
TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

**DESARROLLO DE UN PROGRAMA POR COMPUTADORA PARA RESOLVER LAS
ECUACIONES DE FLUJO BIFASICO EN UN MEDIO POROSO UTILIZANDO UNA
FORMULACION TIPO IMFES**

PRESENTADO ANTE LA ILUSTRE
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA

POR LOS BACHILLERES:

LOPEZ DI BLASI, SABINA

MARTINEZ ZORRILLA, JOAN MANUEL

PARA OPTAR AL TÍTULO DE

INGENIERO MECÁNICO

CARACAS, 2001

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

**DESARROLLO DE UN PROGRAMA POR COMPUTADORA PARA RESOLVER LAS
ECUACIONES DE FLUJO BIFASICO EN UN MEDIO POROSO UTILIZANDO UNA
FORMULACION TIPO IMFES**

TUTOR ACADEMICO:
DR. GARCIA, REINALDO.
TUTOR INDUSTRIAL:
DR. BUITRAGO, SAUL

CARACAS, 2001

DEDICATORIA

A Dios y a la virgen, quienes siempre me acompañan cuidando mis huellas.

A mis padres, Nina y Joel, que me enseñaron que la vida es un sueño, y que no debo nunca dejar de soñar, por ayudarme a crecer, dándome las herramientas necesarias para enfrentarme al mundo.

A mis hermanas, Claudia y Laura, quienes me hacen ser más fuerte cada día, para poder servirles de ejemplo.

A José Ramón, quien es risa, fiesta, magia, amor, ó resumiendo en una sola palabra, vida. Mi mejor señal de que las cosas hermosas existen, de que Dios existe.

A mis amigos, los ratones legítimos, que me han apoyado en cada una de mis locuras.

A mi mejor amigo, Joan, a quien he dedicado y dedicaré siempre una parte de tiempo. A Wilfre por su apoyo, sus risas y sus abrazos. A Carmen y Alejandra, quienes han compartido cada risa y cada lágrima en estos 5 años. Más que compañeras, hermanas.

A Cecilia y Manuel, quienes son mis segundos padres.

A la memoria de mis abuelas, con quienes comparto este triunfo a distancia.

Sabina López Di Blasi

DEDICATORIA

A Dios...

A mis padres ya que a través de sus sacrificios, ejemplos y amor me enseñaron que en la vida todo es posible de conseguir con esfuerzo y dedicación.

A mis hermanos por todo su amor, y para los cuales espero ser un buen ejemplo a seguir.

A mis abuelas por estar siempre pendiente de mí.

A la familia Martínez - López por haberme hecho sentir como un hijo más.

A la familia Zorrilla – Gómez por lo especial que siempre han sido conmigo, en especial Eddie, que más que un tío es mi amigo, y Elizabeth a quien siempre he visto como un ejemplo tenacidad y perseverancia.

A Sabina, mi amiga incondicional, a la cual le deseo el mejor de los éxitos (te voy a extrañar).

A mis panillas de la escuela : Wilfredo, Alexander, Gabriela, Valladares, Ana Maria, Walter y Angélica.

A todos aquellos que de una u otra forma me han ayudado cada día a ser una persona mejor.

Joan M. Martínez Z.

AGRADECIMIENTOS

A nuestra queridísima Universidad por habernos formado como unos profesionales integrales.

A nuestro tutor industrial, Dr. Saúl Buitrago, y a nuestro tutor académico, Dr. Reinaldo García, por toda la colaboración prestada para el cumplimiento de este trabajo.

A nuestros padres y hermanos, por su apoyo incondicional.

A el Lic. José Ramón Guevara, por su inmensa ayuda y dedicación en la realización del presente trabajo.

Al “Dream Team” del sótano del edificio Norte 1, PDVSA INTEVEP, integrado por: Luis, Pauly, Pita, Romeo, Raúl, Jhonnathan, Olga, Gatby, Liliana, Argeda, Wilfredo, Rauni y Carlos, por su soporte técnico, moral y emocional.

A el personal que labora en el Centro de Información Tecnológica (CIT), PDVSA INTEVEP, en especial a Mario, Carlos, Julieta, Luis (pin), Thaís y Martha, por su valiosa ayuda en la primera parte de este trabajo.

A los Doctores Gustavo Núñez y Douglas Espín (PDVSA INTEVEP), por habernos brindado la oportunidad de hacer el presente trabajo.

A todas las personas que de alguna u otra forma, pusieron su granito de arena para que el presente trabajo fuera posible.

Sabina López

Joan Martínez

RESUMEN

Lopez Di Blasi, Sabina;

Martinez Zorrilla, Joan Manuel

DESARROLLO DE UN PROGRAMA POR COMPUTADORA PARA RESOLVER LAS ECUACIONES DE FLUJO BIFASICO EN UN MEDIO POROSO UTILIZANDO UNA FORMULACION TIPO IMFES

Tutor académico: Dr. García, Reinaldo.

Tutor industrial: Dr. Buitrago, Saúl.

Tesis. Caracas, U.C.V. Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería Mecánica, 2001, 180p.

Palabras claves:

1.Simulación de yacimientos

2.Flujo bifásico

3.Medio poroso

Por medio de las ecuaciones de continuidad y de la ley de Darcy, se obtuvo un modelo matemático, el cual describe el comportamiento del flujo bifásico(líquido-líquido) en un medio poroso. A través del uso de un esquema de diferencias finitas, se aproximan las ecuaciones diferenciales obtenidas a un modelo numérico, que permite resolverlas utilizando una formulación tipo IMFES(implícito en el flujo y explícito en la saturación), la cual resulta innovadora por el hecho de obtener el campo de saturaciones a partir de campo de flujo. Partiendo de esto se desarrollo un programa en FORTRAN 90, el cual está planteado para resolver problemas tridimensionales, pero solamente se hicieron pruebas para casos unidimensionales, a través de la comparación con el simulador BOAST de formulación tipo IMPES(implícito en la presión y explícito en la saturación).El programa IMFES permite obtener los valores de flujo y saturación de un yacimiento petrolífero a través del tiempo. Adicionalmente, se obtuvo un algoritmo de cálculo para la obtención del campo de presiones a partir del flujo, el cual puede ser incluido en el código desarrollado en este trabajo. Los resultados obtenidos mediante el uso del programa, permiten decir, que la metodología utilizada resulta bastante promisoria para la implantación de nuevos simuladores de yacimientos petrolíferos, pero aún se debe continuar en su desarrollo, efectuándose mayor número de pruebas haciendo comparaciones con soluciones analíticas o con datos de campo, hasta obtener la completa validación del mismo.

TABLA DE CONTENIDO

CAPITULO 1 - INTRODUCCION	1
CAPITULO 2. MODELO FISICO-MATEMATICO	5
2-1) CARACTERISTICAS DEL FLUJO EN UN MEDIO POROSO.	6
Mojabilidad:	8
Saturación:	10
Permeabilidad Relativa:	11
Presión Capilar:	13
Relación entre Presión Capilar y Saturación de la fase mojante:	14
Distribución del fluido:	15
Porosidad:	16
2-2) ESTRUCTURA DEL MODELO MATEMÁTICO:	17
2-3) EL MODELO BLACK OIL:	19
2-4) CARACTERÍSTICAS PARTICULARES DEL MODELO A UTILIZAR:	20
2-5) ECUACIONES BÁSICAS USADAS PARA LA DESCRIPCIÓN DEL COMPORTAMIENTO DEL FLUJO EN MEDIO POROSO.	21
La Ley de Conservación de Masa:	22
Ley de Darcy:	28
2-6) CONDICIONES INICIALES Y CONDICIONES DE BORDE:	30
Condiciones de Borde:	31
CAPITULO 3. MODELO NUMÉRICO	35
3-1) MÉTODOS NUMÉRICOS:	35
3-2) Discretización en Espacio:	37
3-3) DISCRETIZACIÓN EN TIEMPO: TRATAMIENTO IMPLICITO O EXPLICITO.	43
3-4) CLASIFICACION DE LOS MODELOS DE SIMULACION DE YACIMIENTOS:	47
Tipo de formulación:	47
Método de solución:	48
3-5) DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO IMPES, IMFES Y SUS DIFERENCIAS:	50
CAPITULO 4. FORMULACION A UTILIZAR	54
CAPITULO 5. METODOLOGIA DE SOLUCION	60

5-1)	ESQUEMA GENERAL:	60
5-2)	EXPLICACIÓN DEL ALGORITMO PROPUESTO POR KUHN:	61
5-3)	CONTROL DEL PASO DE TIEMPO:	73
5-4)	BOSQUEJO DEL ALGORITMO GENERAL PROPUESTO POR KUHN:	74
5-5)	CONSIDERACIONES ESPECIFICAS SOBRE EL MANEJO DE VARIABLES Y DATOS	76
	CAPÍTULO 6. MODELO COMPUTACIONAL.	79
6-1)	PROGRAMA PRINCIPAL.	79
6-2)	SUBROUTINA DATOS.	83
	SUBROUTINA "Llena_matriz"	85
	SUBROUTINA "Propiedades_interpoladas"	85
6-3)	SUBROUTINA INICIALIZACION.	86
6-4)	SUBROUTINA FLUJO.	86
	SUBROUTINA "calculoalfa".	88
6-5)	SUBROUTINA SATURACION	88
6-6)	SUBROUTINA VERIFICACION.	89
6-7)	SUBROUTINA ACTUALIZAR.	90
6-8)	SUBROUTINA ESCRITURA.	90
	CAPITULO 7 - ANÁLISIS DE RESULTADOS	92
7-1)	Caso 1 (ver figura 7.2)	97
7-2)	Caso 2-3 (ver figuras 7.3-7.9 para el caso2 y figuras 7.10-7.16 para el caso 3)	107
	Comparación del flujo total:	108
	Comparación de la divergencia del flujo no mojante.	108
	Comparación de la saturación de la fase mojante:	110
7-3)	Caso 4 (Ver figuras 7.17-7.23)	115
7-4)	Caso 5 (Ver figuras 7.24-7.25)	118
7-5)	Caso 6(ver figura 7.26)	120
	CAPITULO 8 - CONCLUSIONES	121

CAPITULO 9 - RECOMENDACIONES	124
APENDICE A. CODIFICACION DEL PROGRAMA IMFES	126
APENDICE B. MANUAL DEL USUARIO.	147
B.1 LISTA DE ARCHIVOS USADOS EN EL PROGRAMA.	148
B.2 FORMA DE INGRESAR DATOS PARA CADA ARCHIVO.	150
B.3 DESCRIPCIÓN DETALLADA DE CADA ARCHIVO.	153
APENDICE C. MODIFICACIONES HECHAS AL ALGORITMO RPOPUESTO POR KUHN	160
APENDICE D. FACTIBILIDAD DE LA INCLUSION DE LOS TERMINOS DE SOLUBILIDAD DE GAS EN PETRÓLEO.	168
D.1 REVISIÓN DE LAS ECUACIONES Y TERMINOS QUE DEBEN SER AGREGADOS.	168
D.2 SUSTITUCION EN LAS ECUACIONES DE KUHN	170

TABLA DE FIGURAS.

Figura 2.1.	9
Flujo de fluido en rocas, mojantes en agua (water wet) y mojantes en petróleo (oil wet).	9
Figura 2.2.	12
Curvas típicas de Permeabilidad Relativa K_r	12
Figura 2.3.	14
Curva típica de Presión Capilar P_c	14
Figura 2.4.	16
. Concepto de canales de flujo. Fluido no mojante desplazando al fluido mojante	16
Figura 2.5.	22
Flujo lineal en una roca porosa cilíndrica de longitud Δx	22
Figura 3.1	41
Discretización de bloques unidimensionales	41
Figura 3.2	42
Funciones Chapeau.	42
Figura 7.1	93
Simulación del BOAST del desplazamiento lineal Buckley-Leverett del frente de agua.	93
Figura 7.2	96
1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 60 días de simulación. Porosidad constante. Δt constante. Saturación de la fase mojante.	96
Figura 7.3	99
1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Flujo total.	99
Figura 7.4	99
1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 30 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.	99
Figura 7.5	100
1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 60 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.	100
Figura 7.6	100
1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 90 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.	100
Figura 7.7	101
1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 120 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.	101
Figura 7.8	101
1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.	101
Figura 7.9	102
1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Saturación de la fase mojante.	102
Figura 7.10	103
2 pozos inyectores y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Flujo total.	103
Figura 7.11	103
2 pozos inyectores y 1 pozo extractor. 30 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.	103
Figura 7.12	104

<i>2 pozos inyectoros y 1 pozo extractor. 60 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.</i>	104
<i>Figura 7.13</i>	104
<i>2 pozos inyectoros y 1 pozo extractor. 90 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.</i>	104
<i>Figura 7.14</i>	105
<i>2 pozos inyectoros y 1 pozo extractor. 120 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.</i>	105
<i>Figura 7.15</i>	105
<i>2 pozos inyectoros y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.</i>	105
<i>Figura 7.16</i>	106
<i>2 pozos inyectoros y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Saturación de la fase mojante.</i>	106
<i>Figura 7.17</i>	111
<i>2 pozos inyectoros y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad variable. Δt variable. Flujo total.</i>	111
<i>Figura 7.18</i>	111
<i>2 pozos inyectoros y 1 pozo extractor. 30 días de simulación. Porosidad variable. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.</i>	111
<i>Figura 7.19</i>	112
<i>2 pozos inyectoros y 1 pozo extractor. 60 días de simulación. Porosidad variable. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.</i>	112
<i>Figura 7.20</i>	112
<i>2 pozos inyectoros y 1 pozo extractor. 90 días de simulación. Porosidad variable. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.</i>	112
<i>Figura 7.21</i>	113
<i>2 pozos inyectoros y 1 pozo extractor. 120 días de simulación. Porosidad variable. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.</i>	113
<i>Figura 7.22</i>	113
<i>2 pozos inyectoros y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad variable. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.</i>	113
<i>Figura 7.23</i>	114
<i>2 pozos inyectoros y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad variable. Δt variable. Saturación de la fase mojante.</i>	114
<i>Figura 7.24</i>	117
<i>1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 1000 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Flujo total. Tolerancia 0,0001.</i>	117
<i>Figura 7.25</i>	117
<i>1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 1000 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Flujo total. Tolerancia 0,1.</i>	117
<i>Figura 7.26</i>	119
<i>1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Saturación de la fase mojante. Diferentes pasos de tiempo iniciales.</i>	119

CAPITULO 1 - INTRODUCCION

El petróleo, comúnmente llamado crudo, no es más que una mezcla de varios elementos, que se encuentra desde la roca esponjosa donde se formó (roca madre) constituida por aglomeración de sedimentos, hasta otras rocas más porosas y permeables a donde el mismo emigró (roca almacén) y donde se encuentra en parte gasificado y asociado generalmente con agua salada. Dadas estas características se hace necesario que para describir o modelar su comportamiento se utilicen ecuaciones que lo consideren como un flujo en el cual se tienen elementos en varias fases (multifásico) y cuyo medio posee cierta porosidad.

Los sitios donde se encuentra naturalmente el petróleo se denominan yacimientos. Cada yacimiento es único, ya sea por sus características geológicas o geofísicas ó por el tipo de crudo que contenga. Esto hace que los procedimientos de extracción y explotación sean altamente costosos, por lo cual resulta una gran herramienta el poder predecir el comportamiento de un yacimiento antes de comenzar su explotación y esto se puede lograr mediante el uso de programas de simulación.

El potencial de la simulación fue reconocido a finales de los años 40` y principio de los 50` por un número de compañías en el mundo. Su esfuerzo comprometido, tanto por investigación básica del análisis numérico, como por el desarrollo de métodos prácticos para el uso de las computadoras existentes, resultó en rudimentarios pero útiles simuladores para mediados de los 50`.

El desarrollo de la tecnología para simular estos procesos ha crecido paralelamente al desarrollo de la ciencia de la computación y se ha logrado un “estado

del arte” donde la simulación numérica de yacimientos puede ser utilizada en forma económica y confiable en la descripción de formaciones y en la predicción del comportamiento futuro de los yacimientos bajo diferentes esquemas de explotación.

Los simuladores que utilizan el modelo “black oil” o crudo negro, fueron de los primeros desarrollados, y son en la actualidad los más frecuentemente utilizados ⁽¹⁾. El modelo de black oil determina las propiedades del fluido sin necesidad de conocer su composición química, requiriendo solo conocer una propiedad característica de este. Además, en este no se consideran variaciones de temperatura. Cabe destacar que existen otros modelos que consideran más variables que el modelos de crudo negro, pero los mismos son matemáticamente más complejos.

Las ecuaciones que describen este modelo de crudo negro están dadas en el texto de K. Aziz, A. Settari , Petroleum reservoir simulation, applied science publication, New York 1979.

Al tener ecuaciones que modelen el comportamiento del fluido en el yacimiento, se desarrollan diferentes metodologías de simulación, de las cuales destaca como referencia para este trabajo la publicación de J.R. Fanchi, K.J. Harpole, S.W. Bujnowski, titulada BOAST: a three dimensional black oil applied simulation tool (version 1.1) volume1: technical description and Fortran code 1982, en el cual el método desarrollado parte de la combinación de la ecuación de la conservación de la masa y de la ecuación de flujo considerando tres fases(líquido-líquido-gas), para obtener un arreglo particular de ecuaciones que modelan el comportamiento del fluido en el yacimiento. Introduciendo el concepto de la presión capilar, esas ecuaciones se simplifican y se llega a una sola ecuación diferencial de segundo orden donde la variable es la presión llamada “ecuación de presión”. Esta formulación es conocida como IMPES (implícito en la presión y explícito en la saturación) en el cual la resolución de las ecuaciones se hace mediante el método de diferencias finitas.

La necesidad de un mejoramiento continuo de los recursos tecnológicos impulso la búsqueda de nuevos métodos de simulación cuyas respuestas puedan obtenerse en un menor periodo de tiempo.

Como respuesta a esta necesidad J.C. Kuhn presenta su trabajo titulado "A New method for the fast estimation of reservoir performance "(Un nuevo método para la rápida predicción del desempeño de yacimientos) en el cual se plantea una formulación no convencional que busca obtener simulaciones más rápidas. Esta formulación se basa en el flujo como variable principal, y es conocida como IMFES: implícito en el flujo y explícito en la saturación.

Partiendo de la ecuación de Darcy para cada fase: mojante y no mojante; y combinándolas con las ecuaciones de balance de masa se llega a un arreglo tal que al simplificarse se obtiene una única ecuación diferencial de primer orden en el flujo. Esta ultima publicación es la que da origen al presente trabajo ya que las ecuaciones a resolver son las allí planteadas.

En la actualidad, existen en el mercado programas de simulación de yacimientos bastante sofisticados, por ejemplo el simulador Eclipse de la casa Geo Quest Schulumberger, pero los mismos poseen la limitación de que no pueden ser modificados y cuando se requieren cambios, estos por lo general toman una gran cantidad de tiempo, eso sin contar con el costo, el cual, es por demás bastante elevado. Todo esto resulta poco rentable para la industria petrolera venezolana considerando que existen procesos específicos a los yacimientos y crudos venezolanos que no necesariamente están incluidos en los paquetes comerciales.

Con esa motivación en mente se desarrollo el presente trabajo, el cual tiene como objetivo resolver las ecuaciones de flujo de fluidos en medio poroso para el caso donde se desprecian la compresibilidad de los fluidos, la solubilidad de gas en agua y en petróleo, mediante la aplicación de una nueva formulación donde las variables principales son velocidades y saturaciones, con influencia en el campo de presiones (a

partir del flujo se podrá calcular la presión), en mallas rectangulares 3D. Para este caso las ecuaciones correspondientes a cada fase se combinan de un forma especial, conduciendo a una única ecuación diferencial parcial de orden 1 en el flujo (velocidad). El método de solución a seguir será el propuesto por J.C. Kuhn ⁽³⁾, bajo algunas modificaciones. La metodología se implantará en un programa, en lenguaje Fortran, lo cual permitirá evaluarla y compararla contra los otros métodos tradicionales como lo es él ya mencionado IMPES.

El fenómeno a modelar considera un dominio 3D, y la división del fluido en dos fases: mojante (agua) y no mojante (gas + petróleo). La definición de estos términos se hará en el primer capítulo.

Otro aspecto a considerar en el presente trabajo es que las ecuaciones a usar son las que describen un modelo de yacimiento llamado “crudo negro” (black oil), además, se considera que no hay variaciones en la temperatura, con lo cual no es necesario hacer balances de energía, y que no se consideran reacciones químicas entre los fluidos en el yacimiento.

Además, se estudiará la posibilidad de incorporar en el modelo el término de solubilidad de gas en petróleo, así como también la de modificar la metodología de solución.

CAPITULO 2. MODELO FISICO-MATEMATICO

Desde el punto de vista científico y de Ingeniería, la palabra Simulación envuelve la utilización de un modelo físico o matemático con el fin de estudiar y analizar un determinado proceso. La representación a escala, en el caso de los modelos físicos y / o el uso de ecuaciones, para desarrollar modelos matemáticos, permiten integrar muchos factores simultáneamente. De esta manera se puede obtener la información necesaria para ejercer un adecuado control y lograr el objetivo de estudiar, analizar y optimizar el proceso físico simulado.

Desde el punto de vista de la Ingeniería de Yacimientos en particular, la palabra “Simulación” implica la utilización de un modelo matemático para predecir el comportamiento de los yacimientos de hidrocarburos bajo diferentes esquemas o alternativas de producción. Las respuestas del modelo permitirán establecer una estrategia de desarrollo y explotación optimizada tanto técnica como económicamente. Estos estudios requieren de análisis rigurosos de los datos, dado que los resultados obtenidos dependerán de la información y descripción suministrada del yacimiento.

El modelo matemático está formado por un conjunto de ecuaciones las cuales simulan el comportamiento físico del sistema. Pueden existir varios modelos matemáticos para un mismo sistema, cada uno de los cuales permite simular un problema en particular. El grado de detalle en la resolución, dependerá del problema y de los datos disponibles para el estudio. Una descripción muy detallada y precisa del problema puede requerir un conjunto de ecuaciones demasiado complejo. A su vez, es probable que el conjunto de datos para resolver el problema no este disponible en la práctica por razones técnicas o económicas. Por ello, es recomendable para todos los

proceso prácticos, utilizar el modelo más sencillo adaptado a la exactitud y detalle de los datos básicos disponibles.

El primer paso en la construcción de un modelo es la definición y naturaleza del problema físico. Luego se debe definir la teoría que gobierna el fenómeno del problema. Posteriormente la teoría debe ser expresada de forma matemática. Si no es posible encontrar una solución analítica al problema, entonces se recurre a los métodos numéricos. Esto involucra tomar en consideración una serie de suposiciones y aproximaciones que dan como resultado una serie de ecuaciones algebraicas y algoritmos los cuales deben ser apropiados, estables y económicos.

Como paso siguiente se debe desarrollar un modelo de computo eficiente, para luego pasar a la etapa de validación del modelo matemático. En esta fase se comparan los resultados numéricos con soluciones analíticas exactas obtenidas bajo condiciones de contorno específicas y particulares. Además, es conveniente comparar las simulaciones con resultados de trabajos experimentales.

Por último, los modelos deben ser documentados para su fácil acceso, manejo e interacción por parte del personal interesado en la materia.

En este capítulo se planteará el modelo matemático a utilizar. Los demás pasos serán explicados en los capítulos posteriores.

2-1) CARACTERÍSTICAS DEL FLUJO EN UN MEDIO POROSO.

Para poder desarrollar el modelo, es requisito conocer las características y propiedades básicas del yacimiento.

El petróleo es producido a través de la perforación de pozos en las formaciones de roca porosa localizadas en el subsuelo. La porción de la roca que contiene petróleo se denomina "Yacimiento".

La temperatura del yacimiento se supone generalmente que se mantiene constante a través de la vida productiva del mismo, y la presión se considera variable dependiendo de la explotación de su contenido inicial, aunque la relación exacta será única para cada yacimiento y la naturaleza de los mecanismos de producción.

La temperatura del yacimiento está asociada con el gradiente geotérmico de la localidad a la cual pertenece el yacimiento. Una relación promedio aproximada es que la temperatura aumenta 1°F por encima de la temperatura ambiente por cada 60 ft de profundidad, aunque existen numerosas excepciones en las que se ha encontrado temperaturas más altas o más bajas, en comparación a las predichas por el gradiente promedio. Similarmente, las presiones iniciales en el yacimiento comúnmente varían linealmente con la profundidad del yacimiento, como en equilibrio con una columna de agua hidrostática. Estas presiones varían con la profundidad del pozo aproximadamente por el gradiente hidrostático de 43 a 55 psi/100 ft, dependiendo de la salinidad y la densidad de la columna de agua equivalente. Por otra parte, no es extraño encontrar presiones más altas o más bajas en comparación con las esperadas por el rango de presiones hidrostáticas descritos anteriormente. Es por ello que es necesario que las condiciones iniciales de temperatura y presión deben ser medidas para cada yacimiento antes que estimadas de las correlaciones empíricas.

Aunque el término de “yacimiento petrolero” implica que la estructura de la roca en cuestión cuenta con la presencia de petróleo y produce petróleo, generalmente no es el único fluido contenido en los espacios vacíos del medio poroso. Al realizar análisis se ha encontrado que contiene agua, propia de la roca, antes de comenzar los procesos de explotación. La cantidad de esta agua, usualmente llamada “agua connata” o “agua intersticial”, se encuentra en un rango de 2% a más de 50% del total del espacio de los poros. Además, los yacimientos contienen gas en solución (disuelto en el petróleo). Es decir, gran parte de los yacimientos esta compuesto al menos por dos, o e algunos casos por tres, fases.

Las propiedades básicas consisten en dos tipos principales: las propiedades de la roca almacén, tales como porosidad y permeabilidad; y las propiedades que involucran a la roca y al fluido, tales como presión capilar (característica estática) y permeabilidad relativa (característica de flujo).

A este punto, algunas definiciones básicas son las siguientes:

Permeabilidad: Propiedad de un cuerpo sólido de dejarse atravesar por un fluido.

Permeabilidad absoluta: permeabilidad de la roca saturada completamente con un fluido.

Permeabilidad efectiva: permeabilidad de la roca a un fluido cuando la roca está solo parcialmente saturada con ese fluido.

Permeabilidad relativa: relación de la permeabilidad efectiva a algún valor base.

Porosidad: porción del volumen de roca compuesto por poros.

Mojabilidad:

Las propiedades multifásicas estáticas y de flujo en el yacimiento, tales como presión capilar y permeabilidad relativa, dependen de la distribución microscópica de esas fases dentro de los poros de la roca. Esa distribución es controlada por la mojabilidad de la roca.

La mojabilidad es la tendencia a esparcirse sobre o adherirse a una superficie sólida en la presencia de otro fluido inmiscible. La mojabilidad de un sistema fluido/roca es una componente integral de la distribución y el comportamiento de los fluidos en el yacimiento.

Comúnmente, cuando en un medio poroso de mojabilidad uniforme existen al menos dos fluidos inmiscibles, uno de ellos puede ser considerado como el fluido

mojante. En un yacimiento, los dos fluidos inmiscibles son usualmente el agua y el petróleo, y generalmente el agua es el fluido considerado como mojante.

Así, en un sistema estático, o en uno que esté en equilibrio, el fluido mojante ocupa completamente los poros pequeños y está en contacto con la mayor parte de la superficie de la roca si la saturación es suficientemente alta. El fluido no mojante tiende a ocupar el centro de los poros grandes, y puede formar glóbulos que se extienden sobre muchos poros. (Figura 2.1)

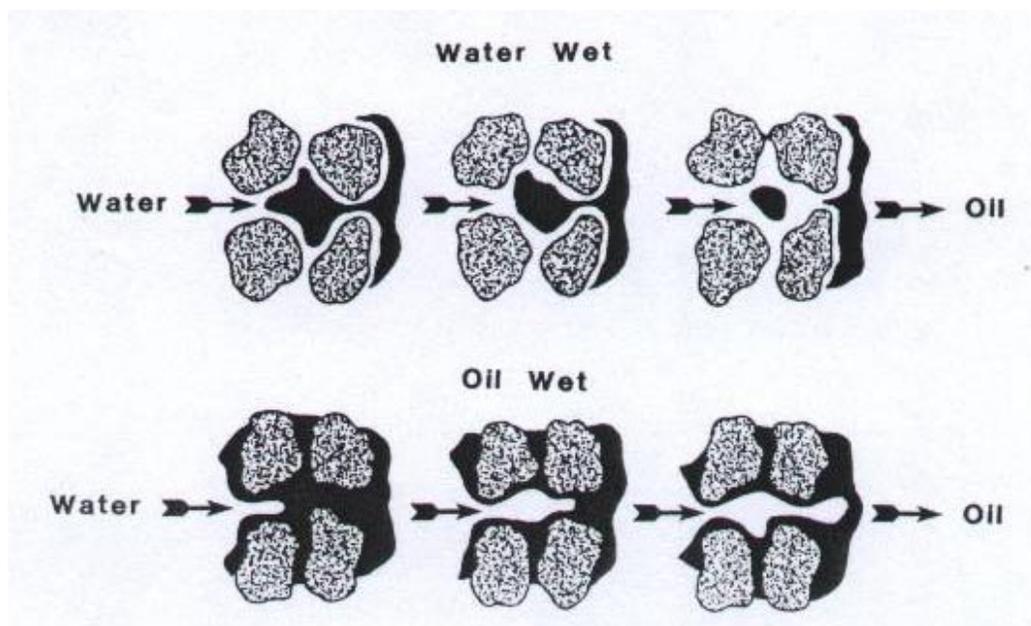


Figura 2.1. Flujo de fluido en rocas, mojantes en agua (water wet) y mojantes en petróleo (oil wet).

La mojabilidad es la variable más importante que afecta la cantidad de petróleo residual, su estructura microscópica y el comportamiento del flujo. Está gobernada por la ubicación del agua y el petróleo en los poros y tiene una fuerte influencia en las fuerzas capilares que controlan el desplazamiento microscópico del petróleo por el agua. Se tienen tres distintas categorías de yacimiento en cuanto a esta propiedad:

-
1. El sistema mojante en agua, en el cual el agua ocupa los poros más pequeños y moja la mayoría de la superficie de la roca.
 2. Mojabilidad intermedia (también llamada neutral), la cual es la condición obtenida cuando el agua y el petróleo son mojantes en igual cantidad de poros en el sistema.
 3. Sistema mojante en petróleo, en el cual el petróleo está ocupando los poros más pequeños y moja la mayor parte de la superficie de la roca.

En un sistema de tres fases, el gas es considerado completamente no mojante y siempre ocupa los poros más grandes del sistema.

Saturación:

Para estimar la cantidad de hidrocarburos presentes en un yacimiento, es necesario determinar la fracción de volumen poroso ocupado por cada uno de los fluidos presentes. Dicha fracción de volumen poroso, ocupado por agua, petróleo o gas, se denomina saturación del fluido. Matemáticamente dichas saturaciones serán:

$$S_o = \frac{\text{Volumen de petroleo}}{\text{Volumen poroso}} * 100$$

$$S_w = \frac{\text{Volumen de agua}}{\text{Volumen poroso}} * 100$$

$$S_g = \frac{\text{Volumen de gas}}{\text{Volumen poroso}} * 100$$

Por lo general se puede decir que existen tres regiones de saturación en una acumulación de petróleo o gas. La región "saturación" es aquella donde la roca está completamente saturada con el líquido que la humedece y la presión capilar es menor que la presión inicial de desplazamiento.

Después de obtenida la presión inicial de desplazamiento, un pequeño aumento de la presión causa gran disminución en la saturación del agua. Esta es la zona de transición o región funicular y refleja la interconexión más abundante entre los poros. Al

aumentar la altura por encima del nivel que contiene 100% de agua, el fluido que no humedece la roca (petróleo o gas), entrará sucesivamente en poros más pequeños. El resto de la superficie de los granos puede estar cubierta por una película de agua o por petróleo o gas. La región pendular de saturación indica que un gran aumento de presión causa poca reducción en la saturación. La saturación en esta región es denominada “saturación irreducible” y se llama comúnmente saturación de agua intersticial o agua connata del estrato. El término de agua connata o intersticial se refiere a la cantidad de agua que se encontraba en la superficie rocosa del yacimiento antes de comenzar la explotación, es decir, el agua almacenada en los poros antes de cualquier proceso de producción. Agua connata puede ser considerada como aquella asociada con el petróleo mismo.

Permeabilidad Relativa:

Las características de permeabilidad relativa son una medida directa de la habilidad del sistema poroso de conducir un fluido cuando uno o más de ellos están presentes. Esta propiedad se encuentra afectada por: la geometría de los poros, la mojabilidad, la distribución del fluido y la saturación.

En un sistema trifásico, la permeabilidad del agua depende solo de la saturación de la misma, para un sistema mojante en agua. La permeabilidad relativa del petróleo depende de la saturación del agua y del petróleo, y la permeabilidad relativa del gas depende solo de la saturación total de líquidos del sistema poroso.

Dado que el gas es una fase completamente no mojante, es teóricamente razonable anticipar su permeabilidad será independiente de la distribución de saturación de las dos fases mojantes (agua y petróleo).

Algo de petróleo mojante está siempre presente, y este es el factor que altera la distribución de las tres fases dentro de los poros de la roca. Esto trae como resultado

una dependencia de la permeabilidad relativa del agua en la distribución de saturación de las tres fases.

La Figura 2.2, muestra resultados típicos de permeabilidad relativa, K_r , que pueden ser obtenidos para un sistema agua / petróleo con el agua desplazando al petróleo. Las dos curvas que se muestran allí representan el comportamiento de la permeabilidad relativa de la fase mojanante (agua en este caso), K_{rw} , y de la permeabilidad relativa de la fase no mojanante (petróleo en este caso), K_{rn} , en función de la saturación de la fase mojanante, S_w . K_{rw} aumenta proporcionalmente al aumentar S_w , mientras que para K_{rn} ocurre lo contrario, y en otra proporción diferente. El valor de S_w al cual el agua comienza a fluir es llamado la *saturación crítica*, S_{wc} . El valor de saturación a la cual el agua cesa su movimiento se denomina *saturación residual*, S_{nc} . En términos de la ecuación de flujo de Darcy, la fase cesa su flujo porque la movilidad se hace cero, no porque las fuerzas externas sean cero.

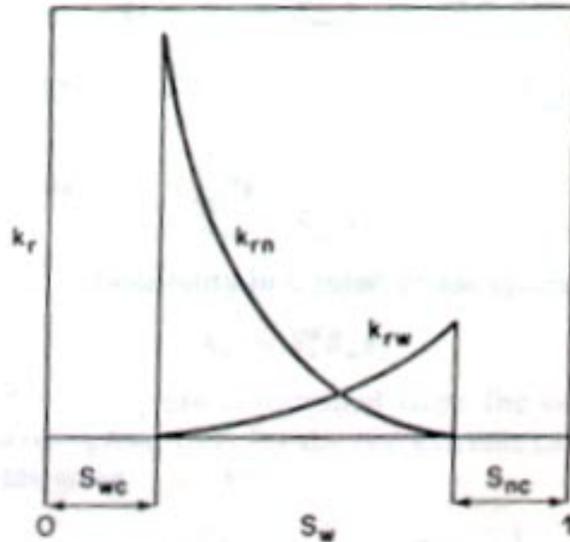


Figura 2.2. Curvas típicas de Permeabilidad Relativa K_r

Presión Capilar:

Las fuerzas capilares presentes en el yacimiento, se originan por la acción molecular de dos o más fluidos inmiscibles (petróleo, agua y gas), que coexisten en dicho medio poroso. Estas son realmente fuerzas retentivas, que impiden el vaciamiento total del yacimiento.

Se define presión capilar en un medio poroso como la diferencia de presión existente a través de la interfaz que separa dos fluidos inmiscibles, uno de los cuales moja la superficie de la roca en preferencia al otro. Es expresada generalmente como la diferencia de presiones entre la fase no mojante y la fase mojante, y es comúnmente un valor positivo.

La presión capilar representa la magnitud de la discontinuidad de la presión a través de la interfase entre el agua y cualquier otro fluido que este en contacto con ella. (Discontinuidad de presión a través de las interfases del fluido en un medio poroso).

En una primera aproximación, la presión capilar y la permeabilidad relativa pueden ser consideradas como funciones de la roca yacimiento solamente ⁽²⁾. Trabajos posteriores (Poston et al.,1970) concluyen que la mojabilidad y la capilaridad son funciones de muchas variables adicionales. Algunas de ellas son: propiedades de los fluidos en el yacimiento, contaminación y temperatura. La capilaridad depende de la saturación del fluido mojante y de la dirección del cambio de saturación. En una situación donde se tienen dos fases, una típica curva de presión capilar es representada por la Figura 2.3. El valor de presión capilar necesario para empezar el desplazamiento es llamado "*presión de entrada*", P_{cb} , (Threshold Pressure), y es importante para las rocas poco permeables. El valor de saturación al cual la fase mojante no puede ser desplazada por la aplicación de un gradiente de presión es llamada la "*saturación irreducible*"

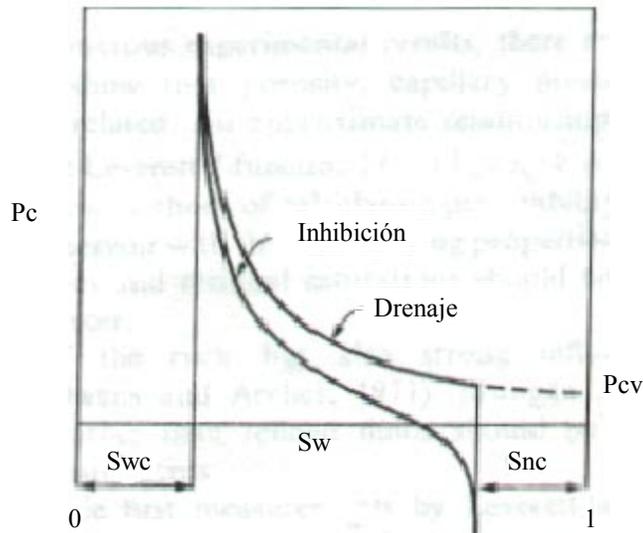


Figura 2.3. Curva típica de Presión Capilar P_c

El término histéresis es aplicado a la diferencias en las propiedades multifásicas que dependen de la dirección del cambio de saturación.

Una alta presión de desplazamiento indica o un fuerte grado de mojabilidad, o poros pequeños, o ambos.

Relación entre Presión Capilar y Saturación de la fase mojannte:

La relación entre estas propiedades posee dos características importantes:

1. Existe un valor de S_w el cual prácticamente es imposible de reducir, aún aumentando la presión capilar indefinidamente. Este valor se denomina saturación irreducible de la fase mojannte, S_{wi} , y representa la cantidad de flujo mojannte que queda entre los poros más pequeños del medio poroso.
2. A la saturación de agua = 100%, se requiere un cierto valor de presión capilar para iniciar el proceso de saturación. Este valor mínimo de presión capilar se denomina presión de desplazamiento y es la presión requerida para hacer que la fase no mojannte entre en los capilares de mayor diámetro.

Distribución del fluido:

La distribución de fluidos en el yacimiento, es el resultado de la segregación natural, producto de las diferencias de densidades de los fluidos que saturan el medio poroso.

Microfotografías hechas con microscopios muestran que el agua y el petróleo se mueven dentro de lo que se denomina "*condiciones de canal de flujo*". Esto es, que cada fluido se mueve a través de su propia línea de canales interconectados. Los canales varían de diámetro desde el tamaño de un grano, hasta el tamaño de varios granos.

Con un cambio en la saturación, la geometría del canal se altera. Como la saturación del petróleo se incrementa, hay un incremento general en el número de canales que transportan al mismo y una correspondiente reducción en el número de los canales de agua.

La Figura 2.4 muestra los canales de flujo a diferentes etapas. Cada fluido, mojante y no mojante, se mueve en su propio canal de poros, pero con algo de fluido mojante en cada poro. Como la saturación de la fase no mojante se incrementa, más poros están ocupados con el fluido no mojante.

La distribución de la fase mojante y no mojante dentro de los espacios de los poros no depende únicamente de la saturación de la fase, también depende de la dirección del cambio de saturación.

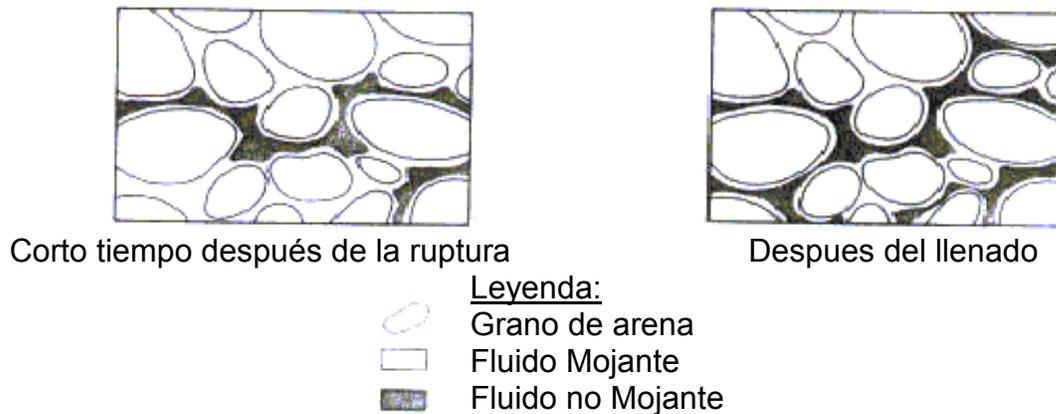


Figura 2.4. . Concepto de canales de flujo. Fluido no mojante desplazando al fluido mojante

Porosidad:

La fracción de volumen de la roca que está libre para contener fluidos se denomina porosidad. La porosidad de la roca se refiere a la medida del espacio intersticial (espacio existente entre grano), y se define como la relación entre el volumen poroso y el volumen total de la roca.

$$\phi = \frac{\text{Volumen poroso}}{\text{Volumen total}} = \frac{V_p}{V_t}$$

Entendiéndose por volumen poroso, al volumen total menos el volumen de los granos ó sólidos contenidos en la roca.

Una de las propiedades básicas de interés práctico de una roca en presencia del petróleo es su capacidad volumétrica de almacenar fluidos. La medida cuantitativa de esta capacidad es denominada “porosidad”, la cual puede ser definida como 1 menos la fracción de volumen de la roca compuesta por material sólido. Si la roca no contiene fluido como materia, la porosidad es entonces la fracción del volumen que es un espacio vacío. Esas fracciones se expresan generalmente en porcentajes.

De la naturaleza inherente de las rocas es aparente que, mientras que sus vacíos o poros estén interconectados, algunos pueden quedar sellados en el curso de la cementación de la roca. Esta definición, referente al total de espacios vacíos, provee una medida de la “*porosidad total*”. Está claro que solo es de interés práctico la “*porosidad efectiva*”, que se refiere solo a la intercomunicación de los espacios vacíos. Es común entonces utilizar el término de porosidad para la porosidad efectiva, pues esta es la que en realidad interesa para las estimaciones de petróleo y gas en sitio. Sólo los volúmenes de los hidrocarburos almacenados en los poros interconectados, pueden ser parcialmente extraídos del yacimiento.

2-2) ESTRUCTURA DEL MODELO MATEMÁTICO:

Antes de simular un yacimiento de petróleo en una computadora, un modelo matemático del sistema es requerido. El desarrollo de tal modelo es el objetivo de este capítulo.

