

# **TRABAJO ESPECIAL DE GRADO**

## **ELABORACIÓN DE UN PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA LA DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES HIDRODINÁMICOS DE UN CUERPO RÍGIDO FLOTANTE**

Presentado ante la Ilustre  
Universidad Central de Venezuela  
Por el Br. Delgado A, Pedro J.  
Para optar al Título de  
Ingeniero Mecánico

Caracas, 2009

## **TRABAJO ESPECIAL DE GRADO**

# **ELABORACIÓN DE UN PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA LA DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES HIDRODINÁMICOS DE UN CUERPO RÍGIDO FLOTANTE**

TUTOR ACADÉMICO: Prof. Eugenio Sansone

TUTOR INDUSTRIAL: Ing. Francisco Pinto

Presentado ante la Ilustre  
Universidad Central de Venezuela  
Por el Br. Delgado A, Pedro J.  
Para optar al Título de  
Ingeniero Mecánico

Caracas, 2009



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE INGENIERIA  
ESCUELA DE INGENIERIA MECANICA  
DEPARTAMENTO DE ENERGETICA



Caracas, 16 de noviembre de 2.009

## ACTA

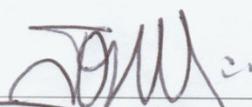
Los abajo firmantes, miembros del jurado por el Consejo de Escuela de Ingeniería Mecánica, para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por el bachiller:

**DELGADO PEDRO**

*Titulado:*

**“ELABORACION DE UN PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA LA DETERMINACION DE LOS COEFICIENTES HIDRODINAMICOS DE UN CUERPO RIGIDO FLOTANTE”**

Consideran que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el plan de estudio conducente al Título de Ingeniero Mecánico.

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Josué León**  
Jurado



  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Juan Ruilova**  
Jurado

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Eugenio Sansone**  
Tutor

## **DEDICATORIA**

A mis padres Elmhee y Eladio

A mi hermana María T.

A mi familia por todo el amor y apoyo

## **AGRADECIMIENTOS**

A la Ilustre Universidad Central de Venezuela por brindarme la oportunidad de formarme en el ámbito profesional y personal.

Al Profesor Eugenio Sansone por el apoyo académico brindado, sus comentarios, orientaciones y valiosas discusiones durante el desarrollo de este trabajo.

Al INTEVEP por brindarme la oportunidad de realizar este trabajo en sus instalaciones y facilitarme las herramientas para la elaboración del mismo.

Al Ingeniero Francisco Pinto por el planteamiento del tema de este trabajo, por sus importantes discusiones y sugerencias para la realización del mismo.

A mis padres, hermana y a toda mi familia por el apoyo, amor y paciencia brindados.

A mis compañeros de la Escuela de Ingeniería Mecánica, en especial a Alejandro, Alfredo, Ariana, Carlos, Daniel, Gilberto, Gonzalo, Ildemaro, Jesús, Jorge, Juan Manuel, María Eugenia, Ramón y todos los que me brindaron apoyo y solidaridad durante mis estudios y fuera de ellos.

A mis amigos, en especial a Andrea, Daniela, Dayenni, Desiree, Diana, Carlos, Eduardo, Fabrizio, Fernando, Mariel, Rodrigo, Valentina, Victor, Xuxangela y los demás que compartieron y compartirán una relación muy especial.

A mis compañeros de trabajo, Adriana, Alexandra, Álvaro, Andrea, Argel, Denise, Francisco, Frank, María, Marisela, Nastenka y los demás que me acompañaron durante la mayor parte del trabajo.

**Delgado A., Pedro J.**

**ELABORACIÓN DE UN PROGRAMA COMPUTACIONAL  
PARA LA DETERMINACIÓN DE LOS COEFICIENTES  
HIDRODINÁMICOS DE UN CUERPO RÍGIDO FLOTANTE**

**Tutor Académico: Prof. Eugenio Sansone.**

**Tutor Industrial: Ing. Francisco Pinto. Tesis. Caracas, U.C.V.**

**Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería Mecánica. Año 2009, 176 p.**

**Palabras Claves:** Coeficientes Hidrodinámicos, Cuerpo Rígido Flotante, Programa Computacional, Teoría de la Fuente Pulsante de Frank, Teoría Potencial de Tasai, Transformación de Lewis.

**Resumen.** El presente trabajo está relacionado con la exploración y producción de gas natural y petróleo en regiones Costa Afuera, Para conocer el comportamiento que presentan las estructuras Costa Afuera, se determinan los movimientos ocasionados por el oleaje y condiciones externas a estas, y es a través del estudio de las cargas ocasionadas por dicho oleaje que se obtienen los movimientos de dichas estructuras en función del tiempo. Existen varios tipos de cargas, en este trabajo sólo se prestará atención a las hidrodinámicas. Como el cálculo de ellas resulta muy complicado, se acostumbra realizar un análisis en el dominio de frecuencia, que al superponerse con estudios donde se considera la variable tiempo, permiten determinar los movimientos que presenta el cuerpo rígido en estudio. En el análisis realizado en el dominio de frecuencia, se calculan los llamados coeficientes hidrodinámicos por dos métodos: la Teoría Potencial de Tasai y la Teoría de la Fuente Pulsante de Frank, ambas teorías, sólo válidas para el caso de dos dimensiones. Como los cálculos en ambas teorías son extensos y complejos, es indispensable el computador como herramienta. Se desarrollaron programas en el lenguaje Fortran 90 para obtener los resultados. Se compararon los resultados obtenidos por ambos métodos, con la finalidad de validar los programas desarrollados. Los resultados no fueron semejantes, por lo que se hicieron validaciones posteriores con estudios reportados en la literatura. Se utilizaron programas para verificar paso a paso las operaciones numéricas contenidas en los programas computacionales desarrollados a lo largo de este trabajo.

**Delgado A., Pedro J.**

**DEVELOPMENT OF A COMPUTER PROGRAM FOR  
HYDRODYNAMIC COEFFICIENTS CALCULATION OF A  
FLOATING RIGID BODY**

**Academic Tutor: Prof. Eugenio Sansone.**

**Industrial Tutor: Eng. Francisco Pinto. Thesis. Caracas, U.C.V.**

**Faculty of Engineering. Mechanical Engineering Institute. 2009, 176 p.**

**Keywords:** Computational Program, Floating Rigid Body, Frank Close-Fit Method, Hydrodynamics Coefficients, Lewis Conformal Mapping, Potential Theory of Tasai,.

**Abstract.** This work stems from the need the country has to increase relevant knowledge regarding the Offshore exploration and production of oil and natural gas, which are very complicated operations. The motions of an Offshore structure must be previously determined in order to understand its dynamic behavior, caused by wave loads. There are several types of wave loads, in this work special attention will be given only to the hydrodynamic loads. Since the determination of these loads is very complicated, the analysis is divided into a frequency domain study and a study where the time is taken into account. After performing both studies, the motions of the floating rigid body under revision can be determined. From the frequency domain analysis, the so-called hydrodynamic coefficients can be obtained, which are the main subject of this research. These coefficients are obtained by using two methods: Potential Theory of Tasai and the Frank Close-Fit Method. Since the calculations involved in both theories are complex, it becomes necessary using the computer as a tool. The programming language chosen to write the software was Fortran 90. Comparisons were made between the results obtained from the most common two-dimensional methods for the evaluation of the hydrodynamic coefficients. Special attention was given to the conformal transformation method and to the parameters which influence its accuracy. The results were also compared with the Frank Close-Fit Method. Since the values obtained were not congruent with each other, subsequent validations were made with other studies reported in literature. The wxMaxima 0.7.1 software was also used in order to verify step by step numerical operations contained in the computer programs developed in this work.

## ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS .....	xv
LISTA DE TABLAS .....	xix
LISTA DE SÍMBOLOS .....	xxi
INTRODUCCIÓN .....	1
CAPÍTULO I .....	3
1. FUNDAMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN .....	3
1.1. Planteamiento del Problema .....	3
1.2. Objetivos de la Investigación .....	4
1.2.1. Objetivo General .....	4
1.2.2. Objetivos Específicos .....	4
1.3. Justificación de la Investigación .....	5
1.4. Antecedentes de la Investigación .....	6
CAPÍTULO II .....	8
2. MARCO TEÓRICO .....	8
2.1. Ingeniería Costa Afuera .....	8
2.1.1. Estructuras y embarcaciones Costa Afuera .....	8
2.1.1.1 Definición de movimientos .....	10
2.1.1.2 Tipos de plataformas .....	12
2.2. Principios de la Hidrostática .....	21
2.2.1. Presión hidrostática .....	21
2.2.2. Principio de Arquímedes .....	21
2.2.3. Estabilidad en cuerpos flotantes .....	22
2.3. Flujo Potencial .....	24
2.3.1. Conceptos principales del flujo potencial .....	25
2.3.1.1 Líneas potenciales .....	26

2.3.1.2 Líneas de corriente .....	27
2.3.1.3 Función de corriente.....	27
2.3.1.4 Ecuación de Euler .....	27
2.3.1.5 Ecuación de Bernoulli.....	30
2.3.2. Propiedades de la función potencial.....	32
2.3.2.1 Ortogonalidad.....	32
2.3.2.2 Condición de frontera impermeable.....	33
2.3.2.3 Condición lejana a una perturbación.....	34
2.3.3. Elementos principales del flujo potencial .....	34
2.4. Principios del oleaje regular.....	35
2.4.1. Definiciones básicas.....	35
2.4.1.1 Olas de agua profunda.....	37
2.4.1.2 Olas de agua poco profunda.....	37
2.4.2. Teoría potencial aplicada al oleaje regular.....	38
2.4.2.1 Ecuación de continuidad .....	38
2.4.2.2 Condición de frontera del suelo marino .....	38
2.4.2.3 Condición de frontera de la dinámica de la superficie libre.....	38
2.4.2.4 Condición de frontera de la cinemática de la superficie libre.....	39
2.4.2.5 Función potencial del oleaje regular .....	40
2.4.3. Cinemática del fluido .....	41
2.5. Coeficientes hidrodinámicos.....	43
2.5.1. Sistemas de coordenadas utilizados .....	44
2.5.1.1 Sistema de coordenadas fijo al cuerpo ( <i>body-bound coordinate system</i> ):.....	45
2.5.1.2 Sistema de coordenadas de traslación estacionaria o inercial ( <i>steadily translating coordinate system</i> ).....	45
2.5.1.3 Sistema de coordenadas fijo a tierra ( <i>earth-bound coordinate system</i> ):.....	45
2.5.2. Principios básicos.....	46

2.5.3. Requerimientos y condiciones de frontera.....	48
2.5.3.1 Ecuación de continuidad .....	48
2.5.3.2 Condición de frontera del suelo marino .....	48
2.5.3.3 Condición de frontera en la superficie libre.....	48
2.5.3.4 Condición de frontera de la cinemática de la superficie del cuerpo oscilante.....	48
2.5.3.5 Condición de radiación .....	49
2.5.3.6 Condiciones de simetría y asimetría .....	49
2.5.4. Fuerzas y momentos.....	50
2.5.5. Potencial de radiación o hidrodinámico .....	52
2.5.6. Teoría de Ursell.....	57
2.5.6.1 Oleaje estacionario .....	58
2.5.6.2 Oleaje regular progresivo .....	59
2.5.7 Transformaciones conformes.....	61
2.5.7.1 Transformación de Lewis.....	64
2.5.8. Teoría de Tasai.....	66
2.5.9. Teoría de Frank .....	69
2.5.10 Estudios posteriores usando los coeficientes hidrodinámicos .....	75
CAPÍTULO III.....	77
3. METODOLOGÍA .....	77
3.1 Diagrama metodológico.....	77
3.2 Manejo del lenguaje de programación “Fortran 90”.....	78
3.3 Manejo del programa wxMaxima 0.7.1 .....	80
3.4 Manejo del programa SALOME 4.1.4.....	81
3.4.1 Módulo “ <i>Geometry</i> ”.....	82
3.4.2 Módulo “ <i>Mesh</i> ” .....	83
3.5 Implementación de funciones y subrutinas auxiliares .....	84
3.5.1 Integración numérica.....	85
3.5.1.1 Regla del punto medio .....	85

3.5.1.2 Regla del trapecio.....	86
3.5.1.3 Regla de Simpson.....	86
3.5.1.4 Integrales impropias .....	87
3.5.2 Método de Gauss-Jordan.....	88
3.5.3 Factorial de un Número.....	88
3.5.4 Derivación Numérica .....	89
3.5.5 Verificaciones y validaciones .....	90
3.6 Programa basado en la Teoría Potencial de Tasai.....	90
3.6.1 Elaboración de algoritmos.....	91
3.6.2 Programación de la Transformación de Lewis.....	91
3.6.3 Programación del cálculo de los coeficientes hidrodinámicos .....	92
3.6.4 Verificaciones y validaciones .....	92
3.7 Programa basado en la Teoría Potencial de Frank .....	93
3.7.1 Elaboración de algoritmos.....	93
3.7.2 Programación del cálculo de los coeficientes hidrodinámicos .....	94
3.7.2.1 Integrales de línea de argumento complejo.....	94
3.7.3 Verificaciones y validaciones .....	95
CAPÍTULO IV .....	96
4. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS .....	96
4.1 Datos de las secciones transversales utilizadas.....	96
4.1.1 Sección transversal semicircular .....	97
4.1.2 Sección transversal triangular .....	97
4.1.3 Sección transversal rectangular .....	98
4.1.4 Embarcación genérica .....	99
4.2 Transformación de Lewis.....	100
4.2.1 Sección transversal semicircular .....	100
4.2.2 Sección transversal triangular .....	102
4.2.3 Sección transversal rectangular.....	103

4.2.4 Sección transversal de la embarcación genérica .....	104
4.3 Método de Tasai.....	105
4.3.1 Comparación de resultados de la embarcación genérica.....	105
4.3.2 Comparación de los resultados de las distintas geometrías estudiadas .....	108
4.4 Método de Frank .....	110
4.4.1 Comparaciones y validaciones de los términos implicados en el cálculo de los coeficientes hidrodinámicos basados en la Teoría de Frank.....	111
4.4.1.1 Datos de los segmentos utilizados.....	111
4.4.1.2 Término “L1” .....	112
4.4.1.3 Término “L3” .....	114
4.4.1.4 Término “L5” .....	115
4.4.1.5 Término “L7” .....	118
4.4.1.6 Término “K1” .....	118
4.4.1.7 Término “K3” .....	119
4.4.1.8 Término “K5” .....	120
4.4.1.9 Término “K7” .....	122
4.4.2 Análisis de la variación del tamaño de los segmentos que conforman el contorno húmedo del cuerpo rígido flotante.....	123
4.4.2.1 Sección transversal semicircular.....	123
4.4.2.2 Sección transversal triangular .....	125
4.4.2.3 Sección transversal rectangular.....	127
4.4.2.4 Sección transversal de la embarcación genérica .....	129
CAPÍTULO V.....	133
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	133
5.1 Conclusiones .....	133
5.2 Recomendaciones.....	134
BIBLIOGRAFÍA .....	135
Referencias Bibliográficas .....	135

Referencias de Internet.....	138
APÉNDICES.....	140
APÉNDICE A.....	140
A.1 Elementos principales del flujo potencial.....	140
A.1.1 Flujo uniforme.....	140
A.1.2 Fuente.....	142
A.1.3 Sumidero.....	143
A.1.4 Circulación o vórtice.....	144
A.1.5 Superposición de los elementos principales del flujo potencial.....	145
A.1.5.1 Sumidero en flujo uniforme.....	145
A.1.5.2 Fuente en flujo uniforme.....	146
A.1.5.3 Fuente y sumidero.....	146
A.1.5.4 Fuente y sumidero en flujo uniforme.....	147
A.1.5.5 Doblete o dipolo.....	148
A.1.5.6 Doblete o dipolo en flujo uniforme.....	150
APÉNDICE B.....	152
B.1 Algoritmo para el cálculo de los coeficientes hidrodinámicos según la Teoría Potencial de Tasai.....	152
B.1.1 Integrales impropias.....	156
B.1.1.1 Aproximación por series de potencia.....	157
B.1.1.2 Aproximación numérica.....	157
APÉNDICE C.....	158
C.1 Algoritmo para el cálculo de los coeficientes hidrodinámicos según la Teoría Potencial de Frank.....	158
C.1.1 Aproximaciones numéricas para la obtención de los términos “ $L$ ”... 161	
C.1.1.1 Término $L_1$ .....	161
C.1.1.2 Término $L_2$ .....	161
C.1.1.3 Término $L_3$ .....	161
C.1.1.4 Término $L_4$ .....	161

C.1.1.5 Término $L_5$ .....	162
C.1.1.6 Término $L_6$ .....	162
C.1.1.7 Término $L_7$ .....	162
C.1.1.8 Término $L_8$ .....	162
C.1.2 Aproximaciones numéricas para el cálculo de los términos “ $K$ ” .....	163
C.1.2.1 Término $K_1$ .....	163
C.1.2.2 Término $K_2$ .....	163
C.1.2.3 Término $K_3$ .....	164
C.1.2.4 Término $K_4$ .....	165
C.1.2.5 Término $K_5$ .....	166
C.1.2.6 Término $K_6$ .....	166
C.1.2.7 Término $K_7$ .....	167
C.1.2.8 Término $K_8$ .....	167
C.1.3 Integrales impropias .....	167
C.1.3.1 Aproximación por series de potencias.....	168
C.1.3.2 Aproximación numérica .....	168
APÉNDICE D .....	169
D.1 Análisis del término “ $L_5$ ” para varias frecuencias .....	169
D.1.1 Término “ $L_{51}$ ” .....	169
D.1.2 Término “ $L_{52}$ ” .....	170
D.1.3 Término “ $L_{52}$ ” .....	170
D.1.4 Término “ $L_{52}$ ” .....	170
D.2 Análisis de la integral impropia del término “ $L_5$ ” .....	171
D.2.1 Término “ $F_{41}$ ” .....	173
D.2.2 Término “ $F_{42}$ ” .....	173
D.2.3 Término “ $F_{42}$ ” .....	174
D.2.4 Término “ $F_{42}$ ” .....	174

