste está dirigido hacia el desarrollo de competencias, pues se puede constatar que en gran medida tales ideas ya han estado en

el currículo tradicional; sin embargo, sí ofrecen una orientación para reducir la lista de contenidos usualmente presentes en el currículo. En síntesis, la estructura del currículo tradicional no es la apropiada para el desarrollo de competencias, pero tampoco un nuevo currículo podría ser un catálogo reducido que contuviera ahora sólo las ideas fundamentales. Sin embargo, si se tienen en cuenta y se agrega la propuesta de enfocar la enseñanza de la estadística hacia la realización de investigaciones y/o proyectos, entonces se podría ir configurando la forma de un nuevo currículo. Un intento serio en este sentido se encuentra en el marco curricular para la educación estadística de los niveles Pre k-12 de Franklin et al. (2005).

8. UN MARCO CURRICULAR PARA LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA DE LOS NIVELES PREUNIVERSITARIOS DE FRANKLIN ET AL. (2005)

Franklin et al. (2005: 1) proponen un marco conceptual para la educación estadística de niveles preuniversitarios, el cual tiene por objetivo último el propiciar el desarrollo de la competencia estadística: “nuestras vidas están gobernadas por números. Cualquier estudiante egresado del bachillerato debe ser capaz de usar el razonamiento estadístico para enfrentarse de manera inteligente con los requerimientos de la ciudadanía, el empleo y la familia, y estar preparado para un vida productiva saludable y feliz”. Estos autores manifiestan que el marco que proponen es un complemento de las sugerencias curriculares que sobre el tema de análisis de datos y probabilidad presentan los Principios y Estándares de la NCTM (NCTM, 2000). En su propuesta se enfatiza la diferencia entre matemáticas y estadística, y se señala a la variabilidad y al papel del contexto como factores que reflejan esa diferencia.

El marco mencionado está organizado en torno a dos nociones centrales: (1) la solución de problemas estadísticos; y (2) el papel de la variabilidad en los procesos de solución de problemas estadísticos.

Los procesos de solución de problemas estadísticos involucran cuatro componentes:

1. La formulación de una pregunta
2. La recolección de datos
3. El análisis de los datos
4. La interpretación de los resultados.

Los autores sugieren que en cada una de estas cuatro componentes debe hacerse intervenir a la variabilidad. Por ejemplo, al hacer una pregunta conviene anticiparla. Mientras que en la recolección de datos se debe reconocer el papel crucial que representa, de tal manera que en algunos casos convendrá propiciarla, y en otros tratar de reducirla. En el análisis, se intentará explicar la variabilidad

en los datos; y, finalmente, en la interpretación se incluirá a la variabilidad como un elemento presente de diversas formas.

Para aclarar la importancia de esta propuesta en relación con el currículo por competencias, resulta ilustrativo considerar el siguiente enunciado de Díaz-Barriga (2012: 32):

“... el foco y punto de partida no pueden ser los contenidos disciplinares ni los temas derivados de éstos, sino las situaciones problema en torno a las cuales se va a integrar y a dinamizar el conocimiento, y sólo en función de ello se decide qué conocimiento son los más pertinentes de enseñar en relación con las prácticas socioculturales, profesionales, de la vida diaria, personales, etc., que se han identificado como prioritarias en un determinado tramo formativo. Por ello es que los objetivos de la formación en un modelo por competencias no se describen en términos de contenidos disciplinares, sino en términos de las situaciones problema, actividades y tareas complejas que el estudiante enfrentará. No obstante, lo anterior de ninguna manera quiere decir que los contenidos pueden obviarse o dejan de ser importantes; quiere decir que su relevancia y procedencia se redimensiona”.

El marco conceptual de Franklin et al. (2005) orienta sobre cómo organizar los procesos de solución en las situaciones-problema que se consideren socialmente relevantes, y no pone en primer plano los contenidos que tradicionalmente han sido específicos de la disciplina. Su orientación indica el desarrollo de un pensamiento estadístico como objetivo transversal.

9. LA IMPORTANCIA DE INVESTIGACIONES Y PROYECTOS ESTADÍSTICOS

Como antes se ha mencionado, la enseñanza de la estadística a través de proyectos (Díaz et al. 2008; MacGillivray y Pereira-Mendoza 2011) se propone desarrollar el pensamiento estadístico, y la comunidad de educadores estadísticos han propuesto metodologías de enseñanza a tono con un currículo basado en el desarrollo de competencias. Esta propuesta presupone que la adquisición de contenidos específicos clave en la disciplina se realizará en el contexto de una investigación, lo que permitirá que el estudiante les asigne un sentido, se de cuenta de su importancia y pueda utilizarlos en el desarrollo de otros proyectos. La enseñanza de la estadística a través de proyectos está basada en la instrumentación del marco curricular de Franklin et al. (2005). El carácter transversal de la propuesta consiste en que un proyecto de investigación estadística pueda realizarse de manera significativa y valiosa en el contexto de cualquier contenido disciplinar. Adicionalmente, esta metodología también es propicia para desarrollar otras competencias, como lo sugieren Díaz y colaboradores (2008).

10. LAS COMPETENCIAS EN EL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS DE MÉXICO

El enfoque pedagógico propuesto en la última reforma se declara a favor de una enseñanza para desarrollar competencias. El cuarto objetivo del Programa Sectorial de Educación 2007-2012 con relación a los resultados de PISA es el siguiente:

“Ofrecer una educación integral que equilibre la formación de valores ciudadanos, el desarrollo de competencias y la adquisición de conocimientos, a través de actividades regulares del aula, la práctica docente y el ambiente institucional, para fortalecer la convivencia democrática e intercultural” (INCE: 1). Consecuentemente en los planes y programas (SEP, 2011) se declara a favor de las competencias y establecen las siguientes para la educación matemática:

- Resolver problemas de manera autónoma
- Comunicar información matemática
- Validar procedimientos y resultados
- Manejar técnicas eficientemente

No se hace referencia explícita a alguna competencia estadística porque se supone que está contenida en las competencias matemáticas. Sin embargo, el listado que se acaba de mencionar muestra que no es así. En este currículo se prescriben una serie de contenidos estadísticos que siguen siendo una lista de contenidos atomizados, los cuales están lejos de ser apropiados en una enseñanza que pretenda desarrollar competencias. Por ejemplo, en relación con los contenidos de estadística de segundo grado de educación secundaria, aparece lo siguiente:

- Análisis de casos en los que la media aritmética o mediana son útiles para comparar dos conjuntos de datos.
- Búsqueda, organización y presentación de información en histogramas o en gráficas poligonales (de series de tiempo o de frecuencia) según el caso y análisis de la información que proporcionan.
- Análisis de propiedades de la media y mediana
- Resolución de situaciones de medias ponderadas (SEP, 2011).

En síntesis, para ofrecer una adecuada alternativa de los contenidos estadísticos que deben formar parte de un currículo de educación básica a tono con el desarrollo de competencias, se deben tener en cuenta todos los aspectos que ha señalado la investigación en educación estadística y que han sido revisados en este trabajo. Es una agenda pendiente que convoca al trabajo de los educadores estadísticos en México.

11. CONCLUSIONES

El objetivo de este capítulo ha sido ofrecer argumentos para sostener que en la comunidad de educadores estadísticos se ha avanzado en discutir y definir las componentes principales de la educación estadística en un currículo basado en el desarrollo de competencias, así como lo que ello podría aportar. La estadística goza, a diferencia de otras disciplinas, de una posición privilegiada para dar respuesta a una propuesta curricular por competencias. No sólo porque la estadística es una metodología de carácter general útil en cualquier profesión y en la vida diaria de cualquier ciudadano informado y consciente del mundo social en que vive. También, y quizá como consecuencia de lo anterior, porque la comunidad de investigadores en educación estadística ha elaborado a lo largo de las últimas décadas un conjunto coherente de ideas que alimentan y justifican el desarrollo de un currículo por competencias. La caracterización del pensamiento estadístico, la identificación y formulación de las ideas fundamentales, el marco curricular para la educación estadística que pone énfasis en el ciclo investigativo y en la propuesta de enseñanza a través de proyectos sintetizan un cúmulo de conocimientos didácticos que nutren y dan sustancia a un currículo basado en el desarrollo de competencias. Sin embargo, en México la agenda de elaboración de un currículo o programa de educación estadística para el desarrollo de competencias todavía está pendiente, y los responsables del currículo de las matemáticas vigente no han percibido aún el papel innovador de la estadística en la actual propuesta curricular.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido financiada por Conacyt, proyecto: 101708.

REFERENCIAS

- Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, 15, 2-13.
- Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.). (2011). *Estadística con Proyectos*. Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Beneitone, P., Esquetini, C., González, J., Maletá, M.M., Suifi, G. y Wagenaar, R. (Eds.) (2007). *Reflexiones y Perspectivas de la Educación Superior en América Latina*. Informe final – Proyecto Tuning – América Latina 2004-2007. Bilbao: Publicaciones de la Universidad de Deusto.
- Burril, G. & Bielher, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burril, C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics – Challenges for teaching an teacher education (57-69)*. New York: Springer.
- Chase, W. G. & Simon, H. A. (1973). Perception in chess. *Cognitive Psychology*, 4, 55–81.
- Cobb, P. & Moore, D. (2000). Statistics and mathematics: tension and cooperation. *The American Mathematical Monthly* (August – September), 615-630.

- DelMas, R. (2004). A comparison of mathematical and statistical reasoning. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 79-95). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Press.
- Díaz, C., Arteaga, P. y Batanero, C. (2008), Contribución del trabajo con proyectos estadísticos a la adquisición de competencias básicas. En M., Molina, P. Perez-Tyteca y M. Fresno (2008). *Investigación en el Aula de Matemáticas. Competencias Matemáticas*. Granada: SEAM. Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Díaz-Barriga, F. (2012). Reformas curriculares y cambio sistémico: una articulación ausente pero necesaria para la innovación. *Revista Iberoamericana de Educación Superior (RIES)*, 3(7), 23-40. [En línea: <http://ries.universia.net/index.php/ries/article/view/229>]
- Franklin, C., Kader, G., Newborn, D.S., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. & Schaeffer, R. (2005), A Curriculum Framework for pre K-12 Statistics Education. *Informe presentado a la American Statistical Association*.
- Gal, I. (2004). Statistical literacy: Meanings, componentes, responsibilities. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking* (47-78). Dordrecht: Kluwer.
- Goñi Zabala, J.M. (2005). *El Espacio Europeo de Educación Superior, un reto para la universidad*. Barcelona: Octaedro / ICE Universidad de Barcelona.
- Goñi Zabala, J.M. (2008). *3² – 2 ideas clave. El Desarrollo de la Competencia Matemática*. Barcelona: Editorial GRAÓ.
- INCE (2004). *Marcos Teóricos de PISA 2003: La medida de conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y resolución de problemas*. Madrid: MEC. (En línea: www.ince.mec.es/pub/marcoteoricopisa2003.pdf)
- MacGillivray, H. & Pereira-Mendoza, L. (2011). Teaching statistical thinking through investigative projects. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking* (109-120). Dordrecht: Kluwer.
- Moore, D. S. (1998). Statistics among the liberal arts. *Journal of American Statistical Association*, 93, 1253-1259.
- Moore, D. S. (1992). Teaching statistics as a respectable subject. En F. Gordon y S. Gordon (Eds.), *Statistics for the Twenty-first century* (14-25). Washington D.C.: Mathematical Association of America.
- Moore, D. S. (2000). Statistics and mathematics: tension and cooperation. *American Mathematical Monthly*, 615-630.
- NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA.: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Perrenoud, P. (2002). *Construir Competencias en la Escuela*. Santiago de Chile: Ed. Dolmen.
- Rossmann, A., Chance, B. & Medina, E. (2006). Some important comparisons between statistics and mathematics, and why teachers should care. En G.F. Burrill y P.C. Elliot (Eds.), *Thinking and Reasoning with Data and Chance. (Sixty-eight Yearbook)*. Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.
- Schoenfeld, A. & Hermann, D. (1982). Problem perception and knowledge structure in expert and novice mathematical problem solvers. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition* 8(5), 484-494.

- SEP (2011). *Planes y programas de estudio. Secundaria*. México: Secretaría de Educación Pública.
- SEP (S/f). *Correspondencia entre el programa sectorial de educación 2007-2012 y las recomendaciones de la organización para la cooperación y el desarrollo económicos, en su análisis del sistema escolar mexicano a la luz de Pisa 2006*. [Documento en línea; bajado el 19/06/13 de: <http://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/93128/2/PSE-PISAV2.pdf>]
- Watson, J.M. (2006). *Statistical Literacy at School: Growth and Goals*. Mahawah, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-262.

STATISTICS AND THE COMPETENCY-BASED CURRICULUM PROPOSAL

ABSTRACT

In this paper some relationships between the research in statistics education and a competency-based curriculum are discussed. First, some features of the general notion of competency and of mathematics competency are presented. Second, the relationship of statistics with mathematics is emphasized, and then some research contributions on statistics that specially benefit the understanding of the meaning of statistical competency (or statistical literacy) are reviewed as well. Specifically the statistics thinking model of Wild and Pfannkuch (1999) and the framework for pre K-12 statistics education of Franklin and colleagues (2001) are considered. Finally, the important role that the community of researchers in statistics education has had since several decades ago for constructing a statistical competency-based curriculum is highlighted.

Keywords: *Competency, curriculum; mathematical competency, statistical competency.*

ERNESTO SÁNCHEZ SÁNCHEZ

Cinvestav-IPN, México

[*esanchez0155@gmail.com*](mailto:esanchez0155@gmail.com)

Es profesor titular del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, México. Estudió matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM y el Doctorado en Ciencias, en la Especialidad de Matemática Educativa en el Cinvestav. Ha realizado estancias sabáticas de investigación en Grenoble (Francia, 1997), Portland (Estados Unidos de Norteamérica, 2003) y Granada (España, 2011). Ha desarrollado investigación en el área de la didáctica de la probabilidad y la estadística, y en especial ha trabajado sobre los siguientes temas de probabilidad: independencia estocástica, probabilidad condicional, ley de los grandes números y simulación probabilística. En relación con la estadística ha investigado sobre la variación estadística, variación muestral, distribuciones empíricas, distribución binomial y razonamiento inferencial informal. Ha publicado más de 10 libros de texto de matemáticas para secundaria, así como también numerosos artículos en revistas y congresos internacionales. Específicamente ha explorado el tema de la competencia estadística debido a su permanente actividad en la elaboración de libros de texto de secundaria y a un convenio de colaboración con la Secretaría de Educación Pública. Pertenece al Sistema Nacional de Investigadores (SNI) de México desde 1999.

VERÓNICA HOYOS

Universidad Pedagógica Nacional, México

[*vhoyosa@upn.mx*](mailto:vhoyosa@upn.mx)

Es profesora-investigadora del Área de Tecnologías de la Información y la Comunicación (AA4) y es excoordinadora de la misma Área Académica, la cual pertenece a la Universidad Pedagógica Nacional en México. Estudió matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM y el Doctorado en Ciencias, en la Especialidad de Matemática Educativa en el Cinvestav. Ha realizado estancias sabáticas de investigación en el Laboratorio Leibniz de Grenoble (Francia, 1997), Portland State University (Estados Unidos de Norteamérica, 2003), en el Instituto Francés de Educación en Lyon (Francia, 2011) y en la University of Michigan (Estados Unidos de Norteamérica, 2012). Ha desarrollado investigaciones en las áreas del uso de tecnologías digitales en la clase de matemáticas, de la incorporación de las nuevas tecnologías en el aula, y específicamente del desarrollo profesional de maestros en matemáticas y tecnología vía la Web 2.0. Ha publicado varios capítulos de libros y numerosos artículos en revistas y congresos internacionales. En relación con la enseñanza de las matemáticas en la educación básica, ha colaborado en la autoría de más de 10 libros de texto. Pertenece al Sistema Nacional de Investigadores (SNI) de México desde 1998.

O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DE PROFESSORES EM EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA NAS PESQUISAS BRASILEIRAS

CELI ESPASANDIN LOPES

RESUMO

Neste texto, apresenta-se um mapeamento sobre pesquisas realizadas nos últimos dez anos, com foco central no desenvolvimento profissional de professores que atuam em Educação Estatística na Escola Básica do Brasil. Para isso, consultaram-se os sites de Programas de Mestrado e Doutorado, em que se encontram disponíveis as pesquisas realizadas na área de Educação Matemática. Estabeleceu-se, como critério principal de seleção, que o problema de pesquisa fosse centrado na formação do professor que ensina Matemática nos diferentes níveis de ensino da Educação Básica. Buscou-se responder à questão: O que tem sido evidenciado pelas pesquisas brasileiras que possuem como foco central o desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática e Estatística na Escola Básica? A partir de uma abordagem qualitativa, pela análise de conteúdo, discutiram-se os processos de desenvolvimento profissional, desencadeados a partir dessas investigações, bem como os indicadores que podem ser norteadores para futuras produções científicas e para investimentos em políticas públicas para a formação continuada de professores. Os resultados desta análise sobre o mapeamento realizado evidenciaram que os processos de reflexão e socialização de experiências de sala de aula foram desencadeadores do processo de desenvolvimento profissional. Os registros escritos e o compartilhamento de narrativas sobre a própria prática docente foram atividades constantes durante os encontros dos grupos, e os momentos de análise conjunta sobre as atividades elaboradas e desenvolvidas nas aulas dos professores participantes foram essenciais para o seu desenvolvimento profissional.

Palavras chave: *Desenvolvimento profissional; educação matemática; educação estatística; escola básica.*

1. INTRODUÇÃO

No Brasil, o movimento pela inserção da Educação Estatística na Escola Básica¹ iniciou-se com a proposta curricular de São Paulo na década de 80, seguida das propostas curriculares de Minas Gerais e Santa Catarina. Culminou com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN - (Brasil, 1998), que trouxeram um novo bloco de conteúdo denominado Tratamento da Informação no qual se indica o estudo da Probabilidade e da Estatística desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Iniciaram-se, então, as pesquisas sobre essas temáticas na Educação Básica. Lopes (1998) publicou uma dissertação de mestrado, intitulada “A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular”, em que, tomando como referencial alguns currículos internacionais, investigou e

¹ A Escola Básica no Brasil atende estudantes da faixa etária de 0 a 17 anos.

analisou a forma como eram tratados os conteúdos e quais os objetivos do ensino da Probabilidade e da Estatística nas propostas curriculares de Matemática dos estados de Minas Gerais, São Paulo, Santa Catarina e nos Parâmetros Curriculares Nacionais. O estudo foi realizado, considerando a concepção de Estatística e de Probabilidade subjacente a essas propostas; a seleção de noções estatísticas e probabilísticas feita por elas, para serem “transpostas” para o plano escolar; o modo como as propostas sugerem o tratamento dessas noções com os estudantes; e as finalidades da abordagem de tais noções com os estudantes, explicitadas ou não pelas propostas.

Essa pesquisa apontou para a necessidade de um ensino de Probabilidade e Estatística pautado na realização de experimentos, na exploração da ideia de acaso, em projetos de investigação estatística e na resolução de problemas que favoreçam o desenvolvimento do pensamento estatístico e do pensamento probabilístico. Além disso, evidenciou a necessidade de repensar o ensino de Estatística e Probabilidade na formação inicial e continuada dos professores que ensinam Matemática e Estatística na Escola Básica.

As pesquisas brasileiras em Educação Estatística com foco sobre a formação inicial e continuada de professores ainda são poucas: no levantamento realizado, foram localizadas apenas 13 pesquisas – dissertações e teses – no período de janeiro de 2003 a junho de 2013, das quais apenas 7 apresentaram como objetivo a análise do processo de desenvolvimento profissional. O mapeamento ocorreu a partir dos trabalhos publicados nos *sites* dos Programas de Pós-Graduação em Educação com linha de pesquisa relacionada à Educação Matemática e ao Ensino de Ciências e Matemática.

Neste artigo, que também apresentará sínteses dessas 13 investigações, serão analisadas essas 7 pesquisas que destacam as contribuições decorrentes da participação em um grupo de estudos para o desenvolvimento profissional dos professores. Buscou-se compreender o modo como estes contribuem para o desenvolvimento do grupo do qual participam e as possibilidades e os limites deste para a melhoria do ensino e da aprendizagem de Matemática e Estatística nas escolas.

2. DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DE PROFESSORES EM EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA

As pesquisas brasileiras em Educação Estatística com foco central no desenvolvimento profissional dos professores que ensinam Matemática na Educação Básica tiveram início nos primeiros anos do século XXI, com a publicação da primeira tese de doutorado no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Campinas (Lopes, 2003). Até o final da década, outros trabalhos foram produzidos e tomaram esse primeiro como referência para a discussão de vários aspectos abordados nas investigações.

O trabalho pioneiro de Lopes (2003) adotou a concepção de desenvolvimento profissional como a mobilização contínua de conhecimentos profissionais, em que teoria e prática estão interligadas. Considera, assim, os aspectos cognitivo e afetivo do professor, ao envolvê-lo em projetos, cursos e encontros, o que valoriza suas experiências e seus saberes, que incluem crenças, concepções, valores e expectativas, além de seus conhecimentos práticos e teóricos construídos desde sua formação inicial.

O desenvolvimento profissional decorre da combinação de processos formais e informais, quando o professor se torna o sujeito do processo de aprendizagem. O objetivo não é a “normalização”, mas a promoção da individualidade de cada professor (Hargreaves, 1998, p.185). Assim, o processo de desenvolvimento profissional e de mudança dependerá principalmente do próprio professor; do quanto sua insatisfação com seus conhecimentos e/ou sua prática de ensino atuais o inquietam; e também de sua vontade e de seu empenho em desenvolvê-los e aprimorá-los.

O desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática e Estatística, discutido neste texto, parte da premissa de que ele decorre da participação em grupos com características de colaboração e com participantes com postura investigativa. O surgimento de grupos tidos como colaborativos, no Brasil, envolvendo parceria entre professores universitários e professores da Escola Básica, tendo como foco de análise as práticas de ensinar e aprender na Educação Básica, é um fenômeno que surgiu a partir da última década do século XX. Essa mudança de concepção das práticas de formação continuada de professores é decorrente de ser complexa a prática profissional docente e, portanto, não poder ser compreendida como um campo de aplicação das teorias acadêmicas.

Fiorentini (2010, p. 583), ao discutir o desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática em um grupo colaborativo, afirma que é com “a participação nas práticas reflexivas e investigativas do grupo que os professores tornam-se membros legítimos da comunidade profissional, sendo o desenvolvimento profissional e a melhoria de sua prática docente uma consequência dessa participação”.

O papel da reflexão na construção do conhecimento profissional tem sido amplamente abordado nas pesquisas sobre o desenvolvimento profissional do professor, permitindo que este adquira maior preponderância e determinação sobre sua ação. O movimento reflexivo do docente fortalece-se, por ser considerado uma reação contra o fato de os professores serem vistos como técnicos.

O desenvolvimento do pensamento reflexivo permite que se façam conexões entre conhecimento e prática em um movimento dialético, o que exige a organização em grupos com os pares, tendo como objetivo comum a investigação reflexiva. Alguns teóricos, dentre eles, Lieberman (1995), consideram que os professores devem estar inseridos em um processo contínuo de aprendizagem, no qual a investigação da prática, através da reflexão, tenha um papel preponderante.

Dessa forma, justifica-se a criação de grupos investigativos e colaborativos formados por professores universitários, professores da Escola Básica, graduandos e pós-graduandos, os quais se constituam em comunidades de aprendizagem profissional e de pesquisa sobre a prática de ensinar e aprender Matemática nas escolas. Em cada grupo colaborativo, os formadores, os professores e os futuros professores analisam e discutem os problemas e os desafios relatados pelos professores e os episódios de aula por eles narrados e documentados; e negociam, conjuntamente, significados e outras possibilidades de intervenção em suas práticas escolares, sobretudo tarefas e atividades exploratório-investigativas (Fiorentini, 2010).

Pesquisas a respeito da formação continuada de professores em Estatística e Probabilidade, em vários países, segundo revela Souza, L. (2013)², têm apontado caminhos para que o processo de ensino e aprendizagem seja bem-sucedido. Nessas pesquisas tem-se percebido que o trabalho colaborativo e cooperativo tem sido de fundamental importância para os processos de aprendizagens docentes. Lopes (2006) observa que pesquisas com resultados significativos em relação ao desenvolvimento do conhecimento profissional do professor devem ser colaborativas e devem relatar o desenvolvimento cognitivo dos alunos durante o processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com Lopes (2003), alguns pesquisadores recomendam a colaboração como essencial ao desenvolvimento profissional e ao aperfeiçoamento da própria escola. O trabalho colaborativo pode ser uma possibilidade de os professores compartilharem ideias, valores e compreensões através da socialização da elaboração de seus pensamentos e de sua prática. É recomendável um processo dialético que seja crítico em relação às problemáticas emergentes no preparo, na execução e na pós-execução das atividades de ensino, priorizando comparações entre as práticas e as reflexões sobre as decisões tomadas, durante o processo ensino e aprendizagem.

O trabalho colaborativo entre professores e pesquisadores não é simples e natural: exige o estabelecimento e a manutenção de relações duradouras, com a produção de um novo discurso pedagógico. Isso justifica a necessidade da execução de projetos colaborativos para auxiliar no desenvolvimento profissional de professores.

² Batanero, C.; Diaz, C. (2010). Training Teachers to Teach Statistics: What can we learn from research? *Statistique et Enseignement*, v. 1, p. 5-20.. [Online: http://math.univlyon1.fr/irem/IMG/pdf/Batanero_Diaz.pdf]; Garfield, J.; Everson, M. (2009). Preparing Teachers of Statistics: A Graduate Course for Future Teachers. *Journal of Statistics Education*. Online American Statistical Association v. 17, n. 2. [Online: <http://www.amstat.org/publications/jse/v16n1/roseth.html>]; Carvalho, C. (2008). Collaborative Work in Statistics Classes: Why do it? In: Batanero, C.; Burrill, G; Reading, C; Rossman, A. (Ed.). Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. *Proceedings of the joint ICMI study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey, Mexico. [Online: <http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/5376/1/ICMI-IASE%2008.pdf>]; Rumsey, D. J. (1998). A Cooperative Teaching Approach to Introductory Statistics. *Journal of Statistics Education*. Online American Statistical Association v. 6, n. 1. [Online: <http://www.amstat.org/publications/jse/v6n1/rumsey.html>].

3. PESQUISAS BRASILEIRAS SOBRE A FORMAÇÃO DE PROFESSORES EM EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA

Apresenta-se aqui uma síntese das seis pesquisas com foco sobre a formação e das sete pesquisas que discutiram o desenvolvimento profissional.

Inicialmente serão relatados: um estudo que se desenvolveu em parceria com duas professoras, para analisar seus saberes em Probabilidade; um outro, que focalizou a prática docente de alguns professores de Matemática e alguns professores formadores; e outros quatro, que priorizaram um olhar para uma vertente específica de conhecimento estatístico. Posteriormente, serão expostas e analisadas as principais ideias contempladas nas sete pesquisas sobre o desenvolvimento profissional.

3.1. SEIS ESTUDOS EM CONTEXTOS DE FORMAÇÃO INICIAL E CONTINUADA DE PROFESSORES

Oliveira (2003) investigou que saberes docentes foram mobilizados por duas professoras envolvidas com o estudo de noções elementares pertinentes à Probabilidade. Trabalhou em parceria com duas professoras polivalentes e desenvolveu quatro tipos de atividades: discussões conceituais de Probabilidade; planejamento e execução de atividades para a sala de aula; avaliação do trabalho em sala de aula; questionário elaborado com o objetivo de sistematizar o trabalho desenvolvido e despertar reflexões sobre Probabilidade, tanto no aspecto conceitual como curricular. A análise da produção de informações da pesquisa foi feita, tendo por base dois eixos teóricos: saberes docentes e intuição probabilística. O estudo partiu da realização de experimentos probabilísticos pelas professoras com o objetivo de verificar as manifestações delas em relação às ideias de chance, acaso e aleatoriedade. Também trabalhou-se com jogos e foi possível estudar as leis de adição e multiplicação de probabilidades; o conceito de sucesso; e, a noção de probabilidade condicional. Ao mesmo tempo em que ampliavam seus saberes em relação a probabilidade, elaboravam atividades para as suas aulas explorando com as crianças ideias relacionadas ao possível, provável e sorte, considerando que a linguagem é um meio importante para a qualificação da probabilidade e que a continuidade no processo de identificação de fenômenos probabilísticos constituiu-se uma ferramenta com potencial de instigar discussões frente a natureza dos fenômenos, ou seja, a dualidade entre o determinismo e o aleatório. Assim, os resultados evidenciaram que o processo de construção de saberes para o trabalho docente, a partir do estudo de noções de Probabilidade, deslocou-se para o âmbito da sala de aula pelo desejo de partilhar com os alunos o que estava sendo aprendido. Cabe ressaltar, a partir desta pesquisa, a necessidade de se investir em um trabalho com experimentos probabilísticos e resolução de

problemas envolvendo as ideias probabilísticas nos cursos de formação inicial e continuada de professores que ensinarão ou ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental para que uma educação probabilística possa ocorrer desde o início da escolaridade.

Costa (2007) analisou as percepções dos professores da Escola Básica sobre a inserção da Educação Estatística no currículo; discutiu alguns indícios de inserção da Educação Estatística na sala de aula da Educação Básica; e identificou as percepções dos professores formadores sobre a inclusão da Estocástica nos currículos escolares e o modo como estes vêm abordando seus conteúdos na formação de futuros professores. A pesquisadora assumiu o termo Estocástica como abreviatura comumente utilizada na Europa para se referir ao estudo interligado da Probabilidade e Estatística. Considera que os métodos estatísticos estão diretamente ligados à resolução de problemas e sua linguagem é trabalhada, de forma inicial, totalmente como quantitativa, ou seja, cada nível numérico irá se direcionar a determinado atributo, fato esse que facilita ao professor uma explicação do vínculo e do trânsito com as representações da Matemática. Assim, defende a importância do desenvolvimento do pensamento estatístico do futuro professor e um trabalho com probabilidade centrado na resolução de problemas. Entende que o ensino da Estatística, por estar ligado a algumas representações da Matemática, não apenas deva ocorrer de forma diferenciada das práticas atuais, mas também precisa atender às especificidades da área. Assim, considera que o ensino da Probabilidade tem sido trabalhado separado e desvinculado do ensino de representações estatísticas (gráficos ou tabelas) o que dificulta o entendimento da interdisciplinaridade e também o entendimento da complementação que um assunto faz ao outro. Aponta para a necessidade de fornecer ao professor uma formação estocástica em que ele defina os procedimentos, os gráficos, as medidas, segundo a natureza do dado, e, também, seja capaz de analisar situações que envolvam a aleatoriedade. Essa afirmação decorre dos resultados da pesquisa na qual se constatou que a maioria dos professores não recebeu formação inicial que lhes possibilitasse trabalhar com o bloco Tratamento da Informação na Educação Básica.

Além disso, as entrevistas com professoras formadoras que atuavam em cursos de formação inicial de professores de Matemática evidenciaram que elas reconheciam a existência de lacunas na formação do futuro professor de Matemática, bem como problemas conceituais e epistemológicos nos livros didáticos; destacaram também a pouca flexibilidade nas atuais ementas dos cursos de licenciatura; e sinalizaram a necessidade de sua reformulação, de forma a atender às necessidades do desenvolvimento do pensamento estatístico nos futuros professores, para que estes possam atuar com segurança na Educação Básica. Em relação ao conhecimento probabilístico, a pesquisa de Costa (2007) aponta indícios que corroboram os resultados de Lopes (2003) e Oliveira (2003) os quais evidenciam que os professores apesar de manifestarem um entendimento formal de probabilidade, ou seja, realizam cálculos a partir de fórmulas, eles não são capazes de analisar situações aleatórias e elaborar atividades

de ensino que envolvam as ideias básicas de observação e análise de experimentos probabilísticos necessárias ao estudo matemático no início da escolaridade.

Silva (2007) considerando a dificuldade encontrada por alunos de graduação para a compreensão do desvio padrão, desenvolveu uma pesquisa com o objetivo de verificar o raciocínio sobre variação e variabilidade nas etapas do ciclo investigativo do pensamento estatístico. A autora adotou no trabalho o termo variabilidade referindo-se à característica da entidade que é observável e o termo variação como descrição ou medida desta característica. Foram participantes da pesquisa nove professores de Matemática da Escola Básica e dois alunos de Matemática da Universidade de São Paulo. No estudo se consideraram os pressupostos de uma pesquisa-ação e foram discutidos os conteúdos estatísticos: distribuição de frequência simples e com dados agrupados, representações gráficas, medidas de tendência central e dispersão. Os níveis de raciocínio sobre variação foram classificados, e o diagnóstico identificou a ausência desse raciocínio, exceção feita a um professor que apresentava raciocínio idiossincrático. Durante a fase de sensibilização da pesquisa-ação e planejamento do ciclo investigativo, os professores apresentaram naturalmente o raciocínio sobre variabilidade, mas não sobre variação. Entretanto, a experiência com a elaboração de uma pesquisa, desde a definição dos objetivos até a coleta e a montagem do banco de dados, permitiu um avanço no desenvolvimento do pensamento estatístico dos professores. Desta investigação emerge um destaque especial para o trabalho com o conceito de variabilidade e o raciocínio sobre variação na formação dos professores a fim de que estes possam desenvolver um pensamento estatístico consistente que lhes permitam elaborar atividades de ensino que propiciem a aprendizagem estatística de seus estudantes.

Canossa (2009) realizou um estudo a partir das dificuldades de alguns professores de Matemática da rede pública do Estado de São Paulo para desenvolver com seus alunos os conteúdos estatísticos e suas interpretações. Investigou quais as características didáticas de uma formação continuada para professores do Ensino Médio, visando ao trabalho com conceitos de mediana e quartis, para que os alunos pudessem tomar decisões a partir da análise da variação percebida, com o auxílio do Dot-Plot e do Box-Plot. Foram realizadas oficinas para a formação dos professores, e os resultados evidenciaram que a maioria deles não trabalhava os conceitos de mediana e quartis: limitavam-se aos conceitos de média, variância e desvio-padrão, inseridos apenas com fórmulas matemáticas, sem lhes dar sentido. Ficou claro, ainda, que os professores não tinham conhecimento dos gráficos Dot-Plot e Box-Plot. Diante disso, cabe recomendar que o estudo de gráficos estatísticos seja um tópico abordado com ênfase nos cursos de formação de professores.

Freitas (2010) trabalhou com dois professores, também fazendo formação continuada com eles, em encontros individuais, sobre utilização de *software* para introdução de noções estatísticas, na ótica da teoria dos registros de representação semiótica – aqui, o foco era a mobilização dos registros, e não a

formação em si. Teve por objetivo verificar o nível de letramento estatístico de duas professoras da Escola Básica, que trabalhavam com Estatística em suas aulas. Buscou também identificar a influência do uso de um ambiente computacional, no caso, o *software* FATHOM³, na evolução dos níveis de leitura gráfica e, portanto, de letramento, pela possibilidade da utilização simultânea de diferentes registros de representação semiótica. Ao analisar o nível de letramento estatístico de professores de Matemática do Ensino Médio que trabalhavam, em sua prática docente, com os conteúdos da Estatística Descritiva, a pesquisa permitiu perceber que as professoras oscilaram entre os níveis de letramento funcional e científico e que o uso do *software* foi um facilitador para a percepção da necessidade e das vantagens de trabalhar simultaneamente com mais de um registro de representação semiótica. Desta pesquisa evidencia-se a urgência de uma atenção especial à inserção de um estudo estatístico por meio do uso de *software*, mostrando que o uso de tecnologias é essencial no fazer estatístico.

Novaes (2011) teve por objetivo analisar, a partir de uma formação continuada, concepções sobre objetos da Estatística Descritiva, tanto didáticas quanto específicas de conteúdo, mobilizadas por professores da Educação Básica, quando organizam e fazem a gestão de sequências didáticas nesse tema. A pesquisa teve origem na constatação da existência de entraves à aprendizagem das noções estatísticas, identificados em outros estudos na área, e investigou quais concepções podem ser percebidas quando professores da Educação Básica mobilizam seus conhecimentos estatísticos sobre variação, ao resolverem problemas e prepararem suas aulas sobre esse tema; e como esses conhecimentos podem ser modelados com auxílio da teoria das concepções, de modo a se estabelecerem parâmetros que contribuam para a superação ou minimização de entraves e dificuldades de aprendizagem desses conteúdos estatísticos. Como resultado, apresentaram-se explicações plausíveis para procedimentos cognitivos que geram diversas dificuldades, no que se refere a mobilizar os conhecimentos necessários para uma análise exploratória de dados que conduza à correta apreensão do conceito de variabilidade. Estes resultados reforçam as considerações feitas por Silva (2007) sobre a importância do desenvolvimento do raciocínio sobre variação.

Em síntese, observa-se, a partir dos resultados desses seis estudos, a necessidade de uma formação inicial e continuada de professores que ensinam Matemática que contemple: o estudo de conceitos e procedimentos básicos em probabilidade que permitam a eles analisar experimentos probabilísticos e a chance de um evento ocorrer; a compreensão e a apropriação de um raciocínio estocástico que requer a

³ Fathom é software comercializado e utilizado na modelagem de dados, o qual permite que os alunos se reúnam, explorem e analisem graficamente os dados em profundidade. Útil para qualquer área de aprendizagem que requer a interpretação dos dados, pois permite criar conjuntos de dados, gráficos, estatísticas sumárias e testes de hipóteses para ajudar o usuário a interpretar os dados.

mobilização de ideias sobre os dados e chance, o que leva a fazer inferências e interpretar resultados estatísticos; o desenvolvimento do pensamento estatístico; a compreensão das medidas de posição; o domínio sobre a leitura e a construção de gráficos; a mobilização do conceito de variabilidade; o domínio do letramento estatístico; e maior apropriação do uso de *softwares* para o fazer estatístico. Pode-se observar que tais estudos não consideram o processo de desenvolvimento profissional dos professores envolvidos nas pesquisas.

3.2. SETE ESTUDOS COM FOCO NO DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL

Na primeira pesquisa com foco central no desenvolvimento profissional de professores desenvolvida no Brasil, Lopes (2003) revela o caráter colaborativo de seu estudo e a importância fundamental da presença da investigadora junto às educadoras, na instituição educacional onde elas atuavam. Ao fazer essa escolha, considerou que o conhecimento profissional dos professores resulta da integração entre teoria e prática, é pessoal e manifesta-se, essencialmente, na ação; que os docentes desempenham um papel fundamental no desenvolvimento curricular; que o desenvolvimento profissional dos professores se dá através de uma opção por envolver-se em um projeto de formação intencional, no qual deverá refletir sobre sua prática, individual e coletivamente. Levou em conta que o pesquisador, por meio de sua presença, de seu conhecimento profissional, de sua capacidade em promover questionamentos, da expressão de sua afetividade em um contexto comum aos envolvidos, tem papel importante, ao apoiar o professor em um melhor conhecimento de si e de sua prática. No trabalho, a autora adotou a perspectiva teórica do professor reflexivo, segundo Freire (2005), ao investigar as contribuições que o estudo, a vivência e a reflexão sobre conceitos de Estatística e Probabilidade podem trazer para o desenvolvimento profissional e para a prática pedagógica de um grupo de professoras da Educação Infantil de uma escola da rede particular de Campinas. Realizou uma intervenção planejada, que se constituiu em produção colaborativa, a qual possibilitou a ampliação não apenas do conhecimento profissional das educadoras referente à Matemática e à Estatística, mas também do currículo e do processo de ensino e aprendizagem. As informações foram produzidas ao longo de três anos, essencialmente, através de questionários, entrevistas, relatórios e notas da investigadora. Outras foram resultantes da reflexão coletiva de textos, discussões sobre aulas filmadas e análises de atividades elaboradas e aplicadas pelas professoras. Foram construídos estudos de caso das professoras e das coordenadoras participantes do grupo, quando se identificaram aspectos significativos de seus conhecimentos matemáticos, estatísticos e didáticos e seus processos de desenvolvimento profissional, em um ambiente de trabalho colaborativo. O conhecimento curricular apareceu associado às concepções das professoras sobre o significado que a Estatística e a Probabilidade podem ter no desenvolvimento infantil. A pesquisa apontou para o fato de as professoras

apresentarem clareza sobre os objetivos curriculares da Educação Infantil, ao elaborarem propostas inseridas nos contextos dos projetos integrados de área. O conhecimento didático da Matemática manifestou-se fortemente, na elaboração de problemáticas e na diversidade de estratégias de soluções. O desenvolvimento profissional ampliou-se, através do trabalho efetivado com ética e solidariedade, na produção conjunta dos conhecimentos conceituais e didáticos da Matemática e da Estatística. Dessa forma, os resultados indicaram a importância de uma concepção de processo de formação que valorize o saber dessas educadoras; que provoque reflexão sistemática sobre as questões em curso; que as habilite a serem pesquisadoras de suas próprias práticas; e que lhes dê condições para investirem na produção coletiva do conhecimento. Este estudo evidenciou a necessidade de promover, na formação dos professores, o estudo dos conceitos essenciais da Probabilidade, para que estes adquiram sensibilidade à linguagem do acaso em lidar com as muitas formas, verbais e numéricas, nas quais a Probabilidade é comunicada. E, também, possam desenvolver o pensamento probabilístico, que os habilita a elaborar atividades de ensino as quais permitam aos alunos o entendimento de chance e de eventos aleatórios, pois eles precisam apropriar-se de termos como “provável”, “impossível”, “igualmente provável”, “honesto” e “não honesto” e, reconhecer a possibilidade de várias soluções. Da mesma forma, os cursos de formação de professores, devem viabilizar um estudo de Estatística que não auxilie apenas na leitura e interpretação de dados, mas forneça a habilidade para que uma pessoa possa analisar/relacionar criticamente os dados apresentados, questionando/ponderando até mesmo sua veracidade. Para que se atinja essa etapa da criticidade não é suficiente oferecermos aos professores apenas atividades que visem desenvolver a capacidade de organizar e representar uma coleção de dados, faz-se necessário interpretar e comparar esses dados para tirar conclusões.

Coelho (2010), em estudo sobre a aprendizagem profissional de um grupo de docentes, investigou como professores de Matemática da Escola Básica que pertencem a um grupo do tipo colaborativo problematizaram suas concepções sobre Educação Estatística nas práticas de ensinar e aprender Estatística; e buscou compreender como o movimento do grupo possibilitou a sistematização de saberes profissionais dos professores. A pesquisadora analisou a forma como o movimento de um grupo formado por quatro professoras e uma pesquisadora mobilizou práticas de ensinar e aprender Estatística e possibilitou a sistematização de saberes profissionais dos professores. Analisou também as interações discursivas das professoras no grupo, a partir de três eixos: o grupo e a produção de sentido nas interações discursivas, a problematização das práticas pedagógicas das professoras em Educação Estatística e os saberes que emergiram a partir de sua prática profissional. Os resultados evidenciaram a necessidade de uma reformulação no currículo da Escola Básica, em que seja privilegiada a literacia estatística. Além disso, o estudo mostrou que alguns saberes das professoras foram sistematizados e mobilizados pelas interações dialógicas do grupo; pela contribuição do outro na produção do

conhecimento, sempre aberto a mudanças; e pelo debate e a contradição como instigadores da produção de sentidos. Foi ressaltado que o fato de socializarem seus saberes levou as professoras a um sentimento de poder e de identificação profissional, pois elas adquiriram uma nova concepção de Estatística e aprenderam a: problematizar, elaborar instrumentos para coleta de dados, organizar e representar dados, sistematizar o processo de análise de dados.

Lemos (2011) discutiu a formação continuada com professores dos anos iniciais, com objetivo de investigar a compreensão e o desenvolvimento pedagógico e didático do conteúdo envolvendo Medidas de Tendência Central, identificados em professores que atuam no Ensino Fundamental, do 1º ao 5º ano, a partir da investigação de seu desenvolvimento profissional numa formação continuada. Para tanto, estruturou-se o estudo em dois momentos teóricos que organizaram a revisão bibliográfica: uma revisão dos estudos sobre Medidas de Tendência Central, que permitiu identificar as dificuldades enfrentadas pelos alunos e pelos professores, e uma discussão sobre o desenvolvimento profissional do professor. O processo metodológico da pesquisa foi estruturado em cinco etapas, distribuídas da seguinte forma: primeira etapa: aplicação de uma sequência de ensino em um curso de Estatística organizado em cinco encontros; segunda etapa: elaboração de uma tarefa; terceira etapa: análise da tarefa elaborada; quarta etapa: aplicação da tarefa em sala de aula; e quinta etapa: realização do processo de análise e discussão da aplicação da tarefa em sala de aula e de todo o processo de intervenção vivenciado. Participaram deste estudo seis professoras que lecionavam do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental na cidade de São Paulo, no período de desenvolvimento do projeto. Os resultados revelaram que as dificuldades iniciais identificadas nos protocolos construídos com diálogos e produções das professoras e na compreensão dos conceitos de média, moda e mediana e de suas propriedades foram sendo superadas ao longo do processo, embora a análise global tenha mostrado a insuficiência da formação para a consolidação dessa construção conceitual. Em relação à elaboração e à análise da tarefa, as professoras tiveram dificuldades em articular os conteúdos de média, moda e mediana e não identificaram as propriedades, o tipo de variável envolvida na tarefa e sua influência no desenvolvimento da tarefa em sala de aula. Na análise de uma tarefa elaborada por elas, as professoras também demonstraram falta de articulação, domínio e conhecimento do conteúdo. A aplicação dessa tarefa em sala de aula se configurou como um momento positivo, em que as professoras puderam não apenas observar o bom desempenho dos alunos, mas repensar suas concepções e atitudes em relação à Estatística, o que foi reforçado na etapa destinada à análise e à discussão de todo o processo de intervenção. Foi possível constatar que as professoras conseguiram ampliar seu desenvolvimento profissional tanto em relação aos conteúdos das medidas de tendência central quanto no que se referia a concepções, atitudes e conhecimento didático do conteúdo, assumindo suas dificuldades e percebendo a importância de um processo contínuo de formação.

Justo (2012) fez uma pesquisa na qual buscou investigar as ações e as contribuições que uma formação continuada de Matemática, em serviço, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, envolvendo os conteúdos de Tratamento da Informação, pode oferecer para a prática pedagógica de 18 professores do município de Vacaria. Vislumbrou ser a formação continuada um processo capaz de ampliar e consolidar os conhecimentos adquiridos na formação inicial e, também, servir como suporte à ação pedagógica.

A pesquisadora construiu um estudo de caso a partir dos trabalhos realizados pelos alunos e pelos professores em sala de aula, analisando os conhecimentos e as produções realizadas sobre o conteúdo em estudo. Durante a formação dos professores em serviço foram abordadas as ideias básicas de Estatística (população, amostra, variáveis, organização e representação de dados, medidas de posição) possibilitando a análise de dados e a conclusões diante de informações. Os resultados demonstraram que os conhecimentos didáticos e pedagógicos dos professores sobre Probabilidade e Estatística eram incertos e precários; e revelaram que a reflexão sobre a prática permitiu a eles a (re)construção e a ressignificação dos conhecimentos teóricos e práticos sobre os conceitos básicos desses temas. Ressaltam indícios de que o conhecimento profissional dos professores resulta da integração entre teoria e prática; o saber dos professores serve como ponto de partida para reflexões das práticas pedagógicas; os professores precisam possuir conhecimentos sobre o que ensinam; e o desenvolvimento profissional e de mudança dependerá, em última instância, da pessoa do professor.

Souza, A. (2013) realizou um estudo de cunho qualitativo, com a participação de um grupo formado por seis professoras que lecionam para a Educação Infantil e o primeiro ano do Ensino Fundamental, em algumas escolas das redes municipais de Educação das cidades de Suzano e Mogi das Cruzes. Seus objetivos foram: investigar como o grupo de estudos pode possibilitar a ampliação do conhecimento profissional das professoras, aproximando-as da Educação Estatística; verificar quais indícios de aprendizagem profissional as professoras revelam durante a participação no grupo de estudos; e identificar quais práticas existentes no grupo foram mais potencializadoras de sua aprendizagem. Tais objetivos foram delineados para responder a questão: Quais contribuições um processo de aprendizagem docente centrado na reflexão sobre a prática pode trazer para a inclusão da Educação Estatística na Infância? Quanto aos dados, estes foram construídos a partir de entrevistas, registros em áudio e vídeo, registros fotográficos e registros escritos (diário de campo). A participação no grupo permitiu que as professoras desenvolvessem o pensamento probabilístico realizando o reconhecimento de situações de acaso na vida cotidiana e no conhecimento científico, bem como, a formulação e comprovação de conjecturas sobre o comportamento de fenômenos aleatórios simples, a planificação e realização de experiências que envolveram o azar. Também, resolveram problemas em Estatística considerando os quatro componentes de um processo investigativo: a formulação de

questões, a coleta de dados, a análise dos dados e a interpretação dos resultados. A realização dos encontros evidenciou a potencialidade de atividades de formação a partir de resolução de problemas, experimentos e simulações sobre Educação Estatística, da mesma forma que a combinação dos trabalhos com textos e os trabalhos com as atividades de formação também se revelaram importantes práticas potencializadoras da aprendizagem das professoras. O processo de análise dos dados fez emergir duas categorias de análise: aprendizagens conceituais e aprendizagens procedimentais. A primeira se pautou nos indícios de aprendizagens que as professoras apresentaram no movimento entre os pares, no grupo, e com os alunos, em sala de aula. Para a segunda categoria, a ênfase foi sobre os indícios de aprendizagens denotados pelas professoras, ao utilizarem atividades oriundas de materiais de apoio e/ou consulta e indícios de aprendizagens decorrentes de atividades elaboradas e realizadas com os alunos. Ao longo deste estudo, a participação das professoras no grupo contribuiu para a ampliação de seus conhecimentos profissionais e proporcionou uma aproximação com a Educação Estatística uma vez que, em grupo, compartilharam experiências; tiveram seu trabalho valorizado e valorizaram o de seus pares; tiveram a oportunidade de expor seus pensamentos e emoções sobre o que ainda não conheciam e/ou se sentiam incapazes de fazer; e refletiram sobre sua prática, acarretando mudanças.