Este paso involucra el desarrollo de un sistema de ecuaciones diferenciales y relaciones auxiliares. El modelo matemático representa solo el fenómeno que ha sido incluido en la formulación de las ecuaciones diferenciales. Por lo tanto, este paso requiere el conocimiento de los procesos físicos que tienen lugar en el yacimiento y sus relativas importancias. Este conocimiento es frecuentemente incompleto para algunos yacimientos en particular, no obstante, se encuentra que la mayoría de los procesos en el yacimiento pueden ser descritos por uno de los tantos modelos básicos, tales como el modelo black oil (modelo de crudo negro), el cual será detallado a lo largo de este capítulo. La elección del modelo matemático determina el tipo de problema que será simulado, usando un programa basado en ese modelo particular. De esta forma, los modelos de simulación de yacimientos pueden ser clasificados en diferentes formas:

a) Según el tratamiento de Presión-Volumén-Temperatura (PVT):

- 1.- Modelos de una sola fase.
- 2.- Modelos Composicionales.

3.- Modelos Black oil.

b) Según el tratamiento del flujo en el medio poroso:

- 1.- Convencional (Ley de Darcy)
- 2.- Modelos con una extensión de la Ley de Darcy para considerar efectos de altas velocidades.
- 3.- Modelos de medio poroso fracturado.

c) Según la transferencia de masa y de calor:

- 1.- Modelos de flujo inmisible (black oil)
- 2.- Modelos de flujo miscible.
- 3.- Modelos Isotérmicos.
- 4.- Modelos Térmicos.
5. Otros modelos especiales (químicos, etc.)

d) Según la geometría:

- 1.- Modelos unidimensionales.
- 2.- Modelos bidimensionales (de áreas, de sección transversal y radiales)
- 3.- Modelos tridimensionales.

e) Según el sistema de coordenadas:

- 1.- Cartesianas.
- 2.- Cilíndricas.
- 3.- Esféricas.
- 4.- Curvilíneas.

Esta clasificación es arbitraria y su principal propósito es el mostrar la variedad de modelos existentes. Muchos rasgos pueden ser combinados en un solo modelo.

2-3)EL MODELO BLACK OIL:

Uno de los modelos matemáticos más importantes en la ingeniería de yacimientos petrolíferos es aquel en el cual el flujo puede ser aproximado por un, dos o tres componentes, de los cuales el crudo y el agua se comportan como no volátiles, y el gas como volátil y soluble en la fase petróleo. Este modelo es conocido como modelo β ó modelo Black Oil.

En este modelo se asume que existen a lo sumo 3 fases distintas: petróleo, agua y gas. Usualmente el agua es considerada como la fase mojante, el petróleo con una mojabilidad intermedia, mientras que el gas se considera estrictamente como no mojante. También se considera que el agua y el petróleo son inmiscibles y por lo tanto no existe ni intercambio de masa entre los dos componentes ni cambio de fase. El gas se supone soluble en el petróleo mas, usualmente no en el agua. Además de esto, si se considera que la solubilidad del gas es cero a condiciones de yacimiento (stock tank conditions) entonces el yacimiento puede ser considerado ser una solución de dos componentes: Gas a condiciones estándar y petróleo a condiciones de yacimiento (stock tank conditions). Asimismo, en este tipo de tratamiento se supone generalmente que los fluidos están a la misma temperatura en todo el yacimiento, y la misma no varia en el tiempo, así como también en equilibrio termodinámico.

Los modelos de una sola fase sólo permiten una fase en movimiento dentro del yacimiento. Si otra fase, como el agua, está presente, es considerada inmóvil. El modelo Black Oil permite el movimiento de dos fases (agua / petróleo ó gas / petróleo), o de tres fases (agua / gas / petróleo).

Es importante señalar que el modelo considera como invariables las composiciones tanto del petróleo como del gas y del agua en el tiempo sin importar el agotamiento del yacimiento.

Los primeros simuladores de yacimientos fueron desarrollados utilizando este modelo, y en la actualidad son los más frecuentemente utilizados ⁽¹⁾. Cabe destacar que cuando los simuladores black oil son usados apropiadamente, el usuario puede estar confiado de que a través de los cálculos se obtendrán respuestas realistas si la data esta completa y es razonablemente precisa. Las primeras versiones de este tipo de simuladores no daban esta garantía, pero los simuladores actuales son usualmente tan confiables que algunas veces son usados para verificar nuevos métodos analíticos. Uno de los simuladores comercialmente usado que trabaja con un modelo Black Oil es el BOAST ⁽⁴⁾. El BOAST es un simulador del tipo Black Oil, tridimensional, trifásico (petróleo, agua y gas), isotérmico, basado en la ecuación de continuidad y la Ley de Darcy como balance de momentum en cada fase. Fue desarrollado para simulación de explotaciones primarias, mantenimiento de presión por inyección de agua y/o gas, etc. El simulador BOAST supone que las propiedades de la roca y del fluido son funciones de la presión solamente y no se permite la transferencia de masa entre las diferentes fases.

Este simulador utiliza los datos de las propiedades del fluido en forma tabular y las funciones de permeabilidad relativa convencionales.

La condición de borde es que no hay flujo en el contorno del reservorio. Esto significa que no hay gradiente de presión a través del contorno y es implementado por la colocación de transmisibilidades cero en el contorno de las interfases. Como cualquier otro simulador de yacimiento, BOAST utiliza un modelo de pozo analítico para representar el flujo de fluido dentro de un bloque (para representar las salidas y las entradas).

2-4) CARACTERÍSTICAS PARTICULARES DEL MODELO A UTILIZAR:

Ha sido reconocido que el flujo total exhibe menos variaciones temporales que la presión ⁽³⁾. Esto ya sido explotado en varias formas, primeramente con solución de la ecuación de saturación en conjunto con procedimientos secuenciales como el método

IMPES. En un procedimiento secuencial, el problema es dividido en múltiples subproblemas (típicamente dos) en cada paso de tiempo. En el método IMPES, la primera porción de la secuencia resuelve para la presión, y la segunda porción resuelve para la saturación. En este trabajo se utilizará un procedimiento secuencial pero con una significativa diferencia en la primera porción o paso de la secuencia. A diferencia de otros procedimientos secuenciales, se está interesado en resolver para el flujo en lugar de la presión. Es decir se trabajará a lo largo de esta tesis con un método que resuelve directamente para el flujo.

El sistema de coordenadas a usar se escoge normalmente de forma conveniente según el problema a estudiar. Para un estudio del reservorio completo, se utilizan mallas rectangulares en 1, 2 ó 3 dimensiones, mientras que para la predicción de un pozo en particular, un modelo cilíndrico o radial sería la elección lógica. Como el caso en estudio es del yacimiento completo se formularan las ecuaciones en un sistema tridimensional en coordenadas cartesianas.

El agua es la fase mojante, y el petróleo y el gas conforman la fase no mojante. Los fluidos se consideran inmiscibles y sin cambio de temperatura ni de fase. Se supone que los fluidos están a temperatura constante y en equilibrio termodinámico a través del yacimiento.

2-5) ECUACIONES BÁSICAS USADAS PARA LA DESCRIPCIÓN DEL COMPORTAMIENTO DEL FLUJO EN MEDIO POROSO.

El movimiento del fluido en un medio poroso está gobernado por las mismas leyes fundamentales que gobiernan su movimiento, por ejemplo, en la atmósfera, tuberías y ríos. Esas leyes están basadas en la conservación de la masa, momentum, energía y en el caso de flujos compresibles, ecuaciones apropiadas de estado. Desde un punto de vista práctico, es innecesario tratar de aplicar esas leyes básicas a los problemas de flujo en medio poroso. En lugar de estas se puede utilizar una aproximación semiempírica donde la Ley de Darcy se aplica en lugar de la ecuación de

momentum. Haciendo esto, se está tomando un punto de vista Euleriano, es decir, se fija la atención en puntos fijos del espacio dentro del campo del flujo, en contradicción con el método Lagrangiano, donde las coordenadas de una partícula en movimiento son representadas como función del tiempo.

Para la solución de estas ecuaciones existen una serie de consideraciones:

1. El flujo es laminar y viscoso.
2. El flujo es isotérmico.
3. Los efectos electrocinéticos son despreciables.
4. Los efectos de difusión son despreciables.
5. El flujo es irrotacional.

Además de las relaciones mencionadas anteriormente, las propiedades físicas de los fluidos involucrados en el sistema deben ser conocidas como función de variables dependientes.

La Ley de Conservación de Masa:

Considere el flujo de un solo fluido (un solo componente o una mezcla homogénea) en la dirección axial como se muestra en la Figura 2.5. El volumen de control debe ser representativo del medio poroso: debe ser grande comparado con el tamaño de los poros, pero pequeño comparado con el tamaño del yacimiento.

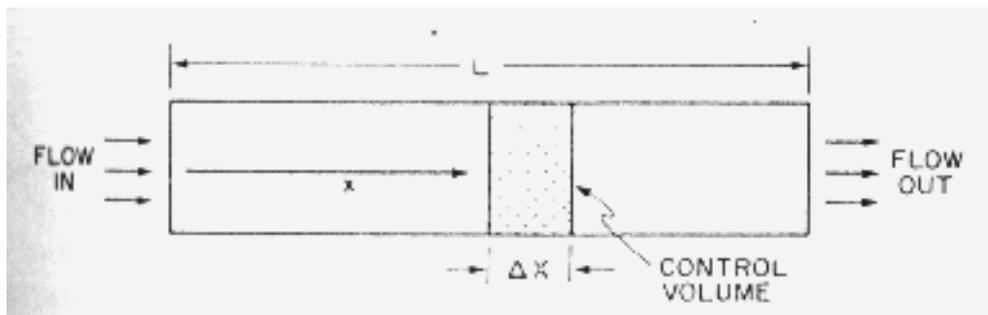


Figura 2.5. Flujo lineal en una roca porosa cilíndrica de longitud Δx

Las propiedades físicas básicas del medio poroso, como porosidad, pueden estar asociadas con el volumen de control. Si la porosidad se define como una fracción del volumen de control no ocupado por materia sólida, entonces se puede ver que si el tamaño del volumen de control es del tamaño de un poro la porosidad sería 1 ó 0. A medida que se incremente el tamaño del volumen de control, los valores de porosidad fluctuarán antes de alcanzar un valor representativo. El valor de porosidad asociado con un punto P es el valor representativo para un volumen de control que contenga al punto P. Otras propiedades son definidas en un punto dentro del medio poroso de la misma forma. Está es la “*aproximación continua*”, donde el medio poroso es reemplazado por uno ficticiamente continuo, que en cualquier punto se le puede asignar variables y parámetros que sean continuos en tiempo y espacio.

Realizando un balance de masa sobre el elemento de volumen representativo del yacimiento se puede escribir la Ley de Conservación de Masa o Ecuación de Continuidad como:

(Flujo másico entrando al elemento)-(Flujo másico saliendo del elemento) = (Flujo másico acumulado dentro del elemento).

Siendo \dot{m}_x la componente en x del vector de flujo másico (flujo de masa por unidad de área por unidad de tiempo) de un fluido de densidad ρ , se tiene que el flujo másico que entra a través del volumen de control en x en un intervalo de tiempo Δt es:

$$\dot{m}_x \Big|_x A \Delta t \quad (2.1)$$

Siendo A el área transversal de la sección. El flujo másico saliente en $x+\Delta x$ para el mismo intervalo de tiempo es:

$$\dot{m}_x \Big|_{x+\Delta x} A \Delta t \quad (2.2)$$

La diferencia de estos debe ser igual a la suma de acumulación de masa dentro del volumen de control:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi\Delta V) \right] \Delta t \quad (2.3)$$

Siendo ϕ la porosidad y V el volumen. Algunos autores denominan al término entre paréntesis, $\rho\phi$, como la concentración de fluido en el yacimiento ⁽⁵⁾. La masa removida del volumen de control debido a una extracción en un intervalo de tiempo Δt es:

$$\rho q \Delta V \Delta t \quad (2.4)$$

Siendo ρq masa por unidad de volumen por unidad de tiempo, lo que hace que “ q ” sea una tasa volumétrica por unidad de volumen (volumen por unidad de tiempo por unidad de volumen).

Cabe destacar que lo que en este trabajo se presenta como ρq , en algunos de los textos utilizados como referencia se conoce como \tilde{q} , por lo tanto para ser consistentes en el momento de la utilización de los datos se deberá tomar el valor aportado por la bibliografía y dividirlo entre la densidad, ya que $q = \frac{\tilde{q}}{\rho}$.

Utilizando entonces las ecuaciones (2.1) a (2.4), se tiene entonces:

$$\left(\dot{m}_x|_x - \dot{m}_x|_{x+\Delta x} \right) A \Delta t = \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi\Delta V) \right] \Delta t + \rho q \Delta V \Delta t \quad (2.5)$$

Dividiendo por $\Delta V \Delta t$ y notando que $\Delta V = A \Delta x$, se obtiene:

$$\frac{\dot{m}_x|_x - \dot{m}_x|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \rho q \quad (2.6)$$

Tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se tiene La Ecuación de Conservación de Masas para este sistema:

$$-\frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \rho q \quad (2.7)$$

El término “q” es negativo para una fuente (pozo inyector) y positivo para un sumidero (pozo extractor).

Es posible expresar el flujo másico en términos de una velocidad superficial (o Velocidad de Darcy):

$$\dot{m}_x = \rho u_x \quad (2.8)$$

Donde u_x es la velocidad en la dirección x. Sustituyendo en la ecuación (2.7) se tiene:

$$-\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \rho q \quad (2.9)$$

La correspondiente ecuación para flujo tridimensional en un medio poroso puede ser derivada de similar forma considerando un volumen de control $\Delta x \Delta y \Delta z$. Esto produce:

$$-\left(\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \rho q \quad (2.10)$$

Lo cual puede escribirse de forma simplificada como:

$$-\nabla \cdot \rho u = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \rho q \quad (2.11)$$

Para el cálculo de flujo multifásico, cada componente debe tener su ecuación de conservación. Esto introduce algunos términos y conceptos adicionales.

El primero de los planteamientos es el de flujo másico en función de la velocidad de Darcy, que cuando se considera flujo multifásico se tienen las siguientes relaciones (considerando que los subíndices o, w y g denotan petróleo, agua y gas respectivamente):

$$\vec{m}_o = \frac{\rho_{osc}}{B_o} \vec{u}_o$$

$$\vec{m}_w = \frac{\rho_{wsc}}{B_w} \vec{u}_w$$

$$\vec{m}_g = \frac{\rho_{gsc}}{B_g} \vec{u}_g + \frac{R_{so} \rho_{gsc}}{B_o} \vec{u}_o + \frac{R_{sw} \rho_{gsc}}{B_w} \vec{u}_w$$

Donde R_{so} y R_{sw} son las solubilidades de gas en petróleo y en agua respectivamente, B_o , B_w , B_g son los factores de formación de volumen (volumen a condiciones de yacimiento/ volumen a condiciones de superficie o estándar), y ρ_{osc} , ρ_{wsc} , ρ_{gsc} son las densidades de cada fase a condiciones estándar.

Las densidades de fase están referidas a los factores de formación de volumen y las solubilidades de gas:

$$\rho_o = \frac{1}{B_o} (\rho_{osc} + R_{so} \rho_{gsc})$$

$$\rho_w = \frac{1}{B_w} (\rho_{wsc} + R_{sw} \rho_{gsc})$$

$$\rho_g = \frac{\rho_{gsc}}{B_g}$$

Y el término que representa la acumulación o concentración de fluido en el yacimiento resultaría de la siguiente forma para cada fase:

Petróleo: $\phi \rho_{osc} \frac{S_o}{B_o}$

Agua: $\phi \rho_{wsc} \frac{S_w}{B_w}$

Gas: $\phi \rho_{gsc} \left[\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} + \frac{R_{sw} S_w}{B_w} \right]$

Aquí se introduce el concepto de saturación (S), el cual establece la siguiente relación:

$$S_o + S_w + S_g = 1$$

Con todo lo anteriormente explicado, las ecuaciones de balance de masa para cada fase resultarían ser las siguientes:

Petróleo:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_{osc}}{B_o} u_o \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho_{osc}}{B_o} v_o \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_{osc}}{B_o} w_o \right) \right] - \rho_{osc} q_o = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \rho_{osc} \frac{S_o}{B_o} \right) \quad (2.12)$$

Agua:

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_{wsc}}{B_w} u_w \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho_{wsc}}{B_w} v_w \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_{wsc}}{B_w} w_w \right) \right] - \rho_{wsc} q_w = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \rho_{wsc} \frac{S_w}{B_w} \right) \quad (2.13)$$

Gas:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_{gsc}}{B_g} u_g + \frac{R_{so} \rho_{gsc}}{B_o} u_o + \frac{R_{sw} \rho_{gsc}}{B_w} u_w \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho_{gsc}}{B_g} v_g + \frac{R_{so} \rho_{gsc}}{B_o} v_o + \frac{R_{sw} \rho_{gsc}}{B_w} v_w \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_{gsc}}{B_g} w_g + \frac{R_{so} \rho_{gsc}}{B_o} w_o + \frac{R_{sw} \rho_{gsc}}{B_w} w_w \right) - \rho_{gsc} q_g = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \rho_{gsc} \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} + \frac{R_{sw} S_w}{B_w} \right) \right] \quad (2.14)$$

Para el caso estudiado en este trabajo solo se consideran dos fases, una mojante (agua) y otra no mojante (petróleo), cuyos subíndices son “w” y “n” respectivamente. No se considera la tercera fase (el gas).

Al no tener gas en el yacimiento, la ecuación para el gas desaparece del sistema a resolver, así como los términos de solubilidad en las otras ecuaciones (R_{so} y R_{sw}).

En cuanto al factor de formación de volumen, $B_o=1$ y $B_w=1$, ya que al no haber gas, el volumen prácticamente no varía de las condiciones de yacimiento a las condiciones estándar o de superficie.

Estas consideraciones hacen que las densidades de fase sean iguales a las densidades a condiciones estándar, y las ecuaciones de balance de masa para cada fase (2.12, 2.13) se conviertan en:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho_n u_n) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho_n v_n) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho_n w_n) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_n S_n) + \rho_n q_n \quad (2.14)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho_w u_w) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho_w v_w) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho_w w_w) = \frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_w S_w) + \rho_w q_w \quad (2.15)$$

$$S_n + S_w = 1 \quad (2.16)$$

Escribiendo de forma simplificada, queda la ecuación que será utilizada a lo largo del presente trabajo:

$$-\nabla \cdot \rho_i u_i = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_i \phi S_i) + \rho_i q \quad (2.17)$$

Ley de Darcy:

Adicional a la ecuación de continuidad o conservación de masas, se requiere una relación entre la tasa de flujo y el gradiente de presión en cada fase. Tal relación

fue descubierta por Darcy (1856) para un flujo de una fase. La forma diferencial de esta relación es:

$$\hat{u} = -\frac{k}{\mu} \left(\nabla p + \rho \frac{G}{g_c} \right) \quad (2.18)$$

Donde k es el tensor de permeabilidad absoluta del medio poroso, μ es la viscosidad del fluido, G es el vector de aceleración gravitacional y g_c (con las unidades de $\text{lbm}/\text{lbf ft/s}^2$ en el sistema de unidades de ingeniería) es la constante de conversión. Si la coordenada en la dirección vertical es z:

$$\rho \frac{G}{g_c} = -\rho \frac{g}{g_c} \nabla z = -\gamma \nabla z \quad (2.19)$$

Siendo:

$$\gamma = \rho \frac{g}{g_c}$$

Con la anterior definición de γ , la Ley de Darcy puede escribirse:

$$\hat{u} = -\frac{k}{\mu} (\nabla p + \gamma \nabla z) \quad (2.20)$$

El tensor de permeabilidad debe ser determinado experimentalmente. En la mayoría de los problemas prácticos es posible (o necesario) asumir que k es un tensor diagonal dado por:

$$k = \begin{bmatrix} k_{xx} & & \\ & k_{yy} & \\ & & k_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Si $k_{xx} = k_{yy} = K_{zz}$, el medio se denomina isotrópico, si no se cumple se denomina anisotrópico.

Para obtener las ecuaciones en flujo multifásico, es necesario introducir el concepto de permeabilidad relativa, de tal forma que la ecuación de Darcy pueda escribirse:

$$\hat{u} = -\frac{kk_{rl}}{\mu_l}(\nabla p_l + \gamma_l \nabla z) \quad (2.22)$$

Siendo K_{rl} la permeabilidad relativa de la fase, y:

$$\gamma_l = \rho_l \frac{g}{g_c}$$

La presión capilar, p_c , es incorporada como la diferencia de presión entre las fases:

$$p_{cow} = p_o - p_w$$
$$p_{cgo} = p_g - p_o$$

Las diferencias p_{cow} y p_{cgo} son las presiones capilares de petróleo-agua y gas-petróleo respectivamente. Como en este caso solo se considera la fase mojante y no mojante, las relaciones anteriores se reducen a:

$$p_c = p_n - p_w \quad (2.23)$$

2-6) CONDICIONES INICIALES Y CONDICIONES DE BORDE:

El modelo matemático discutido se encuentra incompleto sin las necesarias condiciones de borde y condiciones iniciales.

Condiciones de Borde:

El yacimiento a ser simulado interactúa con sus alrededores a través de las condiciones especificadas en su contorno. Es esencial que las condiciones de borde sean formuladas y aproximadas de tal forma que la interacción del yacimiento con sus alrededores tenga lugar.

Básicamente se tienen dos tipos de condiciones de borde: condiciones de presión (Condiciones de Dirichlet) y condiciones de flujo (Condiciones de Neumann). Estas son las condiciones de borde más comunes en yacimiento, incluyendo extracción o inyección, y son discutidas a continuación.

Condiciones de Dirichlet (también llamadas condiciones de 1º tipo):

Las condiciones de Dirichlet especifican el valor de la variable en los límites o contornos. En simulación de yacimientos, este tipo de condiciones surge cuando se especifican presiones en el contorno del yacimiento o en el pozo.

Cuando condiciones de presión son especificadas, normalmente se tiene la presión al final de las caras del sistema en cuestión. Aplicadas a un sistema lineal simple, se puede tener las siguientes presiones en los extremos:

$$P(x = 0, t > 0) = P_L$$

$$P(x = L, t \geq 0) = P_g$$

Para flujo en yacimientos, una condición de presión normalmente será especificada como una presión en el fondo de un pozo de producción o inyección, en alguna posición del yacimiento. Estrictamente hablando, esta no es una condición de contorno, pero el tratamiento de este tipo de condición es similar al tratamiento de una condición de borde de presión.

Condición de Neumann (También llamadas condiciones de 2º tipo):

Las condiciones de Neumann expresan la tasa de flujo que atraviesa los límites y puede ser usada para especificar la tasa de producción, conocida la afluencia de un "aquifer" o flujo proveniente de partes externas al yacimiento simulado. Una formulación alternativa, es expresar el flujo a través de los límites por medio del término de fuente $q(x,t)$.

Quedaría entonces la condición de frontera en $x = 0$ de la siguiente forma:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = f(t)$$

Usando la ecuación de Darcy en los extremos de un sistema simple, la condición resultaría:

$$Q_L = -\frac{kA}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x=0}$$
$$Q_R = -\frac{kA}{\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{x=L}$$

Para el flujo en yacimientos, una condición de flujo puede ser especificada como la tasa de producción o inyección en el pozo, en el algún punto del yacimiento, o es especificada como cero flujo atravesando las fronteras, o entre capas no comunicadas entre sí.

Condiciones Iniciales:

Las condiciones iniciales especifican el estado inicial de las variables primarias del sistema. Para los casos simples mencionados antes, una presión inicial constante puede ser especificada como:

$$P(x, t = 0) = P_0$$

La presión inicial puede ser una función de posición. Para sistemas no horizontales, el equilibrio hidrostático de presión es normalmente obtenido basado en una presión de referencia y densidad del fluido:

$$P(z, t = 0) = P_{ref} + (z - z_{ref})\rho g$$

Las condiciones de flujo y presión discutidas anteriormente aplican a sistemas multifásicos. Sin embargo, para un pozo productor en un yacimiento, normalmente se especifican o la rata de producción de petróleo en la superficie, o la rata total de líquido en la superficie. Así, las ratas no especificadas deben ser calculadas a partir de la ecuación de Darcy.

En adición a la especificación de presiones iniciales, también se hace necesario especificar las saturaciones iniciales cuando se tiene un sistema multifásico. Esto requiere el conocimiento del contacto entre el agua y el petróleo (WOC) y el contacto entre gas y petróleo (GOC). Asumiendo que el yacimiento está en equilibrio, se pueden calcular las presiones de fase iniciales basadas en los niveles de contacto y densidades. Luego, las saturaciones de equilibrio pueden ser interpoladas de las curvas de presión capilar. Alternativamente, las saturaciones iniciales son basadas en data experimental.

En simulación de yacimientos una de las condiciones de borde normalmente usadas es la de cero flujo en los bordes extremos (Jon Kleppe). Esta es la que se usará en el presente trabajo, ya que permite una consideración más acertada, dando un mejor resultado que la condición de Dirichlet, pues para esta última se necesita los valores de presión en los alrededores del yacimiento, los cuales, por lo general, son desconocidos.

Cuando no hay flujo cruzando las fronteras, la componente del vector velocidad normal a la superficie debe ser cero. La apropiada componente de la velocidad es obtenida por medio del producto escalar de la velocidad de Darcy y el vector normal n :

$$\frac{k}{\mu} = (\nabla p - \gamma \nabla z) \cdot n = 0$$

En la simulación de yacimientos los límites son usualmente aproximados por bloques de contorno los cuales son paralelos a una dirección coordenada. Por lo tanto, para un modelo 3D se tiene:

$$\frac{k_x}{\mu} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = 0$$

para todas las fronteras que son normales a la dirección x

$$\frac{k_y}{\mu} = \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \gamma \frac{\partial Z}{\partial y} \right) = 0$$

para todas las fronteras que son normales a la dirección y

$$\frac{k_z}{\mu} = \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \gamma \frac{\partial Z}{\partial z} \right) = 0$$

para todas las fronteras que son normales a la dirección z

CAPITULO 3. MODELO NUMÉRICO

2-1) MÉTODOS NUMÉRICOS:

Generalmente hablando, soluciones analíticas de las ecuaciones de flujo para yacimientos, pueden ser obtenidas solamente después de hacer simplificaciones en cuanto a la geometría, propiedades y condiciones de frontera, que restringen enormemente la aplicabilidad de la solución resultante. Para la mayoría de los problemas reales de flujo de fluido en yacimientos, tales simplificaciones no son validas. Por lo tanto se hace necesario resolver esas ecuaciones haciendo uso de métodos numéricos, a través de los cuales se puede reemplazar las ecuaciones diferenciales por ecuaciones de algebraicas.

La formulación matemática de problemas y su tratamiento numérico dependen del tipo de sistema físico y las suposiciones involucradas en el desarrollo del modelo matemático del sistema.

La idea básica de cualquier método de aproximación, es la de reemplazar el problema original por otro problema que sea más fácil de resolver, y que su solución sea en cierto modo cercana a la solución del problema original.

Existen diferentes técnicas numéricas para dar soluciones aproximadas a ecuaciones diferenciales, entre ellas se encuentra el método de Diferencias Finitas y métodos variacionales (elementos finitos, Galerkin, Colocación, etc). La técnica de diferencias finitas parece ser la más práctica para ser usada en grandes yacimientos ⁽⁶⁾.

Por medio de este método, la ecuación diferencial es reemplazada por un conjunto de ecuaciones algebraicas referidas a valores de u_x en x_i para todos los puntos. Dichas ecuaciones son llamadas “*diferencias finitas*”, y hacen que el problema diferencial pase a ser un problema algebraico.

En la aproximación de diferencias finitas, en lugar de tratar de encontrar funciones continuas que satisfagan las ecuaciones diferenciales, se busca solo valores aproximados de la solución, en un conjunto de puntos finitos dentro de un intervalo.

El proceso de obtención de las ecuaciones de diferencias finitas que se aproxime a una ecuación diferencial dada se denomina discretización. Esta es la subdivisión de distancia y de tiempo en incrementos específicos y definidos. En otras palabras, para usar la ecuación de diferencias, es necesario tratar al yacimiento como si estuviera compuesto de elementos de volumen discretos y calcular los cambios en las condiciones dentro de cada elemento de volumen en muchos intervalos de tiempo discretos. Conceptualmente los elementos de volumen en el yacimiento son referidos como “bloques de malla” y los intervalos de tiempo son llamados “pasos de tiempo”.

El modelo debe contener suficientes bloques (y dimensiones) para simular el yacimiento y su comportamiento de la forma más adecuada, pero sin olvidar que debe ser tan pequeño y simple como sea posible.

El tamaño de cada paso debe ser suficientemente pequeño para que la respuesta tenga la exactitud deseada, pero suficientemente grande para que no se hagan un número innecesario de cálculos. La exactitud de la solución puede ser verificada resolviendo el problema dos veces, una para un determinado paso de tiempo, y la otra usando la mitad de este tiempo. Si la respuesta no concuerda con el número deseado de cifras significativas, entonces se vuelve a tomar la mitad del paso de tiempo hasta que se cumpla.

Sin embargo, cuando se reduce demasiado el paso de tiempo, se deben realizar más cálculos antes de encontrar el punto final, con lo cual habrá más oportunidad para el error por truncación.

En esencia, el problema matemático se reduce a calcular el flujo entre bloques de malla adyacentes.

En las formulaciones convencionales para simuladores de yacimiento, usar este tipo de aproximaciones, produce que las ecuaciones de presión de cada fase puedan ser traducidas a una ecuación algebraica. Entonces, a cada nuevo paso del tiempo, para cada bloque de la malla del yacimiento, un conjunto de ecuaciones debe ser resuelto simultáneamente.

Dado que el número total de ecuaciones a resolver es grande, ellas son normalmente analizadas matemáticamente como una ecuación matricial o como un conjunto de ecuaciones matriciales.

Dos tipos de preguntas pueden ser hechas hasta este punto:

- (a) ¿Cómo una ecuación diferencial puede ser discretizada?
- (b) ¿Cuan acertada es la solución de diferencias finitas con respecto al valor real?

2-2)Discretización en Espacio:

Básicamente hay tres métodos para la discretización de cualquier operador dado: el método de la Serie de Taylor, el Integral y el método Variacional. Estos corresponden a formulaciones de la ecuación de conservación según la forma diferencial, integral y variacional.

El problema a ser resuelto es $AU = 0$, pero en lugar de esto se resuelve $Lu = 0$, donde L es un operador de diferencias finitas, que es la aproximación del operador diferencial A . Generalmente, se puede escribir la solución de la siguiente forma:

$$AU_i = LU_i + R_i$$

donde LU_i se obtiene a partir de la aproximación de las derivadas en el operador diferencial A , y R_i es el término remanente usualmente llamado error de truncación o error de discretización local.

Muchos de los métodos que se discutirán son justificados más para las experiencias industriales que para los principios teóricos.

Método de las Series de Taylor:

Con este método las ecuaciones de diferencias finitas son obtenidas por aproximaciones derivadas de la serie de Taylor truncada. Vale la pena revisar como se hace esto, antes de convertir las ecuaciones diferenciales parciales obtenidas en el capítulo anterior en ecuaciones de la forma de diferencias finitas, ya que este será el método a emplear.

El objetivo es reemplazar las derivadas desconocidas, tales como $\partial p / \partial x$ por cantidades matemáticas más manejables. Esto se logra manipulando la Serie de Taylor de la siguiente forma:

$$p(x + \Delta x) = p(x) + \Delta x \left. \frac{\partial p(x)}{\partial x} \right|_x + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} \right|_x + \frac{(\Delta x)^3}{6} \left. \frac{\partial^3 p(x)}{\partial x^3} \right|_x + \dots \quad (3.1)$$

Si se conoce el valor de p y su derivada en el punto x , entonces por la ecuación anterior se puede obtener el valor de p en $x + \Delta x$. Alternativamente, si se conocen los valores de $p(x)$ y $P(x + \Delta x)$, se puede aproximar la derivada $\partial p / \partial x$, como se verá a continuación.

Restando $p(x)$ a ambos lados de la ecuación, dividiendo por Δx y suprimiendo la notación " $\left. \right|_x$ " se obtiene:

$$\frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x} = \frac{\partial p(x)}{\partial x} + \varepsilon(\Delta x) \quad (3.2)$$

$$\varepsilon(\Delta x) = \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{\partial^3 p(x)}{\partial x^3} + \dots \quad (3.3)$$

y restando $\varepsilon(\Delta x)$ de ambos lados de la ecuación:

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} = \frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x} - \varepsilon(\Delta x) \quad (3.4)$$

si $\varepsilon(\Delta x)$, el cual se conoce como error de truncación, es pequeño comparado con $(p(x + \Delta x) - p(x))/\Delta x$, entonces se tiene la aproximación:

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} \approx \frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} \approx \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta x}, \quad \Delta x = x_{i+1} - x_i$$

Para valores Δx suficientemente pequeños, se puede usar esta ecuación para reemplazar las derivadas de 1er orden de una cantidad p con respecto a x por una diferencia entre dos valores vecinos de p , separados por un intervalo finito Δx . Esta ecuación se denomina la aproximación hacia adelante (o forward-difference approximation).

Una aproximación alternativa puede ser obtenida de la siguiente forma:

$$p(x - \Delta x) = p(x) - \Delta x \left. \frac{\partial p(x)}{\partial x} \right|_x + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 p(x)}{\partial x^2} \right|_x - \frac{(\Delta x)^3}{6} \left. \frac{\partial^3 p(x)}{\partial x^3} \right|_x + \dots \quad (3.6)$$

Manipulando esta ecuación, resulta:

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} \approx \frac{p(x) - p(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} \approx \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta x}, \quad \Delta x = x_i - x_{i-1}$$

La ecuación (3.7) se denomina la aproximación hacia atrás (o backward-difference approximation). Restando la ecuación (3.6) de la ecuación (3.1) y

reorganizando, se obtiene otra formulación denominada “diferencia centrada” (que será la usada en este trabajo):

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x} = \frac{p(x + \Delta x) - p(x - \Delta x)}{2\Delta x} + \varepsilon'(\Delta x^2) \quad (3.8)$$

$$\varepsilon'(\Delta x^2) = -\frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{\partial^3 p(x)}{\partial x^3} - \frac{(\Delta x)^4}{120} \frac{\partial^5 p(x)}{\partial x^5} - \dots \quad (3.9)$$

La aproximación estándar para la primera derivada (backward o forward), origina un error que es proporcional a Δx , mientras que la diferencia centrada produce un error que es proporcional a Δx^2 , por ello es más exacta.

Método Integral:

El método integral está cercano al significado físico de la ecuación. En este método se puede escribir la segunda derivada de una función de la siguiente forma: $U''=(U')'$, lo cual se aproxima de al siguiente forma:

$$(U')' \cong \frac{(U'_{i+1/2} - U'_{i-1/2})}{h}$$

Donde se aproxima U' como:

$$U'_{i+1/2} \cong \frac{(U_{i+1} - U_i)}{h} \quad U'_{i-1/2} \cong \frac{(U_i - U_{i-1})}{h}$$

Este procedimiento es, de hecho, la derivación de las ecuaciones de diferencias finitas por el método integral. Este (en contraste con el Método de las series de Taylor) requiere el concepto adicional de un bloque (o región de la malla), el cual es la región limitada por los contornos entre los puntos dados y sus vecinos. En una dimensión, se reemplaza el eje “x” por una barra de sección constante A y el bloque correspondiente al punto i está definido por los límites en $X_{i+1/2}$ y $X_{i-1/2}$. (Ver Figura 3.1).

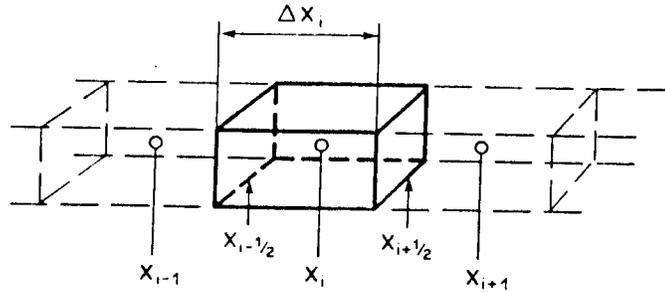


Figura 3.1 Discretización de bloques unidimensionales

La ecuación $AU \equiv \frac{d^2U}{dx^2} - q(x) = 0$, puede ser escrita de forma integral de la siguiente forma:

$$A \left[\int_{X_{i-1/2}}^{X_{i+1/2}} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} dx - \int_{X_{i-1/2}}^{X_{i+1/2}} q dx \right] = A \left[\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{i+1/2} - \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{i-1/2} \right] - A \left[\int_{X_{i-1/2}}^{X_{i+1/2}} q dx \right] = 0$$

donde la integración ha sido hecha sobre el volumen del bloque y la integral se convirtió usando el Teorema de Green. Esta ecuación expresa la conservación de masa para el bloque i, porque:

$$A \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{i \pm 1/2}$$

son las tasas de flujo entre bloques, y

$$A \int_{X_{i-1/2}}^{X_{i+1/2}} q dx$$

es la rata total de la fuente para el bloque i. Se puede discretizar la ecuación anterior haciendo uso de las diferencias centradas para los términos de $\partial U / \partial x$:

$$A \left[\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{i+1/2} - \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{i-1/2} \right] - A \int q dx \cong A \frac{(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}))}{h} - A q_i h = 0$$

donde q_i aproxima el valor principal de q en el bloque i. Nótese que el método integral da ecuaciones que son expresadas en unidades de masa/tiempo, mientras que el método de las series de Taylor da ecuaciones en unidades de masa/(volumen*tiempo).

El Método Variacional:

El punto de inicio para este método es la formulación variacional de la ecuación de conservación. La solución de U de la ecuación $AU \equiv \frac{d^2U}{dx^2} - q(x) = 0$, minimiza el funcional.

$$I = \int_0^L \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 - qV \right] dx$$

a todas las funciones V que son suficientemente continuas y satisfacen las condiciones de contorno. En esta fase, se puede seleccionar la aproximación directa de la función I , como lo muestra Varga (1962). La segunda posibilidad es la de construir una clase de funciones v (usualmente polinomiales), las cuales aproximen a la función V y entonces se resuelvan problemas minimizados solo para funciones de esta clase. Por ejemplo si se asume que todas las funciones de aproximación v tienen la forma:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{i=N} c_i S_i(x)$$

donde $S_i(x)$ son las también llamadas funciones “Chapeau” mostradas en la Figura 3.2.

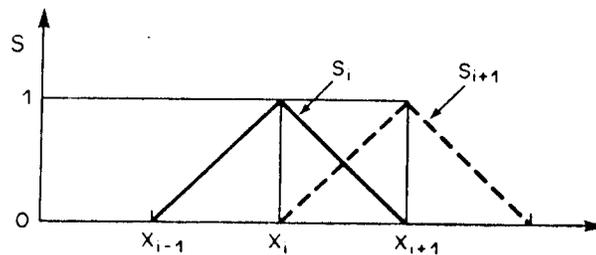


Figura 3.2 Funciones Chapeau.

Las funciones S_i son llamadas las funciones básicas, y cada una de ellas no es nula solamente en el intervalo (x_{i-1}, x_{i+1}) . Es fácil ver que las clases de funciones definidas de la forma de v , son todas continuas y lineales entre los puntos x_i . Las funciones v satisfacen $v(0) = v(L) = 0$ y los valores de v a x_i son iguales a c_i . La sustitución de la ecuación de $v(x)$ en la ecuación de I , proporciona una forma

cuadrática en c_i , la cual posee un mínimo para ciertos valores de $v_i = c_i$. La minimización del proceso produce un conjunto de ecuaciones algebraicas para v_i , idénticas a las que se producen con el método de las diferencias finitas.

2-3) DISCRETIZACIÓN EN TIEMPO: TRATAMIENTO IMPLICITO O EXPLICITO.

Resolviendo las ecuaciones diferenciales en forma analítica, se obtendría una solución la cual es continua en el tiempo y en el espacio; en la solución numérica, no obstante, los métodos permiten obtener soluciones en una localización fija y en un punto discreto de tiempo.

La información a un nivel de tiempo dado (t), se usa para calcular la información a un nivel de tiempo mayor ($t+\Delta t$). Los valores de tiempo, se hacen progresivamente mayores a medida que progresa la solución.

Se pueden utilizar diferentes procedimientos para tratar las discontinuidades en tiempo, pero en esencia todos los procedimientos son variaciones de los siguientes tres:

1.- Procedimientos Explícitos:

Usa valores de saturación conocidos al principio del paso de tiempo a estudiar. Esas saturaciones son conocidas del paso de tiempo anterior (ejemplo: el final del paso de tiempo 2 es el principio del paso de tiempo 3).

Los nuevos valores pueden ser calculados individualmente para cada localización en el espacio (X) en un proceso que comienza en $X=0$ y termina en $X=L$ para un valor de tiempo dado. Este método de cálculo es el esquema explícito. El esquema explícito envuelve la solución secuencial de una ecuación con una incógnita.

2.- Procedimientos Implícitos:

Usa transmisibilidad y presión capilar calculadas como funciones de saturación al final del paso de tiempo. Los valores no son conocidos hasta que los cálculos para el paso de tiempo dado han sido completados.

En este procedimiento, todos los nuevos valores comprendidos entre $X=0$ y $X=L$ pueden ser calculados simultáneamente para un valor de tiempo dado. El esquema implícito envuelve la solución de un sistema de $N*N$ ecuaciones lineales simultáneas.

3.- Procedimientos Semi-Implícitos:

Usa valores estimados de transmisibilidad y presión capilar desarrollados de suponer que las funciones serán funciones estrechamente ligadas a la saturación durante un paso de tiempo. La saturación no se resuelve independientemente, por lo que el procedimiento es todavía en parte implícito.

Considerando la siguiente ecuación diferencial $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dt}$. Una analogía de esta ecuación en diferencias finitas es como sigue:

$$\frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{2\Delta x} = \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t}$$

Esta ecuación se encuentra en función de términos conocidos en el lado izquierdo de la misma, es decir, posee solamente una incógnita, p_i^{n+1} . Esta formulación representa el esquema explícito. Cuando $n=0$, los términos evaluados en el paso de tiempo n son conocidos o determinados a través de las condiciones iniciales.

Sin embargo, se puede establecer la solución para los tres valores de p_i en la siguiente ecuación:

$$\frac{p_{i+1}^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} = \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t}$$

Esta ecuación, que representa el esquema implícito, tiene tres valores de presión desconocidos al nuevo nivel de tiempo, en la cual el punto i es la conexión entre los puntos $(i+1)$, $(i-1)$. Agrupando y ordenado los términos, resulta:

$$p_{i+1}^{n+1} - \frac{2\Delta x}{\Delta t} p_i^{n+1} - p_{i-1}^{n+1} = \frac{-2\Delta x}{\Delta t} p_i^n$$

La forma matricial general de esta ecuación es:

$$A_i p_{i+1} - B_i p_i - C_i p_{i-1} = D_i$$

Donde los coeficientes A_i, B_i, C_i se relacionan con la geometría del sistema y sus propiedades físicas, y D_i contiene los términos conocidos. Rescribiendo la ecuación para N celdas en una red lineal, resulta una ecuación para cada celda; el resultado es N ecuaciones con N incógnitas:

CELDA

$$\begin{array}{rcl}
 1 & -C_1 p_0 - B_1 p_1 + A_1 p_2 & = D_1 \\
 2 & -C_2 p_1 - B_2 p_2 + A_2 p_3 & = D_2 \\
 3 & -C_3 p_2 - B_3 p_3 + A_3 p_4 & = D_3 \\
 4 & -C_4 p_3 - B_4 p_4 + A_4 p_5 & = D_4 \\
 \cdot & \dots\dots\dots & = \cdot \\
 \cdot & \dots\dots\dots & = \cdot \\
 \cdot & \dots\dots\dots & = \cdot \\
 N & -C_n p_{n-1} - B_n p_n + A_n p_{n+1} & = D_n
 \end{array}$$

Las celdas con subíndices 0 y $(n+1)$ son generalmente ficticias. Ellas no forman parte del modelo y son eliminadas para usar las condiciones de contorno apropiadas.