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1. Movimientos en plataformas Costa Afuera. ....	10
Figura 2.2. Movimientos en embarcaciones. ....	10
Figura 2.3. Tipos de plataformas. ....	12
Figura 2.4. Plataforma Fija.....	13
Figura 2.5. Torre Flexible. ....	14
Figura 2.6. Plataforma semi-sumergible. ....	15
Figura 2.7. Plataforma “ <i>jack-up</i> ”. ....	16
Figura 2.8. Barcos perforadores. ....	17
Figura 2.9. Sistema de producción flotante.....	18
Figura 2.10. Plataforma de soportes tensionados.....	19
Figura 2.11. Plataforma tipo mástil.....	20
Figura 2.12. Estabilidad en cuerpos sumergidos.....	23
Figura 2.13. Estabilidad en cuerpos flotantes. ....	24
Figura 2.14. Elemento diferencial de fluido.....	29
Figura 2.15. Flujo alrededor de un cilindro circular. ....	33
Figura 2.16. Superposición de dos flujos potenciales. ....	34
Figura 2.17. Definiciones principales del oleaje regular.....	36
Figura 2.18. Campo de velocidad del oleaje regular en agua profunda. ....	42
Figura 2.19. Trayectoria de las partículas de agua del oleaje regular en agua profunda. ....	43
Figura 2.20. Sistemas de coordenadas. ....	44
Figura 2.21. Principio de superposición aplicado para determinar el potencial de velocidad.....	46
Figura 2.22. Notaciones y sistemas de coordenadas utilizados por Ursell. ....	58
Figura 2.23. Oleaje estacionario.....	59

Figura 2.24. Transformación de un espacio a otro.....	61
Figura 2.25. Embarcación con casco en forma de bulbo. ....	65
Figura 2.26. Notaciones y sistemas de coordenadas utilizados por Tasai. ....	66
Figura 2.27. Notaciones y sistemas de coordenadas utilizados por Frank.....	70
Figura 3.1. Diagrama Metodológico. ....	77
Figura 3.2. Símbolo del sistema.....	78
Figura 3.3. Ventana principal de programmer’s notepad 2.....	79
Figura 3.4. Ventana principal del programa wxMaxima 0.7.1. ....	81
Figura 3.5. Ventana principal del programa SALOME 4.1.4. ....	82
Figura 3.6. Módulo “Geometry” del programa SALOME 4.1.4. ....	83
Figura 3.7. Módulo “Mesh” del programa SALOME 4.1.4.....	84
Figura 3.8. Integración numérica usando la regla del punto medio. ....	85
Figura 3.9. Integración numérica usando la regla del trapecio. ....	86
Figura 3.10. Integración numérica usando la regla de Simpson. ....	86
Figura 3.11. Integración numérica impropia.....	87
Figura 3.12. Derivación numérica usando diferencias centrales.....	89
Figura 4.1. Sección transversal semicircular.....	97
Figura 4.2. Sección transversal triangular.....	98
Figura 4.3. Sección transversal rectangular. ....	99
Figura 4.4. Sección transversal embarcación genérica. ....	100
Figura 4.5. Comparación de la Transformación de Lewis con la sección transversal semicircular.....	101
Figura 4.6. Comparación de la Transformación de Lewis con la sección transversal triangular.....	102
Figura 4.7. Comparación de la Transformación de Lewis con la sección transversal rectangular. ....	103
Figura 4.8. Comparación de la Transformación de Lewis con la sección transversal de la embarcación genérica.....	105
Figura 4.9. Coeficiente de masa hidrodinámica “ $M_{33}$ ”. ....	106
Figura 4.10. Coeficiente de amortiguación hidrodinámica “ $N_{33}$ ”. ....	107

Figura 4.11. Comparación del coeficiente “ $M_{33}$ ” para todas las geometrías estudiadas. ....	108
Figura 4.12. Comparación del coeficiente “ $N_{33}$ ” para todas las geometrías estudiadas. ....	109
Figura 4.13. Segmentos ejemplos. ....	111
Figura 4.14. Naturaleza de la función de la integral impropia. ....	116
Figura 4.15. Coeficiente de masa hidrodinámica “ $M_{22}$ ”. ....	124
Figura 4.16. Coeficiente de amortiguación hidrodinámica “ $N_{22}$ ”. ....	124
Figura 4.17. Coeficiente de masa hidrodinámica “ $M_{33}$ ”. ....	126
Figura 4.18. Coeficiente de amortiguación hidrodinámica “ $N_{33}$ ”. ....	126
Figura 4.19. Coeficiente de masa hidrodinámica “ $M_{22}$ ”. ....	128
Figura 4.20. Coeficiente de amortiguación hidrodinámica “ $N_{22}$ ”. ....	128
Figura 4.21. Coeficiente de masa hidrodinámica “ $M_{44}$ ”. ....	129
Figura 4.22. Coeficiente de amortiguación hidrodinámica “ $N_{44}$ ”. ....	130
Figura 4.23. Comparación del coeficiente de la masa hidrodinámica “ $M_{33}$ ”...	131
Figura 4.24. Comparación del coeficiente de la amortiguación hidrodinámica “ $N_{33}$ ” ....	131
Figura A.1. Flujo uniforme. ....	141
Figura A.2. Fuente. ....	142
Figura A.3. Sumidero. ....	143
Figura A.4. Circulación o vórtice. ....	144
Figura A.5. Fuente y sumidero separados por una distancia $2s$ . ....	147
Figura A.6. Fuente y sumidero separados por una distancia $2s$ en flujo uniforme (Óvalo de Rankine). ....	148
Figura A.7. Doblete o dipolo. ....	149
Figura A.8. Doblete o dipolo en flujo uniforme. ....	151
Figura D.1. Integración del término “ $F_{4ij}$ ” ....	171
Figura D.2. Análisis de sensibilidad del término “ $F_{411}$ ”. ....	173
Figura D.3. Análisis de sensibilidad del término “ $F_{412}$ ”. ....	173
Figura D.4. Análisis de sensibilidad del término “ $F_{421}$ ”. ....	174

Figura D.5. Análisis de sensibilidad del término “ $F4_{22}$ ” .....	174
Figura D.6. Gráfica de la función “ $F3_{22}$ ”.....	175
Figura D.7. Parte significativa de la función “ $F3_{22}$ ”.....	176
Figura D.8. Puntos de integración del término “ $F4_{22}$ ” .....	176

## LISTA DE TABLAS

Tabla 4.1. Datos de la sección transversal semicircular.....	97
Tabla 4.2. Datos de la sección transversal triangular.....	98
Tabla 4.3. Datos de la sección transversal rectangular. ....	98
Tabla 4.4. Datos del contorno de la sección transversal genérica.....	99
Tabla 4.5. Datos de la sección transversal de la embarcación genérica.....	100
Tabla 4.6. Coeficientes de la Transformación de Lewis del semicírculo. ....	100
Tabla 4.7. Coeficientes de la Transformación de Lewis del triángulo.....	102
Tabla 4.8. Coeficientes de la Transformación de Lewis del rectángulo. ....	103
Tabla 4.9. Coeficientes de la Transformación de Lewis de la embarcación genérica. ....	104
Tabla 4.10. Coeficientes de la Transformación de Lewis de la embarcación genérica. ....	104
Tabla 4.11. Coordenadas de los segmentos ejemplos. ....	111
Tabla 4.12. Constantes utilizadas para las validaciones. ....	112
Tabla 4.13. Validación del término “ $L1$ ”.....	113
Tabla 4.14. Validación del término “ $L3$ ”.....	114
Tabla 4.15. Validación del término “ $L5$ ”.....	117
Tabla 4.16. Validación del término “ $L7$ ”.....	118
Tabla 4.17. Validación del término “ $K1$ ”.....	119
Tabla 4.18. Validación del término “ $K3$ ”.....	120
Tabla 4.19. Validación del término “ $K5$ ”.....	121
Tabla 4.20. Validación del término “ $K7$ ”.....	122
Tabla D.1. Comparación del término “ $L5_{11}$ ” para distintas frecuencias. ....	169
Tabla D.2. Comparación del término “ $L5_{12}$ ” para distintas frecuencias. ....	170
Tabla D.3. Comparación del término “ $L5_{21}$ ” para distintas frecuencias. ....	170

Tabla D.4. Comparación del término “ $L_{522}$ ” para distintas frecuencias. ....170  
Tabla D.5. Análisis de sensibilidad del término “ $tol$ ” .....172

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolos Latinos

	Significado	Unidades
$\vec{a}$	Vector aceleración	$m/s^2$
$a_{2n-1}$	Coefficientes de la transformación conforme ( $a_{-1} = 1$ )	NA
$A_s$	Área de la sección transversal	$m^2$
$B_s$	Ancho de la sección transversal (medido en la intersección con la superficie libre del fluido)	$m$
$c$	Celeridad de la onda	$m/s$
$C_{kj}$	Coefficiente de amortiguación	$kg/s^2$
$D_s$	Calado de la sección transversal	$m$
$\vec{F}$	Vector de la fuerza total	$N$
$\vec{F}_d$	Fuerza asociada al potencial de difracción	$N$
$f_k$	Cosenos directores generalizados	NA
$\vec{F}_r$	Fuerza asociada al potencial de radiación o hidrodinámico	$N$
$\vec{F}_s$	Fuerza hidrostática	$N$
$\vec{F}_w$	Fuerza asociada al potencial del oleaje no perturbado	$N$
$g$	Aceleración de la gravedad	$m/s^2$
$G$	Centro de gravedad del cuerpo rígido	NA
$G_F$	Término del potencial de una fuente pulsante dependiente del espacio	$m^2/s$
$G_F^*$	Potencial de una fuente pulsante	$m^2/s$
$h$	Profundidad entre la superficie libre y el lecho marino	$m$
$H$	Altura total de una ola	$m$
$H_0$	Coefficiente de relación ancho-calado	NA

	<b>Significado</b>	<b>Unidades</b>
$IM_{kj}$	Coefficiente de masa o inercia del cuerpo rígido	$kg$
$j$	Subíndice que denota el tipo de movimiento (exceptuando la sección 4.4.1). Los valores 1, 2 y 3 indican desplazamiento en dirección $x$ , $y$ , $z$ respectivamente. Los valores 3, 4 y 5 indican rotación alrededor del eje $x$ , eje $y$ ó eje $z$ respectivamente	NA
$k$	Subíndice que denota la dirección de la carga (fuerza o momento). Los valores 1, 2 y 3 indican componente de la fuerza en $x$ , $y$ , $z$ respectivamente. Los valores 3, 4 y 5 indican componente del momento alrededor del eje $x$ , eje $y$ ó eje $z$ respectivamente	NA
$k$	Número característico del oleaje	$1/m$
$m$	Masa total del cuerpo rígido	$kg$
$M$	Metacentro	NA
$\vec{M}$	Vector del momento total	$N \cdot m$
$\vec{M}_d$	Momento asociado al potencial de difracción	$N \cdot m$
$M_{kj}$	Coefficiente de masa hidrodinámica	$kg$
$M^{(m)}$	Fuerza o momento de la masa hidrodinámica	$N$ ó $N \cdot m$
$\vec{M}_r$	Momento asociado al potencial de radiación o hidrodinámico	$N \cdot m$
$M_s$	Factor de escala de la transformación conforme	$m$
$\vec{M}_s$	Momento hidrostático	$N \cdot m$
$\vec{M}_w$	Momento asociado al potencial del oleaje no perturbado	$N \cdot m$
$\vec{n}$	Vector normal externo a una superficie	NA
$N$	Número de parámetros utilizados en la transformación conforme	NA
$N_F$	Número de segmentos (solución numérica) utilizados en la Teoría de Frank	NA
$N_{kj}$	Coefficiente de amortiguación hidrodinámica	$kg/s$
$n^{(m)}$	Cosenos directores de Frank	NA
$N^{(m)}$	Fuerza o momento de amortiguación hidrodinámica	$N$ ó $N \cdot m$

	<b>Significado</b>	<b>Unidades</b>
$n_x$	Componente x del vector normal unitario	NA
$n_y$	Componente y del vector normal unitario	NA
$n_z$	Componente z del vector normal unitario	NA
$p$	Presión manométrica	$Pa$
$\vec{p}$	Cantidad de movimiento lineal	$kg \cdot m/s$
$P$	Presión absoluta	$Pa$
$p_a$	Término de la presión hidrodinámica en fase con la aceleración	$Pa$
$P_{atm}$	Presión atmosférica	$Pa$
$p_v$	Término de la presión hidrodinámica en fase con la velocidad	$Pa$
$Q$	Caudal volumétrico	$m^3/s$
$Q_F$	Densidad o intensidad de una fuente pulsante	$m^3/s$
$\vec{r}$	Vector de posición	$m$
$R$	Radio de una circunferencia	$m$
$S$	Superficie	NA
$sa_j$	Amplitud del movimiento oscilatorio genérico	$m$
$ s_i $	Tamaño del segmento $i$	$m$
$s_j$	Movimiento oscilatorio genérico en dirección “ $j$ ”	$m$
$\dot{s}_j$	Velocidad oscilatoria en dirección “ $j$ ”	$m/s$
$\ddot{s}_j$	Aceleración oscilatoria en dirección “ $j$ ”	$m/s^2$
$t$	Tiempo	$s$
$T$	Período del oleaje	$1/s$
$u_x$	Componente del vector velocidad en dirección x	$m/s$
$u_y$	Componente del vector velocidad en dirección y	$m/s$
$u_z$	Componente del vector velocidad en dirección z	$m/s$
$V$	Magnitud del vector velocidad	$m/s$

	<b>Significado</b>	<b>Unidades</b>
$\vec{V}$	Vector velocidad	$m/s$
$v_j$	Velocidad oscilatoria en dirección $j$	$m/s$
$v_n$	Velocidad normal a una superficie	$m/s$
$x_0$	Coordenada en $x$ de la superficie mojada del cuerpo flotante	$m$
$x_j$	Coordenada en el eje horizontal del punto medio del segmento $j$	$m$
$x_p$	Coordenada “ $x$ ” del elemento de fluido en estudio	$m$
$X_k$	Cargas de excitación del oleaje	$N$ ó $N \cdot m$
$X_{r_k}$	Componente de la fuerza hidrodinámica ( $k = 1,2,3$ ) o momento hidrodinámico ( $k = 4,5,6$ )	$N$ ó $N \cdot m$
$X_{r_{kj}}$	Componente de la carga hidrodinámica en dirección “ $k$ ” ocasionada por una oscilación armónica del cuerpo rígido en dirección “ $j$ ”	$N$ ó $N \cdot m$
$y_0$	Coordenada en $y$ del contorno húmedo del cuerpo flotante	$m$
$y_j$	Coordenada en el eje vertical del punto medio del segmento $j$	$m$
$z_j$	Coordenada compleja del extremo inicial del segmento $j$	$m$
$z_p$	Coordenada “ $z$ ” de la partícula de agua en estudio	$m$

## Símbolos Griegos

	<b>Significado</b>	<b>Unidades</b>
$\alpha$	Factor de escalamiento del contorno húmedo del cuerpo flotante	NA
$\alpha_j$	Ángulo medido desde el eje horizontal positivo del segmento $j$	$rad$
$\Gamma$	Circulación o intensidad del vórtice	$m^2/s$
$\zeta$	Función del perfil de la ola	$m$
$\vec{\zeta}$	Vector rotacional	$rad/s$
$\zeta_a$	Amplitud de la ola	$m$
$\zeta_j$	Coordenada compleja del punto medio del segmento $j$	$m$
$\eta_j$	Coordenada en el eje vertical del extremo inicial del segmento $j$	$m$
$\lambda$	Longitud de la ola	$m$
$\mu$	Ángulo de propagación del oleaje	$rad$
$\mu_D$	Intensidad del dipolo o doblete	$m^2/s$
$\nu$	Número característico del oleaje en agua profunda	$1/m$
$\xi_j$	Coordenada en el eje horizontal del extremo inicial del segmento $j$	$m$
$\rho$	Densidad del fluido en estudio	$kg/m^3$
$\sigma_s$	Coficiente del área transversal	NA
$\Phi$	Función potencial de velocidad	$m^2/s$
$\Phi_0$	Potencial de velocidad evaluado en la superficie	$m^2/s$
$\Phi_2$	Potencial de velocidad asociado a un desplazamiento en dirección $y$	$m^2/s$
$\Phi_3$	Potencial de velocidad asociado a un desplazamiento en dirección $z$	$m^2/s$
$\Phi_4$	Potencial de velocidad asociado a una rotación alrededor del eje $x$	$m^2/s$
$\Phi_A$	Potencial de velocidad del oleaje estacionario	$m^2/s$
$\Phi_B$	Potencial de velocidad del oleaje regular progresivo	$m^2/s$

	<b>Significado</b>	<b>Unidades</b>
$\Phi_d$	Potencial de difracción del oleaje a través del cuerpo fijo	$m^2/s$
$\phi_j$	Potencial de radiación dependiente del espacio asociado a un movimiento en dirección $j$	$m^2/s$
$\Phi_j$	Potencial de velocidad asociado a un desplazamiento ( $j = 1,2,3$ ) o rotación ( $j = 4,5,6$ ) en dirección $j$	$m^2/s$
$\Phi_r$	Potencial de radiación del oleaje ocasionado por la oscilación del cuerpo	$m^2/s$
$\Phi_{r_j}$	Potencial de radiación a asociado a un movimiento en dirección $j$	$m^2/s$
$\Phi_w$	Potencial del oleaje no perturbado	$m^2/s$
$\Psi$	Función de corriente	$m^2/s$
$\omega$	Frecuencia angular	$rad/s$
$\nabla$	Volumen de fluido desplazado	$m^3$
$\vec{\nabla}$	Gradiente	NA
$\nabla^2$	Operador Laplaciano	NA
$F_{\nabla}$	Fuerza de flotabilidad	$N$

## INTRODUCCIÓN

La exploración y producción de petróleo y gas natural en las regiones Costa Afuera (*Offshore*) son operaciones más complejas que la exploración y producción de petróleo y gas natural sobre tierra, las estructuras Costa Afuera deben soportar condiciones climáticas extremas, al mismo tiempo, dependiendo de sus dimensiones, las plataformas tienen que albergar con un nivel razonable de comodidad, de 25 a 200 trabajadores aproximadamente. Aunado a lo anterior, estas instalaciones necesitan una serie de equipos, sistemas de control y comunicaciones, de anclaje o posicionamiento, generadores eléctricos, salvavidas, equipos para prevenir y apagar incendios, apoyo de helicópteros, almacenamiento y gestión de desechos humanos. Básicamente, existen tres tipos de pozos utilizados en Costa Afuera:

- Pozos de exploración.
- Pozos de delineación.
- Pozos de desarrollo.