Souza, L. (2013) desenvolveu uma pesquisa a partir dos pressupostos de que a introdução da Estatística no currículo nacional brasileiro, a partir dos anos iniciais do Ensino Fundamental, desde 2008, gerou situações multiproblemáticas para o desenvolvimento profissional docente. Os professores precisam desenvolver diferentes dimensões da sua prática, tais como o conhecimento estatístico, crenças sobre Estatística, saberes para produção de atividades próprias e novas abordagens de ensino. Pensando nessa problemática, a principal questão de pesquisa foi: Quais ações em um projeto de formação contínua contribuem para que os professores desenvolvam e mobilizem saberes no processo de ensino e de aprendizagem da Estatística? Para responder a essa questão, a partir de um levantamento das pesquisas nas áreas de formação de professores e investigação Estatística, foi desenvolvido, com 16 professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, um projeto de Formação Profissional Cíclica e Contínua de Professores em Estatística (FPCCPE) em um processo de pesquisa colaborativa. Os dados foram construídos em 11 encontros realizados com os professores, por meio da aplicação de 6 questionários respondidos ao longo do projeto e da gravação em vídeo dos encontros. O desenvolvimento do projeto proposto (FPCCPE) indica que as ações de formação fornecem subsídios aos professores para ampliarem seus saberes em um desenvolvimento multidimensional, gerando significativa compreensão dos docentes sobre métodos de ensino e aprendizagem da Estatística nas aulas de Matemática do Ensino Fundamental. Durante os encontros foram abordados os seguintes temas: construção e análise de gráficos adequados às variáveis;

experimentos probabilísticos; análise de situações aleatórias; uso do *software* Fathom para resolução de problemas de simulação; uso do software TinkerPlots⁴ para análise de problemáticas envolvendo previsões; percepção da Estatística como uma ciência que utiliza a Matemática como ferramenta para coleta, análise e inferência de dados; e, exploração do conceito de variação. Os resultados evidenciaram que professores que trabalham colaborativamente parecem começar a superar sua insegurança para ensinar Estatística, passam a utilizar uma abordagem investigativa e exploratória e melhoram o seu conhecimento conceitual e de conteúdo. Destacou-se, ainda, que dentre os 16 professores participantes do projeto, efetivamente, 9 deles foram capazes de criar novas atividades e abordagens para inserir a Estatística nas suas aulas, de modo a melhorar a aprendizagem dos alunos.

Oliveira (2013), em sua pesquisa, buscou investigar algumas aprendizagens reveladas por professores que ensinam Matemática para crianças, inseridos em um espaço formativo, com foco em Estocástica. Esse termo refere-se à interface entre os conceitos probabilístico e estatístico, os quais possibilitam desenvolver formas particulares de pensamento, envolvendo fenômenos aleatórios, interpretação de amostras e elaboração de inferências. Nos encontros realizados com os professores foram: observados e discutidos experimentos probabilísticos, particularmente, aqueles decorrentes de jogos; exploradas atividades para o desenvolvimento do raciocínio estocástico, o qual permite compreender como os modelos são usados para simular fenômenos aleatórios; entender como os dados são produzidos para estimar as probabilidades; reconhecer como, quando e por meio de quais ferramentas as inferências podem ser realizadas; e compreender e utilizar o contexto de um problema para planejar as investigações, avaliá-las e tirar conclusões. A pesquisa teve como objetivos: investigar como o professor mobiliza seus conhecimentos sobre a estocástica para promover aprendizagem matemática para crianças; identificar o processo de problematização gerado pelo professor, ao ensinar Matemática para crianças; analisar como as práticas compartilhadas pelos professores em um espaço formativo contribuem para sua formação continuada.

A investigação foi desenvolvida em uma abordagem qualitativa, e os dados foram analisados a partir da Análise de Conteúdo. Os professores participantes da formação continuada eram contratados pela Secretaria Municipal de Educação de São Paulo, e lecionavam na Educação Infantil e nos anos iniciais do Ensino Fundamental. A documentação da pesquisa foi composta por questionário de ingresso, registros orais dos encontros, narrativas dos professores, atividades elaboradas durante os

⁴ O software TinkerPlots é um software usado para a realização da análise exploratória de dados que permite que os usuários insiram seus próprios dados, que possam importá-los de outros aplicativos ou da web. Possui ferramentas que favorecem o desenvolvimento de diferentes estratégias para a criação e interpretação de diversos tipos de gráficos, possibilita que o usuário percorra e estabeleça diversas relações entre os diferentes momentos do tratamento de dados tais como: a coleta, organização, formulação e teste de hipóteses sobre os dados.

encontros e avaliação da formação. A análise foi realizada a partir das categorias emergentes: resolução de problemas na infância; matemática no contexto infantil; conhecimento estocástico; fazer docente – elaboração de propostas para a abordagem das ideias estocásticas na infância. Para cada uma das categorias apontadas, os dados coletados foram relacionados, de maneira a evidenciar o tipo de aprendizagem que a formação continuada desencadeou na prática do professor que ensina Matemática na infância.

Após a síntese destas pesquisas busca-se a seguir uma análise sobre as práticas de grupos com características de colaboração, na perspectiva de seus participantes, como potencializadoras e promotoras de aprendizagens docentes que geram o desenvolvimento profissional do professor.

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E ANALÍTICOS

Para discutir o que tem sido evidenciado nas pesquisas brasileiras com foco central no desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática e Estatística na Escola Básica, realizou-se um estudo documental e bibliográfico, na perspectiva qualitativa, como uma atividade sistemática orientada à compreensão de um determinado fenômeno educativo e ao descobrimento e desenvolvimento de um corpo organizado de conhecimentos, emergente das pesquisas analisadas. Adotou-se uma abordagem interpretativa que tem a análise de conteúdo como técnica.

Para Bardin (1977, p. 27), “a análise de conteúdo é um conjunto de técnicas de análise das comunicações”. E, de acordo com Franco (2008, p. 23), “a análise de conteúdo é um procedimento de pesquisa que se situa em um delineamento mais amplo da teoria da comunicação e tem como ponto de partida a mensagem”. No caso deste trabalho, analisou-se a comunicação de processos e resultados de pesquisas por meio dos relatórios científicos (dissertações e teses) elaborados pelos pesquisadores/autores.

Assim se conduziu a análise da documentação, para responder à problemática delineada, considerando uma documentação tomada por mensagens, a fim de identificar elementos que sejam indicadores de processos de desenvolvimento profissional de professores em Educação Estatística.

A análise do conteúdo trabalha a palavra expressa nos relatórios científicos investigados – a prática da língua realizada por emissores identificáveis. E procura conhecer aquilo que está por trás das palavras sobre as quais se debruça. A palavra como objeto é identificada na mensagem, é o ponto de partida da análise de conteúdo e pode ser: verbal (oral ou escrita), gestual, silenciosa, figurativa, documental ou diretamente provocada (Franco, 2008). Neste estudo, a mensagem foi apenas escrita, presente nas dissertações e teses.

Inicialmente selecionaram-se, a partir dos *sites* dos Programas de Pós-Graduação em Educação e Ensino de Ciências e Matemática, as pesquisas que respondiam à busca pelas palavras-chave:

desenvolvimento profissional de professores, formação de professores, Educação Estatística. Este processo levou ao conjunto de treze textos científicos produzidos em cinco universidades distintas (FE/UNICAMP, PUC/SP, UNICSUL, USF, ULBRA)⁵.

Em um primeiro momento, foi realizada uma leitura “flutuante”, para estabelecer contatos com os documentos a serem analisados e conhecer os textos e as mensagens neles contidas. De acordo com Bardin (1977), a exploração do material é a administração sistemática das decisões tomadas durante a fase de pré-análise e acontece com a categorização dos elementos recorrentes. O critério de categorização nesta pesquisa foi semântico, pois agruparam-se os textos por temas, relacionando a teoria, os objetivos e a problemática da pesquisa. Após intensa leitura dos destaques nos instrumentos, optou-se por reorganizar as temáticas como categorias de análise, entendidas como “rubricas ou classes, as quais reúnem um grupo de elementos sob um título genérico, agrupamento esse efetuado em razão dos caracteres comuns destes elementos” (Bardin, 1977, p. 117). O critério de categorização geral foi o indicativo evidente das categorias: processo reflexivo; autonomia do professor; socialização de práticas; grupo colaborativo; aprendizagem docente; produção coletiva de conhecimento.

As categorias de análise foram tratadas de maneira a contribuir para inferências que possibilitaram interpretações possíveis para este estudo, a partir dos seus objetivos e de sua problemática. No entanto, os resultados obtidos, a confrontação sistemática com o material e o tipo de inferências alcançadas, podem servir de base a outra análise, disposta em torno de novas dimensões teóricas e/ou praticada a partir de outras técnicas diferentes (Bardin, 1977). Assim, podem-se evidenciar indícios emergentes das pesquisas brasileiras com foco central no desenvolvimento profissional de professores que ensinam Matemática e Estatística na Escola Básica.

Os resultados deste processo analítico evidenciaram que o *processo reflexivo* é desencadeador do desenvolvimento profissional, ao possibilitar aos professores um constante pensar e reelaborar de seus conhecimentos profissionais, nos momentos de análise conjunta das atividades elaboradas e desenvolvidas nas aulas dos professores participantes dos grupos de pesquisa. Outra necessidade concernente ao desenvolvimento profissional do professor refere-se ao processo de reflexão sobre sua prática como um elemento essencial de sua ação e da aquisição de conhecimento profissional. Segundo Imbernón (1994), o docente deve envolver-se ativamente em um processo de reflexão crítica acerca do ensino e da aprendizagem, analisando o significado de sua ação – ação esta de claro caráter social e político.

⁵ FE/UNICAMP – Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas; PUC/SP – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo; UNICSUL – Universidade Cruzeiro do Sul; USF – Universidade São Francisco; ULBRA – Universidade Luterana do Brasil.

O profissional precisará passar da intuição a uma prática teórica crítica, participando da criação do conhecimento pedagógico, da elaboração de programas e currículos e das tomadas de decisões relativas ao processo educativo. Isso conduz a uma nova perspectiva ou abordagem do desenvolvimento profissional do professor e a uma forma diferente de entender e relacionar teoria e prática.

Embora a experiência possa ser um fator fundamental para o desenvolvimento profissional do professor, nem sempre é suficiente para responder às questões da prática, pois a construção de soluções para muitos desses problemas requer contribuição teórica. Ao longo do exercício de sua profissão, o docente necessitará aprofundar e ampliar conhecimentos de conteúdos conceituais e didáticos; adequar-se ao movimento próprio da evolução humana, revendo o currículo que prioriza em sua ação e sua relação com os alunos; e ter clareza sobre o contexto no qual atua.

Assim sendo, revela-se como importante um processo de formação profissional que se centre no contínuo hábito da reflexão e provoque o desenvolvimento profissional dos professores. Este deixará de ser visto como resultante da organização de cursos com objetivo de suprir dúvidas, dificuldades e/ou lacunas da formação inicial e passará a relacionar-se à criação de dispositivos e contextos que levem o docente a investir em sua carreira. Como lembra Ponte (1994), ao professor caberá decidir quando e como estudar, escolhendo o assunto e vinculando-se ou não a um determinado projeto.

Os professores precisam envolver-se na reflexão sobre seu próprio pensamento, valores, práticas e contextos em que trabalham, como forma de assumirem por completo seu desenvolvimento profissional. Assim se pode combater o paradigma da separação entre a prática profissional do professor e a investigação que pretende iluminar essa mesma prática, bem como a separação entre as escolas e as universidades e, em última análise, a separação da teoria e da prática. A reflexão se torna mais do que simples tomada de consciência sobre a própria experiência e o próprio conhecimento, pois envolve criticidade relativa a percepções, pensamentos, análises e decisões.

Os professores reflexivos, ao decidirem sobre sua prática, adotam medidas que estão de acordo com suas próprias perspectivas e valores. Eles têm clareza sobre a complexidade educativa e conhecimento de que as soluções para os conflitos didáticos/pedagógicos somente ocorrem a partir de uma atitude de análise e deliberação de profissionais autônomos.

A deliberação prática e o julgamento profissional autônomo realizam-se no contexto dos elementos que intervêm na reflexão, e dela participa o conflito ideológico. Muitas problemáticas docentes têm sua origem em confrontos de valores sociais, os quais chegam à tentativa de conciliar perspectivas para a função da escola (Contreras, 1997).

Nesse sentido, a *autonomia do professor* pode ser considerada um processo contínuo de descobertas e transformações das diferenças entre a prática cotidiana e as aspirações sociais de

igualdade, justiça e democracia; de compreensão dos fatores que dificultam não apenas as alterações de condições sociais e institucionais do ensino, como também a própria consciência do professor.

Nas interações com a comunidade escolar, a autonomia profissional docente deve começar pela sensibilidade moral, pelo reconhecimento dos próprios limites e parcialidades como forma de compreensão dos outros. Esse reconhecimento não é espontâneo - precisa ser buscado de forma exigente e trabalhosa -; tampouco pode ser imposto ou dogmaticamente estabelecido, uma vez que a autonomia profissional perde seu sentido de autossuficiência, para fazer-se solidária (Contreras, 1997).

A autonomia é uma qualidade na relação profissional dos professores. É preciso reconhecer esse processo autônomo como uma necessidade educativa e não somente como parte da competência profissional. É preciso reconhecê-la como construção reflexiva em um contexto de relação: é uma concepção da atuação profissional baseada na colaboração, no entendimento, e não na imposição.

Tais considerações remetem à categoria *socialização de práticas*, para a qual se destaca que os registros escritos e o compartilhamento de narrativas sobre a própria prática foram atividades constantes durante o processo de construção de dados das pesquisas e foram fatores determinantes no desenvolvimento profissional dos envolvidos. Para Nacarato et al. (2012), é no movimento de análise compartilhada de situações escolares cotidianas, reflexões teóricas, produções de registros reflexivos, escrita acadêmica de textos e constituição de um *corpus* teórico sobre a temática estudada, que o professor se desenvolve profissionalmente. Para as autoras, nesse movimento, todos (professores e pesquisadores) aprendem colaborativamente.

As pesquisas analisadas evidenciam que o processo de escrita do professor permite a ele refletir e sistematizar o seu conhecimento profissional. “O professor, ao produzir a sua narrativa, reflete sobre a experiência vivida e, muitas vezes, já projeta práticas futuras, modificando aquelas vividas. Essa reflexão gera aprendizagens e transformações” (Nacarato, 2013). Além disso, quando essa escrita é socializada com seus pares, o professor se efetiva socialmente e profissionalmente como produtor de conhecimento.

É importante que essa percepção seja compreendida pelos pesquisadores que buscam investigar o desenvolvimento profissional de professores na perspectiva da colaboração. Para Lieberman e Miller (2000), se os pesquisadores trabalharem colaborativamente com os professores e os incluem no processo de formulação das questões de investigação, serão levados em conta seus pontos de vista no desenvolvimento do conhecimento diretamente relacionado à prática de ensino. Tal consideração reconhece o papel fundamental dos docentes no processo de produção de conhecimento e a grande importância da atividade colaborativa para os participantes da pesquisa.

Nesse sentido é que emerge o destaque ao *grupo colaborativo*, pois, em uma investigação realizada com características de colaboração, ele viabiliza que o pesquisador tenha acesso facilitado à prática

orientada para a ação e à reflexão do próprio professor sobre essa mesma prática. Assim sendo, o resultado da investigação deverá levar à reflexão sobre os pontos de vista dos professores e do investigador, respondendo à problemática da pesquisa, através da produção de conhecimento coletivo que tem origem nas análises compartilhadas sobre a atividade docente. Cabe ressaltar a atenção e o cuidado que o pesquisador deve ter na relação que estabelece com os professores, pois a qualidade dos dados obtidos em uma investigação de natureza colaborativa dependerá da qualidade da relação que o pesquisador venha a estabelecer com os professores.

A *aprendizagem docente* envolve a aquisição de conhecimentos, saberes e fazeres próprios da docência; caracteriza-se pela tomada de consciência, por parte do professor, de seu inacabamento e de seu papel de simultâneo de ensinante e aprendente; e determina, por fim, o reconhecimento de sua necessidade de refletir acerca da produção da sua docência. A aprendizagem docente acontece a partir de um processo de apropriação, em sua dimensão interpessoal e intrapessoal; do impulso que a direciona, representado por sentimentos que indicam sua finalidade geral; do estabelecimento de objetivos específicos, a partir da compreensão do ato educativo; e, por fim, das condições necessárias para a realização dos objetivos traçados, envolvendo a trajetória pessoal e profissional dos professores, bem como o percurso trilhado por suas instituições (Isaia, 2006). As pesquisas analisadas sinalizam para o fato de a aprendizagem docente ocorrer em espaços de articulação entre modos de ensinar e aprender, em que os atores do espaço educativo superior intercambiam essas funções, tendo por entorno o conhecimento profissional compartilhado e a aprendizagem colaborativa. Não é possível falar em um aprender generalizado de ser professor, mas entendê-lo a partir do contexto de cada docente, no qual são consideradas suas trajetórias de formação e a atividade formativa para a qual se direciona a aprendizagem docente.

Esta decorre de um processo de *produção coletiva de conhecimento*. De acordo com Freire (2005, p.47), “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção”. A perspectiva freiriana do conhecimento se caracteriza pela educação problematizadora: efetiva-se, tendo presentes situações desafiadoras, pois considera que, quanto mais progride a problematização, mais penetram os sujeitos na essência do objeto problematizado e se tornam mais capazes “desvelar” essa essência. O conhecimento é construído de forma integradora e interativa. Não é algo estático e pronto; e, portanto, conhecer é descobrir e construir.

O conhecimento é a construção coletiva mediada dialogicamente, que deve articular dialeticamente a experiência da vida prática com a sistematização rigorosa e crítica. O processo de construção do conhecimento implica uma relação dialógica (Freire, 2005). Faz-se necessário propor aos sujeitos o desafio de cultivar uma postura dialógica e crítica diante do mundo, que os faça ter compromisso em

assumir-se enquanto seres epistemologicamente curiosos diante dos fatos, das realidades e dos fenômenos que constituem seu próprio mundo.

O processo educativo é essencialmente dialógico, pois sem diálogo não há educação. A educação é um processo de conhecimento em que todos ensinam e todos aprendem. Um processo criador e recriador, no qual as pessoas que dialogam se abrem para o novo e sabem que há sempre algo a interpretar, descobrir, aprender, dizer, a compartilhar. São abertas a questionamentos e não temem conflitos. Quanto mais a pessoa questiona, mais sente que a sua curiosidade não se esgota; assim, provoca sua autoaprendizagem e a aprendizagem do outro.

Tal análise leva a considerar como as características recorrentes nos processos de desenvolvimento profissional de professores (processo reflexivo, autonomia do professor, socialização de práticas, grupo colaborativo, aprendizagem docente e produção coletiva de conhecimento) são essenciais para a ampliação do conhecimento profissional docente em relação a Educação Estatística.

Para tanto, reportam-se aqui às recomendações do Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-k-12 curriculum framework (Franklin et al., 2005) e do Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE): College report (Aliaga et al., 2010) publicados pela American Statistical Association (ASA). A primeira publicação com o objetivo principal de fornecer uma estrutura conceitual para a Educação Estatística na Escola Básica, e, a segunda, com o objetivo de indicar diretrizes para avaliação e ensino em Educação Estatística para o Ensino Superior, as quais podem ser consideradas para a formação inicial e continuada de professores que atuarão ou atuam na Escola Básica.

Em Aliaga et al. (2010) recomendam-se seis metas para a formação estatística dos estudantes: enfatizar literacia estatística e desenvolver o pensamento estatístico; usar dados reais; ressaltar o entendimento conceitual, ao invés de mero conhecimento de procedimentos; promover a aprendizagem ativa em sala de aula; usar a tecnologia para o desenvolvimento de compreensão conceitual e análise de dados; e usar as avaliações para melhorar e avaliar a aprendizagem do aluno. Tais recomendações são coerentes com aquelas apontadas por Franklin et al. (2005) quando apontam para a necessidade de que o trabalho com análise de dados e probabilidade na Educação Básica priorize a formulação de questões que possam ser tratadas através de coleta, organização e apresentação dos dados de maneira relevante para responder a essas questões. Ressalta a importância de selecionar e usar apropriadamente métodos estatísticos para analisar dados, desenvolver e avaliar inferências e predições que sejam baseados em dados, bem como, entender e aplicar conceitos básicos de Probabilidade. O documento destaca que a Probabilidade é uma ferramenta fundamental para Estatística, pois embora revele pouco sobre as consequências de atribuição aleatória de um experimento, ela descreve a variação que se espera ver nos resultados quando o experimento é replicado um grande número de vezes.

Pode-se observar, diante dos resultados das pesquisas aqui focalizadas, que para se efetivar uma Educação Estatística de acordo com as orientações dos documentos há necessidade de um investimento na formação – inicial ou continuada – dos professores, será necessário um investimento no desenvolvimento profissional docente que considere as características elencadas por esta análise. A aquisição da literacia estatística, entendida como a compreensão da linguagem básica da Estatística e de suas ideias fundamentais, será favorecida pela produção coletiva de conhecimento e pela socialização de práticas em investigações estatísticas.

O desenvolvimento do pensamento estatístico e probabilístico é facilitado pela aprendizagem docente de conceitos de Estatística e Probabilidade, porém a reflexão é fundamental, pois são tipos de pensamento usados para reconhecer a variação presente no processo estatístico; para selecionar métodos e ferramentas estatísticas; para quantificar e entender a variação; e resolver problemas estatísticos.

Para Aliaga et al. (2010) e Franklin et al. (2005), o uso de dados reais, de interesse para os alunos, é fundamental nas aulas de Estatística, para que a tarefa seja autêntica e para que se explorem questões relacionadas a como e por que os dados foram produzidos ou recolhidos, estabelecendo relações com o contexto do problema. Essa é uma boa maneira de envolver os alunos na reflexão sobre os dados relevantes e os conceitos estatísticos. Um aspecto importante, ao lidar com dados reais, é ajudar os estudantes a formular boas perguntas e a usar os dados para respondê-las de forma adequada, com base em como estes foram produzidos. Essas observações também valem para o estudo da Probabilidade, pois professores e alunos precisam desenvolver habilidades para lidar com situações de acaso na vida cotidiana e no conhecimento científico, bem como, para formularem e comprovarem conjecturas sobre o comportamento de fenômenos aleatórios simples, a planificação e realização de experiências nas quais se estude o comportamento de fatos que abarquem o azar. Nesse sentido, nos espaços formativos de professores, é preciso incentivar a autonomia do professor, para que ele promova este tipo de aula.

Os dois documentos publicados pela ASA destacam que no estudo da Estatística, é preciso dar mais atenção aos conceitos do que aos procedimentos, pois, uma boa base conceitual, é fundamental para se estudar outras técnicas estatísticas, como métodos de pesquisa, regressão, desenho experimental ou métodos estatísticos. Para que essa metodologia se efetive, cabe considerar o trabalho em grupos colaborativos, pois este permite a construção de práticas docentes marcadas pela diversidade e pela socialização de procedimentos estatísticos.

Outro destaque dos documentos é para a utilização de metodologias ativas de aprendizagem em sala de aula e para a promoção de uma aprendizagem colaborativa a partir do trabalho em grupos, permitindo aos alunos aprenderem uns com os outros. Eles consideram que a aprendizagem ativa permite aos alunos descobrir, construir e compreender as ideias estatísticas e modelar o pensamento

estatístico. Essa recomendação também se estende para o desenvolvimento do pensamento probabilístico que auxilia os estudantes a adquirir habilidades de criticidade, de lidar com a incerteza, de compreender o raciocínio científico, de romper com o determinismo e a linearidade, predominantes nos currículos de Matemática.

Os estudantes aprendem mais, quando incentivados a discutir, a refletir e a resolver os problemas; e tiram proveito das ocasiões para pôr em prática suas ideias e os conhecimentos do conteúdo, juntamente com os colegas. Esta perspectiva metodológica é compatível e coerente com as categorias analisadas nos processos de desenvolvimento profissional aqui apresentados. Pelas pesquisas analisadas neste texto, cabe destacar a importância dos recursos tecnológicos para aprendizagem de Probabilidade e Estatística, pois ampliam as possibilidades de análise permitindo aos alunos concentrar-se na interpretação dos resultados e nos testes de condições. A tecnologia auxilia na visualização dos conceitos e na compreensão de ideias abstratas, por meio das simulações.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a realização deste estudo, enfatiza-se a importância da perspectiva colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores. Evidencia-se a necessidade da constituição de grupos formados por professores e pesquisadores que, com o objetivo de construir conhecimento coletivamente, mergulhem em um processo reflexivo sobre suas práticas, o qual promova a autonomia do professor. Nesse processo, a socialização de saberes e práticas é ingrediente importante. Recomenda-se que a socialização de práticas seja realizada oralmente e por escrito, divulgando o conhecimento produzido pelo professor como resultado da relação teoria-prática.

Dessa maneira, acredita-se que a pesquisa colaborativa é importante caminho para pensar o trabalho com os docentes para o desenvolvimento profissional em Educação Estatística. Os 7 estudos de doutorado analisados indicam para a necessidade de se promover processos de intervenção que visem à ampliação do conhecimento profissional dos professores que ensinam Matemática na Educação Básica, no que se refere à Educação Estatística.

É desejável que, ao se inserirem em projetos para o desenvolvimento profissional, os investigadores e os professores assumam uma postura de educadores, marcada pela flexibilidade diante das críticas, e de aprendizes, diante dos repensares. Sejam profissionais participantes, ativos, críticos e responsáveis nos espaços educacionais que ocupam e estejam dispostos a colaborar com seus pares e a buscar, coletivamente, soluções para os problemas e os desafios que emergem em seus fazeres educativos.

Este mapeamento gera reflexões a respeito da formação de professores em Educação Estatística e apresenta indicadores na perspectiva de projetos centrados na coletividade e na reflexão sobre a ação,

de forma a ter sempre em mente a complexidade dos espaços educacionais. Portanto, há necessidade de que o desenvolvimento profissional seja marcado por processos de busca, de indagação, de invenção e de criação. Essa forma de pensar aceita que todo conhecimento é problemático e discutível e, assim, suscetível de ser repensado e interpretado no momento da transmissão.

Concluiu-se, deste estudo analítico, a urgência de desenvolver mais projetos de pesquisas com foco no desenvolvimento profissional de professores em Educação Estatística, os quais busquem investigar os processos de ensinar e aprender Probabilidade e Estatística desde o início da escolaridade, a fim de apresentar indicadores para a formação inicial e continuada de professores, bem como para a elaboração e a implementação de propostas curriculares.

REFERÊNCIAS

- Aliaga, M., Cobb, G., Cuff, C., Garfield, J., Gould, R., Lock, R., Moore, T., Rossman, A., Stephenson, B., Utts, J., Velleman, P. & Witmer, J. (2010). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE): College report*. Alexandria/VA/USA: American Statistical Association.
- Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.
- Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.
- Canossa, R. (2009). *O professor de Matemática e o trabalho com medidas separatrizes*. Dissertação de Mestrado. São Paulo: Pontifícia Católica Universidade de São Paulo (PUC/SP).
- Coelho, M. A. V. P. (2010). *Os saberes profissionais dos professores: a problematização das práticas pedagógicas em estatística mediadas pelas práticas colaborativas*. Tese de Doutorado. Campinas/SP: Universidade Estadual de Campinas.
- Contreras Domingo, J. (1997). *La autonomia del profesorado*. Madrid: Morata.
- Costa, A. (2007). *A educação estatística na formação do professor de matemática*. Dissertação de Mestrado. Itatiba/SP: Universidade São Francisco.
- Florentini, D. (2010). Desenvolvimento Profissional e Comunidades Investigativas. In: Dalben, A.; Diniz, J.; Leal, Leiva, L. Santos, L. (Org.). *Convergências e tensões no campo da formação e do trabalho docente: Educação Ambiental*. Belo Horizonte: Autêntica. v. 1, 570-590. http://www.fae.ufmg.br/endipe/livros/Livro_5.PDF.
- Franco, M. L. P. B. (2008). *Análise de conteúdo*. Brasília: Liber Livro.
- Franklin, C., Kader G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer R. (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-k-12 curriculum framework*. Alexandria, VA: American Statistical Association. [Online: www.amstat.org/Education/gaise/].
- Freire, P. (2005). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra.
- Freitas, E. M. B. de. (2010). *Relações entre mobilização dos registros de representação semiótica e os níveis de letramento estatístico com duas professoras*. Dissertação de Mestrado. São Paulo: Pontifícia Católica Universidade de São Paulo (PUC/SP).

- Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudanças*. Alfragide: McGraw-Hill.
- Imbernón, F. (1994). *La Formación y el desarrollo profesional del profesorado. Hacia una cultura profesional*. Barcelona: Grao.
- Isaia, S. M. A. (2006). Aprendizagem Docente. In: Morosini, M. C. (org.). *Enciclopédia de Pedagogia Universitária*, Glossário.v. 2. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2006. www.publicacoes.inep.gov.br/arquivos/%7BC6B9C92D-C712-4849-A0E3-FC2AFEEC7828%7D_livro%20glossario%20eetr.pdf
- Justo, N. (2012). *Formação continuada de professores dos anos iniciais: uma experiência sobre o conteúdo de tratamento da informação*. Dissertação de Mestrado. Canoas/RS: Universidade Luterana do Brasil.
- Lemos, M. P. F. de. (2011). *O desenvolvimento profissional de professores do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental em um processo de formação para o ensino e a aprendizagem das medidas de tendência central*. Tese de Doutorado. São Paulo: Pontifícia Católica Universidade de São Paulo (PUC/SP).
- Lieberman, A. (1995). Practices that support teacher development: Transforming conceptions of professional learning. *Phi Delta Kappan*, 76, 591–596.
- Lieberman, A. & Miller, L. (2000). Teaching and Teacher Development: A New Synthesis for a New Century. In: Brandt, R. S. Education in a New Era. *ASCD Yearbook*. 2000.
- Lopes, C. E. (1998). *A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular*. Dissertação de Mestrado. Campinas/SP: Universidade Estadual de Campinas.
- Lopes, C. E. (2003). *O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil*. Tese de Doutorado. Campinas/SP: Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas.
- Lopes, C. E. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. In: *Anais... ICOTS – International Conference in Teaching Statistics*, 7, 2006, Salvador. Salvador: ICOTS, 2006, p. 1-4. [Online: <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/C107.pdf>].
- Nacarato, A. M. (2013). O grupo como espaço para aprendizagem docente e compartilhamento de práticas de ensino de matemática. In: Nacarato, A. M. (Org.). *Práticas docentes em Educação Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental*. Curitiba: Appris, v. 1, 23-38.
- Nacarato, A. M. et al. (2012). Aprendizagens docentes em letramento matemático: parceria universidade e escola. In: Leite, Y. U. F. et al. (Org.). *Políticas de formação inicial e continuada de professores*. Araraquara: Junqueira & Marin. v. 2, p. 2466-247.
- Novaes, D. V. (2011). *Concepções de professores da Educação Básica sobre variabilidade estatística*. Tese de Doutorado. São Paulo: Pontifícia Católica Universidade de São Paulo (PUC/SP).
- Oliveira, D. de. (2013). *As aprendizagens dos professores que ensinam matemática para crianças ao se inserirem em um espaço formativo sobre Estocástica*. Tese de Doutorado. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul.
- Oliveira, P. C. (2003). *O processo de aprender noções de probabilidade e suas relações no cotidiano das séries iniciais do Ensino Fundamental: uma história de parceria*. Tese de Doutorado. Campinas/SP: Universidade Estadual de Campinas.
- Ponte, J. P. (1994). O desenvolvimento profissional do professor de matemática. *Educação e Matemática*, 31, p.9-12.

- Silva, C. B. da. (2007). *Pensamento estatístico e raciocínio sobre variação: um estudo com Professores de Matemática*. Tese de Doutorado. São Paulo: Pontifícia Católica Universidade de São Paulo (PUC/SP).
- Souza, A. C. de. (2013). *O desenvolvimento profissional de educadoras da infância: uma aproximação à Educação Estatística*. Tese de Doutorado. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul.
- Souza, L. de O. (2013). *O desenvolvimento profissional de professores em Estatística: um projeto multi-dimensional de formação colaborativa*. Tese de Doutorado. São Paulo: Universidade Cruzeiro do Sul.

PROFESSIONAL DEVELOPMENT OF TEACHERS IN BRAZILIAN STATISTICAL EDUCATION RESEARCH

ABSTRACT

In this paper we present a mapping of the research, conducted over the past ten years, with central focus on the professional development of teachers working with Statistics Education in Elementary School, Middle School and High School of Brazil. For this, we have consulted sites of Masters and Doctoral in Mathematics Education and established as the main criterion of selection that the research problem was focused on the training of the teacher who teaches mathematics at different levels of basic education. We have attempted to answer the question: What has been evidenced by the Brazilian research focused on professional development of teachers teaching Mathematics and Statistics in Basic School? From a qualitative approach, through the content analysis, it was discussed the professional development processes triggered from these investigations and also from indicators that can be guiding for future scientific production and for investments in public policy for the continuing education of teachers. The results of this analysis on mapping showed that the processes of reflection and sharing of experiences in the classroom were activators of the process of professional development. Written records and sharing of stories about their own practice were constant activities during the group meetings and the moments of joint analysis on the activities elaborated and developed in the participating teachers' classrooms were essential for their professional development.

Keywords: Professional Development; Mathematics Education; Statistics Education; Basic Education.

DESARROLLO PROFESIONAL DE LOS MAESTROS EN EDUCACIÓN ESTADÍSTICA EN LA INVESTIGACIÓN DE BRASIL

RESUMEN

En este trabajo se presenta un mapeo de la investigación realizada, en los últimos diez años, con enfoque centrado en el desarrollo profesional de los docentes que trabajan con Estadísticas en la Escuela Básica de Brasil. Para ello, hemos consultado a las páginas web de programas de máster y de doctorado que están disponibles en la investigación llevada a cabo en Educación Matemática y se estableció como el principal criterio de selección que el problema de investigación ha sido centrado en la formación del maestro que enseña matemáticas en diferentes niveles de la educación básica. Se ha intentado responder a la pregunta: ¿Que ha sido evidenciado en la investigación brasileña centrada en el desarrollo profesional de los maestros que enseñan Matemáticas y Estadística en la Escuela Primaria y Secundaria? Desde un enfoque cualitativo, a través de análisis de contenido, fueron discutidos los procesos de desarrollo profesional activados a partir de estas investigaciones y también los indicadores que pueden ser rectores de las futuras producciones científicas y de inversiones en las políticas públicas para la formación continua de los docentes. Los resultados de este análisis en el mapeo realizado mostraron que los procesos de reflexión y intercambio de experiencias en el aula han activado el proceso de desarrollo profesional. Los registros escritos y el compartiendo de historias sobre su propia práctica fueron actividades constantes durante las reuniones de los grupos y los momentos de análisis conjunto sobre las actividades elaboradas y desarrolladas en las clases de los profesores participantes han sido esenciales para su desarrollo profesional.

Palabras clave: Desarrollo Profesional; Educación Matemática; Educación Estadística; Escuela Primaria e Secundaria.

CELI ESPASANDIN LOPES
Universidade São Francisco, Brasil
celilopes@uol.com.br

Possui graduação em Matemática pela Universidade de Taubaté, graduação em Pedagogia pela Faculdade de Educação de Guaratinguetá, Aperfeiçoamento em Matemática Pura pelo IMECC/UNICAMP, Especialização em Modelagem Matemática no Meio Ambiente pela UNESP/Guaratinguetá, mestrado em Educação pela UNICAMP, doutorado em Educação pela Universidade Estadual de Campinas e pós-doutorado na The University of Georgia. Durante o doutoramento realizou estágio de pesquisa na Universidade de Granada (Espanha) e na Universidade de Lisboa (Portugal). Na última década, orientou pesquisas de mestrado e doutorado, criou e coordenou o Centro de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática e Estatística (CEPEME) na Universidade Cruzeiro do Sul (UNICSUL/SP). Atualmente é Docente do Programa de Pós-Graduação em Educação na Universidade São Francisco (USF) e líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Estatística (GEPEE). Tem experiência como professora e pesquisadora na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática e Educação Estatística atuando principalmente nos seguintes temas: formação de professores, currículo de matemática, avaliação, modelagem matemática, ensino e aprendizagem, educação infantil, ensino fundamental, ensino médio e educação de jovens e adultos.

UMA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO NA AVALIAÇÃO DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO E PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA EM UNIVERSIDADES DE SÃO PAULO

ANA SOFÍA APARICIO PEREDA

OSCAR JOÃO ABDOUNUR

JORGE LUIS BAZÁN GUZMÁN

RESUMO

O interesse do presente trabalho centra-se nos resultados da avaliação institucional dos cursos de graduação e pós-graduação stricto sensu em Estatística realizado pelo governo brasileiro desde o 2004 até 2012, restrito às universidades do Estado de São Paulo. Especificamente queremos responder à pergunta de quais instituições participaram destas avaliações e quais resultados obtiveram nelas. Seguimos uma metodologia baseada na análise documental. Os resultados nos cursos de graduação correspondem a dados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (SINAES) através do ENADE (Exame Nacional de Desempenho de Estudantes) e outros índices e os resultados da pós-graduação correspondem à avaliação Trienal nos cursos de pós graduação realizada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Todas estas avaliações são promovidas pelo governo federal para definir políticas de financiamento, incentivos, e como forma de regulação. Encontramos que o curso de bacharelado é oferecido por três instituições privadas, três universidades estaduais e uma universidade federal. A pós-graduação é oferecida em três universidades: duas estaduais e uma federal em parceria com uma estadual. A única avaliação do SINAES para o curso de graduação em Estatística aconteceu no 2009, da qual participaram alunos de três universidade: USP (estadual), UFSCAR (federal) e Centro Universitário Capital (privada). As universidades públicas alcançaram uma avaliação “boa”, e a universidade privada apresentou uma avaliação “insatisfatória”. Aconteceram três avaliações trienais: 2004, 2007 e 2010 dos programas de pós-graduação nas quais participaram a USP, UNICAMP e UFSCAR. A USP tem se mantido na avaliação global “muito bom” inclusive atingindo o conceito máximo de sete desde o 2007, enquanto que a UNICAMP e a UFSCAR tem se mantido no nível “bom”. Desde que na graduação apenas uma avaliação é disponível e novas universidades tem sido incorporadas posteriormente, sugerimos novas avaliações mais abrangentes desde uma perspectiva da avaliação institucional.

Palavras chave: *Curso de estatística; avaliação; graduação; pós-graduação.*

1. INTRODUÇÃO

A partir da década de 90, o governo brasileiro iniciou um processo gradual de implementação de um sistema de avaliação do ensino superior, (Polidori et al, 2006). No ano 1993, é instituído a Avaliação Institucional das Universidades Brasileiras - PAIUB. Sustentado no princípio da adesão

voluntária das universidades, concebia a auto-avaliação como etapa inicial de um processo que, uma vez desencadeado, se estendia a toda a instituição e se completava com a avaliação externa (SINAES, 2003). Em 1995 com a lei 9131 que estabeleceu o Exame Nacional de Cursos (ENC), conhecido como o PROVÃO, a ser aplicado a todos os estudantes concluintes de cursos de graduação, em áreas pré-definidas pelo Ministério da Educação (Evan e Vinhaes, 2005) e em 1996 com a Lei nº 9394 foram progressivamente implementados novos mecanismos de avaliação como o Questionário sobre condições socioeconômicas do aluno e suas opiniões sobre as condições de ensino do curso frequentado; a Análise das Condições de Ensino (ACE); a Avaliação das Condições de Oferta (ACO); e a Avaliação Institucional dos Centros Universitário.

Desde a promulgação dessas Leis, a avaliação do ensino superior no Brasil ganhou maior destaque envolvendo muitas instituições e profissionais de diversas áreas, incluindo pesquisadores da educação. Este destaque influenciou, na época, mudanças relacionadas ao papel do ensino superior, às funções desenvolvidas pelo Estado e, também a definição do que à sociedade espera da universidade.

A avaliação vem assumindo papel extremamente importante na reforma da educação superior, principalmente no que diz respeito à “ampliação do controle por parte do Estado, bem como na implementação de princípios e parâmetros de mercado no tocante à reestruturação desse nível de ensino” (Catani et al, 2002: 99).

De acordo com Brito (2008), a avaliação, quando concebida como um processo dinâmico, pode ser usada como referencial para que as Instituições de Educação Superior disponham de evidências empíricas não apenas de suas debilidades, mas também de suas potencialidades e de suas realizações. Conhecendo e dando a conhecer os elementos que integram e interagem em cada IES, é possível transformá-la em direção às metas almejadas, organizando a instituição de modo que esta atue e forme profissionais engajados e comprometidos com uma sociedade em constante mudança.

De acordo com Schlickmann et al (2008), por conta de uma série de críticas, principalmente da comunidade acadêmica, o governo Luis Inácio Lula da Silva propôs a substituição do ENC por um novo modelo de avaliação: o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior –SINAES, instituído em 2004. .

Assim, criado pela Lei nº 10.861, de 14 de abril de 2004, ficou instituído o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior - SINAES, com o objetivo de assegurar o processo nacional de avaliação das instituições de educação superior, dos cursos de graduação e do desempenho acadêmico de seus estudantes, nos termos do art 9º, VI, VIII e IX, da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. O SINAES tem por finalidade a melhoria da qualidade da educação superior, a orientação da expansão da sua oferta, o aumento permanente da sua eficácia institucional, efetividade acadêmica e social, e especialmente, a promoção do aprofundamento dos compromissos e responsabilidades sociais das

instituições de educação superior, por meio da valorização de sua missão pública, da promoção dos valores democráticos, do respeito à diferença e à diversidade, da afirmação da autonomia e da identidade institucional (Brasil, 2004).

A lei estabeleceu também que serão os resultados da avaliação de instituições, dos cursos e do desempenho dos estudantes que constituirão o referencial básico dos processos de regulação e supervisão da educação superior, neles compreendidos o credenciamento e a renovação de credenciamento de instituições de educação superior, a autorização, o reconhecimento e a renovação de reconhecimento de cursos de graduação e renovação de credenciamento das Instituições de Ensino Superior.

Como indicado por Brito (2008), o SINAES compreende os seguintes componentes: *Avaliação Institucional; Avaliação de Curso e Avaliação do Desempenho dos estudantes ingressantes e concluintes*. Este último componente é realizado através do ENADE, que é um exame em larga escala aplicado aos estudantes e avalia o rendimento dos alunos dos cursos de graduação, em relação aos conteúdos programáticos dos cursos em que estão matriculados. O exame é obrigatório para os alunos selecionados e condição indispensável para a emissão do histórico escolar. O Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) é composto pela prova, o questionário de Avaliação Discente da Educação Superior (ADES) (antigo questionário socioeconômico), o questionário dos coordenadores de curso e a percepção do aluno sobre a prova.

Os processos avaliativos do SINAES são coordenados e supervisionados pela Comissão Nacional de Avaliação da Educação Superior (CONAES), sendo que nas instituições a responsabilidade é das respectivas Comissões Próprias de Avaliação - CPA. A operacionalização é de responsabilidade do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP).

Segundo Dias (2007), desde os anos de 1970, o Brasil tem desenvolvendo um forte sistema de pós-graduação (Stricto Sensu), majoritariamente público, que é o principal lugar de formação de pessoal de alto nível, investigação e formulação de políticas científicas e tecnológicas. É, seguramente, o grau educativo de mais alta qualidade no Brasil, titulando, cada ano, aproximadamente 10.000 doutores e 40.000 mestres.

O organismo central responsável de assegurar a qualidade no nível de pós-graduação é a CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal de Educação Superior). O Sistema de Avaliação da Pós Graduação foi implantado pela CAPES em 1976.

Este sistema abrange dois processos conduzidos por comissões de consultores, vinculados às instituições de ensino superior das diferentes regiões do país: a Avaliação das Propostas de Cursos Novos e a Avaliação dos Programas de Pós Graduação.

A avaliação é feita por especialistas de área do conhecimento afim ao programa considerado, cujo resultado é expresso em formato de uma nota que varia de 3 a 7 para os programas credenciados. A homologação deste resultado pelo Ministério de Educação assegura validade nacional aos títulos outorgados por programas com nota igual ou superior a três e equivale ao reconhecimento de que trata o artigo 46 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação. Os programas que não constem desta lista não estão avaliados pela CAPES nem autorizados pelo MEC para a emissão de diplomas com validade nacional.

A Avaliação dos Programas de Pós-graduação compreende os processos de Acompanhamento Anual e de *Avaliação Trienal* do desempenho dos programas e cursos que integram o Sistema Nacional de pós-graduação, SNPG. O acompanhamento anual é realizado no período compreendido entre os anos de realização das avaliações trienais. Tem por objetivo o estabelecimento de um *diálogo* entre a CAPES e as instituições promotoras de cursos de mestrado e doutorado com vistas à orientação da atuação dos programas de forma que possam elevar a qualidade de seu desempenho e superar os problemas que eventualmente estejam enfrentando – se possível antes da Avaliação Trienal subsequente. O acompanhamento não implica na atribuição de conceitos aos programas, mas apenas na apresentação de um parecer com os comentários considerados pertinentes pela Comissão de Área, e não enseja que seus resultados sejam contestados mediante a apresentação de recursos ou pedidos de reconsideração.

O presente trabalho, restrito ao estado de São Paulo, tem como objetivo analisar o processo de avaliação nos cursos de graduação de Estatística considerando dados obtidos do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (SINAES) através do ENADE (Exame Nacional de Desempenho de Estudantes) e da Avaliação Trienal nos cursos de pós graduação (Mestrado e Doutorado) realizada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Todos estes programas de avaliação promovidos pelo governo federal para definir políticas de financiamento e incentivos.

No presente trabalho, estamos interessados em apresentar os resultados da avaliação institucional dos cursos de Estatística no sistema universitário do Brasil, tanto na graduação quanto na pós-graduação, na perspectiva dos instrumentos criados pelo governo Brasileiro.

Atualmente no Brasil, existem 37 Cursos de Graduação em Estatística: 26 em instituições federais, sete em estaduais e quatro privadas. Destes, nove têm cursos de mestrado (USP, UNICAMP, UFSCar, UFMG, UFV, UFRJ, UFPE, UNB e UFRN) e seis de doutorado (USP-São Paulo, USP-Piracicaba, UNICAMP, UFMG, UFRJ e UFSCar). Por outro lado, de acordo com Cordani (2001), no mundo acadêmico atual, praticamente todas as carreiras (exatas, biológicas ou humanas) tem em seu currículo uma disciplina introdutória de Estatística, prova de que o raciocínio estatístico e/ou probabilístico é

considerado fundamental em quase todas as áreas do conhecimento. Assim, percebe-se a importância deste curso- no sistema universitário em geral.

De acordo com o portal do INEP, a avaliação Institucional é um dos componentes do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (SINAES) e está relacionada à melhoria da qualidade da educação superior; à orientação da expansão de sua oferta; ao aumento permanente da sua eficácia institucional e efetividade acadêmica e social; ao aprofundamento dos compromissos e responsabilidades sociais das instituições de educação superior, por meio da valorização de sua missão pública, da promoção dos valores democráticos, do respeito à diferença e à diversidade, da afirmação da autonomia e da identidade institucional.

Segundo Dias (1998), a avaliação institucional é hoje um dos temas de maior interesse e foco de conflitos no âmbito da educação superior. O interesse por ela não se deve somente a seu potencial de transformação qualitativa, de melhoramento pedagógico e de maior eficiência de gestão, como geralmente espera a comunidade acadêmica, mas também, e com crescente impacto, ela se impõe em função das exigências de regulação e de controle da educação superior por parte dos estados. E por isso que a avaliação faz parte de uma agenda internacional e ocupa um espaço de ampla importância no campo das políticas oficiais estabelecidas pelas instituições educacionais, pelos governos e por organismos internacionais de financiamento.

Para apresentar estes resultados, seguimos uma metodologia baseada na análise documental, com uma revisão de informação proporcionada em diferentes fontes bibliográficas e virtuais (Sánchez et al 2003; Chartier, 2002; Fox, 2005) referidos a avaliação institucional feita pelo governo brasileiro, dos cursos de Estatística na graduação e pós-graduação. Trata-se principalmente de um trabalho descritivo, o qual não segue um marco teórico pré-definido, porque apenas apresenta evidência empírica, que pode servir para futuros desenvolvimentos.

Para a coleta de Informação, são consideradas as listagens dos cursos de graduação em Estatística reconhecidos pelo MEC no estado de São Paulo, e pesquisamos as informações durante o mês de Maio de 2013 correspondente aos períodos 2004 a 2012.

As perguntas que nos guiam são: quais são as universidades do estado de São Paulo que têm graduação e pós-graduação em Estatística, destas, quais participaram das avaliações institucionais promovidas pelo governo brasileiro, quais resultados obtiveram nelas e qual é a informação disponível.

A importância desta análise é que, frente a outros países da América Latina, possivelmente o sistema universitário do Brasil é aquele que apresenta maior ênfase na avaliação institucional como parte da política do Estado. Assim, a divulgação destes resultados pode ajudar a constituir uma discussão sobre os cursos de Estatística nos sistemas universitários nos países latino americanos.