El esquema de Crank-Nicholson es otra forma de representar la ecuación diferencial para obtener una solución numérica adecuada. Este envuelve una combinación de los valores de la variable dependiente a los tiempos $(t+\Delta t)$ y al tiempo t ,

es decir, es un método mixto entre el implícito y el explícito. Este esquema representa una formulación diferente y puede ser representada como sigue:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{p_{i+1}^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) = \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t}$$

Las ecuaciones serían las mismas, pero se deben variar las definiciones de B_i y D_i .

Los métodos explícitos son atractivos porque no requieren la solución de sistemas de ecuaciones. Sin embargo ellos son solo condicionalmente estables, dependiendo de la relación $\Delta t / \Delta x^2$, convergen cuando esta relación es menor o igual a $\frac{1}{2}$ ⁽²⁾.

Para los métodos explícitos, el límite de estabilidad es dependiente del tiempo, y decrece a medida que la compresibilidad del sistema decrece.

La estabilidad aumenta con el incremento en el grado de implicitud del método, es decir aumenta desde el método explícito al método completamente implícito. Sin embargo, esta mejora es ganada a expensas de errores de truncación para la discretización en tiempo mayores, ya que al no haber límites en cuanto a estabilidad, para el paso de tiempo, al tomar este muy grande, se estará aumentando la magnitud del error. Por ello, en comparación con los errores para el método explícito, el método implícito tiene mayores errores. El error en este último método aumenta progresivamente con el aumento de Δt .

La escogencia del método va a depender de las particularidades del problema, especialmente para las ecuaciones no lineales. En general, los métodos explícitos requieren menos trabajo por paso de tiempo que los métodos implícitos, pero el paso de tiempo para el método explícito es limitado por las consideraciones de estabilidad y de precisión.

Desde el punto de vista de programación, los métodos explícitos son extremadamente simples y tienen requerimientos modestos de almacenamiento en memoria. Todos los métodos implícitos requieren algún algoritmo para la solución de ecuaciones lineales simultáneas, y espacio en memoria adicional para esos cálculos.

El error de truncación espacial no es afectado por la escogencia del método para trabajar con las ecuaciones discretizadas en tiempo.

2-4) CLASIFICACION DE LOS MODELOS DE SIMULACION DE YACIMIENTOS:

Los modelos de simulación de yacimientos pueden ser clasificados de acuerdo a ciertas características generales: 1) Tipo de modelo, 2) Tipo de formulación y 3) Método de solución.

La primera clasificación fue estudiada en el Capítulo anterior, por lo tanto, en este se discutirán los otros dos.

Tipo de formulación:

El esquema de diferencias finitas utiliza una malla sobre el yacimiento la cual está compuesta por bloques o celdas. La formulación convencional es denominada "esquema de cinco puntos" (cuando se trabaja en dos dimensiones) y es utilizada prácticamente de forma universal ⁽⁷⁾. Sin embargo, se han desarrollado otros esquemas "el variacional" y el de "nueve puntos" con el objeto de tratar los problemas de orientación de la malla resultantes de la formulación convencional.

El tipo de formulación también puede referirse a la linealización de las ecuaciones en diferencias finitas:

a).- Formulación IMPES: lo cual significa implícito en presión, explícito en saturación. El método consiste en eliminar las saturaciones de los fluidos de las "n" ecuaciones, resultando una sola ecuación de presión la cual puede ser resuelta por

métodos directos o iterativos. Las saturaciones son calculadas para cada bloque en forma explícita usando las presiones calculadas en el intervalo de tiempo posterior. Es decir, requiere la solución de una ecuación por celda-intervalo de tiempo "t".

b).- Formulación Secuencial: la cual requiere la solución simultánea de las ecuaciones de saturación. Es decir, requiere una solución de presión seguida de $n - 1$ soluciones simultáneas pro celda-intervalo de tiempo, "t".

c).- Formulación Implícita: donde "n" ecuaciones son resueltas simultáneamente por celda en cada intervalo de tiempo "t". Esta solución es conocida como "incondicionalmente estable".

Método de solución:

El sistema de ecuaciones resultante de la aproximación en diferencias finitas debe ser resuelto en forma eficiente, además, para que el modelo sea económico dicha solución debe minimizar el espacio de memoria y el tiempo de trabajo necesario para resolver el sistema de ecuaciones, al mismo tiempo la solución debe ser estable y de rápida convergencia.

Los procesos básicos para resolver sistemas de ecuaciones, tiene como objetivo la inversión de la matriz resultante del sistema de ecuaciones. De acuerdo al método de solución del sistema de ecuaciones resultantes, los modelos numéricos se han dividido en métodos Directos y métodos Iterativos. Por lo general, en sistemas hasta de 1000 celdas los métodos directos son más económicos y eficientes.⁽⁷⁾.

Los procesos directos son aquellos en los cuales la solución del sistema de ecuaciones es obtenida al terminar las operaciones. Es decir, siempre se obtendrá una solución al problema. Los procesos iterativos son cíclicos y pueden surgir problemas de convergencia.

Entre los métodos directos se encuentra: Método de Eliminación de Gauss. Este método consiste en la adición de una ecuación en otra, almacenando el resultado en la segunda ecuación. Es decir, manipula algebraicamente para eliminar variables hasta obtener una sola y luego se sustituye para resolver la de dos variables, etc.

El método resulta apropiado para ser implementado en las computadoras y resolver modelos de yacimientos,⁽⁷⁾ dado que el tiempo de ejecución de este método es bajo. Sin embargo, el error de redondeo acumulado puede alterar la veracidad de los resultados.

Los métodos numéricos iterativos se suelen caracterizar por lanzar una suposición y después refinarla sucesivamente para obtener soluciones cada vez más complejas. Sin embargo, la mayoría de los métodos no son correctos, es decir, pueden no dar el mínimo verdadero, y algunos ni son completos, puede que no terminen. La terminación en estos métodos se denomina *convergencia*; y en aquellos métodos que la convergencia no está asegurada, es decir, que no se sepa cuando acabar el método, se puede añadir condiciones adicionales de convergencia.

En un método iterativo, un procedimiento sistemático repetitivo de aproximación es usado hasta que las respuestas generadas por ese procedimiento se aproximen a la respuesta real, dentro de una tolerancia especificada (Criterio de Convergencia).

Los criterios para suspender la iteración son por lo general:

- 1.- El número de iteraciones alcanza un máximo predeterminado.
- 2.- La diferencia entre valores sucesivos es menor que una tolerancia preestablecida.

Entre los métodos iterativos se encuentran:

- a.- Método de Gauss-Seidel.
- b.- Método Iterativo de Sobre Relajación Sucesiva (SOR).

Los incentivos para desarrollar métodos iterativos provienen de la cantidad de trabajo y espacio de almacenamiento asociados con los métodos directos, que es directamente dependiente del número de bloques en cada dirección coordinada. El trabajo requerido por un método directo puede ser (y usualmente es) mucho mayor que el requerido por un método iterativo. Pero el trabajo necesario para este último método depende del número de iteraciones que se deban hacer para alcanzar la convergencia. Por lo tanto, la rapidez con la cual un método converja será un factor primario en la comparación de un método con otro.

Al utilizar métodos directos en sistemas con un gran número de ecuaciones simultáneas, el error de redondeo puede deteriorar la veracidad de la solución. En estos casos los métodos iterativos tienen la ventaja con respecto a otros métodos, de no ser demasiado sensitivos al error de redondeo proveniente de la convergencia.

El error de redondeo en cada iteración es reducido y el valor de p_n se aproxima al valor correcto de p a medida que el número de iteraciones aumenta.

Para una gran cantidad de modelos bi y tridimensionales, es usualmente más económico resolver el sistema de ecuaciones por métodos iterativos que por métodos directos ⁽¹⁾.

Muchos métodos iterativos usan “parámetros de iteración” para acelerar la solución o convergencia. La selección de esos parámetros es dejada a veces al usuario del simulador, pues estos parámetros son dependientes de los métodos de solución usados, pero también de las condiciones particulares del problema a resolver.

2-5) DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO IMPES, IMFES Y SUS DIFERENCIAS:

La selección del tipo de formulación se basa en la forma en como serán manipuladas las ecuaciones cuando sean resueltas. Las dos técnicas más utilizadas son: métodos simultáneos y métodos secuenciales ⁽¹⁾. En la aproximación simultánea,

todas las variables dependientes por cada bloque son incluidas en el mismo conjunto de ecuaciones. En la aproximación secuencial, las ecuaciones son manipuladas para separar la solución de la ecuación de presión de aquella proveniente de la ecuación de saturación. Estas manipulaciones eliminan primeramente las saturaciones de la ecuación, de tal forma que el primer paso consista en la solución de una sola variable por celda.

La aproximación secuencial más usada ⁽¹⁾ es la formulación IMPES, lo cual significa implícito en presión, explícito en saturación. El método consiste en eliminar las saturaciones de los fluidos de las "n" ecuaciones, a través de la suma de las ecuaciones de balance de material para cada fase, y asumiendo que la presión capilar no cambia durante el paso de tiempo. La ecuación resultante tiene entonces una sola variable (la presión de una de las fases) que se obtiene por la solución simultánea de un sistema de ecuaciones, que pueden ser resueltas por métodos directos o iterativos. Luego las saturaciones son calculadas para cada bloque en forma explícita usando las presiones calculadas al principio del paso de tiempo. Aunque el método es confiable para un gran número de aplicaciones, IMPES tiene limitaciones de estabilidad resultantes del tratamiento explícito de la movilidad y de la presión capilar.

Una gran desventaja de este método es que tiene problemas (la solución se hace inestable) cuando grandes cambios ocurren en un bloque de malla durante un paso de tiempo ⁽⁶⁾. Así, para ciertos tipos de problemas, el uso de IMPES requiere pasos de tiempo extremadamente pequeños.

Las ecuaciones para modelar el flujo en medio poroso tienen como variables principales a la Presión de la fase petróleo y la Saturación del agua. Todos los coeficientes en las ecuaciones, tanto transmisibilidades como coeficientes de almacenamiento, son funciones de esas variables. Adicionalmente, la presión capilar también se encuentra como función de la saturación del agua. Por lo tanto, no se pueden resolver las ecuaciones antes de calcular los coeficientes y la presión capilar, y

no se pueden calcular estos valores sin antes resolver las ecuaciones. Es necesario entonces un método que permita iterar sobre la solución y actualice los coeficientes hasta que se alcance la convergencia, o que de alguna forma estime los coeficientes para que se puedan resolver las ecuaciones.

El método descrito anteriormente, IMPES, permite resolver el problema sin tener que iterar en la solución, a través de utilizar los coeficientes y presión capilar obtenidos en el paso de tiempo anterior, para calcular los valores de las variables en el paso de tiempo actual. En este trabajo se desea presentar un procedimiento de solución, basado en dicho método, que optimice la velocidad de simulación. Esa nueva formulación presenta una sustancial diferencia con respecto a la propuesta por IMPES, y es que las variables principales a manejar en la ecuación no son Presión y Saturación, sino Flujo y Saturación, es decir, las ecuaciones estarán expresadas basándose en estas dos variables, y la presión se obtendrá a partir de la solución encontrada para el flujo.

La nueva formulación lleva por nombre IMFES, Implicito en Flujo Explícito en Saturación, precisamente denotando la diferencia existente con el método IMPES. En IMFES, igualmente se manipulan las ecuaciones (de continuidad y Ley de Darcy), para obtener una ecuación con una sola variable. A través de la adición de las ecuaciones de balance de material para cada fase, se elimina el término de saturación, al igual que se hace en el método IMPES, pero la ecuación se deja en función del flujo, y no en función de la presión. Esto permite calcular entonces el campo de flujo y saturaciones en cada paso de tiempo, calculando primero el flujo en cada celda implícitamente, resolviendo para ello el sistema de ecuaciones que resulta, y luego con esta información se determina el campo de saturaciones explícitamente. Ambas variables se calculan utilizando los valores de presión capilar, permeabilidades relativas, etc., obtenidos en el paso de tiempo anterior, por lo que al final de cada paso de tiempo, cuando ya se tenga la información completa de las variables para dicho paso, se

actualizan los valores dependientes de las mismas. Este procedimiento permite avanzar en el tiempo sin necesidad de conocer a cada paso el valor de la presión.

Una explicación más detallada de esta formulación se encontrará en los capítulos posteriores, donde se presentará la formulación de las ecuaciones correspondientes y el algoritmo de solución.

CAPITULO 4. FORMULACION A UTILIZAR

Para una variedad útil de condiciones, las variables basadas en flujo experimentan poca o ninguna variación en el tiempo a través de la mayor parte del yacimiento, permitiendo una rápida simulación del movimiento del fluido en él. Ha sido reconocido que el flujo tiende a exhibir menos variaciones en el tiempo que la presión⁽³⁾. El comportamiento del flujo experimenta variaciones menos drásticas que presión. Es por ello que se manipularán las ecuaciones a fin de obtener una ecuación diferencial parcial en flujo y no en presión. Además, esto hace que se tengan derivadas parciales de 1° orden y en cambio en la ecuación de presión se tienen derivadas parciales de 2° orden.

Se trabajará en un sistema coordenadas cartesianas. El eje “x” y el eje “y” son horizontales, y el eje “z” es vertical con los valores positivos hacia abajo, esto último para se consistentes con lo usado por el BOAST, ya que contra este simulador es que se harán las comparaciones para validar el presentado en este trabajo.

En cuanto a la notación a utilizar, se cambiará un poco la usada por Kuhn, para poder establecer diferencias claras entre las variables que son escalares, vectores o matrices. La notación sería la siguiente: en letras minúsculas los escalares, en letras minúsculas y con una flecha simple en la parte superior los vectores, y con letras mayúsculas y con una flecha de doble punta en la parte superior las matrices (como en el caso del tensor de permeabilidad absoluta).

Otra diferencia entre la formulación planteada aquí y la propuesta por Kuhn, es que para evitar abusos de notación, el término de transmisibilidad se referirá

únicamente a la relación de permeabilidad relativa entre viscosidad de la fase, para no convertir a este término en un tensor (para Kuhn la transmisibilidad es lo aquí definido, por el tensor de permeabilidad absoluta). Pues dejándolo tal como esta, representará un abuso de notación al efectuar las divisiones de estos términos como se hacen en el documento presentado por Kuhn. Cuando sea necesario utilizar la transmisibilidad en alguna de las ecuaciones, se tomará el término antes descrito y en ese momento se efectuará la multiplicación por el tensor de permeabilidad absoluta.

Para una fase mojante y no mojante se vio en la ecuación (2.18) que la Ley de Darcy puede escribirse:

$$\vec{u}_n = -\lambda \vec{K}_n \left(\nabla p_n - \frac{\rho_n g}{144} \nabla z \right) \quad (3.1)$$

$$\vec{u}_w = -\lambda \vec{K}_w \left(\nabla p_w - \frac{\rho_w g}{144} \nabla z \right) \quad (3.2)$$

Donde λ es la transmisibilidad, \vec{K} es el tensor de permeabilidad absoluta, p la presión, ρ la densidad del fluido, g la aceleración de gravedad y u es el vector de velocidad superficial. Los subíndices n y w son usados para denotar la fase no mojante y mojante, respectivamente. La velocidad superficial, u , es igual al producto de la velocidad del fluido y la porosidad. Esta ecuación esta expresada de forma tal que permita una consistencia de unidades en el sistema inglés (dado que los datos a utilizar vienen en estas unidades), por ello presenta el factor de conversión de ft^2 a in^2 , ya que la presión esta expresada en lbf/in^2 mientras que la densidad viene expresada en lbm/ft^3 .

El término g de las ecuaciones (4.1) y (4.2) es equivalente al término $\frac{G}{g_c}$ de la ecuación (2.14) vista en el Capítulo 2.

La transmisibilidad está definida como:

$$\lambda_n = \frac{k_{nr}}{\mu_n} \quad (4.3)$$

$$\lambda_w = \frac{k_{wr}}{\mu_w} \quad (4.4)$$

Donde K_{nr} y K_{wr} son las permeabilidades relativas de cada fase y μ es la viscosidad del. Recordando que la presión capilar es:

$$p_c = p_n - p_w = p_n - p \quad (4.5)$$

Se ha despreciado el subíndice w para la presión de la fase mojanete por notación convencional. Para el presente estudio, la permeabilidad relativa y la presión capilar son funciones empíricas de la saturación.

Sumando las ecuaciones (4.1) y (4.2) y combinando con la ecuación (4.5).

$$\bar{u}_n + \bar{u}_w = -\lambda_n \bar{K} \left(\nabla p_n - \frac{\rho_n g}{144} \nabla z \right) - \lambda_w \bar{K} \left(\nabla p_w - \frac{\rho_w g}{144} \nabla z \right)$$

Tomando:

$$\begin{aligned} \lambda_t &= \lambda_n + \lambda_w \quad y \quad \bar{u}_t = \bar{u}_n + \bar{u}_w \\ \bar{u}_t &= -\lambda_n \bar{K} \left(\nabla p_c + \nabla p - \frac{\rho_n g}{144} \nabla z \right) - \lambda_w \bar{K} \left(\nabla p - \frac{\rho_w g}{144} \nabla z \right) \\ \bar{u}_t &= -\lambda_n \bar{K} \nabla p_c - \lambda_n \bar{K} \nabla p - \lambda_w \bar{K} \nabla p + \lambda_n \bar{K} \frac{\rho_n g}{144} \nabla z + \lambda_w \bar{K} \frac{\rho_w g}{144} \nabla z \\ \bar{u}_t &= -\lambda_n \bar{K} \nabla p_c - \lambda_t \nabla p \bar{K} + (\lambda_n \rho_n + \lambda_w \rho_w) \bar{K} \frac{g}{144} \nabla z \\ \lambda_t \bar{K} \nabla p &= - \left[\bar{u}_t + \lambda_n \bar{K} \nabla p_c - (\rho_n \lambda_n + \rho_w \lambda_w) \bar{K} \frac{g}{144} \nabla z \right] \\ \nabla p &= - \frac{1}{\lambda_t \bar{K}} \left[\bar{u}_t + \lambda_n \bar{K} \nabla p_c - (\rho_n \lambda_n + \rho_w \lambda_w) \bar{K} \frac{g}{144} \nabla z \right] \quad (4.6) \end{aligned}$$

Haciendo uso de la ecuación (4.5), la ecuación (4.6) es sustituida en las ecuaciones (4.1) y (4.2) para obtener:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_n &= -\lambda_n \bar{K} \left(\nabla p_c + \nabla p - \frac{\rho_n \mathbf{g} \nabla z}{144} \right) \\
&= -\lambda_n \bar{K} \left(\nabla p_c - \frac{1}{\lambda_t \bar{K}} \bar{u}_t - \frac{\lambda_n \bar{K}}{\lambda_t \bar{K}} \nabla p_c + \frac{1}{\lambda_t \bar{K}} (\lambda_n \rho_n + \lambda_w \rho_w) \bar{K} \frac{\mathbf{g}}{144} \nabla z - \frac{\rho_n \mathbf{g}}{144} \nabla z \right) \\
&= -\lambda_n \bar{K} \left(-\frac{1}{\lambda_t \bar{K}} \bar{u}_t + \frac{(\lambda_w - \lambda_n) \bar{K}}{\lambda_t \bar{K}} \nabla p_c + \frac{1}{\lambda_t \bar{K}} (\lambda_n \rho_n + \lambda_w \rho_w - \lambda_t \rho_n) \bar{K} \frac{\mathbf{g}}{144} \nabla z \right) \\
&= \frac{\lambda_n}{\lambda_t} \bar{u}_t - \frac{\lambda_n}{\lambda_t} \left(\lambda_w \bar{K} \nabla p_c + (\lambda_w \rho_w - \lambda_w \rho_n) \bar{K} \frac{\mathbf{g}}{144} \nabla z \right) \\
&= \frac{\lambda_n}{\lambda_t} \bar{u}_t - \frac{\lambda_n \lambda_w}{\lambda_t} \bar{K} \left(\nabla p_c - (\rho_n - \rho_w) \frac{\mathbf{g}}{144} \nabla z \right)
\end{aligned}$$

Esta es el desarrollo para la ecuación (4.1). Para el caso de la ecuación (4.2) se tiene:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_w &= -\lambda_w \bar{K} \left(-\frac{1}{\lambda_t \bar{K}} \bar{u}_t - \frac{\lambda_n \bar{K}}{\lambda_t \bar{K}} \nabla p_c + \frac{1}{\lambda_t \bar{K}} (\lambda_n \rho_n + \lambda_w \rho_w) \bar{K} \frac{\mathbf{g}}{144} \nabla z - \frac{\rho_w \mathbf{g}}{144} \nabla z \right) \\
&= -\lambda_w \bar{K} \left(-\frac{1}{\lambda_t \bar{K}} \bar{u}_t - \frac{\lambda_n \bar{K}}{\lambda_t \bar{K}} \nabla p_c + \frac{1}{\lambda_t \bar{K}} (\lambda_n \rho_n + \lambda_w \rho_w - \lambda_t \rho_w) \bar{K} \frac{\mathbf{g}}{144} \nabla z \right) \\
&= \frac{\lambda_w}{\lambda_t} \bar{u}_t - \frac{\lambda_w}{\lambda_t} \left(-\lambda_n \bar{K} \nabla p_c + (\lambda_n \rho_n - \lambda_n \rho_w) \bar{K} \frac{\mathbf{g}}{144} \nabla z \right) \\
&= \frac{\lambda_w}{\lambda_t} \bar{u}_t + \frac{\lambda_n \lambda_w}{\lambda_t} \bar{K} \left(\nabla p_c - (\rho_n - \rho_w) \frac{\mathbf{g}}{144} \nabla z \right)
\end{aligned}$$

Tomando entonces el desarrollo de ambas ecuaciones, se puede llegar a:

$$\bar{u}_n = \frac{\lambda_n}{\lambda_t} \bar{u}_t - C_{cg} \quad (4.7)$$

$$\bar{u}_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_t} \bar{u}_t + C_{cg} \quad (4.8)$$

Donde:

$$C_{cg} = \frac{\lambda_n \lambda_w}{\lambda_t} \bar{K} \left(\nabla p_c - (\rho_n - \rho_w) \frac{\mathbf{g}}{144} \nabla z \right) \quad (4.9)$$

Las ecuaciones (4.7) y (4.8) proveen un medio para calcular las velocidades de cada fase a partir de la velocidad total, donde los efectos debido a la presión capilar y la gravedad están contenidos en C_{cg} .

Considerando la ecuación de balance de masa, descrita anteriormente en la ecuación (2.13), para cada fase, se tiene:

$$-\nabla \cdot (\rho_n \bar{u}_n) = \rho_n q_n + \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_n S_n \alpha) \quad (4.10)$$

$$-\nabla \cdot (\rho_w \bar{u}_w) = \rho_w q_w + \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_w S_w \alpha) \quad (4.11)$$

Donde q es la tasa volumétrica por celda en aquellas que contienen pozos, ϕ es la porosidad, S es la saturación y α es la compresibilidad artificial. La compresibilidad artificial se incorpora para facilitar una metodología de solución. Este método para obtener soluciones de sistemas estado estable en variables primitivas fue introducido por Chorin (1967) (ver también Chu, 1968) y más tarde usado por Plows (1968). El problema incompresible es resuelto a través de una solución de ecuaciones asintótica en tiempo, conteniendo una compresibilidad artificial, la cual esta destinada a desaparecer cuando el estado estable es alcanzado.

Para este estudio, se considera fluidos incompresibles y roca incompresible (la compresibilidad de un fluido en el yacimiento es muy pequeña), así que los términos de acumulación en las ecuaciones (4.10) y (4.11) se convierten en:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_n S_n \alpha) = \phi \rho_n \left(S_n \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha \frac{\partial S_n}{\partial t} \right) \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_w S_w \alpha) = \phi \rho_w \left(S_w \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha \frac{\partial S_w}{\partial t} \right) \quad (4.13)$$

Sustituyendo esto en las ecuaciones (4.10) y (4.11), y dividiendo por ρ_n y ρ_w :

$$-\nabla \cdot \bar{u}_n = q_n + \phi S_n \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \phi \alpha \frac{\partial S_n}{\partial t} \quad (4.14)$$

$$-\nabla \cdot \bar{u}_w = q_w + \phi S_w \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \phi \alpha \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (4.15)$$

Recordando que: $S_n + S_w = 1$, por lo tanto: $\frac{\partial S_n}{\partial t} + \frac{\partial S_w}{\partial t} = 0$; $\frac{\partial S_n}{\partial t} = -\frac{\partial S_w}{\partial t}$.

Usando esto, y sumando (4.14) y (4.15) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 -\nabla \cdot \bar{u}_n - \nabla \cdot \bar{u}_w &= q_n + q_w + \phi(S_n + S_w) \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \phi \alpha \left(\frac{\partial S_n}{\partial t} + \frac{\partial S_w}{\partial t} \right) \\
 -\nabla \cdot \bar{u}_n - \nabla \cdot \bar{u}_w &= q_n + q_w + \phi \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

La adición de las ecuaciones (4.14) y (4.15) elimina los términos de saturación y produce una ecuación de balance de masa única. Esto facilita el desarrollo de un método de solución secuencial en el cual las soluciones son alcanzadas en dos pasos. En simulación de yacimientos clásica, un proceso similar es usado para desarrollar el método IMPES, donde las soluciones de presión y saturación son encontradas en dos pasos secuenciales en cada paso de tiempo. En este trabajo se estudian técnicas similares, usando pasos secuenciales pero tratando de evitar soluciones directas para presión, para maximizar la eficiencia computacional.

Combinado las ecuaciones (4.7), (4.8) y (4.16) se obtiene:

$$-\nabla \cdot \left[\frac{\lambda_n}{\lambda_t} \bar{u}_t - C_{cg} \right] - \nabla \cdot \left[\frac{\lambda_w}{\lambda_t} \bar{u}_t + C_{cg} \right] = q_t + \phi \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad (4.17)$$

Donde: $q_t = q_n + q_w$. La ecuación (4.17) se simplifica a:

$$-\nabla \cdot \bar{u}_t = q_t + \phi \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad (4.18)$$

La ecuación (4.18) es similar a la conocida ecuación de continuidad de la hidrodinámica clásica. Dicha ecuación es una condición necesaria para la solución del problema, pero no es suficiente por lo que debe desarrollarse un método iterativo, utilizando una condición adicional, como será explicado en capítulos posteriores en este trabajo.

CAPITULO 5. METODOLOGIA DE SOLUCION

5-1)ESQUEMA GENERAL:

En este modelo, el flujo y las saturaciones son calculadas en forma sucesiva. Primero se calcula el campo de flujo total para todo el yacimiento, utilizando las propiedades (presión capilar, permeabilidades relativas y viscosidades) del paso de tiempo anterior, para luego, con este valor de flujo, calcular el campo de saturación de las fases mojante y no mojante. Teniendo esto, se consiguen los valores de las propiedades para el paso de tiempo actual. Las presiones se calculan de forma eventual, cuando lo requiera el usuario.

Usando la ecuación (4.18) se obtienen los valores de flujo correspondientes al nuevo intervalo de tiempo. El flujo así obtenido es sustituido en cualquiera de las ecuaciones (4.14) ó (4.15) y la ecuación resultante puede ser resuelta para obtener saturaciones.

En las ecuaciones colocadas a continuación los índices " - " y " + " se refieren a las direcciones negativa y positiva respectivamente, y "n" y "n+1" representan los niveles de tiempo anterior y actual.

Para tener los valores de las propiedades del yacimiento que no son constantes, a cada nuevo paso de tiempo, se interpolan de las tablas que contienen la información proveniente de las pruebas realizadas al yacimiento, usando como argumento Saturación mojante ó presión, obtenidas en dicho paso de tiempo.

Un método iterativo es utilizado para resolver la ecuación (4.18) en cada una de las celdas del sistema.

Un control de tamaño del intervalo de tiempo es logrado permitiendo un máximo cambio en saturación entre pasos de tiempo, el cual por lo general es de un 5%.⁽⁸⁾

5-2) EXPLICACIÓN DEL ALGORITMO PROPUESTO POR KUHN:

PASO ÚNICO:

Se introduce toda la data acerca de las propiedades del fluido y del medio poroso, (tablas). Así como los valores constantes: porosidad del yacimiento y densidades de la fase mojante y la fase no mojante.

Se determinan las fracciones de la tasa de flujo correspondientes a cada fase presente en el yacimiento.

Se inicializan los valores de flujo y saturación para todo el yacimiento. Además se toma como condición inicial, para el término de compresibilidad relativa, que $\alpha^0 = 1$.

Se fijan unos valores de Δx , Δy , Δz y Δt .

PRIMER PASO: Determinación del campo de flujo, utilizando un procedimiento iterativo, que converge cuando $\alpha^{n+1} = 1 \pm \text{tolerancia}$.

Para aplicar el método iterativo que resuelva para flujo directamente, se introduce un término que sería una perturbación en el campo de flujo, la cual es aplicada sucesivamente de forma iterativa. Denotando los niveles de iteración con los subíndices i y $i+1$, la perturbación del flujo, u^e se suma a los campos de flujo de la siguiente forma:

$$\{\hat{u}_t^{n+1}\}_{i+1} = \{\hat{u}_t^{n+1}\}_i + \hat{u}^e \quad (5.1)$$

Como se mencionó anteriormente, este método utiliza un término de compresibilidad artificial,. Para ilustrar su utilización, se reordena la ecuación (4.18) del tercer capítulo, e incorporando los subíndices correspondientes al nivel de iteración, se tiene:

$$\left\{ \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} \right\}_i = \frac{-\nabla \cdot \{\hat{u}_t^{n+1}\}_i - q_t^{n+1}}{\phi} \quad (5.2)$$

Se desea una solución para la cual se cumpla que $\alpha = 1$. En el contexto del método iterativo, está condición viene dada por:

$$\alpha^{n+1} = 1 \pm \text{tolerancia} \quad (5.3)$$

Donde:

$$\{\alpha^{n+1}\}_i = \alpha^n + \left\{ \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} \right\}_i \Delta t \quad (5.4)$$

Se considera útil escribir las ecuaciones (5.2) y (5.4) en el nivel de iteración $i+1$:

$$\left\{ \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} \right\}_{i+1} = \frac{-\nabla \cdot \{\hat{u}_t^{n+1}\}_{i+1} - q_t^{n+1}}{\phi} \quad (5.5)$$

$$\{\alpha^{n+1}\}_{i+1} = \alpha^n + \left\{ \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} \right\}_{i+1} \Delta t \quad (5.6)$$

Y definir el cambio en la compresibilidad artificial, $\Delta\alpha$, de un nivel de iteración a otro:

$$\Delta\alpha \equiv \{\alpha^{n+1}\}_{i+1} - \{\alpha^{n+1}\}_i \quad (5.7)$$

Las ecuaciones (5.1), (5.2), (5.4), (5.5), (5.6) y (5.7) se combinan de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \{\alpha^{n+1}\}_{i+1} - \{\alpha^{n+1}\}_i \\ \Delta\alpha &= \alpha^n + \left\{ \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} \right\}_{i+1} \Delta t - \alpha^n - \left\{ \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} \right\}_i \Delta t \\ \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} &= \left\{ \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} \right\}_{i+1} - \left\{ \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} \right\}_i \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} &= \frac{-\nabla \cdot \{\bar{u}_t^{n+1}\}_{i+1} - q_t^{n+1}}{\phi} + \frac{\nabla \cdot \{\bar{u}_t^{n+1}\}_i + q_t^{n+1}}{\phi} \\ \phi \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} &= -(\nabla \cdot \{\bar{u}_t^{n+1}\}_{i+1} - \nabla \cdot \{\bar{u}_t^{n+1}\}_i) \\ \phi \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} &= -(\nabla \cdot \{\bar{u}_t^{n+1}\}_i + \nabla \cdot \bar{u}^e - \nabla \cdot \{\bar{u}_t^{n+1}\}_i) \\ \nabla \cdot \bar{u}^e &= -\phi \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\end{aligned}$$

Lo que se busca, es una solución de la ecuación (5.8) que satisfaga la condición (5.3). Para encontrar los valores de $\Delta\alpha$ para la ecuación (5.8), se fija la compresibilidad artificial en el próximo nivel (i+1) igual a la unidad (pues esto es lo que se busca), y se resuelve para el valor asociado de $\Delta\alpha$:

$$\Delta\alpha \equiv 1 - \{\alpha^{n+1}\}_i \quad (5.9)$$

Escribiendo la ecuación (5.8) en la forma discreta, para una celda de dimensiones Δx , Δy , Δz , con los límites de la celda en x , $x+\Delta x$, y , $y+\Delta y$, z y $z+\Delta z$, se tiene:

$$\frac{u_{x+\Delta x}^e - u_x^e}{\Delta x} + \frac{v_{y+\Delta y}^e - v_y^e}{\Delta y} + \frac{w_{z+\Delta z}^e - w_z^e}{\Delta z} = -\phi \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \quad (5.10)$$

Tomando $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ como cualquier campo vectorial en \mathbb{R}^3 , se tiene:

$$\begin{aligned}u_x^e &= C \frac{\varepsilon_x}{\Delta x} & u_{x+\Delta x}^e &= -C \frac{\varepsilon_{x+\Delta x}}{\Delta x} \\ u_y^e &= C \frac{\varepsilon_y}{\Delta y} & u_{y+\Delta y}^e &= -C \frac{\varepsilon_{y+\Delta y}}{\Delta y} \\ u_z^e &= C \frac{\varepsilon_z}{\Delta z} & u_{z+\Delta z}^e &= -C \frac{\varepsilon_{z+\Delta z}}{\Delta z}\end{aligned}$$

Sustituyendo esto en el lado izquierdo de la ecuación (5.10):

$$\frac{-C \frac{\varepsilon_{x+\Delta x}}{\Delta x} - C \frac{\varepsilon_x}{\Delta x}}{\Delta x} + \frac{-C \frac{\varepsilon_{y+\Delta y}}{\Delta y} - C \frac{\varepsilon_y}{\Delta y}}{\Delta y} + \frac{-C \frac{\varepsilon_{z+\Delta z}}{\Delta z} - C \frac{\varepsilon_{z+\Delta z}}{\Delta z} - C \frac{\varepsilon_z}{\Delta z}}{\Delta z}$$

$$-C \left[\frac{(\varepsilon_{x+\Delta x} + \varepsilon_x)}{\Delta x^2} + \frac{(\varepsilon_{y+\Delta y} + \varepsilon_y)}{\Delta y^2} + \frac{(\varepsilon_{z+\Delta z} + \varepsilon_z)}{\Delta z^2} \right] = -\phi \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$$

Por lo tanto el valor de C sería:

$$C = \frac{\phi \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}}{\left[\frac{(\varepsilon_{x+\Delta x} + \varepsilon_x)}{\Delta x^2} + \frac{(\varepsilon_{y+\Delta y} + \varepsilon_y)}{\Delta y^2} + \frac{(\varepsilon_{z+\Delta z} + \varepsilon_z)}{\Delta z^2} \right]}$$

Tomando como $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ los valores de transmisibilidad en cada una de las direcciones (x, y, z) se obtienen las relaciones que satisfacen la ecuación (5.10).

$$u_x^e = C \frac{\lambda_{tx} \vec{K}}{\Delta x} \qquad u_{x+\Delta x}^e = -C \frac{\lambda_{x+\Delta x} \vec{K}}{\Delta x} \qquad (5.11)$$

$$v_y^e = C \frac{\lambda_{yx} \vec{K}}{\Delta y} \qquad v_{y+\Delta y}^e = -C \frac{\lambda_{xy\Delta y} \vec{K}}{\Delta y} \qquad (5.12)$$

$$w_z^e = C \frac{\lambda_{zx} \vec{K}}{\Delta z} \qquad w_{z+\Delta z}^e = -C \frac{\lambda_{z+\Delta z} \vec{K}}{\Delta z} \qquad (5.13)$$

Donde:

$$C = \frac{\phi \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}}{\frac{(\lambda_{tx} + \lambda_{tx+\Delta x}) \vec{K}}{\Delta x^2} + \frac{(\lambda_{yx} + \lambda_{yx+\Delta y}) \vec{K}}{\Delta y^2} + \frac{(\lambda_{zx} + \lambda_{zx+\Delta z}) \vec{K}}{\Delta z^2}} \qquad (5.14)$$

Esas relaciones permiten obtener perturbaciones en el flujo, que son proporcionales a la razón de transmisibilidades locales y a las dimensiones de la celda.

Las ecuaciones (5.11) - (5.13) se aplican iterativamente hasta que la ecuación (5.3) se satisface. Después de la aplicación de las ecuaciones, α llega a ser cercano a la unidad, para la celda en la cual las ecuaciones son aplicadas. Sin embargo, las celdas vecinas son afectadas por esas perturbaciones. Para poder considerar esos efectos, el proceso iterativo se hace simultáneamente para todo el yacimiento, y se repite hasta que la condición (5.3) se satisface para todas las celdas en el yacimiento.

Si se observan las ecuaciones (5.11), (5.12) y (5.13), se tendrá para cada valor de u_i^{n+1} cálculos efectuados en dos bloques diferentes. Asumiendo que el campo vectorial varía muy poco en espacio y usando un mallado pequeño, el valor calculado para la celda (i, j, k) debe ser similar al valor en la celda (i+1, j, k), por lo tanto se tomarán promedios.

¿ Cómo se realiza la iteración?

Una vez definidas las ecuaciones y relaciones a utilizar, el proceso iterativo sería el siguiente:

Para el caso de la primera iteración:

Debido a la poca variación en el tiempo del flujo total, se puede comenzar eficientemente a iterar con los valores del paso de tiempo anterior:

$$\{\hat{u}_t^{n+1}\}_{i+1} = \hat{u}_t^n$$

Para el caso del primer paso de tiempo, las iteraciones se harían tomando como primer valor las condiciones iniciales de flujo.

Con el valor de $\{\hat{u}_t^{n+1}\}_1$, se calcula, a través de la ecuación (5.2), el valor de $\left\{\frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t}\right\}_1$, el cual es necesario para obtener el valor de $\{\alpha^{n+1}\}_i$, que es el parámetro de convergencia. Este primer valor se compara con la condición a cumplir ($\alpha^{n+1} = 1 \pm \textit{tolerancia}$), que de no cumplirse, se repite la iteración, de la forma siguiente:

Para las siguientes iteraciones:

Se calcula el valor de $\Delta\alpha$ (según la ecuación (5.9)), el cual se introduce en la ecuación (5.14), para poder obtener con este término, las perturbaciones del campo de flujo en las tres direcciones, que corresponden a ese nivel de iteración (ecuaciones (5.11), (5.12) y (5.13)).

Con dichas perturbaciones, se define el nuevo campo de flujo para la siguiente iteración, a través de la ecuación (5.1), aplicada a las tres direcciones. Al tener así definido el vector de flujo total, se usa nuevamente la ecuación (5.2) para calcular el término $\left\{ \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} \right\}_i$, que permita obtener el nuevo valor de α^{n+1} para el nuevo nivel de iteración.

Este nuevo valor de α^{n+1} es comparado con la condición establecida. Si se cumple, es decir, se alcanza la convergencia, se puede avanzar en los demás cálculos, sino se repite, a partir del cálculo de $\Delta\alpha$, hasta que se alcance la condición de convergencia. Para ello se debe cumplir la condición para α^{n+1} en todos los bloques del yacimiento, como fue mencionado anteriormente.

Para todos los cálculos en los que se vean involucradas las propiedades del yacimiento, se toman los valores de estas en el paso de tiempo anterior.

SEGUNDO PASO: Determinación del campo de saturaciones (procedimiento explícito).

El segundo paso es para efectuar los avances del campo de flujo, desde el paso de tiempo $t = n$, hasta el paso de tiempo $t = n+1$. Utilizando diferencias finitas, se puede encontrar una relación para este avance:

$$\frac{\partial S_w^{n+1}}{\partial t} = \frac{S_w^{n+1} - S_w^n}{\Delta t} \quad (5.15)$$

$$S_w^{n+1} = S_w^n + \frac{\partial S_w^{n+1}}{\partial t} \Delta t \quad (5.16)$$

De la ecuación (5.16) para obtener el término $\frac{\partial S_w^{n+1}}{\partial t}$ se procede de la siguiente forma:

$$-\nabla \cdot \bar{u}_n = q + \phi S_n \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \phi \alpha \frac{\partial S_n}{\partial t}$$

Discretizando la ecuación en el nivel de tiempo n+1 y dividiendo todo entre $(\phi\alpha)$:

$$\begin{aligned} \frac{\left(-\nabla \cdot \bar{u}_n - q_n - \phi S_n \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^{n+1}}{(\phi\alpha)^{n+1}} &= \left(\frac{\partial S_n}{\partial t}\right)^{n+1} = -\left(\frac{\partial S_w}{\partial t}\right)^{n+1} \\ -\frac{\left(\nabla \cdot \bar{u}_n + q_n + \phi S_n \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)^{n+1}}{(\phi\alpha)^{n+1}} &= -\left(\frac{\partial S_w}{\partial t}\right)^{n+1} \\ \frac{\partial S_w^{n+1}}{\partial t} &= \frac{\left(\nabla \cdot \hat{u}_n^{n+1} + q_n^{n+1} + \phi S_n^{n+1} \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t}\right)}{\phi\alpha^{n+1}} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Para obtener esta ecuación se puede hacer uso de la relación de balance de masa tanto de la fase mojanante como de la no mojanante. En este caso se utilizó la relación para la fase no mojanante (ecuación (4.14) del tercer capítulo) en conjunto con la relación $\frac{\partial S_n}{\partial t} = -\frac{\partial S_w}{\partial t}$. Esta ecuación requiere de la porción no mojanante tanto del campo de flujo como de la rata de extracción ó inyección, las cuales se pueden obtener de las siguientes relaciones:

$$\hat{u}_n^{n+1} = \begin{pmatrix} \lambda_n^n \\ \lambda_t^n \end{pmatrix}_u \hat{u}_t^{n+1} - (C_{cg}^n)_u \quad (5.18)$$

$$q_n^{n+1} = q_t^{n+1} \left[f_n^n + \frac{df_n^n}{dS_w} (S_w^{n+1} - S_w^n) \right] \quad (5.19)$$

Donde:

$$f_n^n = \frac{\frac{k_{nr}^n}{\mu_n}}{\frac{k_{nr}^n}{\mu_n} + \frac{k_{wr}^n}{\mu_w}} \quad (5.20)$$

La ecuación (5.20) representa el flujo fraccional, que no es más que la fracción o porcentaje de la transmisibilidad de una de las fases con respecto a la total. Este término se obtiene de la siguiente forma:

$$\lambda_t = \lambda_n + \lambda_w = \left(\frac{k_{rn}}{\mu_n} + \frac{k_{rw}}{\mu_w} \right) \frac{k_{nr}^n}{\mu_n}$$

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_t} = \frac{\mu_n}{\frac{k_{nr}^n}{\mu_n} + \frac{k_{wr}^n}{\mu_w}}$$

Para obtener la ecuación (5.19) se parte de la relación:

$$q_n^{n+1} = q_t^{n+1} f_n^{n+1}$$

Usando una extrapolación lineal de f_n^{n+1} en función de f^n , y sabiendo que este término depende de S_w , se tiene que:

$$f_n^{n+1} = f_n^n + \frac{df_n}{dS_w} (S_w^{n+1} - S_w^n) + Error$$

Despreciando el error que puede cometerse al truncarse el anterior desarrollo, y sustituyendo esto en la relación arriba mostrada para q_n^{n+1} resulta la ecuación (5.19).