Los pozos de exploración son perforaciones hechas para confirmar la existencia de hidrocarburos bajo tierra, al confirmar la existencia del mismo se realizan pozos de delineación, cuya finalidad es determinar la dimensión y características de los yacimientos para luego determinar si es factible o no la inversión. Si los datos son positivos, se empieza a perforar un pozo de desarrollo. Los sistemas de perforación Costa Afuera son extremadamente

complejos y muy costosos, aunque hayan sido desarrollados a partir de sistemas de extracción de hidrocarburos en tierra.

Durante las etapas de perforación y producción, la Industria Costa Afuera requiere un sistema de apoyo considerable. Esto incluye el mantenimiento de la plataforma, transporte de la tripulación o trabajadores, evacuación de emergencia, barcos que realizan actividades de manejo, transporte y tratamiento de los desechos generados (en caso de ser necesarios), barcos remolcadores, barcos que manipulan anclas y cables, helicópteros y unidades flotantes de almacenamiento. Estos sistemas de apoyo deben ser descritos en detalle para la presentación del proyecto, ya que forman parte esencial del mismo y, a su vez, es necesario conocer todos y cada uno de los componentes del proyecto, para poder realizar una evaluación exhaustiva de sus implicaciones en la generación de posibles impactos.

## CAPÍTULO I

### 1. FUNDAMENTOS DE LA INVESTIGACIÓN

#### 1.1. Planteamiento del Problema

Para describir el comportamiento dinámico de barcos, plataformas semi-sumergibles, boyas, helipuertos y otras estructuras en mar abierto, es necesario conocer sus movimientos producidos por fuerzas y momentos en función del tiempo. Se puede predecir si en ciertas condiciones del oleaje, geometría de la estructura u otros factores, las operaciones que se realizan en estructuras flotantes Costa Afuera, se efectúen de manera normal. Para la determinación de estas fuerzas y momentos, pudiera ser conveniente el empleo de los coeficientes hidrodinámicos, los cuales facilitan el cálculo de las cargas que actúan sobre toda la superficie sumergida de un cuerpo rígido flotante.

Los cálculos para determinar las fuerzas y momentos que actúan sobre las estructuras Costa Afuera, pueden implicar ecuaciones muy complejas y extensas, cuya resolución por métodos tradicionales resulta laboriosa, resultando el computador una herramienta valiosa a tal fin. No obstante, se busca simplificar aún más el problema, por lo que se realizan ciertas suposiciones que disminuyan la complejidad de los cálculos implicados, sin que los resultados se alejen mucho de la solución exacta, tal es el caso de la Teoría de Flujo Potencial, la cual desprecia el efecto producido por la viscosidad del fluido.

Por lo anteriormente expuesto, se elaborará un programa computacional para la determinación numérica de los coeficientes hidrodinámicos de un cuerpo rígido flotante. El fluido considerado será agua salada, el efecto del suelo marino sobre la descripción del movimiento del fluido no será considerado, es decir, la profundidad del mar será lo suficientemente grande como para despreciar tal efecto. Para describir el campo de velocidades del flujo, se recurrirá a la Teoría del Flujo Potencial; en la cual adicionalmente no se considerará el efecto de la tensión superficial.

## **1.2. Objetivos de la Investigación**

### **1.2.1. Objetivo General**

Elaborar un programa computacional basado en el lenguaje de programación “Fortran 90” para determinar los coeficientes hidrodinámicos relacionados con las cargas hidrodinámicas que actúan sobre la superficie sumergida en el mar de un cuerpo rígido flotante, cuya velocidad de traslación es considerada muy pequeña o nula.

### **1.2.2. Objetivos Específicos**

- Implementar subrutinas que realicen funciones numéricas (integración numérica, solución de sistemas de ecuaciones lineales) que sirvan de apoyo a los programas computacionales a ser desarrollados.
- Elaborar un programa basado en la Teoría Potencial de Tasai que calcule los coeficientes hidrodinámicos relacionados con las cargas hidrodinámicas que actúan sobre la superficie sumergida de un cuerpo rígido flotante para el caso de dos dimensiones.

- Elaborar un programa basado en la Teoría Potencial de Frank que calcule los coeficientes hidrodinámicos relacionados con las cargas hidrodinámicas que actúan sobre la superficie sumergida de un cuerpo rígido flotante para el caso de dos dimensiones.
- Validar los resultados del programa en dos dimensiones basado en la Teoría Potencial de Frank, a través de los resultados obtenidos por el programa basado en la Teoría Potencial de Tasai.
- A partir del programa en dos dimensiones basado en la teoría de Frank, generalizar los cálculos de dos a tres dimensiones, haciendo uso del método de paneles o método de elementos de frontera (BEM).

### **1.3. Justificación de la Investigación**

El gas ha pasado a ocupar un importante espacio en el escenario energético mundial, con un crecimiento continuo de la demanda. Venezuela está considerada como una de las naciones más importantes como potencial suplidor de energía gasífera por sus cuantiosas reservas de gas, su ventajosa posición geográfica e importancia geopolítica, constituyendo uno de los cinco grandes polos de atracción gasífera del mundo.

Las reservas más importantes de gas libre se encuentran Costa Afuera, siendo las áreas más avanzadas en exploración las correspondientes al Proyecto Mariscal Sucre en el Norte de la Península de Paria y las de la Plataforma Deltana. La zona del Golfo de Venezuela tiene un potencial elevado que comenzará a ser explorado en el marco del Proyecto Rafael Urdaneta, actualmente en proceso de definición.

La Ingeniería Costa Afuera en el País es un área, hasta ahora, muy poco desarrollada. Sin embargo, debido a nuestra gran dependencia de la venta de productos como el crudo y el gas, este trabajo resulta de gran interés para el País.

#### **1.4. Antecedentes de la Investigación**

Se han desarrollado diferentes teorías para el cálculo de las fuerzas y momentos hidrodinámicos que actúan sobre un cuerpo rígido flotante, siendo la Teoría de Ursell una de las más importantes. En 1949, Ursell publicó su teoría para la determinación de coeficientes hidrodinámicos de una sección transversal semicircular, oscilando en agua profunda. Esta Teoría es una aproximación muy primitiva, donde se asume que el cuerpo posee una velocidad de traslación nula y que el oleaje es regular.

Al poco tiempo de esta publicación, Tasai, Grim, Gerritsma, entre otros, utilizaron técnicas de transformación conocidas (para transformar una sección transversal más parecida de un barco, a un semicírculo) junto con la Teoría de Ursell, para poder obtener una mejor aproximación de las cargas hidrodinámicas actuantes en un cuerpo rígido flotante. La técnica de transformación más utilizada es la Transformación de Lewis de dos parámetros.

En 1953, Denis publicó un método para poder describir el comportamiento del oleaje irregular usando el principio de superposición, nuevamente esta teoría fue sólo válida para un movimiento de traslación nulo de la embarcación.

En 1957, Korvin Kroukovski publicó un método donde se consideró el efecto de la velocidad de traslación de la embarcación.

En 1967, Frank publicó su Teoría de Fuente Pulsante para calcular los coeficientes hidrodinámicos de una sección transversal de un barco de forma directa, sin recurrir a técnicas de transformación como la de Lewis.

En 1974, Keil publicó un método para obtener los coeficientes potenciales para el caso de cuerpos rígidos flotantes en agua con poca profundidad, considerando el efecto del suelo marino sobre el campo de velocidades del mar.

El desarrollo computacional durante la década de los ochenta, incrementó notablemente la velocidad del cálculo, relacionado con los movimientos de los barcos, por lo que se desarrollaron modelos en tres dimensiones basados en la Teoría del Flujo Potencial. Sin embargo, debido al problema tan complejo que presenta la consideración del efecto de la velocidad de traslación de la embarcación en tres dimensiones, sigue siendo bastante favorable recurrir a la aproximación en dos dimensiones (Método de Franjas).

En 1990, Faltinsen y Svensen discutieron claramente las ventajas y desventajas que tienen el método en dos dimensiones con respecto al de tres.

Actualmente, existen diversos programas computacionales para el cálculo de los coeficientes hidrodinámicos, siendo uno de los más poderosos el SEAWAY, basado en la Teoría Lineal de Franjas (*Linear Strip Theory*). Se pueden encontrar programas computacionales más recientes, los cuales se basan en el Método de Paneles o Método del Elemento de Frontera (*Boundary Element Method BEM*), éste último es un método muy parecido al Método del Elemento Finito (*Finite Element Method FEM*), donde sólo se hace una partición de la frontera del dominio de estudio y los elementos utilizados se reducen a elementos de superficie.

## **CAPÍTULO II**

### **2. MARCO TEÓRICO**

#### **2.1. Ingeniería Costa Afuera**

La finalidad de esta sección es brindar el fundamento teórico para la obtención de los coeficientes hidrodinámicos, los cuales intervienen directamente en la determinación de los movimientos y las fuerzas asociados a una estructura o embarcación flotante parcialmente sumergida bajo la influencia del oleaje marino. Un estudio posterior que está fuera del alcance de este trabajo, comprende el análisis de estabilidad de la embarcación a partir del conocimiento de estas cantidades. En primer lugar se dan entonces, las definiciones de los movimientos en estructuras y embarcaciones flotantes y luego se describen brevemente los tipos más comunes de embarcaciones y estructuras Costa Afuera.

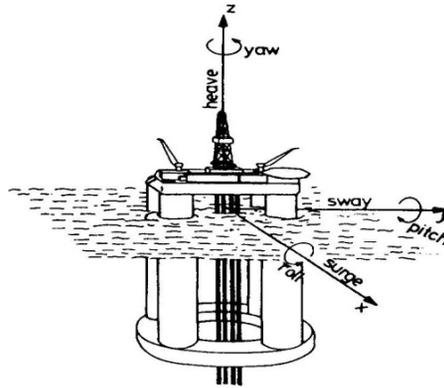
##### **2.1.1. Estructuras y embarcaciones Costa Afuera**

Las estructuras Costa Afuera pueden ser usadas para cumplir distintas funciones, tales como la extracción de petróleo o gas natural del subsuelo marino, torres de asistencia para la navegación o instalaciones para la carga y descarga de embarcaciones. Entre las tareas que se desarrollan en las plataformas petrolíferas destacan las operaciones de taladrar el subsuelo hasta alcanzar la zona donde se encuentra el petróleo o gas natural.

Las estructuras Costa Afuera pueden ser diseñadas para ser instaladas en lagos, ríos, bahías o en el mar abierto, ubicadas lejanas de la costa. Las plataformas petrolíferas son el mejor ejemplo de las estructuras Costa Afuera que pueden ser instaladas en aguas de dos mil metros de profundidad o más. Estas estructuras pueden ser hechas de acero, concreto armado o una combinación de ambos. Estas instalaciones son sumamente complejas y robustas, razón por la cual pueden soportar las cargas ocasionadas por el oleaje marino y además soportar la maquinaria tan potente y pesada que albergan para poder extraer el petróleo o gas natural del subsuelo marino. En toda plataforma petrolífera se combinan gases, líquidos y vapores inflamables, por lo que es necesario proteger a los trabajadores del riesgo de explosiones. Tanto en la extracción de petróleo como de gas natural, pueden existir grandes cantidades de sulfuro de hidrógeno o ácido sulfhídrico ( $H_2S$ ), que es el gas comúnmente encontrado en el sistema de drenaje. Altas concentraciones de  $H_2S$ , pueden causar daño a nivel de los ojos, el sistema nervioso y el respiratorio. Con una concentración de 500 - 1000 ppm, el sistema respiratorio se paraliza y puede ocurrir la muerte. [2], [9]

2.1.1.1 Definición de movimientos

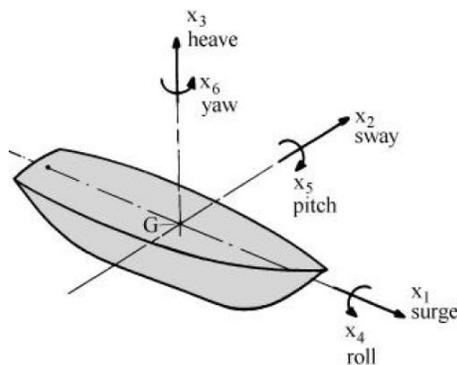
La figura 2.1 muestra los posibles movimientos de las estructuras Costa Afuera, cada uno con su respectivo nombre.



**Figura 2.1. Movimientos en plataformas Costa Afuera.**

Tomado de “*Sea Loads On Ships And Offshore Structures*” por Faltinsen O.M.

Análogamente a las plataformas, para el caso de las embarcaciones se pueden definir los mismos movimientos, como se muestra en la figura 2.2, donde para cada uno de los movimientos y rotaciones se utiliza un subíndice específico, esta notación se utilizará con mayor frecuencia en secciones posteriores.



**Figura 2.2. Movimientos en embarcaciones.**

Tomado de “*Theoretical Manual of Strip Theory Program*” por J.M.J. Journée y L.J.M Adegeest

Se pueden definir tres desplazamientos y tres rotaciones respecto a un sistema de referencia inercial cuyo origen es el centro de gravedad de la estructura o embarcación, indicando entre paréntesis sus nombres en inglés:

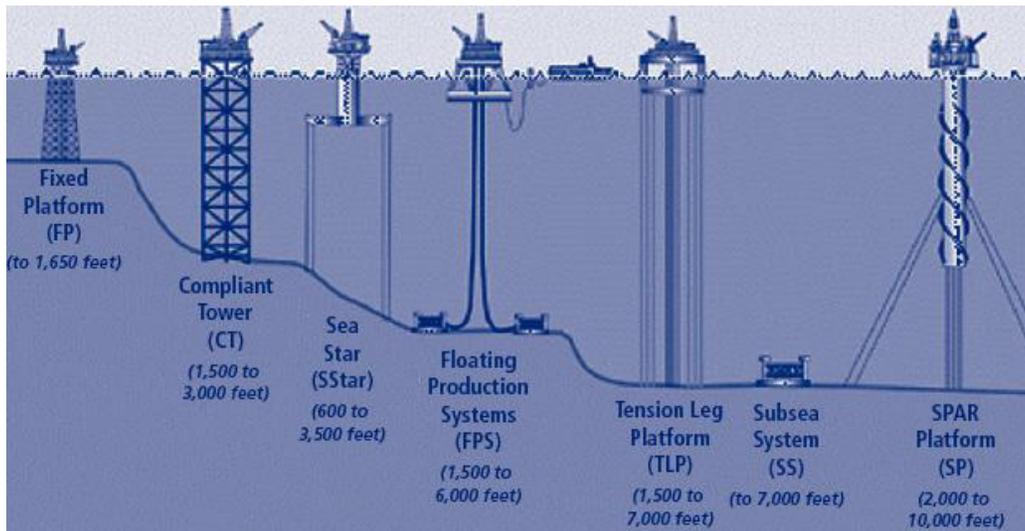
- Desplazamiento en la dirección x positiva (*surge*).
- Desplazamiento en la dirección y positiva (*sway*).
- Desplazamiento en la dirección z positiva (*heave*).
- Rotación alrededor del eje x (*roll*).
- Rotación alrededor del eje y (*pitch*).
- Rotación alrededor del eje z (*yaw*).

Para cada tipo de movimiento se acostumbra utilizar una notación estándar, la cual asigna subíndices del 1 al 6, que corresponden al mismo orden en que se definieron los movimientos anteriormente, del 1 al 3 significan desplazamientos y del 4 al 6 significan rotaciones. En secciones posteriores se podrá observar la utilidad de representar los movimientos de esta forma, ya que esta notación se utilizará a lo largo de este trabajo. [3], [9]

2.1.1.2 Tipos de plataformas

Existen varios tipos de plataformas Costa Afuera, las cuales se clasifican principalmente por la profundidad del agua en donde están ubicadas, también se toma en consideración la utilidad que prestan estas plataformas y la cantidad de espacio que existe en la cubierta destinado para la instalación del equipo necesario para realizar su función. [22]

La figura 2.3 muestra los principales tipos de plataformas Costa Afuera que existen en la actualidad, ordenadas en término de la profundidad sumergida ocupada y en forma creciente.