O artigo está organizado da seguinte maneira: Na seção um, apresentamos uma breve revisão histórica da Estatística com ênfases na sua origem no sistema universitário do Brasil. A seguir, na seção dois, apresentamos os cursos de graduação e pós-graduação oferecidos no Estado de São Paulo. Em seguida na seção três, apresentamos alguns resultados da avaliação na graduação em Estatística usando informação do ENADE do SINAES. Na seção quatro, são apresentados alguns resultados da avaliação na pós-graduação em Estatística usando informação da Avaliação Trienal da CAPES. Finalmente, refletimos a respeito destes resultados e sugerimos novas linhas de pesquisa.

2. UMA BREVE HISTORIA DA ESTATÍSTICA NO SISTEMA UNIVERSITÁRIO DO BRASIL

A seguinte seção está baseada nas publicações de história da Estatística no Brasil feita em Boletins da Associação Brasileira de Estatística disponível em <http://www.redeabe.org.br/historia> e do projeto pedagógico curso de bacharelado em Estatística da Universidade Federal de São Carlos disponível em <http://www.ufscar.br/~des/ProPed.pdf>. O propósito é apenas apresentar uma evolução histórica do curso de Estatística no Brasil.

A Estatística no Brasil tem sua história associada à história do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE, cujas raízes foram fincadas ainda durante o Império. De acordo com o Calendário comemorativo dos 50 anos de sua fundação, quem primeiro coordenou e sistematizou atividades ligadas a levantamentos censitários, foi a Diretoria Geral de Estatística, criada em agosto de 1872, data do "primeiro Recenseamento Geral do Império do Brasil".

No período anterior a esta data (1750 - 1872), a Coroa Portuguesa era quem determinava levantamentos populacionais, realizados precariamente, com o objetivo maior de "conhecer a população livre e adulta apta a ser usada na defesa do território". A partir da segunda metade do século XIX, esses levantamentos passaram a ser realizados por juizes de paz e chefes de polícia dos municípios, mais com fins eleitoreiros, constituindo-se as paróquias, a base para as informações.

Com o advento da República, a produção das estatísticas dispersou-se nas esferas Federal, Estadual e Municipal, quase impossibilitando a unificação dos resultados e dificultando as análises estatísticas.

Ainda de acordo com o Calendário, foi criado, em 1907, o Conselho Superior de Estatística, com vistas na padronização de conceitos e apuração de resultados em todo o território nacional.

Em 1934, foi criado o Instituto Nacional de Estatística, que só passou a existir de fato em 1936, mudando em 1938 para Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE, quando os serviços geográficos foram a ele vinculados. Foi a partir de 1940 que se iniciaram os "modernos censos" decenais, não ocorrendo apenas o de 1990 (foi adiado para 1991), devido à "falta de recursos" alegada pelo Governo Collor. Antes disso ocorreram os de 1872, 1890, 1900 e 1920.

Ainda, segundo Dantas (2002), o primeiro curso de Inferência Estatística foi ministrado em 1947, baseado no livro de Harald Cramer “Mathematical Methods of Statistics”. Porém, somente em 1953 duas escolas iniciaram o ensino da ciência estatística no Brasil: a Escola Nacional de Ciências Estatísticas - ENCE, criada pelo IBGE e a Escola de Estatística da Bahia, fundada e mantida pela Fundação Visconde de Cairú (Silva, 1989).

Hoje, ele é chamado de Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE, sendo integrante da Administração Federal, subordinado diretamente à Secretaria de Planejamento e Coordenação Geral da Presidência da República - SEPLAN/PR, tendo seu Estatuto sido aprovado pelo Decreto número 97.434 de 05 de janeiro de 1989.

Seu principal veículo de comunicação é a Revista Brasileira de Estatística - RBES, que a partir de 1995 passou a contar com a colaboração da Associação Brasileira de Estatística, no sentido de indicar editores para a Revista, bem como buscar bons artigos aplicados para serem submetidos à Associação.

No Brasil, a profissão de Estatístico foi reconhecida em 15/07/1965, pela Lei 4739, tendo a profissão sido organizada através do Conselho Federal de Estatística e dos Conselhos Regionais. Além da organização legal e sindical, os estatísticos estão ainda agrupados em Sociedades Científicas que promovem encontros, congressos e que são também encarregados da divulgação de pesquisas e resultados na área de Estatística.

Do ponto de vista acadêmico, o primeiro curso de Inferência oferecido no Brasil, ocorreu em 1947, mas, Em 1970, O Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA (Rio de Janeiro, RJ), a Universidade Estadual de Campinas e a Universidade Federal do Rio de Janeiro iniciaram a formação de grupos de pesquisa em probabilidades, constituindo-se num dos grandes passos para a criação de outros cursos nessa área.

Na Universidade de São Paulo, deu-se em 1972 a criação do Departamento de Estatística e do Curso de Bacharelado em Estatística, formando sua primeira turma em 1975. A finalidade básica do Bacharelado em Estatística era formar o profissional para atuar junto às empresas públicas e privadas, ou para prosseguir em estudos acadêmicos nos cursos de pós-graduação da área.

O ensino de Estatística, de acordo com Ribeiro et al (2010) é hoje obrigatório em quase todos os cursos das Universidades espalhadas pelo país, com pouquíssimas exceções. Além das Ciências Exatas, ela se difundiu como ferramenta para estudo e análise de objetos de pesquisa científicos nas Ciências Sociais, Humanas, Biomédicas e na área de Saúde.

Estima-se que haja entre 8.000 e 9.000 estatísticos no país. O número toma como base o Censo 2000 do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) que apontou que havia 5.300 profissionais da área no Brasil. A maior parte dos profissionais está concentrada nos estados de São Paulo e do Rio de Janeiro. Dados mais precisos do número de estatísticos atuando no Brasil poderiam

ser obtidos dos Conselhos Regionais de Estatística (CONRE), no entanto esta informação estaria apenas restrita ao caso daqueles que têm graduação em Estatística. Em um estudo recente, Ara e Louzada (2012) e Louzada et al (2010) indicam que apenas o 46 % dos docentes vinculados aos Departamentos de Estatística de instituições públicas de ensino com cursos de Graduação em Estatística credenciados pelo MEC, com início das atividades anterior ao ano de 2008 possui também Graduação em Estatística. No momento de apresentar nosso trabalho não nos foi possível obter uma distribuição dos estatísticos por estado ou por região, o qual daria sem dúvida uma melhor ideia do desenvolvimento dessa área no Brasil.

O que pode ser indicado da história da Estatística apresentada é que ela está associada com o desenvolvimento do estado brasileiro e de sua necessidade de obter informação para diversas decisões de suas políticas de estado. No entanto, acreditamos que tornasse importante fazer uma avaliação institucional respeito dos cursos de Estatística públicos criados. Nesta pesquisa preliminar, é de interesse focar no estado de São Paulo.

3. CURSO DE ESTATÍSTICA NO ESTADO DE SÃO PAULO

Na tabela 1 é apresentada a oferta de cursos em Estatística existentes (graduação e pós-graduação) no estado de São Paulo. Ainda é apresentado o Ranking Latino-americano 2012 para cada Universidade.

A informação foi obtida no mês de maio de 2013, dos sites do Conselho Regional de Estatística da terceira região. http://conre3.org.br/novo_site/?q=content/institui%C3%A7%C3%B5es-de-ensino e dos Latin American University Rankings-2012. <http://www.topuniversities.com/university-rankings/latin-american-university-rankings/2012>.

Tabela 1. Universidades públicas e privadas em São Paulo que oferecem atualmente o curso de Estatística na graduação e pós graduação

Universidades	Cidade	Tipo	Graduação (Bacharelado)	Vagas*	Pós Graduação (Mestrado e Doutorado)	Colocação no Ranking QS (Quacquarelli Symonds) Latin American University Rankings 2012
Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)	Campinas	Estadual	X	70 Diurno	X	3
Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho (UNESP)	Presidente Prudente	Estadual	X	30 Diurno	-	11
Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR)	São Carlos	Federal	X	45 Diurno	X	29
Universidade de São Paulo (USP)		Estadual				1
Sede São Paulo	São Paulo		X	40 Diurno	X	
Sede São Carlos	São Carlos		X	40 Noturno	X**	
Sede Piracicaba	Piracicaba		-	-	X***	
Centro Universitário Capital (UNI CAPITAL)	São Paulo	Privada	X	50 Diurno 150 Noturno	-	
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP)	São Paulo	Privada	X	50 Noturno	-	28
Centro Universitário Fundação Santo André	Santo André	Privada	X	53 Noturno	-	-

Fontes: Conselho Regional de Estatística da terceira região. http://conre3.org.br/novo_site/?q=content/institui%C3%A7%C3%B5es-de-ensino

Latin American University Rankings-2012. <http://www.topuniversities.com/university-rankings/latin-american-university-rankings/2012>

* Total de vagas de Bacharelado em Estatística autorizadas pelo MEC em 2011 (Totalizando 2137 e todo Brasil).

** Programa conjunto iniciado em 2013 entre a UFSCAR e a USP- São Carlos

*** Programa de Estatística e Experimentação Agronômica

De acordo com a tabela 1, encontramos que o estado de São Paulo tem uma universidade federal, três universidades estaduais e três universidades privadas oferecendo cursos em Estatística na graduação e pós-graduação oferecendo um total de 528 vagas anuais no país de um total de 2137 (17.7 %).

Destaca-se o caso da universidade de São Paulo que oferece a graduação em duas sedes (São Paulo e São Carlos) e a pós-graduação em três sedes (São Paulo, São Carlos e Piracicaba). No caso de Piracicaba, o nome da pós-graduação é Estatística e Experimentação Agronômica e no caso de São Carlos, a partir de 2013, o programa de pós-graduação é compartilhado entre esta sede e a UFSCAR. Observe-se também que as universidades privadas não apresentam pós-graduação e tendem a oferecer uma grande quantidade de vagas especialmente no horário noturno.

Das sete universidades, cinco universidades aparecem no ranking latino americano 2012, onde se destacam a USP na primeira posição e a UNICAMP na terceira posição.

Por outro lado, se encontra diferença nas vagas oferecidas na grande São Paulo (USP sede São Paulo; UNI-CAPITAL, PUC-SP) no 2011 para a graduação, com 290 vagas frente a 238 no interior de São Paulo(UNESP, UFSCAR , USP sede São Carlos, Fundação Santo André).

Um aspecto a ressaltar é que as três universidades estaduais (UNICAMP, UNESP, USP) apresentam o curso de Estatística em diferentes sedes do estado, em contraste com o fato da UFSCAR ser a única federal das três existentes (Universidade Federal de São Paulo e a Universidade Federal de ABC) que tem o curso. Isto pode significar um maior investimento do governo estadual no curso de Estatística.

4. AVALIAÇÃO NA GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA USANDO INFORMAÇÃO DA AVALIACAO ENADE DO SINAES

O ensino superior brasileiro tem sido objeto de avaliações em larga escala desde a instituição do Exame Nacional de Cursos (ENC) em 1996. O Provão, como era mais conhecido, passou a ter caráter obrigatório para os concluintes de cursos superiores por força de lei aprovada pelo Congresso Nacional, tendo sido realizado anualmente entre os anos 1996 e 2003 (Vianna, 2003). De acordo com INEP (2003), o Provão foi criado com o propósito de avaliar o processo de ensino-aprendizagem de cursos de graduação, tendo como principal objetivo contribuir para a melhoria da qualidade de ensino.

O Provão consistia na aplicação de provas para alunos concluintes dos cursos que estavam sendo avaliados. O desempenho nas provas deveria refletir a qualidade do curso realizado pelo aluno. Na última edição do Provão, realizada em 2003, participaram mais de 420 mil formandos em aproximadamente seis mil cursos de 26 áreas. Mesmo assim, o Provão, foi alvo de muitas críticas, especialmente de alunos e professores (Verhine et al, 2006).

A despeito das críticas originadas dentro da própria comunidade acadêmica, vários gestores universitários passaram a divulgar os resultados do Provão quando lhes parecia conveniente. Por outro lado, a insatisfação por parte de alunos de alguns cursos incentivou a realização de boicotes e protestos cujo mote residia no fato de que um exame realizado unicamente no final do curso não refletia a realidade do processo de formação acadêmica. Alunos de cursos mal avaliados temiam a desvalorização de seu diploma depois de todo esforço para chegar à colação de grau.

Em 2004, o Provão foi substituído pelo Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE) que procurou atender a algumas reivindicações. A avaliação dos cursos passou a ser realizada em dois momentos, no início e no final dos mesmos, e os alunos passaram a ser selecionados por amostragem. Com um ciclo de avaliações de cada curso a cada três anos, houve um alinhamento à periodicidade de avaliação trienal adotada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) para os cursos de pós-graduação stricto-sensu.

O SINAES também inclui outras dimensões, tais como uma autoavaliação das IES, uma avaliação externa e uma avaliação específica de cada curso de graduação, realizada por avaliadores selecionados pelo Ministério de Educação (MEC). De acordo com Bittencourt et al. (2008), ainda que o SINAES consista de um processo completo de avaliação, a maioria das IES e os meios de comunicação dão mais destaque aos resultados derivados do ENADE. Esse aspecto é destacado por Ristoff e Giolo (2006) que afirmam que grande parte da sociedade, da imprensa e até mesmo os próprios alunos pensam que o SINAES se resume ao ENADE.

Com todos os esforços do INEP para aperfeiçoar o processo do ENADE nos últimos anos, as outras dimensões do SINAES tornaram-se coadjuvantes menos lembradas. Dias Sobrinho (2008), Barreyro (2006, 2008), Brito (2008) e Giolo (2008) são enfáticos ao relatar a perda de foco original do SINAES e a exagerada importância ao ENADE. Para Brito (2008), o ENADE regrediu desde a sua concepção em 2004, no entanto, percebe-se que o mesmo vem passando por modificações que buscam aprimorar o processo de avaliação, como o aumento gradual no número de cursos avaliados, a universalização do exame e a criação de novos conceitos.

De acordo com Brito (2008), é importante destacar que o ENADE, que é um exame em larga escala, não avalia a ênfase do curso, mas sim os itens que constam das diretrizes curriculares nacionais, comuns a todos os cursos e a partir dos quais os projetos são construídos. Compete ao avaliador de curso verificar a compatibilidade entre a ênfase, a realidade social e o perfil do profissional graduado pela IES.

A prova do ENADE é composta por 10 questões de formação geral e 30 de conteúdos específicos, elaboradas com o objetivo de aferir as habilidades acadêmicas, as competências profissionais básicas

das áreas, o conhecimento sobre conteúdos básicos e profissionalizantes, além de questões transdisciplinares.

O ENADE avalia a trajetória do estudante, a partir do potencial de aprendizagem (desempenho dos ingressantes), o domínio da área e as competências profissionais (desempenho dos concluintes). O ponto principal do ENADE é, em primeiro lugar, a mudança de foco do exame. Na avaliação dinâmica, o foco de interesse é o progresso dos estudantes nos diversos temas que compõem as diretrizes do curso.

Os resultados do ENADE são considerados um conceito na avaliação do curso, mas também ele faz parte na composição de índices de qualidade relativos aos cursos e às instituições como Conceito Preliminar de Curso (CPC) e o Conceito de Curso (CC) e o Índice General de cursos (IGC) os quais são definidos a seguir:

- **CPC:** é composto a partir dos resultados do ENADE e por fatores que consideram a titulação dos professores, o percentual de docentes que cumprem regime parcial ou integral (não horistas), recursos didático-pedagógicos, infraestrutura e instalações físicas. O conceito, que vai de 1 a 5 (sendo 5 o valor máximo), é um indicador preliminar da situação dos cursos de graduação no país.

- **CC:** composto a partir da avaliação in loco do curso pelo MEC, pode confirmar ou modificar o Conceito de Curso (CC): composto a partir da avaliação in loco do curso pelo MEC, pode confirmar ou modificar o CPC. A necessidade de avaliação in loco para a renovação do reconhecimento dos cursos é determinada pelo CPC: cursos que obtiverem CPC 1 e 2 serão automaticamente incluídos no cronograma de avaliação in loco. Cursos com conceito igual ou maior que três podem optar por não receber a visita dos avaliadores e, assim, transformar o CPC (Conceito Preliminar de Curso) em CC, que é um conceito permanente.

- **IGC:** sintetiza em um único indicador a qualidade de todos os cursos de graduação e pós-graduação stricto sensu (mestrado e doutorado) de cada universidade, centro universitário ou faculdade do país. No que se refere à graduação, é utilizado o CPC dos cursos, e no que se refere à pós-graduação, é utilizada a Nota CAPES, que expressa os resultados da Avaliação dos Programas de Pós-graduação, realizada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). O IGC vai de um até cinco.

A área de Estatística só foi incluída no ENADE no ano 2009, conforme a Portaria Normativa no 1, de 29 de janeiro desse ano, junto com cursos da área de humanas de Administração, Arquivologia, Biblioteconomia, Ciências Contábeis, Ciências Econômicas, Comunicação Social, Design, Direito, Música, Psicologia, Relações Internacionais, Secretariado Executivo, Teatro e Turismo, que já tinham sido avaliadas no 2006 (com exceção de Relações Internacionais).

O ENADE é uma avaliação implementada desde o 2004, onde a periodicidade máxima com que cada área do conhecimento é avaliada é trienal, embora a área de Estatística não tenha sido considerada no ano 2006 nem 2012, diferentemente da área de Matemática avaliada nos anos 2005, 2008 e 2011.

Sendo deste modo, limitante no momento de avaliar os diferentes cursos de Estatísticas reportados na Tabela 1. Isto é ainda mais complicado, devido ao fato de que as universidades de São Paulo (USP) e de Campinas (UNICAMP) não participaram em dita avaliação em 2009. A UNICAMP só tem participado do ENADE a partir do ano 2010 e a USP é a única universidade estadual que não tem participação até hoje das avaliações do SINAES e dentre elas o ENADE.

Só por fazer referência a esta negativa, cabe lembrar que as universidades estaduais não são obrigadas a fazer parte do sistema de avaliação do governo federal, mas poderiam participar se quisessem, mas preferiram ficar de fora porque não concordaram com a metodologia adotada.

Na seguinte tabela, temos incluídas as universidades de São Paulo com curso de Estatística que participaram da avaliação do SINAES no ano 2009. Se reporta tanto o conceito ENADE quanto o conceito CPC, além do IGC da Universidade. Como pode ser apreciado, as universidades públicas (estadual e federal) apresentam avaliações razoáveis (no ENADE) e boa (no CPC) no curso de Estatística, as quais se correspondem com a avaliação da universidade (obtido pelo IGC). Isto contrasta com a avaliação obtida pela universidade privada, a qual apresenta resultados insatisfatórios em todos estes critérios.

Tabela 2. Faixas do Conceito ENADE e do conceito CPC no curso de Estatística e do IGC da universidade ano 2009

Instituição	Tipo	Conceito ENADE Estatística	Avaliação do Conceito ENADE Estatística	Conceito CPC Estatística	Avaliação do Conceito CPC Estatística	IGC da Universidade	Avaliação do IGC da Universidade
Universidade Federal de São Carlos	Federal	3	Razoável	4	Bom	5	Bom
Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho	Estadual	3	Razoável	4	Bom	4	Bom
Centro Universitário Capital	Privada	2	Insatisfatório	2	Insatisfatório	2	Insatisfatório

Fonte: dados obtidos do portal do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INP). <http://portal.inep.gov.br/indice-geral-de-cursos>
 CPC: Conceito preliminar do curso. IGC: Índice Geral dos cursos.

5. AVALIAÇÃO NA PÓS-GRADUAÇÃO EM ESTATÍSTICA USANDO INFORMAÇÃO DA AVALIAÇÃO TRIENAL DA CAPES

De acordo com o Instituto Nacional de Educação e Pesquisa (INEP) a avaliação dos Programas de Pós-graduação, realizada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), compreende a realização do acompanhamento anual e da avaliação trienal do desempenho de todos os programas e cursos que integram o Sistema Nacional de Pós-graduação. Os resultados desse processo, expressos pela atribuição de uma nota na escala de um a sete fundamentam a deliberação do Conselho Nacional de Educação e a Ministério da Educação (CNE/MEC) sobre quais cursos obterão a renovação de reconhecimento, a vigorar no triênio subsequente. A medida de qualidade da pós-graduação que compõe o IGC é uma conversão das notas fixadas pela CAPES. O Sistema de Avaliação da Pós-graduação foi implantado pela CAPES em 1976.

Os resultados da Avaliação Trienal realizada pela CAPES, além de indicarem a qualidade do desempenho e a posição relativa de cada programa no contexto de sua respectiva área, servem de referência para as decisões dos órgãos governamentais de investimento na pesquisa e na pós-graduação e fundamentam as deliberações do Conselho Nacional de Educação sobre quais cursos de mestrado e de doutorado obterão, para vigência no triênio seguinte, a renovação de seu “reconhecimento”.

O curso de Estatística, na avaliação feita pela CAPES, está na área de “*Matemática/Estatística e Probabilidade*”. Diferentemente da categorização feita no ENADE 2009 para cursos de graduação, onde a Estatística foi considerada junto com cursos de humanas.

Atualmente, são avaliados, no curso de Estatística, 9 programas de mestrado e 5 de doutorado no Brasil, nesta área. No estado de São Paulo no curso de Estatística, estão habilitadas as seguintes universidades: IME-USP (M/D), UFSCAR(M/D) e UNICAMP (M/D), todas elas públicas.

Os Critérios de Avaliação Trienal (2007), publicado na página da CAPES para a área de “*Matemática/Estatística e Probabilidade*” foram usados os seguintes indicadores gerais (extraída de http://www.capes.gov.br/images/stories/download/avaliacao/CA2007_MatematicaProbabilidadeEstatistica.pdf):

1. Corpo docente permanente a cada ano do triênio.
2. Critérios utilizados para o credenciamento de seus docentes como orientadores de mestrado e de doutorado.
3. Bolsistas de produtividade em pesquisa do CNPq e respectivos níveis.
4. Relação dos titulados por cada ano do triênio, por área e por orientador.
5. Publicações resultantes das teses/dissertações dos titulados.
6. Participação dos alunos nos projetos de pesquisa do programa.
7. Relação das publicações do corpo docente permanente, por ano do triênio.
8. Dados referentes à inserção nacional e internacional do programa, interação com outros centros, atividades de pós-doutoramento, professores visitantes e participação em projetos financiados pelas agências de fomento.

E indicadores específicos divididos em três critérios: I - Proposta do Programa, II - Corpo Docente, III - Corpo discente, teses e dissertações, IV - Produção Intelectual, V – Inserção Social. Cada uno deles com especificações. Já os Critérios para atribuição das notas seis e sete, para as instituições e os cursos na área “*Matemática/Estatística e Probabilidade*” foram (extraída de

http://www.capes.gov.br/images/stories/download/avaliacao/CA2007_MatematicaProbabilidadeEstatistica.pdf):

1. Qualidade e quantidade dos artigos publicados em periódicos muito seletivos.
2. Comentários de artigos ou pesquisas recentes em revistas de destaque internacional.

3. Apresentação de palestras convidadas em conferências internacionais reconhecidas pela comunidade.
4. Patentes internacionais.
5. Pesquisas em temas de fronteira.
6. Participação de membros do programa em comissões de programas de conferências internacionais.
7. Participação de membros do programa em comissões editoriais de revistas com circulação internacional.
8. Participação em convênios internacionais (cooperações bilaterais e convênios obtidos diretamente no exterior).
9. Organização de eventos internacionais pela instituição (congressos, workshops, cursos de verão/inverno com alcance internacional).
10. Atração de pós-doc nacionais e estrangeiros.
11. Presença regular de visitantes seniors de instituições internacionais.
12. Presença de alunos do exterior na PG.
13. Página da WEB do programa em inglês.

No curso de pós-graduação em Estatística no estado de São Paulo, restringimo-nos aos resultados para os programas que apresentam mestrado e doutorado avaliados na trienal 2004, 2007 e 2010. Estes resultados são apresentados na seguinte tabela:

Tabela 3. Avaliação Trienal 2004, 2007 e 2010 no curso de Estatística em universidades do Estado de São Paulo.

Trienal	Universidade	Nível	Conceito	Avaliação
				Global
2004	UFSCAR	M	4	Bom
	UNICAMP	M	4	Bom
	IME-USP	M/D	6	Muito Bom
2007	UFSCAR	M/D	4	Bom
	UNICAMP	M	4	Bom
	IME-USP	M/D	7	Muito Bom
2010	UFSCAR	M/D	4	Bom
	UNICAMP	M/D	5	Bom
	IME-USP	M/D	7	Muito Bom

Fonte: CAPES. <http://www.capes.gov.br/images/stories/download/avaliacao/>
M: Mestrado D: Doutorado

Observou-se que a USP tem se mantido na avaliação global “muito bom” inclusive atingindo o conceito máximo de sete desde o ano 2007, enquanto que a UNICAMP e a UFSCAR tem se mantido no nível “bom”.

6. COMENTÁRIOS FINAIS

O presente trabalho ainda é uma etapa inicial de uma pesquisa mais ampla. O interesse do presente trabalho centra-se nos resultados da avaliação institucional dos cursos de graduação e pós-graduação stricto sensu em Estatística realizadas pelo governo brasileiro desde o 2004 até 2012, restrito às universidades do estado de São Paulo.

De modo específico, queremos responder a pergunta de quais instituições participaram destas avaliações e quais resultados obtiveram nelas. Para responder a esta pergunta, seguimos uma metodologia baseada na análise documental com uma revisão de informação proporcionada em diferentes fontes bibliográficas e virtuais.

A principal oferta é dada pelas universidades estaduais como UNESP, UNICAMP e USP, as quais evidenciam um forte investimento do Estado que contrasta com o investimento do governo federal,

pois este oferece o curso em apenas uma entre as três universidades federais do estado. No entanto, encontramos que o curso também é oferecido em três instituições privadas em São Paulo: UNI CAPITAL, PUC São Paulo e Centro Universitário Fundação Santo André, embora a Estatística seja uma profissão que permite ter acolhimento a nível universitário- acadêmico e empresarial para seus alunos concluintes. Cabe mencionar que tanto o curso de Estatística dado na PUC São Paulo e na Fundação Santo André foram implementados recentemente, no ano 2012 e 2011 respectivamente, portanto ainda não possuem avaliação junto ao INEP.

De acordo com Barreyro (2008), o SINAES pretende organizar a avaliação das instituições de educação superior como um sistema que articule a avaliação e a regulação. Consta de três eixos: Avaliação dos cursos, das instituições e dos estudantes. Nosso trabalho oferece apenas informação a respeito do terceiro componente considerando o ENADE.

Recentemente, se dispõe de relatórios de avaliação desses cursos como os apresentados no ENADE 2009 e as diferentes avaliações da CAPES nos programas de avaliação. No entanto, não se tem pesquisas que tratem da avaliação no curso de Estatística e da importância deste para o desenvolvimento da área no Brasil.

O trabalho apresenta os resultados de dois instrumentos usados por dois entes do governo do Brasil, dedicados a avaliação de cursos. O SINAES, através do ENADE e índices complementares, oferece uma avaliação dos cursos de graduação e a CAPES, através da avaliação dos programas de pós-graduação trienal, oferece informação dos cursos de pós-graduação.

Quando olhamos as avaliações do ENADE desde sua criação no ano 2004 até o ano 2013, o curso de Estatística só tem sido considerado na avaliação no ano 2009, diferentemente da Matemática que vem sendo avaliada em mais anos. Não podemos precisar porque isto acontece, mas podemos indicar que a maioria dos cursos de bacharelado foram criados recentemente e porque os programas tradicionais como o da USP e a UNICAMP decidiram não aderir a avaliação. Então, desconsiderando os cursos destas universidades e das novas que foram criadas posteriormente, encontramos um nível bom no curso de Estatística da UNESP e da UFSCAR, que contrasta com um nível insatisfatório da universidade privada Centro Universitário Capital. No entanto, os dados encontrados são insuficientes e defasados no tempo.

No caso da avaliação CAPES, por serem cursos de pós-graduação, a avaliação tem abarcado um maior número de anos, mas menor número de universidades, já que só três universidades públicas no estado de São Paulo oferecem pós graduação e nenhuma privada (ver tabela 1). No caso da USP que oferece três programas de pós-graduação, apenas o IME-USP é considerado em nossa análise desde que o programa de pós-graduação conjunto entre a USP São Carlos e a UFSCAR só se iniciasse neste

ano e o programa da USP- Piracicaba é desconsiderado pois trata-se de um programa em Estatística mas dirigido a carreiras agrônomas.

Os resultados da avaliação da CAPES destacam o programa de pós-graduação do IME USP como sendo o programa com melhor avaliação do país. Logo, a UNICAMP apresenta o seguinte melhor desempenho só comparável com outras três universidades do país, Universidade Federal de Rio de Janeiro, Universidade Federal de Minas Gerais e Universidade Federal de Pernambuco.

Já o programa da UFSCAR, encontra se em uma situação intermediária espera-se uma melhora de seu desempenho a partir de 2013 na parceria com o a USP São Carlos. Assim, encontramos na pós-graduação uma melhor avaliação no tempo, a qual deve continuar com a avaliação trienal a ser publicada neste ano.

A partir da exploração inicial neste trabalho, identificamos que a avaliação institucional do curso de Estatística na graduação apresenta menos dados que os cursos de pós-graduação no Estado de São Paulo. Na graduação, achamos que ainda é preciso contar com resultados do ENADE mais recentes e que as universidades participem deles. E no caso da pós-graduação, novos resultados a serem publicados este ano, incluindo o novo programa conjunto entre a USP- São Carlos e a UFSCAR devem ajudar na avaliação institucional.

A abordagem apresentada até agora é uma visão a respeito do curso de Estatística através dos resultados das avaliações institucionais; isto é, uma visão que apresenta dados bastante gerais e que resulta insuficiente para caracterizar vários aspectos deste curso e das formas próprias do processo de aprendizagem incluindo suas próprias formas de avaliação. Além disso, como tem se observado, os dados nem sempre estão disponíveis, pois estas avaliações governamentais nem sempre incluem este curso.

Em futuros trabalhos, pretendemos estender o presente trabalho para todos os cursos de Estatística no Brasil (além de não serem muitos), tanto na graduação como de pós-graduação e a partir daí, propor modelos de avaliação pertinentes e oportunos para estes programas, que permitam ter um maior conhecimento do desenvolvimento e do perfil do curso, assim como de maior informação. Pretende-se considerar aspectos de avaliação que podem ser desenvolvidos por organizações como a Associação Brasileira de Estatística ou os Conselhos Regionais de Estatística.

Pensamos que no futuro, devem existir modelos que incluam tanto os aspectos institucionais e pessoais, incluindo todos os participantes do processo de avaliação (como pode ser revisado em Aparicio e Bazán, 2010) e um marco maior, para melhor entendimento da avaliação e do curso de Estatística que possa caracterizar a dinâmica da aprendizagem do curso, já que não se tem um marco ad-hoc próprio do curso, nem dados contínuos se não dados quantitativos baseados em índices que não

falam acerca da dinâmica interna, nem informação mais detalhada a nível de professores e alunos e instituição.

Finalmente, notamos uma carência de investigações que tratem sobre as avaliações nesta área, tanto em publicações como teses.

AGRADECIMENTOS

A primeira autora agradece o apoio da Coordenação de Apoio a Pesquisa de Pessoal Superior (CAPES).

Os autores também agradecem ao revisor anônimo pelas diversos comentários que permitiram o aprimoramento do trabalho.

REFERÊNCIAS

- Aparicio, A. Bazán, J.L (2010b). Una propuesta metodológica de las prácticas de evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje en la educación superior. *VI Congreso Iberoamericano de Docencia Universitaria (VI CIDU) PUCP*. Disponible en http://www.congreso.pucp.edu.pe/vi-cidu/docs/doc_comunicaciones/texto/TC-COM-178.pdf
- Ara, A.; Louzada, F.(20129. Descrição de Algumas das Dimensões que compõem o Perfil do Corpo Docente dos Departamentos de Estatística do Brasil. *Bolema. Boletim de Educação Matemática* v. 26, p. 23-38. (UNESP. Rio Claro. Impresso).
- Bittencourt, Hélio R.; Casartelli, Alam O.; Rodrigues, Alziro C. M (2009). Sobre o índice geral de cursos (IGC). *Avaliação (Campinas)*, Vol. 14, no.3, p.667-682.
- Bittencourt, Hélio R.; Casartelli, Alam O.; Rodrigues, Alziro C. M (2008). Uma análise da relação entre os conceitos ENADE e IDD. *Estudos em Avaliação Educacional*, v. 19, p.247-262. São Paulo.
- Barreyro, G. B. (2008) De exames, rankings e mídia. *Avaliação*, , v. 13, n. 3, p. 863-868, Campinas; Sorocaba.
- Barreyro, G. B.; Rothen, J.C.(2006). SINAES contraditórios: considerações sobre a elaboração e implantação do Sistema Nacional de Avaliação da Educação superior. *Educação & Sociedade*, v. 27-96, p. 955-977.
- Barreyro, G. B.(2006). Evaluación de La educación superior brasileira. El SINAES. *Revista de la educación superior, año/vol XXXV(1). Nro 137*. Asociación Nacional de Universidades e Instituciones de Educación Superior (ANUIES). DF. México. Pp 63-73
- Brasil (2004). Ley nro 10861/04 Institui o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior SINAES. Diário Oficial da União, Seção, 15 de Abril. Disponível em http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2004-2006/2004/lei/110.861.htm
- Brito Márcia (2008). O SINAES e o ENADE: da concepção à implantação. *Avaliação (Campinas)*, Nov 2008, vol.13, no.3, p.841-850.
- Catani, A.M; Oliveira, J.F; Dourado, L.F (2002). A política de avaliação da Educação superior no Brasil em questão. In: Sobrinho, J.; Ristoff, D. (Org.) *Avaliação Democrática para uma Universidade cidadã*. Florianópolis: Insular, p.99-118.

- Charter, Roger (2002). Os desafios da escrita. Tradução de Fulvia M. L. Moretto. São Paulo:UNESP
- Cordani, L. K. (2001). *O ensino da estatística na universidade e a controvérsia sobre os fundamentos da inferência*. Tese apresentada para a obtenção do Doutorado em Educação. Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo. FEUSP. 154 pp.
- Dantas, C. (2009). Desenvolvimento da Estatística na Universidade de São Paulo, In: Associação Brasileira de Estatística, História da Estatística no Brasil. Disponível em <http://www.redeabe.org.br/historia.htm>. Acesso em 23 de dezembro de 2009. ABE biênio 32000/2002
- Dias Sobrinho J. (1998). Avaliação Institucional da Educação Superior: fontes externas e interna. *Avaliação*, v.3, n° 34, Campinas.
- Dias Sobrinho, J. (2007). Evaluación de la Educación Superior en Brasil: políticas y prácticas. Universidade de Sorocaba-UNISO.
- Evan Robert; Lys Vinhaes (2005). Avaliação da Educação Superior no Brasil: do Provão ao ENADE. Documento preparado para o Banco Mundial Gerente responsável: Alberto Rodriguez. Disponível em <http://www.isp.ufba.br/avalia%C3%A7%C3%A3o%20da%20Ed%20Superior%20do%20Provao%20ao%20ENADE.pdf>
- Fox, V. (2005). Análisis documental de contenido: principios y prácticas. Buenos Aires: Alfagrama.
- Giolo, J. (2008). “SINAES” intermitentes. *Avaliação*, v. 13, n. 3, p. 851-856, Campinas; Sorocaba
- INEP (2004). SINAES – Sistema nacional de avaliação da educação superior: da concepção à regulamentação. 2 ed., Brasília: *Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira*, 155p.
- Louzada, F.; Ara, A. ; Oliveira, C. Z. ; Gonçalves, C. (2010). Diagnóstico do Ensino da Estatística nas Universidades Públicas Brasileiras: Uma Descrição de Algumas das Dimensões que Compõem o Perfil do seu Corpo Docente. *Revista Brasileira de Estatística*, v. 71, n. 234, p.7-42, jan./dez.2010 Rio de Janeiro.
- Polidori, M.; Marinho,C.;Barreyro, G. (2006). SINAES: perspectivas e desafios na avaliação da educação superior brasileira. *Ensaio: aval.pol.públ.Educ. vol.14 no.53*. Rio de Janeiro. Disponível em http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-40362006000400002
- Ribeiro, C.; Lorenzetti, M.; Jacobini, O. (2010). Educação Estatística - Teoria e prática em ambientes de modelagem matemática. *Grupo Editorial Autêntica*.
- Ristoff, D.; Giolo, J. (2006). O SINAES como Sistema. *RBPG*, Brasília, v. 3, n. 6, p. 193-213. Relatório de divulgação dos resultados finais da avaliação TRIENAL 2004, 2007, 2010. CAPES. Disponível em: <http://trienal.capes.gov.br>
- Silva, L. (1989). A Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE e a produção das estatísticas. In: *Revista Brasileira de Estatística - RBEs*, Ano 50, n.193. Rio de Janeiro
- Sánchez Díaz, M.; Vega Valdés, J. (2003). Algunos aspectos teórico-conceptuales sobre el análisis documental y el análisis de información. *Ciencias de la Información*, 34 (2): 49-60.
- Schlickmann, R.; Roczanski, C.; Azevedo, P. (2008). PROVÃO X ENADE: Uma análise comparativa. Disponível em <http://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/61488>.
- SINAES (2004). Bases para uma nova proposta de avaliação da educação superior. Disponível em <http://www.unifesp.br/reitoria/orgaos/comissoes/avaliacao/sinaes.pdf>

Verhine, R.; Dantas, L.; Soares, J. (2006). Do provão ao ENADE: uma análise comparativa dos exames nacionais utilizados no Ensino Superior Brasileiro. *Ensaio*, v. 14, n. 52, p. 291-310. Rio de Janeiro.

Vianna, Heraldo M. (2003). Avaliações nacionais em larga escala: análises e propostas. São Paulo: 41p. (Textos FCC, n. 23).

A FIRST APPROXIMATION IN EVALUATION OF UNDERGRADUATE AND GRADUATE PROGRAMS IN STATISTICS FROM UNIVERSITIES IN SAO PAULO

ABSTRACT

The interest of this work focuses on the results of institutional assessment of undergraduate and post-graduate studies in Statistics conducted by the Brazilian government from 2004 until 2012, restricted to universities in the state of São Paulo. Specifically we want to answer the question of which institutions participated in these assessments and what results they obtained in them. We follow a methodology based on documentary analysis. The results in undergraduate courses correspond to data from the National Assessment of Higher Education (SINAES) through ENADE (National Examination of Student Performance) and other indexes. The results correspond to postgraduate assessment Three annual in postgraduate courses (Masters and PhD) held by the Coordination of Improvement of Higher Education Personnel (CAPES). All these evaluation programs are promoted from the federal government to set funding policies, incentives and as a form of regulation. We found that the bachelor's program is offered by three private institutions, state universities and three federal university. A graduate degree is offered at three universities: two state and federal partnership with a state. The only assessment SINAES for undergraduate course in Statistics happened in 2009, attended by students from three universities: USP (state), UFSCAR (federal) and University Center Capital (Private). Public universities have achieved a "good" rating, and the private university has evaluated "unsatisfactory". There were three triennial evaluations: 2004, 2007 and 2010 program graduate who participated in the USP, UNICAMP and UFSCAR. The USP has remained in the overall assessment "very good" concept even reaching a maximum of seven since 2007, while the UNICAMP and UFSCAR has remained at the "good". Since graduation in only one assessment is available and new universities have been incorporated later suggest new reviews from a perspective broader institutional assessment.

Keywords: Program of Statistics, Evaluation, graduation, post graduation

Resumen

El interés del presente trabajo se centra en los resultados de la evaluación institucional en los programas de graduación y de post graduación stricto sensu en la carrera de Estadística realizado por el gobierno brasileño entre los años 2004 a 2012, restringido a las universidades del Estado de Sao Paulo. Específicamente buscamos responder que instituciones participaron de las evaluaciones y cuáles fueron sus resultados. Se siguió una metodología basada en el análisis documental. Los resultados en los programas de graduación corresponden a los datos del Sistema Nacional de Evaluación de la Educación Superior (SINAES) a través del ENADE (Examen Nacional de Rendimiento de los Estudiantes) y otros índices y los resultados del post grado corresponden a la evaluación Triannual a los programas de post grado realizada por la Coordinación de Perfeccionamiento de Personal de Nivel Superior (CAPES). Todas estas evaluaciones son promovidas por el gobierno federal para definir las políticas de financiamiento, incentivos, y también como forma de regulación. Encontramos que el programa de graduación en Estadística es ofrecido por tres instituciones privadas, tres universidades estatales y por una universidad federal. El post grado es ofrecido en tres universidades: dos estatales y una federal en conjunto con una estatal. La única evaluación del SINAES para los programas de graduación en Estadística ocurrió en el año 2009, en la que participaron alumnos de tres universidades: Universidad de São Paulo-USP (estatal), Universidad Federal de Sao Carlos -UFSCAR (federal) y el Centro Universitario Capital (privada). Las universidades públicas alcanzaron una evaluación considerada "buena", y la universidad

privada presento una evaluación considerada “insatisfactoria”. Han ocurrido tres evaluaciones trianuales: 2004, 2007 y 2010 en los programas de post grado en las que participaron la Universidad de Sao Paulo-USP, Universidad de Campinas -UNICAMP y la Universidad Federal de Sao Carlos-UFSCAR. La USP se han mantenido en ellas con una evaluación global considerada “muy buena” inclusive alcanzo el concepto máximo de siete desde el 2007, la UNICAMP y la UFSCAR se han mantenido con una evaluación considerada “buena”. Tomando en cuenta que apenas se dispone de una evaluación en la graduación en Estadística y al hecho de que nuevas universidades que ofrecen esta carrera han sido incorporadas sugerimos nuevas evaluaciones más amplias desde una perspectiva de la evaluación institucional.

Palabras claves: *Carrera de estadística; evaluación; graduación; post graduación.*

ANA SOFÍA APARICIO PEREDA
Universidade de São Paulo, Brasil
anasofiap@usp.br

Possui Graduação em Psicologia pela Universidade Nacional Mayor de San Marcos de Peru (1997), Mestrado em Educação na linha de pesquisa Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade de São Paulo (2006). Tem ditado no programa de Mestrado em Psicologia da Universidade Nacional Mayor de San Marcos até o 2009. É pesquisadora independente na área de Psicologia, com ênfase em Psicologia educativa e principalmente nos seguintes temas: desempenho, atitudes em relação à estatística e matemática, práticas de avaliação, avaliação educacional, estudo psicométrico, análise qualitativo e quantitativo, prevenção da saúde e predisposição a enfermidades psicossomáticas. Atualmente é aluna de doutorado em Educação na linha de pesquisa de Ensino de Ciência e Matemática da Universidade de São Paulo (USP), sob amparo do Programa de Estudante Convênio de Pós Graduação (PEC PG) da CAPES. É autora de diversos estudos na área da psicologia e educação.

OSCAR JOÃO ABDOUNUR
Universidade de São Paulo, Brasil
abdounur@ime.usp.br

Possui graduação em Engenharia Eletrônica pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (1986); mestrado em Matemática pela Universidade de São Paulo (1993); doutorado em Educação pela Universidade de São Paulo (1997); pós-doutorado em História da Ciência no Max Planck Institut für Wissenschaftsgeschichte em Berlim (2001), onde recebeu o prêmio Lorenz Krüger oferecido a pesquisas relacionando história e filosofia da ciência; e pós-doutorado em História e filosofia da ciência no Max Planck Institut für Wissenschaftsgeschichte (2008) em Berlim. Atualmente é professor associado/livre-docente do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, onde coordena o grupo de pesquisa Epistemologia, Didática e História da Matemática. Tem experiência na área de História, Epistemologia e Didática da matemática Atuando principalmente nos seguintes temas: inter-relações históricas entre matemática e música, história da matemática, teorias de razão e proporção, heurística e pensamento analógico, globalização e internacionalização do conhecimento matemático e educação matemática.

JORGE LUIS BAZÁN GUZMÁN
Universidade de São Paulo, Brasil
jlbazan@icmc.usp.br

É Engenheiro Estatístico, pela Universidade Nacional Agrária La Molina de Peru (1997), Psicólogo, pela Universidade Nacional Maior de São Marcos de Peru (2003), Doutor em Estatística pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo no Brasil (2005). Tem uma estadia pós-

doutoral no Departamento de Didática da Matemática. Universidade de Granada no 2009. Pesquisador visitante FAPESP na Universidade de São Paulo no 2010 e professor visitante CAPES na Universidade de Campinas entre o 2011 e 2012. Atualmente e Professor Doutor da Universidade de São Paulo no programa inter institucional de pós graduação entre a USP e a Universidade Federal de São Carlos. Entre suas principais áreas de pesquisa estão os Modelos de Regressão com resposta discreta, e de resposta limitada, , Inferência Bayesiana, Modelos de variáveis latentes, Teoria da Resposta ao Item, Psicometria, Estatística em Ciências Humanas, Ensino da Estatística Métodos bibliointegrativos.

USO DE ESTATÍSTICA NA OPINIÃO DE EGRESSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DE UMA UNIVERSIDADE PÚBLICA

MARCOS NASCIMENTO MAGALHÃES

RENAN MARCEL BARROS DOS SANTOS

RESUMO

Este artigo descreve informações e opiniões obtidas junto aos egressos de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do estado de São Paulo. O uso de Estatística pelos egressos na sua profissão atual é o principal interesse da pesquisa realizada, cuja análise dos dados foi feita via Análise Exploratória de dados e uso de Regressão Logística. O tópico de Estatística Descritiva é o mais lembrado e utilizado pelos egressos e, de modo geral, observamos uma presença modesta de Estatística no cotidiano desses egressos, sejam professores ou não. O modelo obtido pela Regressão Logística sugere, ainda, a importância do oferecimento de disciplinas optativas em Estatística com o objetivo de consolidar os conceitos anteriormente desenvolvidos nas duas disciplinas obrigatórias da grade curricular, que envolvem ideias básicas de Probabilidade e Estatística. Apesar de particularidades do estudo realizado, seus resultados podem propiciar reflexões para outras licenciaturas em Matemática.

Palavras chave: *Egressos; licenciatura em matemática; uso de estatística; regressão logística.*

1. INTRODUÇÃO

A Estatística é uma ferramenta essencial para as mais diversas áreas do conhecimento, contribuindo para o entendimento de problemas, avaliação de situações e tomada de decisões. É difícil imaginar um exercício pleno da cidadania sem a compreensão de alguns dos seus elementos básicos. É uma tarefa dos ensinamentos Fundamental e Médio contribuir para a chamada *literacia estatística* ou *letramento estatístico*, que indica a capacidade de o indivíduo interpretar e avaliar criticamente informações estatísticas relacionadas a dados apresentados (Cazorla e Santana, 2010). Os Parâmetros Curriculares Nacionais (<http://portal.mec.gov.br>) foram publicados a partir de 1997 pelo Ministério da Educação do Brasil. Na parte referente ao ensino Fundamental, a Estatística está presente no bloco *Tratamento da Informação* que, junto com *Números e operações*, *Espaço e forma* e *Grandeza e medidas*, formam os quatro blocos que compõem a disciplina de Matemática. Para o ensino Médio, os eixos estruturadores são três: *Álgebra: números e funções*, *Geometria e medidas* e *Análise de Dados*, sendo que Estatística está incluída neste último. O professor de Matemática é, assim, o responsável pela introdução de tópicos de Estatística na vida dos estudantes da educação básica. Por isso, é

importante uma boa formação em Estatística durante sua graduação, permitindo que o professor tenha confiança para discutir com seus estudantes esses tópicos e, também, propor atividades conjuntas com professores de outras áreas. Cerca de 55% dos egressos em Licenciatura em Matemática, que participaram de nossa pesquisa, exercem outras profissões diferentes do magistério, mas isso não diminui a importância de uma boa preparação em Estatística. Uma vez que, além de contribuir para o aumento do letramento estatístico da sociedade, facilita a resolução de problemas nas mais diversas áreas, tanto pessoal como profissional.

Apesar de uma intensa busca, não encontramos trabalhos na literatura sobre o uso de Estatística por egressos de cursos superiores, em particular da Licenciatura em Matemática. Sobre a formação inicial em Estatística dos professores de Matemática, Pamplona (2009, 2010) faz uma análise qualitativa da postura de educador do professor de Estatística da Licenciatura, com base em depoimentos de cinco professores experientes que ministram essa disciplina em cursos de Licenciatura em Matemática. O autor ressalta a importância do professor-formador contextualizar os conceitos discutidos na disciplina, de modo que o futuro professor tenha também melhor preparação estatística e pedagógica para desenvolver esses tópicos na educação básica. Em Silva (2011), são analisados currículos e projetos pedagógicos de sete cursos de Licenciatura em Matemática do país com relação ao ensino de Probabilidade e Estatística. Foi avaliada sua concordância com os Parâmetros Curriculares Nacionais e com as Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática, bacharelado e licenciatura (Brasil, 2002). O autor critica a forma como as disciplinas são oferecidas na maioria dos cursos estudados, pela falta de articulação do seu conteúdo com o ensino na educação básica. Ainda com relação à formação Estatística do professor de Matemática, Viali (2008) coletou uma amostra de 125 cursos de licenciatura em Matemática do Brasil e estudou seus currículos. Constatou que a carga horária média dos conteúdos de Estatística, Probabilidade e Combinatória é de apenas 4,7% da carga horária média total do curso. A disciplina típica inclui Estatística e Probabilidade em 60 horas aula e seria compartilhada com outros cursos da área. O autor indica que não só a quantidade, mas a qualidade, das disciplinas deveria propiciar melhor suporte para o futuro professor de Matemática desenvolver esses assuntos na educação básica.