La ecuación (5.18) se obtiene a partir de la ecuación (4.7) del primer capítulo. La ecuación (5.19) utiliza la relación de las fracciones de movilidad de flujo, dada por la ecuación (5.20), para encontrar la porción no mojante de la rata del pozo, e indica el tratamiento semi-implícito que se le da a la movilidad.

Las ecuaciones (5.16), (5.17) y (5.19), se combinan para obtener la relación explícita para la saturación:

$$S_w^{n+1} = S_w^n + \Delta t \frac{\left(\nabla \cdot \bar{u}_n^{n+1} + q_n^{n+1} + \phi S_n^{n+1} \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} \right)}{\phi \alpha^{n+1}}$$

Usando el hecho de que $S_n = 1 - S_w$.

$$\begin{aligned}
S_w^{n+1} &= S_w^n + \Delta t \frac{\left(\nabla \cdot \vec{u}_n^{n+1} + q_t^{n+1} f_n^n + q_t^{n+1} \frac{df_n^n}{dS_w} S_w^{n+1} - q_t^{n+1} \frac{df_n^n}{dS_w} S_w^n + \phi \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} - \phi S_w^{n+1} \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} \right)}{\phi \alpha^{n+1}} \\
S_w^{n+1} + \Delta t \frac{\left(-q_t^{n+1} \frac{df_n^n}{dS_w} S_w^{n+1} + \phi S_w^{n+1} \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} \right)}{\phi \alpha^{n+1}} &= S_w^n + \Delta t \frac{\left(\nabla \cdot \vec{u}_n^{n+1} + q_t^{n+1} f_n^n - q_t^{n+1} \frac{df_n^n}{dS_w} S_w^n + \phi \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} \right)}{\phi \alpha^{n+1}} \\
S_w^{n+1} &= \frac{S_w^n + \frac{\Delta t \left(\nabla \cdot \hat{u}_n^{n+1} + q_t^{n+1} f_n^n - q_t^{n+1} \frac{df_n^n}{dS_w} S_w^n + \phi \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} \right)}{\phi \alpha^{n+1}}}{1 + \frac{\Delta t \left(\phi \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} - q_t^{n+1} \frac{df_n^n}{dS_w} \right)}{\phi \alpha^{n+1}}} \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Dado el campo de flujo para el paso de tiempo $t = n+1$, la anterior relación es usada para avanzar en el campo de la saturación hasta el paso de tiempo $t = n+1$.

La secuencia para realizar entonces la determinación del campo de saturaciones sería:

A partir del campo de flujo total, hallado en la parte anterior para el paso de tiempo $t = n+1$, encontrar la porción no mojanete del campo de flujo. Para ello se utiliza las relaciones descritas en el tercer capítulo.

Con este valor, y las propiedades necesarias, tomadas todas igualmente del paso de tiempo anterior, se calcula el valor de S_w^{n+1} a través de la ecuación (5.21), por simple sustitución de valores (de forma explícita).

Teniendo este valor se obtiene la porción no mojanete de la saturación, a través de

$$S_n^{n+1} = 1 - S_w^{n+1}$$

TERCER PASO: cálculo del campo de presiones a partir del campo de flujo calculado previamente. Aún cuando no se llegó a incluir en el código el cálculo de la presión, en este capítulo se presenta su correspondiente algoritmo de solución, así como su ubicación dentro de la secuencia general.

La ecuación que se utilizará para tener el sistema de ecuaciones es:

$$-\lambda_t \vec{K} \nabla P = U_t + \lambda_n \vec{K} \nabla P_c + (\lambda_n \rho_n + \lambda_w \rho_w) \vec{K} g \nabla Z \quad (5.22)$$

Se evaluará el término del gradiente de presión en las interfaces internas del yacimiento, y de esta forma se eliminan los problemas de las condiciones de borde, lo que quiere decir que las ecuaciones serán planteadas solo para las interfaces desde 3/2 hasta m- 1/2.

Llamando a $T = \lambda_n \vec{K} \nabla P_c + (\lambda_n \rho_n + \lambda_w \rho_w) \vec{K} g \nabla Z$ la ecuación queda:

$$-\lambda_t \vec{K} \nabla p = U_t + T \quad (5.23)$$

Para el caso de una sola dimensión:

$$\left(-\lambda_t k_x \frac{\partial p}{\partial x} \right) \Big|_{i+1/2} = U \Big|_{i+1/2} + T \Big|_{i+1/2} \quad (5.24)$$

$$-\lambda_t \Big|_{i+1/2} k_x \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta x} = U(x_{i+1/2}) + T(x_{i+1/2}) \quad (5.25)$$

Para el caso de las propiedades, como se conoce es el valor en los centros de bloque, y no en las caras, para obtener esto último se utilizan promedios:

$$\lambda_t \Big|_{i+1/2} = \frac{\lambda(x_i) + \lambda(x_{i+1})}{2} \quad (5.26)$$

Si llamamos a todo el término de la derecha $U \Big|_{i+1/2} + T \Big|_{i+1/2} = b_{i+1/2}$, variando $i=1, \dots, m-1$; y aproximando la derivada a través de diferencias finitas, se generaría el sistema de ecuaciones de la siguiente manera:

$$\lambda_{3/2} k_x \frac{(p_2 - p_1)}{\Delta x} = b_{3/2} \quad (5.27)$$

$$p_2 - p_1 = \frac{\Delta x}{\lambda_{3/2} k} b_{3/2} = \tilde{b}_{3/2}$$

$$p_3 - p_2 = \frac{\Delta x}{\lambda_{5/2} k_x} b_{5/2} = \tilde{b}_{5/2}$$

$$p_M - p_{M-1} = \frac{\Delta x}{\lambda_{M-1/2} k_x} b_{M-1/2} = \tilde{b}_{M-1/2}$$

O escrito en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ p_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{3/2} \\ \tilde{b}_{5/2} \\ \cdot \\ \tilde{b}_{M-1/2} \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

$$Bp = \tilde{b}$$

Lo que da como resultado un sistema de m variables y m-1 ecuaciones (la matriz b es de (m-1)*m). No se puede usar el procedimiento de inversión matricial para resolver el problema, porque la matriz no es cuadrada. Así que se tiene que buscar una forma alternativa: esta puede venir de la utilización de la transpuesta para generar un sistema auxiliar que permita resolver el original. Para ello se buscará cual de las matrices originadas de la multiplicación de b y su transpuesta es la más conveniente.

Si se piensa en un cambio de variable de la forma $p = B^t R$, donde R debe ser un vector de dimensión m-1 para poder efectuar la multiplicación, la opción que se necesita es la de $B \bullet B^t$, la cual da una matriz cuadrada de determinante diferente de cero, por lo cual se puede utilizar para resolver el sistema.

El sistema auxiliar a resolver sería entonces: $B \bullet B^t R = \tilde{b}$.

Para resolver este sistema se usará el algoritmo de Thomas, el cual sirve para matrices tridiagonales. Una vez que se resuelva el sistema para obtener R, se efectúa la multiplicación $B^t R$ y de esta forma se tienen todos los valores de presión.

Resumiendo todo lo antes explicado, la secuencia para realizar entonces la determinación del campo de presiones sería:

1. Cálculo del término independiente del sistema de ecuaciones, es decir, hallar el valor de \tilde{b} .
2. Formar la matriz B (matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones original), y su transpuesta, para así obtener la matriz de coeficientes del sistema auxiliar.
3. Hallar la solución del sistema de ecuaciones auxiliar ($B \bullet B^t R = \tilde{b}$), por medio de la utilización del algoritmo de Thomas, que es indicado para este caso por tenerse una matriz tridiagonal.
4. Devolver el cambio de variable planteado ($p = B^t R$), para así obtener los valores del campo de presión a partir de los valores obtenidos de R en el paso anterior.

CUARTO PASO: actualización de las propiedades del yacimiento que varían con el tiempo.

Con el valor obtenido del campo de saturaciones en el nuevo paso de tiempo, a través de datos empíricos, se actualizan los valores de permeabilidad relativa y presión capilar, así como las fracciones de la tasa de flujo para cada fase.

Para el caso de la viscosidad, en este algoritmo previo se considera constante. Más adelante se considerará su dependencia de la presión, lo que la hará variar en el tiempo, pero aún así no será actualizado su valor para cada paso de tiempo, sino cuando la presión halla variado en una gran cantidad, porque si bien la viscosidad no

es en realidad constante, su variación es muy pequeña, y no hace falta calcular un nuevo valor para cada paso de tiempo.

Se repiten desde el primer hasta el cuarto paso, hasta que se hallan obtenido todos los valores para el período de tiempo requerido en el estudio. Esto se logra haciendo variar a n (índice del paso de tiempo) desde cero hasta N (período total de estudio).

5-3) CONTROL DEL PASO DE TIEMPO:

Existen varios casos en los cuales durante la simulación el paso de tiempo ha de ser modificado. Estos casos son los siguientes:

1. Si la precisión de los resultados no es la deseada el paso de tiempo debe reducirse. Es decir, si el cambio de saturación entre pasos de tiempo es mayor al 5% ó si el cambio de presión entre pasos de tiempo es mayor a 100 psi, se reducirá el paso de tiempo a la mitad.
2. Si los cambios en las variables están dentro del rango permitido, se puede pensar en aumentar el paso de tiempo, para buscar que la simulación sea más rápida. Esto se hace aumentando en un 25% el Δt que se tenga en el momento.
3. El paso de tiempo modificado por los casos 1 y 2 se mantendrá hasta que no surja otra modificación. Siempre se tendrá un paso de tiempo variable. Esto hace que no se sepa de antemano cuantos pasos de tiempo se necesitarán para cumplir con el tiempo que se ha fijado para el estudio, así que no se hará una simulación contando cuantos pasos se tendrán sino cuando se cumpla la condición de que se ha llegado a la cantidad de tiempo definida para hacer el estudio.

5-4) BOSQUEJO DEL ALGORITMO GENERAL PROPUESTO POR KUHN:

PASO UNICO:

4. Se introduce toda la data acerca de las propiedades del fluido y del medio poroso (tablas y/o gráficos). Así como los valores constantes: porosidades y densidades de ambas fases.
5. Se calcula la porción de tasa de flujo perteneciente a cada una de las fases.
6. Se inicializan los valores de flujo y saturación para todo el yacimiento.
7. Se considera que $\alpha^0 = 1$.
8. Se toman unos valores tentativos de Δx , Δy , Δz , Δt los cuales luego serán tomados como definitivos a través de la práctica.

PRIMER PASO: determinación del campo de flujo, utilizando un procedimiento iterativo, que converge cuando $\alpha^{n+1} = 1 \pm \text{tolerancia}$

1. $i=1$

2. $\{\hat{u}_t^{n+1}\}_i = \hat{u}_t^n$ de aquí se obtiene el valor de $\{\hat{u}_t^{n+1}\}_i$

3. $\left\{\frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t}\right\}_i = \frac{-\nabla \cdot \{\hat{u}_t^{n+1}\}_i - q_t^{n+1}}{\phi}$ de aquí se obtiene $\left\{\frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t}\right\}_i$

4. $\{\alpha^{n+1}\}_i = \alpha^n + \left\{\frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t}\right\}_i \Delta t$ de aquí se obtiene $\{\alpha^{n+1}\}_i$

5. Si $\{\alpha^{n+1}\}_i \neq 1 \pm \text{tolerancia}$

$$\Delta \alpha = 1 - \{\alpha^{n+1}\}_i$$

$$C = \frac{\phi \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}}{\left(\frac{\lambda_{tx} + \lambda_{tx+\Delta x}}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{\lambda_{ty} + \lambda_{ty+\Delta y}}{\Delta y^2} \right) + \left(\frac{\lambda_{tz} + \lambda_{tz+\Delta z}}{\Delta z^2} \right)}$$

Determinar u_x^e, v_y^e, w_z^e y $u_{x+\Delta x}^e, v_{y+\Delta y}^e, w_{z+\Delta z}^e$

$$i = i+1$$

$$\{\hat{u}_t^{n+1}\}_i = \{\hat{u}_t^{n+1}\}_{i-1} + \hat{u}^e$$

$$\left\{ \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} \right\}_i = \frac{-\nabla \cdot \{\hat{u}_t^{n+1}\}_i - q_t^{n+1}}{\phi}$$

$$\{\alpha^{n+1}\}_i = \alpha^n + \left\{ \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} \right\}_i \Delta t$$

con $\{\alpha^{n+1}\}_i$ volver al paso 5

6.- Al salir del lazo se tienen los siguientes valores:

$$\hat{u}_t^{n+1}, \left\{ \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} \right\}, \alpha^{n+1}, \nabla \cdot \hat{u}_t^{n+1} \text{ para cada bloque de la malla.}$$

SEGUNDO PASO: determinación del campo de saturaciones (procedimiento explícito)

$$1.- \hat{u}_n^{n+1} = \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_t} \right)_u \hat{u}_t^{n+1} - (C_{cg}^n)_u \frac{k_{nr}^n}{\mu_n}$$

$$2.- f_n^n = \frac{\mu_n}{\frac{k_{nr}^n}{\mu_n} + \frac{k_{wr}^n}{\mu_w}}$$

$$3.- \text{Determinar } \frac{df_n^n}{dS_w}$$

4.- Resolver la ecuación que sigue, para obtener S_w^{n+1}

$$S_w^{n+1} = \frac{S_w^n + \frac{\Delta t \left(\nabla \cdot \hat{u}_n^{n+1} + q_t^{n+1} f_n^n - q_t^{n+1} \frac{df_n^n}{dS_w} S_w^n + \phi \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} \right)}{\phi \alpha^{n+1}}}{1 + \frac{\Delta t \left(\phi \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} - q_t^{n+1} \frac{df_n^n}{dS_w} \right)}{\phi \alpha^{n+1}}}$$

$$5.- S_n^{n+1} = 1 - S_w^{n+1}$$

TERCER PASO:

Con los valores obtenidos para el flujo en el primer paso, se define el campo de presiones cuando sea necesario (en los pasos de tiempo definidos previamente por el usuario).

CUARTO PASO:

Con el valor del campo de saturaciones se actualizan los valores de todas las propiedades del flujo y del medio poroso.

Se repiten el primer, segundo, tercer y cuarto paso, haciendo variar n (índice del paso de tiempo) desde cero hasta n (número de años).

Es recomendable escribir todos los algoritmos en el estándar Fortran, para permitir la portabilidad de estos a cualquier ambiente computacional ⁽⁹⁾.

5-5) CONSIDERACIONES ESPECIFICAS SOBRE EL MANEJO DE VARIABLES Y DATOS

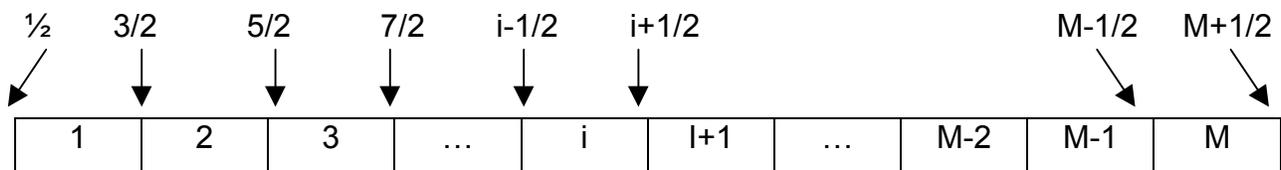
Para el correspondiente desarrollo del simulador de yacimientos, se considerará el yacimiento de forma rectangular (un paralelepípedo para ser más exactos, pues se trata de un sistema tridimensional), dividido en bloques o celdas. En cada una de estas celdas se harán los cálculos necesarios para determinar el campo de flujo, de saturaciones y el de presiones (este último cuando sea necesario), es decir, habrá

dentro del yacimiento tantos valores de saturación y presión como celdas halla en el yacimiento, mientras que de flujo habrá un valor más en la dirección en la cual este se esté evaluando (si por ejemplo se esta calculando U_x se tendrá un valor más del mismo en la dirección x).

Por lo tanto, para el manejo de cada propiedad del fluido o del yacimiento, se utilizarán matrices tridimensionales, donde cada elemento de ellas representa la propiedad en un punto dado del yacimiento.

Para la evaluación de cada una de las propiedades se procede de manera diferente, unas son evaluadas en el centro de cada bloque, y otras en las paredes o interfaces. El flujo es evaluado en las paredes de los bloques, pues lo que interesa conocer es como es el movimiento del fluido de un bloque a otro, como es el traspaso de material entre los bloques, saber la magnitud y el sentido. Para el caso de las demás propiedades (presión, saturación, porosidad, permeabilidades, etc.) son tomadas en el centro del bloque, pues se está haciendo la aproximación de que el centro del bloque resume toda la información del bloque completo.

Esta diferencia en donde serán tomados y evaluados los diferentes valores, hace que se manejen matrices de diferentes dimensiones, pues las que son evaluadas en las paredes o divisiones tendrán una dimensión mayor que las otras. Usando el caso unidimensional para ilustrar lo anteriormente mencionado, resulta:



Donde el flujo entonces es evaluado en $i+\frac{1}{2}$, y las demás propiedades son tomadas es los puntos i , siendo $i = 1, 2, 3, \dots, M-2, M-1, M$.

En $\frac{1}{2}$ y $M + \frac{1}{2}$ el flujo es cero para todo momento, pues la condición de borde usada es esta. Esto hace que se pueda tomar también el término transmisibilidad igual a cero en las fronteras de la región a estudiar ⁽⁴⁾.

Para desarrollar las ecuaciones diferenciales en diferencias finitas, se toman estas a veces en el centro de los bloques y a veces en las interfases, convenientemente para evitar tomar algunos valores que no se conocen (ejemplo de esto es la presión o propiedades fuera del yacimiento) y así poder limitar los cálculos únicamente a lo que ocurre dentro del yacimiento. Pero siempre buscando usar diferencias centradas, pues como se vio en el Capítulo 3, estas suelen ser más precisas.

Por lo tanto, para el caso de las propiedades en el centro, se evaluarán las derivadas en las caras internas del yacimiento, tomando para ello los valores de los bloques que comparten esa cara, y para las propiedades en las interfases se evaluarán las derivadas en el centro de los bloques, utilizando los valores de las caras de dicho bloque.

Debido a que ciertas variables son evaluadas en las interfaces, cuando deban ser calculadas será necesario que algunas propiedades del flujo y del yacimiento sean evaluadas en las interfaces, lo que requiere que sean planteadas algunas relaciones, ya que deben obtenerse los valores en esos puntos partiendo de los valores que ya se tienen en el centro de los bloques. La relación a utilizar es tomar los promedios de los valores en los centros de los bloques adyacentes para definir el valor de la interface que estos comparten.

CAPÍTULO 6. MODELO COMPUTACIONAL.

El objetivo del programa es el de obtener el campo de Flujo y de Saturaciones para cada paso de tiempo, dentro del período requerido por el usuario.

La secuencia general es la siguiente: se introduce toda la data necesaria para el estudio, de forma tabular, con lo cual se hace primero el cálculo de campo de flujo, de forma iterativa. Una vez definido el flujo para un paso de tiempo, se determina el campo de saturaciones, valores que serán usados para actualizar las propiedades del medio poroso, para luego pasar al siguiente paso de tiempo.

De forma detallada el programa se presenta a continuación.

6-1)PROGRAMA PRINCIPAL.

El programa principal maneja la secuencia de llamadas al los subprogramas o subrutinas, para que estas efectúen los procedimientos necesarios para llevar a cabo la simulación.

Para ahorrar espacio en memoria, utilizando únicamente el estrictamente necesario, se utiliza una sentencia de dimensionamiento dinámico para las matrices y vectores, denominada "Allocatable" y su complemento "Allocate" (esta sentencia permite dimensionar las variables que son arreglos, después de que se halla establecido que dimensión tendrán para cada esa corrida del programa en particular). Para efectuar esto, se hace la lectura, a través del archivo externo llamado "discretización", de los valores correspondientes al número de bloques en el yacimiento, para cada dirección coordenada, así como las dimensiones de las tablas

que contienen algunas propiedades, para así poder dimensionar las matrices y vectores, y disponer del espacio en memoria para ellos. Al final del programa, se hará una liberación de memoria a través de la sentencia "Deallocate".

Una vez que se tiene la dimensión de los arreglos con los que se trabajará, se procede a llamar a la subrutina "DATOS", con la cual se inicializarán dichos arreglos.

Al iniciar el programa, la variable n (tiempo que se ha recorrido) se iguala a cero, luego se entra en el lazo que controla el avance en los pasos de tiempo, a través de la variable n. Dentro del lazo se encuentra el cuerpo del programa, es decir, las subrutinas que efectúan los cálculos.

El hecho de tener un paso de tiempo variable, hace que no se sepa cuantos pasos de tiempo se necesitarán para cumplir con el tiempo a estudiar, lo que se traduce en que no pueda tenerse un lazo Do, sino que se necesite un condicional. Se tendrán dos lazos, uno (el más externo) controlará los pasos de tiempo, y el otro (el interno) servirá para hacer las repeticiones cuando sea necesario modificar el paso de tiempo.

El lazo externo comienza con le llamado a la subrutina "INICIALIZACION", es decir, esta es la primera sentencia a ejecutar cuando se inicia un paso de tiempo. Esta rutina se encarga de almacenar en variables auxiliares, los valores calculados en el paso de tiempo anterior que sean necesarios para los cálculos del paso de tiempo actual, de modo tal de no perderlos.

La primera sentencia del lazo interno es la inicialización en cero de la variable "ind", la cual se usa para saber cuando ha sido reducido el paso de tiempo por control de saturación.

Para no perder el valor que se tiene del Δt usado para los cálculos del paso de tiempo actual, se utiliza una variable auxiliar llamada "h", la cual se inicializa cada vez que se comience con los cálculos (sea un paso de tiempo nuevo ó alguna repetición)

con el valor de Δt . Esto es con la finalidad de que si dentro del paso de tiempo que se estudie se verifica que puede aumentarse el tamaño del paso de tiempo en un 25% para el próximo paso de tiempo, no se pierde el Δt que se usó para los cálculos, de modo tal que se sepa cuanto se avanzó al incrementar la variable “n”.

La sentencia que le sigue es la de llamado a la Subrutina “FLUJO”, que se encargará de determinar el campo de flujo. Esta rutina tiene una variable que controla el número de iteraciones que se hacen, llamada “salida”, la cual al alcanzar el valor máximo de iteraciones predefinido, hará que la rutina termine, aún si no se ha alcanzado la convergencia. Al salir de esta rutina, se hace la verificación, y si se alcanzó el número máximo de iteraciones, el programa irá al END y se terminará la simulación, arrojando un mensaje por pantalla para que el usuario sepa que ocurrió.

De no presentarse el problema descrito anteriormente, una vez que se tengan las variables de salida de la rutina “FLUJO”, se hace el llamado a la Subrutina “SATURACION”, la cual efectuará los cálculos correspondientes al campo de saturaciones. Con los valores de Saturación actualizados, se llama a la Subrutina “VERIFICACION”, la cual revisará si el cambio de saturación entre un paso de tiempo esta dentro de los valores previamente determinados, a fin de saber si hará falta la reducción del paso de tiempo para mantener la precisión de los resultados. Esta subrutina arroja una variable de salida llamada “ind”, que de ser diferente de cero hará que el condicional donde se evalúa arroje un resultado de verdadero, que hará que se repitan los cálculos de flujo y saturación, con un paso de tiempo que es la mitad del anterior. Cada vez que este lazo del “IF-GOTO” se repita, se inicializará la variable “ind” igual a cero, para poder hacer la verificación de nuevo. Este procedimiento se repetirá hasta que “ind” permanezca igual a cero, es decir, el cambio de saturación este dentro de lo permitido. Cada vez que se repita, el paso de tiempo será reducido a la mitad del anterior.

Si durante la reducción del paso de tiempo, se llega al valor mínimo predeterminado por el usuario, del tamaño del paso de tiempo, ($t < \text{mínimo}$), entonces el programa se situará en el END y se terminará la simulación.

Si la respuesta al condicional es falsa, se hace el llamado a la Subrutina, "ACTUALIZAR", en la cual, con los valores de saturación ya encontrados, se actualizan los valores de las propiedades que dependen de esta.

Cuando ya se tengan todos los valores definitivos de las variables para el paso de tiempo en estudio, se hace el llamado a la subrutina "ESCRITURA", la cual se encarga de escribir en los archivos de salida los valores de Flujo y Saturación correspondientes al paso de tiempo.

Se incrementa la variable "n" sumándole el valor de Δt (h) utilizado para los cálculos del paso de tiempo que finaliza, y se verifica a través de un condicional, antes de pasar al siguiente paso de tiempo, si los valores de saturación se encuentran dentro del rango esperado. Esto se hace a través de una variable llamada "ban", la cual toma el valor de cero cuando los valores están dentro del rango, y el valor de uno cuando se han salido de él. Esta variable "ban" es pasada a través de las rutinas "SATURACION" y "ACTUALIZAR". Por lo tanto, si $\text{ban}=0$, el programa se dirigirá al final del mismo (END), y se parará la simulación.

Si el programa no presentó ningún problema y no tuvo que ser detenida su ejecución, entonces se prosigue a la última sentencia la cual verifica si se alcanzó el tiempo definido de estudio, si la variable "n" es mayor o menor que el valor No (número total de días). Si resulta que es menor, entonces se regresará a la primera sentencia del lazo externo (el llamado a "INICIALIZACION") con lo cual se prosigue con el nuevo paso de tiempo repitiendo de nuevo todo el procedimiento descrito.

Antes de finalizar por completo el programa, se hará la limpieza en memoria, liberando todo el espacio ocupado por los arreglos utilizados durante la ejecución del programa, a través de la sentencia "Deallocate".

Cada una de las rutinas mencionadas, encierra una serie de subrutinas y funciones, las cuales serán explicadas junto con la explicación detallada de las rutinas principales.

6-2) SUBROUTINA DATOS.

Introduce todos los datos necesarios para la realización de los cálculos de las demás rutinas del programa principal.

Una vez que se han dimensionado las matrices, se procede a la introducción de los valores iniciales de las variables de flujo en cada una de las direcciones (U, V, W), saturación mojante y presión, así como los valores de las demás propiedades del yacimiento.

Esta rutina se divide a su vez en otras adicionales que permiten hacer la introducción de los diferentes tipos de datos.

La primera parte de esta rutina, lee por medio de archivos los valores de: número de pasos de tiempo, dimensiones de los bloques en cada dirección, tamaño del paso de tiempo, aceleración de gravedad, así como los diferentes valores de tolerancia usados para controlar la variación de las variables que se calculan.

El segundo paso es el llamado a la Subrutina "Llena_matriz", la cual se encarga del llenado de las matrices que almacenarán las variables (flujo, saturación y presión) y las propiedades que serán tomadas como constantes en el tiempo.

Con los valores iniciales de saturación y presión, se pasa al llamado de la Subrutina “Propiedades_interpoladas”, en la cual se llenarán las matrices que manejan los valores de las propiedades que dependen de la saturación y la presión.

Luego de esto se inicializan los valores de: compresibilidad artificial (alfa) igual a uno, pues se está haciendo la suposición de que el valor inicial para alfa es uno; y los valores de flujo no mojante en las tres direcciones igual a cero.

Con los valores leídos de la saturación mojante, se procede a obtener la información de la saturación de la fase no mojante, partiendo de que la suma de ambos es igual a 1.

Teniendo ya el valor de todas las propiedades, se calcula los términos “titaN” y “titaW” los cuales se obtiene dividiendo la permeabilidad relativa de cada fase (no mojante y mojante) entre la viscosidad de dicha fase. Este término facilitará el cálculo de la transmisibilidad cuando sea necesaria. Estos cálculos se realizan para todo el yacimiento.

Como se sabe, el término de tasa de pozos tiene dos componentes, es decir para obtener q_t (tasa total) se deben sumar los correspondientes valores de q_n y q_w , que son las fracciones no mojante y mojante respectivamente. Esto se hace de la siguiente forma: si se tiene una tasa de inyección, automáticamente esta será igual a la componente mojante, pues se considera que siempre se está inyectando agua, por lo tanto aquí $q_w = q_t$ y $q_n = 0$. Si la tasa es de extracción, entonces estarán presente las dos fracciones, pues puede estar extrayéndose agua junto con el petróleo. En este caso, para conocer las fracciones correspondientes se utiliza la ecuación (5.19) del Capítulo 5.

Los otros términos a calcular dentro de esta rutina, son las derivadas de la cota del yacimiento en las tres direcciones, igualmente para todo el yacimiento. Este cálculo se efectúa con la ayuda de la función “Derivada”, la cual obtiene la derivada en las

interfaces a través de aproximación por diferencias finitas centradas, utilizando los valores que se tienen en los centros de los bloques.

SUBROUTINA “Llena_matriz”

Esta subrutina abre todos los archivos que contienen las propiedades del yacimiento e introduce estos valores en respectivas matrices de datos: flujo en las tres direcciones (U, V, W), tasa de pozos (q_i), permeabilidad (K_x , K_y , K_z), cota del yacimiento (Z_o), densidad de cada fase ($Dens_N$, $Dens_W$), presión de la fase mojante (P_w), saturación de la fase mojante (S_w) y porosidad (poros). Todo se hace a través de la lectura de archivos.

Esta rutina, al leer el valor de tasa de pozos proporcionado por el usuario en unidades de campo, procede a hacer la conversión a las unidades en las cuales trabajan las ecuaciones, para que sea almacenada de esta forma, y permita la consistencia de las ecuaciones en las cuales será utilizada.

SUBROUTINA “Propiedades_interpoladas”

Esta subrutina interpola los valores de la presión capilar y la permeabilidad relativa en función de la saturación; y la viscosidad en función de la presión.

A través de la lectura de archivos, se hace el llenado de vectores que manejarán los valores de las tablas que se usan para la interpolación de las propiedades antes mencionadas.

Teniendo los valores de las tablas de interpolación, y con los valores de saturación y de presión, se llama a la Subrutina “Tabseq”, la cual toma el valor de saturación ó presión, y efectúa la interpolación en la tabla para encontrar el correspondiente valor de presión capilar, permeabilidad relativa ó viscosidad. Esto se efectúa para cada bloque del yacimiento.

Dentro de la rutina "Tabseq" se hace la verificación de si los valores de presión o saturación se encuentran dentro del rango esperado, y de ocurrir lo contrario, la variable "ban" tomará el valor de uno, y ocurrirá lo explicado en la sección de programa principal.

6-3) SUBROUTINA INICIALIZACION.

Se encarga de almacenar los valores de flujo, saturación y alfa obtenidos en el paso de tiempo anterior, en variables auxiliares para poder utilizarlos donde sea necesario para calcular los valores del paso de tiempo actual, para que cada vez que se pase a un nuevo paso de tiempo no se pierda la información de dichas variables en el paso de tiempo anterior.

En esta rutina también se inicializan algunas variables matriciales (transmisibilidades totales y flujo no mojante en cada una de las direcciones) a las cuales se les quiere evitar la acumulación de "basura" entre un paso de tiempo y otro.

6-4) SUBROUTINA FLUJO.

Esta subrutina sirve para calcular el campo de flujo simultáneamente con la compresibilidad artificial a través de un procedimiento iterativo.

El proceso iterativo se divide en dos, una sección aparte calcula la primera iteración, por tener algunas consideraciones diferentes al resto de las iteraciones, y a partir de la segunda iteración, el proceso se realiza dentro de un mismo lazo de repetición.

Luego se procede al llamado de la Subrutina "calculoalfa", para obtener el valor de alfa para la primera iteración, utilizando para ello el flujo en el paso de tiempo anterior.

Luego se inicializan las variables que servirán de contadores dentro de la rutina, como lo son “salida”, que sirve para contar el número de iteraciones, y “cont”, que sirve para indicar si hace falta seguir iterando.

Se procede entonces a calcular el valor de transmisibilidad en x, y, z en las interfaces, para todo el yacimiento, utilizando el promedio de los valores que se tienen en los centros de los bloques adyacentes a cada interface. Este cálculo no hace falta incluirlo en el lazo de iteraciones, pues no varía dentro de un paso de tiempo.

Teniendo los valores de transmisibilidad definidos, se pasa al lazo donde se harán las iteraciones siguientes antes de esto, se debe verificar si se está o no en el primer paso de tiempo, para saber que valor de tolerancia se usará. Luego se comienza el lazo con un condicional “IF” que verifica si el contador “cont” es diferente de cero, si esto es cierto entonces se entra al lazo a efectuar las operaciones. Para cada paso de tiempo, este lazo se hace mínimo una vez, pues antes de entrar, cont=1, por lo tanto entra al lazo.

Una vez que ingrese, se empiezan a hacer los cálculos de flujo para todo el yacimiento, separadamente para cada dirección, pues las matrices a manejar son de dimensiones diferentes, dependiendo si se evalúa el flujo para x, y ó z. Pero dentro de cada lazo el procedimiento es el mismo: se calcula el valor de $\Delta\alpha$ ($\alpha_{i+1} - \alpha_i$), el cual es la diferencia entre el alfa de la iteración actual y la anterior. Para el caso de la primera iteración en cada paso de tiempo, $\alpha_i = \alpha^n$ (el alfa en el paso de tiempo anterior, que en el caso de que sea el primer paso de tiempo, sería el valor inicial). Con el valor de $\Delta\alpha$, se obtiene el término “C” que proviene de la discretización de las ecuaciones de flujo; como se vio en el Capítulo 5 (ecuación 5.14); y es usado para obtener las perturbaciones de flujo, que como se vio dicho capítulo, pueden calcularse por la derecha y por la izquierda de la interface, dependiendo de a que celda pertenezca el valor de “C” utilizado, por lo tanto para obtener el valor de perturbaciones definitivas se toma un promedio entre ambos valores. Luego se aplica la ecuación de que el flujo en

una iteración es igual al flujo en la iteración anterior, más la perturbación sufrida en esa iteración.

Después de hacer estos cálculos para todo el yacimiento, y para todas las dimensiones, se llama de nuevo a la Subrutina “calculoalfa” y se obtiene el nuevo valor de alfa, para hacer la verificación, a través de un condicional “IF”, de sí aún no se alcanzó la convergencia, lo que haría que “cont” fuera diferente de cero.

Por medio de la variable salida, se verifica si se ha llegado al máximo de iteraciones establecidas, de ser cierto, se produce la salida del lazo, aún cuando no se halla alcanzado la convergencia, y con el valor de la variable “salida” se le indica al programa principal que debe detener la simulación. Si es falso, se regresa al inicio del lazo, y se pregunta si se no se alcanzó la convergencia (“cont” es diferente de cero). Si resulta verdadero, se ingresa nuevamente al lazo y se repiten las operaciones antes descritas, hasta que la condición evaluada sea falsa, y haga que el programa se posicione después del lazo, y de esta forma se da fin a la rutina.

SUBRUTINA “calculoalfa”.

Esta rutina efectúa el cálculo de la compresibilidad artificial, utilizando para ello la combinación de las ecuaciones (5.2) y (5.4), haciendo un llamado a la Función “divergencia” para calcular la divergencia del vector flujo, a través de aproximaciones de diferencias finitas centradas.

6-5) SUBRUTINA SATURACION

Esta subrutina calcula el campo de saturaciones a partir del flujo calculado anteriormente en este mismo paso de tiempo.

El primer paso que efectúa esta rutina es definir las derivadas de la presión capilar, utilizando para ello la Función “Derivada” explicada en la sección 5.2. Luego se procede al cálculo de las transmisibilidades de cada fase en las caras de las celdas, a

través de los promedios de los valores de las propiedades en los centros de celdas adyacentes. Esto es con la finalidad de determinar el flujo de la fase no mojante, en las tres direcciones coordenadas, a través de la Función “no_mojante”, la cual realiza el cálculo usando la ecuación (4.7) y partiendo del flujo total hallado en la rutina anterior.

Teniendo ya definido el flujo no mojante para ese paso de tiempo, se usa la ecuación (5.21) para hallar la saturación de la fase mojante, y con esta la saturación de la fase no mojante.

6-6) SUBROUTINA VERIFICACION.

Verifica si el cambio de saturación entre un paso de tiempo y el siguiente es mayor al valor permitido, para saber cuando debe modificarse el paso de tiempo y mantener así la exactitud deseada en la solución numérica del problema.

Se lleva a cabo de la siguiente forma: a través de un condicional, evaluado para todo el yacimiento, verifica si el cambio de saturación entre el paso de tiempo actual y el anterior, supera un valor predeterminado, almacenado en la variable “valor”. Si la condición resulta ser cierta para uno de los bloques, la bandera “ind” cambiará de cero a uno su valor, y luego pasará al siguiente bloque.

Al salir de este condicional, si alguno de los bloques no cumplió la condición establecida, entonces el tamaño del paso de tiempo será reducido a la mitad. Si la respuesta a el condicional resulta ser falsa para todos los bloques (es decir, que el cambio de saturación está dentro del rango permitido), entonces el tamaño del paso de tiempo es aumentado, por lo general en un 25% antes de ser usado en el siguiente paso de tiempo. Esto se hace en beneficio de agilizar la simulación.

Si al menos un bloque no cumple la condición fijada, “ind” tendrá un valor diferente de cero cuando salga de esta rutina y vuelva al programa principal, en donde como se dijo en la sección 5.1, se encuentra un condicional que hará que el programa

se regrese y repita las rutinas “FLUJO” y “SATURACION”, con la mitad del paso de tiempo, e inicializando de nuevo $ind=0$, para poder hacer de nuevo la verificación. Si todos los bloques cumplen con la condición, cuando se ejecute el condicional, y obtenga como respuesta “falso”, continuará a la rutina siguiente.

6-7) SUBROUTINA ACTUALIZAR.

Esta subrutina se encarga de actualizar los valores de presión capilar y permeabilidades relativas, los cuales al depender de la saturación, se ven afectados al variar este en cada paso de tiempo.

Para hacer esto se procede al llamado nuevamente de la Subrutina “Tabseq”, la cual efectúa la interpolación con el nuevo valor de saturación mojante, para encontrar el correspondiente nuevo valor de presión capilar y permeabilidad relativa de cada fase.

Una vez que se tienen estas propiedades actualizadas, se procede nuevamente al cálculo de los términos “titaN” y “titaW”, igual que como se hace en la Subrutina “Propiedades_interpoladas”, para luego actualizar los valores de las fracciones de las tasas totales de inyección y producción correspondientes a cada fase, con el uso de la ecuación (5.19).

6-8) SUBROUTINA ESCRITURA.

Se encarga de escribir en los archivos de salida, los valores de Flujo y Saturación correspondientes al paso de tiempo en estudio.

Esta es la última subrutina del programa, por lo tanto al salir de esta al programa principal, si ninguno de los valores de las variables se ha salido de rango, se pasará al siguiente paso de tiempo, incrementando en uno la variable “n” del lazo principal.

De no presentarse los inconvenientes mencionados a lo largo de la explicación de las rutinas, el programa seguirá hasta que la variable “n” alcance el valor “No”, el

cual es el número de pasos de tiempo que se requiere estudiar, de presentarse alguno de los problemas descritos, el programa se detendría, arrojando un mensaje por pantalla para que el usuario sepa que ocasionó la parada de la simulación, y pueda así analizar y tomar sus decisiones.

CAPITULO 7 - ANÁLISIS DE RESULTADOS

El programa desarrollado en este trabajo permite obtener el campo de saturaciones, partiendo del calculo del campo de flujo, sin necesidad de definir el campo de presiones.

Para estudiar su desempeño se realizaron un total de 6 pruebas utilizando como parámetro de comparación los resultados obtenidos en el BOAST.

Los motivos por los cuales se selecciono dicho simulador como referencia fueron:

- Potabilidad del código: Este programa puede ser ejecutado tanto en PC como en estaciones de trabajo.
- Conocimiento del código y manejo del mismo: Se tenía conocimiento acerca de las variables que maneja internamente el programa y la forma en como se realizan los cálculos.
- Se conocía data experimental con la cual este programa había sido probado.

Se tiene información de los resultados de la comparación previa efectuada en el estudio de simulación entre este programa y la ecuación de Buckley-Leverett (Ver Figura 7.1).

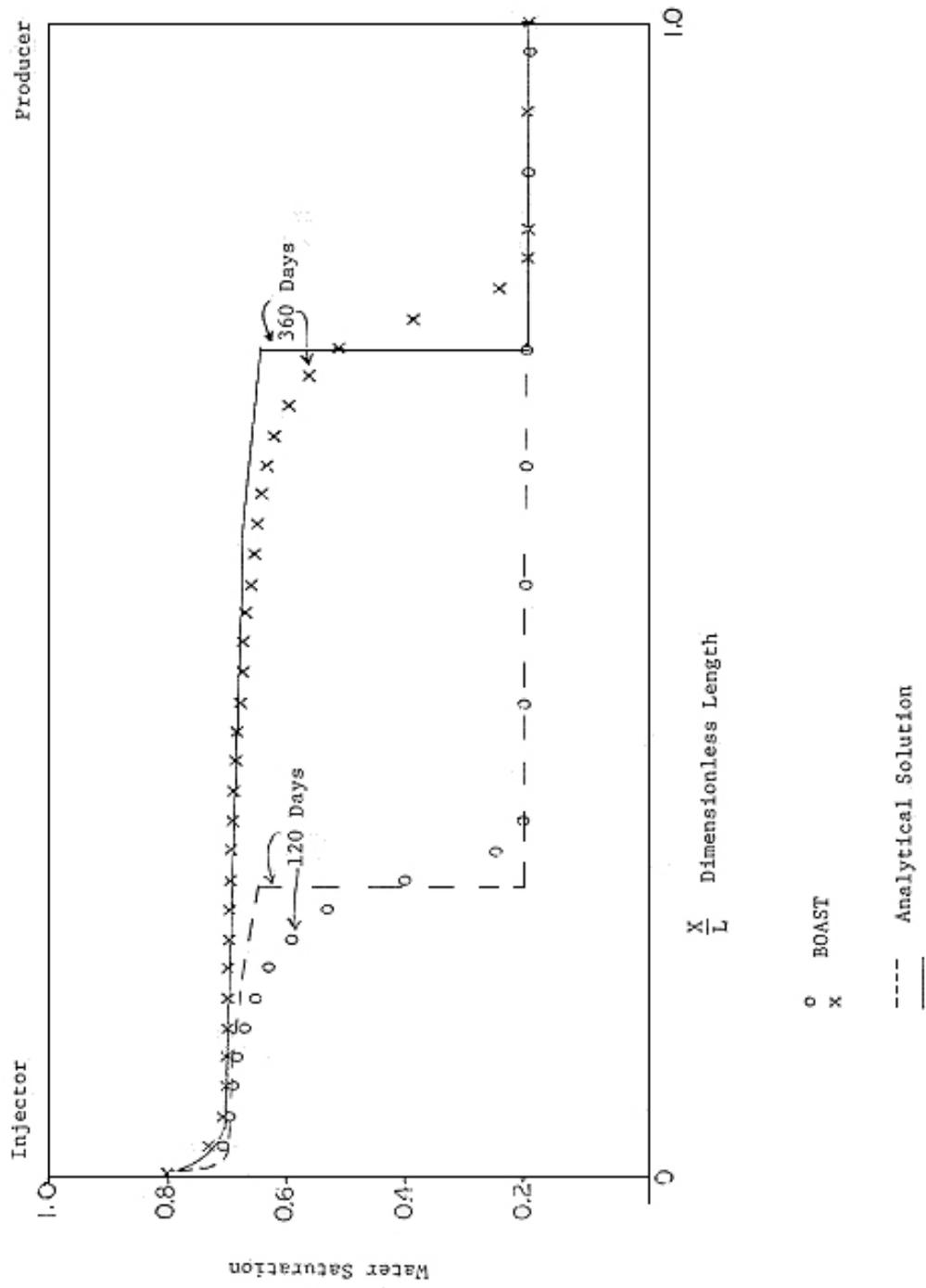


Figura 7.1 Simulación del BOAST del desplazamiento lineal Buckley-Leverett del frente de agua.