**Figura 2.3. Tipos de plataformas.**

Tomado de “*Advanced Technology Program*”

Plataforma fija (*fixed platforms - FP*)

Es un tipo de estructura Costa Afuera utilizada para la extracción de petróleo y gas natural. Estas plataformas son construidas generalmente sobre apoyos de acero y/o concreto armado anclados directamente al suelo marino, los cuales sostienen una cubierta con espacio para albergar torres de perforación (*drilling rigs*), instalaciones de producción y cuartos para la tripulación. Las plataformas fijas, debido a su inmovilidad, son diseñadas para un uso de largo plazo. Este tipo de plataformas son económicamente rentables para profundidades de hasta 520 m (1700 ft). [2], [30]

En la figura 2.4 se aprecia un ejemplo de una plataforma fija al suelo marino, en funcionamiento.



**Figura 2.4. Plataforma Fija.**

Tomado de “*Worldwide Firefighting, Well Control, Engineering & Training*”

Torre flexible (*compliant tower - CT*)

Estas estructuras se encuentran fijas al suelo marino, generalmente se utilizan para la producción de petróleo y gas natural. Su nombre se debe a que la cubierta consiste de torres estrechas y flexibles. Este tipo de estructura está diseñada para soportar grandes deflexiones y cargas laterales ocasionadas por el oleaje. Generalmente son utilizadas en casos donde la profundidad del agua se encuentra entre 450 m y 900 m (1500 ft y 3000 ft). Con el uso de elementos flexibles como soportes y tubos axiales, el fenómeno de resonancia se reduce, y las cargas causadas por el oleaje son disminuidas. Por ser estructuras flexibles, estas plataformas pueden resistir condiciones extremas debido a fenómenos naturales como tormentas o huracanes. [2], [24]

La figura 2.5 muestra un tipo de torre flexible, donde se observa que el soporte de dicha estructura está fijo al suelo marino como se mencionó anteriormente.



**Figura 2.5. Torre Flexible.**

Tomado de “*Engineering procurement construction installation*”

Plataforma semi-sumergible (*semi-submersible platform*)

Estas plataformas son estructuras que están soportadas por varias columnas apoyadas en dos cascos (*pontoons*), los cuales se encuentran sumergidos debajo del agua. Estos cascos proporcionan una estabilidad excelente en aguas fuertes y profundas. Las plataformas semi-sumergibles son estructuras flotantes que se pueden mover con su propio sistema de propulsión, las cuales se mantienen fijas mediante el uso de sistemas de amarre, sistemas de posicionamiento dinámico o una combinación de ambos. Debido a que son estructuras flotantes, pueden ser instaladas en aguas con profundidades de hasta 10600 m (35000 ft), y se fijan al suelo marino por medio de sistemas de amarre. [2], [25]

En la figura 2.6 se muestra un ejemplo de una plataforma semi-sumergible, donde se observan los cascos flotantes que tienen fijas las columnas de soporte de la cubierta.



**Figura 2.6. Plataforma semi-sumergible.**

Tomado de “*Moss Maritime: a leader in marine technology*”

Plataforma “jack-up” (*jack-up platforms*)

Es un tipo de plataforma móvil que es capaz de sujetarse por medio de apoyos fijos al suelo marino, el diseño más común es el que utiliza tres apoyos independientes como se muestra en la figura 2.7. [27]



**Figura 2.7. Plataforma “jack-up”.**

Tomada de “Sembcorp Marine”

Estos tipos de plataformas son más estables que las semi-sumergibles, sin embargo sólo pueden ser instaladas en aguas con una profundidad menor de 120 m (400 ft). [2]

Barcos perforadores (*drillships*)

Son buques que están equipados con aparatos para perforar. Son usados principalmente para explorar nuevas reservas de petróleo y gas natural en aguas profundas, o para operaciones de taladrado con propósito científico. Estas embarcaciones pueden ser utilizadas también para construir instalaciones submarinas. Pueden ser diseñados para mantenerse fijos mediante un sistema de posicionamiento dinámico. Una de las ventajas de estos barcos es que pueden perforar en aguas con profundidades mayores a 2500 m y no es necesario contar con un sistema de transporte hasta las instalaciones como es el caso de las plataformas semi-sumergibles. [2], [9], [26]

Un ejemplo de este tipo de embarcaciones se muestra en la figura 2.8, en la cual se observa que el barco está equipado para realizar operaciones de perforado.



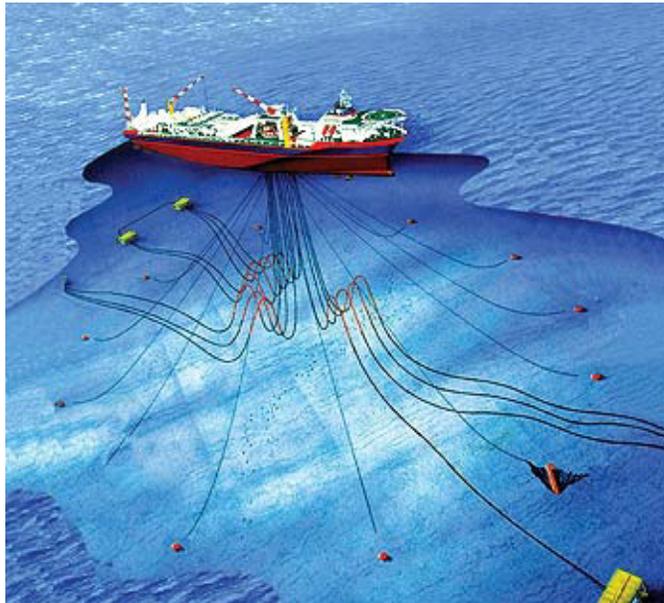
**Figura 2.8. Barcos perforadores.**

Tomado de “*Seadrill: setting the standar in drilling*”

Sistemas de producción flotantes (*floating production systems - FPS*)

Estos sistemas son embarcaciones que se utilizan para extraer todo el petróleo y gas natural de plataformas cercanas, procesarlo y almacenarlo hasta que se pueda descargar en tanqueros para su transporte o por medio de tuberías. [28]

En la figura 2.9 se observa una embarcación utilizada para el procesamiento y almacenamiento del petróleo y gas natural.



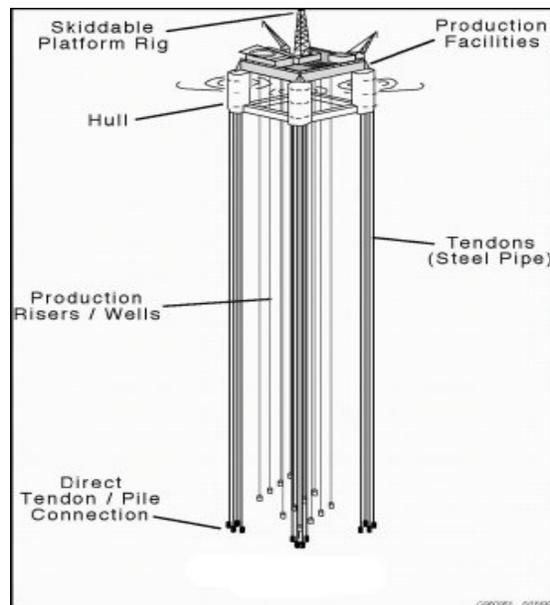
**Figura 2.9. Sistema de producción flotante.**

Tomado de “*Trelleborg Sealing Solutions*”

Plataforma de soportes tensionados (*tension-leg platform - TLP*)

Son estructuras flotantes que se encuentran fijas al suelo marino por medio de soportes tensionados (*tension leg*). Uno de los rasgos principales que caracteriza este tipo de plataformas es la gran rigidez axial de los tendones o cables, lo que hace que el movimiento vertical de la estructura sea muy pequeño. Esta característica permite que la producción se realice en la cubierta en lugar del suelo marino, lo que abarata los costos de operación. Ellas pueden ser instaladas en aguas con profundidades mayores de 300 m (1000 ft). [9], [29]

En la figura 2.10 se muestra una plataforma que esta fija por medio de cables sometidos a tensión, los cuales generalmente se encuentran en las esquinas de la estructura.



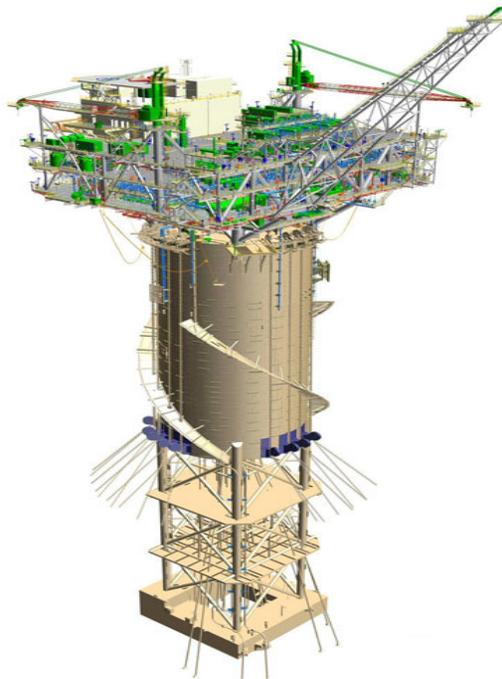
**Figura 2.10. Plataforma de soportes tensionados.**

Tomado de “*Us Warships*”

Plataformas tipo mástil (*spar platforms - SP*)

Son plataformas del tipo flotante, que consisten de un cilindro de gran diámetro que soporta la cubierta, es por ello que reciben este nombre tan peculiar. Estas plataformas, al igual que otras, se encuentran amarradas con cables al suelo marino. Generalmente este tipo de plataformas tiene la ventaja de ser utilizadas en aguas muy profundas. [23]

En la figura 2.11 se muestra un ejemplo de ellas, donde observa el cilindro de gran diámetro que soporta la cubierta de la plataforma (mástil).



**Figura 2.11. Plataforma tipo mástil.**

Tomado de “*Cronus Technology Inc*”

## 2.2. Principios de la Hidrostática

Esta sección como su nombre lo indica, está relacionada con definiciones básicas como la presión hidrostática, así como también aspectos más complicados como el principio de Arquímedes y la parte de estabilidad en objetos flotantes, conceptos importantes para poder entender secciones posteriores.

### 2.2.1. Presión hidrostática

Se define presión hidrostática en un fluido en reposo y en un punto, como el peso por unidad de área ejercido por una columna comprendida entre la superficie libre del fluido y dicho punto. [11]

$$P = \rho \cdot g \cdot h + P_{atm} \quad (2.1)$$

La ecuación 2.1 representa la presión hidrostática absoluta de un fluido de densidad “ $\rho$ ” en un punto ubicado a una profundidad “ $h$ ” de la superficie.

$$p = \rho \cdot g \cdot h \quad (2.2)$$

La ecuación 2.2 representa la presión relativa (manométrica), por ser más práctica, se utiliza mas en la Ingeniería Costa Afuera.

### 2.2.2. Principio de Arquímedes

Es un principio físico que afirma que un cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido en reposo, será empujado con una fuerza ascendente igual al peso del volumen de fluido desplazado por dicho cuerpo. De este modo, cuando un cuerpo está sumergido, se genera una fuerza resultante de la distribución de la

presión sobre la superficie de dicho cuerpo, la cual siempre actúa en dirección contraria a la fuerza de gravedad y su magnitud es igual al peso del fluido desplazado, esto se resume en la siguiente ecuación: [1], [14]

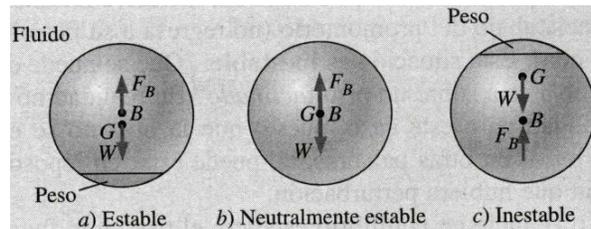
$$F_{\nabla} = m \cdot g = \rho \cdot g \cdot \nabla \quad (2.3)$$

La ecuación 2.3 representa la magnitud de la fuerza de flotabilidad “ $F_{\nabla}$ ”, donde la densidad “ $\rho$ ” es la del fluido en el cual se encuentra sumergido el cuerpo, “ $m$ ” es la masa del cuerpo y “ $\nabla$ ” es el volumen de fluido desplazado por dicho cuerpo.

### 2.2.3. Estabilidad en cuerpos flotantes

Una aplicación valiosa del concepto de flotación es la evaluación de la estabilidad de los cuerpos sumergidos y de los flotantes. Este tema tiene importancia en el diseño de los barcos y submarinos. La estabilidad rotacional de un cuerpo sumergido depende de las ubicaciones relativas de su centro de gravedad y centro de flotación, este último es el centroide del volumen desplazado. Un cuerpo sumergido es estable si tiene un fondo pesado, y en consecuencia, el centro de gravedad está directamente debajo del centro de flotación. En esos casos, una perturbación rotacional del cuerpo produce un momento de restitución que lo regresa a su posición estable original. Un cuerpo sumergido cuyo centro de gravedad está directamente arriba del centro de flotación es inestable y cualquier perturbación hará que este cuerpo se vuelque. Un cuerpo para el cual el centro de gravedad coincide con el centro de flotación, es neutralmente estable. Este es el caso de los cuerpos cuya densidad es constante en toda su extensión. Para esos cuerpos no existe tendencia de voltearse o enderezarse por sí mismos.

En la figura 2.12 se muestra los distintos casos de estabilidad mencionados anteriormente para cuerpos sumergidos. [1], [12], [14]



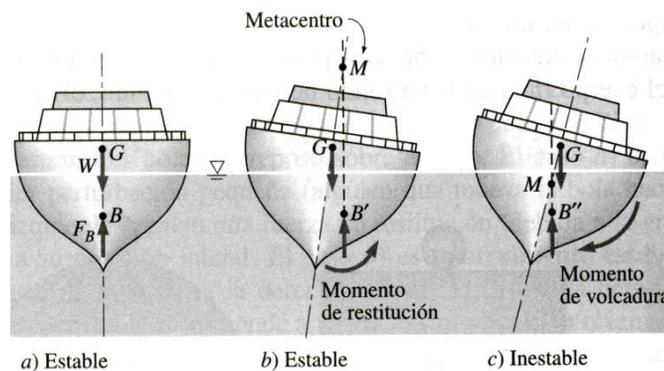
**Figura 2.12. Estabilidad en cuerpos sumergidos.**

Tomado de “Mecánica de Fluidos. Fundamentos y Aplicaciones” de Yunus Cengel y John Cimbala

Los criterios de estabilidad rotacional son semejantes para los cuerpos flotantes. Una vez más, si el cuerpo flotante tiene un fondo pesado y, por tanto, el centro de gravedad está directamente abajo del centro de flotación, el cuerpo siempre es estable. A diferencia de los cuerpos sumergidos, un cuerpo flotante puede ser estable cuando el centro de gravedad está directamente arriba del centro de flotación. Esto se debe a que el centro de flotación se mueve hacia uno de los lados durante una perturbación rotacional, mientras que el centro de gravedad del cuerpo permanece inalterado. Esto en algunos casos, hace que la fuerza de flotación y el peso del cuerpo generen un momento de restitución que regresa al cuerpo a la posición original de equilibrio. Una medida de estabilidad para los cuerpos flotantes es la altura metacéntrica, la cual es la distancia entre el centro de gravedad y el metacentro (punto de intersección de las líneas de acción de la fuerza de flotación que pasa por el cuerpo antes y después de la rotación). [1], [14]

Un cuerpo flotante es estable si el metacentro está arriba del centro de gravedad y, por consiguiente, la altura metacéntrica es positiva. En cambio, un cuerpo flotante es inestable si el metacentro está debajo del centro de gravedad y, en

consecuencia, la altura metacéntrica es negativa. En el último caso, el peso y la fuerza de flotación que actúan sobre el cuerpo inclinado generan un momento de volcadura, en lugar de uno de restitución, haciendo que el cuerpo se vuelque. En la figura 2.13 se muestra los distintos casos de estabilidad en cuerpos flotantes, tal y como se mencionó anteriormente, en donde se puede observar la ubicación del metacentro “ $M$ ” en cada caso. [1], [14]



**Figura 2.13. Estabilidad en cuerpos flotantes.**

Tomado de “Mecánica de Fluidos. Fundamentos y Aplicaciones” de Yunus Cengel y John Cimbala

### 2.3. Flujo Potencial

En esta sección se explicará la aproximación del flujo potencial, donde se hablará de los principales conceptos, las suposiciones que se deben realizar, las propiedades fundamentales de la función potencial y otros aspectos importantes relacionados con este tipo de flujo. También hay una sección incluida en los apéndices relacionada con este tema, donde se explican los principales patrones del flujo potencial.

### 2.3.1. Conceptos principales del flujo potencial

Para el desarrollo de esta aproximación de flujo potencial, dicho flujo es tratado como no viscoso, incompresible, siendo el fluido un medio continuo y homogéneo. La aproximación de flujo potencial o irrotacional debe su nombre a que parte de la suposición de que los elementos del fluido no tienen rotación neta, esto se puede expresar de la siguiente manera: [9]

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0} \quad (2.4)$$

Por otro lado, existe una identidad vectorial la cual expresa que el rotacional del gradiente de cualquier función escalar es igual al vector nulo, en forma de ecuación:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi = \vec{0} \quad (2.5)$$

Igualando la ecuación 2.4 con la ecuación 2.5, se obtiene la ecuación principal de la aproximación de flujo potencial:

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \Phi \quad (2.6)$$

La ecuación 2.6 está expresada de forma vectorial. En coordenadas cartesianas se tienen las siguientes ecuaciones:

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (2.7)$$

$$u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2.8)$$

$$u_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (2.9)$$

Las ecuaciones 2.7, 2.8 y 2.9 son las componentes del vector velocidad en dirección x, y, z respectivamente.