É importante salientar que a boa formação específica e didática dos docentes que ministram disciplinas de Estatística nas universidades é essencial para a adequada qualificação dos profissionais graduados, em particular, dos futuros professores de Matemática da educação básica. De modo geral, em várias universidades públicas, a responsabilidade pelo aprendizado de Estatística na Licenciatura em Matemática está a cargo de departamentos de Estatística e muitos dos seus docentes têm doutorado na área. Em várias universidades privadas, temos professores com graduação e pós-graduação em áreas como Matemática, Economia e Engenharia, deslocados para as disciplinas de Estatística, o que

dificulta obter os resultados desejados no que se refere à preparação de conteúdo do professor de Matemática para a abordagem das noções estatísticas na escola básica. Observe que a carreira específica, no entanto, nem sempre garante a boa atuação como formadores de professores a esses docentes. Muitas pesquisas que tiveram, como sujeitos, professores em exercício (e que, portanto, já passaram pela formação inicial nas universidades, públicas ou privadas) indicam a pouca familiaridade destes com os conteúdos relativos à probabilidade e à estatística

Para os próximos anos, o diagnóstico apresentado em Louzada et al. (2010) indica falta de doutores na área de Estatística para atender às demandas dos cursos de Bacharelado em Estatística no país. Dessa forma, poderá haver uma situação ainda mais grave nas várias licenciaturas em Matemática existentes no Brasil. Em grandes centros como São Paulo, as instituições privadas formam grande parte dos professores da rede pública do Ensino Fundamental II (6ª à 9ª séries) e Ensino Médio e, segundo depoimentos de vários professores com quem tivemos contato, a presença de Estatística nos currículos de licenciatura dessas instituições é quase sempre insuficiente, conforme já mencionado por Viali (2008). O mesmo pode ser constatado nos cursos de Pedagogia, sejam públicos ou privados.

2. METODOLOGIA

Realizamos uma coleta de opiniões entre egressos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), buscando saber de cada um seu perfil profissional, vivência acadêmica e relações com a área de Estatística.

O curso de Licenciatura em Matemática do IME-USP tem duração de 4 anos quando oferecido no período diurno e 5 anos no período noturno. Na grade curricular, são oferecidas duas disciplinas obrigatórias de Estatística no primeiro e segundo ano para os períodos diurno e noturno, respectivamente. O programa dessas disciplinas compreende: Análise Combinatória, Estatística Descritiva, Probabilidade, Variáveis Aleatórias Discretas e Contínuas, Estimacão e Inferência Estatística. Dentre as disciplinas optativas estão incluídas outras disciplinas de Estatística destinadas especialmente à Licenciatura ou do currículo de algum outro curso.

Tendo em vista que a instituição não mantém contato regular com seus antigos estudantes e que um encontro pessoal seria impraticável devido, entre outros aspectos, ao custo envolvido, decidimos utilizar a *internet*. A coleta de dados foi realizada em 2010, sendo restrita aos graduados dos anos de 2007, 2008 e 2009 que totalizam 295 licenciados. Utilizamos os endereços eletrônicos disponíveis na administração do IME-USP e, apesar de muitos estarem desatualizados, construímos uma amostra de conveniência com todos os retornos obtidos.

Utilizamos um questionário *online* em que as respostas ficavam armazenadas em um servidor na *internet*. O questionário dispunha de 17 itens divididos em três campos: perfil, formação e atuação

profissional. Após três solicitações, obtivemos 101 respostas, aproximadamente um terço da população alvo. No presente artigo, discutimos apenas os resultados referentes ao contato, passado e atual, desses egressos com a Estatística. Nas respostas obtidas, os tópicos de Análise Combinatória e Probabilidade foram mencionados, pois além de fazerem parte do bloco Tratamento da Informação nos Parâmetros Curriculares Nacionais do MEC, também estão incluídos nas ementas das disciplinas básicas de Estatística. Na próxima seção apresentamos os principais resultados observados e em seguida, com o auxílio de Regressão Logística, modelamos a probabilidade de uso de Estatística pelos egressos em função de variáveis selecionadas pelo seu maior grau de associação com o uso de Estatística.

3. RESULTADOS DESCRITIVOS

Além das disciplinas regulares, as atividades desenvolvidas pelos estudantes durante a graduação têm impacto na sua formação e interferem na sua vida profissional futura. Classificamos como *não acadêmicas* as atividades daqueles egressos que, durante a graduação, trabalharam ou fizeram estágio fora do ambiente escolar (ambiente da escola básica). Por outro lado, as atividades de iniciação científica ou de monitoria foram classificadas como *acadêmicas* porque se relacionam à carreira da licenciatura. A Figura 1 apresenta os resultados observados e percebe-se claramente a necessidade de aumentar o envolvimento dos estudantes da Licenciatura com atividades acadêmicas.

Em anos recentes, pudemos perceber na USP um maior envolvimento dos estudantes de Licenciatura em Matemática nos programas de Iniciação Científica, incluindo aqui os projetos de extensão e de tutoria acadêmica. Como veremos adiante, o envolvimento com outras atividades, além das disciplinas do curso, contribuem para o uso de Estatística após a graduação, o que talvez seja explicado por proporcionar maior maturidade ao estudante e pela percepção da aplicabilidade dos conteúdos.

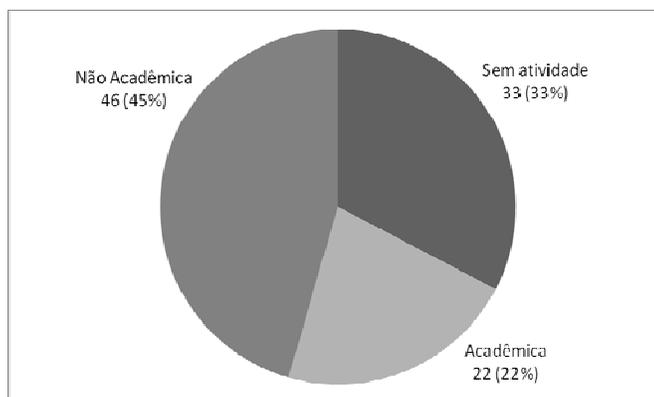


Figura 1. Atividades adicionais durante o curso

No curso de Licenciatura do IME-USP são necessários alguns créditos de disciplinas livres e eletivas. O estudante pode escolher disciplinas em várias áreas e, dentro das escolhas possíveis, existem disciplinas de Estatística oferecidas em outros cursos da universidade. Entre os 101 graduados entrevistados, 25 cursaram, além das duas obrigatórias, outras disciplinas optativas de Estatística, sendo que alguns cursaram mais de uma. As disciplinas preferidas foram Estatística Descritiva e Processos Estocásticos e uma possível razão para isso é que elas auxiliam a preparação de uma futura pós-graduação em Estatística, buscada por alguns dos estudantes da Licenciatura. A Tabela 1 apresenta as disciplinas cursadas e sua frequência de ocorrência.

Tabela 1. Optativas cursadas

Disciplina	Frequência	Porcentagem
Estatística Descritiva	21	45%
Processos Estocásticos	13	27%
Probabilidade	7	15%
Outras	6	13%
Total*	47	100%

(*) *Opção de responder mais de um item.*

Um dos interesses da pesquisa foi investigar o que os graduados vão lembrar sobre Estatística depois de sua graduação. Por ser uma coleta de dados pela *internet* e devido ao tempo de resposta, consideramos inviável aplicar um teste com questões específicas de Estatística e decidimos solicitar que os respondentes indicassem, ordenadamente, três conceitos estatísticos de que se lembravam. A Figura 2 se refere apenas à primeira lembrança e cabe notar que 17 egressos não lembraram nenhum conceito e deixaram esse item em branco. O primeiro conceito lembrado reflete o que é mais usual para o graduado, seja por aplicação frequente em sua vida profissional, seja porque foi o tópico com maior aprendizagem durante sua graduação. Os conceitos indicados foram agrupados em três categorias e *Estatística Descritiva* teve a maioria das primeiras lembranças, seguida de *Probabilidade*, *Análise Combinatória e Variáveis aleatórias*. As demais indicações foram agrupadas em *Outras* e incluíram *Inferência*, *Regressão* e *Teoria da Decisão*. Esse resultado não é surpresa, tendo em vista o amplo uso de Descritiva em diversas áreas profissionais para a organização de relatórios, avaliação de desempenho, etc.

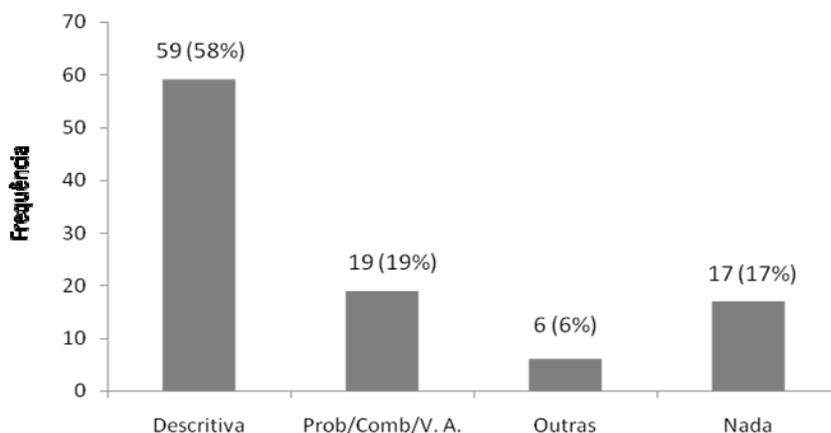


Figura 2. Primeira lembrança de Estatística

Consideramos a seguir apenas as lembranças indicadas, desprezando as respostas em branco. A Figura 3 contém a distribuição das 220 indicações, notando que muitos egressos lembraram apenas 1 ou 2 conceitos e até mesmo nenhum, conforme já mencionamos. O tópico Descritiva se manteve à frente com 56% das indicações.

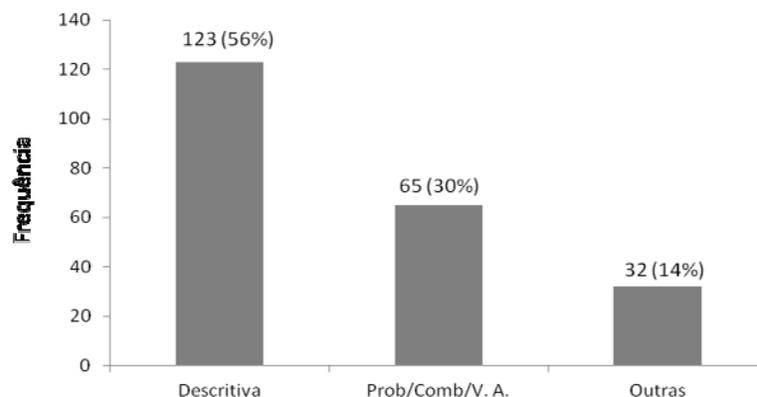


Figura 3. Lembranças de conceitos de Estatística

Os egressos foram agrupados em duas categorias: *professores* e *não professores*. Para ambas as categorias, a pesquisa continha itens cujo objetivo era detalhar as atividades desenvolvidas. Entre os 101 graduados participantes da pesquisa, 55 (55%) não exercem a docência e destes, 33 já atuaram como professor anteriormente.

A Tabela 2 apresenta os resultados relativos à atuação profissional dos egressos que estão fora do magistério.

Tabela 2. Área de atuação dos egressos que não estão no magistério

Área de atuação	Frequência	Porcentagem
Setor financeiro	16	29%
Computação	12	22%
Educação (não professor)	9	16%
Funcionalismo Público	5	9%
Estudante de pós	3	5%
Estatística	2	4%
Outra	8	15%
Total	55	100%

A maior parte dos graduados que não atuam no magistério trabalha no setor financeiro ou de computação, 28 (51%) dos 55. Em seguida, 16% são os profissionais que atuam na área de Educação, mas não como professores. Nesse caso, a categoria Educação compreende coordenadores pedagógicos, plantonistas e editores, sendo alguns, editores de material didático. Cabe ressaltar que o setor financeiro e de computação têm a tradição de absorver profissionais com boa formação matemática e, dessa forma, é usual a forte presença desses setores entre os egressos que não trabalham no magistério.

Um dos interesses da pesquisa foi avaliar o uso que os licenciados em Matemática, professores ou não, fazem de Estatística, incluindo Análise Combinatória e Probabilidade. Dentre os 55 egressos que não exercem o magistério, apenas 25 (45%) utilizam conteúdos de Estatística em suas atividades. A maior parte faz uso de Estatística Descritiva (20 em 25) e a Tabela 3 apresenta um panorama dos tópicos utilizados, sendo que os egressos podiam fazer múltiplas indicações.

Tabela 3. Uso de Estatística pelos egressos que não exercem o magistério

Tópico	Frequência	Porcentagem
Descritiva	20	47%
Probabilidade	7	17%
Modelos de Variáveis	4	10%
Análise Combinatória	3	7%
Tomada de Decisão	3	7%
Inferência	2	5%
Regressão	2	5%
Outro	1	2%
Total de indicações*	42	100%

(*) De 25 indivíduos com opção de escolher mais de um item.

Vamos agora relatar os resultados referentes aos 46 graduados, 45% da amostra, que estão exercendo a profissão de professor. A Tabela 4 apresenta a distribuição desses professores segundo a rede de ensino em que atuam. A maioria trabalha na rede privada sendo que 42 professores atuam em escolas regulares e 4 estão envolvidos com aulas particulares e cursos livres.

Tabela 4. Distribuição dos professores por rede de ensino

Setor	Frequência	Porcentagem
Público e Privado	2	4%
Público (Só)	15	33%
Privado* (Só)	29	63%
Total	42	100%

(*) Inclui 4 professores de aulas particulares e de cursos livres.

A análise que segue vai se restringir aos professores da escola regular e a Figura 4 apresenta as ocorrências por nível de ensino.

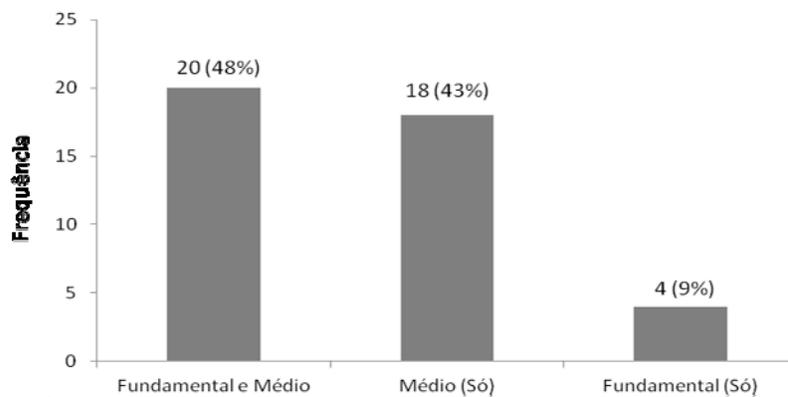


Figura 4. Distribuição dos professores (escola regular) por nível de ensino

Entre os 42 professores considerados, 28 (67%) ensinam tópicos de Estatística em suas aulas, sem distinção do nível de ensino. Na Figura 5, apresentamos os conteúdos mencionados por esses professores como sendo aqueles que ensinam em suas classes. Separamos os níveis, Fundamental e Médio, para permitir comparação entre essas duas etapas da educação básica. Notamos que Gráficos e Tabelas têm uma forte diminuição percentual no Ensino Médio e isto pode ter ocorrido por serem considerados assuntos do Ensino Fundamental. Ressaltamos que o uso de gráficos, na apresentação de conceitos como medidas de dispersão, proporciona uma forma de discutir conceitualmente as ideias de variabilidade evitando que a ênfase fique em fórmulas.

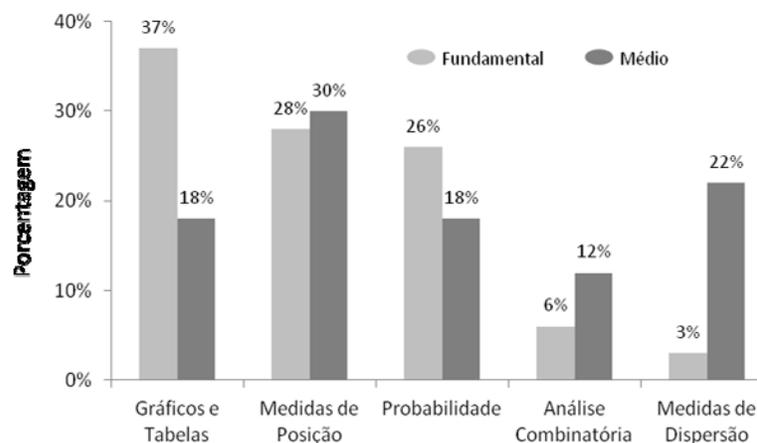


Figura 5. Tópicos de Estatística em sala de aula

4. APLICAÇÃO DE REGRESSÃO LOGÍSTICA

Nesta seção, descrevemos como algumas das quantidades observadas na pesquisa influenciam o uso de Estatística, qualquer que seja a profissão atual. Utilizamos a técnica de Regressão Logística para modelar a chance de ocorrência de uma dada resposta (usar Estatística: sim ou não) em função de variáveis independentes ou preditoras (outras variáveis coletadas no estudo).

Os conceitos de *chance* e *razão de chances* são muito utilizados em Regressão Logística. *Chance* é definida como o quociente entre a probabilidade de ocorrência de certo evento e a probabilidade de não ocorrência. A *Razão de Chances* é obtida pelo quociente das chances calculadas em duas condições de interesse, isto é, dois conjuntos de valores para as variáveis preditoras. Esse quociente indica a chance de uma das condições em relação à outra.

A Regressão Logística é uma técnica estatística com larga aplicação, especialmente em Epidemiologia, e uma referência importante é o texto de Hosmer e Lemeshow (2000). Seguindo esses autores e utilizando o *software Minitab 16*, obtivemos as estimativas para os coeficientes do modelo de Regressão Logística, partindo da inclusão de todas as variáveis inicialmente avaliadas como relevantes para explicar a característica de interesse. Em seguida, em rodadas sucessivas, eliminamos aquelas variáveis cujos coeficientes não eram significativos.

Com o auxílio de análises descritivas bidimensionais selecionamos variáveis pelo seu grau de associação com a variável resposta *Uso de Estatística*. Se o licenciado utiliza Estatística em sua profissão, a variável resposta tem valor 1, caso não use, ela tem valor 0. Para atribuir os valores consideramos, para os professores, a apresentação em suas aulas de tópicos de Estatística e, para os demais licenciados, a resposta de pergunta do questionário.

Na Tabela 5 apresentamos as possíveis variáveis preditoras. Note que, como exigência do modelo de Regressão Logística, a pergunta referente ao conhecimento dos PCN foi recodificada em 3 variáveis dicotômicas *Pcn1*, *Pcn2* e *Pcn3*, que combinadas produzem as 4 alternativas de resposta.

Tabela 5. Possíveis variáveis preditoras para a variável resposta *Uso de Estatística*

Variável	Valores
Profissão (<i>Profiss</i>)	1: atua como professor; 0: não atua como professor.
Ingresso (<i>Ingr</i>)	1: por vocação ou gosto pela Matemática; 0: pelo mercado ou facilidade de ingresso.
Conclusão (<i>Conc</i>)	1: por vocação ou gosto pela Matemática; 0: pelo mercado ou facilidade de conclusão.
Atividades-graduação (<i>Ativ</i>)	0: não realizou atividades; 1: realizou atividade (IC, trabalho, etc.).
Importância-Estatística (<i>ImpEst</i>)	Nota inteira atribuída de 1 a 5.
Optativas-Estatística (<i>Optat</i>)	1: fez optativas de Estatística na graduação; 0: não fez optativas de Estatística na graduação.
Lembranças-Estatística (<i>Nlemb</i>)	Número de conceitos lembrados: 0 a 3.
Parâmetros Curr. Nacionais (<i>Pcn1</i> , <i>Pcn2</i> , <i>Pcn3</i>)	(0,0,0): não conhece; (1,0,0): conhecimento em disciplinas da graduação; (0,1,0): conhecimento no trabalho; (0,0,1): conhecimento por interesse pessoal.

Com nível de significância de 5%, fizemos sucessivas eliminações de variáveis não significativas e chegamos a um modelo com três variáveis: *Optat* (valor-p 1,3%), *Profiss* (valor-p 1,9%) e *Ativ* (valor-p 4,3%). Com o mesmo nível de significância, foi testada a ocorrência de interações, duas a duas entre essas variáveis, mas nenhuma delas se mostrou significativa. O modelo final é:

$$P(\text{Usar estatística}) = \frac{e^{-1,30 + 1,48 \text{Optat} + 1,04 \text{Profiss} + 1,05 \text{Ativ}}}{1 + e^{-1,30 + 1,48 \text{Optat} + 1,04 \text{Profiss} + 1,05 \text{Ativ}}}$$

Para avaliar a qualidade do ajuste, utilizamos testes Qui-quadrado de aderência com as medidas *Pearson*, *Deviance* e *Hosmer-Lemeshow*. Os valores-p obtidos foram 0,793 para *Pearson*, 0,675 para *Deviance* e 0,991 para *Hosmer-Lemeshow*, sugerindo que o modelo adotado é aceitável.

A variável *Optat* é a mais associada com a resposta e os comentários a seguir baseiam-se no cálculo da razão de chances correspondentes. Mantidas fixas as variáveis *Profiss* e *Ativ*, o modelo sugere que a chance de o graduado usar Estatística na profissão, se fez disciplinas optativas de Estatística durante o curso de Licenciatura, é 4,4 ($e^{1,48}$) vezes a chance de usar Estatística para aqueles que não fizeram. O correspondente intervalo de confiança (95%) para a razão de chances é [1,4; 14,0], sugerindo que a ampliação da oferta de optativas de Estatística, com um adequado incentivo para que os estudantes escolham cursá-las, pode ser uma alavanca importante para um maior uso de Estatística.

Segundo o modelo, mantidas as outras variáveis constantes, a chance de o graduado professor usar Estatística é 2,8 vezes a chance de usar Estatística entre aqueles que têm outras profissões. O intervalo de confiança (95%) para a razão de chances é [1,2; 6,7]. Os resultados reforçam a importância de uma boa formação em Estatística nos cursos de Licenciatura, de modo que futuros professores possam contribuir para melhorar o conhecimento do assunto entre estudantes dos ensinos Fundamental e Médio com reflexos em um maior letramento estatístico da população em geral.

Ainda, segundo o modelo ajustado, a chance do uso de Estatística entre os estudantes que tinham outras atividades (*Ativ* igual a 1) é, mantidos fixos os valores das demais variáveis, 2,9 vezes a chance do uso de Estatística entre os estudantes que não se envolveram com outras atividades concomitantes com o curso de Licenciatura. O intervalo de confiança (95%) para a razão de chances é [1,0; 7,9]. O fato de realizar atividades, acadêmicas ou não, simultâneas ao curso de Licenciatura parece aumentar a utilização de Estatística pelo egresso em sua vida profissional embora as evidências, nesse caso sejam menos contundentes (pois o valor 1,0 está no limite inferior do intervalo de confiança). As razões para a influência das atividades no uso de Estatística não são evidentes, mas suspeitamos que se devem à maior maturidade alcançada por esses estudantes durante a graduação.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O levantamento realizado junto aos egressos de Licenciatura em Matemática, apesar de não ter características de uma amostra aleatória, pode servir como um retrato das condições profissionais desses formados.

O uso de Estatística pelos egressos é apenas moderado, sendo que os professores utilizam mais Estatística do que os de outras profissões. Entretanto, ainda restam muitos professores de Matemática da escola básica que não apresentam conteúdos de Estatística a seus estudantes. Cabe ressaltar que muitos egressos podem estar utilizando Estatística sem tomarem consciência disso. Por exemplo, a análise de riscos no mercado financeiro é Estatística, mas muitos profissionais tratam como matemática financeira. Graduados que fizeram disciplinas optativas de Estatística aumentam suas chances de usá-la na vida profissional. Por sua vez, para incentivar que os estudantes escolham optativas da área é

importante reforçar a qualidade das disciplinas obrigatórias de Estatística. Elas são, para a maioria desses estudantes, a porta de entrada para o “mundo estatístico”. Sendo, em geral, disciplinas do início da grade curricular, seria desejável que fossem ministradas por docentes com maior experiência e compromisso com a aprendizagem.

Outra iniciativa, que poderia contribuir para uma melhor preparação dos licenciados para o uso de Estatística, seria a criação de uma disciplina obrigatória de Estatística nos anos finais da graduação. Ela teria como objetivo reforçar a relação entre os conceitos teóricos de Estatística, vistos nos anos iniciais, e seu ensino na educação básica. Essa disciplina teria a dimensão de prática de ensino, tal como citado no documento *Diretrizes Curriculares Nacionais para Formação de Professores*, mencionado anteriormente.

Neste trabalho, partimos das informações dos egressos da Licenciatura em Matemática de uma universidade pública com o objetivo de discutir sugestões para aumentar o uso de Estatística na vida futura desses estudantes. Apesar das especificidades envolvidas, esperamos que auxilie numa reflexão similar pelos responsáveis pelos currículos desses cursos nas diversas instituições de ensino superior.

Motivar os docentes que ensinam Estatística nos cursos de Licenciatura em Matemática para que enfatizem conceitos, ao invés de fórmulas, pode ser um passo importante para a boa formação na área dos futuros professores de Matemática. E, num efeito reprodutor, isto poderá resultar em melhor entendimento da informação estatística pela população em geral.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio recebido da Pró-Reitoria de Graduação da Universidade de São Paulo através do Programa Ensinar com Pesquisa. Agradecemos, também, aos professores Julio Singer e Lisbeth Cordani que deram sugestões em versões anteriores desse artigo e ao anônimo revisor pelos comentários e sugestões da presente versão.

REFERÊNCIAS

- Brasil, (2002). Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Parecer n. CNE/CES 1.302/2001. DOU 5/3/2002.
- Cazorla, I. & Santana, E. (2010). *Do tratamento da informação ao letramento estatístico*. Itabuna: Via Litteratum.
- Hosmer, D. W. & Lemeshow, S. (2000). *Applied Logistic Regression, 2nd edition*. New York: Wiley series in Probability and Statistics.
- Louzada, F., Ara, A., Oliveira, C. Z. & Gonçalves, C. V. (2010). Diagnóstico do Ensino da Estatística nas Universidades Públicas Brasileiras: uma descrição de algumas dimensões que compõem o perfil do seu corpo docente. *Revista Brasileira de Estatística- IBGE*, 71(234), 7-42.

- Pamplona, A. S. (2009). *A formação Estatística e Pedagógica do professor de Matemática em comunidades de prática* (Tese de Doutorado, Universidade de Campinas, 2009). Banco de Teses, Unicamp.
- Pamplona, A. S. (2010). A formação estatística do professor de Matemática: a importância da utilização de problemas com enunciados sócio culturalmente contextualizados. In: C. E. Lopes, C. Q. S. Coutinho & S. A. Almouloud (Ed.), *Estudos e Reflexões em Educação Estatística* (pp. 231-244). Campinas: Mercado de Letras.
- Silva, M. A.(2011). A presença da Estatística e da Probabilidade no currículo prescrito de cursos de Licenciatura em Matemática: uma análise do possível descompasso entre as orientações curriculares para a Educação Básica e a formação inicial do professor de Matemática. *Bolema* 24(40), 747-764.
- Viali, I. L. (2008). O Ensino de Estatística e Probabilidade nos Cursos de Licenciatura em Matemática. In: *Anais do SINAPE (Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística)*, Estância São Pedro.

USE OF STATISTICS IN THE OPINION OF GRADUATES IN MATHEMATICS EDUCACION FROM A PUBLIC UNIVERSITY

ABSTRACT

This article describes information and opinion gathered among professionals with Mathematics' education degree obtained from a public university in São Paulo state. The use of Statistics in their professional lives is the main concern of the research, whose analysis was performed using tables, graphs and Logistic Regression. The results revealed that topic most used and remembered by these former students was Descriptive Statistics and, in general, we observed a modest presence of Statistics in their professional activities. Furthermore, we identify the importance to offer optional Statistics disciplines that complement the contents of the first year's two basic disciplines. Besides the study be related to a specific university, we believe that these results would be useful to other Brazilian institutions.

Keywords: *Mathematics education; Use of Statistics; Logistic regression*

USO DE LAS ESTADÍSTICAS EN LA OPINIÓN DE LOS LICENCIADOS EN MATEMÁTICAS DE UNA UNIVERSIDAD PÚBLICA

RESUMEN

En este artículo se describe la información y las opiniones obtenidas de los licenciados en Matemáticas de una universidad pública en el estado de São Paulo. El uso de la Estadística por parte de los graduados en su profesión actual es el principal interés de la investigación, cuyo análisis de los datos se hizo a través de análisis exploratorio de datos y el uso de la regresión logística. El tópico de Estadística Descriptiva es el más recordado y utilizado por los graduados y, en general, se observó una modesta presencia de la Estadística en la vida cotidiana de estos graduados, sean profesores o no. El modelo obtenido por la regresión logística también sugiere la importancia de ofrecer cursos electivos en Estadística con el fin de consolidar los conceptos desarrollados previamente en las dos asignaturas obligatorias del plan de estudios, que involucran ideas básicas de la Probabilidad y la Estadística. A pesar de las particularidades del estudio realizado, sus resultados pueden proporcionar reflexiones para otras licenciaturas en Matemáticas.

Palabras clave: *Licenciatura en matemáticas, Uso de la estadística, Regresión logística*

MARCOS NASCIMENTO MAGALHÃES
Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Brasil
marcos@ime.usp.br

Professor do Departamento de Estatística do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP). Licenciado e Mestre em Estatística pelo IME-USP e Doutor em Engenharia Industrial e Pesquisa Operacional pela Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, EUA. Sua área de pesquisa é Teoria das Filas, Processos Estocásticos Aplicados e Educação Estatística.

RENAN MARCEL BARROS DOS SANTOS

Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, Brasil

renan.marcel.santos@gmail.com

Mestrando na Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FEUSP). Licenciado em Matemática pelo IME-USP. Sua área de pesquisa é Didática e Formação de Professores.

USO DE SOFTWARE, GRUPOS, PROYECTOS Y PRESENTACIONES, PARA ENSEÑAR Y FOMENTAR LA ESTADÍSTICA APLICADA

JORGE LUIS ROMEU

RESUMEN

Para fomentar las aplicaciones prácticas de nuestros alumnos, hemos desarrollado un método pedagógico basado en cinco elementos: la comunicación electrónica con y entre los alumnos, el uso de software estadístico y de simulación, para desarrollar y analizar modelos, el estudio en grupos, la instrucción basada en ejemplos prácticos, y la fijación del conocimiento basada en el desarrollo de proyectos contextuales, generados por los mismos alumnos. Este trabajo discute y presenta ejemplos de dicho método pedagógico, sus resultados y su método de evaluación.

Palabras clave: educación estadística; software estadístico; grupos; proyectos; aplicaciones.

1. INTRODUCCIÓN

1.1. PLANTEO DEL PROBLEMA

El uso de la estadística como herramienta de investigación, así como en las aplicaciones prácticas, está fuertemente influenciado por la metodología con la que se enseña esta asignatura. Esta observación está avalada por el mayor grado en que las aplicaciones estadísticas ocurren en EEUU, donde se enseña estadística con un enfoque práctico, con relación a Europa o América Latina, donde se enfatizan la teoría, los teoremas y sus demostraciones teóricas. Esto lo hemos observado durante nuestros cuarenta años enseñando estadísticas en EEUU, y varios países de Iberoamérica.

Enfatizar la teoría sobre la práctica acarrea dos problemas fundamentales. Primero, los alumnos no se preparan para la difícil tarea de identificar oportunidades donde aplicar la estadística con fines prácticos, y en modificar los modelos teóricos para implementarlos con éxito. Y en segundo lugar, y tal vez más importante, se envía un mensaje al alumnado en el sentido de que las aplicaciones son menos importantes que los desarrollos teóricos.

El objetivo del presente trabajo de educación estadística es el de poner de relieve *la importancia de la metodología, y del enfoque con que enseñamos la estadística*. Porque el énfasis en *una educación teórica contribuye a que las aplicaciones sigan estando a la zaga*, en un continente en desarrollo, que necesita urgentemente de tales aplicaciones para salir de la pobreza y el subdesarrollo económico.

Así, compartimos nuestra experiencia de cuarenta años en el aula, que nos llevan hacia un sistema pedagógico ecléctico, que conjuga la teoría y la práctica. Esta simbiosis está basada en *dos postulados* del eminente educador John Dewey (<http://www.britannica.com/EBchecked/topic/160445/John->

[Dewey](#)). El primero consiste en *aprender, a través de la aplicación* del conocimiento a la resolución de un problema práctico. El segundo es *aprender trabajando en grupo*.

El presente trabajo ilustra dicho sistema pedagógico, que lleva al alumno a tomar en sus propias manos, sin darse cuenta, su propio aprendizaje. Esta es la clave de nuestro método pedagógico.

En el resto del trabajo revisaremos brevemente la literatura. Luego presentaremos en detalle dos cursos de estadística aplicada que hemos enseñado durante muchos años en la escuela graduada de ingeniería de la Universidad de Syracuse, EEUU. Y terminaremos sacando algunas conclusiones.

1.2. UN RAPIDO VISTAZO A LA LITERATURA SOBRE EDUCACIÓN ESTADÍSTICA

La educación estadística es un área extensa, en la que han trabajado con éxito prolíficos colegas de mucha experiencia, entre los cuales citaremos a Batanero, Behar, Bisgaard, Bickel, Bailar, Blumberg, Chance, Gal, Garfield, Joliffe, Locke, McGillivray, Moore, Ottaviani, Sánchez, Pearle, Wilde y Yáñez. Invitamos al lector a buscar sus trabajos, demasiado numerosos para detallarse aquí, revisando los índices del *Journal of Statistics Education* (<http://www.amstat.org/publications/jse/>), la *Revista SERJ* (<https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php?show=serj>) y el *Journal of Educational and Behavioral Statistics* (<http://jeb.sagepub.com/>), entre otras publicaciones, o incluyendo sus nombres en Google Scholar (<http://scholar.google.com/>), buscando en organizaciones profesionales internacionales como IASE (<http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/>), ASA (<http://amstat.org/education/index.cfm>), RSS (<https://www.rss.org.uk/>), y en CAUSEWeb (<https://www.causeweb.org/resources/links.php>).

Específicamente, en el área de la educación estadística para ingenieros encontramos, entre otros interesantes trabajos, los de Hogg et al. (1985), Kettenring (1995), Spedding (1998), y Romeu (1986, 1996, 2006, 2012) quienes han abogado por un mayor uso de las aplicaciones prácticas, proyectos, grupos de estudio y tecnología, en los cursos de estadística, y por su enseñanza en carreras como economía, psicología, sociología, etc., que han de utilizarla intensamente. Para más información sobre estadística aplicada ver los sitios: ASA (<http://amstat-online.org/spes/>), ASQ (<http://asq.org/statistics>), ENBIS (<http://www.enbis.org/>), y IASI (<http://www.contraloria.gob.pa/inec/IASI/presentation.html>).

2. UN PRIMER EJEMPLO DE CURSO: ECS526

2.1. CARACTERÍSTICAS DEL CURSO

La enseñanza de la estadística a estudiantes de ingeniería tiene rasgos especiales. Muchos no se sienten particularmente atraídos hacia esta materia, y piensan que se encuentra fuera de su área de interés profesional. Sin embargo, muchos ingenieros trabajan con datos reales y, por tanto, la aleatoriedad les es ineludible. Por otra parte, la mayoría de los estudiantes de ingeniería toman solo

uno, o a lo sumo dos cursos de estadísticas durante su carrera, a menudo con una orientación teórica y sobrecargados de temas que apenas tienen tiempo de cubrir. Ninguna de estas características ayuda a que éstos, se interesen por la estadística.

Tal fue la situación que enfrentamos al iniciar el curso ECS526, *Estadística Industrial*, del programa de maestría de la facultad de Ingeniería de la Universidad de Syracuse, Nueva York. ECS526 (<http://web.cortland.edu/romeu/ECS526Summer.pdf>) fue diseñado para proveer a los estudiantes el bagaje estadístico necesario para seguir con éxito otros cursos de ingeniería industrial. Además de proporcionarles herramientas estadísticas, nuestro curso enseñaba otras habilidades de carácter general, muy importantes en la práctica profesional, tales como el trabajo en grupo, la presentación de los resultados, el uso de software, etc.

2.2. DESCRIPCIÓN DEL CURSO

ECS526 cubría, en sus 15 semanas de clase, una panorámica de la estadística industrial. Durante las primeras cinco semanas revisamos la probabilidad básica (pre-requisito del curso, que no siempre poseían los alumnos), incluyendo eventos, variables aleatorias continuas y discretas, distribuciones muestrales, y transformaciones). Las siguientes cinco semanas se dedicaban a la estadística inferencial, cubriendo intervalos de confianza, pruebas de hipótesis paramétricas y no paramétricas, y control de calidad. Las últimas cinco semanas de curso daban una introducción a la modelación estadística, cubriendo regresión y análisis de varianza y covarianza. Después de cada una de las dos primeras partes del curso se daba un examen. Y tras la última, se pedía un proyecto de aplicación extenso. Los interesados, pueden encontrar el Schedule de dicho curso, así como las lecturas semanales adicionales, en <http://web.cortland.edu/romeu/ecschedul.html>.

Las clases eran nocturnas, una vez por semana, durante tres horas. Los estudiantes, en su mayoría, eran ingenieros en ejercicio y asistían a clase después del trabajo. Solo una minoría eran estudiantes graduados de tiempo completo. Y todos tenían aprobado un primer curso de estadística, no siempre adecuado o bien aprendido, que era necesario revisar.

Usábamos los textos *Engineering Statistics* (Walpole, Myers y Myers, 1998) y *Statistical Analysis of Materials Data* (Romeu y Grethlein, 2000). El primero cubría la teoría del curso, y el segundo desarrollaba aplicaciones prácticas de estadística en ingeniería. Además, utilizamos dos docenas de lecturas complementarias, consistentes en tutoriales de estadística industrial y aplicada, que hemos desarrollado durante años de labor como investigadores y consultores del Reliability Information Analysis Center (RIAC, antiguo RAC: <http://theriac.org/>), y que se encuentran disponibles en la red: <http://web.cortland.edu/romeu/urlstatlists.html>.

Las innovaciones del curso respondían a necesidades bien específicas que confrontábamos en el aula, y representaban la solución práctica que dimos a las mismas. En Romeu (1998), o en la red: http://www.minitab.com/uploadedFiles/Shared_Resources/Documents/Articles/pizza.pdf, algunas son discutidas, pues ilustran remedios a aquellos estudiantes que traen un bagaje matemático inadecuado, malos hábitos de estudio, o sufren de *mate-fobia*. Tales soluciones incluyen el uso de materiales especiales, como los tutoriales en la red, que proveen ejemplos numéricos prácticos desarrollados en minucioso detalle, adicionales a los presentados en clase, así como software estadísticos (Minitab, Excel) para ayudar con los tediosos cálculos numéricos, dejando libre al alumno para concentrarse en el proceso del razonamiento estadístico (*statistical thinking*).

El currículo ECS526 era ambicioso y amplio, para quince semanas de clase. Por tal motivo dividimos sus contenidos en lo que llamamos *clases de equivalencia de tópicos*. Cada *tópico* (Ej. intervalos de confianza) forma una *clase* de la que escogemos un *representante* (Ej. el intervalo para la media poblacional de muestras grandes), el cual discutimos a fondo en el aula. Como tarea asignamos el desarrollo de otros miembros de esta *clase* (Ej. los intervalos para muestras pequeñas, para proporciones, para la diferencia de dos medias o de dos proporciones, para la varianza, etc.) a los distintos grupos de estudio. Y éstos, utilizando como guía el desarrollo hecho para el *representante*, resuelven sus tareas. Así, los estudiantes ven ejemplos de varios casos de dicha *clase*.

Para luchar contra la pasividad y falta de interés de algunos alumnos, utilizamos proyectos contextuales, cuyos temas son escogidos o generados por los integrantes de cada grupo de estudio, según sus inclinaciones. Los grupos de estudio aplican las nuevas técnicas estadísticas aprendidas cada semana a tales proyectos, y luego presentan sus resultados en clase.

Con este enfoque buscábamos alcanzar importantes objetivos. Primero, y fundamental, está el aprendizaje de la estadística industrial. Luego, los alumnos aprenden a trabajar en equipos multidisciplinarios, a identificar y redefinir estadísticamente problemas reales, a sintetizarlos y a resolverlos, y finalmente, a aplicar sus soluciones en términos prácticos.

Estos objetivos adicionales pueden resumirse en cinco puntos: (1) comunicar con fluidez sus resultados (oralmente y por escrito), (2) encarar y resolver la ambigüedad, (3) trabajar en equipos multidisciplinarios, (4) trabajar individualmente, y (5) aprender a adquirir conceptos nuevos por sí mismos, elemento básico de la *educación de por vida*. Estas cinco importantes habilidades adicionales habrían de servir a los alumnos para resolver, tanto los problemas de estadística y otras materias universitarias, como los de la vida diaria.

2.3. MÉTODOS PEDAGÓGICOS

El curso ECS526 se basa en *cinco pilares* fundamentales: (1) aprendizaje en grupo, (2) el uso de proyectos contextuales, (3) el uso de software estadístico y de simulación, (4) el uso de medios modernos de comunicación (correo electrónico e Internet), y (5) la presentación del material aprendido (a sus colegas de clase).

El aprendizaje en grupo ayuda tanto a los alumnos aventajados como a los que no lo son, pues la mejor manera de aprender es, precisamente, enseñando. Los alumnos aventajados actúan como *monitores* de su grupo. No todos los alumnos se traban en el mismo problema, y generalmente algún miembro del grupo puede ayudar a los demás, explicando aquellos puntos donde existe confusión.

Los proyectos contextuales trabajan sobre temas escogidos por los alumnos de un grupo de estudio, y ofrecen al menos dos ventajas. Primero, por ser de su interés, los alumnos obtienen una mayor motivación. Además, los alumnos ya conocen el problema básico, y solo tienen que concentrarse en resolver la parte estadística utilizando las técnicas aprendidas. Esto refuerza el conocido principio pedagógico consistente en *dar al alumno una sola dificultad a la vez*.

El uso de software (en particular, estadístico y de simulación) resuelve dos problemas. Permite al profesor dar un mayor número de ejemplos prácticos, pues no tiene que resolverlos a mano. Y permite al alumno concentrarse en el razonamiento estadístico.

Facilitar la comunicación rápida entre alumnos, así como la de estos con el profesor, es fundamental y particularmente útil en ECS526. Muchos alumnos tienen otras obligaciones (trabajo de tiempo completo, familia, etc.) y solo están en la universidad durante la clase. La página Internet y el correo electrónico resultan de gran utilidad para mantenerlos al tanto.

Las presentaciones estudiantiles también tienen dos finalidades. Primeramente, dan al alumno un incentivo para preparar su material, ya que generalmente estos gustan de lucirse ante sus colegas. Por otra parte, una de las habilidades más importantes del profesional del siglo XXI es la de poder comunicar sus resultados, sintética y efectivamente.

En la sección siguiente ilustraremos estos conceptos vía el curso ECS526, discutiendo varios problemas de implementación, y las soluciones que hemos encontrado.

2.4. DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES

El trabajo en *grupos de estudio* es de suma importancia y comienza el primer día de clases. Por tanto la composición de estos es decisiva. Nuestra experiencia nos lleva a formar grupos de cuatro a seis estudiantes, utilizando el listado de clase. Evitamos crear grupos demasiado grandes (en los que algunos miembros hacen poco, o nada), o demasiado pequeños (con el consiguiente exceso de trabajo).

El uso del listado no solo ahorra tiempo y discordia, sino que evita la formación de grupos con los alumnos más populares, o más estudiosos. Buscamos grupos balanceados, y de calidad homogénea, lo que verificamos a través de ANOVAs con las notas de sus integrantes, en el análisis de los datos.

Los estudiantes asignados a cada grupo eligen un líder, que será el contacto con el profesor y coordinara su trabajo. Existen además otras funciones como secretario, investigador de información en la red, especialistas en PowerPoint, etc., que se rotaran entre los miembros del grupo. Estos reciben una tarea y la descomponen en módulos que asignan a sus integrantes, quienes los resuelven individualmente. Luego, entre todos, sintetizan los resultados obtenidos y preparan una presentación oral (PowerPoint), y escrita (informe), presentadas en clase.

Cada clase dura tres horas. Dedicamos la primera media hora, y la media hora después del corto receso a mitad de la clase a la presentación, por parte de los alumnos, de las tareas de sus grupos. Así, una hora de las tres lectivas, se dedica a la discusión y al repaso del material visto en la clase anterior. El resto del tiempo, se dedica a impartir material nuevo, que a su vez será revisado en la clase siguiente a través de las presentaciones de los grupos. Como resultado, los estudiantes ven el material del curso en dos sesiones sucesivas de clase.

Las tareas y ejemplos resueltos, tutoriales estadísticos y Execs (ejecutables en Minitab) son enviados por Email a los estudiantes, quienes las realizan y devuelven al profesor, por la misma vía. Alternativamente, tales materiales son puestos en la página red del curso.

Los *Execs* son pequeños programas en Minitab o Excel, creados por el profesor para ser corridos por los alumnos usando simples comandos. Esta tecnología moderna permite a los alumnos ejecutar el Exec, siguiendo las instrucciones adjuntas que explican cómo usarlos, y así estudiar solos, y entender mejor, los problemas asignados de tarea.

Por ejemplo, utilizamos un Exec para ilustrar las transformaciones de variables aleatorias. Primero generamos con Minitab 1000 datos Exponenciales con media μ , y los ponemos en una columna (X). Luego, en otra columna (Y) dividimos el doble de la primera por μ ($Y = 2X/\mu$). Sabemos que la transformación Y es una variable Xi Cuadrado, con dos grados de libertad. Entonces, generamos con Minitab, en otra columna (Z), una variable Xi Cuadrado, con dos grados de libertad. Ordenamos ambas columnas (Y, Z) ascendentemente y graficamos Y vs. X, obteniendo una recta de pendiente unidad. Calculamos, tanto para Z como para Y, las medias, varianzas, medianas, Max, min, etc., verificando como son muy similares. Siguiendo este ejemplo, los alumnos pueden realizar otras transformaciones de variables.

El trabajo en grupos es la experiencia más popular entre los estudiantes, según nos han hecho saber en sus evaluaciones de curso. Los proyectos contextuales son otro elemento popular para desarrollar el interés de los alumnos en el curso. Pues ellos mismos escogen los temas según su perfil educacional y

profesional. Un ejemplo del proyecto final del curso ECS526 (mono-filamento) puede verse en la red: <http://web.cortland.edu/romeu/FinProjG1F03.pdf>

Dichos proyectos pueden provenir de tópicos de otros cursos (Ej. biología, química) que necesiten de la estadística para su resolución. Los alumnos interesados escriben una propuesta, explicando el problema básico y su resolución estadística, demostrando como el proyecto cumple los requisitos del ECS526. Entonces, nosotros contactamos al profesor de la otra materia y exploramos su interés en que nuestro común alumno realice tal proyecto. Si el otro profesor acepta, proseguimos con dicho proyecto. Generalmente, el otro profesor accede, y aun da crédito académico a estos alumnos, en su propio curso.

Existen dos fuentes importantes de proyectos contextuales: el área del estudiante (muchos son profesionales en ejercicio y descubren problemas interesantes en su propio trabajo) y la consultoría e investigación del instructor del curso. Los proyectos finales constituyen una suerte de *obra maestra*, que unifica los conocimientos adquiridos en el curso mediante su aplicación a la resolución de un problema completo en las áreas respectivas de interés.

Al comienzo del curso, los estudiantes reciben la lista de condiciones que debe reunir un proyecto final, que incluye el tener suficientes datos para poder implementar pruebas de dos muestras, análisis de varianza y regresiones múltiples. Y requiere que todos los supuestos de cada modelo o prueba utilizados en el proyecto (ej. normalidad, homocedasticidad, e independencia) sean investigados y verificados cuidadosamente, al menos gráficamente.

Cada grupo elige, dentro de las primeras cinco semanas del curso, el tópico de su proyecto final. Si no lo deciden, o el proyecto propuesto no es aceptable, entonces el profesor les provee otro tópico, mutuamente aceptable. Por ejemplo, se les da una variante de algún problema de consultoría o investigación que hayamos tenido, que implementamos a través de un modelo de simulación en GPSS, que será luego corrido por los alumnos del grupo para obtener los datos.

Los proyectos finales se entregan a fin de curso y constituyen el 20% de la evaluación. Cada grupo hace una presentación en PowerPoint, y entrega un reporte escrito, en un disco CD discutiendo el problema, su resolución, y los detalles de las mismas.

El software estadístico (Minitab) facilita a los alumnos realizar los cálculos, y el de simulación (GPSS), les permite obtener los datos para los análisis. Ambos software (Minitab y GPSS) fueron escogidos por estar (1) asequibles en la institución, (2) ser fáciles de aprender y usar, (3) incluir todos los métodos del curso, y (4) ser programables. Los estudiantes también usan Excel y SAS, lo que les permite comparar ventajas y desventajas respectivas.

Enfatizamos que una de las más importantes características de cualquier software, para ser utilizable en la docencia, es su capacidad de programación. Tanto Minitab como Excel (que hemos usado en instituciones carentes de Minitab) permiten programar tutoriales y ejercicios ilustrativos que

luego se envían a los alumnos. Estos entonces los ejecutan por su cuenta, aumentando así su experiencia práctica.

Por ejemplo, enviamos un Exec de regresión lineal en Minitab, en el que los alumnos eligen los valores de la pendiente, el intercepto, y la desviación típica del error del modelo, así como el número de pares de puntos de la muestra. El Exec entonces genera una muestra aleatoria de pares de puntos, y calcula los estimadores de la regresión lineal, hace las pruebas estadísticas, los gráficos etc. Los alumnos entonces cambian algunos parámetros (aumentan o disminuyen la desviación típica, o el número de puntos, o sea la incertidumbre o cantidad de información), y comparan los resultados de tales cambios en el análisis estadístico.