Las condiciones y propiedades que resultaron comunes a los 6 casos estudiados fueron las que se presentan a continuación:

Sistema unidimensional, donde los puntos tiene coordenadas de la forma

(i, 1,1), donde i toma los valores:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----

Propiedades constantes e iguales para todas las celdas del yacimiento	
Permeabilidad absoluta en la dirección X (milidarcys)	200
Permeabilidad absoluta en la dirección Y (milidarcys)	200
Permeabilidad absoluta en la dirección Z (milidarcys)	20
Densidad mojante (lb/pie ³)	62.238
Densidad no-mojante (lb/pie ³)	46.244
Cota del yacimiento (pie)	8325
Flujo inicial en la dirección X (pie/día)	0.0
Flujo inicial en la dirección Y(pie/día)	0.0
Flujo inicial en la dirección Z(pie/día)	0.0
Presión inicial (psi)	4806.6
Saturación mojante (adimensional)	0.2
Viscosidad mojante (cp)	1.0
Viscosidad no-mojante (cp)	2.0
Presión capilar (psi)	0.0

Tabla de interpolación permeabilidad relativa Vs saturación		
Saturación (adimensional)	Permeabilidad de la fase mojante (adimensional)	Permeabilidad de la fase no-mojante (adimensional)
-0.1	0.0	0.0
0.1	0.0	0.0
0.2	0.0	0.00147
0.3	0.0122	0.00228
0.4	0.0244	0.037
0.5	0.0336	0.0571
0.6	0.0672	0.134
0.7	0.1344	0.207
0.8	0.2688	0.604
0.9	0.4704	1.0
1.1	0.5	1.0

DIMENSIONES DEL YACIMIENTO	
Numero de bloques en la dirección X	15
Numero de bloques en la dirección Y	1
Numero de bloques en la dirección Z	1
DISCRETIZACIÓN DEL SISTEMA	
Tamaño de los bloques en X (deltaX), en pies (ft)	20
Tamaño de los bloques en Y (deltaY), en pies (ft)	1320
Tamaño de los bloques en Z (deltaZ), en pies (ft)	20
Tolerancia en el primer paso para la convergencia de compresibilidad artificial, adimensional	0.0001
Tolerancia en los pasos siguientes para la convergencia de compresibilidad artificial, adimensional	0.001

Los datos que no se mencionan en las tablas mostradas anteriormente, son aquellos que fueron tomados de forma particular en cada caso, para ver la influencia que cada uno de estos parámetros tenía sobre el desempeño del programa.

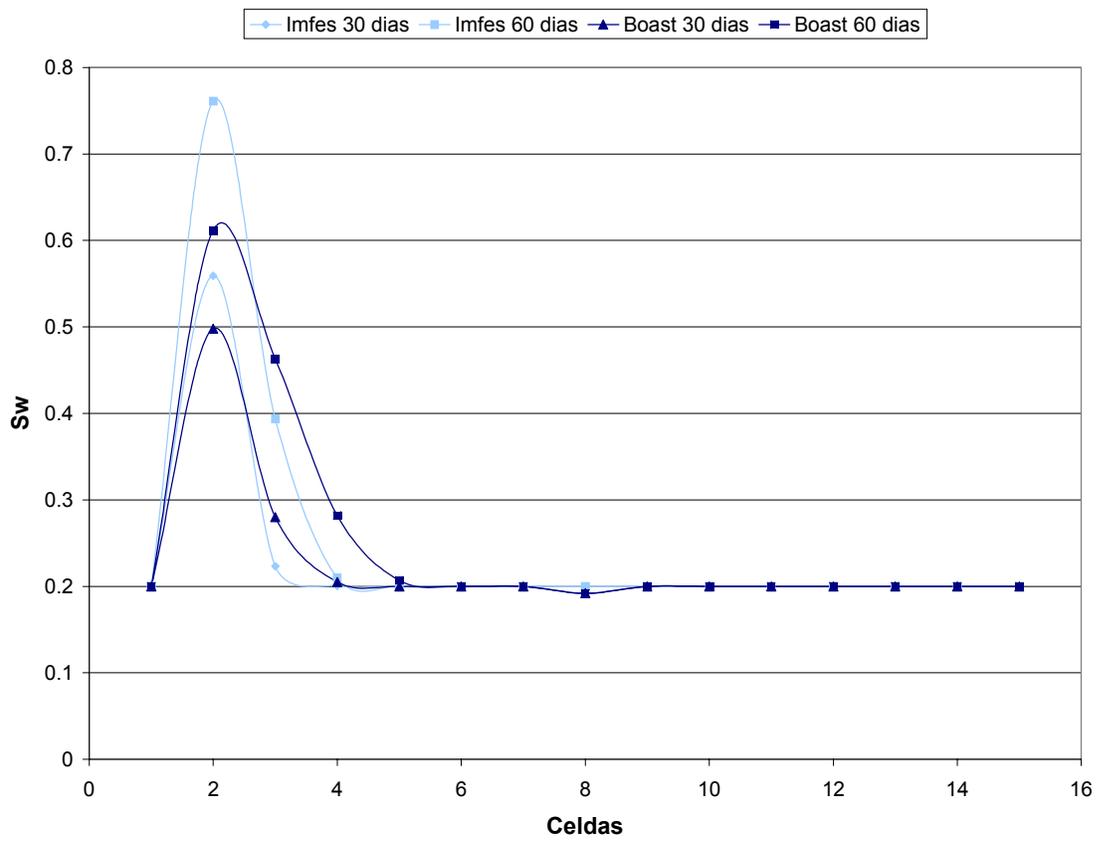


Figura 7.2 1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 60 días de simulación. Porosidad constante. Δt constante. Saturación de la fase mojante.

7-1)Caso 1 (ver figura 7.2)

Las condiciones a particulares son las siguientes:

- Porosidad constante para todo el yacimiento e igual a 0.25.
- Se tiene un pozo inyector ubicado en las coordenadas (2,1,1) y por convención de signos la tasa correspondiente a este pozo llevará un signo negativo (-300 bbl/día).
- Se tiene un pozo productor ubicado en las coordenadas (14,1,1) y por convención de signos este será positivo (300 bbl/día).
- El paso de tiempo se fija constante e igual a 1 día.
- El tiempo total a simular fue de 60 días.

Este ejemplo fue simulado también utilizando el BOAST, con la finalidad de comparar la dispersión numérica presentada por ambos métodos.

Es importante señalar que para este caso se tomo un Δt constante para poder garantizar que se estuviesen comparando los mismos puntos en el tiempo, ya que los mismo poseen diferentes condiciones internas para variar el paso de tiempo a través de la simulación, y puede que los intervalos de tiempo no coincidiesen.

Este ejemplo permitió hacer la comparación de la dispersión numérica presentada entre el método (IMPES) (utilizado por el simulador BOAST) y el método IMFES, simulando entre ambos las mismas condiciones.

Puede verse en Figura 7.2; que las curvas correspondientes al IMFES son menos suavizadas y más verticales que las correspondientes al BOAST, lo que permite estimar que el método IMFES tiene una dispersión numérica menor que el método IMPES usado en el BOAST.

El hecho de que la curva posea dicha forma permite pensar que el método IMFES arroja una buena aproximación, ya que, si se observa la gráfica de Buckley-Leverett (Figura 7.1) para un caso similar se espera que la curva presente un cambio brusco en el punto hasta donde ha llegado el frente de saturación de la fase mojanete para un tiempo determinado, es decir, que sea una línea vertical en este punto.

Adicionalmente, las discrepancias que se puedan encontrar entre ambas gráficas son debido a:

1. Forma de aproximar algunas propiedades:

El método IMFES tal como fue planteado en el presente trabajo, promedia las propiedades de bloques adyacentes para obtener el valor correspondiente en las interfaces. Mientras que en el BOAST las propiedades son aproximadas mediante una función llamada "*upstream*" la cual consiste en, sabiendo la dirección que tiene el flujo, tomar para cada punto de la interface que se tenga en el centro del bloque aguas arriba.

2. Método de resolución de las ecuaciones.

Como se explico anteriormente el método IMFES aprovecha la característica del flujo de experimentar variaciones más pequeñas a través de todo el dominio entre pasos de tiempos ⁽³⁾ mientras que el método utilizado por el BOAST (IMPES) calcula saturación a partir de cambios en la presión. La presión experimenta cambios más abruptos entre pasos de tiempo que el flujo, por lo tanto es de esperarse que una aproximación que se obtenga a partir de flujo tenga un comportamiento mas uniforme, acercándose mejor a la solución analítica que es el objetivo principal de una aproximación numérica.

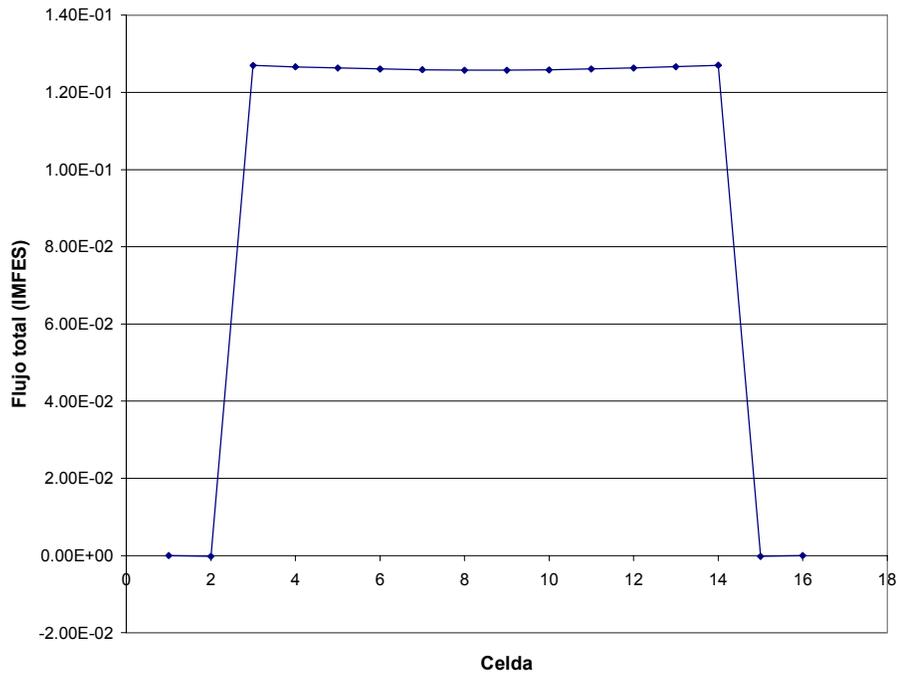


Figura 7.3 1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Flujo total.

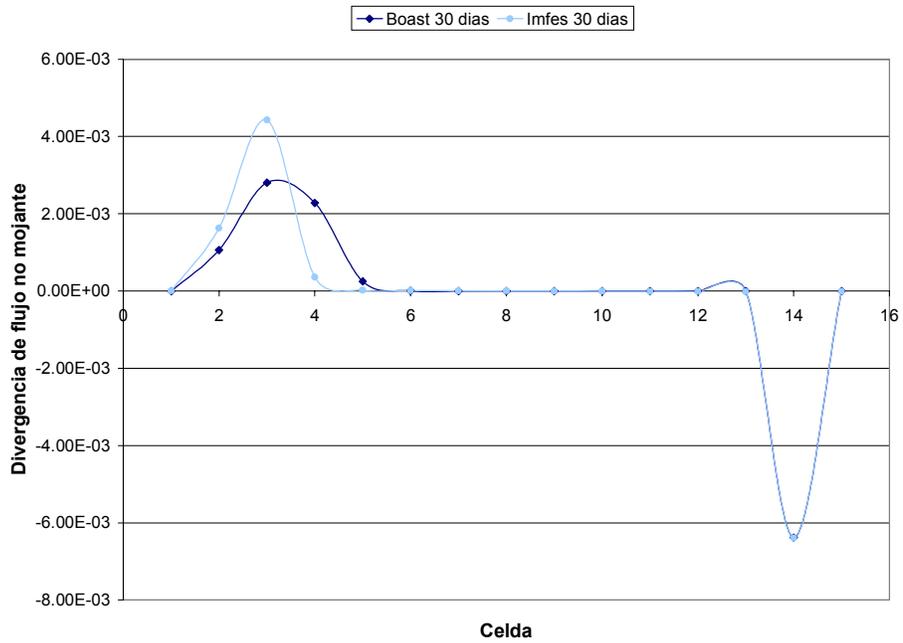


Figura 7.4 1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 30 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.

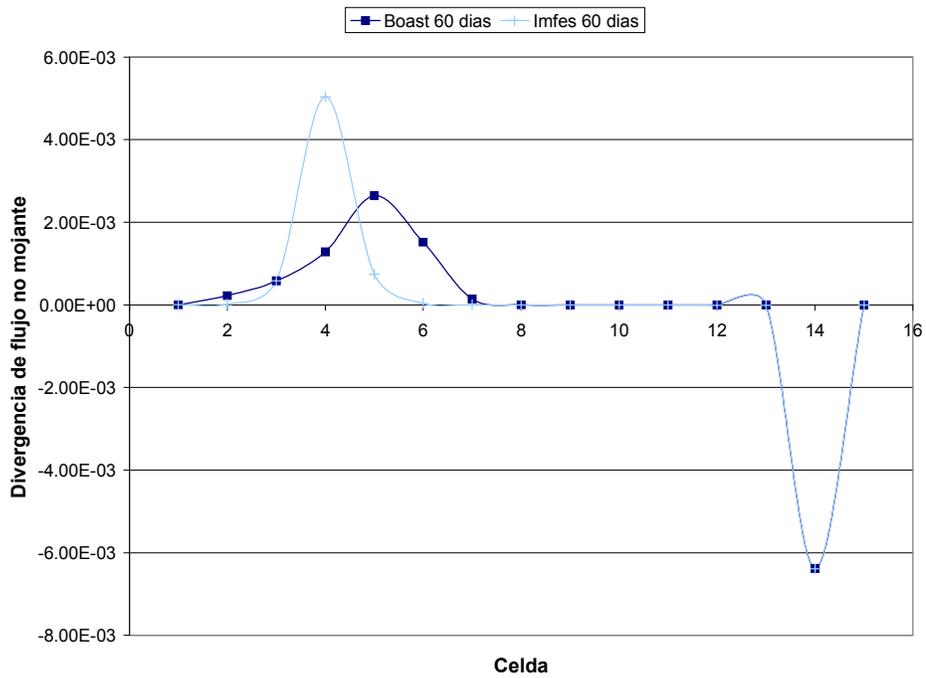


Figura 7.5 1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 60 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no mojanete.

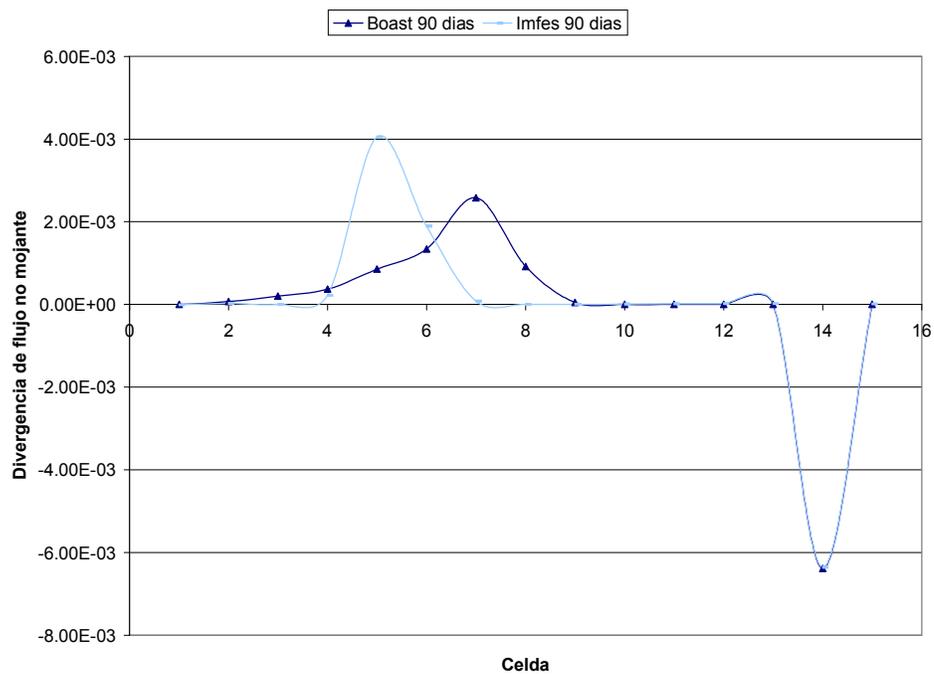


Figura 7.6 1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 90 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no mojanete.

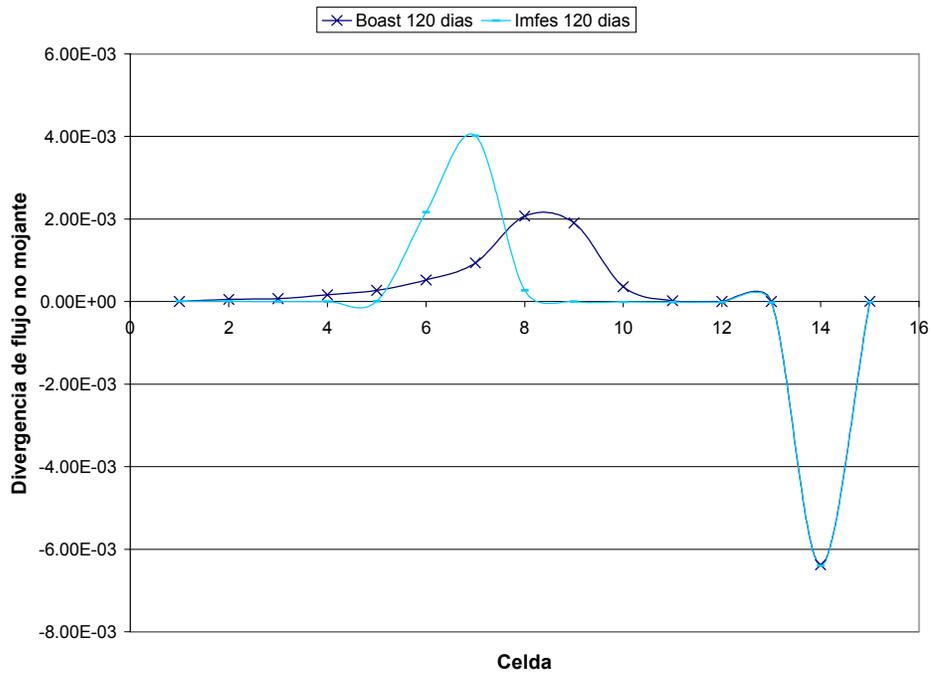


Figura 7.7 1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 120 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.

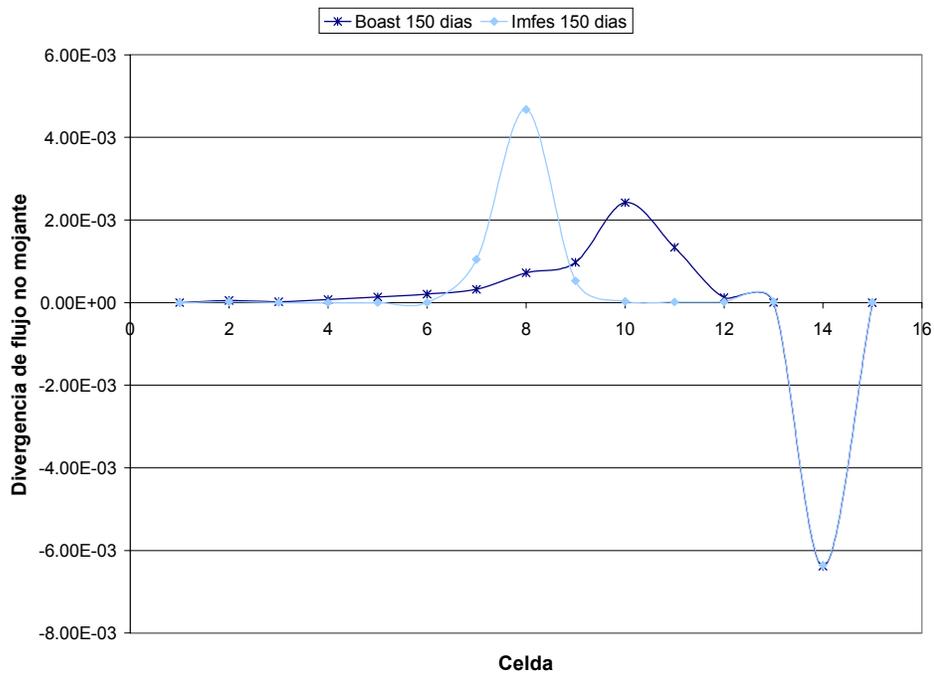


Figura 7.8 1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.

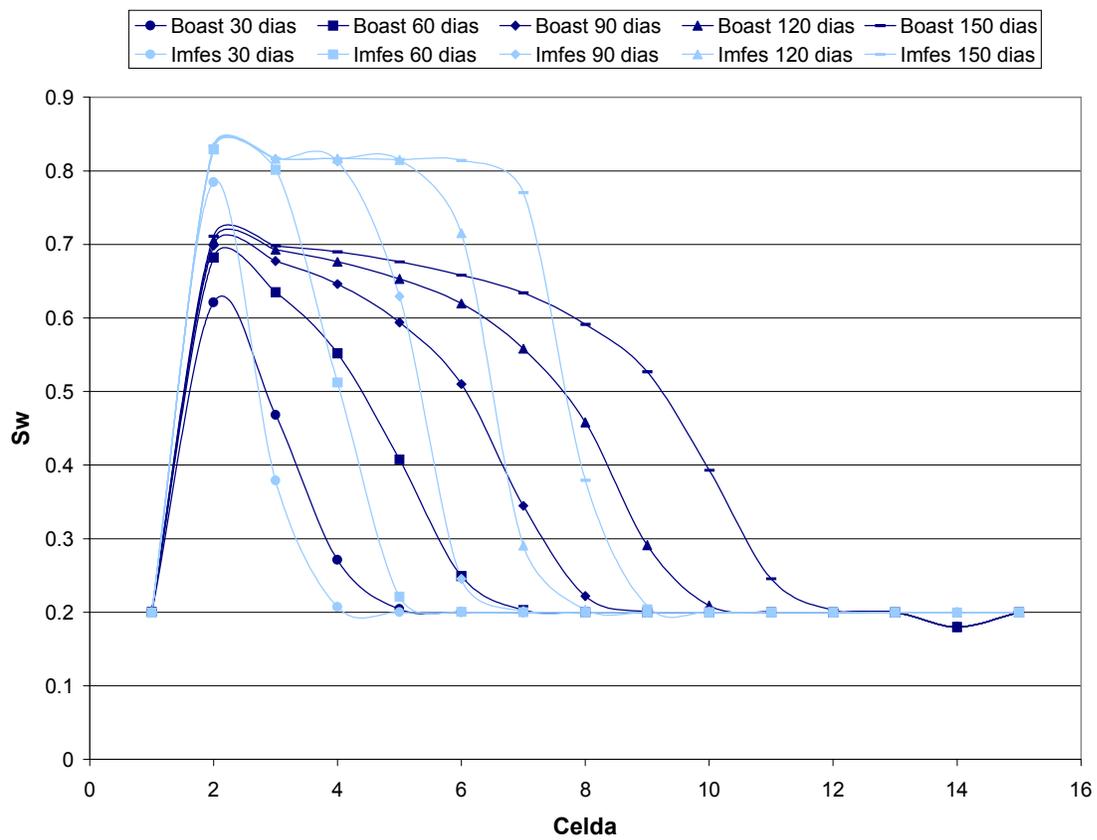


Figura 7.9 1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Saturación de la fase mojante.

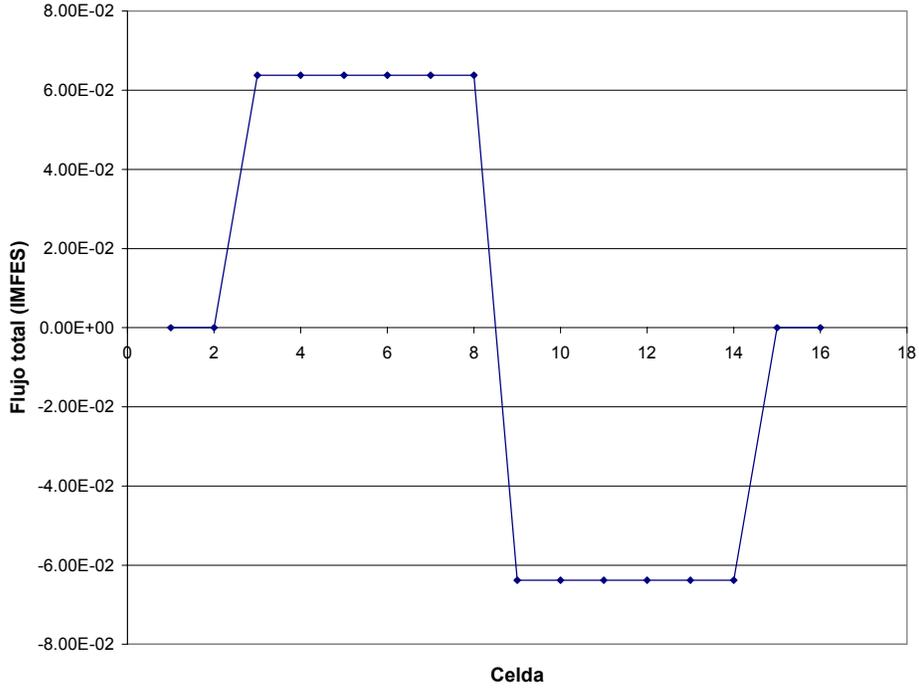


Figura 7.10 2 pozos inyectoros y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Flujo total.

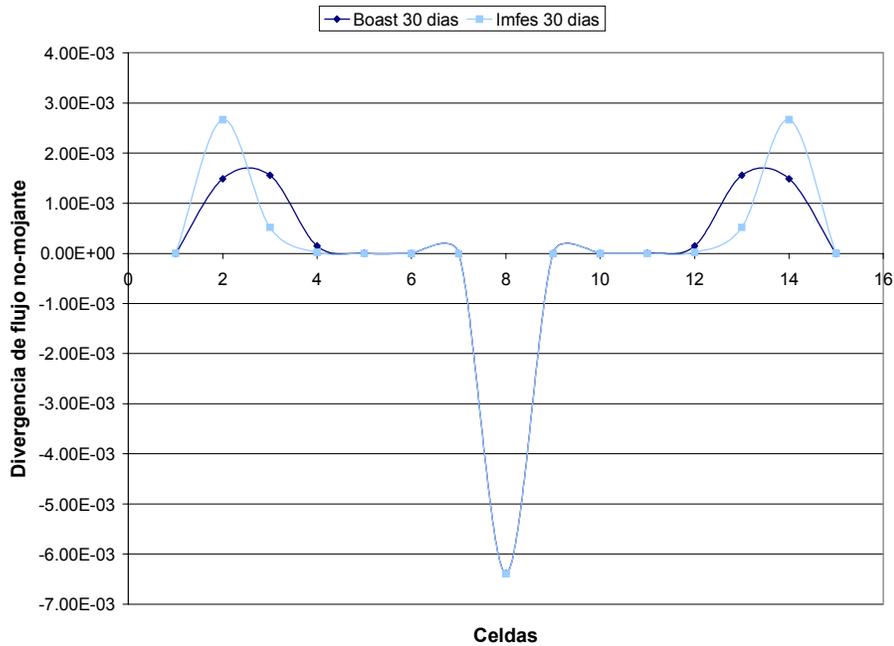


Figura 7.11 2 pozos inyectoros y 1 pozo extractor. 30 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no-mojante.

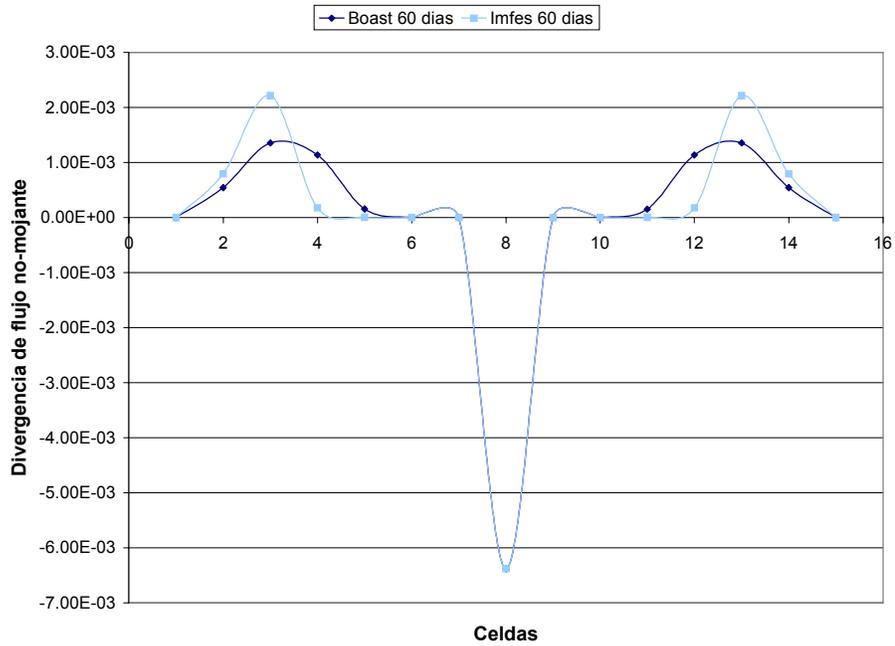


Figura 7.12 2 pozos inyectores y 1 pozo extractor. 60 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.

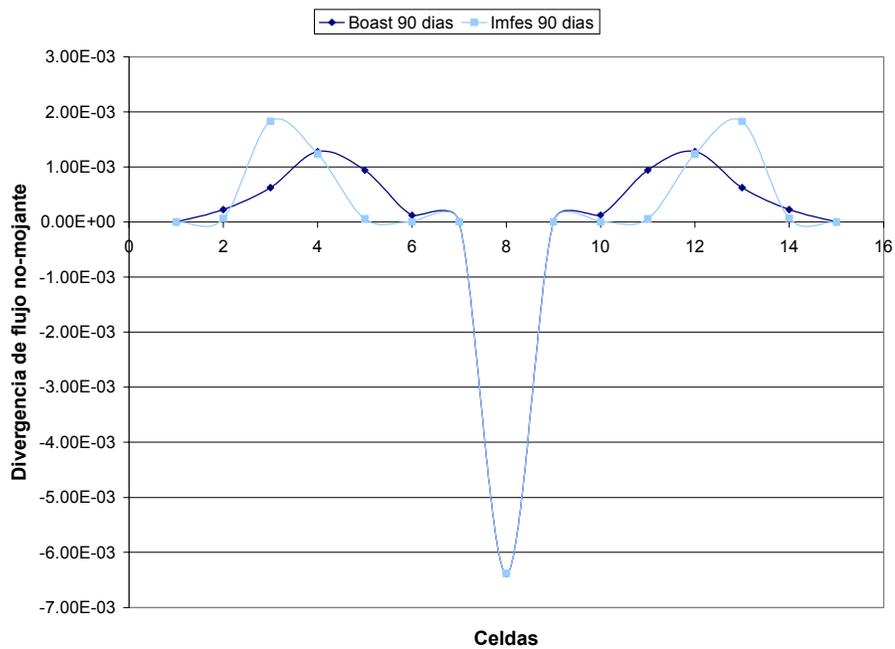


Figura 7.13 2 pozos inyectores y 1 pozo extractor. 90 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.

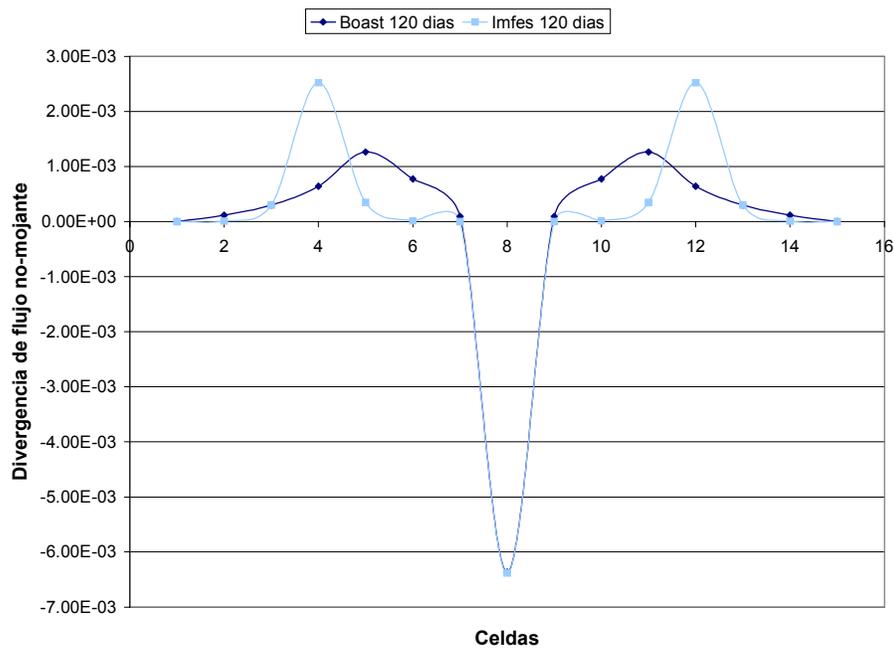


Figura 7.14 2 pozos inyectores y 1 pozo extractor. 120 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.

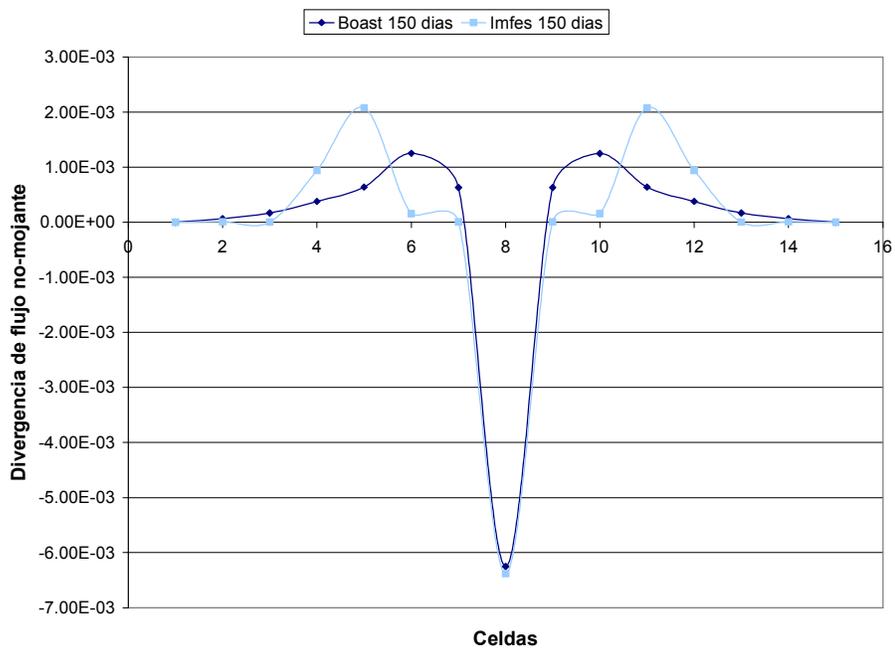


Figura 7.15 2 pozos inyectores y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.

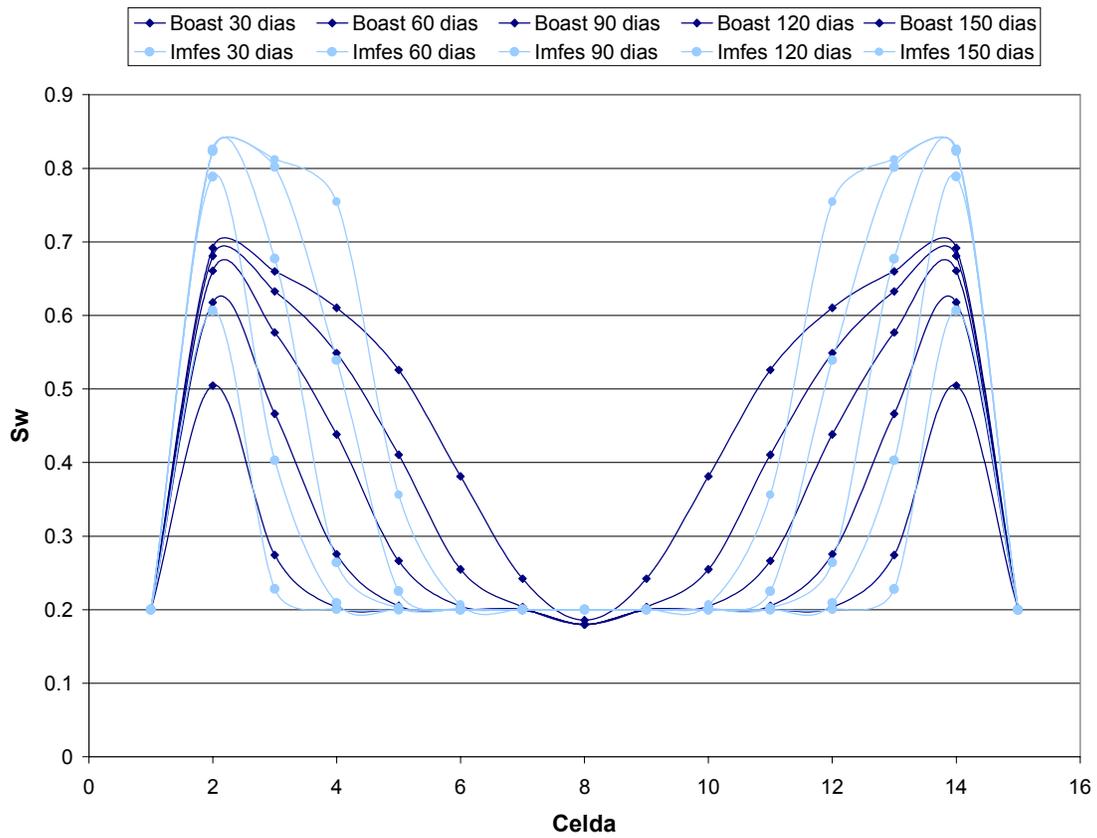


Figura 7.16 2 pozos inyectoros y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Saturación de la fase mojada.

7-2) Caso 2-3 (ver figuras 7.3-7.9 para el caso 2 y figuras 7.10-7.16 para el caso 3)

Para el caso 2 las condiciones a simular son las mismas que en el caso 1, exceptuando que:

- Las tasas de inyección y producción son de 600 bbl/día cada uno.
- El tamaño de paso de tiempo inicial fue de 1 día, permitiendo una variación del tamaño de paso en el tiempo entre 0,1 día y 5 días, para que se ajuste a las necesidades de precisión a lo largo de la simulación.
- El tiempo total a simular fue de 150 días.

Para el caso 3 las condiciones a simular son las siguientes:

- La porosidad es constante e igual a 0,25 para todo el yacimiento
- Los pozos inyectoros están ubicados en las coordenadas (2,1,1) y (14,1,1) y por convección tomara el signo negativo. El valor de la tasa es de 300 bbl/día en cada uno de los pozos.
- El pozo productor se encuentra en las coordenadas (8,1,1) y por convección tomara el signo positivo. El valor de la tasa es de 600 bbl/día en cada uno de los pozos.
- El tamaño del paso de tiempo inicial fue de un día, permitiendo una variación del tamaño de paso en el tiempo entre 0,1 día y 5 días, para que se ajuste a las necesidades de precisión a lo largo de la simulación.
- El tiempo total a simular fue 150 días.

Comparación del flujo total:

Tomando por convención que si el flujo se dirige hacia la izquierda es negativo y si se dirige a la derecha es positivo, y sabiendo que el Caso 2 se tiene un pozo inyector en la celda (2,1,1) y un pozo productor en la celda (14,1,1) el fluido se espera que se mueva hacia la derecha desde el pozo inyector al productor, es decir que sea positivo, lo cual puede verse claramente en la gráfica, donde todos los valores obtenidos tienen el mismo signo.

Por el Caso 3, se tienen diferentes direcciones de flujo, pues se tienen pozos inyectores en los extremos y un productor en el centro, lo que hará que el flujo entre la celda 2 y la celda 8 vaya hacia la derecha y el flujo entre la celda 8 y 14 vaya hacia la izquierda, hecho este que puede verse simulado por el IMFES al observar que en la gráfica el flujo entre las celdas 2 y 8 es positivo mientras que de la ocho a la catorce es negativo.

Al tenerse las mismas propiedades dentro del yacimiento, y siendo las tasas de inyección y producción iguales se espera que el comportamiento que se tenga a ambos lados del yacimiento sea bastante similar, lo cual se ve evidenciado por la simetría de la curva.

Se espera que el comportamiento del flujo entre pozos sea una línea horizontal ya que las tasas de inyección y extracción son iguales, lo cual puede verse en las gráficas presentadas.

Comparación de la divergencia del flujo no mojante.

La razón por la cual se efectuó esta comparación es debido a que no podía hacerse utilizando flujo entre el IMFES y el BOAST, pues este último no efectúa el cálculo de flujo dentro de sus operaciones, pero puede obtenerse el término de

divergencia del flujo no mojante, a través de los coeficientes que este simulador calcula para el sistema de presiones y generando un reporte de ellos.

Se espera entonces que si el comportamiento de este termino es aceptable, el del flujo también lo sea.

Al igual que en el comportamiento del frente de saturación, el comportamiento de la divergencia de flujo no mojante presenta una discrepancia con respecto al comportamiento reportado por el BOAST, lo cual era de esperarse debido a la dependencia que hay entre los cálculos del flujo no mojante y la saturación de la fase mojante, como puede verse en los algoritmos presentados con anterioridad.

Las diferencias presentadas entre ambos métodos se deben a las razones expuestas en la explicación del caso anterior. El hecho de que la curva resultado del IMFES se desplace más lentamente que la proveniente del BOAST a través del tiempo, puede ser explicado al recordar que la divergencia del flujo en el IMFES es calculada directamente de las ecuaciones de flujo, mientras que la divergencia del flujo en el BOAST se calcula partiendo de las aproximaciones que se hacen para usar la ecuación de presión, pues han de partir de los coeficientes usados para resolver el sistema para la presión.

