TEORIA DE LA PROBABILIDAD: NOCIONES FUNDAMENTALES

Guillermo Ramirez, Maura Vásquez y Adelmo Fernández*

2011

*Escuela de Estadística y Ciencias Actuariales de la Universidad Central de Venezuela

Índice general

2. Espacios Probabilizados **41**

2.1. Espacios probabilizados finitos 41

2.2. Espacios probabilizados finitos con puntos equiprobables. Análisis combinatorio 42

2.3. Probabilidades multinomial e hipergeométrica 51

2.4. Función de probabilidad en espacios muestrales infinitos numerables 54

2.5. Función de probabilidad en espacios muestrales infinitos no numerables 55

2.6. Ejercicios 2.1 58

Capítulo 2

Espacios Probabilizados

En el capítulo anterior estudiamos los conceptos fundamentales para la construcción de un modelo matemático que explique el comportamiento de un experimento aleatorio dado:

Espacio Muestral
Conjunto de todos los resultados posibles del experimento
Algebra de Sucesos
Clase conformada por todos los sucesos posibles asociados al espacio muestral
Función de Probabilidad
Función que asocia a cada suceso su probabilidad correspondiente

En este capítulo discutiremos la situación planteada según el espacio muestral sea finito, infinito numerable o infinito no numerable

2.1. Espacios probabilizados finitos

Nos ocuparemos en primer lugar del caso en el cual el espacio muestral es un conjunto finito, y por tanto puede escribirse como: $\Omega = \{w_1, w_2, ... w_n\}$. En este caso bastará con conocer la función de probabilidad sobre los puntos muestrales, para calcular la probabilidad de cualquier suceso asociado a Ω.

En efecto, en un espacio muestral finito cualquier suceso A puede escribirse como:

$$A = \{w_{a1}, w_{a2}, ...w_{ak}\}$$

donde k = n(A) es el número de elementos de A, de modo que:

$$P(A) = P(\bigcup_{i=1}^{k} w_{ai}) = \sum_{i=1}^{k} P(w_{ai})$$

Si B es cualquier otro suceso incompatible con A, digamos: B = { w_{b1}, w_{b2},... w_{bm}} donde m = n(B) es el número de elementos de B, entonces la unión:

$$A \cup B = \{w_{a1}, w_{a2}, ...w_{ak}, w_{b1}, w_{b2}, ...w_{bm}\}$$

y su probabilidad:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(w_{a1}) + P(w_{a2}) + ...P(w_{ak}) + P(w_{b1}) + P(w_{b2}) + ...P(w_{bm}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(w_{ai}) + \sum_{i=1}^{m} P(w_{bi}) = P(A) + P(B) \end{aligned}$$

Estas ideas sugieren que la especificación de las probabilidades de los puntos muestrales es suficiente para definir una función de probabilidad en un espacio muestral finito. En realidad ese es el caso, tal como se desprende del siguiente teorema, cuya demostración se deja como ejercicio.

Teorema 2.1.1. *Sea* $\Omega = \{w_1, w_2, ... w_n\}$ *un espacio muestral finito asociado a un cierto experimento aleatorio. Sea la función P: P(*Ω*)* $\rightarrow$ *R definida de modo que:*

i.- $0 \leq P(w_i) \leq 1 \quad \forall i$

ii.- $\sum_{i=1}^{n} P(\{w_i\}) = 1$

iii.- $P(A) = \sum_{w \in A} P(\{w\})$

Entonces P es una función de probabilidad sobre $(\Omega, P(\Omega))$.

2.2. Espacios probabilizados finitos con puntos equiprobables. Análisis combinatorio

Supondremos ahora que todos los puntos muestrales son equiprobables, es decir, $P(\{w_i\}) = p \quad \forall i$. En ese caso:

$$P(\Omega) = 1 = P(\cup\{w_i\}) = \sum P(\{w_i\}) = np \quad \text{de donde p = 1/n}$$

De tal manera que la probabilidad de cualquier suceso A vendrá dada por:

$$P(A) = 1 = P(\cup\{w_{a_i}\}) = \sum P(\{w_{a_i}\}) = kp = \frac{n(A)}{n}$$

resultado que concuerda con el enfoque clásico de Laplace.

Ejemplo 2.2.1. *Se elige aleatoriamente un número entre 1 y 100. Halle la probabilidad de que el número seleccionado sea múltiplo de 3.*

En primer lugar, debemos aclarar que el término “aleatorio”es utilizado en muchos sentidos diferentes. Nos referimos aquí al método de selección que asigna la misma probabilidad a cada elemento.
Debido entonces a la aleatoriedad, tenemos que:

$$P(\{w_i\}) = \frac{1}{100} \quad \forall i$$

así que el suceso:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{que el número seleccionado sea múltiplo de 3}\} \\ &= \{3, 6, 9, 12 \dots\} \end{aligned}$$

tendrá por probabilidad:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{33}{100} = 0,33$$