Similarmente ocurre con el uso de GPSS. Los estudiantes solo tienen que aprender a correr los programas que el profesor crea y les asigna, no a programarlos. Ejemplos de su uso en clase incluyen la simulación de un sistema de transporte, de un sistema escolar, de una línea de producción, etc. Se les dan dos alternativas en GPSS (Ej. la simulación del taller con un solo torno rápido, o con dos tornos lentos). Y se pide que obtengan, simulando varias muestras independientes de cada configuración, los parámetros del sistema (Ej. flujo total de trabajos, tiempos en cola o en el sistema, utilización) y luego que los comparen mediante modelos de ANOVA, regresión, de pruebas de hipótesis, etc. Y escojan el más *eficiente* de las dos alternativas GPSS propuestas.

Cada grupo recibe un problema distinto, obtenido al variar: la configuración del sistema (en serie, o paralelo), el valor de las tasas del proceso, de llegada, el número de elementos, etc. Además, se da a cada grupo de estudio una *semilla* distinta para el simulador GPSS. Así, los grupos pueden cooperar abiertamente, aprendiendo más, sin que ocurran plagios.

El uso del Internet y del correo electrónico es fundamental para la comunicación, entre profesor y alumnos, así como entre alumnos y entre grupos. Toda la información del curso (tutoriales, ejercicios, programas, tareas, soluciones, guías de estudio, etc.) se manda y se recibe (periódicamente) vía Email, o se pone en la página red del curso. Tener una cuenta de correo electrónico con acceso al Internet es un pre-requisito para participar en el curso.

El instructor mantiene una base de datos con los mensajes que se mandan durante el curso, y estos se van refinando y actualizando cada nuevo semestre. Las preguntas de los estudiantes se reciben y contestan por Email. Si surge la misma pregunta varias veces, entonces se circula la respuesta, o se pone anónimamente en un *fichero de preguntas y respuestas frecuentes* en la red. La mayoría de nuestros estudiantes solo viene a la universidad una vez por semana, pero tiene acceso al Internet desde sus casas, o desde sus trabajos, este esquema resulta muy conveniente. En países del Tercer Mundo, este procedimiento puede resultar más difícil, ya que hay problemas con la electricidad, con el acceso al Email, con su costo, etc. como hemos verificado en nuestras visitas a la región.

Recientemente han surgido nuevos software de estadísticas, de libre acceso en la red, y que proveen una útil herramienta de trabajo. Un buen ejemplo es 'R' (<http://www.r-project.org/>). La información para su operación, así como ejemplos y tutoriales, está en la mencionada página Internet. Nosotros lo hemos utilizado con éxito en algunos cursos, cuando no existe Minitab.

Todos nuestros tutoriales están libremente asequibles en la red. Además, existe una versión impresa, que los alumnos pueden adquirir en la librería de la universidad, a un costo nominal. Los tutoriales incluyen distribuciones, bondades de ajuste, pruebas de hipótesis, intervalos de confianza, métodos de control de calidad, análisis secuencial, bayesianos, y de confiabilidad, etc. Cada tutorial comienza poniendo en contexto el problema y su aplicación. Luego, se da la teoría básica, seguida de un ejemplo numérico, descrito paso a paso, que incluye gráficas y formulas, con el que se ilustra la teoría. A menudo, también se incluye un contra-ejemplo. Por último, se incluye una lista de referencias, para los interesados en profundizar el tema.

Las presentaciones semanales en clase, de los grupos de estudio, son fundamentales. Proyectos cortos y problemas prácticos sencillos (<http://web.cortland.edu/romeu/ecshw.html>) son resueltos por los grupos. Los alumnos presentan (1) el problema, (2) el método de resolución, (3) los resultados, y (4) sus conclusiones. Aprender a resumir y separar lo básico de lo superfluo, es parte de los objetivos del curso. La evaluación de todas las presentaciones de cada grupo, constituye otro 20% de la evaluación final de cada alumno.

La nota final del curso consta de tres factores: dos exámenes parciales (cada uno vale 30% de la nota final), presentaciones y tareas semanales (20%), y el proyecto final (20%). Los exámenes tienen dos partes: una individual, resuelta en clase, de dos horas de duración. Y otra colectiva, resuelta en casa (take-home), basada en un proyecto resuelto por computación y con ejercicios más largos, para entregar la semana siguiente. Estas dos partes contribuyen un 70% y 30%, respectivamente, a la nota total del examen. La participación de cada estudiante en el trabajo de su grupo, es lo que le da el derecho a tomar los dos exámenes parciales.

La parte resuelta en clase de los exámenes parciales contiene problemas en forma de descripción verbal, en los cuales los alumnos deben identificar la prueba estadística a utilizar, extraer los datos para su aplicación, etc. La parte de resolución colectiva en casa (take-home), incluye problemas más complejos. Por ejemplo, deben hacer transformaciones, calcular los tamaños de muestra y la potencia de las pruebas de hipótesis, comparar dos alternativas, etc. Además, deben desarrollar un mini-proyecto que requiere realizar experimentos corriendo programas GPSS, y luego aplicar procedimientos estadísticos a los datos así obtenidos, usando el Minitab. Por último, redactan un informe resumiendo sus trabajos.

El primer examen cubre probabilidades, y se imparte al final de la quinta semana. El segundo cubre pruebas de hipótesis y se imparte al final de la décima. La tercera parte del curso se evalúa a través del proyecto de fin de curso y cubre, fundamentalmente, modelación estadística: regresión múltiple, y análisis de varianzas y de covarianzas.

Con respecto a cada pregunta, las descomponemos en partes sencillas, de forma que su valor total sea igual al doble del número de partes o componentes. Si la respuesta de un componente es correcta, obtiene dos puntos; si la respuesta es parcialmente correcta, obtiene un punto; y si la respuesta es incorrecta, o se deja la pregunta en blanco, no obtiene puntos. Esto minimiza la subjetividad y simplifica la calificación de los exámenes.

Al final, hacemos una curva con las notas de todos los exámenes. Como las clases son grandes, las curvas resultan unimodales y cuasi-simétricas. La nota de B (aprovechado en la escuela graduada) corresponde a la media o mediana. Entonces, usamos los cuartiles o la desviación estándar para establecer las notas de A y de C (sobresaliente y aprobado). Las notas inferiores a dos desviaciones estándares corresponden a los reprobados. Este sistema nos permite ser exigentes en los exámenes, y calificar a los alumnos de acuerdo a como responde la clase completa al examen presentado (por si acaso se nos va la mano).

Este sistema de exámenes y de trabajos de clase está diseñado para recompensar al alumno que trabaja consistentemente en todos los componentes del curso, y aprende los requisitos del mismo. El alumno que descuella, obtiene sobresaliente; y los que trabajan poco, reprueban.

Los cursos graduados solo tienen tres calificaciones (A, B y C) mas, la de reprobado (F). El discriminador del curso ECS526 reside en las pruebas semanales y en las partes resueltas en clase, de los dos exámenes parciales, cuyo trabajo es individual.

2.5. EVALUACIÓN DEL MÉTODO UTILIZADO

Para evaluar nuestros métodos pedagógicos ofrecemos dos tipos de medidas de rendimiento. Primero, presentamos datos numéricos que reflejan las notas alcanzadas por nuestros alumnos. Luego, presentamos algunos comentarios sobre ECS526, expresados por nuestros alumnos en sus evaluaciones de curso, así como por otros profesores de la universidad con los que hemos colaborado.

Los alumnos son calificados sobre una curva, centrada en una nota B+ (unos 87 puntos sobre 100). Con tal sistema de evaluación, no es fácil comparar las medias de cursos sucesivos. Mas, como la variación no es afectada, analizamos la varianza entre los cursos, utilizando el *coeficiente de variación* (CV) de varias medidas de rendimiento estudiantil (Ej. los promedios de pruebas semanales, de tareas, y de los exámenes intra-semestrales). Esto nos ayuda a evaluar cuán homogéneos (cuanto varían alrededor de dichas medias) son los resultados.

Tabla 1: Coeficiente de Variación de los resultados estudiantiles.

Año	Prueba1	Prueba2	Tareas	ProyFin	NotaFinal
2007	20.74%	16.17%	*	*	16.72%
2004	26.18%	25.31%	5.21%	6.05%	12.95%
2003	33.00%	48.61%	9.92%	17.56%	18.71%
2002	21.10%	25.67%	5.21%	5.92%	12.02%
1999	22.19%	44.15%	20.90%	13.23%	16.94%

Observemos en general una mejora en los CV, a partir de la primera vez que enseñamos ECS526 utilizando las nuevas técnicas (1999), con relación a las evaluaciones de cursos más recientes, en los que estas técnicas se habían perfeccionado, y se implementaban en toda su plenitud. Esto sugiere que los estudiantes obtienen un conocimiento más homogéneo, y aprenden mejor. Postulamos que este resultado es producto del trabajo en grupos de estudios, y de la utilización de proyectos contextuales.

Otra medida de rendimiento para evaluar los resultados de este sistema de enseñanza es subjetiva aunque no menos válida. Está basado en las evaluaciones de curso, y en emails de nuestros alumnos, que nos dicen cómo están aplicando los materiales aprendidos, y en los comentarios de profesores con quienes hemos interactuado, que nos dan su opinión con respecto a la cantidad y calidad del trabajo que nuestros alumnos realizaron en los proyectos conjuntos de nuestros dos cursos.

Comentarios frecuentes en nuestras evaluaciones de curso incluyen: (1) les gusta *presentar en clase los resultados* de sus proyectos; (2) *aprenden, unos de otros*, de estas presentaciones; y (3) han *trabajado más, en este curso*, que en la mayoría de los otros que han tomado en la universidad, pero (4) lo han hecho con gusto *movidos por el interés en ver los resultados de sus investigaciones*.

Los profesores con los que hemos interactuado por haber, nuestros comunes alumnos, desarrollado un proyecto nuestro sobre un tema de ellos, han quedado bien impresionados con el trabajo realizado, y han considerado aplicar algunas de estas técnicas (Ej. proyectos contextuales) en sus propios cursos.

Finalmente, algunos alumnos, profesionales en empresas locales, nos mantienen informados de cómo aplican los conocimientos aprendidos, y nos consultan sobre proyectos que están realizando.

3. UN SEGUNDO EJEMPLO: MFE634

3.1. DESCRIPCIÓN DEL CURSO

A partir del año 2007, en sustitución del curso ECS526 comenzamos a enseñar MFE634, *Ingeniería de la Calidad* (<http://web.cortland.edu/romeu/MFE634SylS14.pdf>) que es también de nivel post-graduado. En MFE634 utilizamos la misma metodología educativa explicada anteriormente: grupos, proyectos contextuales, software de apoyo, presentaciones, etc. La mayor diferencia entre ambos cursos radica en que, ahora, tenemos acceso y utilizamos mucho, el software de administración *Blackboard* y *Angel*.

Al igual que en ECS526, la evaluación de los alumnos MFE634 incluye dos exámenes, un proyecto final, pruebas y tareas semanales, presentaciones en clase, y trabajo en grupos estudiantiles, lo cual está explicado en gran detalle (en inglés) en el Syllabus, descrito en el párrafo anterior.

Cada grupo escoge uno de los *ocho temas de proyecto final pre-establecidos en el Syllabus*. Pero su *implementación* es de libre elección por cada grupo (Ej. si el tema es una fábrica de maquinaria, su implementación implicaría escoger la fábrica NPG, de cajas de velocidad de vehículos, o la de equipo pesado IH). Análogamente al ECS526, los grupos tienen que implementar todos los procedimientos estudiados en el curso, sobre el tópico de proyecto final escogido. Un ejemplo de Proyecto Final (cervecería) se encuentra en la red: <http://web.cortland.edu/romeu/PortfolioG3S08.pdf>.

También en MFE634 tenemos dos presentaciones estudiantiles por clase, de media hora cada una, donde se revisan los tópicos de la clase anterior. Las presentaciones de los distintos grupos de estudio son colgadas en *Blackboard*, para uso de todos los estudiantes. Y utilizamos el resto del tiempo para cubrir material nuevo y dar una corta prueba, que obliga a los alumnos a mantenerse al día en los temas y materiales de estudio. Un ejemplo de presentación en Power-Point de un proyecto de fin de curso (de un Sistema Escolar), puede verse en: <http://web.cortland.edu/romeu/SchoolProjS09.pdf>.

Los tópicos estadísticos incluyen: diseño de experimentos (para su aplicación en Six Sigma); Gage R&R (una variante del análisis de varianza, de efectos aleatorios, aplicable a evaluar los sistemas de mediciones); funciones características de operación (para obtener planes de muestreo de aceptación); métodos de control de calidad; análisis de la capacidad del proceso, y análisis de confiabilidad.

Los software de apoyo incluyen el *Minitab*, para los cálculos y análisis estadísticos, y el *Quality Companion*, un software especializado de la Ingeniería de la Calidad, desarrollado por Minitab, que incluye muchos procedimientos específicos para estas aplicaciones especializadas.

Hacemos un examen intra-semesteral, también de dos partes. La de clase, es tradicional y vale un 70% de la nota total. La colectiva, por grupos estudiantiles, requiere resolver varios problemas en la computadora, analizar sus resultados y concluir dando sus recomendaciones, vale el 30% restante.

La nota final del curso incluye el examen intra-semestral, el proyecto final, y el promedio de las pruebas semanales (30% cada uno); las presentaciones y tareas semanales proveen el 10% restante. La distribución de las notas del curso (A, B y C, mas reprobados) es similar a la explicada para ECS526.

3.2. EVALUACIÓN DEL CURSO

La evaluación del curso MFE634 tiene las mismas características que la del MCS526. Como las notas están centradas, utilizamos los coeficientes de variación (CV) para medir la dispersión de los resultados estudiantiles. Además, usamos el valor P de los ANOVAs, implementados entre las medias de los grupos de estudio, para cada parámetro de interés, como medidas de rendimiento del curso.

El CV indica el grado de dispersión (o concentración) de las notas, que sugiere cómo aprenden los alumnos. El valor P indica si los grupos de estudio, organizados al azar y compuestos de cinco o seis alumnos, obtienen resultados similares –o sea, que no hay grupos integrados por estudiantes *buenos*, y otros por estudiantes *malos*, lo cual sería problemático para el aprendizaje. Los parámetros de interés, al igual que en MCS526, son las pruebas, las tareas y la nota final del curso.

Tabla 2: Coeficiente de Variación y Valores P para ANOVAs entre Grupos de Estudio.

Año	Tareas	ValorP	Prueba1	ValorP	Prueba2	ValorP	NotaFinal	ValorP
2013	12.89%	0.21	7.16%	0.00(*)	8.64%	0.72	5.73%	0.07
2012	7.29%	0.16	7.32%	0.54	15.87%	0.79	7.19%	0.51
2011	9.91%	0.24	9.20%	0.96	13.86%	0.21	6.76%	0.34
2010	11.22%	0.55	10.23%	0.69	13.92%	0.53	4.73%	0.83

En su mayoría, los promedios de las medidas de rendimiento entre grupos de estudio y entre cursos son similares. Si el Valor P de los ANOVAs entre grupos es no-significativo, entonces no existen diferencias entre las medias de los grupos de estudio. Análogamente, si las dispersiones de las notas de los distintos parámetros de interés, indicadas por los CV, son pequeñas y permanecen similares, entonces dichos CV sugieren un aprendizaje homogéneo entre los estudiantes del curso.

Solo en el caso de la Prueba #1 del año 2013 (indicada con * en la Tabla 2), el ANOVA detecta una diferencia significativa entre grupos de estudio. En dicho curso, los únicos dos estudiantes reprobados pertenecieron al mismo grupo.

Al igual que con el curso ECS526, proponemos que estos resultados se deben a la metodología de grupos, proyectos contextuales y presentaciones en clase.

4. DISCUSIÓN

El presente trabajo sobre métodos de educación en estadística aplicada, tiene su origen en nuestra experiencia de hace cuatro años, organizando una propuesta de PASI (Pan-American Advanced Studies Institute) al National Science Foundation (NSF), para modelar estadísticamente problemas ecológicos y medioambientales, utilizando los contactos en EEUU y América Latina del Proyecto Juárez Lincoln Martí, de Educación Internacional (<http://web.cortland.edu/matresearch>).

Analizando varias publicaciones, llegamos a la conclusión de que nuestra región no había demostrado todavía, a través de suficientes investigaciones y publicaciones, la experiencia necesaria para obtener el apoyo del NSF en dicho campo. Existían muchas publicaciones en las áreas de estadísticas de gobierno y educación estadística, así como en desarrollos teóricos. Pero pocos artículos en áreas de estadística aplicada, y en particular en las de estadística industrial, agroeconómica y ambiental. Había pues, que ayudar fomentar un mayor número de publicaciones y trabajos aplicados.

La *Revista Colombiana de Estadística (RCE)*, de la Universidad Nacional de Bogotá, Colombia, nos ofreció ser *Editor Invitado* de un número especial (en español) sobre aplicaciones en la industria (http://www.emis.de/journals/RCE/RevistaColombianadeEstadistica_v34n2.pdf). Poblar un número de RCE con tales aplicaciones, aun haciendo un llamado para someter artículos en toda América Latina y España, no resultó fácil. Porque todavía no eran muchos los trabajos en esta importante área.

La publicación de trabajos de aplicación estadística en español tiene una relevante importancia. Primeramente, se reconoce el mérito de estos trabajos, a veces soslayados por el énfasis que hacemos en la teoría. Luego, proporciona, a profesores y alumnos de la región, una colección de trabajos para utilizar en clase, y para referencias. Por último, tales publicaciones dan válida salida a nuevas tesis de maestría y doctorado, escritas en español, por valiosos colegas y estudiantes formados en sus propios países, y que por tanto no hablan ni escriben correctamente el inglés, y que por ese motivo encuentran dificultades para ser publicadas en revistas en tal idioma.

En posteriores contactos con colegas de otras revistas estadísticas de la región (Ej. las de IASI y de SOCHE) intercambiamos útiles ideas y conceptos con respecto a esta difícil situación. Y ahora las publicaciones aplicadas en español son más frecuentes.

La mencionada experiencia reforzó nuestra convicción, que es también compartida por varios otros autores (E.g. Naya, Ros y Zapata, 2012) de que en Ibero-América la educación estadística es demasiado formal y teórica, que esto fomenta poco sus aplicaciones, y que es necesario modificar la enseñanza de esta asignatura. A este nuevo empeño dedicamos el presente trabajo.

Por otra parte, reconocemos que cambiar no es fácil. En un trabajo anterior sobre infusión de tecnología, titulado Administración del Curso, o en inglés, Classroom Administration (Romeu, 2002, o

en la red: <http://web.cortland.edu/romeu/courseart.html>) discutimos en detalle algunas efectivas maneras de implementar nuevas técnicas y métodos de enseñanza, y sobrevivir tal experiencia.

También presentamos un análisis sobre el uso de software de administración, considerando costos y beneficios. Primero, utilizando solo programas que vienen con Microsoft Office (Ej. Excel, Word, Power-Point, Email, Internet), y por tanto no requieren de un costo adicional. Este fue el procedimiento que usamos en ECS526. Y segundo, utilizando programas especiales de administración de cursos como Blackboard y Ángel, que utilizamos con éxito en el curso MFE634, así como en el curso MGS411 (<http://web.cortland.edu/romeu/MGS411.pdf>) de investigación de operaciones, y que enseñamos en SUNY utilizando las metodologías educacionales arriba explicadas. Esto es especialmente importante para muchas instituciones, cuyos menguados presupuestos a menudo restringen la adquisición de tales tecnologías de administración, y que deben ser compradas separadamente a un costo bien elevado.

Tras estudiar métodos pedagógicos nuevos e interesantes, surge inmediatamente la pregunta: qué hacer con el material que tan laboriosamente hemos creado durante muchos años de docencia, y que no dejan de ser también excelentes? Por la naturaleza finita de tiempo y espacio, solo es posible añadir un máximo de material al curso, lo que nos lleva a seleccionar cuáles materiales *viejos* vamos a sacar, cuáles materiales *nuevos* vamos a incluir, y cuáles ellos, vamos a *combinar, modificar y adaptar*.

Dos criterios para llevar a cabo esta difícil selección, son los siguientes: (1) siempre la tecnología y la metodología al servicio de la enseñanza y al mejor aprendizaje del alumno, y nunca al revés, y (2) es más eficiente adaptar que copiar. Cada educador encuentra en su trabajo, condiciones singulares. Resulta más efectivo, pues, ser *un buen original, que una mala, segunda copia*.

Algunos de los materiales de clase pueden pasarse a formato digital (*escanearse*) y ponerse en la red, como hacemos actualmente en nuestros cursos, obviando así la distribución de hojas en clase, y facilitando su lectura por los alumnos, en su propio tiempo. Otros materiales pueden pasarse a *ficheros Word y pdf*. Una ventaja de dichos ficheros es su fácil actualización y reutilización. Los exámenes pueden combinarse, actualizarse, o cambiarse más fácilmente haciendo posible su archivo y manipulación, y la creación de *una útil base de datos*.

Un requisito para lograr todo esto es el dominio del teclado y la *mecanografía*. El uso del Internet o Email, y la construcción de ficheros en Word, requieren un buen mecanógrafo. Quien no lo sea, tarde o temprano se dará por vencido. Pues le resultara demasiado lento el escribir instrucciones en el teclado o manejar la computadora que los ejecute. Esta habilidad, y un *conocimiento básico del idioma inglés*, para tener acceso al abundante material libremente accesible en Internet, son hoy imprescindibles.

Esta situación ha mejorado algo con el nuevo software de *click and plug* (marcar con el ratón en la pantalla). Mas, el manejo del Internet y el correo electrónico, y la confección de materiales de clase,

siguen siendo el dominio de quien pueda mecanografiar rápido y bien, y quien al menos lea y entienda, aunque sea básicamente, el idioma de Shakespeare.

Por último, y también con el fin de fomentar y apoyar las aplicaciones prácticas de la estadística, el *Proyecto Juárez Lincoln Martí de Educación Internacional* ha inaugurado recientemente *el Instituto de Estadística Aplicada y Mejora Continua* (<http://web.cortland.edu/matresearch/QR&CIInstPg.htm>), una página de libre acceso, bilingüe (en español e inglés), y que contiene tutoriales y ejemplos de problemas resueltos, trabajos técnicos, reportes, y publicaciones referidas en revistas profesionales, de reconocidos autores que han sido durante muchos años investigadores y profesores, y las han puesto en la red para ser compartidas por otros profesionales. Además, se incluyen trabajos, acompañados de sus respectivos Power-Points, presentados en conferencias profesionales, que asemejan los *Webinars*.

CONCLUSIONES

El presente trabajo busca contribuir a fomentar un cambio en los sistemas de enseñanza actuales de la estadística, demasiado teóricos, por otros más prácticos, y que promuevan sus aplicaciones.

Nuestro objetivo, al utilizar las herramientas pedagógicas y tecnológicas descritas en este trabajo, es *incentivar a los alumnos a aprender más estadística*, superando las dificultades del aprendizaje (Garfield, J., & Ahlgren, A., 1988), para luego *retener este conocimiento el mayor tiempo posible y aplicarlos durante su vida profesional*.

Además, aprovechamos este aprendizaje para *inculcarles algunas habilidades adicionales* que han de servirles en su carrera, *tales como el trabajo en grupos multidisciplinarios, el uso del Internet, la computadora y variados software, y la presentación, oral y por escrito, de sus resultados*.

Siempre hemos pensado, siguiendo a Dewey, que (1) se aprende más, haciendo que oyendo, (2) se retiene más tiempo, si lo que se aprende tiene aplicación directa en los quehaceres e intereses del estudiante, y que (3) los dos anteriores resultados se alcanzan más fácilmente, si alumnos y maestros disfrutan de lo que hacen. Por tal motivo, basamos nuestra pedagogía en trabajos de grupos de estudios sobre proyectos contextuales, cuyos temas son escogidos por los alumnos, de acuerdo a sus intereses y proyecciones, y luego son presentados a sus compañeros de clase.

Las habilidades adicionales que inculcamos en el curso, enriquecerán tanto a los alumnos como a la sociedad en la que se insertan. Los cursos teóricos tienden a crear profesionales sólidamente formados, a menudo carentes de una visión concreta de cómo aplicar tales conocimientos a resolver problemas prácticos de la sociedad que los forma.

Los profesionales teóricos suelen trabajar en el gobierno o la academia, en vez de como consultores o investigadores aplicados, tal vez inducidos por el sistema de enseñanza bajo el cual han estudiado su

carrera. El entrenamiento en proyectos, grupos multidisciplinarios, y la presentación de trabajos, es una experiencia que contribuye a prepararlos para trabajar en estos nuevos campos.

Como resultado, estos profesionales se convierten en lo que llamamos nosotros *agentes de cambio*: fuerzas dinámicas que impulsan el progreso y el mejoramiento social.

Por último, y no por eso menos importante, el propuesto modelo de enseñanza, ayuda al profesor a disfrutar más de su trabajo, realizando así una mejor labor docente.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al Prof. Audy Salcedo, antiguo colega y amigo, la oportunidad de contribuir a esta obra de educación estadística, y al referee, por sus útiles sugerencias a la presentación de este artículo.

REFERENCIAS

- Garfield, J., & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education* 19, 44-63.
- Gryna, F, Chua, R, and J. DeFeo. (2007). *Juran's Quality Planning & Analysis for Enterprise Quality* (5th Ed.). McGraw-Hill, NY.
- Hogg R., et al. (1985). Statistics Education for Engineers: an initial Task Force report. *The American Statistician*, 39, 168-175.
- Kettenring, J. (1995). What Industry Needs. *The American Statistician*. Vol. 49, pp. 2-4.
- Moore, D. (1990). Uncertainty. In L. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 95-137). Washington, D.C., USA: National Academy Press.
- Moore, D. (1997). New pedagogy and new content: the case of statistics. *International Statistical Review*, 65, 123-165.
- Naya, S, Rios, M. y L. Zapata. (2012). La Estadística en la Enseñanza Preuniversitaria. *La Gaceta de la RSME*, 15, 2, 355-368.
- Romeu, J. L. (1986). Teaching Engineering Statistics with Simulation. *Journal of the Institute of Statistician (RSS Series D)*. Vol. 35, No. 4.
- Romeu, J. L. (1999). Experiencias Iberoamericanas en Educación Internacional. *Actas del CIBEM-III*, UCV, Caracas, Venezuela. 1998.
- Romeu, J. L. (1999). Minitab and Pizza: a workshop experiment. *Journal of Educational Technology Systems*. Vol. 27(2), 163-168.
- Romeu, J. L. (1996). On Simulation and Statistical Education. *American Journal of Mathematics and Management Sciences*; Vol. 3 & 4.
- Romeu, J. L. (2000) *A Practical Guide to Statistical Analysis of Materials Property Data*. AMPTIAC State of the Art Review Series. Rome, NY.
- Romeu, J. L. (2003). Classroom Administration: the Often Neglected Component of Technology Infusion. *Journal of Ed. Tech. Systems*. V. 31(1), 35-43.
- Romeu, J. L. (2006). Teaching Engineering Statistics to Practicing Engineers. *Proceedings of ICOTS-7 International Conference*. Salvador, Bahia. Brasil.

- Romeu, J. L. (2012). On the Statistics Education of American Engineers. *Journal of the RIAC (Reliability Information Analysis Center) Rome, NY*. Summer of 2012.
- Romeu, J. L. and M. Land (2004). Group Learning, Contextual Projects, Simulation Models and Student Presentations in Enticing Engineering Statistics Students. In *Proceedings of the Education Section. American Statistical Association Annual Meeting*. Toronto, CA. 2004.
- Spedding, T. (1998). Teaching Statistics to Engineers: towards developing a multi-media teaching environment. In *Proceedings of ED MEDIA and ED TELECOM-98*, pp. 1333-1338. More information in <http://www.uow.edu.au/commerce/mgmt/pdffiles/trevor.pdf>
- Von Mises, R. (1939). *Probability, statistics and truth* (J. Neyman, D. Sholl, & E. Rabinowitsch, Trans.). New York: Macmillan (Original work published in 1928).
- Walpole, R.E, Myers, R. H. and S. L. Myers. (1998). *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*. Sixth Edition. Prentice Hall, New Jersey.

USING SOFTWARE, GROUPS, PROYECTS AND PRESENTATIONS, IN TEACHING AND FOSTERING STATISTICS APPLICATIONS

ABSTRACT

To foster the practical applications of our statistics students, we have developed a methodology based on the use of modern technology, learning groups, contextual projects, group work and presentations, and the use of simulation models, statistical and simulation software, to entice student motivation, analyze data and encourage practical applications. Class topics, course objectives, classroom strategies, testing, and grading schemes, software tools used and results obtained are discussed, and examples are presented.

Keywords: *statistical education; statistical software; groups; projects; practical applications*

JORGE LUIS ROMEU
Syracuse University, USA
romeu@cortland.edu

Romeu es un educador, investigador y consultor estadístico. Esta retirado como profesor de la Universidad Estatal (SUNY) de NY, EEUU. Actualmente es Profesor Investigador de la Universidad de Syracuse, así como Consultor del Centro de Confiabilidad de Sistemas RIAC (<http://theriac.org>). Romeu tiene un Doctorado en Ingeniería Industrial e Investigación de Operaciones por la Universidad de Syracuse, y otro de Licenciado en Matemáticas y Estadísticas, por la Universidad de La Habana. Ha publicado más de veinticinco artículos sobre investigación y educación estadística, y más de veinticinco tutoriales de estadística industrial, de libre acceso en la red: <http://web.cortland.edu/romeu/urlstats.html>. Romeu es autor del libro A Practical Guide to Statistical Analysis of Material Property Data de estadísticas para ingenieros, y mantiene la página en la red del Instituto de Estadística Aplicada y Mejora Continua (<http://web.cortland.edu/matresearch/QR&CIInstPg.htm>). Romeu dirige el Proyecto Juárez Lincoln Martí, de Educación Internacional (<http://web.cortland.edu/matresearch>), y ha sido Fulbright cinco veces, enseñando cursos y talleres cortos en España, Mexico, Venezuela, Ecuador, Republica Dominicana y Cuba. Romeu es C.Stat. Fellow de la Royal Statistical Society, Senior Member de American Society for Quality, y miembro de la American Statistical Association, y del Inter American Statistical Institute.

DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR

HUGO ALVARADO MARTÍNEZ

RESUMEN

La investigación en educación estadística es escasa en el contexto universitario, en cuanto a los procesos de aprendizaje de los estudiantes y la forma de abordar su enseñanza. Las instituciones superiores están presentando nuevos modelos educativos basados en competencias y resultados de aprendizaje; destacando el rol activo del estudiante, la utilización de plataformas virtuales con recursos informáticos y la preparación del profesorado en metodologías de enseñanza activas. Este trabajo presenta una introducción a la Didáctica de la Estadística a partir del significado de algunas nociones y la necesidad de diseñar e implementar nuevos dispositivos didácticos. En primer lugar, se analiza el significado de proposiciones de las distribuciones muestrales y su articulación con la inferencia estadística. A continuación, se describe una propuesta de enseñanza de estadística descriptiva mediante el método expositivo interactivo en estudiantes universitarios. Destacamos las componentes de análisis de textos, diseño de configuraciones didácticas y el aprendizaje orientado a pequeños trabajos científicos, en dos tópicos clásicos de estadística presentes en la enseñanza universitaria y la enseñanza secundaria.

Palabras clave: Significado; distribuciones muestrales; estadística descriptiva; enseñanza.

1. INTRODUCCIÓN

En las Ciencias Básicas, por lo general, se cuestiona la actitud del estudiante frente al aprendizaje, no obstante, son escasos los análisis acerca de la eficacia de la actuación docente. Los académicos formados para investigar, deben asumir un rol pedagógico para lo cual, en un alto porcentaje, no están preparados. Es habitual encontrar comentarios de los docentes de Probabilidad y Estadística acerca de que sus estudiantes no comprenden una determinada proposición y por lo tanto lo aplican en situaciones donde no corresponde o no son capaces de inferir consecuencias directas. De esta manera se ven enfrentados a replantear algunos de los siguientes elementos educativos:

- a) Acerca de la actitud del profesor frente a la enseñanza, con el propósito de determinar y secuenciar los elementos prioritarios que debe poseer el profesor para una “buena” enseñanza, y delimitar su campo de acción en la investigación y su conexión con la docencia.
- b) Investigar si en el aula se favorece la comprensión de los conceptos estadísticos y enunciados como el teorema central del límite, y si buenas presentaciones en la clase consideran más de una forma de acercarnos al significado institucional implementado (o previsto) o simplemente llegan a los alumnos como un producto dogmático y acabado (Alvarado y Retamal, 2010).
- c) Presentar instrumentos de evaluación alternativos, a los tradicionales con énfasis en el desarrollo algebraico, en que se describan de forma detallada los elementos de significados de conceptos y

propiedades logrados de una unidad específica y que conlleve a determinar qué competencias han adquirido y en cuáles se manifiestan dificultades (Retamal, Alvarado y Rebolledo, 2007).

d) Determinar el perfil del profesor universitario, que derivan en cuestiones como ¿Se requiere un formador de futuros profesionales orientado a la tutoría y a transferir a su práctica el fruto de sus propias investigaciones?, ¿Los docentes carecen de modelos claros de referencia que les permitan modificar sus habituales formas de planificar y desarrollar su enseñanza apoyada en un análisis y reflexión sobre el contexto, el conocimiento y su aprendizaje?

e) Redefinir los planes de estudios en términos de competencias, debido a que el uso del término *competencia* ha penetrado fuertemente en el discurso universitario, especialmente en el desarrollo curricular, de la práctica de la enseñanza y la de evaluación.

En cuanto a las universidades chilenas, algunas están iniciando un nuevo modelo educativo basado en competencias y resultados de aprendizaje como es el caso de la Universidad Católica de la Santísima Concepción. En este ámbito, la tarea no es fácil para los docentes, deben prepararse en temas tales como la participación activa de los estudiantes y la innovación de metodologías de enseñanza de la estadística para estudiantes de matemáticas, ciencias e ingeniería.

Este trabajo está orientado a introducir elementos de análisis didáctico en la enseñanza de la estadística en dos tópicos clásicos en la educación superior, y que puede ser replicada en el contexto escolar y en otros temas usuales de Probabilidad y Estadística. Se propone una estrategia de aprendizaje activo en estadística descriptiva y la implementación de configuraciones didácticas en el tema de las distribuciones muestrales. Además, hemos intentado completar los estudios de investigación sobre el teorema central del límite (Alvarado y Batanero, 2007; Alvarado y Retamal, 2010, 2012), y de su relación con las actividades de simulación computacional y algebraica de las distribuciones muestrales (delMas Garfield y Chance, 2004; Inzunza, 2006; Retamal, Alvarado y Rebolledo, 2007; Alvarado y Segura, 2012).

2. FUNDAMENTO DEL ESTUDIO

2.1. CONTEXTO Y PERSPECTIVA TEÓRICA

Nuevos planes de estudios universitarios Actualmente, distintas universidades están presentando nuevos modelos educativos basados en resultados de aprendizaje y competencias; destacando el rol activo del estudiante, la utilización de recursos informáticos y plataformas virtuales en la docencia, la reflexión sobre la retroalimentación oportuna durante el proceso de la evaluación de los resultados de aprendizaje y la preparación del profesorado en metodologías de enseñanza actualizadas. En este modelo, la tarea no es fácil para los docentes, deben prepararse en temas como el diseño curricular,

didáctica por competencias, participación activa de los estudiantes, tutorías personalizadas, entre otros. De esta manera, las Escuelas de Educación pretenden promover la innovación de metodologías activas en los cursos disciplinares de las carreras de Pedagogía en Matemática, con la tendencia de un currículo cada vez menos técnico y más práctico.

Respecto a las Escuelas de Ingeniería existe un gran interés por estructurar sus carreras orientadas al desarrollo de competencias (Letelier, López, Carrasco y Pérez, 2005) y definir estándares para el currículum de pregrado, siendo uno de ellos los resultados de aprendizaje. La estadística puede ser considerada, en el currículo de ingeniería, una etapa de transición entre los conocimientos de matemática y de las ciencias de la ingeniería. La distribución muestral es considerada la piedra angular de la inferencia estadística (Garfield, delMas y Chance, 2004) y tiene como prerrequisitos esenciales para su comprensión apropiarse de la idea de distribución y variabilidad (Pfannkuh y Wild, 2004) y familiarización con distribuciones comunes como la binomial y la normal (Ramírez, 2008). Es un tópico de la estadística considerada difícil para los estudiantes, ya que conjuga muchos conceptos asociados, diversos tipos de lenguaje y representaciones, propiedades, procedimientos y argumentos (Alvarado y Batanero, 2008). Específicamente, las distribuciones muestrales se consideran importantes en el trabajo del ingeniero, al proporcionar herramientas metodológicas para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, diseñar de forma óptima experimentos, mejorar las predicciones y la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre.

En la educación estadística se sugiere el uso de la informática para abordar el aprendizaje de conceptos estadísticos, por ejemplo la utilización de applets disponibles en ambiente web (Inzunza, 2007; Garfield y Ben-Zvi, 2008). Chance, Ben-Zvi, Garfield y Medina (2007) resaltan el apoyo que puede entregar los recursos informáticos en actividades de: automatización de cálculos y gráficos, exploración de datos, visualización de conceptos abstractos, simulación de fenómenos aleatorios, investigación de problemas reales. Si bien, los recursos informáticos permiten modificar conceptualizaciones erróneas presentes en los estudiantes, se sugiere poner atención al lenguaje y simbología estadística utilizados por los estudiantes (Ramírez, 2008), como el uso de datos reales, en nuestro caso la unidad de estadística descriptiva.

Métodos de aprendizaje activo El nuevo escenario por la enseñanza activa de conceptos y propiedades estadísticas con base en las probabilidades ha sido estimulado por el crecimiento de sus aplicaciones y la difusión de la informática. En la literatura se sugiere la utilización de la simulación computacional como alternativa para abordar la problemática de estos temas, en nuestro caso el uso de la plataforma virtual de docencia ev@, la planilla Excel, G-numeric y applets. Así, se proponen a los estudiantes actividades-problema con datos reales, de donde surgirán conceptos de estadística

descriptiva, distribuciones de probabilidad, distribuciones muestrales y elementos de inferencia estadística. Hoy podemos acceder a materiales disponible en internet sobre la utilización de tecnologías de la información y la comunicación en la enseñanza de la probabilidad y estadística; en recursos tales como: software libre, applet, materiales educativos en línea y revistas electrónicas y boletines de información; Journal of Statistics Education (JSE); Statistics Education Research Journal (SERJ); Statistics Teacher Network boletín de la Nacional Council Teachers of Mathematics (NCTM). De esta manera, la estrategia de aprendizaje orientada a proyectos tiene un rol importante en la enseñanza y aprendizaje de la estadística hacia la cultura estadística. Gal (2002, p. 2.3) enfatiza dos componentes interrelacionados en este camino: a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante.

En nuestra práctica docente se han experimentado la metodología basada en proyectos con estudiantes de ingeniería y el método expositivo con estudiantes de pedagogía en matemática. El trabajo con proyectos hace referencia a una mayor variedad y cantidad de conceptos y procedimientos y enfatiza todo el proceso de razonamiento estadístico y el sentido de los datos. Se trata de presentar el análisis exploratorio de datos, centrar la estadística sobre las aplicaciones y mostrar su utilidad temprana en las ciencias. En nuestro contexto hemos seguido estas recomendaciones introduciendo en el aula de estadística el trabajo con proyectos, escogidos libremente por los estudiantes. En lugar de introducir los conceptos y técnicas descontextualizadas, se intenta presentar las diferentes fases de una investigación estadística: planteamiento de un problema, decisión sobre los datos a recoger, recogida y análisis de datos y obtención de conclusiones sobre el problema planteado. De acuerdo al papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística, se ha tenido en cuenta algunos referentes cognitivos del aprendizaje tales como: El aprendizaje es producto de la práctica del aprendiz, del tipo de trabajo que se le solicite realizar y de las condiciones en las que deba realizarlo; el aprendizaje depende de la percepción que tienen los estudiantes de la tarea y de los procesos instructivos; la atención y la implicación personal determinan el aprendizaje; la importancia del feedback en los procesos de aprendizaje. La estrategia incluye la enseñanza de un fuerte sentido e interpretación de la estadística y establecer un equilibrio entre los ejercicios y la solución creativa de problemas a las ciencias e ingeniería. La descripción de la metodología orientada a proyectos tiene por elementos:

- a) Lectura, análisis y crítica de documentos escritos disponible en internet;
- b) Estudio y discusión en grupos de distintos temas contextualizados;
- c) Formulación de problemas; objetivos, hipótesis. Observación guiada;

d) Búsqueda de datos; Análisis de resultados, conclusiones.

El método expositivo interactivo se refiere a la presentación de un tema lógicamente estructurado, con espacios para la interacción con los estudiantes. La alternancia con actividades cortas por parte de los estudiantes deja de lado la pasividad muchas veces presente en la toma de apuntes. El profesor organiza el contenido y diseña actividades que comprometan a los estudiantes en cada sesión a trabajar en forma grupal con los conocimientos pretendidos, por medio de pequeños trabajos en grupos, recolección de información, búsqueda de información en la web, uso de TIC y presentaciones. En la sección 3.2 extendemos el procedimiento de esta metodología.

2.2. INVESTIGACIONES PREVIAS

Experimentos de enseñanza de las distribuciones muestrales La Educación Estadística sugiere el uso de la informática para abordar el aprendizaje de la distribución muestral, por ejemplo la utilización de applets disponibles en ambiente web (Inzunza, 2007; Garfield y Ben-Zvi, 2008). Chance, Ben-Zvi, Garfield y Medina (2007) resaltan el apoyo que puede entregar los recursos informáticos en actividades de: automatización de cálculos y gráficos, exploración de datos, visualización de conceptos abstractos, simulación de fenómenos aleatorios, investigación de problemas reales. Batanero, Tauber y Sánchez (2001) describen una experiencia de enseñanza de la distribución normal dentro de un curso de análisis de datos basado en el uso de ordenadores y dirigido a estudiantes universitarios. Los resultados indicaron que ellos aprendieron a utilizar el software y adquirieron muchos de los elementos de significado considerados en la enseñanza. No obstante, observaron dificultades en la discriminación entre los datos empíricos y los modelos matemáticos, en interpretar ciertos gráficos y resúmenes estadísticos y escasa capacidad de análisis y síntesis. delMas, Garfield, y Chance (2004), tras una enseñanza basada en la simulación, destacan la falta de comprensión del efecto del tamaño de la muestra sobre la variabilidad de la distribución muestral y confusión entre la media de la población (parámetro) y la media muestral. Los autores sugieren que la tecnología por sí sola no es suficiente para la comprensión, sino que las actividades y la enseñanza de tipo constructivista tienen un rol importante. Inzunza (2006), analiza el significado de las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional mediante el software Fathom. Destaca que los estudiantes cometen errores frecuentes en el uso de representaciones numéricas, tienen un manejo superficial de los conceptos y propiedades de las distribuciones muestrales y presentan pocos elementos argumentativos. Otras investigaciones de enseñanza contextualizada de las distribuciones muestrales son: Retamal, Alvarado y Rebolledo (2007) usaron el programa @risk con estudiantes de ingeniería; Ramírez (2008) estudio la distribución normal mediante la simulación con el software Fathom; Inzunza (2010) utilizó dos herramientas de *software* (Fathom y Excel) para la enseñanza y aprendizaje de la estimación de

parámetros por intervalos de confianza. Olivo y Batanero (2007) describen el significado que tiene un intervalo de confianza como procedimiento y resaltan para su comprensión la adquisición de elementos previos como el de la distribución muestral. Enfatizan los siguientes errores de los estudiantes: pensar que para distintas muestras se obtendrá el mismo intervalo y que el coeficiente de confianza no hace cambiar el intervalo. Los autores recomiendan diseñar unidades didácticas basadas en la simulación para incrementar la relevancia del aprendizaje.

Los trabajos anteriores confirman la importancia de apropiarse de conceptos previos de la distribución muestral, que según Gardfiel, delMas y Chance (2004) corresponden al análisis de gráficos, medidas de tendencia central y de dispersión, construcción de la distribución normal, cálculo de probabilidades como área bajo la curva, noción de muestreo aleatorio y exploración de la variabilidad. Estudios relacionados se han realizado sobre las dificultades de comprensión de la aproximación normal por la normal y la presentación del teorema central del límite en una muestra de libros de texto de estadística destinados a la formación de ingenieros (Alvarado y Batanero, 2007, 2008). Estas investigaciones son la base de nuestra propuesta de enseñanza de las distribuciones muestrales.

Libros de texto universitarios de probabilidad y estadística La metodología de análisis de textos, aunque no sustituye la observación de la enseñanza en el aula, proporciona información para la construcción de instrumentos de evaluación y puede ser un recurso para los profesores, contribuyendo a tomar decisiones sobre cuáles pueden recomendar a sus estudiantes (Alvarado y Batanero, 2008). Además, provee ideas para enriquecer su actividad docente en el aula, atendiendo a las dificultades que podrían tener los estudiantes al estudiar estos textos. Alvarado y Segura (2012) analizaron el significado de las distribuciones muestrales en 22 libros de texto de probabilidad y estadística dirigidos a ingenieros. Se utilizó la metodología de análisis de textos empleadas por investigadores acerca del estudio de otros conceptos estadísticos (Tauber, 2001; Cobo y Batanero, 2004; Alvarado y Batanero, 2008). Como una primera etapa, se llevó a cabo un estudio epistémico acerca del significado de referencia de las distribuciones muestrales, y nos apoyamos en el modelo de la teoría de los significados institucionales y personales de los objetos matemáticos (Godino y Batanero, 2003). Se han obtenido veinticinco situaciones-problemas relacionadas con la distribución de la suma de dos variables aleatorias y su extensión al caso de la media muestral y varianza muestral obtenidas de poblaciones normales, las situaciones que están directamente relacionados con la evolución histórica del teorema central del límite (Alvarado y Batanero, 2006), y las situaciones-problemas indirectas cuyas soluciones llevan a la búsqueda de una distribución que aproxime la suma de variables aleatorias de poblaciones que no son normales (Alvarado y Batanero, 2008). Se describen cuatro tipos de

lenguaje y representaciones (Ortiz, 1999) y ocho procedimientos para resolver los problemas. Se establecen catorce proposiciones de la distribución de la suma de variables aleatorias asociada a poblaciones normales; de las cuales seis están en correspondencia con las propiedades de la distribución normal encontradas por Tauber (2001:139 a 144), y siete que tratan aplicaciones del teorema central del límite (Alvarado y Batanero, 2008). Por último se han obtenido cinco tipos de argumentos para comprobar las soluciones de los problemas de aplicación de las distribuciones muestrales.

El análisis de contenido ha mostrado múltiples aplicaciones de las distribuciones muestrales en las Ciencias de la Ingeniería y su implicación en la inferencia estadística, aunque no todos los libros de texto destinados a los estudiantes le asignan la misma importancia, por las orientaciones específicas de cada texto. La información proporcionada por los libros ha permitido establecer un significado de referencia para diseñar una propuesta didáctica específica de enseñanza de las distribuciones muestrales. Se sugiere contextualizar los diferentes elementos de significado en actividades relacionadas con la ingeniería en orden de dificultad progresiva en base al tiempo disponible. También, implementar las configuraciones manipulativa y computacional para ampliar la parte algebraica, mediante la simulación gráfica y conectando los modelos de probabilidades con su experimentación. De este modo, el estudiante inicia su trabajo con dispositivos manipulativos (dados, fichas,...) sin utilizar notación o cálculo algebraico. Los procedimientos serán empíricos y gráficos en papel y lápiz, y aparecerán conceptos básicos como el de experimento aleatorio para obtener la suma de dos variables aleatorias. Mediante la implementación de recursos computacionales (G-Numeric, applet, plataforma virtual,..) se amplían notablemente el lenguaje, la dinámica de las representaciones gráficas y aparecen algunos conceptos como aproximación y calidad de aproximación.

3. METODOLOGÍA DE TRABAJO

3.1. SIGNIFICADOS DE LAS DISTRIBUCIONES MUESTRALES

Con base en los estudios anteriores, se plantea la siguiente interrogante en el aula de estadística ¿Los estudiantes utilizan variados elementos de significado de las distribuciones muestrales y los aplican correctamente en sus respuestas a las tareas de evaluación en un método de inferencia estadística? Para ello, se implementó una enseñanza de la distribución muestral mediante distintas representaciones a 113 estudiantes universitarios, y evaluó su alcance en la estimación de parámetros por intervalos de confianza a través del cuestionario de Olivo, Batanero y Díaz (2008).

El tiempo dedicado a la enseñanza de las distribuciones muestrales (para los casos de la distribución de estimadores obtenidos de poblaciones normales y no normales) y los intervalos de

confianza fue de 23 sesiones de 60 minutos en el aula y 2 en el laboratorio de computación, apoyadas con cañón multimedia, notebook, pizarrón, la planilla Excel y los applets elaborados de la distribución binomial y de Poisson, disponible en la plataforma Moodle del curso. La implementación se desarrolló en la asignatura de Estadística con participación en las evaluaciones de 77 estudiantes de Ingeniería Civil de la Facultad de Ingeniería y 36 de Ingeniería Comercial de la Facultad de Ciencias Económicas y Administrativas. Las actividades planificadas se resuelven colectivamente en la clase y los ejercicios fuera del aula. La trayectoria didáctica del proceso de estudio ha tenido en cuenta: La selección de los conceptos más importantes; proponer a los estudiantes el estudio de la confiabilidad de un sistema mediante la aproximación en distribución; utilizar en la enseñanza los diversos recursos didácticos a través de las configuraciones epistémicas en los campos de problemas aplicados a la ciencia e ingeniería. En la Tabla 1 se presentan las conexiones de los elementos de significados de las distribuciones muestrales en poblaciones desconocidas mediante las tres configuraciones epistémicas.