La utilidad de la función potencial se vuelve evidente cuando se determina la ecuación de continuidad, donde se observa la sustitución de las tres componentes de velocidad desconocidos  $(u_x, u_y, u_z)$  por una única variable escalar incógnita  $(\Phi)$ , reduciendo de esta manera el número de ecuaciones. La ecuación de continuidad aplicada para este tipo de flujo es la siguiente: [1]

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (2.10)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.7, 2.8 y 2.9 en la ecuación 2.10, se obtiene la ecuación de continuidad expresada en función del potencial de velocidad:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.11)$$

A su vez, la ecuación 2.11 se puede expresar usando el operador Laplaciano de la siguiente manera:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.12)$$

### 2.3.1.1 Líneas potenciales

Las líneas potenciales son aquellas curvas en donde la función potencial permanece constante. Debido a la naturaleza de la función potencial, y su

relación con la función de corriente, las líneas potenciales son perpendiculares a las líneas de corriente. [1]

#### 2.3.1.2 Líneas de corriente

Una línea de corriente es una curva que en todos sus puntos es tangente al campo de velocidades en un instante. Es por esto que las líneas de corriente indican la dirección del movimiento del fluido en cada punto. En un flujo estacionario, las líneas de corriente son constantes en el tiempo y los elementos de fluido se mueven a lo largo de las líneas de corriente. En un flujo no estacionario las líneas de corriente cambian con el tiempo y los elementos de fluido se mueven siguiendo trayectorias distintas a las líneas de corriente. [1], [14]

#### 2.3.1.3 Función de corriente

La función de corriente se define sólo en un plano, en un flujo estacionario y para un instante de tiempo en particular, a partir del concepto de caudal que pasa entre dos líneas de corriente arbitrarias. Para cada línea de corriente, la función de corriente tiene un valor único que es constante a lo largo de ella. El valor de cada línea de corriente se establece a partir de un cierto valor de referencia que se escoge arbitrariamente para una línea en particular. [11]

#### 2.3.1.4 Ecuación de Euler

Leonard Euler aplicó el Segundo Principio de Newton para el caso de fluidos no viscosos e incompresibles. El Segundo Principio de Newton explica que ocurre si sobre un cuerpo en movimiento actúa una fuerza. En ese caso, la fuerza modificará el estado de movimiento, cambiando la velocidad en módulo o dirección. En otras palabras, las fuerzas son causas que producen

aceleraciones en los cuerpos, y existe una relación entre la causa y el efecto, esto es, la fuerza y la aceleración están relacionadas. En términos matemáticos esta ley se expresa mediante la siguiente ecuación: [9]

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.13)$$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{V} \quad (2.14)$$

La ecuación 2.13 expresa que la fuerza total actuante en un cuerpo es igual a la derivada con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento. A su vez, la cantidad de movimiento está definida según la ecuación 2.14. Bajo la hipótesis de que la masa es constante, la ecuación 2.13 se puede reescribir como:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (2.15)$$

La ecuación 2.15 es la ecuación fundamental de la dinámica, donde la constante de proporcionalidad distinta para cada cuerpo es su masa de inercia, ya que las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo sirven para vencer su propia inercia.

Euler para poder aplicar el Segundo Principio de Newton en fluidos no viscosos e incompresibles, consideró primero un elemento diferencial de fluido, tal y como se muestra en la figura 2.14. Este elemento tiene dimensiones  $dx \times dy \times dz$ , orientado paralelamente a los ejes  $x, y, z$  del sistema de coordenadas, en donde sólo se muestra la componente en dirección  $y$  de la velocidad (en la figura se utiliza una notación distinta a la empleada a lo largo de este trabajo para las componentes de la velocidad, denotando por la letra  $v$  la componente de la velocidad en dirección  $y$ ). [9]

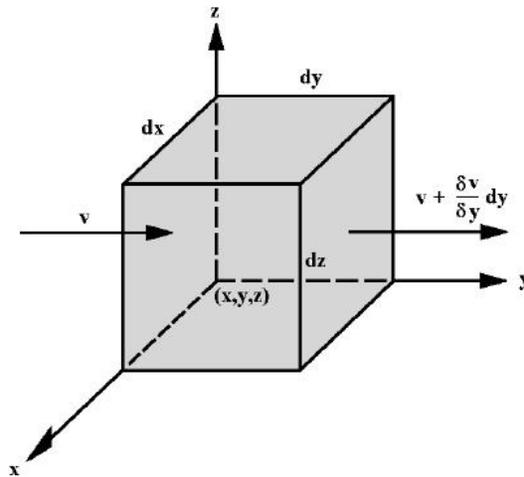


Figura 2.14. Elemento diferencial de fluido.

Tomado de “Offshore Hydromechanics” por J.M.J. Journée y W.W. Massie”

Aplicando el segundo Principio de Newton a fluidos no-viscosos e incompresibles, en la dirección  $x$  para un diferencial de masa  $dm$  se tiene:

$$dm \cdot \frac{Du_x}{Dt} = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{Du_x}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (2.16)$$

Donde el término “ $\frac{Du_x}{Dt}$ ” de la ecuación 2.16 es la derivada sustancial o derivada material de la componente en  $x$  de la velocidad. Aplicando la definición de la derivada sustancial o derivada material, se puede escribir la ecuación 2.16 de la siguiente manera:

$$\frac{Du_x}{Dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.17)$$

Análogamente, se pueden obtener dos ecuaciones más para las otras dos direcciones restantes  $(y, z)$ , entonces las ecuaciones de Euler para cada dirección son:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{En dirección x} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{En dirección y} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \cdot \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \quad \text{En dirección z} \quad (2.20)$$

### 2.3.1.5 Ecuación de Bernoulli

Un flujo puede tener energía cinética, de presión y potencial. Como se despreciaron los efectos viscosos para la aproximación del flujo potencial, la energía total del flujo se conserva a lo largo de una línea de corriente. Las propiedades de un flujo no-estacionario varían en todas las direcciones como una función dependiente del tiempo. Los términos de velocidades de las ecuaciones 2.18, 2.19 y 2.20 se pueden escribir en función del potencial de velocidad de la siguiente manera: [9]

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) \quad (2.21)$$

$$u_x \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \quad (2.22)$$

$$u_y \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \quad (2.23)$$

$$u_z \cdot \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \quad (2.24)$$

Las ecuaciones 2.21, 2.22, 2.23 y 2.24 se obtienen aplicando la definición de la función potencial conjuntamente con la regla de la cadena. Al sustituir las ecuaciones 2.21, 2.22, 2.23 y 2.24 en la ecuación 2.18, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \left( \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{p}{\rho} \right\} = 0 \quad (2.25)$$

Análogamente a la deducción de la ecuación 2.25, se pueden obtener las siguientes expresiones usando las ecuaciones de Euler para cada una de las direcciones restantes (ecuaciones 2.19 y 2.20):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \left( \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{p}{\rho} \right\} = 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot \left( \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{p}{\rho} \right\} = 0 \quad (2.27)$$

En las ecuaciones 2.25, 2.26 y 2.27, la derivada de la expresión entre corchetes con respecto a  $x, y, z$  respectivamente, es nula. Así esta expresión es sólo función del tiempo, lo que matemáticamente se puede expresar como la ecuación de Bernoulli para un flujo no estacionario:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot V^2 + \frac{p}{\rho} + g \cdot z = C(t) \quad (2.28)$$

La ecuación 2.28 sólo es válida a lo largo de una misma línea de corriente, en donde el término cuadrático de la velocidad se puede expresar de la siguiente forma:

$$V^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 \quad (2.29)$$

En caso de que el flujo sea estacionario, por su definición de que ninguna propiedad depende del tiempo, la ecuación 2.28 se transforma en:

$$\frac{1}{2} \cdot V^2 + \frac{p}{\rho} + g \cdot z = \text{constante} \quad (2.30)$$

Al igual que la ecuación 2.28, la ecuación 2.30 es válida solamente a lo largo de una misma línea de corriente, y es la llamada ecuación de Bernoulli. Si se aplica esta ecuación en la superficie libre, la pendiente del oleaje es pequeña, por lo que los términos cuadráticos de velocidades se pueden despreciar, esta suposición es válida solamente para oleaje que aparece en agua profunda, que es el caso de este trabajo. En secciones posteriores se aprovechará esta linealización de la ecuación de Bernoulli y se explicará con más detalle. [9]

### 2.3.2. Propiedades de la función potencial

#### 2.3.2.1 Ortogonalidad

Las componentes de la velocidad  $v_x, v_y$  se pueden expresar en función del potencial de velocidad o de la función de corriente:

$$u_x = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = +\frac{\partial\Psi}{\partial y} \quad (2.31)$$

$$u_y = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad (2.32)$$

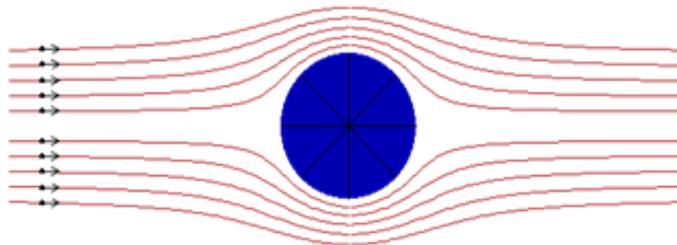
De la ecuación 2.32 se observa que “ $\partial\Phi/\partial y$ ” es el recíproco negativo de “ $\partial\Psi/\partial x$ ”, por lo que las líneas de corriente son ortogonales a las potenciales.

### 2.3.2.2 Condición de frontera impermeable

Esta condición se refiere a que no existe flujo a través de una línea de corriente que contiene al contorno, en otras palabras, las líneas de corriente no se interceptan en ningún punto. Esto también se ve reflejado en que cualquier condición de frontera impermeable es una línea de corriente, es decir: [14]

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \\ \Psi = \text{constante} \end{cases} \quad (2.33)$$

La ecuación 2.33 expresa: la velocidad normal a la superficie de la frontera impermeable es nula ( $n$  es la dirección normal a la superficie de la frontera) sólo es válida en las condiciones de frontera impermeable, un ejemplo de esto se observa en la figura 2.15, donde se aprecian las líneas de corriente del flujo alrededor de un cilindro infinito. En este caso, el contorno del cilindro es una línea de corriente, ya que es una condición de frontera impermeable (no existe flujo a través de ella) como se mencionó anteriormente. [14]



**Figura 2.15. Flujo alrededor de un cilindro circular.**

Tomado de “*Sembrcorp Marine*”

### 2.3.2.3 Condición lejana a una perturbación

Generalmente se asume que muy lejano de una zona de interés en donde existe una perturbación, se alcanza una condición inalterada del flujo debido a dicha perturbación, matemáticamente se expresa de la siguiente manera: [9]

$$\text{Si } \begin{cases} x \gg 0 \\ y \gg 0 \end{cases} \quad \text{entonces: } \begin{cases} \Psi \rightarrow \Psi_{\infty} \\ \Phi \rightarrow \Phi_{\infty} \end{cases} \quad (2.34)$$

En la ecuación 2.34, el origen  $(0,0)$  se refiere a la zona de estudio, en donde se encuentra la perturbación, en donde el subíndice  $\infty$  denota una condición que existe lejana a la zona de la perturbación.

### 2.3.3. Elementos principales del flujo potencial

La superposición permite sumar dos o más soluciones simples de flujo potencial para crear un campo de flujo más complejo, ya que las soluciones del flujo potencial satisfacen a la ecuación de Laplace  $\nabla^2\Phi = 0$ , la cual es lineal. Es por esto que es de gran utilidad establecer una colección de flujos potenciales que sirvan como bloques de construcción elementales con los que se pueda construir una diversidad de flujos más prácticos (figura 2.16). Los patrones de flujo simple son detallados en el apéndice A de este trabajo. [1]

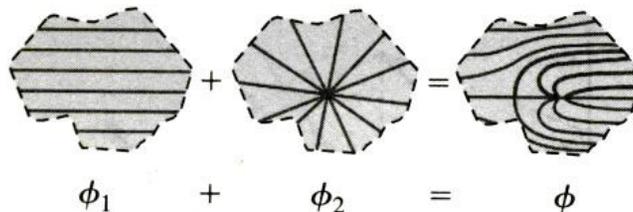


Figura 2.16. Superposición de dos flujos potenciales.

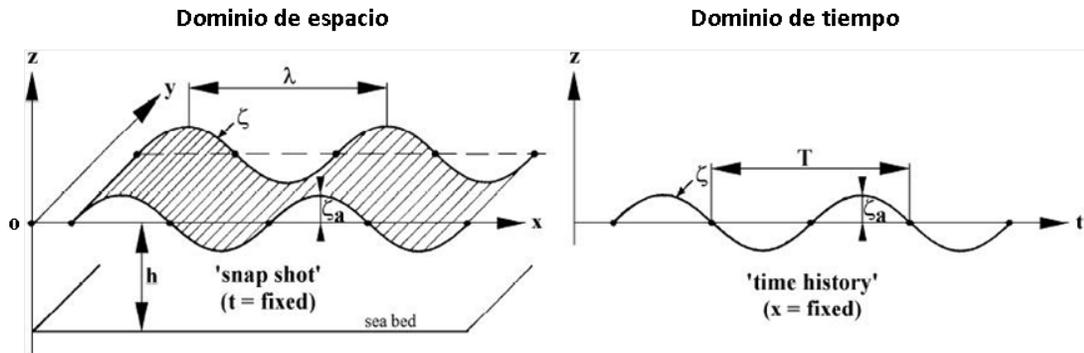
Tomado de “Mecánica de Fluidos. Fundamentos y Aplicaciones” de Yunus Cengel y John Cimbala.

## 2.4. Principios del oleaje regular

El oleaje en la superficie del océano causa cargas periódicas en las estructuras Costa Afuera, sin importar si estas se encuentran fijas o se encuentran flotando en la superficie marina. Es por esto que se puede representar el comportamiento del oleaje por medio de funciones armónicas. El oleaje regular se refiere a aquellas olas que poseen una frecuencia constante, siendo este tipo de oleaje la base para poder determinar una función que defina el comportamiento de un oleaje mucho más real, esto se puede lograr haciendo uso del Principio de Superposición, es decir, para poder determinar una función que describa el comportamiento de la superficie marina, se pueden superponer varias soluciones de olas regulares, obteniendo lo que se denomina un oleaje irregular, siendo este una mejor aproximación para describir el comportamiento de la superficie marina. [9], [10]

### 2.4.1. Definiciones básicas

Para este tipo de olas regulares, se definen varios términos para facilitar su estudio, los cuales se indican en la figura 2.17. Como se mencionó anteriormente, el oleaje regular posee una frecuencia constante, esto implica que el período “ $T$ ”, la longitud “ $\lambda$ ” y la amplitud “ $\zeta_a$ ”, se mantienen constantes a lo largo de una ola regular. [9], [10]



**Figura 2.17. Definiciones principales del oleaje regular.**

Tomado de “*Offshore Hydromechanics*” por J.M.J. Journée y W.W. Massie”

Otra definición importante que se usa en el oleaje regular es la pendiente de este, que se define de la siguiente manera: [10]

$$\frac{H}{\lambda} = \frac{2 \cdot \zeta_a}{\lambda} \quad (2.35)$$

Como el oleaje regular se expresa en función de argumentos angulares de funciones armónicas, la longitud del oleaje y el período se pueden convertir en ángulos utilizando la frecuencia angular “ $\omega$ ” y el número del oleaje “ $k$ ” de la siguiente manera: [9], [10]

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \quad (2.36)$$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad (2.37)$$

La función que representa el perfil de la ola, es decir, la que describe la superficie marina es la siguiente: [9]

$$\zeta = \zeta_a \cdot \cos(k \cdot x \pm \omega \cdot t) \quad (2.38)$$

La ecuación 2.38 representa un oleaje que se propaga en dirección del eje x, en donde el signo indica el sentido de propagación.

El oleaje regular se divide principalmente en dos grupos principales:

#### 2.4.1.1 Olas de agua profunda

También llamadas olas cortas, como su mismo nombre lo indica, la profundidad del agua para este tipo de olas es infinita, es decir, el suelo marino no altera el comportamiento del oleaje. Matemáticamente, este tipo de oleaje se define por la siguiente desigualdad: [9]

$$\frac{\lambda}{h} < 2 \tag{2.39}$$

Para fines de este trabajo, sólo se tratará el oleaje para este caso, es decir, el suelo marino no influye en el comportamiento del oleaje. Esta aproximación se puede realizar ya que el campo de estudio son las embarcaciones flotantes Costa Afuera, las cuales en la mayoría de los casos operan en aguas cuyas profundidades son grandes.

#### 2.4.1.2 Olas de agua poco profunda

También llamadas olas largas, al contrario de las olas de agua profunda, el comportamiento de este tipo de oleaje si es alterado por el suelo marino, ya que la profundidad del agua es un factor relevante para su estudio. Matemáticamente se definen por la siguiente desigualdad: [9]

$$\frac{\lambda}{h} > 20 \tag{2.40}$$

## 2.4.2. Teoría potencial aplicada al oleaje regular

La función potencial del oleaje regular debe cumplir con cuatro condiciones principales:

### 2.4.2.1 Ecuación de continuidad

Recordando la ecuación 2.11, la ecuación de continuidad se convierte en la ecuación de Laplace ya que se utiliza la aproximación de flujo potencial.