Ejemplo 2.2.2. *Se elige aleatoriamente un número entre 1 y 3.000.000. Hallar la probabilidad de que el número seleccionado comience por 1.*

Debido a la aleatoriedad:

$$P(\{w_i\}) = \frac{1}{3{,}000{,}000} \quad \forall i$$

así que el suceso A = {que el número seleccionado comience por 1} tendrá por probabilidad:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

Para hallar n(A) hacemos uso del siguiente cuadro:

Intervalos que contienen números que comienzan por 1			Total de enteros en el intervalo
	1		1
10	-	19	10
100	-	199	100
1000	-	1999	1000
10000	-	19999	10000
100000	-	199999	100000
1000000	-	1999999	1000000
			1111111

luego:

$$P(A) = \frac{1{,}111{,}111}{3{,}000{,}000} = 0{,}37$$

El hecho de que la probabilidad de un suceso A, en el caso de equiprobabilidad, sea el total de elementos de A sobre el total de elementos de Ω, nos sugiere la conveniencia de conocer ciertos procedimientos de enumeración de conjuntos. Estos procedimientos resultarán particularmente útiles cuando nos ocupemos de selección de muestras aleatorias.

Antes de estudiar los mtodos de enumeración de conjuntos, es necesario presentar las reglas básicas de adición y multiplicación.

Regla de adición
Si los conjuntos $A_1, A_2 \ldots A_k$ son disjuntos, entonces el total de elementos de la unión de ellos es igual a la suma de los totales de elementos de cada conjunto. Es decir:

$$n(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} n(A_i) \quad si\ A_i \cap A_j = \emptyset$$

Regla de multiplicación
Si al seleccionar elementos de un conjunto no vacío para formar conjuntos ordenados de tamaño k (k-uplas), ocurre que existen$_n$1 elementos posibles para ocupar el lugar 1, n_2 elementos posibles para ocupar el lugar 2, ..., n_k elementos posibles para ocupar el lugar k, entonces el total de k-uplas posibles que se pueden formar es igual al producto: $n_1 n_2 ... n_k$.

Estos dos principios básicos permiten definir los siguientes métodos de enumeración:

Definicion 2.2.1 (Permutación de n elementos)**.** *Dados n elementos diferentes $a_1, a_2 \ldots a_n$, se define como permutación de tales elementos a todo arreglo diferente obtenido con dichos elementos, intercambiando el orden de ellos. El número total de permutaciones lo representaremos por P_n y es igual a $n!$.*

Este resultado es fácilmente derivable aplicando la regla de la multiplicación:

Existen n elementos posibles para ocupar el lugar 1
Existen n-1 elementos posibles para ocupar el lugar 2
$\vdots$
Existe 1 elemento posible para ocupar el lugar n

El total de arreglos posibles de tamaño n es entonces:

n(n-1)(n-2) ... 2.1 = n! = P_n

Ejemplo 2.2.3. *Dados los elementos a, b y c tenemos que los posibles arreglos diferentes, intercambiando el orden son:*

abc	bac	cab
acb	bca	cba

cuyo total es: $P_3 = 3! = 6$.

Definicion 2.2.2 (Variación de n elementos de tamaño r con repetición)**.** *Dados n elementos diferentes $a_1, a_2 \ldots a_n$, se define como variación de tales elementos de tamaño r con repetición, a todo arreglo de tamaño r que puede formarse con dichos elementos, en el cual se pueden repetir los elementos y se considera el orden como criterio de diferenciación. El número total de variaciones de tamaño r con repetición lo representaremos por $V^R_{n,r}$ y es igual a n^r.*

Este resultado se deriva también aplicando la regla de la multiplicación:

Existen n elementos posibles para ocupar el lugar 1
Existen n elementos posibles para ocupar el lugar 2
$\vdots$

Existen n elementos posibles para ocupar el lugar n

El total de arreglos posibles de tamaño r es entonces:

n n . . . n $= n^r = V^R_{n,r}$

Una aplicación importante de este resultado consiste en que el número total de muestras posibles con reemplazamiento de tamaño r y considerando el orden, extraídas en una población de tamaño n es

Ejemplo 2.2.4. *Sea la población formada por los elementos a, b, c y d. Las posibles muestras de tamaño 2 con reemplazamiento y considerando el orden, que se pueden extraer son:*

aa	*ab*	*ac*	*ad*
ba	*bb*	*bc*	*bd*
ca	*cb*	*cc*	*cd*
da	*db*	*dc*	*dd*

cuyo total es: $V^R_{4,2} = 4^2 = 16$.

Definicion 2.2.3 (Variación de n elementos de tamaño r)**.** *Dados n elementos diferentes* $a_1, a_2 \dots a_n$*, se define como variación de tales elementos de tamaño r, a todo arreglo de tamaño r que puede formarse con dichos elementos, en el cual no se pueden repetir los elementos y se considera el orden como criterio de diferenciación. El número total de variaciones de tamaño r lo representaremos por* $V_{n,r}$ *y es igual a* $n_{(r)}$.