Tabla 1. Configuraciones epistémica: manipulativa, computacional y algebraica

<i>Elemento de significado</i>	<i>Configuración manipulativa</i>	<i>Configuración computacional</i>	<i>Configuración algebraica</i>
Problemas	Estudio empírico de distribuciones de la suma de variables aleatorias	- Obtención experimental de distribuciones muestrales asintóticas - Investigar el comportamiento de las distribuciones muestrales cuando cambian los parámetros	- Obtener modelos matemáticos para la distribución de estadísticos
Lenguaje	- Expresiones verbales - Gráficas de barra, cajas, ...	- Representaciones dinámicas - Términos e íconos del programa	- Representación simbólica - Expresiones matemáticas específicas
Procedimiento	- Experimentación con dispositivos manipulables - Obtención de distribuciones muestrales empíricas - Cálculo frecuencial de probabilidades	- Simulación, variación de parámetros, experimentación	- Cálculo de probabilidades - Transformaciones algebraica
Conceptos	- Experimento estadístico, muestreo, muestras - Variable estadística, distribución de frecuencias, distribución muestral	- Aproximación, distribución muestral asintótica - Función densidad	- Variables y convergencia - Modelo y parámetros
Propiedades	Media y varianza muestral - Estimador insesgado, distribución aproximada	- Aproximación normal de distribuciones clásicas - Efecto de los parámetros sobre la aproximación	- Tamaño muestral y efecto en la convergencia - Buen estimador y corrección de continuidad
Argumentos	- Comprobación de ejemplos - Generalizar conclusiones de la experiencia.	- Visuales, generalización y comprobación de ejemplos	Demostración deductiva

El proceso de estudio se organizó mediante una secuencia de sesiones agrupadas en dos lecciones:

L1. Distribución de estimadores obtenidos de poblaciones normales. Se propone a los estudiantes actividades y ejercicios de aplicación algebraica en una y dos muestras aleatorias extraídas de poblaciones normales, de los teoremas de la distribución de la media muestral y de la varianza muestral, y el cálculo de las probabilidades correspondientes. Además, se obtienen los estadísticos t -student y de Fisher para el caso de dos muestras, con uso de las tablas estadísticas.

L2. Distribución de estimadores obtenidos de poblaciones no normales. Se realizaron actividades y ejercicios que permitió al estudiante asimilar condiciones para la aproximación de forma algebraica, utilización adecuada de la corrección por continuidad. Se plantearon actividades para que los estudiantes apliquen algebraicamente el teorema central del límite a las distribuciones de variables aleatorias discretas y continuas, y estudiar la convergencia gráfica de las distribuciones de probabilidades mediante Excel y Applet. Por último, se proponen elaborar y aplicar los intervalos de confianza en sus variados casos en una y dos muestras aleatorias y donde la población es normal o desconocida.

A continuación, se ilustra un ejercicio propuesto a los estudiantes que conjuga las configuraciones manipulativas y computacionales, y tiene por objetivo evaluar si el estudiante es capaz de seleccionar muestras de tamaño 6, luego obtener la media aritmética con el fin de compararla con la media de la población, y descubrir el concepto de error de muestreo $e = |\bar{X} - \mu|$. Del apartado f) al l) el estudiante estudia la simulación de extracción de m muestras de tamaño n ; en la cual se formarán matrices (m, n) de orden $m \times n$ (número de réplicas \times número de muestras). Se espera que observe las diferencias en la forma de la población y la distribución de las medias muestrales, y determine que a mayor n menor es el sesgo. Otro objetivo es ilustrar el teorema central del límite en (j), donde el estudiante descubre que conforme aumenta el tamaño de la muestra, la distribución de la media muestral se aproxima a la distribución de probabilidad normal. En (k) los estudiantes calculan los errores variando el tamaño de las muestras, de modo que según sea el número de muestras y de las réplicas observen gráficamente que la forma se aproxima a una distribución normal (l).

Ejercicio 1. Alonso comenzó su empresa comercial hace 20 años. La empresa se enfrenta a algunas decisiones importantes con respecto al cuidado de la salud de sus empleados. Antes de tomar una resolución se decide formar un comité de *seis* representantes de los trabajadores, para que analice cuidadosamente el tema y haga una recomendación con respecto a cuál plan se adapta mejor a las necesidades del empleado. Considera que los puntos de vista de los trabajadores más jóvenes con respecto al cuidado de la salud pueden diferir de los correspondientes empleados de mayor edad. Los tiempos de servicio (redondeados al año más cercano) de los 40 trabajadores que actualmente están en la nómina de dicha empresa, son como se indica a continuación:

8	1	0	2	7	0	4	5	3	14
2	4	18	2	1	2	0	2	16	4
2	8	9	1	1	2	5	10	11	3
1	4	1	2	2	3	3	19	7	3

- ¿Qué puede esperar respecto del número promedio de años en la empresa de los integrantes del mismo?
- ¿Cómo debería seleccionar el comité? Lleve a cabo el experimento de escoger al azar un grupo de seis empleados (en papel, con la tabla de números aleatorios y con uso de Excel). ¿Qué promedio obtuvo? ¿Cómo se compara este resultado con la media de la población?
- Compare su resultado con la de sus compañeros del grupo.
- Seleccione otra muestra o comité de tamaño 6. Comente y compare el error de muestreo con el obtenido en b).
- De esta población de $N = 40$ trabajadores pueden seleccionarse muchas muestras de tamaño $n = 6$, ¿Cuántas son posibles?

Nota: A continuación, se va a estudiar la simulación de extracción de m muestras de tamaño n ; en la cual se formarán matrices (m,n) de orden $m \times n$ (número de réplicas \times número de muestras)

- Realice el experimento de seleccionar al azar 30 muestras de tamaño 6, $(m,n)=(30,6)$ y calcule la media de cada una.
- ¿Cómo se compara la forma de la distribución de años de experiencia de todos los empleados con la de las medias muestrales?
- ¿Qué sucede, en cuanto a la forma gráfica y el cálculo de la media, conforme se van tomando muestras mayores, por ejemplo para $n = 25$ en lugar de $n = 6$?
- ¿Existe diferencia entre el intervalo de las medias muestrales y el intervalo de los valores poblacionales?
- ¿Qué se puede concluir de este experimento? Comente las características importantes.
- Calcule los errores estándar de la media de la muestra de tamaño $n = 6$ y 25 al seleccionar al azar réplicas de $m = 30$ muestras.

Recuerde que: Si la desviación estándar de la población es σ , el error estándar de la media (o desviación estándar de la distribución de muestreo de la media muestral) se define por $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$ donde n representa el número de observaciones en cada muestra.

- Simular la extracción de las siguientes m muestras de tamaño n : $(m,n) = (30,1), (30,70), (60,6)$. Utilizando la planilla Excel, calcular el valor medio de cada muestra, el error estándar de la media y mediante la representación gráfica compare las distribuciones de las medias muestrales.

3.2. ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA MEDIANTE EL MÉTODO EXPOSITIVO INTERACTIVO

La sesión comienza cuando el profesor divide al grupo curso. Los sub grupos de trabajo reciben un set de preguntas preparadas por el profesor sobre el tema: “La estadística descriptiva en la vida cotidiana”. El profesor presenta los conceptos de la unidad y entrega material escrito. Luego, los estudiantes recogen información en la clase y realizan tabulación de datos, representaciones gráficas y cálculos de tendencia central y de dispersión en una variable. Los grupos realizarán breves exposiciones de sus productos en diversos contextos y serán co-evaluados por sus pares. El profesor hace una síntesis de lo expuesto por los estudiantes al final de la sesión. Por lo general, la presentaciones usuales de los contenidos de estadística son de tipo algebraica y expositiva con uso de la pizarra. El profesor enuncia los conceptos y propiedades de una unidad y luego plantea ejercicios donde los estudiantes deben aplicar las propiedades en un set de ejercicios propuestos. Nuestra propuesta metodológica considera un cambio de discurso en el aula, con participación activa de los estudiantes, motivadas en las actividades presentadas y de un fuerte sentido del pensamiento estadístico. Si bien, la unidad de estadística descriptiva está presente en muchos libros de textos con variados ejercicios; son escasos el planteamiento de situaciones de interés de los jóvenes y que consideren el estudio cuantitativo de experiencias con fenómenos aleatorios. La modalidad de esta metodología pretende que los estudiantes elaboren situaciones-problemas de su interés y que utilicen conocimientos previos de probabilidad en actividades de razonamiento estadístico. A partir de una situación contextualizada los estudiantes construyen los conocimientos, emergiendo los conceptos relacionados con la estadística descriptiva en una variable. Posteriormente, en otras sesiones, se realizará el estudio descriptivo en dos variables. Se espera el desarrollo de una clase dinámica, donde el profesor guía el trabajo de recogida de datos y análisis de información de los estudiantes. Cabe señalar, que el tema tratado no es de gran complejidad. Sin embargo, conjuga muchos conceptos interrelacionados y el tratamiento adecuado de análisis de datos con apoyo informático. La cultura estadística implica la lectura correcta de gráficos y tablas presentes en los medios de comunicación.

El proceso de enseñanza de elementos metodológicos de la estadística descriptiva, estuvo dirigida a estudiantes del curso Azar y Probabilidades de cuarto semestre de Pedagogía en Educación Media en Matemática de la Universidad Católica de la Santísima Concepción. En la ejecución de la secuencia didáctica con estrategia de Método Expositivo Interactivo, desarrollada en tres semanas (6h teórica-práctica, 3h ayudantía y 3h laboratorio de computación), hubo nuevos elementos incorporados en el proceso de aprendizaje, que dice relación con la:

- a. Declaración de resultados de aprendizaje, entre los que destacamos: RA1: Utilizar los elementos metodológicos de la estadística descriptiva en una y dos variables en la descripción e interpretación de datos relacionados con la educación; RA2: Familiarizarse con el uso de recursos informáticos en el análisis de información estadística para la elaboración de informes.
- b. Utilización de recursos didácticos, tales como dispositivos manipulativos (dados, monedas, fichas), planilla Excel y/o programa G-Numeric, plataforma virtual EV@, power point, procesador Word y un taller de laboratorio de computación. Estas herramientas orientaron el trabajo de los estudiantes en actividades tales como: Lectura, análisis y crítica de noticias en los medios de comunicación; Estudio y discusión en grupos de distintos temas de interés público; Formulación de problemas, objetivos, búsqueda de datos, análisis de resultados, conclusiones y presentaciones de informes.
- c. Complementación de las actividades tradicionales de tipo algebraica con la participación activa de los estudiantes, motivados por el proceso de experimentación de elaboración y análisis de variables presentes en situaciones habituales.

4. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

4.1. DISTRIBUCIONES MUESTRALES Y SU ARTICULACIÓN CON LA INFERENCIA ESTADÍSTICA

La innovación en la enseñanza de la distribución muestral fue complementar las actividades clásicas de procedimiento analítico con situaciones empíricas de selección de muestras mediante dispositivos manipulativos y computacionales. Para evaluar el efecto de implementar las configuraciones didácticas en las dos lecciones de la distribución muestral, en primer lugar, se propuso a los estudiantes dos problemas abiertos para el caso de la distribución de estimadores obtenidos tanto de poblaciones normales (problema 1) como de poblaciones no normales (problema 2). El objetivo fue determinar el grado de apropiación de las entidades primarias para el tema de la distribución muestral en la configuración de tipo algebraica, y que a su vez contribuyan como conocimientos previos en la comprensión de los intervalos de confianza. A continuación, describimos el contenido del problema 1 y procedimiento de su solución.

Problema 1. Una compañía puede comprar materia prima a diferentes proveedores y está interesada en el contenido de impurezas del producto. Los niveles de impurezas, en %, contenidos en sendas remesas del producto siguen una distribución normal con media 4.2 y desviación estándar 0.6.

- a) Determine la probabilidad de que el promedio del nivel de impureza de una revisión de los registros de 50 proveedores sea menor de 4.3.

b) Calcular la probabilidad de que el promedio de una muestra de tamaño 36 esté dentro de 0.02 del verdadero nivel de impureza.

En este problema se espera que los estudiantes logren obtener la distribución de la media muestral en poblaciones normales. En el apartado a) los estudiantes deben identificar la distribución de probabilidad normal determinando los parámetros de los niveles de impureza de un producto de cierto proveedor. A partir de una muestra de 50 proveedores se obtiene la distribución de muestreo del promedio del nivel de impureza de la muestra aleatoria. Así el estudiante debe realizar el cálculo algebraico de variables aleatorias normales con calculadora y/o tablas estadísticas, obteniendo una probabilidad de 0.88. En el apartado b) el estudiante determina de forma algebraica el error de estimación en poblaciones normales, aplicando que la varianza de la distribución de la media corresponde a la varianza poblacional sobre el tamaño de la muestra. Así, obtiene una probabilidad de 0.1586 de que el promedio de una muestra de tamaño 36 esté dentro de 0.02 del verdadero nivel de impureza. Del grupo de 77 estudiantes de ingeniería civil, que respondieron el problema 1 podemos señalar lo siguiente: Observamos que luego de definir la media aritmética de la población, el 89.6% de los 77 estudiantes justifican que la media aritmética de una muestra aleatoria de población normal tiene distribución normal, el 92.2% identifica el valor esperado de la distribución de la media aritmética como la media de la población, la varianza como la varianza de la población sobre el tamaño de la muestra. Luego, los estudiantes realizan el cálculo del promedio del nivel de impureza de la revisión de los registros de 50 proveedores sea menor de 4.3, a través de la estandarización, llegando al resultado correcto el 75.3% de los estudiantes. Se observó que los errores se producen en su mayoría porque no utilizan bien la tabla de la distribución normal. En el apartado b), observamos que el 46.8% de los estudiantes logran identificar la situación problema como la determinación del error de estimación en poblaciones normales y el 41.6% recuerda que la varianza de la distribución de la media corresponde a la varianza poblacional sobre el tamaño de la muestra. Por lo que el 36.4% realiza el cálculo correcto para obtener la probabilidad de que el promedio de una muestra de tamaño 36 esté dentro de 0.02 del verdadero nivel de impureza, llegando a este resultado sólo el 27.3% de los estudiantes. El análisis de las respuestas de los estudiantes a los dos problemas se presenta en Alvarado, Galindo y Retamal (2013: 83-85).

En este trabajo, hemos planteado los intervalos de confianza como un campo de problemas dentro de las distribuciones muestrales, mediante la selección adecuada de la distribución muestral en la estimación de parámetros. A objeto de implementar las configuraciones didácticas en las distribuciones muestrales y determinar su alcance en la estimación de parámetros, se aplicó en la asignatura de Estadística, el Cuestionario de intervalos de confianza de OBD a 113 estudiantes universitarios de

ingeniería. La muestra corresponde a estudiantes de las especialidades de Ingeniería Civil y de Ingeniería Comercial (77 y 36 respectivamente) de la Universidad Católica de la Santísima Concepción. Los estudiantes, han tenido un curso previo de probabilidades y son caracterizados por tener un rendimiento académico aceptable. Para efecto de comparación, se han considerado los primeros 11 ítems del Cuestionario.

En la Tabla 4 se observa que obtuvimos mejores resultados de los estudiantes a las respuestas correctas en los ítems del Cuestionario, excepto en el ítem 8. Hubo seis ítems que superaron el 5% de diferencia con los alcanzados por Olivo, Batanero y Díaz (2008), destacando como los más altos porcentajes la estimación de la media con varianza conocida y desconocida (ítems 6 y 5) y la comparación de medias con varianza conocida (ítem 7).

Tabla 2. Frecuencia de respuestas del cuestionario de intervalo de confianza ($n = 113$)

Ítem	Frecuencia				% correcto	Contenido del ítem	% comparado con OBD ($m = 252$)
	A	B	C	D			
1	21	13	71	2	62.8	Definición	7.2
2	35	68	6		60.2	Variación con tamaño de muestra	5.0
3	0	24	82	4	72.6	Relación con coeficientes de confianza	7.5
4	12	52	44		38.9	Variación en diferentes muestras	2.4
5	0	110	0	3	97.3	Estimar media σ conocida, población normal	18.3
6	2	109	1	1	96.5	Estimar media σ desconocida, muestra grande	23.5
7	5	102	3	0	90.3	Comparar medias, varianzas conocidas	15.7
8	28	68	4	5	24.8	Comparar medias, varianza desconocida, muestra grande	- 4.6
9	13	11	62	9	54.9	Comparar varianzas, población normal	2.1
10	28	67	0	17	59.3	Elegir distribución muestral	6.5
11	4	37	53	4	46.9	Determinar valor crítico	0.1

En cuanto a los errores de comprensión de las propiedades de intervalos de confianza, ítems 2, 4 y 8, podemos destacar lo siguiente: El 30.9% de los estudiantes tienen dificultades en la variación del ancho del intervalo al disminuir el tamaño de la muestra (ítem 2a), obteniendo 2.4% menos que OBD. También, hubo un 46.02% de los estudiantes que no dan importancia a la variación en diferentes muestras de los intervalos de confianza (ítem 4b), y un 10.61% confunden el verdadero valor del parámetro con el de estadístico de la media muestral (ítem 4a). En OBD se obtuvo un 34.1% y 28.9% respectivamente. Otra de las dificultades de comprensión de propiedades se presentó en el ítem 8, donde un 60.2% de los estudiantes desarrolla el cálculo de la estimación correcta de la diferencia de medias poblacionales con una interpretación incorrecta (ítem 8b). En OBD se obtuvo un 32.1%. En relación a los errores de comprensión de procedimientos, señalamos que un 32.7% de los estudiantes

supone una distribución normal que se aplica en condiciones de muestras grandes (ítem 11b), obteniendo un 8.6% menos que OBD.

4.2. APRENDIZAJE ORIENTADO A PEQUEÑOS PROYECTOS EN ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

En la asignatura Azar y probabilidades, durante el segundo semestre de 2012, los estudiantes de Pedagogía en Educación Media en Matemática desarrollaron las siguientes actividades relacionadas con la unidad de estadística descriptiva:

Actividad 1. *Caracterización del estudiante de Pedagogía en Matemática UCSC* La primera sesión de aula tiene por objetivo un acercamiento del concepto de variable estadística mediante el estudio de definición y características de algunas variables estadística presentes en los estudiantes.

La implementación en el aula consistió en que cada uno de los estudiantes debía presentar una variable de interés relacionada con la tipología del estudiante de su carrera. Después de comunicar verbalmente al grupo curso la totalidad de las variables, cada estudiante entrevistó a sus pares (Figura 1.a); para recoger información acerca de las características presentes en sus compañeros a modo de realizar una primera tabulación de datos. Ésta se realizó en grupos de tres estudiantes, utilizando lápiz y papel y la calculadora. Posteriormente, cada grupo trabajó fuera de clase en la discusión de observar qué me dicen los datos y cómo los puedo comunicar. Por ejemplo, se estudió la variable estadística “número de contactos en Facebook que tienen los integrantes del curso”. Un grupo presentó por medio de Excel las representaciones de distribución de frecuencias y aproximación a los promedios como medida de tendencia central. Encontraron una dispersión amplia de contactos entre 114 y 1037. La Figura 1.b muestra los resultados obtenidos por un grupo, sintetizando la presentación mediante la tabulación de datos y representaciones gráficas con apoyo de Excel.



Figura 1. Recolección y comunicación sobre características de los estudiantes

Actividad 2. *Estadística en los medios de comunicación.* Seleccionar una de las noticias y comentar en forma concisa los términos y conceptos vistos en clase.

El profesor inicia la actividad mediante las siguientes preguntas a los estudiantes: ¿Cuáles son los temas de interés de los jóvenes? ¿Qué tipo de gráficos son los más utilizados en las noticias? ¿Cómo se presentan la fuente de información y los datos? ¿Qué medidas estadísticas son las más usuales?

Varias de las intervenciones de temas de los estudiantes fueron respuestas vinculadas a la importancia de las redes sociales y de la educación, con gráficos usuales de barras y circulares, y presentando datos resumidos en tablas. Se presentaron 12 temas en el Foro de la plataforma virtual del curso.

Actividad 3. *Análisis de asociación de variables estadísticas.* El profesor inicia la actividad mediante las siguientes preguntas a los estudiantes: ¿Existe relación o grado de asociación en los estudiantes de Pedagogía acerca de las variables estadísticas: Calificación obtenida en la prueba, Porcentaje de asistencia a clases y Numero de “sellos” obtenidos en el lanzamiento de una moneda 30 veces?

A continuación, después de recoger algunas respuestas, el profesor presenta el estudio de asociación en dos variables estadísticas - en dos sesiones de aula y dos de laboratorio - los conceptos y propiedades de estadística descriptiva en dos variables, enfatizando la distribución de frecuencias bidimensionales, el coeficiente de correlación y el modelo de regresión lineal. Luego, solicita a cada estudiante anotar los valores de las tres variables y aplicar los nuevos conceptos de asociación de

variables estadísticas. La Figura 2 muestra dos momentos de trabajo tanto en el aula como en el laboratorio, acerca de la exploración y predicción de datos en varias variables.

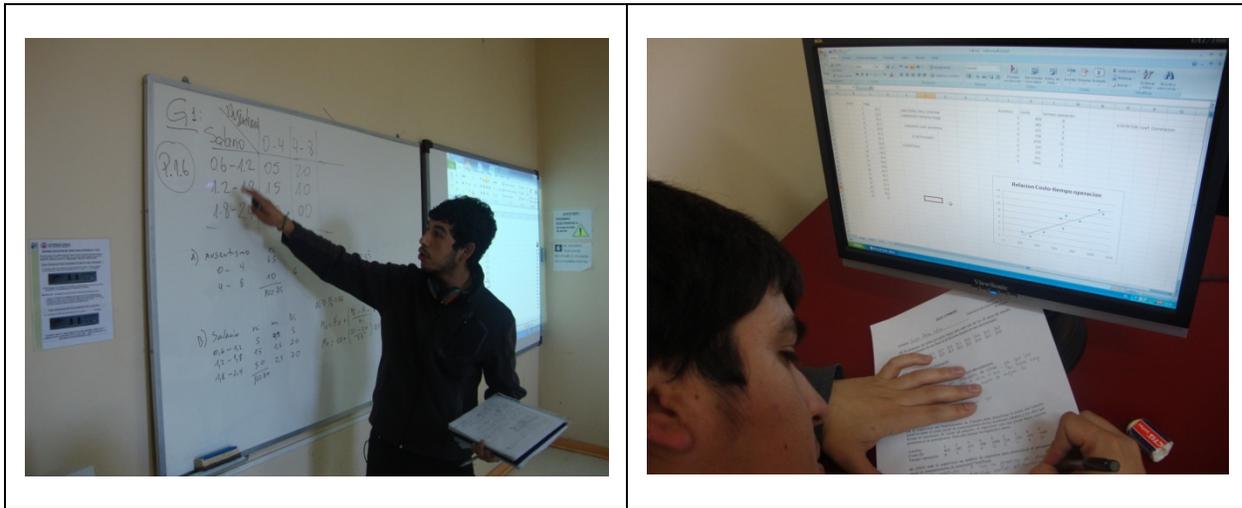


Figura 2. Actividad de asociación de variables en el aula y laboratorio de computación

Actividad 4. *Pequeños trabajos de iniciación científica*. Los estudiantes deben aplicar los elementos metodológicos de la estadística descriptiva en una y dos variables. El procedimiento consiste en la búsqueda de información, descripción e interpretación de datos reales y elaboración de pequeños informes relacionados con temas de interés público. La estructura del informe comprende: Título del trabajo; contexto y fundamentación del problema; selección de variables y recogida de datos; análisis de resultados (con apoyo de Excel y programa G-numeric); conclusiones. Presentación del informe en Word; resumen en diapositivas ppt; exposición de trabajo y coevaluación.

Hubo siete temas analizado por los estudiantes: Concepciones sobre azar y probabilidad; ¿Qué tan responsables y puntuales somos?; Participación cívica de los estudiantes de la UCSC; Red social facebook; Buenos y malos hábitos relacionados con el nivel de estrés de los estudiantes de la UCSC; ¿Son aprovechadas las dependencias de la universidad por los estudiantes?; Entorno social UCSC. En la Figura 3 se evidencia la presentación de los trabajos por parte de los estudiantes de Pedagogía en Educación Media en Matemática.



Figura 3. Presentación de los trabajos

Los Proyectos aplicados a problemas reales permitieron obtener: informes de iniciación científica de los estudiantes; apropiación del razonamiento estadístico comunicado en las presentaciones orales; valoración crítica del trabajo de pares a través de coevaluaciones; los estudiantes asumen mayor responsabilidad por su propio aprendizaje integrando varias unidades del curso. El uso de recursos informáticos para la interpretación crítica de la información permitió: favorecer la capacidad de trabajar en equipo de los estudiantes; dominio de medios tecnológicos necesarios para el análisis de datos; ampliar la capacidad de analizar situaciones problemáticas.

5. CONCLUSIONES

Consideramos una contribución los resultados obtenidos de la distribución de la media muestral para el caso de población normal. No hemos encontrado estudios acerca de su comprensión para representaciones algebraicas en este nivel educativo. Si bien, Batanero, Tauber y Sánchez (2001) han descrito los errores de estandarización de una variable aleatoria con distribución normal, nuestro trabajo extiende este conflicto para el caso de la estandarización de estimadores. Sin embargo, el estudio muestra la complejidad de la comprensión sobre la “distribución muestral”, caracterizada por los aciertos, dificultades y errores de comprensión de muchos conceptos y propiedades interrelacionados en la distribución de estimadores en poblaciones normales. El procedimiento algebraico de estandarización no presentó mayores dificultades en los estudiantes. Destacamos la apropiación de las propiedades de la media y varianza de la distribución de la media muestral en poblaciones normales. A pesar de que hubo dificultades para determinar los errores de estimación en poblaciones normales.

En relación a los resultados del cuestionario, queremos poner el acento en el progreso de los estudiantes, en la elección adecuada de la distribución muestral para la construcción de intervalos de

confianza de la varianza en muestras pequeñas, y la estimación de la media en muestras grandes con σ conocida y σ desconocida. Además, destacamos la comprensión de las definiciones, la variación con tamaño de muestra y la relación con coeficientes de confianza. De esta manera se accede a una interpretación adecuada de la estimación de parámetros por intervalo de confianza. También, se corrobora las dificultades descritas por Olivo, Batanero y Díaz (2008); expresando que los estudiantes no comprenden que los intervalos de confianza representan el porcentaje de intervalos de muestra, tomadas todas en las mismas condiciones, dentro de los cuales está contenido el verdadero valor del parámetro. De igual forma, se observan errores procedimentales al determinar un valor crítico en forma incorrecta al hacerlo a partir de la distribución normal estándar en lugar de la distribución t-student.

En síntesis, consideramos positivo la implementación de las configuraciones didácticas en el estudio de las distribuciones muestrales, atendiendo a la sugerencia de mejorar la enseñanza de los intervalos de confianza por medio de la simulación (Terán, 2006), y realzar la importancia de los intervalos de confianza y la reciente necesidad de su uso en la investigación (Olivo, Batanero y Díaz, 2008). La utilización de dispositivos manipulativos y computacionales (ejercicio 1) en nuestro experimento de enseñanza de la distribución muestral, ha permitido a los estudiantes la exploración del efecto de los tamaños muestrales y que se obtengan mejores resultados en el cuestionario acerca de la comprensión de los intervalos de confianza. Por lo tanto, se debería tener presente, en las actividades de aprendizaje sobre las distribuciones muestrales, un acercamiento global al tema, considerando más de una forma de comunicar el objeto estadístico e incorporando los recursos tecnológicos a la enseñanza.

En cuanto a la experiencia docente con estudiantes de Pedagogía en Matemática contempló la elaboración de cuatro actividades de aprendizaje específicas, cuya implementación fue facilitada mediante el uso adecuado de las tecnologías de información. Se ha observado el compromiso de los estudiantes en las actividades presentando siete trabajos finales en una defensa oral de análisis de información en una situación de interés del educando. De esta manera, los estudiantes dan cuenta de la importancia del análisis exploratorio de datos como herramienta de análisis en la toma de decisiones en contextos sociales y de la educación. El uso de medios, como la plataforma virtual, aumentan las posibilidades de trabajo y amplía las representaciones conectando los conceptos formales con la experimentación, aunque hay que tener presente el esfuerzo cognitivo de los estudiantes (delMas, Garfield y Chance, 2004).

La práctica docente debe ser reflexiva, entendida en el sentido que el profesor analice las distintas variables involucradas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística y, consecuentemente, sus formas de intervenir en ellas. Enseñar conceptos y propiedades básicas de probabilidad y estadística de una manera práctica y con apoyo de recursos informáticos es aún un desafío para el

profesorado en los distintos niveles educativos. La descripción de este proceso de estudio con estudiantes de ingeniería y de pedagogía en matemática ha permitido ampliar la actuación docente, desde la presentación de problemas descontextualizados hacia la conexión entre el conocimiento estadístico y contenido didáctico, por medio de la comunicación alternativa de representaciones didácticas en la enseñanza de la estadística.

Muchos de los conceptos y propiedades tratadas en este trabajo con estudiantes universitarios, pueden ser analizados experimentalmente en el contexto escolar. El nuevo marco curricular en Matemáticas en Chile, introduce en el eje de Datos y Azar el tratamiento de datos y modelos para el razonamiento en situaciones de incerteza. El tratamiento estadístico se inicia en primero básico y el azar a partir de quinto. En la Educación Media se propone desarrollar conceptos y técnicas propias de la estadística y la teoría de probabilidades, que incluyen el uso de tecnologías digitales, de internet y software estadísticos. Esto supone dar espacio a la exploración, la experimentación y la investigación. Cobra relevancia, entonces, el trabajo en equipo, la comunicación y la confrontación de ideas, los argumentos y el apoyo en elementos tecnológicos. Los contenidos mínimos obligatorios en el último año de Educación Media comprende: Interpretación del concepto de variable aleatoria continua y función de densidad de una variable aleatoria con distribución normal; Estimación de intervalos de confianza para la media de una población con distribución normal y varianza conocida a partir de una muestra y un nivel de confianza dado; Aproximación de la probabilidad binomial por la probabilidad de la normal, aplicación al cálculo de experimentos binomiales.

La formación estadística y didáctica de los profesores constituye un campo de investigación en la comunidad de Didáctica de la Matemática. Debemos considerar la enseñanza como una actividad crítica, pasar de preocuparse del cómo hacer, al por qué lo planteo así, y revisar constantemente las propuestas de acción educativa.

AGRADECIMIENTOS

Fondo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico, mediante el Proyecto de Iniciación Fondecyt N° 11080071. Fondo de Apoyo a la Docencia por el Proyecto FAD 01/2012 de la Universidad Católica de la Santísima Concepción.

REFERENCIAS

Alvarado, H. y Batanero, C. (2006). El significado del teorema central del límite: Evolución histórica a partir de sus campos de problemas. En A. Contreras, L. Ordoñez y C. Batanero (Eds.). *Investigación en Didáctica de las Matemáticas/ Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas* (pp. 257-277). Jaén: Universidad de Jaén, España.

- Alvarado, H. & Batanero, C. (2007). Dificultades de comprensión de la aproximación normal a la distribución binomial, *Números*, 67.
- Alvarado, H. & Batanero, C. (2008). Significado del teorema central del límite en textos universitarios de probabilidad y estadística, *Estud. pedagóg.*, 34(2), 7-28.
- Alvarado, H., Galindo, M. & Retamal, L. (2013). Comprensión de la distribución muestral mediante configuraciones didácticas y su implicación en la inferencia estadística. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(2), 75-91.
- Alvarado, H. & Retamal, L. (2010). La aproximación binomial por la normal: una experiencia de reflexión sobre la práctica. *Paradigma*, Vol. XXXI, N° 2, 89-108.
- Alvarado, H. & Retamal, L. (2012). Dificultades de comprensión del teorema central del límite en estudiantes universitarios, *Educación Matemática*. 24(3) 119-130.
- Alvarado, H. & Segura, N. (2012). Significado de las distribuciones muestrales en textos universitarios de estadística, *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*. 7(2), 54-71.
- Batanero, C, Tauber, L. & Sánchez, V. (2001). Significado y comprensión de la distribución normal en un curso introductorio de análisis de datos, *Cuadrante*, 10(1), 59-91.
- Campanario, J.M. (2003). Contra algunas concepciones y prejuicios comunes de los profesores universitarios de ciencias sobre la didáctica de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(2), 319-328.
- Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J. & Medina, E. (2007). The role of technology in improving student learning of statistics. *Technology Innovations in Statistics Education*, 1(1). Revisado el 7 de marzo de 2011 desde internet: <http://repositories.cdlib.org/uclastat/cts/tise/vol1/iss1/art2>
- Cobo, B. & Batanero, C. (2004). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 22(1), 5-18
- delMas, R., Garfield, J., & Chance, B. (2004). Using assessment to study the development of students' reasoning about sampling distributions, *American Educational Research Association. Annual Meeting*. California.
- Fonseca, C. (2003). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria*. Tesis doctoral. Universidad de Vigo.
- Gald, I. (2002). Adult's statistical literacy. Menaning, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2008). Creating statistical reasoning environments. En J. B. Garfield, y D. Ben-Zvi (eds.) *Developing Students' Statistical Reasoning*. Nueva York: Springer Science+Business Media, 91-114.
- Garfield, J., Delmas, R. & Chance, B. (2004). Reasoning about sampling distributions. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds), *The Challenge of developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2 y 3), 237-284.
- Godino, J. D. & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpiska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity*, Dordrecht, Kluwer, 177-195.
- Godino, J. D. & Batanero, C. (2003). Semiotic functions in teaching and learning mathematics. En M,

- Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger y V,V, Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (pp. 149-168). New York: LEGAS
- Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Revisado el 11 de Agosto de 2011 desde internet: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- Inzuna, S. (2006), *Significados que estudiantes universitarios atribuyen a las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica*. Tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV).
- Inzuna, S. (2007). Recursos de internet para apoyo de la investigación y la educación estadística. *Revista Iberoamericana de educación*, 41(4). Revisado el 18 de abril de 2011 desde internet: <http://www.rieoei.org/experiencias142.htm>
- Inzuna, S. (2010). Entornos virtuales de aprendizaje: Un enfoque alternativo para la enseñanza y aprendizaje de la inferencia estadística, *Revista Mexicana de Investigación Educativa*. 15(45), 423-452.
- Letelier, M., López, L., Carrasco, R, & Pérez, P. (2005), Sistema de competencias sustentables para el desempeño profesional en ingeniería, *Rev. Fac. Ing.* 13(2), 91-96.
- Martín, P. (2006). Achieving success in industrial training. En A. Rossman y B. Chance (Eds.). *Proceedings of ICOTS-7*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education. CDROM.
- Olivo, E. & Batanero, C. (2007). Un estudio exploratorio de dificultades de comprensión del intervalo de confianza, *UNION*, n°12.
- Olivo, E., Batanero, C. & Díaz, C. (2008). Dificultades de comprensión del intervalo de confianza en estudiantes universitarios, *Educación Matemática*, 20(3), 5-32.
- Ortiz, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de Bachillerato*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Pfannkuch, M. & Wild, C. (2004). Towards and understanding of statistical thinking. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*, 17-46. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publisher.
- Ramírez, G. (2008). Formas de razonamiento que muestran estudiantes de maestría de matemática educativa sobre la dsitribución normal mediante problemas de simulación de fathom, *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*. 3(1), 10-23.
- Retamal, L., Alvarado, H. & Rebolledo, R. (2007). Understanding of sample distributions for a course on statistics for engineers, *Ingeniare*, 15, 6-17.
- Romeu, J. (2006). Teaching engineering statistics to practicing engineers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.). *Proceedings of ICOTS-7*. Salvador (Bahia): International Association for Statistical Education. CDROM.
- Tauber, L. (2001). *Significado y comprensión de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos*, Tesis doctoral, Universidad de Sevilla.
- Terán, T. (2006). Elements of meaning and its role in the interaction with a computacional program. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*, Salvador (Bahía), Brasil, IASE.

TEACHING OF STATISTICS IN HIGHER EDUCATION

ABSTRACT

The statistical education research is scarce in the university context, in terms of the learning processes of students and how to address their teaching. The higher institutions are introducing new educational models based on competencies and learning outcomes, highlighting the active role of the student, the use of virtual platforms and computing resources in teacher preparation active teaching methodologies. This paper presents an introduction to Teaching Statistics from the meaning of some notions and the need to design and implement new teaching devices. First, we analyze the meaning of propositions of the sampling distributions and statistical inference articulation. Here, we describe a teaching proposal descriptive statistics by the method undergraduates interactive exhibition. We highlight the text analysis components, instructional design and learning configurations oriented small scientific papers in two statistical classic topics present in university education and secondary education.

Keywords: *Meaning; Sampling Distributions; Descriptive statistics; Teaching.*

ENSINO SUPERIOR DE ESTATÍSTICA DA EDUCAÇÃO

RESUMO

A pesquisa em educação estatística é escassa no contexto universitário, em termos dos processos de aprendizagem dos alunos e a forma de trabalhar com o seu ensino. As instituições de ensino superior estão apresentando novos modelos educacionais baseados em competências e resultados de aprendizagem, destacando o papel ativo do formando, a utilização de plataformas virtuais com recursos de computação, junto com a capacitação dos professores em metodologias ativas de ensino. Este trabalho apresenta uma introdução ao ensino de Estatística a partir do significado de algumas noções e a necessidade de conceber e implementar novos dispositivos de ensino. Primeiro, vamos analisar o significado de algumas das proposições de distribuições de amostragem e sua articulação na inferência estatística. A seguir, descreve-se uma proposta de ensino de estatística descritiva usando o de exposição interativa em alunos universitários. Destacam-se os componentes de análise de texto, desenho de configurações de ensino e o aprendizagem orientado a pequenos trabalhos científicos, em dois temas clássicos da estatística presentes no ensino universitário e no ensino secundário.

Palavras-chave: *Significado, distribuições de amostragem, estatística descritiva, Ensino.*

HUGO ALVARADO MARTÍNEZ

Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile

alvaradomartinez@ucsc.cl

Profesor de Matemáticas y Magíster en Estadística. Doctor en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada en el año 2007. Desde 1996 pertenece al Departamento de Matemática y Física Aplicadas de la Universidad Católica de la Santísima Concepción, Chile. Línea de investigación Didáctica de la Probabilidad y Estadística.

EDUCACIÓN ESTADÍSTICA EN CURSOS INTRODUCTORIOS A NIVEL UNIVERSITARIO: ALGUNAS REFLEXIONES

ROBERTO BEHAR GUTIÉRREZ

PERE GRIMA CINTAS

MARIO MIGUEL OJEDA RAMÍREZ

CECILIA CRUZ LÓPEZ

RESUMEN

En este artículo se presentan una serie de consideraciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística en cursos introductorios en Instituciones de Educación Superior. El objetivo es ayudar a los profesores a reflexionar sobre su actividad docente y proporcionar ideas sobre posibles vías de mejora. Se identifican algunos factores que afectan el proceso, así como las perspectivas cuantitativa y cualitativa del aprendizaje y el significado de aprender estadística. Se caracterizan los enfoques profundo y superficial del aprendizaje, enfatizando la importancia de la motivación intrínseca del estudiante y su relación con el aprendizaje profundo.

Palabras clave: Metas de aprendizaje; motivación intrínseca; aprendizaje profundo.

1. ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA: RETOS Y OPORTUNIDADES

La estadística es bastante joven si tomamos en cuenta que se consolidó durante el último siglo y que la axiomatización de la teoría de la probabilidad la realizó Kolmogorov en la década de los años treinta. Por otro lado, la estadística como una metodología para estudios técnicos e investigaciones fácticas se empezó a utilizar ampliamente a partir de los años cuarenta y desde entonces, el proceso de difusión de esta disciplina se dio de una manera lenta y matizada por diversas problemáticas. La enseñanza estuvo asociada con cálculos y con la elaboración de cifras por el limitado desarrollo computacional de entonces. Por ejemplo, las tablas para la distribución F implicaron esfuerzos especiales y por mucho tiempo sólo existieron valores críticos para el 5% y el 1% de significancia, que aun hoy, que la computación y la informática han avanzado significativamente, siguen siendo referentes en publicaciones científicas. Este hecho evidencia cómo la comunicación del conocimiento y la enseñanza cambian muy lentamente. Se puede decir que la forma de enseñar estadística ha cambiado muy poco a pesar de que la educación en general ha tenido un gran desarrollo. Las facultades de ciencias de la educación y el desarrollo de la didáctica de la matemática, y más recientemente la didáctica de la estadística, son evidencias de este desarrollo. Sin embargo, el ejercicio de la docencia,

en general, y de la estadística en particular, no ha cambiado a pesar de muchas inquietudes y retos planteados por los especialistas (Sahai et al., 1996).

Se reconoce la importancia, por lo que muchos programas universitarios incluyen en su plan de estudios al menos un curso de estadística (Cobb, 1993) y en Ben-Zvi & Garfield (2004) mencionan que cada vez es mayor el número de cursos introductorios de estadística en el nivel universitario. En muchos países la estadística forma parte del currículo de la educación secundaria, e incluso de la educación primaria. Se acepta que el mundo moderno exige al ciudadano, para ejercer sus derechos y comprender su entorno, una alfabetización en estadística. Sin embargo, la calidad del proceso de enseñanza–aprendizaje de esta disciplina ha sido tradicionalmente relegada a un segundo plano. Homes (2003) hace énfasis sobre esto, indicando que los profesores dedican gran parte del tiempo en clase a lograr que los alumnos aprendan las técnicas estadísticas sólo con el fin de acreditar las evaluaciones, y restándole importancia a que comprendan la naturaleza del pensamiento estadístico. Por otra parte, los criterios de selección del profesorado y los estímulos a su desarrollo profesional, están ligados a incentivar la investigación en nuevas áreas, más que a reconocer los esfuerzos en la mejora de la docencia.

Pero a pesar ello, se aprecia una creciente preocupación, seguramente debido a que las formas de enseñanza tradicionales no están dando los resultados deseados (Moore, 2000). La problemática de la enseñanza de la estadística se respira en todos los rincones del orbe, como lo relaciona Simon (1990). Garfield (1991) resalta la actitud negativa de los estudiantes y su falta de competencias para aplicar la metodología estadística cuando terminan los cursos. Otros autores hablan de la frustración de los estudiantes (Bude et al., 2003; Dallal, 1990; Hey, 1983; Ruberg, 1992; Hogg, 1991), de sus dificultades para aprender los conceptos clave (Garfield y Ahlgren, 1988; Garfield y Ben-Zvi, 2007; Simon, 1990; Barlow, 1990), de cursos con un enfoque orientado a matemáticas (Efron y Tibshirani, 1993; Gattuso y Pannone, 2002; Kempthorne, 1980), con pocos atractivos para los estudiantes (Rosenthal, 1992) y como los cursos más difíciles (Murtonen y Lehtinen, 2003). Behar (1991) concluye que la problemática de la enseñanza de la estadística no tiene fronteras y se refiere un enfoque muy matemático, a la falta de formación de profesores, inadecuados objetivos de aprendizaje, esfuerzos infructuosos en el mejoramiento, etc.

Por otra parte, se están haciendo muchos esfuerzos para mejorar el aprendizaje de la estadística; muestra de ello es la *International Association for Statistical Education (IASE)*, la más grande asociación mundial con este fin, que es un organismo del *International Statistical Institute (ISI)*. La IASE tiene cada vez más presencia, no sólo a través de sus publicaciones, como el *Statistical Education Research Newsletter*, que es un importante mecanismo de difusión del trabajo y eventos sobre educación estadística, sino también por la organización de encuentros, reuniones y eventos, como

las ICOTS (*International Conference of Teaching Statistics*), que permiten compartir experiencias investigativas. Las publicaciones y memorias en este tipo de eventos son una evidencia del interés creciente.

La *American Statistical Association* (ASA) tiene un capítulo de educación estadística; existe el *Journal of Statistics Education* (JSE), disponible en la Web (<http://www.amstat.org/publications/jse/>). La revista *The American Statistician*, de la ASA, tiene la sección *Teachers' Corner*, además de publicar artículos de temas relacionados. También debemos mencionar el *magazine Chance*, dirigido a un público amplio, pero que puede ser aprovechado por profesores y estudiantes. La publicación *Teaching Statistics*, que publica *The Best of Teaching Statistics*, disponible en la web (<http://www.teachingstatistics.co.uk/>). Publicaciones relacionadas con la enseñanza de la matemática que publican artículos sobre la enseñanza de la probabilidad y de la estadística, como *Mathematics Teacher* y *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, entre otras. Otras fuentes, como páginas web (Behar y Grima, 2000), bibliografías (Sahai et al., 1996), libros, monografías y memorias (Barnet, 1983; Batanero, 2000; Burril, 1991; Hawkins, 1990; Gal y Garfield, 1997; Gelman y Nolan, 2002; Hulsizer y Woolf, 2009) son un buen reflejo del interés por la mejora de la enseñanza de la estadística.

2. ¿QUÉ SIGNIFICA APRENDER ESTADÍSTICA?

La investigación en educación estadística no cuenta con instrumentos de evaluación universalmente aceptados para medir el éxito de las estrategias de mejora. La pregunta es ¿qué significa aprender estadística? Aprender puede definirse teóricamente, pero la evaluación que aplican los profesores da cuenta de lo que significa para ellos en la práctica. Saljo (1979) entrevistó a estudiantes y clasificó las respuestas en categorías de aprendizaje como: 1. Incremento cuantitativo del conocimiento. 2. Memorización. 3. Hechos, destrezas, y métodos dominados. 4. Sentido o significado abstracto, de relación con otras materias y con el mundo real. 5. Interpretación de la realidad de una manera diferente, como reinterpretación del conocimiento. En las tres primeras, el aprendizaje es algo externo a quien aprende. El caso extremo es cuando el aprendizaje es entendido como algo que da el profesor. En este contexto la evaluación pide que el estudiante demuestre lo que recuerde y que sea capaz de aplicar algoritmos y procedimientos. Las concepciones 4 y 5 enfatizan el aspecto personal del aprendizaje, que es visto como algo que hace quien aprende con el propósito de entender el mundo real. Esta concepción es más relativista, compleja y sistémica; está más asociada al tema de las competencias.

La enseñanza debería ayudar al estudiante a entender los fenómenos como lo hacen los expertos. Ramsden (1992) dice que la educación superior es poco exitosa en tal sentido; los estudiantes no

mejoran su entendimiento del mundo físico. Numerosas investigaciones muestran que aunque muchos estudiantes saben ejecutar tareas y procedimientos rutinarios, y se apropian de terminología científica, además de que satisfacen las demandas de sus exámenes, son incapaces de mostrar qué entendieron; continúan profesando concepciones erróneas; sus ideas sobre el trabajo profesional son a menudo confusas; tienen dificultades para aplicar sus conocimientos a nuevos problemas; carecen de destrezas en el trabajo colaborativo. Los cambios conceptuales son “relativamente raros, frágiles y dependientes del contexto” (Dahlgren, 1984). En resumen, los estudiantes parecen retener información, pero pronto olvidan casi todo (Saunders, 1980), y no hacen buen uso de lo que recuerdan; experimentan cambios superficiales, pero mantienen concepciones ingenuas o erróneas. Más aún, muchos estudiantes son inconscientes de lo que no saben; no han desarrollado conciencia autocrítica. El que con estas flaquezas aprueben los exámenes implica que el significado de “aprender estadística” no está claro para los profesores; es decir, se hace énfasis en los cálculos y en los resultados numéricos, propiciando el aprendizaje superficial.

Gal y Garfield (1997) presentan las siguientes metas en el aprendizaje de la estadística:

- **Entender el propósito y la lógica de las investigaciones estadísticas.** Implica el reconocimiento de la existencia de la variación. La necesidad de describir poblaciones a partir de datos; de reducir datos crudos para notar las tendencias y rasgos principales, a través de resúmenes y despliegues en distintas formas. La necesidad de estudiar muestras en lugar de poblaciones.
- **Entender el proceso de investigación estadística.** Los pasos de una investigación estadística y el diseño del plan de recolección de los datos. Formulación de preguntas. Planear el estudio (Enfoque panorámico global, muestreo, elección de herramientas de medición). Colectar y organizar los datos. Despliegue gráfico, exploración y análisis de los datos. Interpretación considerando preguntas de investigación. Discusión, implicaciones de los hallazgos e identificación de futuros estudios.
- **Destreza en procedimientos clave.** Habilidades para el análisis estadístico, que incluyen la capacidad para organizar los datos, calcular indicadores (media, mediana, intervalos de confianza, etc.) o construir tablas y gráficos útiles, apoyándose en la tecnología (calculadora o computador).
- **Entender relaciones matemáticas.** Las principales ideas matemáticas que subyacen en las presentaciones estadísticas, en sus procedimientos y conceptos; deberán entender, por ejemplo, la conexión entre los indicadores y los propios datos; deberán comprender cómo la media es afectada por valores extremos, y la robustez de la mediana en este caso. En

síntesis, comprender las relaciones matemáticas que permitan ganar en comprensión de la estadística.