### 2.4.2.2 Condición de frontera del suelo marino

Esta condición de frontera se refiere a que el suelo marino es una línea de corriente, matemáticamente se denota de la siguiente manera: [9]

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial z} = u_z = 0 \quad \text{para } z = -h \quad (2.41)$$

### 2.4.2.3 Condición de frontera de la dinámica de la superficie libre

Como su mismo nombre lo indica, la condición de frontera de la dinámica de la superficie libre describe que la presión a lo largo de la superficie marina es igual a la presión atmosférica, esta condición se puede obtener aplicando la Ecuación de Bernoulli (ecuación 2.28): [9]

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial t} + \frac{1}{2} \cdot (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) + \frac{p}{\rho} + g \cdot z = \text{constante} \quad (2.42)$$

La ecuación 2.42 se puede linealizar al asumir que el oleaje en estudio posee una pequeña pendiente, en otras palabras los términos cuadráticos de la velocidad se pueden despreciar. Por otra parte, como se va a estudiar el caso de

dos dimensiones, la componente de la velocidad “ $u_y$ ” es nula. Al aplicar la ecuación 2.42 en la superficie marina, tomando en cuenta las suposiciones anteriormente mencionadas, obtenemos: [9]

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial t} + \frac{P_{atm}}{\rho} + g \cdot \zeta = constante \quad para \quad z = \zeta \quad (2.43)$$

El potencial de velocidad en la superficie libre puede ser expandido en series de Taylor como: [9]

$$\begin{aligned} \{\Phi_w\}_{z=\zeta} &= \{\Phi_w\}_{z=0} + \zeta \cdot \left\{ \frac{\partial \Phi_w}{\partial z} \right\}_{z=0} + \dots \Rightarrow \begin{array}{l} \text{derivando} \\ \text{respecto} \\ \text{del tiempo} \end{array} \Rightarrow \\ \left\{ \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \right\}_{z=\zeta} &= \left\{ \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} \right\}_{z=0} + 0(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Al aplicar el resultado obtenido de la ecuación 2.44 en la ecuación 2.43, se obtiene la condición de frontera de la dinámica de la superficie libre linealizada:

$$\frac{\partial \Phi_w}{\partial t} + \frac{P_{atm}}{\rho} + g \cdot \zeta = constante \quad para \quad z = 0 \quad (2.45)$$

#### 2.4.2.4 Condición de frontera de la cinemática de la superficie libre

En forma matemática se puede expresar como sigue: [10]

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \Phi_w}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad para \quad z = 0 \quad (2.46)$$

En la ecuación 2.46 se observa el resultado que se generalizó para “ $z = 0$ ” tal como se hizo anteriormente para la ecuación 2.45.

#### 2.4.2.5 Función potencial del oleaje regular

La función potencial que cumple con las principales condiciones antes mencionadas, se puede escribir de la siguiente manera: [10], [21]

$$\Phi_w = \frac{\zeta_a \cdot g}{\omega} \cdot \frac{\cosh[k \cdot (h + z)]}{\cosh(k \cdot h)} \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t) \quad (2.47)$$

La ecuación 2.47 es válida tanto para oleaje de agua profunda como oleaje de agua poco profunda, pero como se mencionó anteriormente, en este trabajo sólo se estudiará el caso para agua profunda, lo que conlleva a una simplificación ya que la profundidad “ $h$ ” tiende a infinito, y por propiedades del coseno hiperbólico, la ecuación 2.47 se convierte en:

$$\Phi_w = \frac{\zeta_a \cdot g}{\omega} \cdot e^{k \cdot z} \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t) \quad (2.48)$$

En la ecuación 2.48 se puede observar que la función potencial de este oleaje no depende de la profundidad del agua.

Una relación importante que se usa con mucha frecuencia es la relación entre la frecuencia “ $\omega$ ” y el número del oleaje “ $k$ ”, que se conoce como relación de dispersión. Para obtener esta relación, primero se deriva la ecuación 2.45 con respecto al tiempo y se sustituye la ecuación 2.46 en esta derivación: [10]

$$\frac{\partial^2 \Phi_w}{\partial t^2} + g \cdot \frac{\partial \Phi_w}{\partial z} = 0 \quad \text{para } z = 0 \quad (2.49)$$

Al sustituir la ecuación 2.48 en la ecuación 2.49, y reacomodando los términos se obtiene la relación de dispersión:

$$\omega^2 = k \cdot g \quad (2.50)$$

Nuevamente, la ecuación 2.50 sólo es válida para oleaje en agua profunda, ya que se utilizó la ecuación 2.48 para su deducción.

### 2.4.3. Cinemática del fluido

Es importante conocer el comportamiento cinemático del agua en un oleaje determinado, para esto se estudia el campo de velocidad y las trayectorias. Para obtener la velocidad se recurre a la definición de la función potencial, se deriva la ecuación 2.48 respecto a “x” y “z” para obtener el componente de la velocidad “ $u_x$ ” y “ $u_z$ ” respectivamente, lo que resulta: [9], [21]

$$u_x = \frac{\partial \Phi_w}{\partial x} = \zeta_a \cdot \frac{k \cdot g}{\omega} \cdot e^{k \cdot z} \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) \quad (2.51)$$

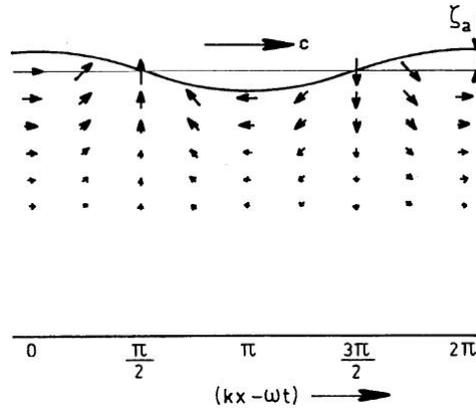
$$u_z = \frac{\partial \Phi_w}{\partial z} = \zeta_a \cdot \frac{k \cdot g}{\omega} \cdot e^{k \cdot z} \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t) \quad (2.52)$$

Aplicando la relación de dispersión (ecuación 2.50) en las ecuaciones 2.51 y 2.52, se obtiene:

$$u_x = \zeta_a \cdot \omega \cdot e^{k \cdot z} \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) \quad (2.53)$$

$$u_z = \zeta_a \cdot \omega \cdot e^{k \cdot z} \cdot \text{sen}(k \cdot x - \omega \cdot t) \quad (2.54)$$

Las ecuaciones 2.53 y 2.54 se pueden representar de manera gráfica tal y como se muestra en la figura 2.18.



**Figura 2.18. Campo de velocidad del oleaje regular en agua profunda.**

Tomado de “*Offshore Hydromechanics*” por J.M.J. Journée y W.W. Massie”

Integrando con respecto al tiempo las ecuaciones 2.53 y 2.54, se obtiene el desplazamiento de las partículas de agua del oleaje:

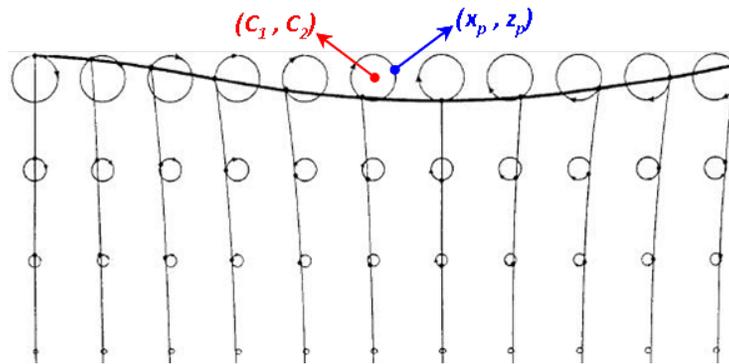
$$x = -\zeta_a \cdot e^{k \cdot z_p} \cdot \text{sen}(k \cdot x_p - \omega \cdot t) + C_1 \quad (2.55)$$

$$z = +\zeta_a \cdot e^{k \cdot z_p} \cdot \text{cos}(k \cdot x_p - \omega \cdot t) + C_2 \quad (2.56)$$

Si se consideran partículas sólidas en suspensión, estas poseen una oscilación en dirección “ $x$ ” y “ $z$ ” alrededor de un punto “ $(C_1, C_2)$ ”. Este punto se puede aproximar a la ubicación de la partícula en estudio “ $(x_p, z_p)$ ”, dichos puntos se muestran en la figura 2.19. Al elevar al cuadrado las ecuaciones 2.55 y 2.56, para luego sumarlas, se obtiene la trayectoria de cada partícula de agua: [9], [21]

$$(x - x_1)^2 + (z - z_1)^2 = (\zeta_a \cdot e^{k \cdot z_p})^2 \quad (2.57)$$

La ecuación 2.57 representa la ecuación de una circunferencia, esto quiere decir que la trayectoria de las partículas de agua es circular, y estos círculos se van haciendo cada vez más pequeños a medida que la profundidad de la partícula en estudio sea mayor. Esto se muestra en la figura 2.19.



**Figura 2.19.** Trayectoria de las partículas de agua del oleaje regular en agua profunda.

Tomado de “*Offshore Hydromechanics*” por J.M.J. Journée y W.W. Massie”

## 2.5. Coeficientes hidrodinámicos

En esta sección se presenta el significado de los coeficientes hidrodinámicos, así como la deducción de ellos y su importancia para la determinación del comportamiento debido al efecto del oleaje marino sobre embarcaciones y estructuras Costa Afuera. Dicha sección trata primero los sistemas de coordenadas que se utilizaron en este trabajo, luego se explican las condiciones de fronteras del problema en estudio y por último se tratarán detalladamente dos métodos que se utilizaron para el cálculo de los coeficientes hidrodinámicos. En esta sección se considerará un cuerpo rígido flotando en un fluido ideal oscilando debido a un oleaje determinado, y se determinará la relación y la importancia que tienen los coeficientes hidrodinámicos con respecto a la determinación de los movimientos, fuerzas y momentos en cuerpos flotantes como embarcaciones y plataformas.

### 2.5.1. Sistemas de coordenadas utilizados

Los movimientos de una embarcación o cualquier estructura Costa Afuera, al igual que cualquier cuerpo rígido se dividen en tres desplazamientos del centro de gravedad del cuerpo, y tres rotaciones alrededor de este centro de gravedad. Para describir estos movimientos, se debe especificar los sistemas de coordenadas a utilizar en este trabajo, aunque en secciones posteriores se harán algunas excepciones tanto en la Teoría de Tasai como en la de Frank. Los tres sistemas de coordenadas cartesianos más utilizados para el estudio de los movimientos de estructuras y embarcaciones Costa Afuera se muestran en la figura 2.20 y se explica cada uno a continuación: [6], [9]

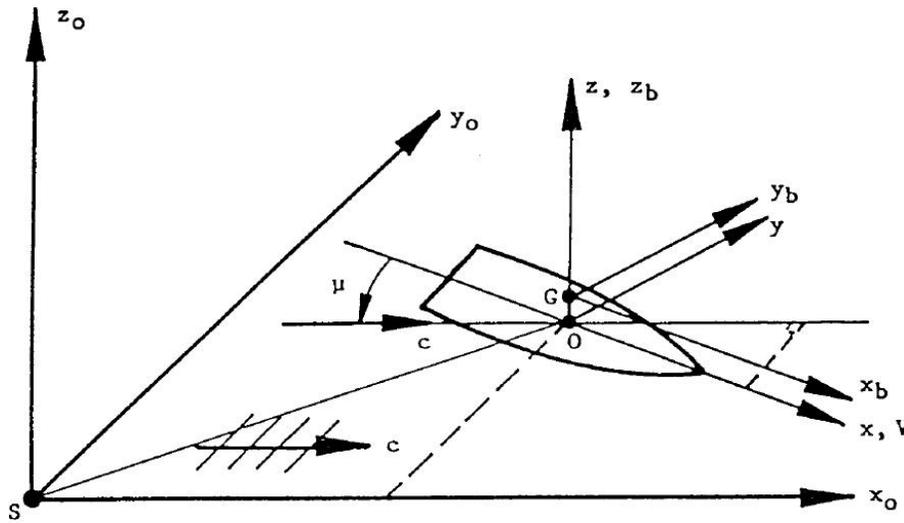


Figura 2.20. Sistemas de coordenadas.

Tomado de "Theoretical Manual of Strip Theory Program" por J.M.J. Journée y L.J.M

Adegeest

2.5.1.1 Sistema de coordenadas fijo al cuerpo (*body-bound coordinate system*):

Este sistema de coordenadas esta vinculado al cuerpo, su origen es el centro de gravedad “ $G$ ” del cuerpo, si se trata de embarcaciones el eje  $x_b$  esta direccionado positivamente hacia proa, el eje  $y_b$  hacia babor y el eje  $z_b$  hacia arriba. El plano  $x_b y_b$  es paralelo al plano de la superficie marina sin oleaje. [9]

2.5.1.2 Sistema de coordenadas de translación estacionaria o inercial (*steadily translating coordinate system*)

Este es un sistema de coordenadas que se desplaza con una velocidad constante “ $V$ ” la cual es la velocidad de la embarcación en movimiento. El origen de este sistema de coordenadas es el punto “ $O$ ”, el cual está ubicado en la misma vertical que el centro de gravedad “ $G$ ”, pero en el plano de la superficie marina. Para efectos de este trabajo, no se tomará en cuenta el efecto de la velocidad de la embarcación, en otras palabras, este sistema de coordenadas no se encuentra en movimiento y por ende va a coincidir con el sistema de coordenadas fijo al cuerpo. [9]

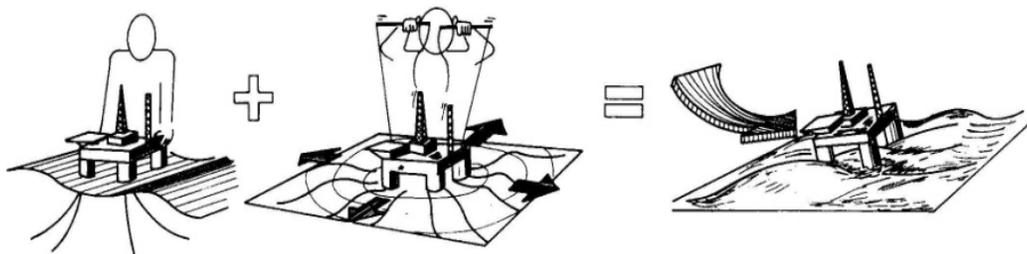
2.5.1.3 Sistema de coordenadas fijo a tierra (*earth-bound coordinate system*):

El plano  $x_0 y_0$  coincide con el plano de la superficie marina sin oleaje. El origen de este sistema de coordenadas es el punto “ $S$ ”, el cual esta ubicado en el plano de la superficie marina sin oleaje. El eje  $x_0$  coincide con la dirección de propagación del oleaje, este eje puede estar rotado un ángulo “ $\mu$ ” con respecto al eje  $x$  del sistema de coordenadas de translación inercial. [9]

### 2.5.2. Principios básicos

Anteriormente se mencionaron algunas suposiciones para resolver el problema planteado, como el hecho de que la profundidad del agua es infinita, lo que significa físicamente que el campo de velocidad del fluido no se ve afectado por el suelo marino. Por otro lado se linealizó la ecuación de Bernoulli despreciando los términos cuadráticos de velocidades. También se despreció el efecto de la velocidad de traslación del cuerpo rígido considerando que esta es muy pequeña o nula. Otra suposición importante que se utilizó fue despreciar el efecto viscoso del fluido para el problema en estudio, lo que permite utilizar la Teoría del Flujo Potencial y también permite utilizar la Ecuación de Bernoulli.

Debido a las suposiciones para simplificar el problema en estudio, el potencial de velocidad del fluido es lineal, y por ende se puede aplicar el Principio de Superposición. Dicho esto, para la determinación del potencial de velocidad del fluido se puede superponer el resultado de un cuerpo flotante fijo al ser influenciado por el oleaje marino, y el resultado del mismo cuerpo en agua tranquila al ser forzado a un movimiento oscilatorio. En la figura 2.21 se muestra el Principio de Superposición como se explicó anteriormente. [3], [9]



**Figura 2.21. Principio de superposición aplicado para determinar el potencial de velocidad.**

Tomado de “*Sea Loads On Ships And Offshore Structures*” por Faltinsen O.M.

El potencial de velocidad del fluido se puede separar en tres partes, un potencial asociado al oleaje no perturbado, un potencial asociado al efecto de difracción del oleaje debido al cuerpo fijo y un potencial de radiación debido al movimiento oscilatorio del cuerpo en agua sin ningún tipo de oleaje. En forma de ecuación se puede expresar de la siguiente manera: [3], [9]

$$\Phi = (\Phi_w + \Phi_d) + \Phi_r \quad (2.58)$$

En la ecuación 2.58 se observa como se puede separar el potencial de velocidad del fluido, el primer término “ $\Phi_w$ ” se denomina potencial del oleaje no perturbado, como su mismo nombre lo indica es el potencial del fluido de un oleaje determinado sin tomar en cuenta el efecto ocasionado en el oleaje por el cuerpo en estudio. Al segundo término “ $\Phi_d$ ” se le llama potencial de difracción, un potencial que se determina restringiendo el movimiento del cuerpo en estudio y determinando el efecto ocasionado en un oleaje determinado debido a dicho cuerpo. El tercer término “ $\Phi_r$ ” denominado como potencial de radiación, se refiere al potencial del oleaje ocasionado por el movimiento oscilatorio del cuerpo en estudio en agua donde previamente no existe ningún tipo de oleaje. Este término también se llama potencial hidrodinámico. Para efectos de este trabajo sólo se estudiará el potencial de radiación, los detalles de este potencial se explicarán posteriormente. Los primeros dos términos están encerrados entre paréntesis ya que guardan relación, si se observa nuevamente la figura 2.21, el primer dibujo representa estos términos en donde la plataforma está fija, y el segundo dibujo representa el potencial de radiación, en donde la plataforma está oscilando y este movimiento ocasiona un oleaje. [3], [9], [10]

### **2.5.3. Requerimientos y condiciones de frontera**

Anteriormente, en la sección de los principios del oleaje regular se establecieron algunos requerimientos y condiciones de frontera que debe cumplir el potencial de velocidad, los cuales son iguales para esta sección, con la única diferencia que todas estas condiciones ahora deben ser aplicadas a “ $\Phi$ ”. En estos casos sólo se mostrarán los resultados, ya que las deducciones se explicaron anteriormente en la sección del oleaje regular.