Se denomina factorial r-ésimo de n, y se denota por $n_{(r)}$, al producto:

$$n_{(r)} = \prod_{j=1}^{r}(n - j + 1) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Aplicando la regla de la multiplicación tenemos:

Existen	n	elementos posibles para ocupar el lugar 1
Existen	n-1	elementos posibles para ocupar el lugar 2
	$\vdots$	

Existe n-(r-1) elementos posibles para ocupar el lugar r

El total de arreglos posibles de tamaño r es entonces:

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \prod_{j=1}^{r}(n-j+1)$$
$$= n_{(r)} = \frac{n!}{(n-r)!} = V_{n,r}$$

Una aplicación importante de este resultado consiste en que el número total de muestras posibles sin reemplazamiento de tamaño r y considerando el orden, extraídas de una población de tamaño n es $V_{n,r}$.

Ejemplo 2.2.5. *Sea la población formada por los elementos a, b, c y d. Las posibles muestras de tamaño 2 sin reemplazamiento y considerando el orden, que se pueden extraer son:*

	ab	*ac*	*ad*
ba		*bc*	*bd*
ca	*cb*		*cd*
da	*db*	*dc*	

cuyo total es: $V_{4,2} = 4_{(2)} = 4 \cdot 3 = 12.$

Definicion 2.2.4 (Combinación de n elementos de tamaño r)**.** *Dados n elementos diferentes* $a_1, a_2 \dots a_n$*, se define como combinación de tales elementos de tamaño r, a todo arreglo de tamaño r que puede formarse con dichos elementos, en el cual no se pueden repetir los elementos y no se considera el orden como criterio de diferenciación. El número total de combinaciones de tamaño r lo representaremos por* $C_{n,r}$ *y es igual a* $\binom{n}{r}$.

Se denomina número combinatorio de n en r, y se denota por $C_{n,r}$, al cociente:

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Tal resultado se deriva de lo siguiente:
Si permutamos estos $C_{n,r}$ arreglos de tamaño r, en los cuales no interesa el orden y no pueden repetirse los elementos, obtenemos el total de arreglos de

tamaño r en los cuales sí interesa el orden y no pueden repetirse los elementos, es decir el total de variaciones $V_{n,r}$. Por tanto:

$$r!\, C_{n,r} = V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

de donde:

$$C_{n,r} = \frac{V_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Una aplicación importante de este resultado consiste en que el número total de muestras posibles sin reemplazamiento de tamaño r y sin considerar el orden, extraídas de una población de tamaño n es $C_{n,r}$.

Ejemplo 2.2.6. *Sea la población formada por los elementos a, b, c y d. Las posibles muestras de tamaño 2 sin reemplazamiento y sin considerar el orden, que se pueden extraer son:*

$$\begin{array}{ccc} ab & ac & ad \\ & bc & bd \\ & & cd \end{array}$$

cuyo total es: $C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6.$

Obsérvese que si permutamos estas 6 muestras obtenemos las 12 muestras del ejemplo 2.2.5, es decir, las variaciones.

Definicion 2.2.5 (Combinación de n elementos de tamaño r con repetición)**.** *Dados n elementos diferentes* $a_1, a_2 \ldots a_n$, *se define como combinación de tales elementos de tamaño r, a todo arreglo de tamaño r que puede formarse con dichos elementos, en el cual se pueden repetir los elementos y no se considera el orden como criterio de diferenciación. El número total de combinaciones de tamaño rcon repetición lo representaremos por* $C^R_{n,r}$ *y es igual a* $\binom{n+r-1}{r}$.

La demostración de este resultado es un poco más complicada que las anteriores y debe hacerse mediante inducción con respecto a r, y aplicando la relación:

$$\sum_{s=0}^{n-1} \binom{r+s}{s} = \binom{n+r}{r+1} \quad \text{con n y r tales que } r \geq 0 \text{ y } n \geq 1$$

Una aplicación importante de este resultado consiste en que el número total de muestras posibles con reemplazamiento de tamaño r y sin considerar el orden, extraídas de una población de tamaño n es $C^R_{n,r}$.

Ejemplo 2.2.7. *Sea la población formada por los elementos a, b, c y d. Las posibles muestras de tamaño 2 con reemplazamiento y sin considerar el orden, que se pueden extraer son:*

$$\begin{array}{cccc} aa & ab & ac & ad \\ & bb & bc & bd \\ & & cc & cd \\ & & & dd \end{array}$$

cuyo total es: $C^R_{4,2} = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10.$

Podemos resumir la aplicación de las definiciones 2.2.2. a la 2.2.5., como sigue:

				Total de muestras
Población (n elementos)	Muestra (r elementos)	Con reemplazamiento	Considerando el orden	$V^R_{n,r}$
			Sin considerar el orden	$C^R_{n,r}$
		Sin reemplazamiento	Considerando el orden	$V_{n,r}$
			Sin considerar el orden	$C_{n,r}$

A continuación presentaremos una definición importante que nos permitirá introducir las permutaciones con repetición.