- **Entender el significado de azar y probabilidad.** Moore (1997) plantea que con unas cuantas ideas informales de probabilidad es posible comprender la inferencia estadística; a partir de experiencias del comportamiento aleatorio, comenzando con aparatos (monedas y dados por ejemplo) y continuando con simulaciones en el computador. Lo básico son: conceptos y palabras relacionadas con posibilidad, incertidumbre, azar, y otras que aparecen en la vida cotidiana, especialmente en los medios de comunicación.
- **Desarrollar destrezas interpretativas y cultura estadística.** Interpretar resultados e identificar posibles sesgos y limitaciones de las generalizaciones: interpretar los resultados y hacer preguntas y reflexiones críticas acerca de las conclusiones. (¿Qué tan fiables son las mediciones usadas? ¿Qué tan buena es la muestra? ¿Las conclusiones obtenidas se desprenden de los resultados de la muestra?).
- **Desarrollar habilidad para comunicar estadísticamente.** Estar capacitado para usar apropiadamente la terminología estadística y probabilística; comunicar los resultados en forma convincente y con argumentos estadísticos; las destrezas en la expresión escrita y oral para comunicar efectivamente los resultados de investigaciones estadísticas. Buena comprensión de lectura y destrezas en la comunicación para discutir críticamente con argumentos estadísticos.
- **Desarrollar una actitud positiva hacia la disciplina estadística.** Conciencia sobre la importancia de la estadística y su utilidad en la búsqueda del conocimiento.

A la vista de estas metas los profesores podemos reflexionar sobre si nuestros objetivos, nuestras clases, nuestros exámenes y, en general nuestra forma de enseñar están alineados o no con esos objetivos.

3. APRENDIZAJE DE LA ESTADÍSTICA: IDEAS Y ESTRATEGIAS

Biggs (1994) plantea que cualquier acción en el proceso de enseñanza-aprendizaje está sustentada en alguna teoría, en un conjunto coherente de suposiciones. Si se hace esto en lugar de aquello es porque se piensa que funciona mejor. Además, la explicación del por qué funciona mejor evidencia la existencia de una teoría, que puede estar implícita. A continuación comentamos algunos de estos marcos teóricos de forma que cada profesor pueda descubrir cuál teoría subyace en su práctica.

3.1 Perspectiva cuantitativa versus cualitativa

Una de las teorías implícitas con muchos adeptos es la perspectiva cuantitativa. En ésta, el aprendizaje es concebido como una agregación de contenidos; para ser buen estudiante hay que aprender mucho. El objeto de aprendizaje es tratado como paquetes discretos de declaraciones y procedimientos: trocitos de conocimiento, cada trozo independiente del otro. Así, el currículo está formado por unidades discretas de contenidos. El proceso de aprendizaje consiste en agregar diminutos paquetes, interiorizarlos, para luego reproducirlos en forma precisa y la enseñanza es la transmisión de conocimiento. Un curso de estadística es un listado de temas, que se agregan, pero sin un contexto con una problemática real a resolver; es decir, no es posible identificar la manera cómo actúan, su papel, su necesidad, su utilidad. Es como explicar qué es un tigre describiendo una oreja, luego una pata, un ojo, etc.; por muy buena que sea la descripción, la idea que se tendrá del tigre será muy deficiente. Se supone que, de alguna forma y en algún momento, las temáticas se unirán y harán sentido, y entonces en una situación real, el estudiante sabrá el lugar que ocupa cada tema y saldrá bien librado. El método más común de enseñanza es la conferencia magistral. La tarea del profesor es exponer y la del estudiante es escuchar y anotar. Muchos libros de texto refuerzan esta perspectiva: la obtención de los datos no es importante y los problemas propuestos son repetitivos y se resuelven con la aplicación de algoritmos.

En contraposición la perspectiva cualitativa, consistente con el enfoque constructivista, donde el estudiante aprende acumulativamente, interpretando, incorporando nuevo material, relacionándolo con lo que ya conoce; su entendimiento cambia progresivamente a medida que él aprende; se aprende gradualmente, más como una espiral; en cada nivel van tomando lugar cambios cualitativos. La problemática del currículo es decidir qué niveles de entendimiento son razonables en cada etapa. En el caso de la estadística, desde el primer momento y durante todo el curso, se pueden tratar ideas sobre variabilidad, estimación o contraste de hipótesis, que tendrán su nivel de profundidad particular en ese momento. Es como aprender qué es un tigre a través de una lente, que cada vez aumenta su nitidez. Desde el principio se ve al tigre completo, pero en cada vuelta de la espiral la lente aumenta su claridad y deja ver más detalles sobre las partes y sus nexos. Así, al empezar un curso introductorio de estadística, podrán formularse preguntas sobre comparación de poblaciones (tratamientos), sobre la imposibilidad de observación exhaustiva, sobre cómo obtener de datos pertinentes, sobre la comparabilidad de los datos sobre posibles factores de confusión que podrían entorpecer las comparaciones, posibles fuentes de variabilidad en la ejecución del experimento (o muestreo) y en el proceso de medición. Todo podría hacerse a través de un experimento real, donde todas las preguntas y los conceptos clave tendrían un contexto. La espiral seguirá con un nivel distinto de profundidad. La tarea del profesor no es transmitir en forma correcta lo que él entiende, sino ayudar al estudiante a

construir su propio entendimiento. Los contenidos se desarrollan en forma acumulativa, pero teniendo interconexiones horizontales con otros temas o materias, y conexiones verticales con el aprendizaje anterior y posterior del mismo tema (Godino, 1996). El proceso de enseñanza consiste en ayudar al entendimiento progresivo de los significados. El proceso es multidimensional y no lineal: es la intriga del gourmet y no la gula del glotón, dice Biggs (1994).

3.2 Aprendizaje superficial versus aprendizaje profundo

Biggs (1989) discute los elementos necesarios para el aprendizaje profundo y los divide en los siguientes cuatro puntos.

(1) Un contexto motivacional positivo, que posibilite la conciencia emocional. La motivación intrínseca es una condición necesaria para un enfoque profundo del aprendizaje. Lo común en los cursos introductorios de estadística es empezar con una motivación de muy bajo nivel, asociada generalmente con la necesidad de aprobar. El profesor pretende enseñar a resolver unos problemas que el estudiante no tiene. Construir un ambiente motivacional positivo, es una de las misiones importantes del profesor; generar motivos verdaderos y auténticos para aprender estadística.

(2) Un alto grado de actividad por parte del estudiante, relacionado con el trabajo y la reflexión. Las mejores preguntas son las que surgen del estudiante. El ambiente de la clase del magistral, donde el profesor se formula las preguntas y el mismo se las responde, genera pocas oportunidades para el aprendizaje verdadero. Formas de involucrar al estudiante pueden ser, por ejemplo, planteando problemáticas reales de su carrera en las cuales la variabilidad y la incertidumbre sean relevantes, al intentar resolverlas valorará sus limitaciones. Si participa desde las etapas más tempranas en el proceso de identificación del problema, entonces podrá reflexionar sobre los elementos fundamentales en el diseño del estudio, y diseñar estrategias para afrontar preguntas que surjan en el camino.

(3) Interacción con otros estudiantes, para que compartan sus apreciaciones, pongan en tela de juicio sus conocimientos, confronten sus creencias y construyan con la discusión sus propios conceptos. ¿Cómo sacar conclusiones a partir de los datos obtenidos? Aquí se confronta el conocimiento determinístico y se pueden descubrir algunos rasgos básicos del pensamiento estadístico, siendo los estudiantes protagonistas. Behar (2001) ha ilustrado cómo diseñar y aplicar estrategias en este sentido.

(4) Una base de conocimiento muy bien estructurada, con la longitud y profundidad para el enriquecimiento conceptual. Es la estructura adecuada del conocimiento y la relación con el contexto necesaria, no sólo por la limitación que produce la carencia de algunos conceptos o habilidades, sino también por el papel de las intuiciones a la variabilidad y la incertidumbre, que pueden estar en contradicción con los principios de la probabilidad y la estadística.

Por otra parte, los problemas donde se parte de los datos y se pide al estudiante que calcule cosas en una secuencia lineal no son realistas. En una prueba, es conveniente dar al estudiante una clase de problemas como los que él podría encontrarse en la vida real, en lugar de hacer únicamente un examen sobre conocimiento declarativo (Masters y Hill, 1988). Plantear situaciones en las que se debe descubrir la información que requiere para delimitar el problema, proponer estrategias para generar los datos, usando experimentación o muestreo, y cómo usar los datos para definir una solución plausible. En un principio, los planteamientos serán muy básicos pero iniciarán efectivamente al estudiantes en el pensamiento estadístico (Ojeda y Sahai, 2005). El enfoque basado en proyectos es una de las nuevas estrategias de innovación en el aprendizaje que está dando mejores resultados en los cursos de estadística, Carnell (2008) demuestra que con la inclusión de un proyecto diseñado por los propios estudiantes se puede tener un impacto significativo en la actitud de éstos hacia la estadística, al igual que Ojeda (2010) relata las experiencias vividas por una generación de estudiantes que desarrollan proyectos a lo largo del curso y que finalmente cambian la perspectiva que tenían hacia la estadística. Batanero y Díaz (2004) enfatizan que la inclusión de proyectos aumenta la motivación de los estudiantes.

La aproximación al aprendizaje está medida por el contexto, que coloca en la mente del estudiante el centro de su atención, sugerido por el énfasis que da el profesor. Marton et al. (1984) dejan claro cómo los estudiantes obligados a usar un enfoque superficial describen su resentimiento, depresión y ansiedad. En contraste, el enfoque profundo es generalmente asociado con un sentimiento de compromiso, reto y provecho, conjuntamente con plenitud personal y placer. Svennson (1977) mostró la conexión entre rendimiento en los exámenes y aproximación al aprendizaje. Los estudiantes que asumen un enfoque profundo encuentran el material más interesante y más fácil de entender y, por lo tanto, están más dispuestos a invertir más tiempo en la tarea. En contraste los que usan enfoque superficial encuentran la actividad tediosa, aburrida e infructuosa. En enfoque superficial los estudiantes invertirán menos tiempo en el estudio y consecuentemente fallarán más en sus exámenes (Ramsden, 1992). La conexión enfoque-satisfacción es recíproca; mientras el enfoque usado determina el nivel de disfrute y satisfacción, también es cierto que el interés genuino en la tarea estimula el enfoque profundo. Sawyer (1943) dice: “La auténtica educación hace imposible los fallos garrafales, pero ésta es la menor de sus ventajas. Mucho más importante es librarse de la innecesaria tensión, la ganancia de seguridad y confianza en la mente. Es muchísimo más fácil aprender la materia apropiadamente que aprender una mala imitación. La auténtica materia es interesante. Entre más aburrida y monótona le parezca una materia, más seguro debe estar que usted la está enfocando desde el ángulo equivocado. Todos los descubrimientos, todos los grandes logros, han sido realizados por hombres quienes disfrutaban su trabajo”. La evidencia de la conexión es robusta en dos conclusiones:

la primera, el enfoque superficial está fuertemente ligado a un pobre aprendizaje, mientras que un enfoque profundo está relacionado con un aprendizaje efectivo. Afirma Ramsden (1992) que el enfoque superficial nunca conduce al entendimiento, es condición necesaria y suficiente para un aprendizaje de pobre calidad. El enfoque profundo, por otro lado, es una condición necesaria pero no suficiente para resultados de alta calidad, pues existen muchos factores determinantes del contexto, que pueden influir también. En este sentido, vale la pena explorar por qué razones un mismo estudiante adopta uno u otro enfoque. Esto dará bases para responder ¿Cómo estimular a los estudiantes a adoptar un enfoque profundo?

El enfoque es una respuesta al ambiente educativo. En la jerga fenomenológica, un “enfoque” es un fenómeno “intencional” el cual es dirigido hacia fuera del individuo, hacia el mundo real, al mismo tiempo que ese individuo está siendo definido por dicho mundo. No es algo que el estudiante tenga; es la manera como un estudiante experimenta la educación. Lo importante es que los estudiantes se adaptan a los requerimientos; harán aquellas cosas que les traerán compensaciones. Todos los estudiantes, en todos los sistemas educativos y a todos los niveles, actúan de la misma forma. El ambiente educativo o contexto es el currículo, los métodos de enseñanza y de los procesos de evaluación. En este sentido, Ramsden (1992) cita a Pirsig (1974), “La escuela te enseña a imitar. Si tú no imitas lo que el profesor quiere, obtienes una mala calificación. Aquí en la universidad, la situación es más sofisticada, por supuesto. Se supone que se debe imitar al profesor de tal manera que lo convenza que no lo está imitando”.

Algunos métodos de enseñanza son mejores que otros, pero los efectos son impredecibles. Los estudiantes responden a situaciones que ellos perciben. Es imperativo ser consciente de la divergencia que existe entre la intención y la percepción. ¿Puede instruirse al estudiante en el uso del enfoque profundo? La respuesta es negativa, lo cual es consistente con los resultados obtenidos en las investigaciones de Marton y Säljö (1984). No es posible cuando el ambiente educativo da el mensaje que el enfoque superficial es premiado. El enfoque es inseparable del contenido y del contexto en el cual el estudiante aprende. El enfoque depende particularmente de sus experiencias previas y del interés en la tarea. Es difícil separar el contexto de las experiencias previas. En el caso de la estadística, muy probablemente afecten las experiencias previas en sus cursos de matemática.

Fransson (1977) mostró que la motivación intrínseca y la ausencia de ansiedad están relacionadas con el uso de un enfoque profundo. Fallos para percibir la relevancia se asociaron con un enfoque superficial. El conocimiento previo y el interés por la materia estuvieron relacionados entre sí; ambos afectados por las experiencias previas. Concluyó que la manera como un estudiante percibe el aprendizaje es determinada por sus experiencias previas. Las experiencias anteriores no están solamente referidas a conocimientos, sino también a preconcepciones. En el caso de la estadística, cada

estudiante, independientemente de que haya tomado cursos de estadística, ha enfrentado situaciones y se ha formado juicios que podrían entrar en contradicción con los nuevos conceptos.

3.3 Estadística versus matemáticas

En el contexto de una organización académica matricial, si un departamento de matemáticas ofrece un curso de estadística, éste podría tener un tinte muy marcado hacia la probabilidad y poco énfasis en la toma de datos y en ejemplos de aplicación práctica, generándose así un contexto de aprendizaje que puede determinar o limitar la relación del estudiante y el objeto. Green (1992) presenta énfasis y sesgos, que son descritos en forma de confrontaciones. Algunas de estas confrontaciones son:

- Estadística versus matemática. Se da mucha importancia al tratamiento formal de la probabilidad y la inferencia estadística, intentando deducir y construir proposiciones estadísticas, sin importar las aplicaciones. El curso puede convertirse en un nuevo curso de matemática, pues el proceso que domina es casi completamente deductivo, mientras que la estadística en su aplicación sigue un proceso inductivo, que no es abordado suficientemente. El estudiante se capacita para aplicar las propiedades de algunos operadores y resolver algunas ecuaciones para descubrir si se cumple o no una afirmación matemática, es decir, domina el proceso deductivo, con poco contacto con la realidad, la cual debería ser el objeto último del aprendizaje de la estadística.
- Estadística versus probabilidad. Se asume que para abordar la inferencia estadística o el análisis de datos se debe recorrer un largo camino de la probabilidad, invirtiendo mucho tiempo en temáticas como combinatoria, y reglas y teoremas de la teoría de la probabilidad. Este enfoque ha sido muy discutido; Moore (1997) plantea que es posible entender los conceptos básicos de la estadística con pocos conocimientos formales de probabilidad. Considerando que el tiempo de un curso introductorio es limitado, se debe privilegiar los conceptos estadísticos en su aplicación.
- Estadística versus análisis de datos. Se empieza con análisis de datos; se presentan las herramientas del análisis exploratorio (AED), al tiempo que se pone en evidencia su alcance y limitaciones. En una etapa posterior, el AED puede convertirse en importante apoyo para entender conceptos como el de función de densidad de probabilidad, media, varianza, etc. Evidentemente, puede suceder que se confunda estadística con AED, y puede ser desastroso si se presentan procedimientos y gráficos descontextualizados.

3.4 Motivación intrínseca versus motivación extrínseca

La educación estadística tradicional se basa en supuestos tácitos falsos, como que los estudiantes vienen vacíos de conocimiento y en la clase se los llena. Debe aceptarse que los estudiantes ya tienen una percepción de la aleatoriedad, para hacer juicios frente a la incertidumbre. Garfield y Ahlgren (1988) y Konold (1995), citan cómo conceptos falsos relacionados con la probabilidad y la estadística tienen un impacto muy fuerte en la eficiencia del aprendizaje. Batanero (2001) estudia concepciones erróneas del razonamiento estocástico en contenidos de estadística a nivel secundario, y concluye que además de los conocimientos básicos previos y las preconcepciones, el interés intrínseco parece conducir a un enfoque profundo. Mohamed (2012), recomienda que para mejorar el razonamiento probabilístico en los estudiantes se use una enseñanza basada en investigaciones y simulaciones.

El aprendizaje es una actividad personal e intransferible, lo cual significa que se requiere de la voluntad y el esfuerzo ¿Cuál es la razón que impulsa a un estudiante a apropiarse del conocimiento en un curso de estadística? En otras palabras ¿qué mueve al estudiante a invertir una mayor o menor cantidad de energía? Kleinginna y Kleinginna (1981) definen motivación como un estado interno o condición que sirve para activar o energizar el comportamiento y darle dirección. Franken (1994) adiciona una componente: el estímulo, dirección y persistencia del comportamiento. Muchos autores sostienen que los factores que energizan el comportamiento son distintos de los que generan la persistencia. Se sostiene que un comportamiento de aprendizaje no ocurrirá a menos que sea energizado. Lumsden (1994) plantea que la motivación está asociada con el deseo de participar en el proceso de aprendizaje. Lepper (1988) distingue, por su naturaleza cualitativa, dos tipos de motivación: La motivación intrínseca, que supone un auténtico compromiso con una actividad de aprendizaje. Por otra parte, la motivación extrínseca asume el aprendizaje como un medio para obtener un premio o para evitar un castigo; por ejemplo, una calificación aprobatoria, un grado, una mención de honor, una beca, satisfacer a su profesor, etc. Rinaudo et al. (2003) consideran que la motivación intrínseca parte de las acciones que genera la propia actividad, considerada como un fin en sí misma y no como un medio para alcanzar otras metas y la motivación extrínseca, se caracteriza como la acción que lleva al individuo a realizar para satisfacer otros motivos que no están relacionados con la actividad en sí misma, sino más bien con la consecución de otras metas que en el campo escolar suelen fijarse en: obtener buenas notas, lograr reconocimiento por parte de los demás, evitar el fracaso, ganar recompensas, etc. La estrategia de enseñanza debería propiciar el enfoque profundo, el cual reduce la ansiedad (Roiter y Petocz, 1996). La motivación intrínseca es entonces un camino más seguro hacia el aprendizaje, y en este sentido el profesor juega un papel central, como generador de contextos que aumenten la probabilidad de éxito en la adopción de un enfoque profundo, propiciando la motivación intrínseca. Lumsden (1994) presenta algunas cualidades que contribuyen a la motivación. Una de ellas

es el aprendizaje contextualizado. Tareas que signifiquen un reto alcanzable, estimulan la curiosidad del estudiante y se constituyen en un elemento de motivación intrínseca. Se recomienda plantear problemas relacionados con la profesión que difícilmente pudieran ser resueltos sin el uso de la estadística.

Sowey (1995) se refiere al aprendizaje a largo plazo. Una buena evaluación mide el logro de los objetivos; sin embargo, el estudiante deberá asumir el reto de usar los conocimientos aprendidos en su vida profesional. ¿Cuál es el conocimiento que deberá permanecer para asegurar el éxito? ¿Qué aumenta la posibilidad del conocimiento a largo plazo? Un aspecto que genera motivación intrínseca y aprendizaje a largo plazo es la utilidad práctica del conocimiento. Ballester (2005) especifica que para producir un auténtico aprendizaje a largo plazo hay que conectar la estrategia didáctica del profesor con las ideas previas del alumnado y presentar la información de manera coherente y no arbitraria, por lo que se construirán de manera sólida los conceptos, interconectando unos con otros en forma de red de conocimiento. En este sentido, la participación en un proyecto en un área de interés del estudiante, podría impactar en varias aristas del aprendizaje. Podría producir motivación intrínseca, reforzar los conceptos y aumentar las posibilidades de un enfoque profundo y garantizar aprendizaje a largo plazo (Ojeda y Sahai, 2005).

Sowey (1995) plantea dos rasgos en el proceso de enseñanza: La estructura y la valía del conocimiento. Estructura es la coherencia de la temática en su presentación. Una exposición coherente permite hilar la secuencia para garantizar el uso de la técnica en la práctica. La clave es la lógica dentro de cada tema. Un patrón de coherencia unifica diversos temas. La coherencia muestra la relación de la estadística con otras disciplinas. Por otro lado, la valía es la componente emocional, afectiva, la excitación intelectual.

4. A MANERA DE CONCLUSIÓN

Para mejorar la educación estadística se debe tener en cuenta que el aprendizaje es una tarea personal, que es construido desde la perspectiva del estudiante; que sólo se puede aprender desde el enfoque profundo, y que la motivación intrínseca, el conocimiento previo y las concepciones del estudiante son factores importantes. La clase es un proceso que se autorregula, con base en la percepción que los estudiantes tengan del curso y del profesor, y que existe una permanente retroalimentación que define la actuación del estudiante, que puede propiciar el enfoque superficial o profundo del aprendizaje; que este hecho hace que algunos comportamientos no deseables sean ecológicamente válidos; que la naturaleza de la evaluación juega un papel importante y que lo dinámico del comportamiento sistémico hace que el profesor también deba “observar” en forma permanente para actuar y mantener el equilibrio en el ecosistema.

Buena enseñanza y buen aprendizaje están ligados a través de la forma como la experimentan los estudiantes. Siguiendo a Ramsden (1982), la buena enseñanza es aquella que estimula el aprendizaje de alta calidad. Es aquella que desestimula el enfoque superficial, representado por la “imitación de sujetos”; estimula la participación activa y no permite evadir el entendimiento; contribuye a mirar el mundo real de una manera diferente. Todo, en consecuencia, se relaciona con el diseño del currículo, con los métodos de enseñanza y con la evaluación. Aquí, la palabra enseñanza es usada en un sentido amplio, que puede incluir el diseño del currículo, la elección de contenidos y métodos, varias formas de interacción profesor-estudiante, además de la evaluación.

En este sentido, preguntar sobre cómo lograr una buena enseñanza, va en la misma dirección de las preguntas: ¿Cómo la enseñanza puede estimular el aprendizaje profundo? ¿Cómo puede la enseñanza despertar el interés en la materia y lograr cambios en el entendimiento? ¿Qué se sabe acerca de la enseñanza efectiva? ¿Cómo se relaciona con lo que los estudiantes dicen sobre su aprendizaje? ¿Qué significa buena enseñanza en la práctica? No existe una manera única, uniformemente válida, de participar en el proceso de enseñanza-aprendizaje, pues el contenido y contextos específicos son esenciales; sin embargo, siguiendo a Ramsden (1982), podría decirse que son rasgos de una buena enseñanza: el deseo de compartir un amor por la materia; la habilidad para hacer interesante y estimulante el material; la facilidad para comunicarse con los estudiantes tomando en cuenta su nivel de entendimiento; la capacidad para explicar plenamente el material; el compromiso para hacer claro lo que debe ser entendido; el interés y respeto por los estudiantes; compromiso para generar la independencia de los estudiantes; habilidad para improvisar y adaptarse a nuevas demandas; uso de métodos de enseñanza y tareas para aprender activa, responsable y cooperativamente; uso de métodos válidos de evaluación; atención sobre los conceptos clave y las concepciones erróneas que pueden tener los estudiantes; uso de esquemas de retroalimentación sobre el trabajo de los estudiantes; deseo de aprender de los estudiantes y de otras fuentes acerca de los efectos de la enseñanza y de cómo mejorarla.

Diaz (2006) sugiere que un profesor debe conocer las claves metodológicas que determinan el aprendizaje profundo y debe evitar que con su forma de enseñar esté estimulando el aprendizaje superficial en el estudiante. De esto depende, la calidad de su actuación como docente. Por lo tanto, se espera que a partir de este marco un profesor de estadística pueda hacer un primer diagnóstico sobre su proceso de enseñanza-aprendizaje y determine algunos caminos para el mejoramiento.

REFERENCIAS

Barlow, R. (1990). *Statistics*. New York: Wiley.

- Barnett, V. (1983). *Statistical Education-Enseñanza de la Estadística*. Spain: Vitoria, Gobierno Vasco, Dirección de estadística. (Bilingual edition).
- Batanero, C, Garfield, J., Ottaviani, M.G. y Truran, J. (2000). Research in Statistical Education: Some priority Questions. *Statistical Education Research Newsletter*, (IASE), 1(2).
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Grupo de Investigación estadística. España: Universidad de Granada.
- Batanero, C. y Díaz, C (2004). El Papel de los Proyectos en la Enseñanza y Aprendizaje de la Estadística. En J. Royo, P. (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp. 125-164). Zaragoza: ICE.
- Ballester, A. (2005). El Aprendizaje Significativo en la Práctica. Equipos e Investigación y Ejemplos en Didáctica de la Geografía. Congreso Internacional Virtual de Educación.
- Behar, R. (2001). *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España.
- Behar, R. y Grima, P. (2000). Selección de recursos en Internet para la enseñanza de la estadística (Applets, portales, libros y otros). *Boletín de la Sociedad Española de Estadística e Investigación de Operaciones* (SEIO), 14(4).
- Ben-Zvi, D. & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: goals, definitions, and challenges. In *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking*, Eds. D. Ben-Zvi and J. Garfield, pp.3–16. Dordrecht: Kluwer Academic.
- Biggs, J. B. (1989). Approaches to the Enhancement of Tertiary Teaching. *Higher Education Research and Development*, 8, 7-25.
- Biggs, J. B. (1994). Students Learning Research and Theory-Where do we currently stand? En: Gibbs, J. (Ed.). *Improving Student Learning-Theory and Practice*. Oxford: Centre for Staff Development.
- Budé, L., Van De Wiel, M. W. J., Imbos, T., Candel, M. J. J. M., Broers, N. J., and Berger, M. P. F. (2007), "Students' Achievements in a Statistics Course in Relation to Motivational Aspects and Study Behaviour," *Statistics Education Research Journal* [Online], 6(1), 5-21. [http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ6\(1\)_Bude.pdf](http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ6(1)_Bude.pdf)
- Burril, G. (Ed.) (1991). *Guidelines for the Teaching of Statistics*. Alexandria, Virginia, USA: ASA.
- Carnell, L.J. (2008). The Effect of a Student-Designed Data Collection Project on Attitudes Toward Statistics. *Journal of Statistics Education*. 16 (1). 1-15.
- Cobb, G. W. (1993), Reconsidering Statistics Education: A national Science Foundation Conference. *Journal of Statistics Education*, 1(1).
- Dahlgren, L.O. (1984). Outcomes of Learning. In Marton, F. et al. (Eds.). *The Experience of Learning*. Edinburgh: Scottish Academic press.
- Dallal, G. E. (1990). Statistical Computing Packages: Dare We Abandon Their Teaching to Others? *The American Statistician*, 44 (4), 265- 266.
- Díaz, M.M. (2006). Metodologías para optimizar el aprendizaje: segundo objetivo del Espacio Europeo de Educación Superior. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 57, 71-92.
- Efron, B. and Tibshirani, R. J. (1993). *An Introduction to the Bootstrap*. New York: Chapman and Hall.
- Franken, R. (1994). *Human Motivation*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole.

- Fransson A. (1977). On Qualitative Differences in Learning. IV_Effects of Motivation and Anxiety Test on Process and Outcomes. *British Journal of Educational Psychology*, 47, 244-257.
- Gal, I. and Garfield J. (1997). Curricular Goals And Assessment Challenges. In: Gal, I. and Garfield, J. (Eds). *The Assessment Challenge in Statistics Education*. The Netherlands: IOS Perss, ISI, Voorburg.
- Garfield, I. and Ahlgren, A. (1988). Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research. *Journal in research of mathematics Education*, 19, 44-63.
- Garfield, J. and Ben-Zvi, D (2007), "How Students Learn Statistics Revisited: A Current Review of Research on Teaching and Learning Statistics," *International Statistical Review*, 75, 372 – 396.
- Garfield, B. J. (1991). Reforming the Introductory Statistics Course. *American Educational Research Association Annual Meeting*, Chicago.
- Gattuso, L. & Pannone, M. (2002). Teacher's training in a statistical teaching experimentation. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics* (pp. 685-692). Cape Town: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute.
- Gelman, A. & Nolan, D. (2002). *Teaching Statistics: A Bag of Tricks*. USA: Oxford University Press.
- Green, D. (1992). *Data analysis: What Research Do We Need?* England: Loughborough University.
- Hawkins, A. (Ed.) (1990). *Training Teacher To Teach Statistics*. The Netherlands: ISI, Voorburg.
- Hey, J.D. (1983). *Data in Doubt: An Introduction to Bayesian Statistical Inference for Economists*. Oxford: Martin Robertson.
- Hogg, R.V. (1991). Statistical Education: Improvements are Badly Needed. *The American Statistician*, 45, 342-343.
- Holmes, P. (2003). 50 years of statistics teaching in English schools: some milestones. *The Statistician*, 52(4), 439-474.
- Hulsizer, M. R. and Woolf, L. M. (2009). *A Guide to Teaching Statistics: Innovations and Best Practices* United Kingdom: Wiley-Blackwell.
- Kemphorne, O. (1980). The Teaching of Statistics: Content Versus Form. *The American Statistician*, 34(1), 17-21.
- Kleinginna, P.R. and Kleinginna, A.M. (1981). A Categorized List of motivations definitions, with suggestions for a consensual definition. *Motivation and Emotion*, 5, 263-291.
- Konold, C. (1995). Issues in Assessing Conceptual Understanding in Probability and Statistics. *Journal of Statistical Education*, 3(1), 1-9.
- Marton, F. (1988). *Describing and Improving Learning*. In: Schmeck, R.R. (Ed.). *Learning Strategies and Learning Styles*. New York: Plenum.
- Marton, F. y Säljö, R. (1984). Approaches to Learning. In: F. Marton et al. (Eds.). *The Experience of Learning*. Edinburgh: Scottish Academic Press.
- Marton, F., Hounsell, D. J. and Entwistle, N. J. (1984). *The Experience of Learning*. Edinburgh: Scottish Academic Press.
- Masters, G. N. and Hill, P. W. (1988). Reforming The Assessment Of Student Achievement In The Senior Secondary School. *Australian Journal of Education*. 32(3), 274-286.

- Mohamed, N. (2012). Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Moore, D. (1997). New Pedagogy and New Content: El Case of Statistics. *International Statistical Review*, 65, 123-165.
- Murtonen, M. and Lehtinen, E (2003). Difficulties Experienced by Education and Sociology Students in Quantitative Methods Courses. *Studies in Higher Education*. 28(2) 171-185.
- Ojeda, M.M. (2010). *Aprender Estadística con proyectos. Memoria de una experiencia replicable*. Xalapa: Universidad Veracruzana.
- Pirsig, R. M. (1974). *Zen And The Art Of Motorcycle Manintenance*. London: The Bodley head.
- Ramsden, P. (1992). *Learning to Teach in Higher Education*. New York: Routledge.
- Rinaudo, M.C. Chiecher, A. y Donolo, D. (2003). Motivación y uso de estrategias en estudiantes universitarios. Su evaluación a partir del *Motivated Strategies Learning Questionnaire*. *Anales de psicología*, 19(1), 107-119.
- Roiter, K., and Petocz, P. (1996). Introductory Statistics Courses-A New Way of Thinking. *Journal of Statistics Education*, 4(2), 233-243.
- Rosenthal, R. (1992). *No mas sadística, no mas sadísticos, no más víctimas*. Editorial de la Journal UMAP.
- Ruberg S.J. (1992). *Biopharmaceutical Report*, 1, Summer.
- Sahai, H; Khurshid, A. and Misra, S. Ch. (1996). A Second Bibliography on the Teaching of Probability and Statistics. *Journal of Statistics Education*, 4(3).
- Saunders, P. (1980). The Lasting Effects of Introductory Economics Courses. *Journal of Economic Education*. 12, 1-14.
- Sawyer, W.W. (1943). *Mathematician's Delight*. Hardmondworth: Pengüin.
- Sowey, E.R. (1995). Teaching Statistics: Making It Memorable. *Journal of Statistics Education*. 3(2).
- Svennson, L. (1977). On Qualitative Differences in Learning. III- Study of Skills and Learning. *British Journal of Educational Psychology*, 47, 233-243.

STATISTICAL EDUCATION IN INTRODUCTORY COURSES AT THE UNIVERSITY

LEVEL: SOME REFLECTIONS

ABSTRACT

This article presents several considerations about the teaching-learning in introductory Statistics courses in higher education institutions. The goal is help teachers to reflect about their teaching activity and provide ideas of possible improvement ways. It identifies some factors that affect the process, as well as quantitative and qualitative perspectives of learning and the meaning of learning Statistics. The article characterizes the deep and superficial approaches of learning, emphasizing the importance of student intrinsic motivation and its relationship to deep learning.

Keywords: Learning goals; Intrinsic motivation; Learning deep.

EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA EM CURSOS INTRODUTÓRIOS NO NÍVEL UNIVERSITÁRIO; ALGUMAS REFLEXÕES

RESUMO

Neste artigo, apresentamos algumas considerações sobre o processo de ensino e aprendizagem da estatística em cursos introdutórios em instituições de ensino superior. O objetivo é ajudar aos professores a refletir sobre o seu ensino e fornecer idéias sobre as possíveis formas de melhoria. São identificados alguns fatores que afetam o processo, bem como as perspectivas quantitativas e qualitativas da aprendizagem e o significado da aprendizagem da estatística. São caracterizados os enfoques profundos e superficiais da aprendizagem, enfatizando a importância da motivação intrínseca do estudante e sua relação com a aprendizagem profunda.

Palavras-chave: Metas da aprendizagem, motivação intrínseca, aprendizagem profunda.

ROBERTO BEHAR GUTIÉRREZ

Escuela de Ingeniería Industrial y Estadística. Universidad del Valle, Colombia

robehar@yahoo.com

Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad Politécnica de Cataluña, Maestro en Estadística por el Colegio de Postgraduados, Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Santiago de Cali, y Licenciado en Estadística por la Universidad del Valle, Colombia. Profesor titular de esta última institución desde 1979. Sus líneas de investigación son: Mejoramiento de Estimadores en Poblaciones Estadísticas, Educación Estadística. Sus temáticas de interés: Gestión de la Calidad, Regresión múltiple, Muestreo, Mejoramiento de la enseñanza, Modelación Jerárquica. Ha colaborado en actividades de administración como Miembro de Consejo de Centro en la Universidad del Valle. Entre sus distinciones destacan: obtener la Mención de Honor en la Maestría en el Colegio de Postgraduados en 1987, ser nombrado profesor distinguido en la Universidad del Valle en 1993 y obtener el haber obtenido el Excento Cum Laude en su Tesis Doctoral en 2001.

PERE GRIMA CINTAS

Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad Politécnica de Cataluña, España

pere.grima@upc.edu

Doctor Ingeniero Industrial. Profesor Titular en el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC). Tras una primera etapa profesional en la industria, se incorporó a la UPC donde desarrolla sus tareas docentes en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y en la Facultad de Matemáticas y Estadística, donde ha sido Vicedecano Jefe de Estudios de Estadística. Ha escrito artículos sobre estadística y gestión de la calidad en revistas internacionales como *Quality Engineering*, *Quality and Reliability Engineering*, *Journal of Applied Statistics*, *Total Quality Management & Business Excellence* o *Six Sigma Forum Magazine*, y también sobre docencia en la revista *Estadística Española* y en *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, entre otras. También ha publicado libros de divulgación como “La certeza absoluta y otras ficciones. Los secretos de la estadística”, RBA, 2010 y sobre estadística industrial como “Industrial Statistics with Minitab” Wiley, 2012.

MARIO MIGUEL OJEDA RAMÍREZ

Facultad de Estadística e Informática. Universidad Veracruzana, México

mojeda@uv.mx

Doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de la Habana, Maestro en Ciencias en Estadística por el Colegio de Posgraduados y Licenciado en Estadística por la Universidad Veracruzana. Profesor de esta última institución desde 1981. Ha publicado: 92 artículos de investigación, 48 de comunicación y divulgación, 25 libros y 6 capítulos de libros. Sus líneas de investigación son: Modelación estadística, Aplicaciones de la metodología estadística y Educación estadística. Sus temáticas de interés: Enfoque basado en proyectos, Diseño de programas basado en competencias, Formación de la cultura estadística para investigadores; Mejora continua, Gestión de la calidad y Metodología Seis Sigma; Modelos lineales para datos categóricos, Modelos de componentes de varianza y covarianza, Modelos lineales multinivel; Diseño y análisis de encuestas, Análisis de datos y Métodos multivariados. Es miembro regular de la Academia Mexicana de Ciencias y profesor de perfil deseable reconocido por el PROMEP. Ha sido funcionario universitario en: Dirección de Posgrado, Dirección General de Desarrollo Académico, en Dirección General del Área Académica Económico-Administrativa, Dirección de Planeación Institucional y actualmente en la Dirección General de la Unidad de Estudios de Posgrado.

CECILIA CRUZ LÓPEZ

Doctorado en Investigación Educativa, Universidad Veracruzana, México

cecacruz@uv.mx

Estudiante del Doctorado en Investigación Educativa por la Universidad Veracruzana, Maestra en Ciencias con Especialidad en Estadística Aplicada por el Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, Licenciada en Estadística por la Universidad Veracruzana. Sus líneas de investigación son: Educación Estadística y Aplicaciones de la metodología estadística. Sus temáticas de interés: Enfoque basado en proyectos, Gestión de la Calidad, Modelos multinivel, Análisis de datos y Métodos multivariados. Entre sus distinciones destacan: Ser becaria CONACYT 2011-2015, Becaria de Asistencia ITESM 1999 a 2001, Haber obtenido uno de los tres primeros lugares de aprovechamiento en la generación 1994-1998 de la Licenciatura en Estadística y Becaria por aprovechamiento en la Universidad Veracruzana de 1994-1998.

LA ESTIMACIÓN DE LA CORRELACIÓN: VARIABLES DE TAREA Y SESGOS DE RAZONAMIENTO

MARIA M. GEA

CARMEN BATANERO

GUSTAVO R. CAÑADAS

PEDRO ARTEAGA

JOSÉ M. CONTRERAS

RESUMEN

La correlación es un concepto estadístico central, pues extiende la idea de dependencia funcional a variables estadísticas. Sin embargo, la investigación previa ha descrito sesgos de razonamiento y dificultades asociadas a su comprensión. En este trabajo se analiza la importancia de la correlación como idea estocástica fundamental y su lugar en el currículo español. Seguidamente nos centramos en las tareas de estimación de la correlación, describiendo las principales variables que determinan su dificultad. Se resumen los resultados de las investigaciones sobre concepciones erróneas y sesgos de razonamiento identificados en las mismas. Finalmente se presentan algunas implicaciones para la investigación y la enseñanza.

Palabras clave: *Correlación; tareas de estimación; variables de tarea; sesgos y concepciones erróneas.*

1. INTRODUCCIÓN

Explicar, controlar y predecir los sucesos que se presentan a lo largo de la vida depende de habilidades y destrezas para detectar covariaciones entre los acontecimientos (Alloy y Tabachnik, 1984). En consecuencia, el razonamiento covariacional es una actividad cognitiva fundamental para el desarrollo del ser humano (Moritz, 2004; Zieffler, 2006; McKenzie y Mikkelsen, 2007) aunque no por ello está exenta de dificultades.

Disciplinas como la psicología, sociología y la didáctica de la estadística han analizado las dificultades en la realización de un juicio de covariación y las variables que influyen en dicha tarea. Dichas investigaciones indican que el razonamiento humano se comporta, en situaciones de incertidumbre, de un modo inadecuado, debido a los valores y creencias del propio individuo, que interaccionan con la situación que se le presenta. Como consecuencia, el procesamiento humano de la información difiere de un proceso algorítmico en el que, paso a paso y siguiendo criterios dados, se produce una solución dentro de una clase de problemas (Batanero, 2001; Moritz, 2004).

La finalidad de este trabajo es realizar una síntesis de estas investigaciones para informar al profesor de estadística sobre estas dificultades, de forma que sean tenidas en cuenta en el diseño de experiencias de enseñanza que contribuyan al desarrollo del razonamiento covariacional de sus estudiantes. Nos centraremos únicamente en la percepción de la covariación entre variables numéricas y la estimación de su intensidad (que llamaremos tareas correlacionales, en adelante).

Dichas nociones aparecen en el estudio de la estadística, en especial en la educación secundaria, bachillerato y universidad. Se suele comenzar el trabajo con las mismas en el análisis de la presencia de covariación entre dos variables a partir de un diagrama de dispersión; para diferenciar el sentido y valorar intuitivamente su intensidad. Esta aproximación intuitiva da paso posteriormente al desarrollo formal de las ideas de covarianza, correlación y coeficiente de correlación y posteriormente para realizar un estudio de regresión. Por su importancia, lleva al profesorado *“a interesarse por el razonamiento de los estudiantes en cuanto a la lectura diagramas de dispersión, a la interpretación de la correlación y otras destrezas que son utilizadas en el estudio e interpretación de los datos bivariados”* (Zieffler, 2006, p. 7).

Para llevar a cabo esta síntesis, hemos revisado los trabajos resumidos en Pérez Echeverría (1990), Estepa (1994, 2004), Shaughnessy (1992, 2007), Shaughnessy, Garfield y Greer (1996) y Engel y Sedlmeier (2011). Se analizaron también las investigaciones relacionadas publicadas en los congresos ICOTS (International Conference on Teaching Statistics) y las principales revistas y congresos de educación estadística.

En lo que sigue presentamos esta síntesis, comenzando por analizar la importancia de la correlación, como idea estocástica fundamental. Seguidamente, analizamos los pasos en la estimación de una tarea correlacional, presentando las variables que pueden influir en su dificultad y las estrategias de los estudiantes en la resolución de estas tareas. A continuación, se resumen los principales resultados de la investigación sobre concepciones erróneas, sesgos y dificultades en la estimación de la correlación y se finaliza con algunas implicaciones para la enseñanza del tema.

2. LA CORRELACIÓN: UNA IDEA ESTOCÁSTICA FUNDAMENTAL

Cuando se planifica la enseñanza de una materia, como el caso de la estadística, se debe prestar especial atención al conjunto de conceptos sobre los cuáles se apoya y fundamenta. El primero que habló en educación estadística de ideas fundamentales fue Heitele (1975), quien identificó las mismas en el campo de la probabilidad. Dicho autor toma de Bruner (1960) los siguientes principios:

1. La finalidad de la enseñanza es ayudar a los estudiantes a construir las ideas fundamentales.

2. Estas ideas se caracterizan porque pueden ser enseñadas en forma comprensible a estudiantes de diferente edad, siempre que se elija un lenguaje, grado de formalización y actividades adecuadas a su nivel de desarrollo cognitivo.
3. Las ideas fundamentales deben ser la guía que estructura el currículo, desde la escuela primaria a la universidad, para garantizar una cierta continuidad. Por ello se han de enseñar en diferentes niveles cognitivos y lingüísticos, formando una “espiral curricular”.
4. La transición de un estudiante a un nivel cognitivo superior se facilita si el tema subyacente ha sido estudiado y comprendido en un nivel de abstracción adecuado en las etapas educativas anteriores. Es decir, es preferible que el niño comience a estudiar el tema poco a poco, aunque en un principio sólo lo comprenda de forma limitada, en lugar de esperar a que madure y se le pueda enseñar directamente en forma más abstracta.

En consecuencia, las ideas fundamentales estocásticas pueden presentarse al estudiante en cada etapa de su desarrollo, adaptadas gradualmente, para proporcionarles modelos explicativos a fenómenos estadísticos que observa. De este modo, se propicia que entienda su entorno por sus propios medios, mucho antes de que sea capaz de comprender la complejidad del modelo matemático subyacente, y desde una edad temprana.

Además, los modelos intuitivos que los estudiantes generan sirven de base para el desarrollo del conocimiento analítico posterior, puesto que ayudan a construir intuiciones correctas. Como señala Feller (1950), la intuición estadística puede ser entrenada incluso en los adultos, aunque si un niño adquiere “intuiciones erróneas” cuando es muy pequeño, esto le puede impedir más tarde la adquisición de un conocimiento adecuado. Por ello parece necesario ofrecer a los niños formación estocástica en edad temprana. Sin embargo, las actividades a desarrollar no deben escogerse al azar. Es preciso un principio de organización, en la forma de la espiral curricular, escalonada por las ideas fundamentales.

2.1.IMPORTANCIA DE LA CORRELACIÓN EN LA ESTADÍSTICA

Las ideas de Heitele son retomadas por Burrill y Biehler (2011), y puestas en consonancia con la revisión del currículo de estadística en varios países; el marco de Wild y Pfankuch (1999) sobre las características que definen el pensamiento estadístico; las características definidas para la cultura estadística, por ejemplo, por Gal (2002); y las recomendaciones del proyecto GAISE (Franklin et al., 2007). A partir de estos fundamentos, los autores definen una lista de ideas estadísticas fundamentales, que complementan las identificadas por Heitele, cuya naturaleza es fundamentalmente probabilística.

En esta lista incluyen la asociación y correlación, justificando su relevancia con los siguientes motivos (Batanero, 2001):

- Permiten modelizar las relaciones entre variables estadísticas; si las variables son cualitativas llegaremos al concepto de asociación y si son numéricas al de correlación. Complementaria a ella es la idea de regresión que permite predecir una de las variables a partir de la otra, por medio de las ecuaciones de las funciones de ajuste.
- Estas ideas extienden la dependencia funcional, donde a cada valor de una variable independiente X corresponde un solo valor de la variable dependiente Y . En la correlación y regresión para cada valor de la variable independiente tenemos una distribución de valores de la variable dependiente. Además se puede dar una medida de la intensidad de la relación por medio de diversos coeficientes (que dependen del tipo de variable y el tipo de relación).
- La regresión y correlación se pueden estudiar desde las diferentes ramas en que tradicionalmente se ha dividido la estadística. Aparecen como parte del cálculo de probabilidades, en el estudio de las variables aleatorias bidimensionales, y de la distribución normal bivalente o multivariante. Asimismo en el estudio de las variables estadísticas bidimensionales dentro de la estadística descriptiva. Por último, en la estadística inferencial se ponen en relación estos dos aspectos, utilizándose los datos de las muestras para estimar los coeficientes de correlación y regresión.
- Son base de muchos otros métodos estadísticos: en análisis multivariante la correlación es una noción fundamental, pues representa el coseno del ángulo que forman dos variables, en la interpretación geométrica de los datos multivariantes. Métodos como el análisis discriminante o el análisis factorial derivan directamente de la correlación y regresión, por lo cual, la comprensión de las anteriores será necesaria para la de éstos. Más aún, tanto el coeficiente de correlación y la proporción de varianza explicada (cuadrado de dicho coeficiente) sirven de base a los modelos de análisis de varianza univariantes y multivariantes.

2.2. LA CORRELACIÓN EN EL CURRÍCULO ESPAÑOL

En España sólo hay una breve mención al estudio de la asociación entre variables cualitativas en la Educación Primaria, (6 a 12 años) al referirse a la “*Lectura e interpretación de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana*” (MEC, 2006, p. 43099) y en la Educación Secundaria Obligatoria (12 a 16 años), también con el estudio de tablas de contingencia, dentro del tema de probabilidad (MEC, 2007a). Aunque en esta etapa se introducen las relaciones funcionales entre variables, la correlación se retrasa a la enseñanza postobligatoria (Bachillerato, 16 a 18 años). El tema se incluye en el primer curso de las modalidades de *Ciencias y Tecnología* y *Humanidades y Ciencias Sociales* (MEC, 2007b).

La modalidad de Humanidades y Ciencias de la Salud incluye el tratamiento de la correlación en el bloque 3 “*Probabilidad y estadística: [...] Distribuciones bidimensionales. Interpretación de fenómenos sociales y económicos en los que intervienen dos variables a partir de la representación grafica de una nube de puntos. Grado de relación entre dos variables estadísticas. Regresión lineal. Extrapolación de resultados.*” (MEC, 2007b, p. 45475). Igualmente especifica los siguientes criterios de evaluación (MEC, 2007b, p. 45475-45476):

6. Distinguir si la relación entre los elementos de un conjunto de datos de una distribución bidimensional es de carácter funcional o aleatorio e interpretar la posible relación entre variables utilizando el coeficiente de correlación y la recta de regresión.

Se pretende comprobar la capacidad de apreciar el grado y tipo de relación existente entre dos variables, a partir de la información grafica aportada por una nube de puntos; así como la competencia para extraer conclusiones apropiadas, asociando los parámetros relacionados con la correlación y la regresión con las situaciones y relaciones que miden. En este sentido, más importante que su mero cálculo es la interpretación del coeficiente de correlación y la recta de regresión en un contexto determinado.

El contenido y criterios de evaluación de la modalidad de Ciencia y Tecnología es similar, aunque descrito más someramente. En resumen, el currículo español contempla el estudio de la asociación y correlación gradualmente, llegando en el Bachillerato a bastante profundidad, lo mismo que ocurre en otros países. A pesar de ello, veremos que los resultados de las investigaciones realizadas, en su mayoría con estudiantes universitarios, indican que las dificultades de comprensión persisten finalizado el Bachillerato.

En lo que sigue nos centramos en la capacidad de estimación de la correlación a partir de diferentes representaciones.

3. LA ESTIMACIÓN DE LA CORRELACIÓN: TAREAS CORRELACIONALES

Alloy y Tabachnik (1984) reducen a dos las fuentes de información relevantes para estimar el grado de correlación entre dos variables numéricas:

- Las expectativas previas o creencias. El individuo posee ideas o juicios sobre la asociación de los fenómenos tratados, debidas bien a la experiencia previa directa con dichos fenómenos en situaciones similares o bien de otras fuentes por ejemplo, la transmisión cultural o biológica.
- La información objetiva de la situación, es decir, los datos que el individuo dispone sobre la ocurrencia conjunta o las relaciones de los fenómenos de su entorno.