Aun cuando se presentan diferencias entre curvas presentadas por los dos simuladores, puede verse que el comportamiento de ambos a través del tiempo presenta la misma tendencia que es la de indicar como el petróleo va siendo desplazado por el agua y que los puntos que no han sido afectados por el frente de saturación o los que ya fueron dejados atrás coinciden en ambos simuladores.

Al comparar los Casos 2 y 3, puede verse como el esquema IMFES puede simular diferentes métodos de producción en un mismo yacimiento, mostrando la tendencia esperada pues puede verse como para el caso 2, el petróleo es empujado

hacia el pozo productor y como en el Caso 3, aun teniendo pozos distintos ocurre lo mismo.

Para el Caso 3 nuevamente se tiene un comportamiento simétrico con respecto a la ubicación del pozo productor, debido a que se tienen propiedades iguales para todo el yacimiento.

Comparación de la saturación de la fase mojante:

Puede observarse como en los Casos 2 y 3 aunque se presentan diferencias entre los resultados de las simulaciones con IMFES y BOAST, presentan la misma tendencia en su comportamiento que es la de indicar como se esta desplazando el frente de saturación de la fase mojante, desde el (o los) pozo(s) inyector(es) hacia el pozo productor.

Las razones principales de dichas diferencias fueron explicadas en el caso 1.

El hecho de que el flujo experimente cambios menos bruscos que la presión entre paso de tiempo, hará que la saturación calculada por medio de esto experimente menos cambio y es por ello que se ve que el frente de saturación se mueve de una forma más lenta.

Al analizar los casos 2 y 3 se sustenta lo dicho cuando se hablo de la divergencia del flujo no mojante, y es el hecho de que pueden simularse diferentes formas de producción en el mismo yacimiento, y obtener un comportamiento como el esperado al igual que la simetría al tener condiciones iguales en el yacimiento (caso 3)

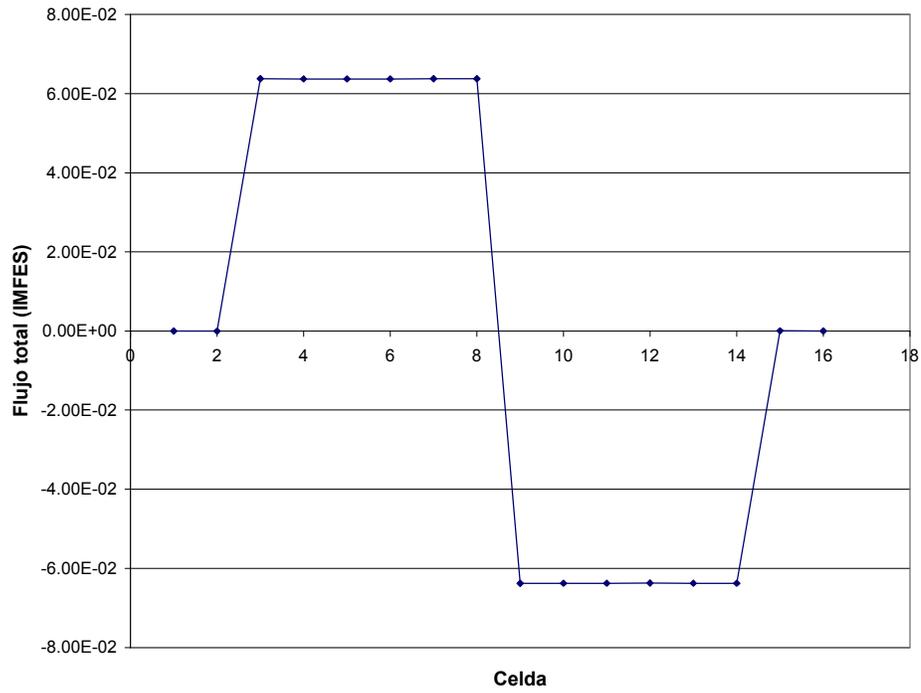


Figura 7.17 2 pozos inyectoros y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad variable. Δt variable. Flujo total.

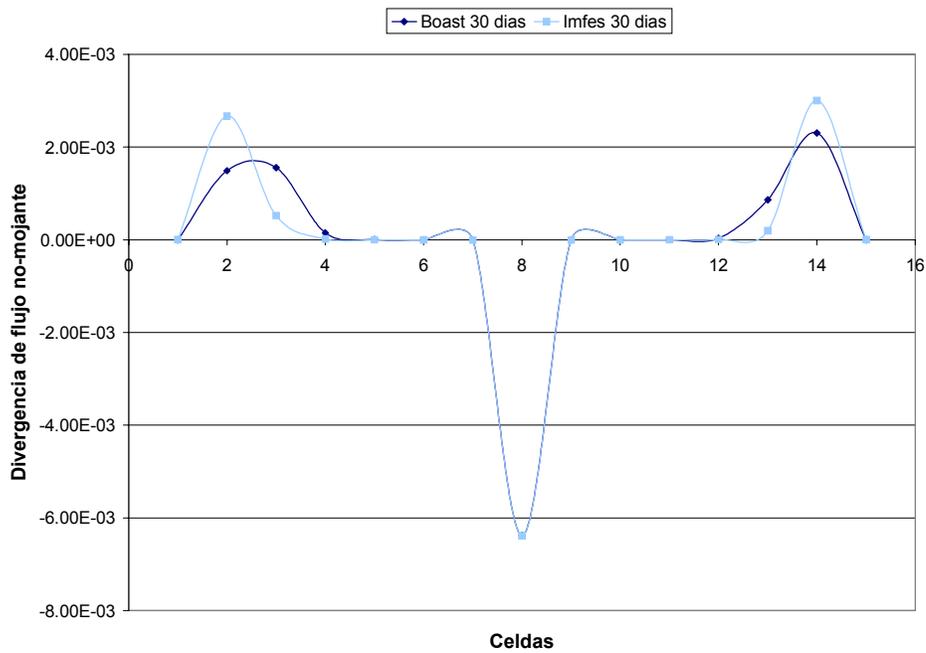


Figura 7.18 2 pozos inyectoros y 1 pozo extractor. 30 días de simulación. Porosidad variable. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.

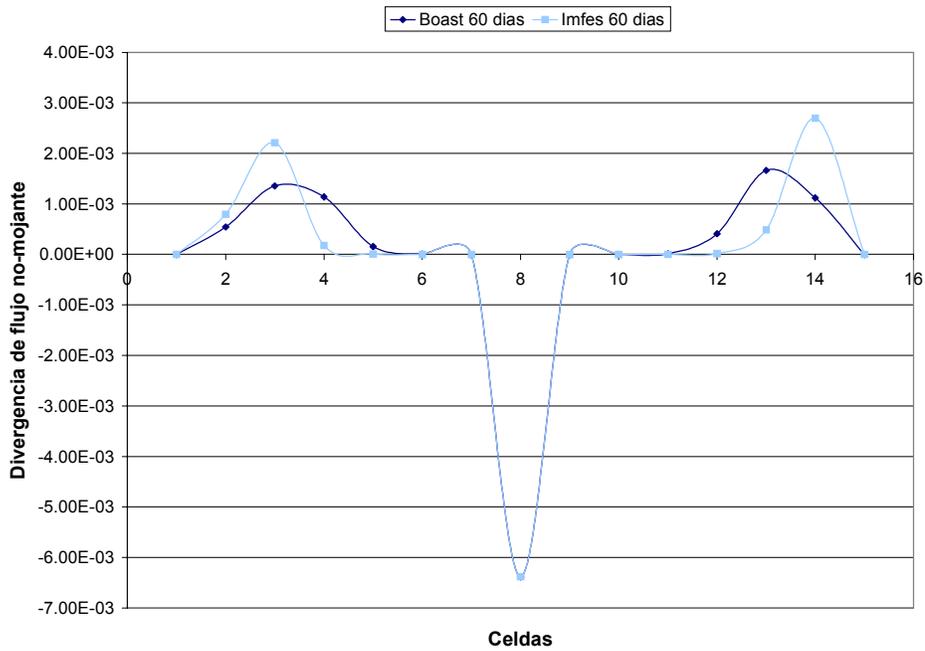


Figura 7.19 2 pozos inyector y 1 pozo extractor. 60 días de simulación. Porosidad variable. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.

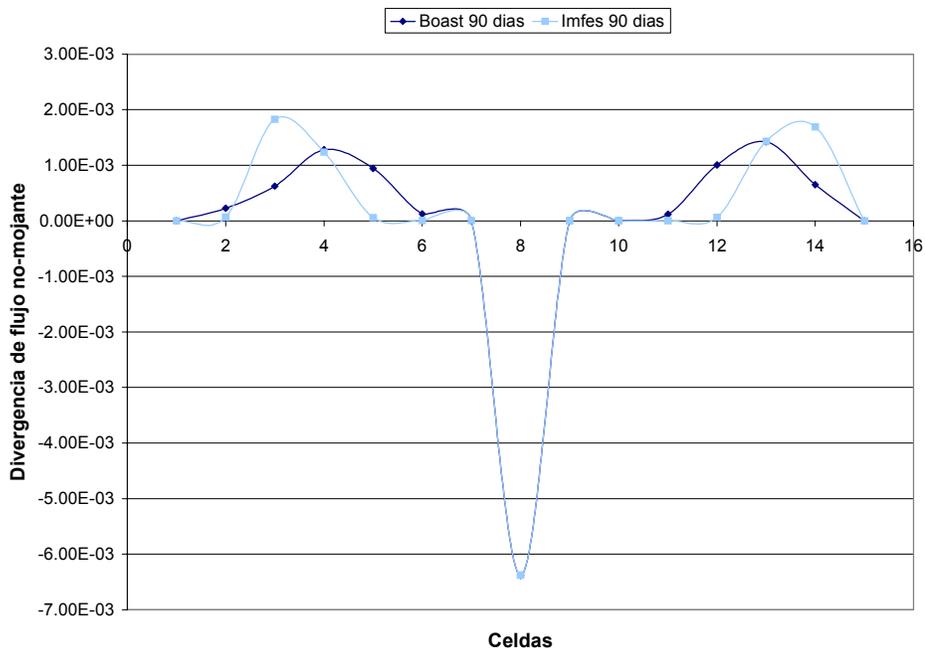


Figura 7.20 2 pozos inyector y 1 pozo extractor. 90 días de simulación. Porosidad variable. Δt variable. Divergencia de flujo no mojante.

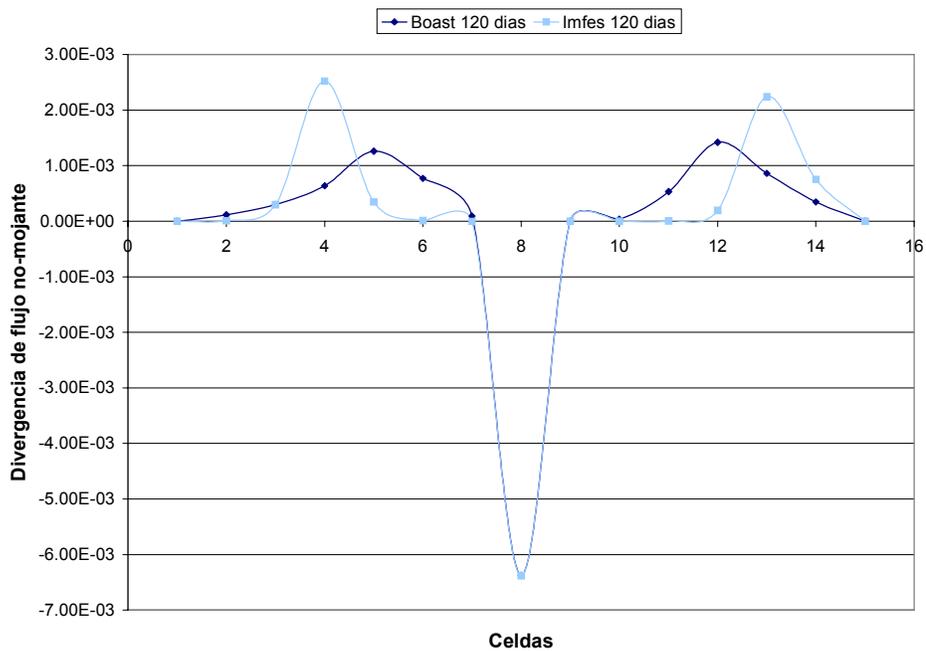


Figura 7.21 2 pozos inyectores y 1 pozo extractor. 120 días de simulación. Porosidad variable. Δt variable. Divergencia de flujo no mojado.

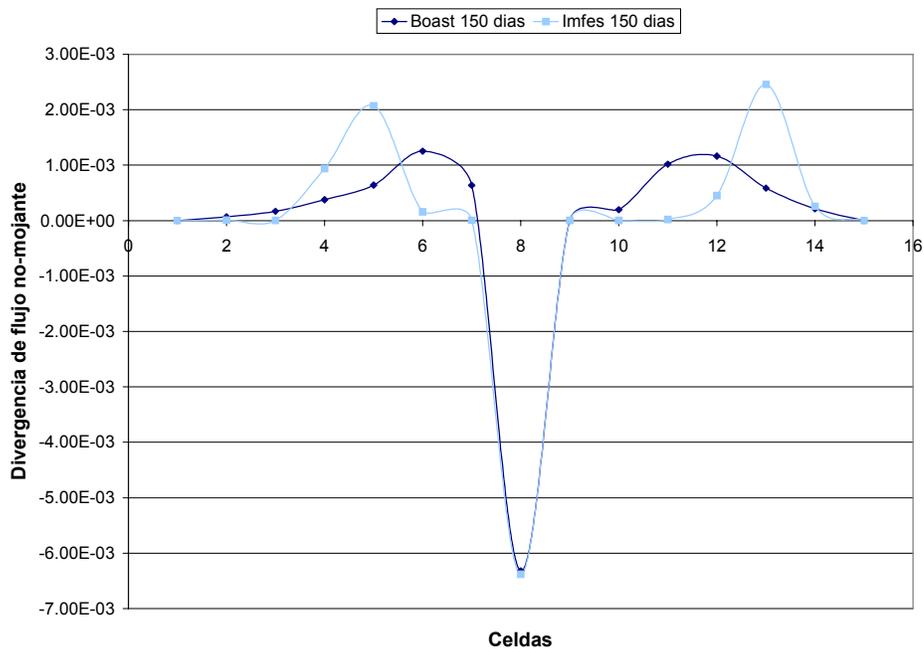


Figura 7.22 2 pozos inyectores y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad variable. Δt variable. Divergencia de flujo no mojado.

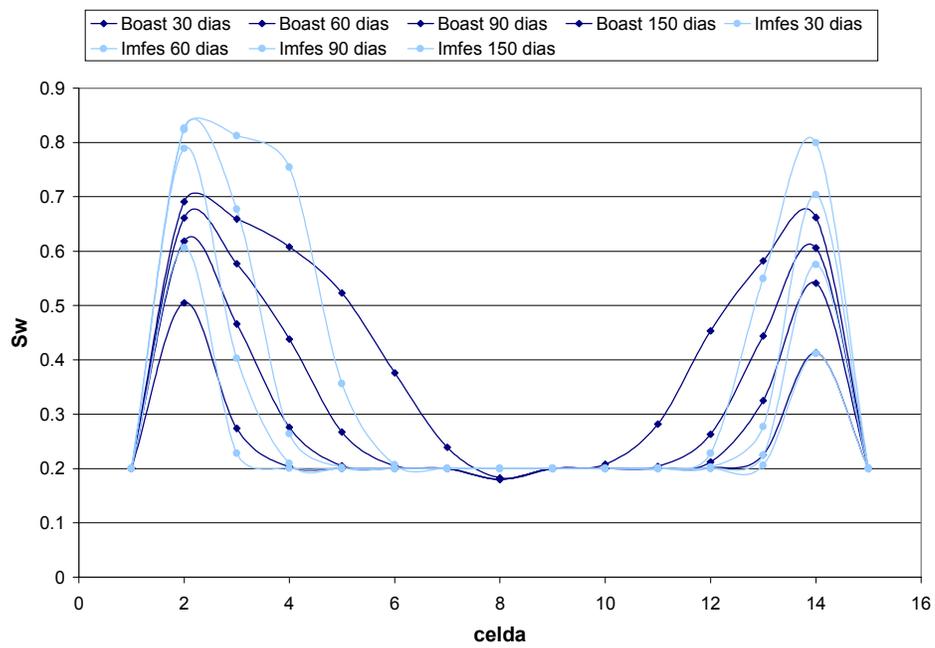


Figura 7.23 2 pozos inyectoros y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad variable. Δt variable. Saturación de la fase mojante.

7-3)Caso 4 (Ver figuras 7.17-7.23)

Las condiciones a simular son las del caso anterior, exceptuando que; se tienen porosidades distintas dentro del mismo yacimiento, una parte de este tendrá una porosidad de (0,5) en las celdas desde la 9 a la 15 y de (0,25) en las celdas desde la 1 a la 8.

Este caso es igual al simulado por el ejemplo 3, a excepción de que la porosidad es diferente dentro del yacimiento, para las ocho primeras celdas se tiene porosidad de 0,25 y para las siete siguientes la porosidad es de 0,5.

Los análisis en cuanto a la diferencias presentadas entre los resultados obtenidos del IMFES y el BOAST, tanto para el caso de saturación mojante, como para el caso de divergencia del flujo no mojante, fueron hechos ya al explicar lo que sucedía en el ejemplo 3.

La finalidad de este ejemplo es observar como reproduce el programa IMFES los cambios que puedan presentarse en las propiedades dentro del yacimiento y esto puede verse al analizar tanto el movimiento del frente de saturación como la divergencia del flujo, puesto que en ambos casos se pierde la simetría de la gráfica con respecto al pozo productor ya que al presentar porosidades diferentes a ambos lados de este, el fluido se comportara de forma diferente en cada uno de ellos.

No solamente se pierde la simetría (signo de que las propiedades son diferentes) sino que puede verse el efecto correcto que causa el tener distintas porosidades, pues si el medio es más poroso (porosidad mayor) el fluido tendera a moverse más lentamente que a través de un medio menos poroso (porosidad menor) y esto esta evidenciado en las gráficas al presentar el frente de saturación un movimiento más

lento del lado en que se tiene una porosidad mayor, con respecto al lado del yacimiento que tiene una porosidad menor.

Lo mismo ocurre con el desplazamiento en la curva de la divergencia de flujo no mojante, aunque la diferencia entre ambos lados del yacimiento es menos marcada pero en general las curvas presentan la tendencia mostrada por el BOAST.

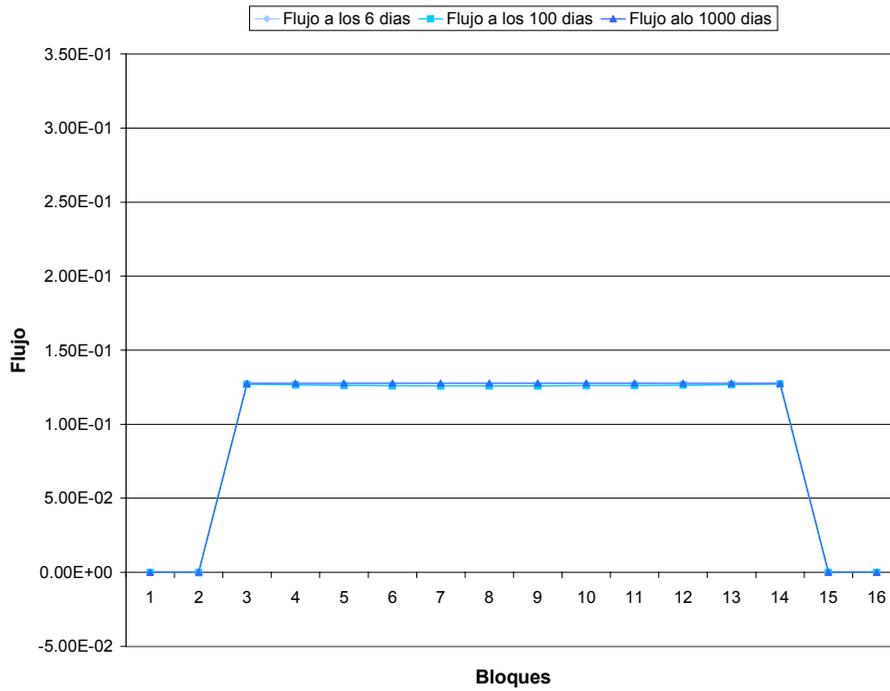


Figura 7.24 1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 1000 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Flujo total. Tolerancia 0,0001.

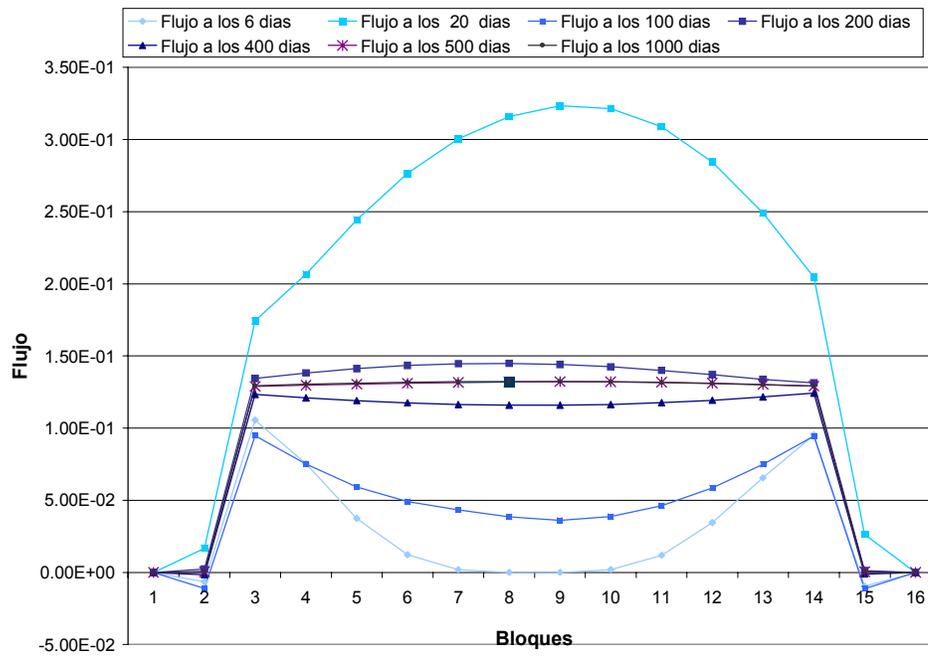


Figura 7.25 1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 1000 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Flujo total. Tolerancia 0,1.

7-4)Caso 5 (Ver figuras 7.24-7.25)

En este ejemplo se toman las condiciones descritas en el Caso 1, tomando una tolerancia mayor con el objeto de observar la influencia de esta variable en el método numérico. El tamaño del paso de tiempo es variable a través de la simulación.

Se observó que el método se comporta de una manera oscilatoria hasta que después de realizar una gran cantidad de cálculos alcanza la estabilidad. Esto se debe a que es necesario hacer un gran número de iteraciones para resolver el sistema flujo total- compresibilidad artificial, antes de llegar a una solución estable. Si no se puede hacer un número suficiente de iteraciones en los primeros pasos de tiempos, el sistema tardará mayor cantidad de pasos de tiempo para estabilizarse, pues deberá de alguna forma hacerse la cantidad de cálculos que equivalgan al número de iteraciones necesarias.

La formulación indica que el número de iteraciones a realizar para la convergencia de la compresibilidad artificial dentro del cálculo de flujo depende principalmente de la tolerancia que se escoja como parámetro de convergencia.

Se realizaron diversos estudios (corridas) para encontrar una tolerancia que permitiera que la solución del sistema se hiciera estable en pocos pasos de tiempo, encontrándose que teniendo una tolerancia inicial de 1×10^{-4} se alcanza la estabilidad en el primer paso de tiempo. Si se toma una única tolerancia con dicho valor, se tiene como inconveniente que se deban realizar numerosos cálculos para todos los pasos de tiempo aunque el sistema estuviese estable. Por esa razón fue decidido utilizar dos tolerancias, una para el primer paso de tiempo que garantice la realización del número de iteraciones necesarias para la estabilidad, y otra más grande para el resto de los pasos de tiempo, donde la estabilidad ya ha sido alcanzada.

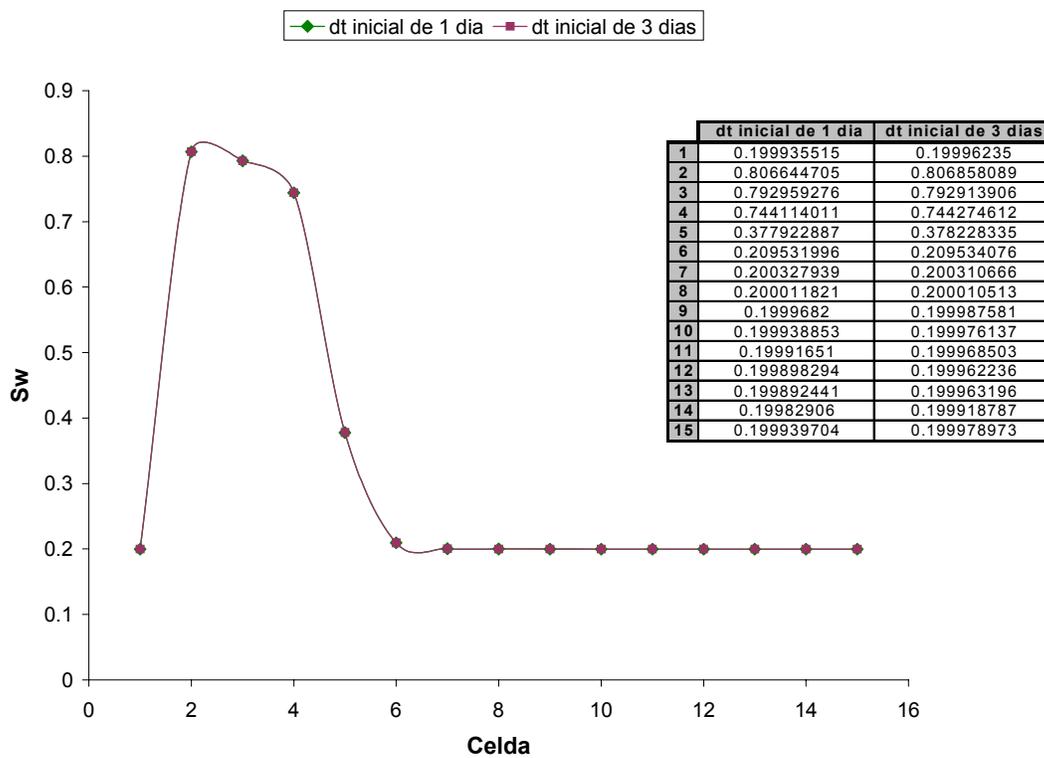


Figura 7.26 1 pozo inyector y 1 pozo extractor. 150 días de simulación. Porosidad constante. Δt variable. Saturación de la fase mojada. Diferentes pasos de tiempo iniciales.

7-5)Caso 6(ver figura 7.26)

Se utilizó la misma data que en Caso 1, para comparar los resultados al cabo de 150 días de simulación utilizando diferentes pasos de tiempo iniciales.

El tamaño de paso de tiempo es variable a través de la simulación.

Esto se efectuó con la finalidad de observar la influencia que puede tener el partir con diferentes discretizaciones en tiempo para alcanzar los mismos resultados.

Se observó que tomando distintos pasos de tiempo iniciales el comportamiento de la gráfica es el mismo, y los resultados del cálculo de la saturación al cabo de 150 días de simulación resultaron muy similares observándose diferencias en el orden de 10^{-4} entre ellos.

Es importante destacar que este ejemplo se realizó con el objeto de medir la influencia del primer paso de tiempo en el resultado final del desplazamiento del frente de saturación, por ser dentro de las iteraciones efectuadas en el primer paso de tiempo donde se busca la estabilidad de la solución.

CAPITULO 8 - CONCLUSIONES

- El método IMFES presentado en este trabajo tiene una dispersión numérica menor que la correspondiente al BOAST.
- El flujo presenta cambios menos bruscos que la presión entre pasos de tiempo, por lo tanto, los cambios en la saturación son más pequeños cuando esta es calculada a partir del flujo. El frente de saturación se moverá de forma más lenta.
- El método IMFES arroja buenos resultados con respecto al flujo total, ya que las direcciones resultantes son las correctas, y el hecho de tener una línea casi horizontal, simula, de la forma esperada, que al tener un yacimiento homogéneo y tasas de inyección y producción iguales, el flujo entre pozos tendrá aproximadamente el mismo valor en todas las interfaces.
- En general, los resultados obtenidos con IMFES presentan un comportamiento con una tendencia similar a la presentada por el BOAST.
- El programa IMFES se comporta de forma adecuada ante diferentes condiciones del yacimiento o ante diferentes patrones de explotación.
- Es necesario hacer un gran número de iteraciones en el cálculo del flujo para alcanzar una solución estable de forma más rápida, es decir, es necesario una tolerancia pequeña (10^{-4}) para la convergencia de la compresibilidad artificial. El programa es sumamente sensible a esta tolerancia.

-
- La influencia del primer paso de tiempo, sobre los posteriores, es bastante significativa al nivel de la estabilidad del sistema, por ello se requiere una tolerancia más estricta para la convergencia de la compresibilidad artificial en este punto.
 - Presenta robustez ante la discretización en tiempo, es decir, reproduce los mismos resultados, sin importar el paso de tiempo inicial utilizado.
 - El hecho de aproximar de forma diferente las propiedades del yacimiento en los puntos en donde no se conoce su valor, tiene una influencia significativa en los resultados que se obtenga en la simulación.
 - Adicional a la metodología para obtener flujo y saturación propuesta por J.C Kuhn, este trabajo aporta un esquema que permite calcular la presión partiendo de los resultados que se obtengan del flujo. El algoritmo correspondiente es presentado en el Capítulo 5.
 - Para la solución del sistema flujo total – compresibilidad artificial, no es necesario utilizar un procedimiento iterativo, ya que se puede demostrar que el sistema converge a un valor, y que ese valor se conoce (Ver Apéndice C), pero es necesario encontrar una expresión apropiada para el término “E” (error de discretización usado para hacer la aproximación), pues es esencial para esta formulación alternativa.
 - Para poder incluir la solubilidad del gas en petróleo dentro de la formulación presentada en este trabajo, no son suficientes las relaciones establecidas por Kuhn para un sistema bifásico (Ver Apéndice D). Se requiere el planteamiento de relaciones adicionales, tales como la ecuación de estado, que puedan ser incluidas dentro de la metodología existente, y así poder extender la solución a problemas trifásicos.

Los puntos antes expuestos permiten concluir que la metodología utilizada resulta bastante promisorio y puede servir de punto de partida para la implantación de nuevos simuladores de yacimientos petrolíferos.

CAPITULO 9 - RECOMENDACIONES

- Realizar un estudio comparativo directo entre los resultados arrojados por el IMFES y una solución analítica para, y/o entre el IMFES y datos de campo, para poder llegar a una validación del método.
- Plantear, a partir de las aproximaciones numéricas, una ecuación que permita obtener la dispersión numérica presentada por el método, y comparar este valor con el obtenido con otros simuladores.
- Considerando que el código fue desarrollado para aplicarse en casos bidimensionales y tridimensionales, efectuara pruebas que permitan evaluar el comportamiento de la formulación planteada en este trabajo ante esos casos.
- Incluir el algoritmo de cálculo para el campo de presiones, presentado en este trabajo, como una rutina dentro del programa existente, para estudiar como se comporta la presión al ser calculada a través del campo de flujo.
- Encontrar una expresión apropiada para el término de error “E”, que permita sustituir el procedimiento iterativo para el cálculo de flujo, por una solución que converge de forma directa en una sola iteración, para luego poder probar el funcionamiento del programa al incluir este cambio.
- Efectuar una revisión más detallada de las ecuaciones planteadas en el Apéndice D, con la finalidad de establecer cuales son las relaciones que se necesitan para poder incluir la tercer fase dentro de la formulación aquí presentada.

-
- Manejar las ecuaciones dentro del programa en el Sistema Internacional (SI) de Unidades, y agregar una subrutina que permita transformar unidades de campo a unidades de SI y viceversa.

APENDICE A. CODIFICACION DEL PROGRAMA IMFES

```
!
! Programa para el cálculo de campo de flujo y saturaciones basado en el
! algoritmo de J.C. Kuhn
!
!*****
!*****
!*****
!*****
!
! Variables Enteras:
!
!     i: Indice de posición con respecto a "x"
!     j: Indice de posición con respecto a "y"
!     k: Indice de posición con respecto a "z"
!     M: Numero de bloques en la dirección "x"
!     P: Numero de bloques en la dirección "y"
!     Q: Numero de bloques en la dirección "z"
!     cont: Contador usado para la verificación de "alfa=1+ tolerancia"
!     ind: Contador usado en la verificación de precisión (para saber cuando
! hace falta reducir "delta t"
!     a: Dimensión de la tabla que contiene los valores de presión capilar vs
! saturación de la fase mojante
!     b: Dimensión de la tabla que contiene los valores de permeabilidad
! Relativa (mojante y no mojante) vs saturación de la fase mojante
!     c: Dimensión de la tabla que contiene los valores de viscosidad
! (mojante y no mojante) vs presión
!     ban: indica si la saturación se ha salido fuera del rango de las tablas
! de interpolación, esto lo hace cuando su valor cambia de 0 a 1
!     salida: número de iteraciones Realizadas en la rutina Flujo
!
!
! Variables Reales Simples:
!
!     No: Cantidad total de tiempo a estudiar
!     n: representa la cantidad de tiempo que ya ha sido simulado
!     x: Valor de "delta x" usado para la discretización espacial
!     y: Valor de "delta y" usado para la discretización espacial
!     z: Valor de "delta z" usado para la discretización espacial
!     t: Valor de "delta t" usado para la discretización en el tiempo
!     g: Valor de la constante de aceleración de gravedad/factor de conversión
!     e: Valor de "épsilon" tomado para aplicar la derivada por definición
```

```

!      h: Variable auxiliar para almacenar el "delta t" en ciertas ocasiones,
para comparar con t y saber así cuando ha sido cambiado
!      tol: Tolerancia para la convergencia del valor de compresibilidad
artificial
!      tol1: Tolerancia (en el paso de tiempo inicial) para la convergencia del
valor de compresibilidad artificial
!      tol2: Tolerancia (en los pasos de tiempo siguientes) para la
convergencia del valor de compresibilidad artificial
!      valor: Cantidad máxima permitida de variación de la Saturación entre un
paso
!
!      de tiempo y otro sin cambiar el "delta t" original
!      min: valor mínimo que puede tomar "delta t"
!      max: valor máximo que puede tomar "delta t"
!      escr: cada cuanto se desea que el programa genere reportes.
!
!
! Variables Reales vectores:
!
!      sat: Almacena Valores de Saturación de la tabla "Presión Capilar vs
Saturación de la fase mojante"
!      precap: Almacena Valores de Presión Capilar de la tabla "Presión Capilar
vs Saturación de la fase mojante"
!      satur: Almacena valores de Saturación de la tabla "Permeabilidad
Relativa vs Saturación de la fase mojante"
!      permoj: Almacena valores de Permeabilidad relativa de la fase mojante de
la tabla "Permeabilidad Relativa vs Saturación de la fase mojante"
!      perno: Almacena valores de Permeabilidad Relativa de la fase no mojante
de la tabla "Permeabilidad Relativa vs Saturación de la fase mojante"
!      pres: Almacena valores de Presión de la tabla "Viscosidades vs Presión"
!      viscomoj: Almacena valores de Viscosidad de la fase mojante de la tabla
"Viscosidades vs Presión"
!      visconomj: Almacena valores de Viscosidad de la fase mojante de la
tabla "Viscosidades vs Presión"
!      fracción: Almacena los valores del flujo fraccional en función de la
saturación mojante
!      dfraccion: Almacena los valores de la derivada del flujo fraccional en
función de la saturación mojante
!
!
! Variables Reales Matriciales:
!
!      U: Almacena los valores de flujo total en la dirección "x", para todo el
yacimiento, en el tiempo n+1
!      V: Almacena los valores de flujo total en la dirección "y", para todo el
yacimiento, en el tiempo n+1
!      W: Almacena los valores de flujo total en la dirección "z", para todo el
yacimiento, en el tiempo n+1
!      U1: Almacena los valores de flujo total en la dirección "x", para todo
el yacimiento, en el tiempo n
!      V1: Almacena los valores de flujo total en la dirección "y", para todo
el yacimiento, en el tiempo n
!      W1: Almacena los valores de flujo total en la dirección "z", para todo
el yacimiento, en el tiempo n
!      qt: Almacena la tasa de inyección o extracción para todos los pozos
ubicados
!      dentro del yacimiento

```

```

!   qn: fracción de la tasa total de inyección o extracción, correspondiente
a la fase no mojante
!   qw: fracción de la tasa total de inyección o extracción, correspondiente
a la fase mojante
!   poros: Almacena la porosidad efectiva para cada bloque del yacimiento
!   alfan: Valores de compresibilidad artificial en el paso de tiempo "n"
para todo el yacimiento
!   alfan1: Valores de compresibilidad artificial en el paso de tiempo "n+1"
para todo el yacimiento
!   titaN: Relación entre la permeabilidad relativa y la viscosidad, para la
fase no mojante(Knr/ViscosidadN)
!   titaW: Relación entre la permeabilidad relativa y la viscosidad, para la
fase mojante(Kwr/ViscosidadW)
!   Kx: Almacena el primer elemento de la diagonal del tensor de
permeabilidad para todo el yacimiento (Kxx)
!   Ky: Almacena el segundo elemento de la diagonal del tensor de
permeabilidad para todo el yacimiento (Kyy)
!   Kz: Almacena el tercer elemento de la diagonal del tensor de
permeabilidad para todo el yacimiento (Kzz)
!   Pc: Almacena los valores de Presión Capilar para todo el yacimiento
!   Zo: Almacena las cotas de todas las capas del yacimiento
!   DerZx: Derivada de Zo con respecto a "x", para las caras internas de los
bloques del yacimiento
!   DerZy: Derivada de Zo con respecto a "y", para las caras internas de los
bloques del yacimiento
!   DerZz: Derivada de Zo con respecto a "z", para las caras internas de los
bloques del yacimiento
!   DerPcx: Derivada de Pc con respecto a "x", para las caras internas de
los bloques del yacimiento
!   DerPcy: Derivada de Pc con respecto a "y", para las caras internas de
los bloques del yacimiento
!   DerPcz: Derivada de Pc con respecto a "z", para las caras internas de
los bloques del yacimiento
!   Un: Porción no mojante del flujo total, en la dirección "x"
!   Vn: Porción no mojante del flujo total, en la dirección "y"
!   Wn: Porción no mojante del flujo total, en la dirección "z"
!   DensN: Densidad de la fase no mojante, para cada bloque del yacimiento
!   DensW: Densidad de la fase mojante, para cada bloque del yacimiento
!   Swn: Saturación de la fase mojante, en el tiempo "n"
!   Swn1: Saturación de la fase mojante, en el tiempo "n+1"
!   Sn: Saturación de la fase no mojante
!   Sn1: Saturación de la fase no mojante, en el tiempo "n+1"
!   ViscoN: Viscosidad de la fase no mojante
!   ViscoW: Viscosidad de la fase mojante
!   Kwr: Permeabilidad relativa de la fase mojante
!   Knr: Permeabilidad relativa de la fase no mojante
!   Pw: Presión de la fase mojante.
!   f: Almacena los valores de flujo fraccional para todo el yacimiento
!   df: Almacena los valores de la derivada del flujo fraccional para todo
!       el yacimiento.
!
!
! Descripción de funciones usadas:
!
!   Derivada: Calcula la derivada de primer orden de una función, usando
diferencias finitas centradas(Se usa en la subrutina de Datos y en la
subrutina de Saturación)

```

```

!      divergencia: Calcula la divergencia de un vector dado, usando
diferencias finitas centradas (Se usa en las subrutinas de calculoalfa y en
las de Saturación)
!      no_mojante: Calcula la porción no mojanete del flujo total (Se usa en la
subrutina de Saturación)
!
!
! Descripción de subrutinas usadas:
!
!      Datos: Introduce todos los datos necesarios para el manejo del programa
!      Inicialización: Se encarga de almacenar los valores de flujo, Saturación
y alfa obtenidos en el paso de tiempo anterior, en variables auxiliares para
poder utilizarlos donde sea necesario para calcular los valores del paso de
tiempo actual.
!      Flujo: Determina el campo de flujo y la compresibilidad artificial,
simultáneamente, a través de un proceso iterativo
!      Saturación: Determina el campo de saturaciones, de forma directa
!      Verificación: Verifica si es necesaria la reducción del paso de tiempo
!      Actualizar: Actualiza todas las propiedades dependientes de la
Saturación de la fase mojanete, teniendo el valor actualizado
de esta
!      Escritura: se encarga de escribir en los archivos de salida, los valores
de Flujo y Saturación correspondientes al paso de tiempo en estudio.
!      Llena_matriz: Para el llenado de matrices, partiendo de valores
almacenados en archivos, en forma de tablas (Se usa en la subrutina de Datos)
!      Propiedades_interpoladas: Maneja las interpolaciones de las propiedades
dependientes de la Saturación y de la Presión para hacer el llenado inicial de
las matrices que contienen dichas propiedades (Se usa en la subrutina de
Datos)
!      Tabseq: Para búsqueda secuencial en tablas y su interpolación lineal (Se
usa en las subrutinas de Propiedades_interpoladas, Presiones y Actualizar)
!      calculoalfa: Calcula la compresibilidad artificial (Se usa en la
subrutina de Flujo)
!
!
!*****
!*****
!***** PROGRAMA PRINCIPAL
!*****
!
!
!      Program IMFES
!      Implicit None
!      Integer M,P,Q,ind,a,b,c,ban,salida,i,j,k
!      Real*8 No,n,x,y,z,t,e,h,g,tol1,tol2,valor,min,max,escr
!      Real*8,dimension(:,:,:),Allocatable::U,V,W,U1,V1,W1,qt,qn,qw
,poros,alfan,alfan1,titaN,titaW,Kx,Ky,Kz,Pc,Zo,DerZx,DerZy,DerZz,U
n,Vn,Wn,DensN,DensW,Swn,Swn1,Sn,Sn1,ViscoN,ViscoW,Kwr,Knr,Pw,DerPcx,DerPcy,Der
Pcz,transx,transy,transz,f,df,div
!      Real*8,dimension(:),Allocatable::sat,precap,satur,permoj,perno,pres,visc
omoj,visconomoj,fraccion,dfraccion
!
!
!      Introduccion de datos
!
!      Open(10,file="discretización.txt")
!      Read(10,*)