Definicion 2.2.6 (Distribución de r elementos en n posiciones)**.** *Dados r elementos $a_1, a_2 \ldots a_r$, el total de arreglos posibles de tales elementos en n posiciones viene dado por $V_{n,r}$ si los elementos son diferentes, y por $C_{n,r}$ si los elementos son iguales.*

Este resultado se deriva de la forma siguiente:
En el caso en el cual los elementos son diferentes, designamos por $a_{1i}, a_{2j} \dots a_{rk}$ el arreglo en el cual el elemento a_1 ocupa el lugar i, el elemento a_2 ocupa el lugar j, ... el elemento a_r ocupa el lugar k. De esta manera, el total de arreglos posibles de los r elementos en las n posiciones es igual al total de arreglos de subíndices que podemos asignar a los r elementos, tomados del conjunto (1, 2 ... n) sin que se repitan los subíndices y considerando el orden, es decir, $V_{n,r}$.
En el caso en el cual los elementos son iguales: a, a ... a, designamos por $a_1, a_2 \dots a_r$ el arreglo en el cual las posiciones 1, 2 ... r están ocupadas. En este caso, el total de arreglos de los r elementos en las n posiciones será igual al total de arreglos de subíndices que podemos asignar a los r elementos, tomados del conjunto (1, 2 ... n) sin que se repitan los subíndices y sin considerar el orden, es decir, $C_{n,r}$.

Ejemplo 2.2.8. *Dados los elementos a y b, los posibles arreglos de estos 2 elementos en tres posiciones son:*

Posiciones		
1	*2*	*3*
a	b	-
a	-	b
-	a	b
b	a	-
b	-	a
-	b	a

cuyo total es $V_{3,2} = 6$. Si los elementos a y b fuesen iguales, los arreglos diferentes serían solamente los tres primeros, o sea, $C_{3,2}$.

Definicion 2.2.7 (Permutación de n elementos con repetición)**.** *Dados n elementos de los cuales n_1 son de una clase C_1, n_2 de una clase $C_2 \dots n_k$ de una clase C_k. Se define como permutación de tales elementos con repetición, a todo arreglo diferente obtenido con dichos elementos, intercambiando el orden de ellos. El número total de permutaciones con repetición lo representaremos por $P_{n;n_1 n_2 \dots n_k}$ y es igual a:*

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$

Derivaremos este resultado en la siguiente forma:

Los n_1 elementos de la clase C_1 pueden distribuirse en las n posiciones de $\binom{n}{n_1}$ formas diferentes. Los n_2 elementos de la clase C_2 pueden distribuirse en las $n - n_1$ posiciones restantes de $\binom{n-n_1}{n_2}$ formas diferentes. Seguimos así sucesivamente hasta los n_k elementos de la clase C_k, que pueden distribuirse en las últimas n_k posiciones restantes de $\binom{n_k}{n_k}$ formas diferentes.

El total de arreglos diferentes será entonces el producto:

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-(n_1+n_2)}{n_3}\cdots\binom{n-(n_1+n_2+\cdots+n_{k-2})}{n_{k-1}}\binom{n_k}{n_k} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

Ejemplo 2.2.9. *Dados los elementos a, a, a, b y b, tenemos que los posibles arreglos diferentes intercambiando el orden son:*

aaabb	abaab	baaab	bbaaa
aabab	ababa	baaba	
aabba	abbaa	babaa	

cuyo total es $P_{5;3,2} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$.

2.3. Probabilidades multinomial e hipergeométrica

La revisión detallada de conceptos del análisis combinatorio presentada en la sección anterior nos servirá de base para presentar dos esquemas probabilísticos de gran aplicación en la teoría del muestreo: el multinomial y el hipergeométrico.

Definicion 2.3.1 (Probabilidad multinomial)**.** *Dada una población de N elementos, de los cuales N_1 pertenecen a una clase C_1, N_2 pertenecen a una clase C_2, $\ldots N_k$ pertenecen a una clase C_k. Se selecciona aleatoriamente con reemplazamiento una muestra de tamaño n. La probabilidad de que la muestra* *contenga n_i elementos de la clase C_i (i = 1, 2 ... k), donde la suma $n_1 + n_2 \dots n_k = n$, se denomina probabilidad multinomial y viene dada por:*

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{n_1} \left(\frac{N_2}{N}\right)^{n_2} \dots \left(\frac{N_k}{N}\right)^{n_k}$$

La demostración de este resultado es como sigue:

La probabilidad buscada viene dada por el total de muestras con reemplazamiento que contengan n_i elementos de la clase C_i (i = 1, 2 ... k), dividido por el total de muestras con reemplazamiento. El total de muestras con reemplazamiento es $V^R_{N,n} = N^n$.

Las muestras con reemplazamiento que contienen elementos de C_1 en las primeras n_1 posiciones, elementos de C_2 en las siguientes n_2 posiciones, ..., y elementos de C_k en las últimas n_k posiciones son $N_1^{n_1} N_2^{n_2} \dots N_k^{n_k}$.