#### 2.5.3.1 Ecuación de continuidad

Esta condición se explicó anteriormente en la ecuación 2.11, por lo que es válido usarla en esta sección.

#### 2.5.3.2 Condición de frontera del suelo marino

De nuevo, esta condición coincide con la explicada anteriormente en la sección del oleaje regular en la ecuación 2.41.

#### 2.5.3.3 Condición de frontera en la superficie libre

Como se explicó anteriormente en la sección del oleaje regular, si se unen las condiciones de frontera de la superficie libre, tanto la dinámica como la cinemática se obtiene la ecuación 2.49, la cual se puede usar para esta sección.

#### 2.5.3.4 Condición de frontera de la cinemática de la superficie del cuerpo oscilante

Esta condición se puede enunciar como: la velocidad de una partícula de fluido en un punto de la superficie del cuerpo es igual a la velocidad de este. Esto se puede afirmar ya que el fluido es incompresible y el cuerpo no se deforma ya

que es rígido, por ende la velocidad del cuerpo en cualquier punto de este es la misma. Expresando esta condición en una ecuación: [7], [9]

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = v_n(x, y, z, t) \quad (2.59)$$

#### 2.5.3.5 Condición de radiación

La condición de radiación establece: a una distancia muy alejada de la perturbación (cuerpo oscilando), el potencial de velocidad tiende a cero. Físicamente se puede explicar con la oscilación de una embarcación en un oleaje determinado, la influencia de esta oscilación sobre el oleaje disminuye a medida que éste se aleja de la perturbación. Esta condición también se puede expresar: [7], [9]

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Phi = 0 \quad (2.60)$$

#### 2.5.3.6 Condiciones de simetría y asimetría

La mayoría de los barcos y plataformas son simétricos respecto a su plano medio, para simplificar algunos cálculos implicados en la determinación de los coeficientes hidrodinámicos se asume esta simetría. Tanto el desplazamiento en dirección y como la rotación alrededor del eje x son movimientos que ocasionan un comportamiento asimétricos en el flujo, a diferencia del desplazamiento en dirección z que ocasiona un comportamiento simétrico. A continuación se expresan las condiciones de simetría y asimetría para cada tipo de movimiento: [7], [9]

$$\Phi_2(-x, y) = -\Phi_2(+x, y) \quad \text{desplazamiento en dirección y} \quad (2.61)$$

$$\Phi_3(-x, y) = +\Phi_3(+x, y) \quad \text{desplazamiento en dirección z} \quad (2.62)$$

$$\Phi_4(-x, y) = -\Phi_4(+x, y) \quad \text{rotación alrededor del eje x} \quad (2.63)$$

En las ecuaciones 2.61, 2.62 y 2.63 el subíndice del potencial “ $\Phi_j$ ” indica el tipo de movimiento, este subíndice en el caso plano puede tomar los valores 2, 3 y 4, denotando un desplazamiento en dirección y, un desplazamiento en dirección z y una rotación alrededor del eje x respectivamente.

#### 2.5.4. Fuerzas y momentos

Para determinar las fuerzas y los momentos que actúan sobre el cuerpo flotante en estudio debido al oleaje en el que se encuentra, se integra la presión a lo largo de la superficie húmeda de este cuerpo. Para determinar la presión se aplica la Ecuación de Bernoulli (ecuación 2.30), que luego de linealizarla al desprestigiar los términos cuadráticos de velocidades, como se hizo anteriormente en la sección del oleaje regular (ecuación 2.43), se obtiene: [7]

$$p = -\rho \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho \cdot g \cdot z \quad (2.64)$$

Como indican deducciones anteriores, el potencial de velocidad del flujo se puede dividir en varios términos si se utiliza el principio de superposición (ecuación 2.58), aplicando esto a la ecuación 2.64 se obtiene:

$$p = -\rho \cdot \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_d}{\partial t} \right) - \rho \cdot g \cdot z \quad (2.65)$$

Ahora, utilizando la expresión anterior para integrar la presión a lo largo de la superficie húmeda, se obtiene las fuerzas y momentos actuantes en dicha superficie:

$$\vec{F} = -\iint_S (p \cdot \vec{n}) \cdot dS = \rho \cdot \iint_S \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_d}{\partial t} + g \cdot z \right) \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (2.66)$$

$$\vec{M} = -\iint_S p \cdot (\vec{r} \times \vec{n}) \cdot dS = \iint_S \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_w}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_d}{\partial t} + g \cdot z \right) \cdot (\vec{r} \times \vec{n}) \cdot dS \quad (2.67)$$

En las ecuaciones 2.66 y 2.67, “ $\vec{n}$ ” es el vector normal externo a la superficie “ $dS$ ”, y “ $\vec{r}$ ” es el vector de posición de la superficie “ $dS$ ” con respecto al sistema de coordenadas  $O(x, y, z)$  (ver figura 2.28). Al igual que la presión en la ecuación 2.65, las fuerzas y momentos se pueden separar en cuatro términos, fuerza y momento de radiación o hidrodinámico, fuerza y momento asociado al oleaje no perturbado, fuerza y momento de difracción y la fuerza y el momento hidrostático, respectivamente como se muestra en las siguientes ecuaciones: [7]

$$\vec{F} = \vec{F}_r + \vec{F}_w + \vec{F}_d + \vec{F}_s \quad (2.68)$$

$$\vec{M} = \vec{M}_r + \vec{M}_w + \vec{M}_d + \vec{M}_s \quad (2.69)$$

En este trabajo como se mencionó anteriormente sólo se analizará el potencial de radiación o hidrodinámico, el cual se explica con detalle a continuación en donde se deducirán los coeficientes hidrodinámicos.

### 2.5.5. Potencial de radiación o hidrodinámico

Consideremos un cuerpo rígido flotando en agua tranquila (agua sin ningún tipo de oleaje), el cual posee un movimiento oscilatorio, dicho movimiento ocasiona un oleaje determinado, el potencial asociado a este flujo ocasionado por la oscilación del cuerpo es el potencial de radiación o potencial hidrodinámico. Las fuerzas y momentos ocasionados por este flujo reciben el nombre de cargas hidrodinámicas.

Para el caso del potencial de radiación o hidrodinámico se aplica el Principio de Superposición a partir de cada tipo de movimiento por separado, es decir, el potencial hidrodinámico para cada uno de los tres desplazamientos y tres rotaciones, para luego sumar todos estos potenciales y obtener el potencial hidrodinámico total. Matemáticamente se puede expresar: [7], [9]

$$\Phi_r = (\Phi_{r_1} + \Phi_{r_2} + \Phi_{r_3}) + (\Phi_{r_4} + \Phi_{r_5} + \Phi_{r_6}) = \sum_{j=1}^6 \Phi_{r_j} \quad (2.70)$$

En la ecuación 2.70, el subíndice “j” del término “ $\Phi_{r_j}$ ” puede tomar los valores 1, 2 y 3 para denotar un desplazamiento en dirección del eje x, eje y, eje z respectivamente, y los valores 4, 5 y 6 para denotar una rotación alrededor del eje x, eje y, eje z respectivamente. El potencial de radiación depende tanto del espacio como del tiempo, se puede suponer que este potencial puede expresarse como la multiplicación de dos funciones, una dependiente del espacio y otra del tiempo: [7], [9]

$$\Phi_r(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^6 \phi_j(x, y, z) \cdot v_j(t) \quad (2.71)$$

Al sustituir la ecuación 2.71 en la ecuación 2.66, se obtiene la expresión de la fuerza hidrodinámica: [7]

$$\begin{aligned}\vec{F}_r &= \rho \cdot \iint_S \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} \cdot dS = \rho \cdot \iint_S \left( \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^6 \phi_j \cdot v_j \right) \cdot \vec{n} \cdot dS \\ \vec{F}_r &= (X_{r_1}, X_{r_2}, X_{r_3})\end{aligned}\quad (2.72)$$

Análogamente a la fuerza hidrodinámica, para obtener la expresión del momento hidrodinámico se realiza una sustitución de la ecuación 2.71 en la ecuación 2.67: [7]

$$\begin{aligned}\vec{M}_r &= \rho \cdot \iint_S \left( \frac{\partial \Phi_r}{\partial t} \right) \cdot (\vec{r} \times \vec{n}) \cdot dS = \rho \cdot \iint_S \left( \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^6 \phi_j \cdot v_j \right) \cdot (\vec{r} \times \vec{n}) \cdot dS \\ \vec{M}_r &= (X_{r_4}, X_{r_5}, X_{r_6})\end{aligned}\quad (2.73)$$

Para simplificar las ecuaciones requeridas posteriormente, se acostumbra utilizar la notación que se muestra en las ecuaciones 2.72 y 2.73, donde la letra “ $k$ ” del término “ $X_{r_k}$ ” puede tomar los valores 1, 2 o 3 para denotar la componente x, componente y o componente z de la fuerza respectivamente, y los valores de 4, 5 o 6 para denotar la componente x, componente y o componente z del momento respectivamente. La ventaja de utilizar esta notación se observa en la siguiente ecuación, donde se unifica la ecuación 2.72 con la 2.73 en una expresión más general: [9], [10]

$$X_{r_k} = \rho \cdot \iint_S \frac{\partial}{\partial t} \sum_{j=1}^6 (\phi_j \cdot v_j) \cdot f_k \cdot dS \quad \text{para } k = 1,2,3,4,5,6 \quad (2.74)$$

En la ecuación anterior, el término “ $f_k$ ” corresponde a los cosenos directores generalizados, reciben este nombre ya que no sólo son los tres cosenos

directores de los ejes coordenados, sino que también incluyen el producto vectorial para el cálculo de los momentos hidrodinámicos, es por esto que son seis y se definen de la siguiente manera: [9], [10]

$$\begin{aligned}
 f_1 = \cos(n, x) &= \frac{n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} \\
 f_2 = \cos(n, y) &= \frac{n_y}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}} \\
 f_3 = \cos(n, z) &= \frac{n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}}
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 &\text{Asociados al producto } \vec{r} \times \vec{n} \\
 f_4 &= y \cdot \cos(n, z) - z \cdot \cos(n, y) \\
 f_5 &= z \cdot \cos(n, x) - x \cdot \cos(n, z) \\
 f_6 &= x \cdot \cos(n, y) - y \cdot \cos(n, x)
 \end{aligned}
 \tag{2.75}$$

Como se observa en la ecuación 2.75, los primeros tres cosenos directores generalizados están normalizados, es decir, la suma del cuadrado de cada uno de ellos es igual a la unidad:

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1 \tag{2.76}$$

Partiendo de la suposición anterior de la posibilidad de separar el potencial de radiación en un término dependiente del espacio ( $\phi_j$ ) y un término dependiente del tiempo ( $v_j$ ), la ecuación 2.74 se transforma en:

$$X_{r_k} = \sum_{j=1}^6 \left( \frac{dv_j}{dt} \cdot \rho \cdot \iint_S \phi_j \cdot f_k \cdot dS \right) = \sum_{j=1}^6 X_{r_{kj}} \quad \text{para } k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \tag{2.77}$$

Para entender la ecuación 2.77 se debe tener en cuenta que para un movimiento en una dirección determinada se produce una fuerza o momento en otra dirección totalmente distinta. El término “ $X_{r_{kj}}$ ” es la componente de la carga

hidrodinámica en dirección “ $k$ ” ocasionada por una oscilación armónica del cuerpo rígido en dirección “ $j$ ”. La ecuación anterior se puede seguir desarrollando ya que se puede determinar una expresión para la aceleración, para ello suponemos un movimiento oscilatorio genérico de la siguiente manera: [9], [13]

$$s_j = sa_j \cdot e^{-i\omega t} \quad (2.78)$$

La ecuación 2.78 expresa el movimiento oscilatorio en notación compleja, siendo el término “ $sa_j$ ” la amplitud de la oscilación. Derivando esta ecuación respecto al tiempo, se obtiene la expresión de la velocidad, y derivando la velocidad respecto al tiempo, se obtiene la aceleración: [9]

$$\begin{aligned} \dot{s}_j = v_{r_j} &= -i \cdot \omega \cdot sa_j \cdot e^{-i\omega t} \\ \ddot{s}_j = \frac{dv_j}{dt} &= -\omega^2 \cdot sa_j \cdot e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (2.79)$$

Ahora, sustituyendo la ecuación 2.79 en la ecuación 2.77 se obtiene una expresión más general para las componentes de la carga hidrodinámica: [9], [13]

$$X_{r_{kj}} = \left( -\omega^2 \cdot sa_j \cdot \rho \cdot \iint_S \phi_j \cdot f_k \cdot dS \right) \cdot e^{-i\omega t} \quad (2.80)$$

La carga hidrodinámica se puede descomponer en un término en fase con la aceleración y un término en fase con la velocidad, estos términos son los llamados coeficientes hidrodinámicos y se muestran a continuación: [9], [13]

$$X_{r_{kj}} = -M_{kj} \cdot \ddot{s}_j - N_{kj} \cdot \dot{s}_j = (sa_j \cdot \omega^2 \cdot M_{kj} + i \cdot sa_j \cdot \omega \cdot N_{kj}) \cdot e^{-i\omega t} \quad (2.81)$$

En la ecuación 2.81, el término que se encuentra en fase con la aceleración es el coeficiente de masa hidrodinámica ( $M_{kj}$ ), y el término que se encuentra en fase con la velocidad es el coeficiente de amortiguación hidrodinámica ( $N_{kj}$ ). Para determinar la expresión de cada uno de estos coeficientes, se debe igualar la ecuación 2.80 con la ecuación 2.81, lo que resulta: [9], [13]

$$\begin{aligned} M_{kj} &= -\text{Re} \left\{ \rho \cdot \iint_S \phi_j \cdot f_k \cdot dS \right\} \\ N_{kj} &= -\text{Im} \left\{ \rho \cdot \iint_S \phi_j \cdot f_k \cdot dS \right\} \end{aligned} \quad (2.82)$$

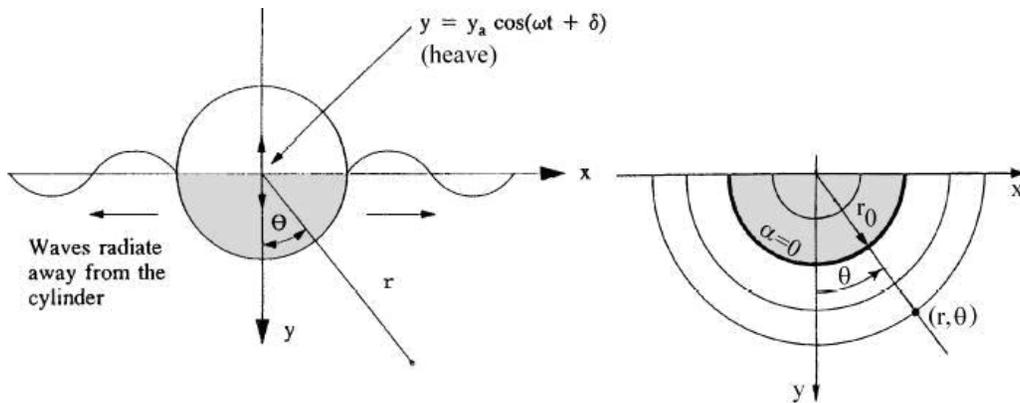
Donde “Im” significa parte imaginaria y “Re” significa parte real. Para la determinación de estos coeficientes hidrodinámicos existen varios métodos. En este trabajo se determinaron dichos coeficientes utilizando la Teoría Potencial de Tasai y la Teoría Potencial de Frank, las cuales se explican posteriormente. Todos estos métodos sólo son válidos para el cálculo en dos dimensiones, luego estos coeficientes se pueden generalizar a tres dimensiones por medio del Método de Franjas (*Strip Theory Method*), el cual utiliza los resultados de dos dimensiones para obtener todos los coeficientes en tres dimensiones. Existen otros métodos diferentes al de franjas para determinar los coeficientes hidrodinámicos en tres dimensiones, la gran ventaja que posee este método es que aprovecha el cálculo de los coeficientes hidrodinámicos en dos dimensiones, mientras que en otros métodos como el del elemento finito, tales resultados no se utilizan. El Método de Franjas es bastante limitado comparado con otros métodos más generales como el Método de Paneles. Para efectos de

este trabajo sólo se estudiará el caso en dos dimensiones, donde los coeficientes a determinar son:  $M_{22}$ ,  $N_{22}$ ,  $M_{33}$ ,  $N_{33}$ ,  $M_{24}$ ,  $N_{24}$ ,  $M_{42}$  y  $N_{42}$ , asociados a la fuerza hidrodinámica vertical, horizontal y el momento en el plano de estudio (plano yz). [5], [7], [8]

Para determinar los coeficientes hidrodinámicos por el Método de Tasai, se debe conocer la Teoría de Ursell. Éste determinó la solución analítica para el caso de un cilindro flotando horizontalmente, Tasai aprovechó esta solución analítica y por medio de transformaciones de espacio, determinó un método para hallar los coeficientes hidrodinámicos para formas mucho más complejas que un cilindro.