Teniendo en cuenta estas dos fuentes de información, McKenzie y Mikkelsen (2007) proponen un modelo bayesiano para describir el razonamiento covariacional. Indican que nuestro sistema cognitivo se aproxima a la tarea de covariación desde un marco inferencial amplio, que depende del entorno. Por

ello el ser humano utiliza el procedimiento bayesiano para evaluar la covariación, al ser sensible a las creencias previas y a la información dada por los datos. Las condiciones en que se realiza la estimación igualmente influyen en el razonamiento de los sujetos y pese a los intentos de los experimentadores de descontextualizar las tareas o de eliminar las influencias del mundo real, los sujetos recurren a hipótesis previas sobre parámetros de la tarea.

Por otro lado, al analizar el modo de proceder de un individuo cuando se enfrenta a una tarea covariacional, encontramos pasos o subtareas secuenciales en que se puede descomponer dicha resolución, que van desde la recogida de datos para estudiar la relación, hasta el uso de los resultados obtenidos para producir juicios y predicciones de interés para el investigador. Crocker (1981), distingue los siguientes pasos en dicha tarea:

- a. Decidir los tipos de datos a recolectar, es decir, la población en estudio y las variables que serán observadas;
- b. Elegir la muestra de la población de estudio; decidiendo su tamaño y método de muestreo;
- c. Diferenciar los valores de las variables en cada caso;
- d. Codificar y estimar las frecuencias de los pares de valores que se observan;
- e. Integrar resultados, por ejemplo, en un diagrama de dispersión, una tabla o cualquier otro modo de presentar la distribución bivariada;
- f. Utilizar estos resultados para estimar el grado de asociación o correlación y emitir juicios (sobre el tipo e intensidad de correlación) o bien hacer una predicción.

Zieffler (2006) resume los diferentes estudios relativos al razonamiento covariacional desarrollados en psicología, educación, didáctica de la matemática y didáctica de la estadística e indica que en la mayoría de estos estudios, los sujetos se centran en el paso (f) anterior, es decir en la realización de juicios sobre la existencia y tipo de asociación. Por otro lado, Sánchez Cobo (1999) clasifica el conjunto de tareas covariacionales en tres categorías fundamentales:

- *Juicios de asociación en tablas de contingencia.* Cuando se analiza la asociación entre dos variables cualitativas y el sujeto debe utilizar las frecuencias de dicha tabla, comparando porcentajes por filas o columnas, o bien comparando frecuencias observadas y esperadas.
- *Juicios de correlación.* Donde se trata de analizar la relación entre dos variables numéricas, a partir de diferentes representaciones de la misma; por ejemplo, a partir de un diagrama de dispersión, donde la forma o dispersión de la nube de puntos puede ser de gran ayuda para evaluar la relación entre las variables.

- *Juicios de asociación en la comparación de muestras.* Cuando se estudia la relación entre una variable cuantitativa y otra variable cualitativa; por ejemplo comparando medidas de posición central y dispersión o empleando un contraste de hipótesis.

En este trabajo nos centramos en los juicios de correlación, es decir, en realizar un juicio o estimar la correlación, una vez los datos se han integrado. En lo que sigue analizamos estas tareas y las variables que las determinan.

4. VARIABLES EN LAS TAREAS CORRELACIONALES

De entre las variables que pueden influir en la estimación de la correlación destacamos, entre otras, la forma en que se representan los datos, la explicación de la posible correlación entre las variables, el signo e intensidad de la correlación, y la concordancia entre las teorías previas y la correlación que presentan los datos. A continuación analizamos estas variables.

4.1. REPRESENTACIÓN DE LA CORRELACIÓN

La variable más influyente en el diseño de una tarea correlacional es la forma en que se proporcionan los datos, es decir, la representación que se utiliza para presentar la distribución bivariada. Las investigaciones desarrolladas por Sánchez Cobo, Estepa y Batanero (2000), Estepa (2007) y Zieffler y Garfield (2009), nos acercan un poco más a comprender el modo en que los estudiantes resuelven este tipo de situaciones problemáticas.

En concreto, la investigación abordada por Sánchez Cobo, Estepa y Batanero (2000) analiza el proceso de traducción de la correlación entre diferentes representaciones y su efecto en la estimación de la correlación así como las estrategias empleadas por los estudiantes en el desempeño de la tarea. Las representaciones que consideran cubren el lenguaje (verbal, tabular, gráfico y numérico), pero no el simbólico, ya que el objeto de este tipo de tareas es la estimación e interpretación y no la formalización mediante fórmulas de la correlación. Se describen a continuación:

- *Descripción verbal*, cuando describimos una distribución bivariada mediante el lenguaje natural. No se proporcionan datos a los estudiantes, sino que se les pide estimar la correlación de dos variables descritas verbalmente. Presentamos un ejemplo de estas tareas tomado de un libro de texto de Bachillerato donde se pide el signo y diferenciar entre dependencia funcional y aleatoria. Observamos que el estudiante tendría que conocer el fenómeno para poder pensar pares posibles de valores y poder responder la pregunta.

Para cada uno de los siguientes casos indica: Cuáles son las variables que se relacionan; Si se trata de una relación funcional o de una relación estadística y, en estos casos, el signo de la correlación:

- Renta mensual de una familia- gasto en electricidad.
- Radio de una esfera- volumen de esta.
- Litros de lluvia recogidos en una ciudad- tiempo dedicado a ver la televisión por sus habitantes
- Longitud del trayecto recorrido en una línea de cercanías- precio del billete
- Peso de los estudiantes de 1° de Bachillerato-número de calzado que usan
- Toneladas de tomate recogidas en una cosecha- precio del kilo de tomate en el mercado.

Figura 1. Juicio de correlación a partir de descripción verbal (Colera et al. 2008, p.238)

- *Tabla de valores*, cuando los datos se dan al estudiante en forma de tabla de frecuencia o bien como un listado de pares de valores numéricos de una distribución bivariada. Estas actividades son frecuentes en los libros de texto (ver ejemplo en la Figura 2). Generalmente, el estudiante necesitará transformar este tipo de representación en un gráfico, si quiere estimar la correlación. También podría primero calcular el coeficiente de correlación, pues es difícil visualizar la posible relación a partir de un conjunto de valores numéricos.

En la siguiente tabla se recoge la evolución del IPC (Índice de precios al consumo) y el precio del barril de petróleo (*brent*) durante el segundo semestre de 2007.

IPC (%)	2,4	2,2	2,2	2,7	3,6	4,1
Precio del barril (\$)	71,54	77,01	70,73	76,87	82,50	90,16

¿Se puede asegurar que la evolución del IPC está directamente relacionada con el precio del petróleo?

Figura 2. Estimación de la correlación a partir de listado de valores (Vizmanos et al. 2008, p.252)

- *Diagrama de dispersión*, cuando el conjunto de pares de valores de una distribución bivariada se presentan mediante un diagrama cartesiano. En este caso, se puede observar la mayor o menor intensidad de la relación (observando la dispersión de los puntos del diagrama), así como el signo en caso de relación lineal. También la forma aproximada de la función que expresaría la relación entre las variables (por ejemplo, exponencial o parabólica). Un ejemplo muy frecuente de este tipo de tareas se muestra en la Figura 3, y otro menos común en la Figura 4, donde el estudiante deberá interpretar la correlación de cada descripción para asociarla a cada una de los diagramas que construya.

Razona qué valor tomará el coeficiente de correlación.

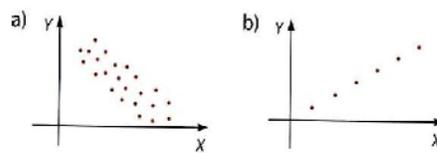


Figura 3. Estimación de la correlación desde el diagrama de dispersión (Antonio et al. 2008, p. 249)

Dibuja un ejemplo de nube de puntos que corresponda a cada uno de los siguientes casos de correlación:

- | | | |
|----------------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| a) Lineal negativa débil. | c) Lineal positiva débil. | e) Curvilínea positiva débil. |
| b) Lineal negativa fuerte. | d) Curvilínea negativa débil. | f) Curvilínea positiva fuerte. |

Figura 4. Elaboración de diagrama de dispersión a partir de descripción verbal (Anguera et al. 2008, p. 223)

- *Coefficiente de correlación*, cuando se da el coeficiente de correlación existente entre las variables y se pide a los estudiantes, en forma aproximada, la forma del diagrama de dispersión o dar un juicio sobre la intensidad y el signo (ver Figura 5). En algunos textos, para facilitar la tarea, se dan varios diagramas y se pide elegir el que corresponde a una correlación dada (ver ejemplo en Figura 6)

Representa nubes de puntos que se ajusten, aproximadamente, a las rectas de regresión de Y sobre X y a los coeficientes de correlación que se indican:

- a) $y = -x + 4$, $r = -0,8$
- b) $y = 2x + 0,5$, $r = 0,6$
- c) $y = 0,2x + 1$, $r = 0,95$
- d) $y = x$, $r = 0,1$

Figura 5. Traducción de coeficiente de correlación a diagrama de dispersión (Martínez et al., 2008, p.262)

14. Indica cuáles de las correlaciones dadas se corresponden con las nubes de puntos de las figuras y explica por qué.

- | | |
|-----------------|----------------|
| a) $r = 0,7$ | b) $r = -0,98$ |
| c) $r = -0,001$ | d) $r = 1$ |

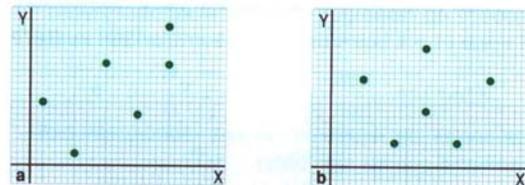


Figura 6. Elección del coeficiente de correlación a partir del diagrama de dispersión (Anguera et al., 2008, p.229)

Sánchez Cobo (1999) hizo notar que la estimación de la correlación resulta más precisa cuando se realiza a partir de un diagrama de dispersión, así como la tarea inversa, es decir encontrar un diagrama de dispersión que se ajuste a una correlación dada numéricamente. Los estudiantes comenten un

número mayor de errores al construir una nube de puntos a partir de una descripción verbal o al estimar el coeficiente de correlación desde una tabla de valores numéricos. En cuanto a la capacidad de proponer pares de variables (en forma verbal) factibles a un coeficiente de correlación dado, aunque los estudiantes proponen variables cuya correlación tiene el mismo signo que el dado en el problema, son menos precisos con la intensidad.

El autor sugiere que parece más sencillo de comprender la correspondencia entre la intensidad de la dependencia y la dispersión de la nube de puntos o entre el signo de la correlación y la tendencia de la nube, que deducir estos datos a partir de un listado, una tabla o una descripción verbal. Por otro lado, este autor sugiere que los diagramas de dispersión son una de las representaciones que los estudiantes han usado con frecuencia en la enseñanza. Sin embargo, para adquirir un razonamiento correlacional adecuado, además de la capacidad para resolver cada una de las tareas descritas anteriormente, es de vital importancia dominar los procesos de traducción entre cada una de las representaciones que se les asocian (verbal, tabular, gráfica y numérica). La práctica de estos procesos lleva implicadas destrezas y habilidades tales como el cálculo estadístico, el uso de modelos matemáticos para el ajuste de datos o la traducción desde y hacia las expresiones algebraicas y gráficas utilizadas.

Precisamente Duval (1993) resaltó la importancia para el aprendizaje de las matemáticas del dominio de diferentes representaciones del mismo objeto matemático, aunque también advierte que dichos objetos nunca deben ser confundidos con su representación. Esto último podría ocurrir si un estudiante vincula la correlación al diagrama de dispersión, ya que podría encontrar dificultad en el desarrollo de tareas como las relativas a la descripción verbal. Aún así, una conceptualización adecuada implica la coordinación de distintas representaciones complementarias que permitan y faciliten el trabajo matemático.

4.2. EXPLICACIÓN DE LA CORRELACIÓN

Una segunda variable es la posible explicación de la correlación (denominada tipo de covariación por Barbancho, 1973). Una vez que encontramos una correlación entre dos variables y nos preguntamos por qué ocurre, la explicación más natural para muchas personas es que existe una dependencia causal unilateral, es decir, que una de las variables actúa como causa de la otra, como por ejemplo, si estudiamos la correlación entre el índice de paro en un país y el producto nacional bruto (que será menor a mayor paro).

La detección de relaciones causales es un componente importante de la conducta adaptativa humana, que algunos investigadores extienden a todo ser vivo, como muestra la siguiente cuestión: “¿Bajo qué condiciones son los organismos precisos en la detección de la covariación entre sucesos?”

(Alloy y Tabachnik, 1984, p. 113). El razonamiento causal nos permite saber cuándo dos sucesos están conectados, de modo que la presencia o ausencia de una causa siga la de un efecto (Catena, Perales y Maldonado, 2004).

Díaz y de la Fuente (2005) analizan las relaciones entre causalidad y condicionamiento, que también aparecen en un problema de correlación. Desde el punto de vista de la probabilidad, si un suceso A es la causa estricta de un suceso B , siempre que suceda A , sucederá B , por lo que $P(B/A) = 1$ y habrá una correlación entre A y B . Aunque, igualmente se puede establecer una condicionalidad en situaciones no causales, por ejemplo, en situaciones diagnósticas. En consecuencia, las nociones de causalidad, correlación y condicionamiento están relacionadas pero no son equivalentes.

Para comprobar que la asociación es causal se deben considerar los siguientes aspectos (Álvarez y Pérez, 2004): fuerza de asociación, congruencia (si la asociación ha sido reproducida por investigadores diferentes), relación temporal, gradiente dosis-respuesta (a más magnitud más intensidad del efecto), credibilidad (concordancia de la asociación con el conocimiento que se tiene en la actualidad), especificidad (genera un solo efecto). Sin embargo, en el tratamiento de tareas correlacionales, algunos estudiantes sólo consideran la existencia de correlación cuando se percibe una relación causal en las variables asociadas, confundiendo correlación y causación (Estepa, 1994), sin plantearse algunas de las siguientes razones:

- *Las variables pueden ser interdependientes* (cada variable afecta a la otra), como en el caso de la longitud de piernas y altura de una persona;
- *La existencia de una tercera variable* que determine la correlación, esto es las variables muestran dependencia pero es indirecta. Un ejemplo sería relacionar el índice de natalidad y la esperanza de vida, que presentan una correlación negativa. La proporción de mujeres que trabaja en un país afecta al producto nacional bruto, y al índice de natalidad (que disminuye) y con ello a la esperanza de vida. Así es que estas dos variables están por ello correlacionadas, de modo indirecto, ya que su relación viene motivada por la influencia de otras variables como el número de mujeres empleadas en un país.
- *La concordancia* o coincidencia en preferencia u ordenación de una misma serie de datos, como por ejemplo si dos profesores de modo independiente califican un mismo examen ya que, las calificaciones están correlacionadas pero la nota de uno no influye en la del otro.
- *Covariación casual o espúrea*: Cuando parece que en la covariación de dos variables hay cierta sincronía, lo cual podría interpretarse como la existencia de asociación entre ambas; sin embargo, ésta es casual o accidental.

4.3. OTRAS VARIABLES

Otras variables que también influyen en la dificultad de una tarea correlacional son las siguientes (Sánchez Cobo, Estepa y Batanero, 2000):

- *El signo de la correlación*, que puede ser positivo en caso de dependencia directa, negativo en caso de dependencia inversa o nula en caso de independencia. Aunque matemáticamente la dependencia directa o inversa sean semejantes, los estudiantes no las perciben de igual modo, sino que tienen más facilidad en estimar correctamente las correlaciones positivas. En el trabajo de Erlick y Mills (1967) se expone que la asociación negativa se estima como muy próxima a cero.
- *Intensidad de la dependencia*, siendo más fácil por los estudiantes percibir una correlación fuerte. De hecho, los estudiantes presentan dificultades al comparar diferentes valores del coeficiente de correlación distintos de: -1, 0 y 1 (Sánchez- Cobo, 1999).
- *Concordancia entre los datos y las teorías previas* sugeridas por el contexto. Como veremos al hablar de los sesgos en el razonamiento correlacional, muchos sujetos se guían preferentemente por sus teorías (en vez de usar los datos) cuando estiman una correlación. Si piensan que dos variables deben estar correlacionadas tratan de encontrar una correlación entre ellas llegando a veces a sobrevalorarla, aunque, los datos en la tarea presenten poca correlación o hasta se trate de variables independientes. Por ello, es más fiable la estimación de la correlación cuando hay concordancia entre los datos y estas teorías previas que en caso contrario.
- *El número de datos*. Respecto a la tarea de estimar un valor del coeficiente de correlación, Sánchez Cobo et al., (2000) indican que mejora cuando hay más datos.

5. ESTRATEGIAS EN LA ESTIMACIÓN DE LA CORRELACIÓN

En cuanto al análisis de estrategias en los juicios de asociación, diversas investigaciones (Estepa, 1993; Sánchez Cobo, 1999) llevan a cabo un estudio pormenorizado del modo en que los estudiantes resuelven una tarea correlacional, donde generalmente los datos se dan en forma de diagramas de dispersión. Clasifican las estrategias encontradas en correctas parcialmente correctas e incorrectas:

- *Estrategias correctas*: serían las estrategias que llevan siempre a una estimación correcta de la correlación entre los datos, independientemente de los datos concretos del problema. Entre ellas se encuentran las siguientes, que deben combinarse para deducir simultáneamente el signo y la intensidad de la correlación:
 - *Comparación en base a la mayor o menor dispersión del diagrama de dispersión*. Cuando el sujeto basa el juicio o la estimación de la correlación entre las dos variables observando la dispersión de los puntos en torno a una línea. Esta estrategia es correcta y permite estimar la

intensidad de la correlación, pues a menor dispersión, aumenta la correlación. Los casos extremos serían cuando no existe dispersión (dependencia funcional) y el caso de independencia (máxima dispersión en la gráfica).

- *Crecimiento o decrecimiento.* Esta estrategia permite ver el signo de la correlación en caso de que la nube de puntos se ajuste a una función lineal. Consiste en estudiar la tendencia de la nube de puntos para justificar el tipo de dependencia.
- *Estrategias parcialmente correctas:* Son estrategias que funcionan a veces, debido a los datos particulares de la tarea, pero no siempre son adecuadas. Entre ellas encontramos las siguientes:
 - *Comparación con un modelo matemático.* El estudiante compara la forma de la nube de puntos con una función conocida, por ejemplo, lineal o cuadrática. Si la forma de la nube se ajusta al modelo, deduce que hay correlación, y estima la intensidad de acuerdo al mayor o menor ajuste de los datos a éste. La estrategia funciona a veces, sobre todo si la dispersión es pequeña y dependiendo del modelo elegido para comparar. Por ejemplo, si la relación es cuadrática. Este tipo de razonamiento puede venir motivado por una confusión entre las definiciones de coeficiente de correlación y coeficiente de determinación.
- *Estrategias incorrectas:* Son estrategias que ofrecen pocos resultados aceptables, y en general vienen motivadas por no tener en cuenta todos los datos del problema. Encontramos las siguientes:
 - *Interpretación incorrecta de puntos aislados.* El estudiante basa la estimación o el juicio de correlación en pares de valores aislados. Por ejemplo, usa sólo los puntos extremos de la gráfica y con ello argumenta su aproximación.
 - *Teorías previas.* Se usan las teorías previas sobre el contexto para argumentar la correlación, en lugar de considerar los datos disponibles. Por ejemplo, si se piensa que no hay relación entre la tasa de natalidad y la esperanza de vida y se argumenta que la correlación es nula, a pesar de que el diagrama de dispersión muestre una correlación negativa fuerte.
 - *Otras variables.* Cuando la existencia de otras variables que puedan influir en la dependiente es considerada como motivo para la no existencia de asociación. Por ejemplo, estimar la correlación entre el número de partidos empatados y el puesto que ocupa en la liga un cierto equipo, el estudiante argumenta que la correlación es cero, pues el puesto depende, sobre todo, del número de partidos ganados.
 - *Rechazo de la dependencia aleatoria.* Cuando se argumenta que no existe correlación, al ser la dependencia aleatoria (haber dispersión en la nube de puntos).

Por su parte, Moritz (2004) estudió tres tipos de tareas: (a) generar un listado de datos bivariados a partir de descripciones verbales de relaciones (b) interpretar diagramas de dispersión y (c) interpretar

tablas de frecuencias de datos covariados. Encuentra una nueva estrategia errónea consistente en considerar las variables implicadas en forma aislada, en lugar de ponerlas en relación.

6. SESGOS Y CONCEPCIONES ERRÓNEAS SOBRE LA CORRELACIÓN

Como se ha visto al describir las estrategias erróneas, en ocasiones se observa la presencia de sesgos de razonamiento o concepciones incorrectas en los juicios de correlación o en la estimación de su signo e intensidad (Crocker, 1981; Alloy y Tabachnik, 1984). En lo que sigue describimos los estudios que se centran en la identificación de los mismos.

El sesgo que más interés ha suscitado es el denominado *correlación ilusoria* (Chapman y Chapman, 1967; 1969) que hace referencia a la presencia de errores sistemáticos producidos por variables inherentes a los estímulos que el sujeto percibe y que conllevan a juicios erróneos de covariación. Como sus autores indican:

”Correlación ilusoria” es un error sistemático en el informe de tales relaciones. Es definida según el informe dado por un observador de una correlación entre dos clases de eventos que en realidad (a) no están correlacionados, o (b) están correlacionados en menor medida que lo manifestado, o (c) están correlacionados en sentido contrario del que se manifiesta en el informe” (Chapman y Chapman, 1967, p. 194).

Chapman y Chapman (1969) describen la presencia en muchas personas de este sesgo, que consiste en formarse teorías sobre la relación entre variables, que impide evaluar correctamente las contingencias empíricas. En algunas ocasiones, el cerebro tiende a interpretar la realidad de manera sesgada, creyendo detectar relaciones que en realidad no existen. Por ejemplo, si dos eventos van frecuentemente juntos, es probable que se concluya que existe algún tipo de relación entre ellos, incluso cuando esto sea falso, e incluso se sobreestima la frecuencia de aparición conjunta de estos sucesos. Estudiaron este efecto en pruebas psicodiagnósticas como la titulada “*Dibujar una persona*”, (Chapman y Chapman, 1967), motivados por la idea de que muchas interpretaciones clínicas tienen su génesis en la correlación ilusoria. Los sujetos del estudio asociaron las personas de ojos grandes con el diagnóstico de paranoia en sus dibujos, aunque tal correlación no existe, indicando la poca utilidad de las pruebas basadas en dibujos realizados por el enfermo en la diagnosis de los trastornos mentales.

Una explicación de este sesgo es la vulnerabilidad del ser humano a creer lo que intuye o siente frente a lo que cualquier informe le pueda proporcionar (Chapman, 1967). Es por ello, que muchos autores proponen advertir a nuestros estudiantes de la dificultad que conlleva el razonamiento covariacional correcto, con el fin de sensibilizarles de las consecuencias que acarrearán sus sesgos o errores (Chapman y Chapman, 1969; Moritz, 2004).

Por su parte, Engel y Sdelmeier (2011) describen los siguientes sesgos complementarios en la estimación de la correlación:

- *No tener en cuenta la existencia de variables extrañas* que pueden explicar la correlación entre dos variables dadas. Es bien conocida la paradoja de Simpson (Contreras et al., 2012), que muestra que en determinados casos se produce un cambio en la relación entre un par de variables, cuando se controla el efecto de una tercera variable. Como indican Malinas y Bigelow (2009), dependiendo de los datos con los que trabajemos, la correlación entre dos variables se puede llegar a invertir cuando la población de estudio se divide en subpoblaciones. Esto ocurre, según Blyth (1972) cuando se analiza una variable dependiente respecto a otras variables independientes en algún estudio o experimento. Incluso algunas veces una de las variables (la que hace cambiar el tipo o intensidad de correlación entre las otras) es una variable extraña o no controlada, por lo que el investigador puede no ser consciente de este efecto y llegar a una conclusión incorrecta en su estudio.
- *El efecto de regresión*. Es habitual en una situación de test- retest que los sujetos con puntuaciones atípicas en la primera prueba vuelvan hacia el valor medio en la segunda. Esto se considera por algunas personas indicativo de un cambio debido al tratamiento, cuando es una propiedad de la regresión.

En su estudio, Estepa (1994) observa una aparente inconsistencia entre estrategia y estimación de la correlación, pues algunos estudiantes dan una estimación incorrecta de la correlación con una estrategia correcta o al contrario (dan una estimación correcta con una estrategia incorrecta). Analizando estos casos con detalle, muestra que ello se debe a que el estudiante tiene concepciones erróneas sobre la correlación. A lo largo de sus trabajos describe las siguientes (Estepa, 1993; Estepa y Batanero, 1996; Batanero, Estepa y Godino, 1997; Batanero, Godino y Estepa, 1998):

- *La concepción determinista de la correlación*. Los estudiantes tienden a asignar un único valor de la variable independiente a cada uno de los valores considerados de la variable dependiente. Esto es, sólo se asume la correlación de las variables si existe una dependencia funcional, pues se confunden los dos conceptos. En casos extremos, los estudiantes exigen la existencia de una fórmula que ligue las dos variables para indicar que las variables están relacionadas; Estepa (1994) lo llama *concepción algebraica* pues el estudiante indica que no hay correlación, ya que no puede encontrar una expresión que ligue las dos variables.
- *La concepción local de la correlación*. Cuando los estudiantes utilizan parte de los datos del estudio para estimar la correlación o juzgar si existe correlación y de qué tipo. Se limitan a confirmar la relación en un subconjunto de los datos que de algún modo justifique algún tipo de

patrón, obviando la tendencia global de éstos. Por ejemplo, si al unir dos puntos del diagrama de dispersión se observa una tendencia creciente, pueden indicar que la relación de las variables es directa, sin tener en cuenta si esta tendencia se mantiene o no en otros puntos.

- *Concepción unidireccional:* En este caso el estudiante no admite la correlación inversa, considerándose la intensidad de la asociación, pero no su signo. Se presenta en los casos en los que los estudiantes consideran la dependencia inversa como independencia.
- *Concepción causal:* Cuando el sujeto sólo considera la correlación entre variables si puede adjudicarse a la presencia de una relación causal entre las mismas. Por ejemplo, si hay terceras variables que afecten la relación, piensan que no hay relación entre las dos primeras.

Otras concepciones incorrectas identificadas posteriormente son las siguientes:

- *Identificar correlación positiva y dependencia lineal.* En concreto, en el estudio de Sánchez- Cobo (1999) casi la mitad de los sujetos del estudio consideran que si existe correlación positiva, ésta se deduce en una dependencia lineal.
- *Concepción transitiva de la correlación.* Es descrita por Castro-Sotos, Van Hoof, Van den Noortgate y Onghena, (2009). El coeficiente de correlación no tiene propiedad transitiva; es decir, dos variables A y B pueden estar correlacionadas, así como B y C , sin estarlo A y C . Esta propiedad no se comprende por parte de los estudiantes, quienes generalizan indebidamente la transitividad al coeficiente de correlación.

7. EFECTO DE LA ENSEÑANZA

Además de los estudios de evaluación resumidos, encontramos diversas experiencias de aula diseñadas para facilitar el aprendizaje de la correlación a los estudiantes (Barret, 2000; Groth y Powell, 2004; Holmes, 2001; Shaughnessy y Pfannkuch, 2002; Horton et al., 2004; Todd et al., 2004; Obremsky, 2008). Todas se desarrollan en cursos de introducción al tema, ya sea a nivel universitario o no universitario, pero no informan sobre los resultados del aprendizaje.

El estudio más completo que encontramos sobre este tema es el de Batanero, Estepa y Godino (1997), quienes, para analizar la evolución de las concepciones, desarrollan un curso de estadística basada en el ordenador y con especial énfasis en el estudio de la asociación y correlación. En la evaluación final del aprendizaje evidencian que gran parte de los estudiantes de la muestra superaron la concepción determinista (asimilando la noción de dependencia aleatoria en los datos) y la concepción local (cuando comprenden la importancia de considerar el conjunto total de los datos), llegando a

utilizar diferentes distribuciones condicionales en lugar de procedimientos aditivos para justificar sus juicios o estimaciones.

En cuanto a la concepción unidireccional, sólo algunos estudiantes lograron superarla, no encontrándose, en general, una mejora respecto a la concepción causal. Estepa (1994) también propuso a sus estudiantes una prueba final para ser resuelta con ayuda del ordenador. Esta evaluación era abierta (en el sentido que el estudiante podía usar cualquier programa del software proporcionado) e incluyó una pregunta sobre la correlación numérica. Aunque algunos estudiantes lo resolvieron correctamente mediante el estudio del coeficiente de correlación o a partir del diagrama de dispersión, muchos otros lo trataron incorrectamente como un problema de comparación de las dos variables (y no de correlación) aplicando procedimientos inapropiados, por ejemplo, comparar promedios de las dos variables. En consecuencia, como en otras investigaciones, se deduce que el ordenador por sí sólo no es un recurso suficiente para que los estudiantes adquieran competencia en el análisis de datos bivariados. Por consiguiente, los autores plantean la necesidad de diseñar nuevas actividades que ayuden a los estudiantes a reflexionar sobre este aspecto.

En su estudio Sánchez-Cobo realiza una evaluación de la comprensión después de la enseñanza en un curso introductorio de estadística. Además de los resultados ya resumidos sobre las traducciones entre diferentes representaciones de la correlación, observa dificultades para ordenar correctamente diferentes coeficientes de correlación según su intensidad (pues los estudiantes los ordenan como si fuesen números enteros); otros estudiantes no aprecian la adimensionalidad de la correlación o confunden el coeficiente de correlación y el coeficiente de determinación (el cuadrado del coeficiente de correlación).

Por su parte, Zieffler (2006) pretende caracterizar el desarrollo del razonamiento covariacional de los estudiantes y estudiar factores explicativos de dicho razonamiento. Lo describe con la metáfora de “modelo cuadrático” porque, aunque los estudiantes muestran inicialmente un gran avance en su razonamiento covariacional, con el tiempo decrece su intensidad, incluso retrocediendo:

Estos resultados podrían sugerir la presencia de una saturación en nuestros estudiantes en cuanto al razonamiento sobre datos bivariados que provoca una decadencia que impide su avance durante el curso (Zieffler, 2006, p. 86).

Así es, que la mayor parte del cambio en el desarrollo de este razonamiento se produce al comienzo de la enseñanza formal del tópico. Por ello, Zieffler y Garfield (2009) sugieren prestar más atención al desarrollo de razonamiento sobre datos univariados, con el fin de proporcionar una base sólida al desarrollo posterior del razonamiento sobre datos bivariados. Aun así, no se observó una influencia significativa de la secuenciación del tema sobre el desarrollo del razonamiento covariacional, aunque sí se plantea su influencia en otros tópicos como la inferencia, que presenta como posibles líneas de

investigación futura. Al respecto, Sánchez Cobo (1999) defiende la secuenciación de trabajar en primer lugar la correlación y luego abordar la regresión. Además, este autor aboga por:

“que no se haga una aproximación al concepto de variable estadística bidimensional a partir de dos variables estadísticas unidimensionales, como se efectuaba en algunos manuales de bachillerato, ya que podría favorecer el que los alumnos sean poco conscientes de que dichas variables unidimensionales tienen que estar referidas a la misma unidad estadística, como ha puesto de manifiesto los resultados de esta investigación” (Sánchez Cobo, 1999, p. 291).

Finalmente resaltamos la investigación de Estepa (2007) donde sólo algo más de la mitad de los participantes son capaces de dar una definición adecuada del coeficiente de correlación. Otro porcentaje importante indican que la correlación se aplica sólo para relacionar dos conjuntos de datos tomados de diferentes muestras, sin comprender que se puede aplicar para correlacionar dos variables tomadas sobre los sujetos de la misma muestra.

8. CONCLUSIONES

Aunque el estudio de la competencia en la estimación de la correlación ha tenido poca relevancia en didáctica de la matemática, encontramos una amplia literatura en psicología que describe el razonamiento covariacional como una competencia fundamental para la toma de decisiones. El análisis de las estrategias intuitivas de los estudiantes en la estimación de la correlación a partir de diversas representaciones muestra, por un lado, la existencia de numerosas estrategias incorrectas; por otro, la de concepciones incorrectas y sesgos en la detección de la correlación, que a veces se mantienen tras la enseñanza (Batanero, Estepa y Godino, 1997). Todo ello nos aporta información sobre las posibles dificultades de los estudiantes que los futuros profesores debieran conocer.

Algunos estudiantes muestran una concepción local, realizando su estimación a partir de sólo una parte de los datos. Moritz (2004) sugiere enseñar a los estudiantes a leer progresivamente punto a punto hasta una posterior generalización con los datos disponibles. Otra ayuda sería la utilización de un enfoque de variación temporal que permita a los estudiantes centrarse en el cambio de una variable a lo largo del tiempo para una posterior correspondencia entre variables no temporales.

Es también interesante alentar la expresión de las creencias y teorías previas que serían poco a poco equilibradas mediante la información proporcionada por el estudio. Para ello conviene utilizar tareas que impliquen un razonamiento covariacional contraintuitivo donde, se cuestione de modo natural, la fiabilidad del conjunto de datos de que se dispone.

Shaughnessy y Pfannkuch (2002), resaltan la importancia de situar la estadística en contexto y propiciar el proceso de transnumeración (Wild y Pfannkuch, 1999), donde el estudiante debe interpretar los datos y trabajar con ellos en diferentes representaciones para obtener conclusiones y hacer predicciones. En este sentido, se puede mostrar a los estudiantes algunos ejemplos reales cómo la

paradoja de Simpson, que ha llevado a conclusiones equivocadas en la investigación. Un ejemplo, reciente (Saari, 2001) se produjo cuando en 1999 el Estado de California estableció un sistema de primas para los profesores de los colegios públicos en los que se lograra mejorar el rendimiento de los estudiantes. La evaluación de los centros mostró (con satisfacción de las autoridades educativas) que el rendimiento de los estudiantes había mejorado en la mayoría de los colegios, tanto para el grupo racial dominante, como para la minoría (hispanos). Sin embargo, al mezclar los datos de los dos grupos, el rendimiento global bajó en casi todos los centros, debido a una variación de la proporción de hispanos en los centros a lo largo del periodo.

Finalmente estamos de acuerdo con Lavallo et al. (2006), quienes sugieren adelantar la enseñanza, que podría comenzar entre el segundo y el tercer año de secundaria (14 a 15 años), cuando ya los estudiantes conocen los conceptos de función, y función lineal. En principio, se podría hacer un tratamiento intuitivo, ampliando lo aprendido sobre distribuciones univariantes con el estudio descriptivo y la representación gráfica de datos bivariados. Luego se llevaría a cabo una aproximación a la correlación lineal a través del análisis de gráficos y, por último, se incorporarían los cálculos referidos al coeficiente de correlación y determinación.

AGRADECIMIENTOS

Proyecto EDU2010-14947, FPI-BES-2011-044684 (MICINN-FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

- Alloy, L. B. y Tabachnik, N. (1984). Assessment of covariation by humans and animals: the joint influence of prior expectations and current situational information, *Psychological Review*, 91(1), 112-149.
- Álvarez, H. y Pérez, E. (2004). Causalidad en medicina. Historia y filosofía de la medicina. *Gaceta Médica de México*, 140(4), 467-472.
- Anguera, J., Biosca, A., Espinet, M. J., Fandos, M.J., Gimeno, M. y Rey, J. (2008). *Matemáticas I aplicadas a las Ciencias Sociales*. Barcelona: Guadiel.
- Antonio, M., González, L., Lorenzo, J. Molano, A., del Río, J., Santon, D. y de Vicente, M. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: Santillana.
- Barbancho, A. G. (1973). *Estadística elemental moderna*. Barcelona: Ariel.
- Barret, G. B. (2000). The Coefficient of Determination: Understanding r^2 y R^2 . *Mathematics Teacher*, 93 (3), 230-234.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1997). Evolution of students' understanding of statistical association in a computer based teaching environment. En J. B. Garfield y G. Burrill, (Eds.),

- Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics. IASE Round Table Conference Papers* (pp. 191-205). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Estepa, A. (1998). Building the meaning of statistical association through data analysis activities. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v.1, pp. 221-236). University of Stellenbosch.
- Bruner, J. S. (1960). *The process of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Burrill, G., y Biehler, R. (2011). Fundamental statistics ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics- Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 57-70). New York: Springer.
- Blyth, C. R. (1972). On Simpson's paradox and the sure-thing principle. *Journal of the American Statistical Association*, 67, 364-366.
- Castro-Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van Den Noortgate, W. y Onghena, P. (2009). The transitivity misconception of Pearson's correlation coefficient. *Statistics Education Research Journal* 8 (2), 33-55. Disponible en: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/.
- Catena, A., Perales, J. C. y Maldonado, J. A. (2004). Judgment frequency effects in generative and preventative causal learning. *Psychological* 25, 67-85.
- Chapman, L. J. (1967) Illusory correlation in observational report. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 6 (1), 151-155.
- Chapman, L. J. y Chapman, J. P. (1967). Genesis of popular but erroneous psychodiagnostic observations, *Journal of Abnormal Psychology*, 72 (3), 193-204.
- Chapman, L. J. y Chapman, J. P. (1969). Illusory correlation as an obstacle to the use of valid psychodiagnostic signs. *Journal of Abnormal Psychology*, 74 (3), 271-280.
- Colera, J., Oliveira, M. J., García, R. y Santaella, E. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: Anaya.
- Contreras, J. M., Batanero, C., Cañadas, G. y Gea, M. M. (2012). La paradoja de Simpson. *SUMA*, 71, 27-34.
- Crocker, J. (1981). Judgment of covariation by social perceivers, *Psychological Bulletin* 90 (2), 272-292.
- Díaz, C. y de la Fuente, E. I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Épsilon*, 59, 245-260.
- Duval, R. (1993). *Semiosis et Noesis. Lecturas en Didáctica de la Matemática: Escuela Francesa*. México: Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.
- Engel, J. y Sedlmeier, P. (2011). Correlation and regression in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill, and C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE study* (pp. 247-258). New York: Springer.
- Erlick, D. E. y Mills, R. G. (1967). Perceptual quantification of conditional dependency, *Journal of Experimental Psychology*, 73 (1), 9-14.
- Estepa, A. (1993). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.

- Estepa, A. (2004). Investigación en Educación Estadística. La asociación estadística. En R. Luengo (Ed.). *Líneas de investigación en Educación Matemática* (pp. 227-255). Badajoz: Servicio de Publicaciones. Universidad de Extremadura.
- Estepa, A. (2007). Caracterización del significado de la correlación y regresión de estudiantes de Educación Secundaria, *Zetetiké*, 15(28), 119-151.
- Estepa, A. y Batanero, C. (1996). Judgments of correlation in scatter plots: Students' intuitive strategies and preconceptions. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 4, 25-41.
- Feller, W. (1950). *An introduction to probability theory and its applications*. Vol. I. New York: John Wiley.
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report*. Alexandria: American Statistical Association.
- Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70 (1), 1-25.
- Groth, R.E y Powell, N.N. (2004). Uso de los proyectos de investigación para ayudar al desarrollo del pensamiento estadístico en los estudiantes. *Mathematics Teacher*, 97 (2), 106-109.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- Holmes, P. (2001). Correlation: From Picture to formula. *Teaching Statistics*, 23 (3), 67-71.
- Horton, M.R. Phillips, V y Kenelly, J. (2004). Construir tu propio modelo de regresión. *Mathematics Teacher*, 97 (4), 284-289.
- Lavalle, A. L., Micheli, E. B. y Rubio, N. (2006). Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. *RELIME*, 9 (3), 383-406.
- Malinas, G. y Bigelow, J. (2009). Simpson's paradox. En N. Edward (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Online: <http://plato.stanford.edu/archives/fall2009/entries/paradox-simpson>.
- Martínez, J. M., Cuadra, R., Heras, A. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. 1º Bachillerato*. Madrid: Autor.
- Mckenzie, C.R.M., y Mikkelsen, L.A. (2007). A Bayesian view of covariation assessment. *Cognitive Psychology*, 54 (1), 33-61.
- MEC (2006). *REAL DECRETO 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria*. Madrid: Autor.
- MEC (2007a). *REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Autor.
- MEC (2007b). *REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Autor.
- Moritz, J. (2004). Reasoning about covariation. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.). *The Challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp.221-255). Dordrecht (The Netherlands): Kluwer.
- Pérez Echeverría, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico*. Madrid: Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid.
- Saari, D. (2001). *Decisions and elections. Explaining the unexpected*. Cambridge University Press.

- Sánchez Cobo, F. T. (1999). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.
- Sánchez Cobo, F. T., Estepa, A. y Batanero, C. (2000). Un estudio experimental de la estimación de la correlación a partir de diferentes representaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 18 (2), 297-310.
- Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistic: Reflections and directions. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan Publishing Company.
- Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1010). Greenwich, CT: Information Age Publishing y NCTM.
- Shaughnessy, J. M. y Pfannkuch, M. (2002). How faithful is Old Faithful? Statistical thinking: A story of variation and prediction. *Mathematics Teacher*, 95 (4): 252-259.
- Shaughnessy, J. M., Garfield, J., y Greer, B. (1996). Data handling. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (Vol. 1, pp. 205-237). Dordrecht: Kluwer.
- Todd, J.G. Hagtvedt, R y Jones, K. (2004). A VBA-based Simulation for Teaching Simple Linear Regression. *Teaching Statistics*, (26) 2, 36-41.
- Vizmanos, J. R., Hernández, J. Alcaide, F., Moreno, M. y Serrano, E. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: Grupo SM.
- Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67 (3), 223-265.
- Zieffler, A. S. (2006). *A longitudinal investigation of the development of college students' reasoning about bivariate data during an introductory statistics course*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Minnesota.
- Zieffler, A. S. y Garfield, J. (2009). Modeling the growth of students' covariational reasoning during an introductory statistics course. *Statistics Education Research Journal*, 8 (1), 7-31.

ESTIMATION OF CORRELATION: DIDACTIC VARIABLES AND REASONING BIASES

ABSTRACT

Correlation is a central statistical concept, as it expands functional dependence to statistical variables. However, previous research has described reasoning biases and difficulties linked to its understanding. In this work we analyse the relevance of correlation as fundamental statistical ideas and its place in the Spanish curriculum. We then focus on estimation of correlation tasks, describe the main variables that determine its difficulty. We summarise results from research on misconceptions and reasoning biases identified in the same. We finally present some implications for research and teaching,

Keywords: *Correlation; estimation tasks; task variables; biases and misconceptions*

A ESTIMAÇÃO DA CORRELAÇÃO: VARIÁVEIS DA TAREFA E VIESES DE RACIOCÍNIO

RESUMO

Correlação é um conceito estatístico fundamental, pois amplia a idéia de dependência funcional para variáveis estatísticas. No entanto, pesquisas anteriores ter descritos erros de raciocínio e dificuldades relacionadas com a compreensão. Este artigo discute a importância da correlação como uma idéia estocástica crítica e seu lugar no currículo espanhol. Então vamos nos concentrar na tarefa de estimar a correlação, descrevendo as principais variáveis que determinam a sua dificuldade. Resumimos os resultados de pesquisa sobre concepções errôneas e vieses de raciocínio identificados neles. Por fim, apresentamos algumas implicações para a pesquisa e ensino.

Palavras-chave: *Correlação, tarefas de estimação, variáveis da tarefa, vieses e concepções errôneas.*

MARIA M. GEA
Universidad de Granada, España
mmgea@ugr.es

Licenciada en Matemáticas, Licenciada en Ciencias y Técnicas Estadísticas, Máster en Didáctica de la Matemática y Máster en Estadística Aplicada. Diploma de estudios avanzados en Didáctica de las Ciencias. En la actualidad es becada por el Plan de Formación de Personal Investigador, Ministerio de Educación y Ciencia.

CARMEN BATANERO
Universidad de Granada, España
batanero@ugr.es

Profesora de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Granada. Licenciada en Matemáticas. Diplomada en Estadística y Doctora en Matemáticas. Ha publicado libros dirigidos al profesorado y artículos en diferentes revistas de educación matemática. Fue miembro del Comité Ejecutivo de ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) y Presidenta de IASE (International

Association for Statistical Education). Ha coordinado varios congresos y proyectos de educación estadística.

GUSTAVO R. CAÑADAS
Universidad de Granada, España
grcanadas@ugr.es

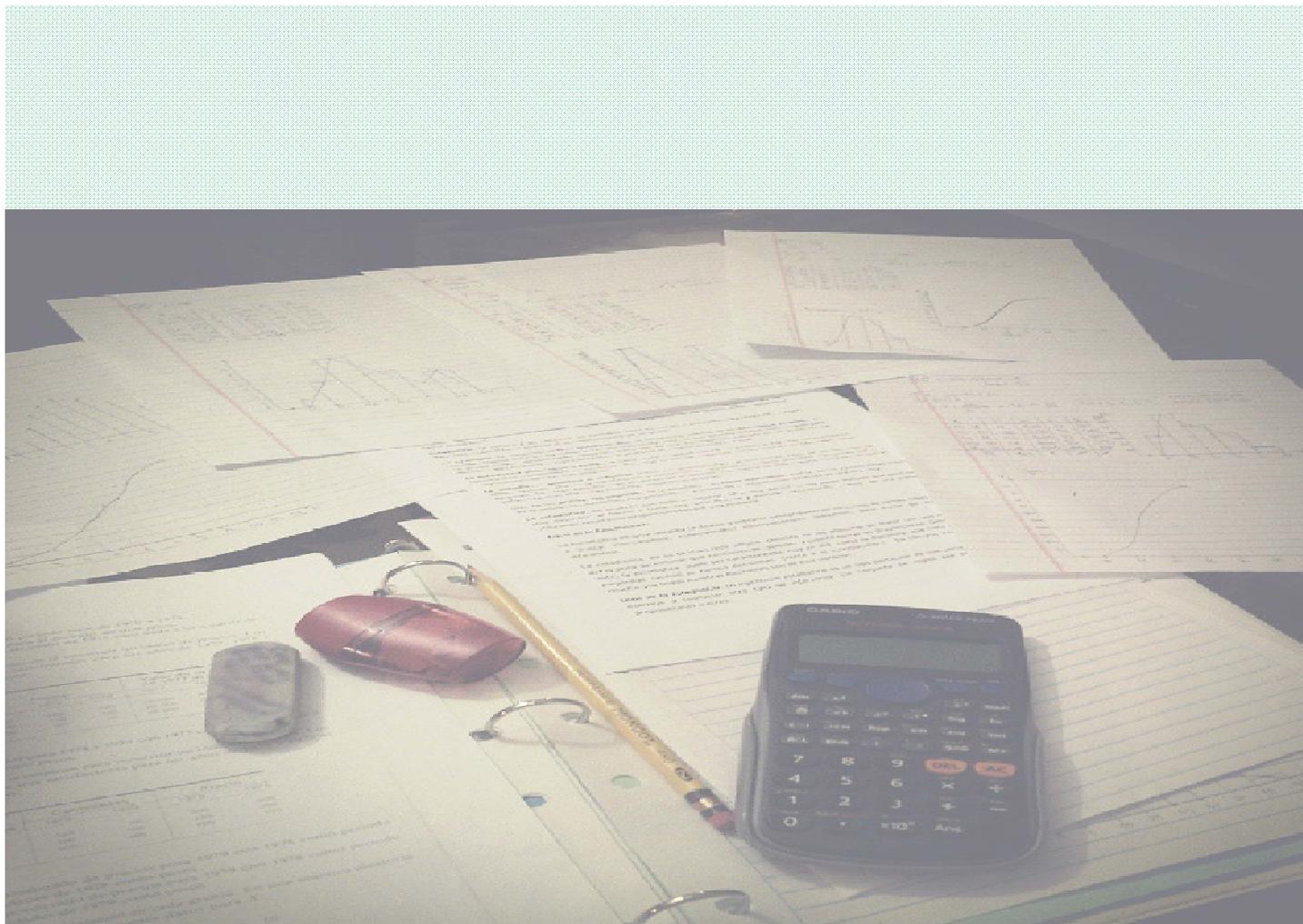
Licenciado en C.C. y T.T. Estadísticas, Máster en Metodología y en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Granada. Doctorado internacional en Didáctica de la Matemática. Es actualmente profesor en el Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

PEDRO ARTEAGA
Universidad de Granada, España
parteaga@ugr.es

Licenciado en Matemáticas en la Universidad Complutense, Máster y doctorado europeo en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Granada. Doctor en Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Es actualmente profesor en el Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

JOSÉ M. CONTRERAS
Universidad de Granada, España
jmcontreras@ugr.es

Licenciado en Matemáticas y C.C. y T.T. Estadísticas. Máster en Didáctica de la Matemática y Estadística Aplicada. Doctor en Didáctica de la Matemática Coordinador del Grupo de Didáctica de la Estadística de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Es actualmente profesor en el Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada



Autores

*Santiago Inzunza Cazares
Gabriel Yañez Canal
Ana Rátiva Hernández
Diana Lozano Rodríguez
Adriana G. D'Amelio
Felipe Fernández
Luisa Andrade
Benjamín Sarmiento
Jesús H. Cuevas Acosta
Greivin Ramírez Arce
Julia Elena Sanoja
José Ortiz Buitrago
Lucia Zapata-Cardona*

*Pedro G. Rocha S.
Soledad Estrella
Raimundo Olfos
Cileda de Q. e Silva Coutinho
Ernesto A. Sánchez Sánchez
Verónica Hoyos
Celi Espasandin Lopes
Ana Aparicio
Oscar João Abdounur
Jorge Luis Bazán
Marcos N. Magalhaes
Renan M. Barros Dos Santos
Jorge Luis Romeu*

*Hugo Alvarado Martínez
Roberto Behar
Pere Grima Cintas
Mario Miguel Ojeda R.
Cecilia Cruz López
María M. Gea
Carmen Batanero
Gustavo R. Cañadas
Pedro Arteaga
José M. Contreras*

CARACAS - 2013

ISBN: 978-980-00-2743-1



9 789800 027431