Permutando estas muestras obtenemos un total de:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}\, N_1^{n_1} N_2^{n_2} \dots N_k^{n_k}$$

Luego, la probabilidad buscada es:

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}\, \frac{N_1^{n_1} N_2^{n_2} \dots N_k^{n_k}}{N^n}$$

Definicion 2.3.2 (Probabilidad hipergeométrica)**.** *Dada una población de N elementos, de los cuales N_1 pertenecen a una clase C_1, N_2 pertenecen a una clase C_2, ... N_k pertenecen a una clase C_k. Se selecciona aleatoriamente sin reemplazamiento una muestra de tamaño n. La probabilidad de que la muestra contenga n_i elementos de la clase C_i (i = 1, 2 ... k), donde la suma $n_1 + n_2 \dots n_k = n$, se denomina probabilidad hipergeométrica y viene dada por:*

$$\frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\dots\binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}}$$

La demostración de este resultado es similar a la anterior:

La probabilidad buscada viene dada por el total de muestras sin reemplazamiento que contengan n_i elementos de la clase C_i (i = 1, 2 ... k), dividido por el total de muestras sin reemplazamiento. El total de muestras sin reemplazamiento es $V_{N,n} = N_{(n)}$.

Las muestras con reemplazamiento que contienen elementos de C_1 en las primeras n_1 posiciones, elementos de C_2 en las siguientes n_2 posiciones, ..., y elementos de C_k en las últimas n_k posiciones son $N_{1(n_1)}N_{2(n_2)}\dots N_{k(n_k)}$.

Permutando estas muestras obtenemos un total de:

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!}\,N_{1(n_1)}N_{2(n_2)}\dots N_{k(n_k)} =$$
$$n!\,\frac{N_{1(n_1)}}{n_1!}\,\frac{N_{2(n_2)}}{n_2!}\dots\frac{N_{k(n_k)}}{n_k!}$$

Luego la probabilidad buscada es:

$$\frac{\left(\frac{N_{1(n_1)}}{n_1!}\right)\left(\frac{N_{2(n_2)}}{n_2!}\right)\dots\left(\frac{N_{k(n_k)}}{n_k!}\right)}{\left(\frac{N_{(n)}}{n}\right)}$$

que es igual a:

$$\frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\dots\binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}}$$

Podemos resumir la aplicación de las definiciones 2.3.1 y 2.3.2, como sigue:

Dada una población de tamaño N clasificada en k subpoblaciones de tamaños $N_1, N_2 \dots N_k$ respectivamente, la probabilidad de obtener n_i elementos de cada subpoblación C_i (i = 1, 2 ...k) al seleccionar una muestra de tamaño n, depende de si el muestreo es con o sin reemplazamiento:

	Subpoblación			
	C_1			n_1 elementos de C_1
Población	C_2	$\longrightarrow$	Muestra	n_2 elementos de C_2
(N elementos)	$\vdots$		(n elementos)	$\vdots$
	C_k			n_k elementos de C_k

Tal probabilidad es del tipo multinomial si el muestreo es con reemplazamiento, y del tipo hipergeométrico si el muestreo es sin reemplazamiento.

Ejemplo 2.3.1. *En un lote que consta de 100 piezas, hay 20 defectuosas y 80 no defectuosas. Se selecciona aleatoriamente 5 de ellas. Halle la probabilidad de obtener 5 piezas defectuosas y 5 no defectuosas.*

En este caso tenemos:

Población	20 defectuosas	$\longrightarrow$	Muestra	5 defectuosas
(100 piezas)	80 no defectuosas		(10 piezas)	5 no defectuosas

La probabilidad buscada será:

$$\frac{10!}{5!\,5!}\left(\frac{20}{100}\right)^5\left(\frac{80}{100}\right)^5 = 0,07 \qquad \text{si el muestreo es con reemplazamiento}$$

y:

$$\frac{\binom{20}{5}\binom{80}{5}}{\binom{100}{10}} = 0,021 \qquad \text{si el muestreo es sin reemplazamiento}$$

2.4. Función de probabilidad en espacios muestrales infinitos numerables

No es diiícil concluir que cuando Ω es un espacio infinito numerable, puede generalizarse el resultado obtenido en el teorema 2.1.1. Esto se debe a que también en este caso, cualquier suceso no vacío puede expresarse como unión numerable de puntos muestrales, y por tanto conoceremos la probabilidad de cualquier suceso A si es conocida la probabilidad de cada uno de los puntos muestrales.

Teorema 2.4.1. *Sea $\Omega = \{w_1,\, w_2, \ldots\}$ un espacio muestral infinito numerable asociado a un cierto experimento aleatorio. Sea la función P: P(Ω) $\rightarrow$ R definida de modo que:*

i.- $0 \leq P(w_i) \leq 1 \quad \forall i$

ii.- $\sum_{i=1}^{\infty} P(\{w_i\}) = 1$

iii.- $P(A) = \sum_{w \in A} P(\{w\})$

Entonces P es una función de probabilidad sobre $(\Omega, P(\Omega))$.