```

```

Read(10,*)
Read(10,*)M
Read(10,*)P
Read(10,*)Q
Do i=1,3
    Read(10,*)
Enddo
Read(10,*)a
Read(10,*)b
Read(10,*)c
Close(10)
Allocate(U(M+1,P,Q),V(M,P+1,Q),W(M,P,Q+1),U1(M+1,P,Q),&
V1(M,P+1,Q),W1(M,P,Q+1),qt(M,P,Q),qn(M,P,Q),qw(M,P,Q),&
poros(M,P,Q),alfan(M,P,Q),alfan1(M,P,Q),titaN(M,P,Q),&
titaW(M,P,Q),Kx(M,P,Q),Ky(M,P,Q),Kz(M,P,Q),Pc(M,P,Q),&
Zo(M,P,Q),DerZx(M,P,Q),DerZy(M,P,Q),DerZz(M,&
P,Q),Un(M+1,P,Q),Vn(M,P+1,Q),Wn(M,P,Q+1),DensN(M,P,Q),&
DensW(M,P,Q),Swn(M,P,Q),Swn1(M,P,Q),Sn(M,P,Q),&
ViscoN(M,P,Q),ViscoW(M,P,Q),Kwr(M,P,Q),Knr(M,P,Q),&
Pw(M,P,Q),DerPcx(M,P,Q),DerPcy(M,P,Q),&
DerPcz(M,P,Q),sat(a),precap(a),satur(b),permoj(b),&
perno(b),pres(c),viscomoj(c),visconomoj(c),transx(M+1,P,Q),&
transy(M,P+1,Q),transz(M,P,Q+1),fraccion(b),dfraccion(b),&
f(M,P,Q),df(M,P,Q),Sn1(M,P,Q),div(M,P,Q))
Call Datos(No,M,P,Q,x,y,z,t,U,V,W,qt,poros,alfan1,titaN,
titaW,Kx,Ky,Kz,Pc,Zo,DerZx,DerZy,DerZz,DensN,
DensW,ViscoN,ViscoW,Kwr,Knr,g,Swn1,Pw,tol1,tol2,valor,e,a,b,c,sat,precap,satur
,permoj,perno,pres,viscomoj,visconomoj,ban,Un,Vn,Wn,min,qn,qw,max,escr,Sn1, fra
ccion,dfraccion,f,df)

!
!   Cuerpo principal del programa
!
!
Open(34,file="flujofinal2X.txt")
Open(35,file="flujofinal2Y.txt")
Open(36,file="flujofinal2Z.txt")
Open(37,file="saturMO.txt")
Open(38,file="saturNO.txt")
Open(39,file="presiónf.txt")
Open(16,file="divergencia.txt")

n=0
20 Call Inicializacion(M,P,Q,Sn1,Sn,Swn1,Swn,alfan1,alfan,U1,U,V1,V,W1,W,&
transx,transy,transz,Un,Vn,Wn)

10 ind=0
h=t
Call Flujo(M,P,Q,x,y,z,h,t,U,V,W,U1,V1,W1,poros,alfan,
alfan1,titaN,titaW,Kx,Ky,Kz,tol1,tol2,qn,qw,
salida,min,transx,transy,transz,n)
Write(*,*) 'flujo'
Write(*,*) h
If(salida.EQ.1000) then
    write(*,*) 'Se alcanzo el numero maximo de iteraciones'
    Goto 500
Endif
Call Saturación(M,P,Q,x,y,z,h,g,U,V,W,qn,qw,poros,alfan,

```

```

alfan1,titaN,titaW,Kx,Ky,Kz,Pc,DerZx,DerZy,DerZz,DensN,DensW,Swn1,Swn,Sn1,DerP
cx,
DerPcy,DerPcz,Un,Vn,Wn,div)
    Call Verificación(M,P,Q,Sn1,Sn,ind,valor,t,max)
    If(t.LT.min) goto 500
    Write(*,*) 'saturación'
    Write(*,*) h
    If(ind.NE.0) goto 10
    Call Actualizar(M,P,Q,Swn1,Swn,Pc,Kwr,Knr,ViscoN,ViscoW,
        titaN,titaW,a,b,sat,precap,satur,permoj,perno,
ban,qt,DensN,DensW,qn,qw,fraccion,dfraccion,
f,df)
    Call Escritura(M,P,Q,U,V,W,Swn1,Sn1,n,h,escr,Un,Vn,Wn,div)
    n=n+h
    print*, 'tiempo ',n
    If(ban.EQ.1) goto 500
    If(n.LT.No) goto 20
500 Continue
    Close(39)
    Close(34)
    Close(35)
    Close(36)
    Close(37)
    Close(38)
    Close(16)
    Deallocate(U,V,W,U1,V1,W1,qt,qn,qw,poros,alfan,alfan1,titaN,&
        titaW,Kx,Ky,Kz,Pc,Zo,DerZx,DerZy,DerZz,Un,Vn,Wn,&
DensN,DensW,Swn,Swn1,Sn,ViscoN,ViscoW,Kwr,Knr,Pw,
DerPcx,DerPcy,DerPcz,transx,transy,transz,satur,&
permoj,perno,pres,viscomoj,visconomoj,sat,precap)
    Stop
    End
!
!*****
! Subrutina Datos: Introduce todos los datos necesarios para la Realización
de los cálculos de las demás rutinas del programa principal
!*****
!
    Subroutine Datos(No,M,P,Q,x,y,z,t,U,V,W,qt,poros,alfan1,
titaN,titaW,Kx,Ky,Kz,Pc,Zo,DerZx,DerZy,DerZz,
DensN,DensW,ViscoN,ViscoW,Kwr,Knr,g,Swn1,Pw,
tol1,tol2,valor,e,a,b,c,sat,precap,satur,permoj,
perno,pres,viscomoj,visconomoj,ban,Un,Vn,Wn,min,qn,qw,max,escr,Sn1,fraccion,df
raccion,f,df)
        Implicit None
        Integer M,P,Q,i,j,k,a,b,c,ban
        Real*8 No,x,y,z,t,g,min,Derivada,tol1,tol2,valor,sat(a),
precap(a),satur(b),e,permoj(b),perno(b),pres(c),
viscomoj(c),visconomoj(c),max,escr,fraccion(b),
dfraccion(b)
        Real*8,dimension(M,P,Q)::qt,poros,alfan1,titaN,titaW,Kx,Ky,
Kz,DensN,DensW,Swn1,ViscoN,ViscoW,
Kwr,Knr,Pc,Zo,Pw,qn,qw,Sn1,f,df
        Real*8 U(M+1,P,Q),V(M,P+1,Q),W(M,P,Q+1),Un(M+1,P,Q),
Vn(M,P+1,Q),Wn(M,P,Q+1),DerZx(M,P,Q),DerZy(M,P,Q),

```

```

DerZz (M, P, Q)
!
!   Lectura de Variables simples
!
Open(15,file="discretización.txt")
Do i=1,14
    Read(15,*)
Enddo
Read(15,*)No
Read(15,*)x
Read(15,*)y
Read(15,*)z
Read(15,*)t
Read(15,*)g
Read(15,*)tol1
Read(15,*)tol2
Read(15,*)e
Read(15,*)valor
Read(15,*)min
Read(15,*)max
Read(15,*)escr
Close(15)
!
!   Lectura de variables matriciales
!
Call Llena_matriz(M,P,Q,U,V,W,qt,Kx,Ky,Kz,Zo,DensN,DensW,&
    Swn1,Pw,poros,x,y,z)
Call Propiedades_interpoladas(Swn1,Pc,Kwr,Knr,Pw,ViscoW,
ViscoN,M,P,Q,a,b,c,sat,precap,satur,
permoj,perno,pres,viscomoj,visconomoj,ban fraccion,dfraccion,f,df,e)
alfan1=1
ban=0
Un=0
Vn=0
Wn=0
Do k=1,Q
    Do i=1,M
        Do j=1,P
            Sn1(i,j,k)=1-Swn1(i,j,k)
        EndDo
    EndDo
EndDo
!
!   Valores que se calculan
!
Do k=1,Q
    Do i=1,M
        Do j=1,P
            titaN(i,j,k)=Knr(i,j,k)/ViscoN(i,j,k)
            titaW(i,j,k)=Kwr(i,j,k)/ViscoW(i,j,k)
        EndDo
    EndDo
EndDo
Do k=1,Q
    Do i=1,M
        Do j=1,P
            If(qt(i,j,k).LT.0) then

```

```

                qw(i,j,k)=qt(i,j,k)
                qn(i,j,k)=0
            Else
                qn(i,j,k)=qt(i,j,k)*f(i,j,k)
                qw(i,j,k)=qt(i,j,k)-qn(i,j,k)
            Endif
        EndDo
    EndDo
EndDo
Do k=1,Q
    Do i=1,M-1
        Do j=1,P
            DerZx(i,j,k)=Derivada(Zo(i+1,j,k),
Zo(i,j,k),x)
        EndDo
    EndDo
EndDo
Do k=1,Q
    Do i=1,M
        Do j=1,P-1
            DerZy(i,j,k)=Derivada(Zo(i,j+1,k),
Zo(i,j,k),y)
        EndDo
    EndDo
EndDo
Do k=1,Q-1
    Do i=1,M
        Do j=1,P
            DerZz(i,j,k)=Derivada(Zo(i,j,k+1),
Zo(i,j,k),z)
        EndDo
    EndDo
EndDo
Return
End
!
!*****
! Subrutina llenado de matrices: Esta subrutina abre todos
! los archivos que contienen las propiedades del yacimiento
! e introduce estos valores en respectivas matrices de datos
!*****
!
Subroutine Llena_matriz(M,P,Q,U,V,W,qt,Kx,Ky,Kz,Zo,DensN,&
DensW,Swn1,Pw,poros,x,y,z)
Implicit None
Integer M,P,Q,i,j,k
Real*8,Dimensión(M,P,Q)::qt,Kx,Ky,Kz,DensN,DensW,Swn1,poros,Zo,Pw
Real*8 U(M+1,P,Q),V(M,P+1,Q),W(M,P,Q+1),x,y,z

Open(16,file="flujoinicial.txt")
Open(19,file="tasadepozos.txt")
Open(20,file="permeabilidad.txt")
Open(23,file="densidades.txt")
Open(25,file="saturaciónmojante.txt")
Open(26,file="presiónw.txt")

```

```

Open(29,file="cotadelyacimiento.txt")
Open(30,file="porosidad.txt")
Read(16,*)
Read(16,*)
Read(16,*)((U(i,j,k),j=1,P),i=1,M+1),k=1,Q)
Do i=1,3
  Read(16,*)
EndDo
Read(16,*)((V(i,j,k),j=1,P+1),i=1,M),k=1,Q)
Do i=1,3
  Read(16,*)
EndDo
Read(16,*)((W(i,j,k),j=1,P),i=1,M),k=1,Q+1)

Read(19,*)((qt(i,j,k),j=1,P),i=1,M),k=1,Q)
Do i=1,3
  Read(20,*)
EndDo
Read(20,*)((Kx(i,j,k),j=1,P),i=1,M),k=1,Q)
  Do i=1,3
    Read(20,*)
  EndDo
Read(20,*)((Ky(i,j,k),j=1,P),i=1,M),k=1,Q)
Do i=1,3
  Read(20,*)
EndDo
Read(20,*)((Kz(i,j,k),j=1,P),i=1,M),k=1,Q)
Read(23,*)
Read(23,*)
Read(23,*)((DensN(i,j,k),j=1,P),i=1,M),k=1,Q)
Do i=1,3
  Read(23,*)
EndDo
Read(23,*)((DensW(i,j,k),j=1,P),i=1,M),k=1,Q)
Read(25,*)((Swn1(i,j,k),j=1,P),i=1,M),k=1,Q)
Read(26,*)((Pw(i,j,k),j=1,P),i=1,M),k=1,Q)
Read(29,*)((Zo(i,j,k),j=1,P),i=1,M),k=1,Q)
Read(30,*)((poros(i,j,k),j=1,P),i=1,M),k=1,Q)

qt=5.61458*qt/(x*y*z)

Close(16)
Close(19)
Close(20)
Close(23)
Close(25)
Close(26)
Close(29)
Close(30)
Return
End
!
!*****
!*****
! Subrutina Propiedades interpoladas: Esta subrutina interpola
! los valores de la presión capilar y la permeabilidad relativa en función
de la saturación; y la viscosidad en función de la presión.

```

```

!
!
!   Variables locales para esta subrutina:
!
!   Variables enteras:
!   l: Indice que recorre las tablas de interpolación
!
!
!   Subroutine Propiedades_interpoladas(Swn1,Pc,Kwr,Knr,
Pw,ViscoW,ViscoN,M,Q,P,a,b,c,sat,&
precap,satur,permoj,perno,&
pres,viscomoj,visconomoj,ban,&                fraccion,dfraccion,f,df,e)
!   Implicit None
!   Integer M,P,Q,i,j,k,a,b,c,l,ban
!   Real*8 sat(a),precap(a),satur(b),permoj(b),perno(b),
pres(c),viscomoj(c),visconomoj(c),fraccion(b),
dfraccion(b),e
!   Real*8,Dimension(M,P,Q)::Swn1,Kwr,Knr,ViscoW,ViscoN,Pw,Pc,&
!   f,df
!
!   Character(10) chart
!   Open(31,file="presióncapilar.txt")
!   Open(32,file="permerelativa.txt")
!   Open(33,file="viscosidad.txt")
!   Open(40,file="flujofrac.txt")
!   Read(31,*)
!   Read(31,*)
!   Read(31,*)(sat(l),l=1,a)
!   Read(31,*)(precap(l),l=1,a)
!   Read(32,*)
!   Read(32,*)
!   Read(32,*)(satur(l),l=1,b)
!   Read(32,*)(permoj(l),l=1,b)
!   Read(32,*)(perno(l),l=1,b)
!   Read(33,*)
!   Read(33,*)
!   Read(33,*)(pres(l),l=1,c)
!   Read(33,*)(viscomoj(l),l=1,c)
!   Read(33,*)(visconomoj(l),l=1,c)
!   Read(40,*)
!   Read(40,*)(fraccion(l),l=1,b)
!   Read(40,*)
!   Read(40,*)(dfraccion(l),l=1,b)
!
!   Do k=1,Q
!       Do i=1,M
!           Do j=1,P
!               Chart="Saturación"
!               Call Tabseq(sat,precap,a,Swn1(i,j,k),
Pc(i,j,k),ban,chart)
!               Call Tabseq(satur,permoj,b,Swn1(i,j,k),
Kwr(i,j,k),ban,chart)
!               Call Tabseq(satur,fraccion,b,Swn1(i,j,k),
f(i,j,k),ban,chart)
!               Call Tabseq(satur,dfraccion,b,Swn1(i,j,k),
df(i,j,k),ban,chart)
!               Call Tabseq(satur,perno,b,1Swn1(i,j,k),
Knr(i,j,k),ban,chart)

```

```

                                Chart="Presión"
                                Call Tabseq(pres,viscomoj,c,Pw(i,j,k),
ViscoW(i,j,k),ban,chart)
                                Call Tabseq(pres,visconomoj,c,Pw(i,j,k),
ViscoN(i,j,k),ban,chart)
                                EndDo
                                EndDo
                                EndDo
                                Close(31)
                                Close(32)
                                Close(33)
                                Close(40)
                                Return
                                End

!*****
!*****
!      Subrutina tabseq: Esta es una rutina de interpolación lineal de
búsqueda secuencial tomada del libro de Aziz & Settari
!
!
!      Variables locales para esta subrutina:
!
!      x: vector de valores independientes (argumentos)
!      y: vector de valores dependientes (valores de la función)
!      xx: argumento
!      yy: Interpolación de la función para el argumento xx
!      n: numero de entradas de la tabla
!
!
!      Subroutine tabseq(x,y,n,xx,yy,ban,chart)
Real*8 x(n),y(n),xx,yy
Integer n,i,ban
Character(10) chart
If(xx.LT.x(1)) GOTO 99
i=1
97  i=i+1
    If(i.GT.n) GOTO 98
    If(xx.GT.x(i)) GOTO 97
    yy=y(i-1)+(y(i)-y(i-1))*(xx-x(i-1))/(x(i)-x(i-1))
    Return
99  yy=y(1)
Write(*,*)'El valor de ',chart,' esta por debajo del rango de la tabla'
    ban=1
    Return
98  yy=y(n)
Write(*,*)'El valor de ',chart,' esta por encima del rango de la
tabla'
    ban=1
    Return
    End
!
!
!      Función Derivada: Esta función la derivada de primer orden
!      utilizando el método de diferencias finitas centradas
!

```

```

Function derivada(p2,p1,x)
Implicit None
Real*8 p2,p1,x,derivada
derivada=(p2-p1)/(x)
End

!
!*****
!*****
! Subrutina Inicialización: Se encarga de almacenar los valores de
flujo,Saturación y alfa obtenidos en el paso de tiempo anterior, en variables
auxiliares para poder utilizarlos donde sea necesario para calcular los
valores del paso de tiempo actual.
!*****
!*****
!
!
!
Subroutine Inicializacion(M,P,Q,Sn1,Sn,Swn1,Swn,alfan1,
alfan,U1,U,V1,V,W1,W,&
transx,transy,transz,Un,Vn,Wn)

Implicit None
Integer M,P,Q,i,j,k
Real*8,dimension (M,P,Q):: Sn1,Sn,Swn1,Swn,alfan1,alfan
Real*8 U(M+1,P,Q),U1(M+1,P,Q),V(M,P+1,Q),V1(M,P+1,Q),
W(M,P,Q+1),W1(M,P,Q+1),transx(M+1,P,Q),transy(M,P+1,Q),transz(M,P,Q+1),Un(M+1,
P,Q), Vn(M,P+1,Q),Wn(M,P,Q+1)
alfan=alfan1
Sn=Sn1
Swn=Swn1
U1=U
V1=V
W1=W
transx=0
transy=0
transz=0
Un=0
Vn=0
Wn=0
Return
End

!
!*****
!*****
! Subrutina Flujo: Esta subrutina sirve para calcular el campo
! de flujo simultáneamente con la compresibilidad artificial a
! través de un procedimiento iterativo
!*****
!*****
!
!
! Variables locales para esta subrutina
!
! delta: Diferencia del valor de compresibilidad artificial entre
iteraciones
! c: Coeficiente para el cálculo de las perturbaciones de flujo
!
!
```

```

!
Subroutine Flujo(M,P,Q,x,y,z,h,t,U,V,W,U1,V1,W1,poros,
alfan,alfan1,titaN,titaW,Kx,Ky,Kz,tol1,tol2,
qn,qw,salida,min,transx,transy,transz,n)
Implicit None
Integer M,P,Q,i,j,k,cont,salida,ind
Real*8 x,y,z,h,t,delta,tol,min,n,tol1,tol2
Real*8,dimension(M,P,Q)::poros,alfan,alfan1,titaN,titaW,&
Kx,Ky,Kz,qn,qw,alfa,c
Real*8 U(M+1,P,Q),V(M,P+1,Q),W(M,P,Q+1),U1(M+1,P,Q),
V1(M,P+1,Q),W1(M,P,Q+1),transx(M+1,P,Q),t
ransy(M,P+1,Q),transz(M,P,Q+1),Ue1(M+1,P,Q), Ue2(M+1,P,Q)
!
! Primera iteracion
!
!
34 ind=1
t=h
Do k=1,Q
Do i=1,M
Do j=1,P
Call calculoalfa(U1(i+1,j,k),U1(i,j,k),
V1(i,j+1,k),V1(i,j,k),W1(i,j,k+1),
W1(i,j,k),x,y,z,h,qn(i,j,k),
qw(i,j,k),poros(i,j,k),alfan(i,j,k),alfan1(i,j,k))
EndDo
EndDo
EndDo
cont=1
salida=0
Do k=1,Q
Do i=2,M
Do j=1,P
transx(i,j,k)=((titaN(i-1,j,k)+
titaW(i-1,j,k))*Kx(i-1,j,k)+
(titaN(i,j,k)+titaW(i,j,k))*Kx(i,j,k))/2
Enddo
Enddo
Enddo
Do k=1,Q
Do i=1,M
Do j=2,P
transy(i,j,k)=((titaN(i,j-1,k)+
titaW(i,j-1,k))*Ky(i,j-1,k)+
(titaN(i,j,k)+titaW(i,j,k))*Ky(i,j,k))/2
Enddo
Enddo
Enddo
Do k=2,Q
Do i=1,M
Do j=1,P
transz(i,j,k)=((titaN(i,j,k-1)+
titaW(i,j,k-1))*Kz(i,j,k-1)+
(titaN(i,j,k)+titaW(i,j,k))*Kz(i,j,k))/2
Enddo
Enddo
Enddo
Enddo

```

```

U=U1
V=V1
W=W1

alfa=alfan
!
!
If(n.EQ.0) then
    tol=tol1
Else
    tol=tol2

Endif
150 If(cont.NE.0) then
    cont=0
    Do k=1,Q
        Do i=1,M
            Do j=1,P
                delta=1-alfan1(i,j,k)
                c(i,j,k)=(poros(i,j,k)*delta/h)/
((transx(i,j,k)+transx(i+1,j,k))/      (x*x)+(transy(i,j,k)+
transy(i,j+1,k))/(y*y)+(transz(i,j,k)+ transz(i,j,k+1))/(z*z))
                Enddo
            Enddo
        Enddo
        Do k=1,Q
            Do i=2,M
                Do j=1,P
                    Ue1(i,j,k)=+c(i,j,k)*transx(i,j,k)/x
                    Ue2(i,j,k)=-c(i,j,k)*transx(i,j,k)/x
                    U(i,j,k)=U(i,j,k)+(Ue1(i,j,k)+
Ue2(i,j,k))*0.5
                Enddo
            Enddo
        Enddo
        Do k=1,Q
            Do i=1,M
                Do j=2,P
                    V(i,j,k)=V(i,j,k)+(c(i,j,k)-
c(i,j-1,k))*transy(i,j,k)/
(2*y)
                Enddo
            Enddo
        Enddo
        Do k=2,Q
            Do i=1,M
                Do j=1,P
                    W(i,j,k)=W(i,j,k)+(c(i,j,k)-
c(i,j,k-1))*transz(i,j,k)/
(2*z)
                Enddo
            Enddo
        Enddo

        alfa=alfan1
        Do k=1,Q
            Do i=1,M

```

```

Do j=1,P
    Call calculoalfa(U(i+1,j,k),U(i,j
,k),V(i,j+1,k),V(i,j,k),      W(i,j,k+1),W(i,j,k),x,y,
                                z,h,qn(i,j,k),qw(i,j,k),
poros(i,j,k),alfan(i,j,k),
alfan1(i,j,k))
                                If((alfan1(i,j,k).GT.(1+tol)).OR.&
                                (alfan1(i,j,k).LT.(1-tol))) then
                                    cont=cont+1
                                Endif
    EndDo
EndDo
EndDo
salida=salida+1
If((salida.EQ.1000).AND.(h.GT.min)) then
    h=h*0.5
Endif

If(h.LT.min) goto 33
If(h.NE.t) goto 34
If(salida.EQ.1000) goto 33
Goto 150
Endif
33 Continue
Return
End

!
!*****
!*****
! Subrutina calculoalfa: Esta subrutina calcula la compresibilidad
artificial
!
Subroutine calculoalfa(U1,U2,V1,V2,W1,W2,x,y,z,h,qn,qw,
poros,alfan,alfan1)
Implicit None
Real*8 U1,U2,V1,V2,W1,W2,x,y,z,h,qn,qw,poros,alfan,alfan1,
divergencia
alfan1=(alfan)+((( -1)*divergencia(U1,U2,V1,V2,W1,W2,x,y,z)
-(qn+qw))/poros)*h
Return
End

!
Function divergencia(u1,u2,v1,v2,w1,w2,x,y,z)
Real*8 u1,u2,v1,v2,w1,w2,x,y,z
divergencia=((u1-u2)/(x))+((v1-v2)/(y))+((w1-w2)/(z))
End

!
!*****
!*****
! Subrutina Saturación: Esta subrutina calcula el campo de saturaciones a
partir del flujo calculado anteriormente
!*****
!*****
!
! Variables locales para esta subrutina:
!
! DerPcx: Derivada de al presión capilar con respecto a "x"

```

```

!      DerPcy: Derivada de al presión capilar con respecto a "y"
!      DerPcz: Derivada de al presión capilar con respecto a "z"
!
!
!
Subroutine Saturación(M,P,Q,x,y,z,h,g,U,V,W,qn,qw,poros,&
    alfan,alfan1,titaN,titaW,Kx,Ky,Kz,Pc,DerZx,DerZy&
        ,DerZz,DensN,DensW,Swn1,Swn,Snl,DerPcx,DerPcy,&
            DerPcz,Un,Vn,Wn,div)
    Implicit None
    Integer M,P,Q,i,j,k,b
    Real*8 x,y,z,h,g,Derivada,no_mojante,divergencia
    Real*8,Dimension(M,P,Q)::qn,qw,poros,alfan,alfan1,titaN,
titaW,Kx,Ky,Kz,DensN,DensW,Swn1,Swn,
Snl,Pc,div,transxn,transxw,transyn,
transyw,transzn,transzw
    Real*8 U(M+1,P,Q),V(M,P+1,Q),W(M,P,Q+1),Un(M+1,P,Q),
Vn(M,P+1,Q),Wn(M,P,Q+1),DerZx(M,P,Q),DerZy(M,P,Q),
DerZz(M,P,Q),DerPcx(M,P,Q),DerPcy(M,P,Q),DerPcz(M,P,Q)

!
!      Cálculo del flujo para la fase no_mojante
!
    Do k=1,Q
        Do i= 1,M-1
            Do j=1,P
                DerPcx(i,j,k)=Derivada(Pc(i+1,j,k),
Pc(i,j,k),x)
                transxn(i,j,k)=(Kx(i,j,k)*titaN(i,j,k)+
Kx(i+1,j,k)*titaN(i+1,j,k))/2
                transxw(i,j,k)=(Kx(i,j,k)*titaW(i,j,k)+
Kx(i+1,j,k)*titaW(i+1,j,k))/2
            EndDo
        EndDo
    EndDo
    Do k=1,Q
        Do i=1,M
            Do j=1,P-1
                DerPcy(i,j,k)=Derivada(Pc(i,j+1,k),
Pc(i,j,k),y)
                transyn(i,j,k)=(Ky(i,j,k)*titaN(i,j,k)+
Ky(i,j+1,k)*titaN(i,j+1,k))/2
                transyw(i,j,k)=(Ky(i,j,k)*titaW(i,j,k)+
Ky(i,j+1,k)*titaW(i,j+1,k))/2
            EndDo
        EndDo
    EndDo
    Do k=1,Q-1
        Do i=1,M
            Do j=1,P
                DerPcz(i,j,k)=Derivada(Pc(i,j,k+1),
Pc(i,j,k),z)
                transzn(i,j,k)=(Kz(i,j,k)*titaN(i,j,k)+
Kz(i,j,k+1)*titaN(i,j,k+1))/2
                transzw(i,j,k)=(Kz(i,j,k)*titaW(i,j,k)+
Kz(i,j,k+1)*titaW(i,j,k+1))/2
            EndDo
        EndDo
    EndDo

```

```

        EndDo
        Do k=1,Q
            Do i=2,M
                Do j=1,P
                    Un(i,j,k)=no_mojante(transxn
(i-1,j,k),transxw(i-1,j,k),&
U(i,j,k),DerPcx(i-1,j,k)
,DensN(i,j,k),DensN(i-1,j,k),DensW(i,j,k),DensW(i-1,j,k),g,DerZ(i-1,j,k))
                    EndDo
                EndDo
            EndDo
        EndDo

Do k=1,Q
    Do i=1,M
        Do j=1,P
            div(i,j,k)=(Un(i+1,j,k)-Un(i,j,k))/x
        EndDo
    EndDo
EndDo

        Do k=1,Q
            Do i=1,M
                Do j=2,P
                    Vn(i,j,k)=no_mojante(transyn(i-1,j,k),transyw(i-1,j,k),&
                    V(i,j,k),DerPcy(i,j-1,k),
                    DensN(i,j,k),DensN(i,j-1,k),
                    DensW(i,j,k),DensW(i,j-1,k),
                    g,DerZy(i,j-1,k))
                EndDo
            EndDo
        EndDo
        Do k=2,Q
            Do i=1,M
                Do j=1,P
                    Wn(i,j,k)=no_mojante(transzn(i-1,j,k),transzw(i-1,j,k),&
                    W(i,j,k),DerPcz(i,j,k-1),
                    DensN(i,j,k),DensN(i,j,k-1),
                    DensW(i,j,k),DensW(i,j,k-1),
                    g,DerZz(i,j,k-1))
                EndDo
            EndDo
        EndDo
    EndDo
!
!   Cálculo del campo de saturaciones
!

        Do k=1,Q
            Do i=1,M
                Do j=1,P
                    Swn1(i,j,k)=(Swn(i,j,k)+h*(divergencia(
Un(i+1,j,k),Un(i,j,k),Vn(i,j+1,k),
Vn(i,j,k),Wn(i,j,k+1),Wn(i,j,k),x,
y,z)+qn(i,j,k)+poros(i,j,k)*(alfan1(i,j,k)-alfan(i,j,k))/h)/
(poros(i,j,k)*alfan1(i,j,k)))/
(1+(alfan1(i,j,k)-alfan(i,j,k)))/

```

```

alfan1(i,j,k)
                Sn1(i,j,k)=1-Swn1(i,j,k)
            EndDo
        EndDo
    EndDo
    Return
End

!
!   Función no_mojante: esta función calcula la Porción no mojanete del flujo
total
!
    function no_mojante(transxn,transxw,U,DerPcx,DensN1,
    DensN2,DensW1,DensW2,g,DerZx)
        Implicit none
        Real*8 transxn,transxw,U,DerPcx,DensN1,DensN2,&
            DensW1,DensW2,g,DerZx,no_mojante
        no_mojante=(transxn/(transxn+transxw))*
U-((transxn*transxw)/(transxn+transxw))&
*(DerPcx-((DensN1+DensN2)/2-(DensW1+DensW2)/2)*g*DerZx/144)
        End

!
! *****
! *****
!   Subrutina Verificación: Verifica sí el cambio de saturación entre un
paso de tiempo y el siguiente es mayor al valor permitido, para saber cuando
se debe modificar el paso de tiempo.
! *****
! *****
!
!
!
    Subroutine Verificación(M,P,Q,Sn1,Sn,ind,valor,t,max)
    Implicit none
    Integer M,P,Q,i,j,k,ind
    Real*8 valor,t,max
    Real*8,dimensión(M,P,Q)::Sn1,Sn
    Do k=1,Q
        Do i=1,M
            Do j=1,P
                If((abs(Sn1(i,j,k)-Sn(i,j,k))/
Sn(i,j,k)).GT.valor) then
                    ind=1
                Endif
            Enddo
        Enddo
    Enddo
    If(ind.NE.0) then
        t=t*0.5
    Endif
    If((ind.EQ.0).AND.((t*1.25).LT.max)) then
        t=t*1.25
    Endif
    Return
End

```

```

!
!*****
*****
!      Subrutina Actualizar: esta subrutina se encarga de actualizar los
valores de presión capilar y permeabilidades relativas en función de la nueva
saturación mojanje
!*****
*****
!
!      Variables locales para esta subrutina:
!
!      Los valores para a,b,l,sat,precap,satur,permoj y perno son los mismos
que fueron definidos para la subrutina de Propiedades_interpoladas
!
!
!      Subroutine Actualizar(M,P,Q,Swn1,Swn,Pc,Kwr,Knr,ViscoN,
ViscoW,titaN,titaW,a,b,sat,precap,satur,
permoj,perno,ban,qt,DensN,DensW,qn,qw,fraccion,
dfraction,f,df)
      Implicit None
      Integer M,P,Q,i,j,k,a,b,ban
      Real*8 sat(a),precap(a),satur(b),permoj(b),perno(b),
fraccion(b),dfraction(b)
      Character(10) chart
      Real*8,dimension(M,P,Q):: Swn1,Swn,Kwr,Knr,ViscoN,
ViscoW,titaN,titaW,qt,&
      DensN,DensW,qn,qw,f,df,Pc

      chart= "saturación"
      Do k=1,Q
         Do i=1,M
            Do j=1,P
               Call Tabseq(sat,precap,a,Swn1(i,j,k),
Pc(i,j,k),ban,chart)
               Call Tabseq(satur,permoj,b,Swn1(i,j,k),
Kwr(i,j,k),ban,chart)
               Call Tabseq(satur,fraccion,b,Swn1(i,j,k),
f(i,j,k),ban,chart)
               Call Tabseq(satur,dfraction,b,Swn1(i,j,k),
df(i,j,k),ban,chart)
               Call Tabseq(satur,perno,b,1-Swn1(i,j,k),
Knr(i,j,k),ban,chart)
               titaN(i,j,k)=Knr(i,j,k)/ViscoN(i,j,k)
               titaW(i,j,k)=Kwr(i,j,k)/ViscoW(i,j,k)
            EndDo
         EndDo
      EndDo
      Do k=1,Q
         Do i=1,M
            Do j=1,P
               If(qt(i,j,k).LT.0) then
                  qw(i,j,k)=qt(i,j,k)
                  qn(i,j,k)=0
               Else
                  qn(i,j,k)=qt(i,j,k)*(f(i,j,k)+df(i,j,k)*&
(Swn1(i,j,k)-Swn(i,j,k)))
                  qw(i,j,k)=qt(i,j,k)-qn(i,j,k)
            EndIf
         EndDo
      EndDo

```

```

        Endif
      EndDo
    EndDo
  EndDo
  Return
End

!
!
!*****
! Subrutina Escritura: se encarga de escribir en los archivos de salida,
! los valores de Flujo y Saturación correspondientes al paso de tiempo en
! estudio.
!*****
!
!
Subroutine Escritura(M,P,Q,U,V,W,Swn1,Sn1,n,h,escr,
Un,Vn,Wn,div)
  Implicit None
  Integer M,P,Q,i,j,k
  Real*8 n,h,escr
  Real*8 U(M+1,P,Q),V(M,P+1,Q),W(M,P,Q+1),Un(M+1,P,Q), &
    Vn(M,P+1,Q),Wn(M,P,Q+1)
  Real*8,Dimensión(M,P,Q)::Swn1,Sn1,div
  If((int((n+h)/escr)-int(n/escr)).NE.0) then
    Do k=1,Q
      Do i=1,M+1
        DO j=1,P
          Write(34,*)i,U(i,j,k)
        EndDo
      EndDo
    EndDo
    Do k=1,Q
      Do i=1,M+1
        DO j=1,P
          Write(700,*)Un(i,j,k)
        EndDo
      EndDo
    EndDo
    Do k= 1,Q
      Do i= 1,M
        Do j= 1,P+1
          Write(35,*)V(i,j,k)
        EndDo
      EndDo
    EndDo
    Do k=1,Q+1
      Do i=1,M
        Do j=1,P
          Write(36,*)W(i,j,k)
        EndDo
      EndDo
    EndDo
    Do k=1,Q
      Do i=1,M
        Do j=1,P

```

```
        Write(37,*) Swn1(i,j,k)
        Write(38,*) Sn1(i,j,k)
        Write(16,*) i,div(i,j,k)
    EndDo
EndDo
Write(34,*) 'fin de paso de tiempo',n+h
Write(34,*)
Write(35,*) 'fin de paso de tiempo'
Write(35,*)
Write(36,*) 'fin de paso de tiempo'
Write(36,*)
Write(37,*) 'fin de paso de tiempo'
Write(37,*)
Write(38,*) 'fin de paso de tiempo'
Write(38,*)
Endif
Return
End
```

APENDICE B. MANUAL DEL USUARIO.

En líneas generales, el simulador de yacimientos desarrollado en este trabajo permite obtener el campo de flujo de forma implícita, para luego resolver explícitamente, partiendo de ese resultado, los campos de saturación y eventualmente el de presión.

Para poder llevar a cabo esto, se requiere que el usuario introduzca de manera correcta los datos necesarios, a fin de que se obtengan los resultados deseados. Para tal fin, se presenta a continuación una pequeña guía para que el usuario conozca cuales son los datos que requiere el programa, así como la forma en que deben ingresarse, para obtener así el mejor funcionamiento del mismo.

Los datos a ser ingresados no se refieren únicamente a propiedades del yacimiento o del fluido, también se necesitará información acerca de cómo ha de ser llevada la parte numérica (cuanto es el período de estudio, cual es el tamaño del paso de tiempo, etc.). Debido a la diversidad de datos a utilizarse, se dividió la entrada de datos en diferentes archivos, para hacer más fácil la ubicación y modificación de ellos dentro del programa.

Por lo tanto la esquematización de la entrada de datos es a través de diferentes archivos a los cuales puede acceder el usuario de forma separada, pues cada archivo es independiente de los otros, y efectuar la introducción de la información, o modificación de alguna existente, de la forma más sencilla. Cada archivo contiene una serie de títulos y rótulos para indicar al usuario que valor ha de ser ingresado en cada uno de ellos.

Es importante destacar, que la forma de separar un dato de otro dentro de un grupo de estos, es a través de un espacio en blanco, es decir, para indicarle al programa que un valor a terminado, y que el que sigue debe ser almacenado en una variable o posición distinta, se deja un espacio en blanco entre ambos valores (o se pasa a la línea siguiente).

A continuación se presenta una lista de los archivos existentes, con una breve descripción de la información que contienen, para que le sirva al usuario de guía y pueda así acceder al archivo correcto de la forma más rápida.

B.1 LISTA DE ARCHIVOS USADOS EN EL PROGRAMA.

Archivos de entrada:

Discretizacion: Se encuentra dividido en tres secciones: la primera contiene la cantidad de bloques en el yacimiento para cada dirección (M, P, Q). La segunda contiene el número de entradas de las tablas de interpolación a usar. Y el tercero, contiene los valores necesarios para hacer la discretización espacial y temporal, así como las demás variables reales simples.

Flujoincial: Valores iniciales de flujo total en todo el yacimiento para las tres direcciones.

Tasadepozos: Contiene los valores que indican donde están ubicados los pozos (inyectores o productores), y la tasa de flujo total en ellos.

Permeabilidad: Valores de la diagonal principal del tensor de permeabilidad absoluta (K_{xx} , K_{yy} , K_{zz}).

Densidades: Valores de la densidad para la fase mojante y no mojante para todo el yacimiento.

Saturacionmojante: Valores iniciales de la saturación para la fase mojanete para todo el yacimiento.

Presionw: Valores iniciales de Presión de la fase mojanete para todo el yacimiento.

Cotadelyacimiento: Contiene los valores de las diferentes cotas de las capas del yacimiento.

Porosidad: Contiene los valores de porosidad para todo el yacimiento.

Presioncapilar: Tabla de valores de Presión Capilar vs Saturación de la fase mojanete para ser usado en las interpolaciones.

Permerelativa: Tabla de valores de permeabilidad relativa (K_{wr} , K_{nr}) vs Saturación para ser usado en las interpolaciones.

Viscosidad: Tabla de valores de viscosidad (μ_w y μ_n) vs Presión para ser usado en las interpolaciones.

Archivos de salida:

Flujofinalx: Almacena los valores de flujo total en la dirección X, que se obtienen en cada paso de tiempo.

FlujofinalY: Almacena los valores de flujo total en la dirección Y, que se obtienen en cada paso de tiempo.

FlujofinalZ: Almacena los valores de flujo total en la dirección Z, que se obtienen en cada paso de tiempo.

SaturMo: Almacena los valores de saturación de la fase mojanete para cada paso de tiempo.

SaturNo: Almacena los valores de saturación de la fase mojante para cada paso de tiempo.

B.2 FORMA DE INGRESAR DATOS PARA CADA ARCHIVO.

Los archivos listados en la sección anterior pueden ser clasificados en dos categorías: Archivos sin formatos y Archivos con formatos, de los cuales se hablará a continuación.

1.- ARCHIVOS SIN FORMATO:

Este conjunto de archivos contiene datos que son números reales, y como tales deben ser escritos para que sean almacenados de la forma correcta. No existe una forma determinada de entrada de datos en cuanto a si han de ser ingresados uno al lado del otro, separado por espacios, o de forma vertical, con cada valor en una línea diferente. Lo que sí se debe respetar es el orden en que los datos deben ser escritos, debido al orden establecido dentro del programa para la lectura de los mismos.

Se requiere entonces que los datos sean introducidos por capas del yacimiento, es decir por niveles en el eje z, primero se introduce todos los valores correspondientes a una capa del yacimiento, y una vez finalizada esta se pasará a la siguiente. Cada una de esas capas viene a ser un plano x-y, por lo tanto la forma de introducción de los valores en cada capa también necesitará un orden, fijando "x" y haciendo variar a "y", es decir, el valor de la celda $z=1$ $x=1$ $y=1$, luego el de la celda $z=1$ $x=1$ $y=2$, luego $z=1$ $x=1$ $y=3$, y cuando se terminen todos los valores en "y" se pasa a $x=2$, y se continúa de la misma forma ($z=1$ $x=2$ $y=1$, $z=1$ $x=2$ $y=2$, $z=1$ $x=2$ $y=3$,...).

Los archivos de este tipo son:

- cotadelyacimiento
- - porosidad

-
- - presionw
 - - saturacionmojante
 - - tasadepozos
 - 2.- ARCHIVOS CON FORMATO:

Este grupo de archivos necesita una forma determinada de escritura de los datos dentro de ellos. Una característica común en estos archivos es la necesidad de dejar una línea en blanco entre valores y títulos, es decir, se requiere que sean respetados los espacios que indican al programa donde termina un grupo de datos y comienza otro de la forma siguiente:

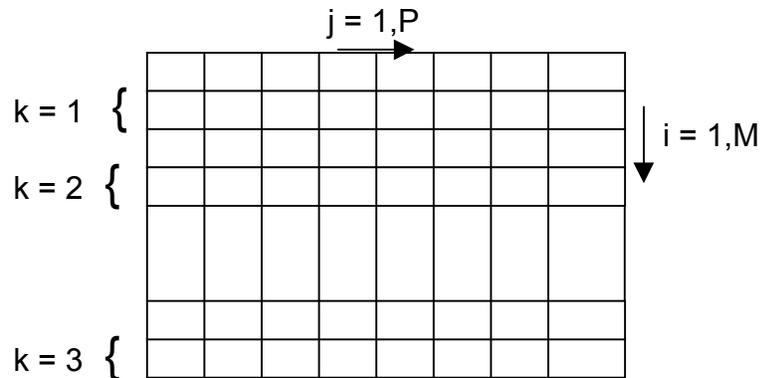
```

Título (nombre del valor que se va a almacenar)
Línea en blanco
_____
_____          Grupo de valores
_____
Línea en blanco
Título (nombre del valor que se va a almacenar)
.....

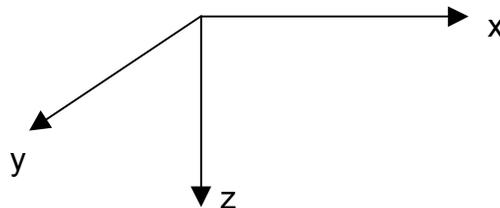
```

En cada uno de los archivos existen subtítulos que indican de forma clara que valores han de ser ingresados en cada uno de ellos. Es decir, dentro de los archivos donde deben introducirse más de un tipo de valor, estos tendrán una descripción de cual es la variable al lado derecho de donde se debe escribir el valor. Se requiere mínimo un espacio un blanco entre el valor y el subtítulo que lo describe para indicarle al programa que el valor a terminado, y lo que sigue en esa línea no ha de ser leído.

La introducción de datos en este tipo de archivos es de la siguiente manera:



Esta tabla representa la forma como deben escribirse los valores dentro del archivo, considerando que "i" representa la dirección "x", "j" representa la dirección "y", y "k" la dirección "z", considerando un sistema de referencia de la siguiente forma:



Los valores a introducir para todos los archivos son de tipo real, exceptuando en el Archivo "discretización", el cual tiene varios valores que no son reales, sino valores enteros. Estos valores son todos los que se encuentran en las dos primeras secciones del archivo (Dimensiones del yacimiento y Dimensiones de las tablas de interpolación). Otro de ellos esta ubicado en la tercera parte de este archivo (Discretización del Sistema), y es el primer valor a introducir en dicha parte, llamado "Periodo total del estudio" (No).