Ejemplo 2.4.1. *Considere el experimento aleatorio que consiste en lanzar una moneda hasta que aparezca cara. Halle la probabilidad de los sucesos:*

i.- A = (necesitar a lo sumo 3 lanzamientos)

ii.- B = (necesitar por lo menos 3 lanzamientos)

El espacio muestral asociado a este experimento aleatorio es infinito numerable:

$$\Omega = \{c, sc, ssc, \dots\}$$

Debemos conocer entonces la probabilidad de cada uno de los puntos muestrales para calcular la probabilidad de cualqueir suceso:
$P(\{w_1\}) = P(c) = 1/2$
$P(\{w_2\}) = P(sc) = (1/2)^2$
$\vdots$
$P(\{w_k\}) = P(ss\dots sc) = (1/2)^k$ para todo entero k

tenemos entonces:

$$\begin{aligned} i.-P(A) &= P(\{w_1, w_2, w_3\}) \\ &= P(\{w_1\}) + P(\{w_2\}) + P(\{w_3\}) \\ &= (1/2) + (1/2)^2 + (1/2)^3 \\ &= 7/8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii.-P(B) &= P(\{w_3, w_4, \dots\}) \\ &= 1 - P(\{w_1, w_2\}) \\ &= 1 - ((1/2) + (1/2)^2) \\ &= 1/4 \end{aligned}$$

2.5. Función de probabilidad en espacios muestrales infinitos no numerables

En este caso la situación no es tan simple. En primer lugar, no todos los posibles conjuntos de Ω pueden considerarse como sucesos. Por otra parte, como todo subconjunto no numerable no puede expresarse como unión numerable de puntos muestrales, el conocimiento de la función P para estos sucesos elementales será de poca utilidad para determinar la probabilidad de cualquier suceso.

Ocurre además, que sólo es posible para un conjunto numerable de puntos muestrales tener probabilidad positiva, ya que:

a lo más 1 elemento podrá tener probabilidad mayor que 1/2,
a lo más 2 elementos podrán tener probabilidad mayor que 1/3,
$\vdots$
a lo más (n-1) elementos podrán tener probabilidad mayor que 1/n,

para todo n. De tal manera que la "mayoría"de los puntos muestrales tendrán probabilidad cero si Ω es infinito no numerable.

El ejemplo más conocido e importante de espacio muestral infinito no numerable es el conjunto de los números reales $\mathcal{R}$. Una vez estudiado el concepto de variable aleatoria en el capítulo 4, entenderemos que éste es el nico caso que nos interesa estudiar.

En el siguiente teorema veremos que si $\Omega = \mathcal{R}$, podremos calcular la probabilidad de cualquier suceso (boreliano) si conocemos la función de probabilidad para los intervalos del tipo $(-\infty, x]$

Teorema 2.5.1. *Sea el espacio probabilizado real* $(\mathcal{R}, \mathcal{B}_{\mathcal{R}}, P)$ *para el cual se conocen las probabilidades del tipo* $P((-\infty, x])$ *para todo* $x \in \mathcal{R}$. *Entonces es posible calcular las probabilidades del tipo:*

i.- $P((x,y])$	*v.-* $P([x,y])$
ii.- $P(\{x\})$	*vi.-* $P((x,\infty))$
iii.- $P((x,y))$	*vii.-* $P([x,\infty))$
iv.- $P([x,y))$	*viii.-* $P((-\infty,x))$

Demostración.

$$i.\text{-}\ P((x,y]) = P((-\infty,y]) - P((-\infty,x])$$
$$ii.\text{-}\ P(\{x\}) = P(lim(x-1/n,x]) = limP((x-1/n,x])$$
$$iii.\text{-}\ P((x,y)) = P((x,y]) - P(\{y\})$$
$$iv.\text{-}\ P([x,y)) = P((x,y)) + P(\{x\})$$

□

Las demostraciones son similares y se dejan como ejercicio.

Ejemplo 2.5.1. *Sea el espacio muestral* $\Omega = \{x \in R : 0 < x \leq 1\}$. *Sea la función de probabilidad* $P : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{R}$ *donde* $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathcal{R}} \cap (0, 1]$, *y tal que conocemos que* $P((0, x]) = x$ *para todo* $x \in \Omega$. *Calcule las siguientes probabilidades:*

$i.$- $P(\Omega)$

$ii.$- $P((1/2, 1])$

$iii.$- $P(\{1/2\})$

Utilizando los resultados del teorema anterior tenemos que:

$i.$- $P(\Omega) = P((0, 1]) = 1$

$ii.$- $P((1/2, 1]) = P((0, 1]) - P((0, 1/2]) = 1 - 1/2 = 1/2$

$iii.$- $P(\{1/2\}) = P(lim(1/2 - 1/n, 1/2]) = lim\{P((0, 1/2]) - P((0, 1/2 - 1/n])\}$
$= lim\{1/2 - (1/2 - 1/n)\} = lim\{1/n\} = 0$

Preguntas de Repaso

1. *Enuncie la regla de la adición*
2. *Enuncie la regla de la multiplicación*
3. *¿Qué se entiende por permutación de n elementos diferentes* $a_1, a_2 \ldots a_n$*?*
4. *¿Qué se entiende por variación de n elementos diferentes* $a_1, a_2 \ldots a_n$ *de tamaño r con repetición?*
5. *¿Qué se entiende por variación de n elementos diferentes* $a_1, a_2 \ldots a_n$ *de tamaño r sin repetición?*
6. *¿Qué se entiende por combinación de n elementos diferentes* $a_1, a_2 \ldots a_n$ *de tamaño r con repetición?*
7. *¿Qué se entiende por combinación de n elementos diferentes* $a_1, a_2 \ldots a_n$ *de tamaño r sin repetición?*
8. *Explique brevemente el esquema probabilístico multinomial y dé un ejemplo*
9. *Explique brevemente el esquema probabilístico hipergeométrico y dé un ejemplo*
10. *En el caso del espacio probabilizado real* $(\mathcal{R}, \mathcal{B}_{\mathcal{R}}, P)$, *la probabilidad de qué tipo de intervalos es necesario conocer para calcular la probabilidad de cualquier boreliano y por qué*

2.6. Ejercicios 2.1

1. Demuestre por inducción la regla de la multiplicación.

2. Se seleccionan aleatoriamente sin reemplazamiento 3 números entre 1 y 10. Halle la probabilidad de los siguientes sucesos:

   i) A = {que los números 1 y 6 hayan sido seleccionados}
   ii) B = {que los 3 números sean consecutivos}
   iii) C = {que los 3 nmeros sean pares}
   iv) D = {que el menor de los nmeros sea 5}

3. Se selecciona aleatoriamente un número entre 1 y 10, luego se selecciona otro entre 11 y 50, y luego otro entre 51 y 100. Halle la probabilidad de los siguientes sucesos:

   i) A = {que los 3 números sean múltiplos de 5}
   ii) B = {que dos números sean pares y el otro impar}

4. Se selecciona aleatoriamente un número entre 1 y 100. Halle la probabilidad de obtener un cuadrado perfecto si:

   i) Todos los números tienen igual probabilidad
   ii) Los números entre 1 y 50 tienen el doble de probabilidad que los números entre 51 y 100

5. De 6 números positivos y 8 negativos se eligen 4 al azar sin reemplazamiento, y se multiplican. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto sea un número positivo?

6. Considere una lotería de 100 boletos que ofrece como premios 5 carros y 8 motos. Si una persona P compra 4 boletos, halle la probabilidad de los siguientes sucesos:

   i) A = {P gana 1 carro y 2 motos}
   ii) B = {P no gana ningún premio}
   iii) C = {P gana al menos un premio}
   iv) D = {P gana exactamente un premio}

7. Una caja contiene 10 libros de Estadística, 4 de Matemáticas y 3 de Computación. Si se extraen aleatoriamente 4 libros sin reemplazamiento, halle la probabilidad de obtener:

    i) A = {al menos uno de cada materia}

    ii) B = {a lo sumo 2 libros de Estadística}

8. Se seleccionan aleatoriamente 5 cartas de un juego de barajas. Halle la probabilidad de obtener:

    i) A = {exactamente 1 par de cartas de igual pinta}

    ii) B = {exactamente 2 pares de cartas de igual pinta}

    iii) C = {exactamente un trío}

    iv) D = {1 trío y 1 par}

    v) E = {5 cartas de la misma pinta}

9. Cuatro personas se ponen de acuerdo para encontrarse en el Grand Hotel de París. Sucede que en esa ciudad hay 4 hoteles con ese nombre. ¿Cuál es la probabilidad de que todos ellos escojan hoteles diferentes?

10. Un autobusete comienza su recorrido por 10 paradas con 6 pasajeros a bordo. Asumiendo que la probabilidad de bajarse cada pasajero en cada parada es la misma, ¿cuál es la probabilidad de que no se baje más de 1 pasajero en cada parada?

11. Se escribe en tarjetas las letras de la palabra “PROBABILIDAD”, una letra en cada tarjeta. Se barajan bien las tarjetas y se colocan en fila en una mesa, con las letras hacia arriba. Halle la probabilidad de que quede escrita la palabra “PROBABILIDAD”.