B.3 DESCRIPCIÓN DETALLADA DE CADA ARCHIVO.

Cotadelyacimiento:

Se colocarán los valores de la cota del yacimiento para los diferentes niveles de la forma como fue indicada para los archivos sin formato. La unidad en las que debe ser ingresadas es en pies (ft).

Densidades:

La forma de presentar los datos en este archivo es la siguiente:

DENSIDAD DE LA FASE NO MOJANTE (unidades: lb/cubic ft)

_____ Grupo de valores

DENSIDAD DE LA FASE MOJANTE (unidades: lb/cubic ft)

_____ Grupo de valores

Los grupos de valores serán ingresados según lo explicado para los archivos con formato. Todos son valores reales.

Discretización:

La forma de presentar los datos en este archivo es la siguiente:

DIMENSIONES DEL YACIMIENTO

(N° entero) **.Numero de bloques en la direccion X**

(N° entero) **.Numero de bloques en la direccion Y**

(N° entero) **.Numero de bloques en la direccion Z**

DIMENSIONES DE LAS TABLAS DE INTERPOLACION

(N° entero) **.Numero de entradas de la tabla Saturacion vs Presion Capilar**

(N° entero) **. Numero de entradas de la tabla Saturacion vs Permeabilidad**

(N° entero) **.Numero de entradas de la tabla Presion vs Viscosidad**

DISCRETIZACION DEL SISTEMA

(N° entero). **.Periodo total del estudio, en dias**

(N° real) **.Tamaño de los bloques en x(deltax), en pies (ft)**

(N° real) **.Tamaño de los bloques en y(deltay), en pies (ft)**

(N° real) **.Tamaño de los bloques en z(deltaz), en pies (ft)**

(N° real) **.Tamaño del paso de tiempo (deltat), en dias**

(N° real) **.Aceleracion de gravedad/factor de conversion** (por lo general este valor se toma como igual a 1)

(N° real) **.Tolerancia en el primer paso para la convergencia de compresibilidad artificial, adimensional**

(N° real) **.Tolerancia en los pasos siguientes para la convergencia de compresibilidad artificial, adimensional**

(N° real) **.Valor de epsilon tomado para la derivada del flujo fraccional**

(N° real) **.Valor permitido de variacion de la Saturacion entre pasos de tiempo, adimensional**

-
- (N° real) **.Minimo valor que puede tomar delta t, en dias**
 - (N° real) **.Maximo valor que puede tomar delta t, en dias**
 - (N° real) **.Cada cuanto se escribieran los reportes, en dias**

Los grupos de valores serán ingresados según lo explicado para los archivos con formato.

Después de las pruebas realizadas, se tiene que los valores de tolerancia recomendados son de 1×10^{-4} para el paso de tiempo inicial, y de 1×10^{-3} para los pasos siguientes.

Flujoincial:

La forma de presentar los datos en este archivo es la siguiente:

FLUJO INICIAL EN LA DIRECCION X (unidades: ft/dia)

_____ Grupo de valores

FLUJO INICIAL EN LA DIRECCION Y (unidades: ft/dia)

_____ Grupo de valores

FLUJO INICIAL EN LA DIRECCION Z (unidades: ft/dia)

_____ Grupo de valores

Los grupos de valores serán ingresados según lo explicado para los archivos con formato. Todos son valores reales.

Permeabilidad:

La forma de presentar los datos en este archivo es la siguiente:

TENSOR DE PERMEABILIDAD ABSOLUTA

COMPONENTE EN X (unidades: milidarcies)

_____ Grupo de valores

COMPONENTE EN Y (unidades: milidarcies)

_____ Grupo de valores

COMPONENTE EN Z (unidades: milidarcies)

_____ Grupo de valores

Los grupos de valores serán ingresados según lo explicado para los archivos con formato. Todos son valores reales.

Permerelativa:

La forma de presentar los datos en este archivo es la siguiente:

TABLA DE INTERPOLACION PERMEABILIDAD RELATIVA VS SATURACION

Grupo de valores **.Saturación (fracción adimensional)**
Grupo de valores **.Permeabilidad relativa de la fase mojante (fracción adimensional)**
Grupo de valores **.Permeabilidad relativa de la fase no mojante (fracción adimensional)**

Los grupos de valores serán ingresados de forma horizontal, separados por espacios en blanco. Todos son valores reales.

Porosidad:

Se colocarán los valores de la porosidad para cada celda del yacimiento de la forma como fue indicada para los archivos sin formato. Este es un término adimensional, expresado en forma de fracción, no de porcentaje.

Presioncapilar:

La forma de presentar los datos en este archivo es la siguiente:

TABLA DE INTERPOLACION PRESION CAPILAR VS SATUACION

Grupo de valores **.Saturación (fracción adimensional)**
Grupo de valores **.Presión Capilar (unidades: psi)**

Los grupos de valores serán ingresados de forma horizontal, separados por espacios en blanco. Todos son valores reales.

Presionw:

Se colocarán los valores de la presión para cada celda del yacimiento de la forma como fue indicada para los archivos sin formato. La unidad en la que debe ser ingresada es en psia. Valores reales.

Saturacionmojante:

Se colocarán los valores de la saturación para cada celda del yacimiento de la forma como fue indicada para los archivos sin formato. Este es un término adimensional, expresado en forma de fracción, no de porcentaje.

Tasadepozos:

Se colocarán los valores de la tasa total de pozos para cada celda del yacimiento de la forma como fue indicada para los archivos sin formato. Si el pozo es inyector será un valor negativo, y si es extractor será ingresado un valor positivo. La unidad en la que debe ser ingresada es en barriles a condiciones de yacimiento entre días (STB/días). Valores reales.

Viscosidad:

La forma de presentar los datos en este archivo es la siguiente:

TABLA DE INTERPOLACION VISCOSIDAD VS PRESION

Grupo de valores	.Presión (unidades:psia)
Grupo de valores	.Viscosidad de la fase mojante (cp)
Grupo de valores	.Viscosidad de la fase no mojante (cp)

Los grupos de valores serán ingresados de forma horizontal, separados por espacios en blanco. Todos son valores reales.

APENDICE C. MODIFICACIONES HECHAS AL ALGORITMO RPOPUESTO POR KUHN

Se puede sustituir el procedimiento iterativo propuesto por Kuhn para la solución del campo de flujo a cada paso de tiempo, por una solución más directa al sistema de ecuaciones, ya que se puede demostrar que dicho sistema converge a un valor determinado, y que dicho valor puede obtenerse.

Basándose en el esquema anteriormente explicado del algoritmo de Kuhn, solo se hará referencia a los puntos que presentan modificación. Los puntos del algoritmo que no sean mencionados, se entienden que permanecen igual al procedimiento mencionado anteriormente.

PRIMER PASO: Determinación del campo de flujo utilizando directamente la solución (convergencia) de un sistema iterativo.

Para determinar el campo de flujo, se cuenta con la ecuación (3.18):

$$-\nabla \cdot \hat{u}_t^{n+1} = q_t^{n+1} + \phi \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t}$$

La cual no es condición suficiente para resolver el problema, pues no se tiene información de \hat{u}_t^{n+1} ni de $\frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t}$. Por ello hace falta plantear otra relación, que origine un sistema de ecuaciones donde las variables sean \hat{u}_t^{n+1} y α^{n+1} , el cual se vio puede ser resuelto en forma iterativa. Basándose en las mismas ecuaciones utilizadas por

Kuhn, se puede demostrar que el sistema converge y que se puede encontrar ese valor de convergencia.

Se parte igualmente del concepto de la perturbación en el campo de flujo (ecuación 5.1):

$$\{\hat{u}_t^{n+1}\}_{i+1} = \{\hat{u}_t^{n+1}\}_i + \hat{u}^e$$

Aplicando el operador divergencia a ambos lados de la ecuación:

$$\nabla \bullet \{\hat{u}_t^{n+1}\}_{i+1} = \nabla \bullet \{\hat{u}_t^{n+1}\}_i + \nabla \bullet \hat{u}^e$$

Usando la ecuación (5.8) $\nabla \bullet \hat{u}^e = -\phi \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ se tiene:

$$\nabla \bullet \{\hat{u}_t^{n+1}\}_{i+1} = \nabla \bullet \{\hat{u}_t^{n+1}\}_i - \phi \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} + E \quad (C.1)$$

Donde E contiene el error de discretización usada para hacer la aproximación (5.10). Manteniendo al condición de convergencia para α , se puede utilizar la ecuación (5.9) $\Delta\alpha = 1 - \{\alpha^{n+1}\}_i$ en (C.1):

$$\begin{aligned} \nabla \bullet \{\hat{u}_t^{n+1}\}_{i+1} &= \nabla \bullet \{\hat{u}_t^{n+1}\}_i - \phi \frac{1 - \{\alpha^{n+1}\}_i}{\Delta t} + E \\ \nabla \bullet \{\hat{u}_t^{n+1}\}_{i+1} &= \nabla \bullet \{\hat{u}_t^{n+1}\}_i + \phi \frac{\{\alpha^{n+1}\}_i}{\Delta t} - \frac{\phi}{\Delta t} + E \end{aligned} \quad (C.2)$$

Con lo cual queda definida la primera relación del sistema iterativo. Ahora combinando las ecuaciones (5.5) y (5.6) se tiene:

$$\{\alpha^{n+1}\}_{i+1} = \alpha^n + \left\{ \frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} \right\}_{i+1} \Delta t = \alpha^n - \frac{\nabla \bullet \{\hat{u}_t^{n+1}\}_{i+1} + q_t^{n+1}}{\phi} \Delta t$$

Sustituyendo el valor de $\nabla \bullet \{\hat{u}_t^{n+1}\}_{i+1}$ de la ecuación (C.2)

$$\begin{aligned} \{\alpha^{n+1}\}_{i+1} &= \alpha^n - \frac{\nabla \cdot \{\hat{u}_t^{n+1}\}_i + \frac{\phi}{\Delta t} \{\alpha^{n+1}\}_i - \frac{\phi}{\Delta t} + E + q_t^{n+1}}{\phi} \Delta t \\ \{\alpha^{n+1}\}_{i+1} &= -\frac{\Delta t}{\phi} \nabla \cdot \{\hat{u}_t^{n+1}\}_i - \{\alpha^{n+1}\}_i + 1 + \alpha^n - \frac{\Delta t}{\phi} (E + q_t^{n+1}) \end{aligned} \quad (C.3)$$

Las ecuaciones (C.2) y (C.3) forman un esquema iterativo acoplado, el cual puede llevarse a la forma matricial:

$$Y_{i+1} = GY_i + d$$

La cual es la forma de los métodos iterativos básicos.

$$\begin{pmatrix} \nabla \cdot \{\hat{u}_t^{n+1}\} \\ \{\alpha^{n+1}\} \end{pmatrix}_{i+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\phi}{\Delta t} \\ -\frac{\Delta t}{\phi} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla \cdot \{\hat{u}_t^{n+1}\} \\ \{\alpha^{n+1}\} \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} -\frac{\phi}{\Delta t} + E \\ 1 + \alpha^n - \frac{\Delta t}{\phi} (E + q_t^{n+1}) \end{pmatrix} \quad (C.4)$$

Una condición necesaria y suficiente para la convergencia del sistema es que el radio espectral sea $\rho(G) < 1$ ⁽¹⁰⁾, siendo $\rho(G) = \max[\lambda_i]$.

Los autovalores de la matriz G son:

$$\det(\lambda I - G) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -\frac{\phi}{\Delta t} \\ \frac{\Delta t}{\phi} & -1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1) + 1 = \lambda^2 - 1 + 1 = 0 \quad \lambda = 0 \text{ (multiplicidad 2)}$$

Con lo cual se cumple la condición para convergencia, ya que $\rho(G) = 0$.

Siendo el sistema de la forma: $Y_{i+1} = GY_i + d$, cuando se alcance la convergencia ($i \rightarrow \infty$) se tendrá que: $Y_{i+1} = Y_i = Y$ que sería la solución del sistema asociado. A este punto la ecuación matricial puede escribirse:

$$Y = GY + d$$

$$(I - G)Y = d$$

$$Y = (I - G)^{-1}d$$

Por lo tanto, al cumplirse que $\rho(G)$ es menor que 1, el sistema converge a $(I-G)^{-1}d$. Usando otros teoremas del álgebra matricial, una matriz cuadrada A se dice que es nilpotente si $A^P=0$ para algún $P>0$. Si el orden de una matriz nilpotente A es igual a n , entonces $A^n=0$ ⁽¹¹⁾.

Si G es una matriz nilpotente, entonces se debe cumplir que $G^2=0$ (G es una matriz 2×2).

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{\phi}{\Delta t} \\ -\frac{\Delta t}{\phi} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\phi}{\Delta t} \\ -\frac{\Delta t}{\phi} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow G \text{ es nilpotente}$$

Para resolver entonces el sistema de ecuaciones se necesita encontrar el término $(I - G)^{-1}$. Para hacer esto se puede buscar una forma alternativa, tomando ventaja de que G es nilpotente, para evitar el laborioso calculo de la inversa de una matriz.

Si $G^k = 0$ cuando $K \rightarrow \infty$ (G es nilpotente), entonces se puede decir que:

$$(I - G)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} G^k = I + G$$

Demostración:

La más importante de todas las series infinitas es la serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

Solamente son interesantes los casos donde $|r| < 1$, puesto que si $|r| \geq 1$ los términos individuales no tienden a cero. Estas series son manejables porque sus sumas parciales pueden calcularse en términos sencillos. Las dos ecuaciones:

$$Sn = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$$

$$rSn = r + r^2 + \dots + r^n + r^{n+1}$$

Llevan a

$$Sn \cdot (1 - r) = 1 - r^{n+1}$$

Ahora bien, puesto que $|r| < 1$, por lo tanto:

$$Sn \cdot (1 - r) = 1$$

Si $(1-r)$ es una función, se puede decir que Sn sería su inversa, pues $f \cdot f^{-1} = 1$
o $f^{-1} \cdot f = 1$

Por lo tanto:

$$(1 - r)^{-1} = Sn = \sum_{n=0}^{\infty} r^n$$

Ahora aplicando esto a la matriz G , resulta:

$$\sum_{k=0}^{\infty} G^k = 1 + G + G^2 + G^3 + \dots + G^{\infty}$$

Siendo G nilpotente ($G^2 = 0$), todos los términos con exponente mayor o igual a 2 se hacen cero, quedando:

$$\sum_{k=0}^{\infty} G^k = I + G$$

Por lo tanto $(I + G)$ es la inversa de $(I - G)$.

Resumiendo, se tiene que cuando $i \rightarrow \infty$, la solución converge a:

$$Y = (I + G)d$$

Efectuando las operaciones correspondientes:

$$I + G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \frac{\phi}{\Delta t} \\ -\frac{\Delta t}{\phi} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{\phi}{\Delta t} \\ -\frac{\Delta t}{\phi} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(I + G)d = \begin{pmatrix} 2 & \frac{\phi}{\Delta t} \\ -\frac{\Delta t}{\phi} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\phi}{\Delta t} + E \\ 1 + \alpha^n - \frac{\Delta t}{\phi} (E + q_i^{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\frac{\phi}{\Delta t} + 2E + \frac{\phi}{\Delta t} + \frac{\phi}{\Delta t} \alpha^n - (E + q_i^{n+1}) \\ 1 - \frac{\Delta t}{\phi} E \end{pmatrix}$$

$$(I + G)d = \begin{pmatrix} \frac{\phi}{\Delta t} (\alpha^n - 1) + E - q_i^{n+1} \\ 1 - \frac{\Delta t}{\phi} E \end{pmatrix} \quad (C.5)$$

Con lo cual:

$$\left(\nabla \bullet \begin{Bmatrix} \hat{u}_i^{n+1} \\ \alpha^{n+1} \end{Bmatrix} \right)_{i \rightarrow \infty} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\phi}{\Delta t} (\alpha^n - 1) + E - q_i^{n+1} \\ 1 - \frac{\Delta t}{\phi} E \end{pmatrix}$$

Lo que permite calcular la solución exacta para cada paso de tiempo, a excepción del posible error E causado por la ecuación (5.8) y (5.10).

Para establecer el nuevo procedimiento lo que se debe hacer es sustituir el procedimiento iterativo para cada paso de tiempo, por las soluciones directas producto de la convergencia de dicho sistema, como sigue a continuación:

$$\nabla \bullet \hat{u}_i^{n+1} = \frac{\phi[\alpha^n - 1]}{\Delta t} + E - q_i^{n+1}$$

$$\frac{u_{x+\Delta x}^e - u_x^e}{\Delta x} + \frac{v_{y+\Delta y}^e - v_y^e}{\Delta y} + \frac{w_{z+\Delta z}^e - w_z^e}{\Delta z} = -\phi \frac{(\alpha^n - 1)}{\Delta t} + E - q_i^{n+1}$$

Estas ecuaciones se satisfacen con las siguientes relaciones:

$$u_x^e = C \frac{\lambda_{tx}}{\Delta x}$$

$$v_y^e = C \frac{\lambda_{yx}}{\Delta y}$$

$$w_z^e = C \frac{\lambda_{zx}}{\Delta z}$$

donde:

$$C = \frac{\phi \frac{(\alpha^n - 1)}{\Delta t} + E - q_t^{n+1}}{\frac{(\lambda_{tx} + \lambda_{tx+\Delta x})}{\Delta x^2} + \frac{(\lambda_{ty} + \lambda_{ty+\Delta y})}{\Delta y^2} + \frac{(\lambda_{tz} - \lambda_{tz+\Delta z})}{\Delta z}}$$

Tomando como base el algoritmo anterior, quedaría:

$$\begin{array}{l}
 \overline{K} = 1, M \\
 I = 1, P \\
 J = 1, Q \\
 \\
 \Delta \alpha = 1 - \{\alpha^{n+1}\}_i \\
 \\
 C = \frac{\phi \frac{(\alpha^n - 1)}{\Delta t} + E - q_t^{n+1}}{\left(\frac{(\theta_n + \theta_w)K_x + (\theta_n + \theta_w)K_{x+\Delta x}}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{(\theta_n + \theta_w)K_y + (\theta_n + \theta_w)K_{y+\Delta y}}{\Delta y^2} \right) + \left(\frac{(\theta_n + \theta_w)K_z + (\theta_n + \theta_w)K_{z+\Delta z}}{\Delta z^2} \right)} \\
 \\
 u_x = C \frac{(\theta_n + \theta_w)K_x}{\Delta x}, \\
 v_y = C \frac{(\theta_n + \theta_w)K_y}{\Delta y}, \\
 w_z = C \frac{(\theta_n + \theta_w)K_z}{\Delta z}
 \end{array}$$

$$\alpha^{n+1} = 1 - \frac{\Delta t}{\phi} E$$

$$\frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t} = \frac{|\alpha^{n+1} - \alpha^n|}{\Delta t}$$

En cuanto al manejo de datos, se mantiene prácticamente igual, a excepción del término α , el cual requiere de dos matrices, una que almacene el valor de α^{n+1} y la otra que almacene el valor de α^n , pues deben usarse en conjunto para determinar el valor de $\frac{\partial \alpha^{n+1}}{\partial t}$. Antes de calcular el nuevo valor de α^{n+1} , los valores que se tienen pasan a la matriz que maneja los valores de α^n , para no perder estos valores momentáneamente.

La otra diferencia en cuanto al manejo de datos es el término de E, del cual depende esta formulación alternativa, y al cual es necesario encontrar una expresión que lo defina, para que se pueda aplicar.

APENDICE D. FACTIBILIDAD DE LA INCLUSION DE LOS TERMINOS DE SOLUBILIDAD DE GAS EN PETRÓLEO.

Se tomarán las ecuaciones y métodos de empleados por Kuhn, agregando la ecuación correspondiente a la fase gas, así como los respectivos términos que indican que hay solubilidad del gas con respecto al petróleo (B_o y R_{so}), tomando como guía las ecuaciones de referencia usadas para el BOAST. Con esto se verá cuales son las ecuaciones resultantes, y con esto, decidir si sería posible resolverlas usando la misma metodología expuesta por Kuhn en su trabajo.

D.1 REVISIÓN DE LAS ECUACIONES Y TERMINOS QUE DEBEN SER AGREGADOS.

Recordando las ecuaciones que se tenían en el Capítulo 1, pero considerando solubilidad solo en petróleo, se tendría:

Ecuaciones de flujo para tres fases:

$$-\frac{\partial J_x}{\partial x} - \frac{\partial J_y}{\partial y} - \frac{\partial J_z}{\partial z} - \hat{q} = \frac{\partial Cp}{\partial t}$$

$$(\vec{J}_o) = \frac{\rho_{osc}}{B_o} \vec{V}_o$$

$$(\vec{J}_w) = \frac{\rho_{wsc}}{B_w} \vec{V}_w$$

$$(\bar{J}_g) = \frac{\rho_{gsc}}{B_g} \bar{V}_g + \frac{R_{so} \rho_{gsc}}{B_o} \bar{V}_o$$

considerando $B_w=1$. La ecuación de la Ley de Darcy, sigue siendo la misma:

$$V_{xp} = -k_x \lambda_p \frac{\partial}{\partial x} \left(p_p - \frac{\rho_p g z}{144 g_c} \right)$$

siendo el subíndice "p" la fase, y usando nuevamente que $g = g_c$. Las densidades de fase están referidas los factores de volumen de formación y a la solubilidad a través de:

$$\rho_o = \frac{1}{B_o} [\rho_{osc} + R_{so} \rho_{gsc}]$$

$$\rho_w = \rho_{wsc}$$

$$\rho_g = \frac{\rho_{gsc}}{B_g}$$

Además del flujo, se necesitan las concentraciones:

$$C_o = \phi \rho_{osc} \frac{S_o}{B_o}$$

$$C_w = \phi \rho_{wsc} S_w$$

$$C_g = \phi \rho_{gsc} \left[\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right]$$

$$S_o + S_w + S_g = 1$$

Con todo esto, se tienen las ecuaciones de conservación de masa para cada fase:

Petróleo:

$$-\nabla \cdot \left(\frac{\rho_{osc}}{B_o} \vec{u}_o \right) - \dot{q}_o = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \rho_{osc} \frac{S_o}{B_o} \right) \quad (I)$$

$$-\nabla \cdot (\rho_{wsc} \vec{u}_w) - \dot{q}_w = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_{wsc} S_w) \quad (II)$$

$$-\nabla \cdot \left(\frac{\rho_{gsc}}{B_g} \vec{u}_g + \frac{R_{so} \rho_{osc}}{B_o} \vec{u}_o \right) - \dot{q}_g = \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \rho_{gsc} \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right] \quad (III)$$

$$\dot{q}_p = \rho_{psc} q_p$$

esto último para que concuerde con las ecuaciones planteadas en el paper de Kuhn. Introduciendo el concepto de presión capilar, a través de las siguientes ecuaciones: $p_{cow} = p_o - p_w$ ($p_c = p_n - p_w = p_n - p$ según las ecuaciones planteadas en capítulos anteriores).

$$p_{cgo} = p_g - p_o$$

Estas relaciones son funciones de las saturaciones de agua y gas respectivamente. Con ellas, se puede tener la presión de agua y de gas en función de la presión de petróleo, y así, poder sustituir las en las ecuaciones, a fin de tenerlas todas en función de una variable.

D.2 SUSTITUCION EN LAS ECUACIONES DE KUHN

Con todo lo antes expuesto, se irá paso a paso, como aparece en el paper de Kuhn aplicando las ecuaciones tifásicas a la metodología usada en este trabajo.

Se considera igualmente los ejes "x" y "y" horizontales, y el eje "z" vertical, con la parte positiva hacia abajo.

Para las tres fases se tendría la Ley de Darcy de la siguiente forma:

$$\vec{u}_o = -\vec{K} \lambda_o \left(\nabla p_o - \frac{\rho_o \nabla z}{144} \right) \quad (D.1) \quad \lambda_o = \frac{k_{or}}{\mu_o}$$

$$\bar{u}_w = -\bar{K}\lambda_w \left(\nabla p_w - \frac{\rho_w \nabla z}{144} \right) \quad (D.2) \quad \lambda_w = \frac{k_{wr}}{\mu_w}$$

$$\bar{u}_g = -\bar{K}\lambda_g \left(\nabla p_g - \frac{\rho_g \nabla z}{144} \right) \quad (D.3) \quad \lambda_g = \frac{k_{gr}}{\mu_g}$$

$$p_{cow} = p_o - p_w \quad (D.4)$$

$$p_{cgo} = p_g - p_o \quad (D.5)$$

Sumando (D.1), (D.2) y (D.3) y usando (D.4) y (D.5):

$$\bar{u}_t = -\bar{K} \left[\lambda_o \nabla p_o + \lambda_w (\nabla p_o - \nabla p_{cow}) + \lambda_g (\nabla p_o + \nabla p_{cgo}) - (\lambda_o \rho_o + \lambda_w \rho_w + \lambda_g \rho_g) \frac{\nabla z}{144} \right]$$

$$\bar{u}_t = -\bar{K} \left[\lambda_t \nabla p_o - \lambda_w \nabla p_{cow} + \lambda_g \nabla p_{cgo} - (\lambda_o \rho_o + \lambda_w \rho_w + \lambda_g \rho_g) \frac{\nabla z}{144} \right]$$

$$\nabla p_o = -\frac{1}{\lambda_t} \left[\frac{\bar{u}_t}{\bar{K}} - \lambda_w \nabla p_{cow} + \lambda_g \nabla p_{cgo} - (\lambda_o \rho_o + \lambda_w \rho_w + \lambda_g \rho_g) \frac{\nabla z}{144} \right] \quad (D.6)$$

$$\lambda_t = \lambda_o + \lambda_w + \lambda_g$$

$$\bar{u}_t = \bar{u}_o + \bar{u}_w + \bar{u}_g$$

Introduciendo las ecuaciones (D.4), (D.5) y (D.6) en (D.1), (D.2) y (D.3), resulta:

$$\bar{u}_o = -\bar{K}\lambda_o \left(-\frac{1}{\lambda_t} \left[\frac{\bar{u}_t}{\bar{K}} - \lambda_w \nabla p_{cow} + \lambda_g \nabla p_{cgo} - (\lambda_o \rho_o + \lambda_w \rho_w + \lambda_g \rho_g) \frac{\nabla z}{144} \right] - \frac{\rho_o \nabla z}{144} \right)$$

$$\bar{u}_w = -\bar{K}\lambda_w \left(-\frac{1}{\lambda_t} \left[\frac{\bar{u}_t}{\bar{K}} - \lambda_w \nabla p_{cow} + \lambda_g \nabla p_{cgo} - (\lambda_o \rho_o + \lambda_w \rho_w + \lambda_g \rho_g) \frac{\nabla z}{144} \right] - \nabla p_{cow} - \frac{\rho_w \nabla z}{144} \right)$$

$$\bar{u}_g = -\bar{K}\lambda_g \left(-\frac{1}{\lambda_t} \left[\frac{\bar{u}_t}{\bar{K}} - \lambda_w \nabla p_{cow} + \lambda_g \nabla p_{cgo} - (\lambda_o \rho_o + \lambda_w \rho_w + \lambda_g \rho_g) \frac{\nabla z}{144} \right] + \nabla p_{cgo} - \frac{\rho_o \nabla z}{144} \right)$$

Agrupando términos semejantes:

$$\bar{u}_o = \frac{\lambda_o}{\lambda_w} \bar{u}_t - \bar{K}\lambda_o \left(\frac{\lambda_w}{\lambda_t} \nabla p_{cow} - \frac{\lambda_g}{\lambda_t} \nabla p_{cgo} + (\lambda_o \rho_o + \lambda_w \rho_w + \lambda_g \rho_g - \lambda_t \rho_o) \frac{\nabla z}{\lambda_t 144} \right)$$

$$\bar{u}_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_w} \bar{u}_t - \bar{K} \lambda_w \left(\frac{\lambda_w \nabla p_{cow} - \lambda_t \nabla p_{cow}}{\lambda_t} - \lambda_g \nabla p_{cgo} + (\lambda_o \rho_o + \lambda_w \rho_w + \lambda_g \rho_g - \lambda_t \rho_w) \frac{\nabla z}{\lambda_t 144} \right)$$

$$\bar{u}_g = \frac{\lambda_w}{\lambda_w} \bar{u}_t - \bar{K} \lambda_g \left(\frac{\lambda_w \nabla p_{cow}}{\lambda_t} + \frac{\lambda_t \nabla p_{cgo} - \lambda_g \nabla p_{cgo}}{\lambda_t} + (\lambda_o \rho_o + \lambda_w \rho_w + \lambda_g \rho_g - \lambda_t \rho_g) \frac{\nabla z}{\lambda_t 144} \right)$$

$$\bar{u}_o = \frac{\lambda_o}{\lambda_w} \bar{u}_t - \bar{K} \frac{\lambda_o}{\lambda_t} \left(\lambda_w \nabla p_{cow} - \lambda_g \nabla p_{cgo} + (\lambda_w \rho_w + \lambda_g \rho_g - (\lambda_w + \lambda_g) \rho_o) \frac{\nabla z}{144} \right) \quad (D.7)$$

$$\bar{u}_w = \frac{\lambda_w}{\lambda_w} \bar{u}_t - \bar{K} \frac{\lambda_w}{\lambda_t} \left(-(\lambda_o + \lambda_g) \nabla p_{cow} - \lambda_g \nabla p_{cgo} + (\lambda_o \rho_o + \lambda_g \rho_g - (\lambda_o + \lambda_g) \rho_w) \frac{\nabla z}{144} \right) \quad (D.8)$$

$$\bar{u}_g = \frac{\lambda_g}{\lambda_w} \bar{u}_t - \bar{K} \frac{\lambda_g}{\lambda_t} \left(\lambda_w \nabla p_{cow} + (\lambda_o + \lambda_w) \nabla p_{cgo} + (\lambda_o \rho_o + \lambda_w \rho_w - (\lambda_o + \lambda_w) \rho_g) \frac{\nabla z}{144} \right) \quad (D.9)$$

Las ecuaciones (D.7), (D.8) y (D.9) proveen una manera para calcular las velocidades de fase partiendo del flujo total.

Ahora considerando las relaciones de balance de masa para cada fase:

$$-\nabla \cdot \left(\frac{\rho_{osc}}{B_o} \bar{u}_o \right) - \rho_{osc} q_o = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \rho_{osc} \frac{S_o}{B_o} \alpha \right) \quad (D.10)$$

$$-\nabla \cdot (\rho_{wsc} \bar{u}_w) - \rho_w q_w = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \rho_{wsc} \frac{S_w}{B_w} \alpha \right) \quad (D.11)$$

$$-\nabla \cdot \left(\frac{\rho_{gsc}}{B_g} \bar{u}_g + \frac{R_{so} \rho_{gsc}}{B_o} \right) - \rho_{gsc} q_g = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \rho_{gsc} \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \alpha \right) \quad (D.12)$$

En este caso, el término “ α ” se incluye como un método de solución, no como una “compresibilidad artificial”, es decir, lo que se hace es introducir una pequeña perturbación, para poder resolver el sistema, que una vez alcanzada la solución, el valor de α tenderá a “1”, para hacer que la perturbación desaparezca. Es decir, se

introduce una perturbación, la cual se buscará que tienda a “1” para llegar a la solución del sistema original, y no la del sistema perturbado.

En las ecuaciones (D.10), (D.11) y (D.12) se trabaja con densidades a condiciones estándar para cada una de las fases. Se puede hacer uso entonces de la consideración hecha en el BOAST ⁽⁵⁾:

“Las densidades a condiciones estándar son constantes y pueden, por lo tanto, ser simplificadas en las anteriores relaciones”.

Lo que hace que las ecuaciones (D.10), (D.11) y (D.12) pasen a ser:

$$-\nabla \cdot \left(\frac{\bar{u}_o}{B_o} \right) - q_o = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S_o}{B_o} \alpha \right) \quad (D.13)$$

$$-\nabla \cdot (\bar{u}_w) - q_w = \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_w \alpha) \quad (D.14)$$

$$-\nabla \cdot \left(\frac{\bar{u}_g}{B_g} + \frac{R_{so}}{B_o} \bar{u}_o \right) - q_g = \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \alpha \right) \quad (D.15)$$

Se considera B_o variable en el tiempo pero no en el espacio. Evaluando las derivadas en tiempo para cada una de las ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S_o}{B_o} \alpha \right) = \phi \left[\frac{\alpha}{B_o} \frac{\partial S_o}{\partial t} - \frac{\alpha S_o}{B_o^2} \frac{\partial B_o}{\partial t} + \frac{S_o}{B_o} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right] \quad (D.13a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi S_w \alpha) = \phi \left[\alpha \frac{\partial S_w}{\partial t} - S_o \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right] \quad (D.14a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \alpha \right) = \phi \left[\left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha \left(\frac{1}{B_g} \frac{\partial S_g}{\partial t} - \frac{S_g}{B_g^2} \frac{\partial B_g}{\partial t} + \frac{S_o}{B_o} \frac{\partial R_{so}}{\partial t} \right) \right] \quad (D.15a)$$

Sustituyendo (D.13a), (D.14a) y (D.15a) en (D.13), (D.14) y (D.15) respectivamente, resulta;

$$-\frac{1}{B_o} \nabla \cdot \bar{u}_o - q_o = \phi \left[\frac{\alpha}{B_o} \frac{\partial S_o}{\partial t} - \frac{\alpha S_o}{B_o^2} \frac{\partial B_o}{\partial t} + \frac{S_o}{B_o} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right] \quad (D.13b)$$

$$-\nabla \cdot (\bar{u}_w) - q_w = \phi \left[\alpha \frac{\partial S_w}{\partial t} - S_o \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right] \quad (D.14b)$$

$$-\frac{1}{B_g} \nabla \cdot \bar{u}_g - \frac{R_{so}}{B_o} \nabla \cdot \bar{u}_g - q_g = \phi \left[\left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha \left(\frac{1}{B_g} \frac{\partial S_g}{\partial t} - \frac{S_g}{B_g^2} \frac{\partial B_g}{\partial t} + \frac{S_o}{B_o} \frac{\partial R_{so}}{\partial t} \right) \right. \\ \left. + \frac{R_{so}}{B_o} \frac{\partial S_o}{\partial t} - \frac{R_{so} S_o}{B_o^2} \frac{\partial B_o}{\partial t} \right] \quad (D.15b)$$

Multiplicando (D.13b) por B_o y (D.15b) por B_g :

$$-\nabla \cdot \bar{u}_o - B_o q_o = \phi \left[\alpha \frac{\partial S_o}{\partial t} - \frac{\alpha S_o}{B_o} \frac{\partial B_o}{\partial t} + S_o \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right] \quad (D.13c)$$

$$-\nabla \cdot (\bar{u}_w) - q_w = \phi \left[\alpha \frac{\partial S_w}{\partial t} - S_o \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right]$$

$$-\nabla \cdot \bar{u}_g - B_g \frac{R_{so}}{B_o} \nabla \cdot \bar{u}_g - B_g q_g = \phi \left[S_g \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{B_g R_{so} S_o}{B_o} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha \left(\frac{\partial S_g}{\partial t} - \frac{S_g}{B_g} \frac{\partial B_g}{\partial t} + \frac{S_o B_g}{B_o} \frac{\partial R_{so}}{\partial t} \right) \right. \\ \left. + \frac{R_{so} B_g}{B_o} \frac{\partial S_o}{\partial t} - \frac{R_{so} S_o}{B_o^2} B_g \frac{\partial B_o}{\partial t} \right] \quad (D.15c)$$

Haciendo uso de $S_o + S_w + S_g = 1$; $\frac{\partial S_o}{\partial t} + \frac{\partial S_w}{\partial t} + \frac{\partial S_g}{\partial t} = 0$; $\bar{u}_o + \bar{u}_w + \bar{u}_g = \bar{u}_t$ y

sumando las tres ecuaciones de balance de masa para las tres fases.

$$-\nabla \cdot \bar{u}_g - B_g \frac{R_{so}}{B_o} \nabla \cdot \bar{u}_o - (B_o q_o + B_g q_g + q_w) = \phi \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{B_g}{B_o} \left(R_{so} S_o \frac{\partial \alpha}{\partial t} + S_o \frac{\partial R_{so}}{\partial t} \alpha \right) \right. \\ \left. + \alpha R_{so} \frac{\partial S_o}{\partial t} - \alpha \frac{R_{so} S_o}{B_o} \frac{\partial B_o}{\partial t} \right] - \alpha \frac{S_o}{B_o} \frac{\partial B_o}{\partial t} \\ \left[-\alpha \frac{S_g}{B_g} \frac{\partial B_g}{\partial t} \right]$$

Reagrupando algunos términos con la finalidad de obtener una sola variable, \bar{u}_t , se tiene:

$$-\nabla \bullet \bar{u}_t - B_g \frac{R_{so}}{B_o} \nabla \bullet \bar{u}_o - (B_o q_o + B_g q_g + q_w) = \phi \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \phi \frac{B_g R_{so}}{B_o} \left(S_o \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha \frac{\partial S_o}{\partial t} - \alpha \frac{S_o}{B_o} \frac{\partial B_o}{\partial t} \right) + \frac{B_g}{B_o} \phi S_o \frac{\partial R_{so}}{\partial t} \alpha - \left(\alpha \frac{S_o}{B_o} \frac{\partial B_o}{\partial t} + \alpha \frac{S_g}{B_g} \frac{\partial B_g}{\partial t} \right) \phi$$

Sustituyendo en el lado derecho de esta ecuación la ecuación (D.13c)

$$-\nabla \bullet \bar{u}_t - B_g \frac{R_{so}}{B_o} \nabla \bullet \bar{u}_o - (B_o q_o + B_g q_g + q_w) = \phi \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \phi \frac{B_g R_{so}}{B_o} (-\nabla \bullet \bar{u}_o - B_o q_o) + \frac{B_g}{B_o} \phi S_o \frac{\partial R_{so}}{\partial t} \alpha - \left(\alpha \frac{S_o}{B_o} \frac{\partial B_o}{\partial t} + \alpha \frac{S_g}{B_g} \frac{\partial B_g}{\partial t} \right) \phi$$

$$-\nabla \bullet \bar{u}_t - (B_o q_o + B_g q_g - B_g R_{so} q_o + q_w) = \phi \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{B_g}{B_o} \phi \alpha S_o \frac{\partial R_{so}}{\partial t} - \left(\alpha \frac{S_o}{B_o} \frac{\partial B_o}{\partial t} + \alpha \frac{S_g}{B_g} \frac{\partial B_g}{\partial t} \right) \phi$$

Llamando $T = B_o q_o + B_g q_g - B_g R_{so} q_o + q_w$ (un término constante, pues todos los valores son conocidos al principio del paso de tiempo). La ecuación que nos interesa resolver es:

$$-\nabla \bullet \bar{u}_t - T = \phi \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{B_g}{B_o} \phi \alpha S_o \frac{\partial R_{so}}{\partial t} - \left(\alpha \frac{S_o}{B_o} \frac{\partial B_o}{\partial t} + \alpha \frac{S_g}{B_g} \frac{\partial B_g}{\partial t} \right) \phi$$

Donde tendría una ecuación con tres incógnitas: \bar{u}_t , S_o , S_g en cada paso de tiempo.

REFERENCIAS

1. Dalton, R.L ; Mattax, C. *Reservoir Simulation Monograph Volume 13. SPE*. Henry L. Doherty Memorial Fund. of AIME. Richardson, Texas. 1996.
2. Aziz, Khalid; Settari, Antonin. *Petroleum Reservoir Simulation*. Elsevier Science. London. 1979.
3. Kuhn, J.C. *A new method for the fast estimation of reservoir performance*. SPE 39743.
4. Gao, H.W; Chang, M.M. *Three dimensional, three-phase simulator for permeability modification treatment using gelled polymers-topical report*. U.S. Department of Energy. Barthlesville, Oklahoma. March, 1990.
5. Fanchi, J.R.; Harpole, K.J.;Bujnowski, S.W. *Boast: a three-dimesnional, three-phase black oil applied simulation tool. Technical description and Fortran code*.
6. Smith, Charles R: *Applied Reservoir Engineering. (Vol 2): Introduction to computer reservoir simulation*. OGCI. Tulsa, Oklahoma.1992.
7. Laprea-Bigott, Marcelo. *Simulación Matemática de Yacimientos: Descripción, Validación y Aplicaciones de Modelos de Diferencias Finitas*. Trabajo especial presentado ante la Universidad de Oriente como requisito parcial para optar a la categoría de Profesor Asociado. Universidad de Oriente, Núcleo Anzoategui. Escuela de Ingeniería y Ciencias Aplicadas. Departamento de Petróleo. Puerto La Cruz, Mayo 1986.
8. ECLIPSE 100 "User's manual ECLIPSE 100 technical report ". versión 99^a.1999
9. Chin, Wilson C. *Borehole flow modeling in horizontal, deviated and vertical wells*. Gulf Publishing Company. Houston, Texas. 1991.
10. Hageman, Louis A.; Young, David M. *Computer Science and Applied Mathematics. Applied Iterative Methods*. Academic Press INC. New York, 1981.

11. Praslov, V.V. *Problems and Theorems in Linear Algebra*. Translations of Mathematical Monographs Volume 134. American Mathematical Society. 1994.

BIBLIOGRAFIA.

- Ciarlet, P.G ; Lions, J.L. *Handbook of numerical analysis. Volume I. Finite Difference Methods*. North-Holland. Amsterdam. 1990.
- Cockcroft, P.J ; Guise, D.R ; Waworunto, I.D. *The Effect of Wettability on Estimation of Reserves*. SPE 19484.
- Daniels, Richard W. *An Introduction to Numerical Methods and Optimization Techniques*. North-Holland. New York. 1978.
- Diaz Correa, Pedro A. *Stream-tube model for simulation of fluid flow in porous media*. University of Kansas. Kansas,1978.
- Donaldson, Erle C. *Three phase fluid flow in porous media*. U.S. Department of Energy. Washington,1981.
- Donaldson, Erle C; Croker, Michael E. *Characterization of thr crude oil polar compound extract*. U.S. Department of Energy. Bartlesville, Oklahoma. October,1980.
- Forrest, F.; Graing, J.R. *The rseervoir engineering aspects of waterflooding*. Monograph Volume 3 of the Henry L Doherty series. 1980.
- Muskat, Morris. *Physical Principles of oil Production. Second Edition*. International Human Resources Development Corp. Boston, 1981.
- Pruet, James M. *Fundamentals of programming with Fortran 77*. Research Triangle Park, N.C: Instrument Society of America. 1987.
- Quintero, Leopoldo ; Ferrer, Magdalena P de. *Curso Básico de Ingeniería de Yacimientos*. Instituto de Investigaciones Petroleras de LUZ. Maracaibo,1983.
- Smith, G.D. *Numerical Solution of Partial Difference Equations*.
- *SPE Symposium on Reservoir Simulation (9:1987 Feb. 1-4: San Antonio) Proceedings*. SPE. San Antonio, 1987.

-
- Spivak, Michael. *Cálculo Infinitesimal. Segunda Edición*. Editorial Reverté, S.A. Barcelona, España. 1992.
 - Strang, Gilbert. *Linear Algebra and its Applications. Second Edition*. Academic Press INC. New York, 1980.
 - Thomas, G.W. *Principles of Hydrocarbon Reservoir Simulation*. International Human Resources Development Corp. Boston, 1982.