12. Considere una ciudad en la cual hay 3 plomeros. Un día 4 residentes llaman por teléfono a una plomero. Si cada uno de los residentes selecciona un plomero al azar del directorio telefónico, halle la probabilidad de los siguientes sucesos:

    i) A = {todos los plomeros son llamados}

    ii) B = {exactamente 1 plomero es llamado}

13. Suponga que 4 personas asisten a una fiesta. En la entrada del salón depositan su sombrero en una sombrerera. Si al salir, cada persona recoge un sombrero al azar, cuál es la probabilidad de que:

    i) Todas las personas recojan su propio sombrero

    ii) Al menos una persona recoja su propio sombrero

14. Demuestre que:

    i) $\binom{n}{x} = \binom{n}{n-x}$

    ii) $\binom{m}{n}\binom{m-n}{r}\binom{m-n-r}{k-n} = \binom{m}{k+r}\binom{k+r}{k}\binom{k}{n}$

    iii) $\binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} = \binom{m}{n}$

    iv) $\binom{x+r-1}{r-1} = \binom{x+r-1}{x} = \binom{-r}{x}(-1)^x$

15. i) Halle el coeficiente de x^n en el desarrollo de:

    ii) Utilizando la parte i, demuestre que:
    (Sugerencia: Iguale los coeficientes de x^n en los 2 términos de la ecuación:)

16. Sea el espacio muestral $\Omega = \{1, 2 \ldots\}$, y sea la función $P : \mathcal{B}_{\mathcal{R}} \cap \Omega \to \mathcal{R}$ tal que:

    $$P(n) = c(2/3)^n \qquad \forall n \in \Omega$$

    Obtenga:

    i) El valor de c

    ii) La probabilidad del suceso conformado por los múltiplos de 7

17. Sea el espacio muestral $\Omega = \{0, 1 \ldots\}$, y sea la función $P : \mathcal{B}_{\mathcal{R}} \cap \Omega \to \mathcal{R}$ tal que:

    $$P(w) = e^{-2}\,\frac{2^w}{w!} \qquad \forall w \in \Omega$$

    Calcule:

    i) $P(\Omega)$

    ii) $P(0 \leq w \leq 2)$

    iii) $P(w \geq 1)$

18. Sea el espacio muestral $\Omega = \{1, 2 \ldots\}$, y sea la función $P : \mathcal{B}_{\mathcal{R}} \cap \Omega \to \mathcal{R}$ tal que:
$$P(\{1, 2 \ldots x\}) = 1 - (1/2)^x \qquad \forall x \in \Omega$$
Calcule:
   i) $P(\{1, 2, 3, 4\})$
   ii) $P(\{3, 4, 5 \ldots\})$
   iii) $P(\{3, 4, 5\})$
   iv) $P(\{0\})$
   v) $P(\{2\})$
   vi) $P(\{x\})$

19. Sea el espacio muestral $\Omega = \{x \in \mathcal{R} : a < x \leq b\}$, y sea la función $P : \mathcal{B}_{\mathcal{R}} \cap \Omega \to \mathcal{R}$ tal que:
$$P((a, x]) = \frac{x - a}{b - a} \qquad \forall x \in \Omega$$
Calcule:
   i) $P(\Omega)$
   ii) $P((\frac{a+b}{2}, b])$
   iii) $P(\{b\})$
   iv) $P((\frac{a+b}{2}, \frac{a+3b}{4}])$

20. Sea el espacio muestral $\Omega = \{x \in \mathcal{R} : 0 < x < \infty\}$, y sea la función $P : \mathcal{B}_{\mathcal{R}} \cap \Omega \to \mathcal{R}$ tal que:
$$P((a, b]) = \int_a^b e^{-t} dt \qquad \text{para} \quad 0 < a < b < \infty$$
Calcule:
   i) $P(\Omega)$
   ii) $P((2, 5])$
   iii) $P(\{x\})$
   iv) $P([5, \infty))$

PERSONAJES DE LA ESTADISTICA

Karl Pearson

Karl Pearson (1857 - 1936) nació en Londres el 27 de marzo de 1857 en una familia de clase media alta de Yorkshire. En 1875 ganó una beca para estudiar matemáticas en el King's College, donde estudió además filosofía y religión. Se graduó en 1879 en la Universidad de Cambridge con los más altos honores. Durante 1879 y 1880 estudió en las universidades de Berlín y Heidelberg, donde cursó literatura y derecho romano. En 1888 se dedica a la docencia en matemáticas en el King's College, convirtiéndose en uno de los profesores más notables de su época. En el año 1891 conoce al zoólogo Walter Weldon, con quien lo unió una estrecha amistad durante muchos años, y cuya influencia lo hizo interesarse por la genética y la evolución. Pearson, Weldon y Galton fueron los fundadores de la prestigiosa revista Biometrika, cuyo primer volumen apareció en 1901. De Pearson son famosas sus acaloradas y públicas disputas con Fisher sobre diversos temas estadísticos. Karl Pearson falleció en Inglaterra el 27 de abril de 1936, a la edad de 79 años. Su hijo, Egon Pearson, siguió sus pasos, llegando a ser designado como Jefe del Departamento de Estadística en el University College. Entre sus numerosos aportes pueden mencionarse el coeficiente de correlación lineal, la distribución chi-cuadrado y las pruebas de bondad de ajuste.
De él se dijo: "...Era un hombre de una gran inteligencia, que además tenía la gran virtud de explicar claramente los más complicados temas ..."."