#### **2.5.6. Teoría de Ursell**

Ursell fue el primero en estudiar y determinar el comportamiento del flujo alrededor de un cilindro flotando horizontalmente en agua cuya profundidad la consideró infinita. Su trabajo se basa en el caso de un cilindro de longitud infinita, lo que trae como consecuencia que el oleaje producido por la oscilación de dicho cilindro en agua tranquila sea en dos dimensiones. A continuación se muestra una figura que representa el problema estudiado por Ursell, a lo largo de esta sección se mantiene tanto la notación como los sistemas de coordenadas utilizados originalmente por Ursell, los cuales no coinciden con los sistemas de coordenadas utilizados en este trabajo. [9], [20]



**Figura 2.22. Notaciones y sistemas de coordenadas utilizados por Ursell.**

Tomado de “*On the Heaving Motion of a Circular Cylinder on the Surface of a Fluid*” por Ursell, F.

Ursell supuso que el oleaje producto de la oscilación del cilindro se podía descomponer en un oleaje estacionario (*standing wave*) y un oleaje regular progresivo (*regular progressive waves*), es decir, el potencial del flujo para el problema que planteó Ursell, usando el principio de superposición, es el siguiente: [20]

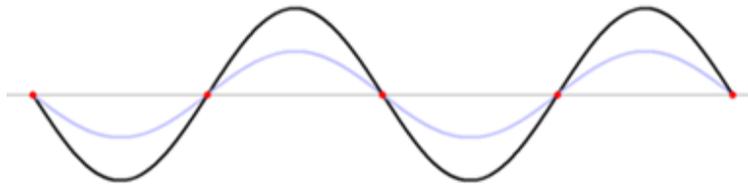
$$\Phi = \Phi_A + \Phi_B \tag{2.83}$$

En donde, el término “ $\Phi_A$ ” es el potencial del oleaje estacionario, mientras que el término “ $\Phi_B$ ” es el potencial del oleaje regular progresivo.

### 2.5.6.1 Oleaje estacionario

Según los trabajos de Ursell, el oleaje estacionario se puede describir por medio de infinitos dobletes (dipolos) pulsantes distribuidos a lo largo del eje vertical. Otra forma de ver este oleaje es como la superposición de dos olas regulares de igual frecuencia, igual amplitud pero sentidos de propagación contrarios. La

amplitud de este tipo de oleaje va disminuyendo a medida que se va alejando del cilindro. En la figura 2.23 se muestra un ejemplo de un oleaje estacionario, en donde los puntos de intersección (puntos rojos) permanecen fijos, y la velocidad de cualquier partícula en la superficie del oleaje es netamente vertical. [20]



**Figura 2.23. Oleaje estacionario**

Tomado de “Moss Maritime”

#### 2.5.6.2 Oleaje regular progresivo

Ursell describe este tipo de oleaje como un doblete horizontal pulsante ubicado en el origen del movimiento del cilindro. A cierta distancia bastante alejada del cilindro oscilando, el oleaje se transforma en un oleaje regular como el explicado en secciones anteriores. A diferencia del oleaje estacionario, la velocidad en el oleaje regular también posee una componente horizontal, lo que hace que el oleaje se disipe alejándose de la oscilación del cilindro. [20]

Luego de tener el potencial del flujo, aplicando la ecuación de Bernoulli linealizada en la superficie húmeda del cilindro se obtiene la presión hidrodinámica:

$$p = -\rho \cdot \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \tag{2.84}$$

Conociendo la expresión de la presión hidrodinámica, se integra esta presión a lo largo de la superficie del cilindro para poder obtener la fuerza y el momento hidrodinámico, y de estas expresiones de las cargas se obtienen los coeficientes de masa y amortiguación hidrodinámica:

$$\begin{aligned}
 X_{2j} &= \int_S p \cdot dy_0 = -M_{22} \cdot \ddot{s}_2 - N_{22} \cdot \dot{s}_2 \\
 X_{2j} &= \int_S p \cdot dy_0 = -M_{24} \cdot \ddot{s}_4 - N_{24} \cdot \dot{s}_4
 \end{aligned}$$

**componente horizontal de la fuerza**

**(2.85)**

$$X_{3j} = \int_S p \cdot dx_0 = -M_{33} \cdot \ddot{s}_3 - N_{33} \cdot \dot{s}_3$$

**componente vertical de la fuerza**

**(2.86)**

$$\begin{aligned}
 X_{4j} &= -\int_S p \cdot x \cdot dx_0 - \int_S p \cdot y \cdot dy_0 = -M_{42} \cdot \ddot{s}_2 - N_{42} \cdot \dot{s}_2 \\
 X_{4j} &= -\int_S p \cdot x \cdot dx_0 - \int_S p \cdot y \cdot dy_0 = -M_{44} \cdot \ddot{s}_4 - N_{44} \cdot \dot{s}_4
 \end{aligned}$$

**momento en el plano**

**(2.87)**

En las ecuaciones 2.85, 2.86 y 2.87 se conservó el sistema de coordenadas utilizados por Ursell en su trabajo original, tal y como se mostró anteriormente en la figura 2.22.

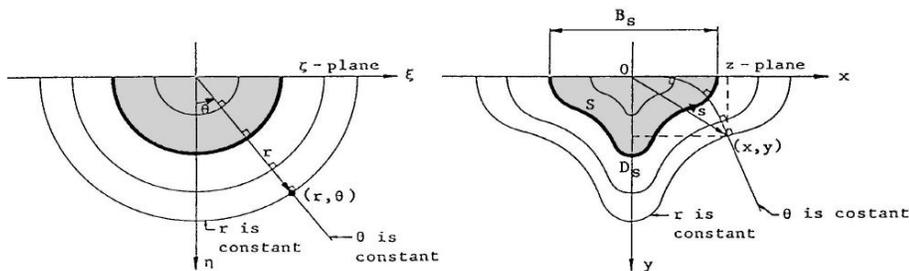
Luego de tener una visión general del trabajo que realizó Ursell, se explicará el método de Tasai para la determinación de los coeficientes hidrodinámicos. Si se desea conocer más detalle acerca de estas soluciones, se recomienda leer la referencia bibliográfica referida a los estudios realizados por Ursell. [20]

La Teoría de Ursell solamente es válida para secciones transversales circulares, Tasai al igual que otros, usa los resultados de Ursell conjuntamente con métodos de transformación para obtener resultados de cuerpos flotantes con formas mucho más complejas que un cilindro, con la finalidad de obtener mejores aproximaciones para el comportamiento de embarcaciones o Plataformas. [18], [20]

A continuación se explicarán los métodos de transformación utilizados por Tasai para determinar los coeficientes hidrodinámicos de cuerpos flotantes con geometrías mucho más complejos que un semicírculo.

### 2.5.7 Transformaciones conformes

Estos métodos de transformación se basan en la conversión de un semicírculo en una geometría más compleja, con la finalidad de poder resolver casos que se acerquen más a la realidad de cuerpos flotantes, ya que son muy pocas las embarcaciones que poseen un casco en forma de semicírculo. En la siguiente figura se muestra el sistema de coordenadas y la notación utilizada, en donde podemos observar la transformación antes mencionada de un semicírculo a una geometría que se acerca más a la forma real del casco de una embarcación. [15], [16], [17]



**Figura 2.24. Transformación de un espacio a otro.**

Tomado de “*Offshore Hydromechanics*” por J.M.J. Journée y W.W. Massie”

En la figura anterior se muestran varios términos que se van a utilizar posteriormente, el término “ $B_s$ ” se refiere al ancho (*breadth*) de la sección transversal en el nivel del agua, mientras que el término “ $D_s$ ” recibe el nombre de calado (*draft*), el cual es la profundidad que se encuentra hundido un barco, en este caso es la distancia que existe entre el nivel del agua y el punto más profundo de la sección transversal. La fórmula general de transformación es: [9], [18]

$$\begin{aligned} x &= -M_s \cdot \sum_{n=0}^N \left\{ (-1)^n \cdot a_{2n-1} \cdot e^{-(2n-1)\alpha} \cdot \text{sen}((2n-1) \cdot \theta) \right\} \\ y &= +M_s \cdot \sum_{n=0}^N \left\{ (-1)^n \cdot a_{2n-1} \cdot e^{-(2n-1)\alpha} \cdot \text{cos}((2n-1) \cdot \theta) \right\} \end{aligned} \quad (2.88)$$

En la ecuación 2.88, los términos “ $a_{2n-1}$ ” son los coeficientes de la transformación conforme, siendo “ $N$ ” el número de parámetros utilizados. Mientras más parámetros se utilicen, mejor será la aproximación. No se recomienda usar más de diez parámetros ya que los resultados son prácticamente iguales, y mientras más parámetros se utilicen, mayor será el tiempo para determinarlos. Para “ $\alpha = 0$ ”, se habla del contorno húmedo de la embarcación, ya que el término “ $\alpha$ ” representa una especie de escalamiento del contorno húmedo del cuerpo en estudio. Para el caso de un círculo, a medida que “ $\alpha$ ” es mayor, aumenta el radio de este. Para determinar el contorno húmedo del cuerpo en estudio, se sustituye en la ecuación 2.88 “ $\alpha = 0$ ”: [9], [18]

$$\begin{aligned}
 x_0 &= -M_s \cdot \sum_{n=0}^N \left\{ (-1)^n \cdot a_{2n-1} \cdot \text{sen}((2n-1) \cdot \theta) \right\} \\
 y_0 &= +M_s \cdot \sum_{n=0}^N \left\{ (-1)^n \cdot a_{2n-1} \cdot \text{cos}((2n-1) \cdot \theta) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2.89}$$

Anteriormente se mencionaron dos términos utilizados frecuentemente en las transformaciones conformes, uno de ellos es el ancho de la embarcación y el otro es el calado. Cada uno de estos términos se determina de la siguiente forma: [9], [18]

$$\begin{aligned}
 B_s &= 2 \cdot M_s \cdot \sum_{n=0}^N a_{2n-1} \\
 D_s &= M_s \cdot \sum_{n=0}^N \left\{ (-1)^n \cdot a_{2n-1} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{2.90}$$

Mientras más parámetros ( $N$ ) se tomen para la transformación, mejor será la aproximación del contorno húmedo del cuerpo en estudio, sin embargo, para embarcaciones que posean geometrías muy suaves se obtienen resultados excelentes para transformaciones con pocos parámetros como lo es la Transformación de Lewis, la cual se explicará más adelante. Los métodos de transformación a medida que la geometría del contorno húmedo del cuerpo flotante es más pronunciada, se requieren un mayor número de parámetros para obtener buenos resultados. No es el caso de este trabajo, ya que como objetivo se busca validar los coeficientes hidrodinámicos obtenidos por medio del Método de Frank, comparando estos coeficientes con los resultados obtenidos utilizando el Método de Tasai, por lo que se estudiarán contornos sencillos y suaves para esta validación, y en este caso no se requiere de transformaciones conformes con un gran número de parámetros. [8], [18], [19]

### 2.5.7.1 Transformación de Lewis

La Transformación de Lewis es el caso más sencillo de las transformaciones conformes, para esta transformación se usan dos parámetros solamente, si sustituimos “ $N = 2$ ” en la ecuación 2.89 se obtienen las coordenadas de la aproximación del contorno húmedo: [9], [18]

$$\begin{aligned} x_0 &= M_s \cdot ((1 + a_1) \cdot \text{sen} \theta - a_3 \cdot \text{sen}(3 \cdot \theta)) \\ y_0 &= M_s \cdot ((1 - a_1) \cdot \text{cos} \theta - a_3 \cdot \text{cos}(3 \cdot \theta)) \end{aligned} \quad (2.91)$$

Análogamente sustituyendo el número de parámetros utilizados en esta transformación en la ecuación 2.90 se obtiene:

$$\begin{aligned} B_s &= 2 \cdot M_s \cdot (1 + a_1 + a_3) \\ D_s &= M_s \cdot (1 - a_1 + a_3) \end{aligned} \quad (2.92)$$

Lewis para determinar el valor de cada coeficiente de transformación, establece dos términos adicionales, el coeficiente del área ( $\sigma_s$ ) y el coeficiente de relación ancho-calado ( $H_0$ ), definidos de la siguiente forma: [9], [18]

$$\sigma_s = \frac{A_s}{B_s \cdot D_s} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1 - a_1^2 - 3 \cdot a_3^2}{(1 + a_3)^2 - a_1^2} \quad (2.93)$$

$$H_0 = \frac{B_s}{2 \cdot D_s} = \frac{1 + a_1 + a_3}{1 - a_1 + a_3} \quad (2.94)$$

Lewis despejó de la ecuación 2.93 el coeficiente “ $a_1$ ”, lo sustituyó en la ecuación 2.94, para obtener la siguiente ecuación cuadrática, donde obtuvo el valor de los coeficientes de transformación: [9], [18]

$$\begin{aligned}
 c_1 \cdot a_3^2 + c_2 \cdot a_3 + c_3 &= 0 \\
 c_1 &= 3 + \frac{4 \cdot \sigma_s}{\pi} + \left(1 - \frac{4 \cdot \sigma_s}{\pi}\right) \cdot \left(\frac{H_0 - 1}{H_0 + 1}\right)^2 \\
 c_2 &= 2 \cdot c_1 - 6 \\
 c_3 &= c_1 - 4
 \end{aligned}
 \tag{2.95}$$

Las soluciones válidas de los coeficientes de transformación según la ecuación 2.95 son: [19]

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{H_0 - 1}{H_0 + 1} \cdot (a_3 + 1) \\
 a_3 &= \frac{-c_1 + 3 + \sqrt{9 - 2 \cdot c_1}}{c_1}
 \end{aligned}
 \tag{2.96}$$

Lewis establece varios criterios para determinar en que casos se puede usar su aproximación y obtener buenos resultados, en forma general no se recomienda utilizar dicha transformación para geometrías poco suaves y geometrías en forma de bulbo (*bulbous bow*), un ejemplo de estas últimas se muestran en la siguiente figura: [18]



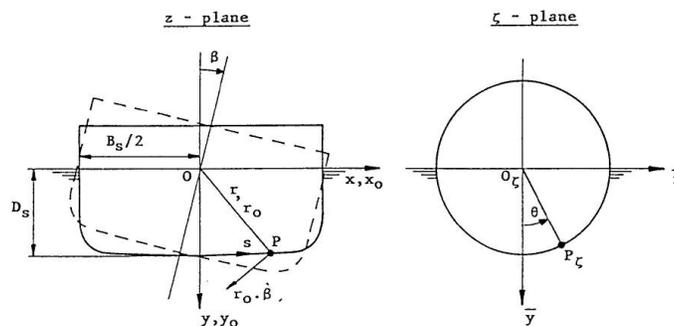
**Figura 2.25. Embarcación con casco en forma de bulbo.**

Tomado de “*Us Warships*”

En este trabajo sólo se trabajará con geometrías suaves para la determinación de los coeficientes hidrodinámicos usando la Teoría de Tasai, por lo que se decidió utilizar la transformación de Lewis. Para los casos a estudiar, dicha transformación no presenta ningún problema, siendo los resultados buenas aproximaciones.

### 2.5.8. Teoría de Tasai

Luego de conocer el Método de Transformación Conforme, el cual se utilizará en este trabajo, se explicará la Teoría Potencial de Tasai y el procedimiento para calcular los coeficientes hidrodinámicos. Tasai mantuvo los mismos sistemas de coordenadas usados por Ursell, los cuales se mantendrán a lo largo de esta sección. El Método de Tasai para determinar los coeficientes hidrodinámicos en dos dimensiones, consiste en utilizar los resultados obtenidos por Ursell en la solución de un cilindro flotando horizontalmente, aplicando Métodos de Transformación Conforme como los explicados en la sección anterior. Para resolver el problema de un contorno que se acerque más a la forma real de una embarcación, a continuación se muestra una figura donde se observa una geometría semejante al casco de un barco. [15, 16, 17, 18]



**Figura 2.26. Notaciones y sistemas de coordenadas utilizados por Tasai.**

Tomado de “*On the Damping Force and Added Mass of Ships Heaving and Pitching*” por Tasai, F.

Como se mencionó anteriormente, Tasai utilizó los resultados de Ursell conjuntamente con Métodos de Transformación Conforme, por lo que la ecuación 2.83 es válida también en esta teoría, donde se supone que el potencial del flujo se puede descomponer en dos tipos de oleajes. Para efectos de este trabajo, sólo se determinarán los coeficientes hidrodinámicos asociados a un desplazamiento vertical (*heave motion*), ya que según estudios realizados anteriormente, estos coeficientes son los más semejantes, al utilizar la Teoría de Frank y la Teoría de Tasai usando la transformación de Lewis. Según estudios realizados por Tasai, las funciones potenciales correspondientes al oleaje estacionario y el oleaje regular progresivo para el caso de un desplazamiento vertical del cuerpo flotante, son las siguientes: [8], [16]

$$\begin{aligned}\Phi_A &= \frac{g \cdot \zeta_a}{\pi \cdot \omega} \cdot \left( \sum_{m=1}^{\infty} \{P_{2m} \cdot \phi_{A_{2m}} \cdot \cos(\omega \cdot t)\} + \sum_{m=1}^{\infty} \{Q_{2m} \cdot \phi_{A_{2m}} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)\} \right) \\ \Phi_B &= \frac{g \cdot \zeta_a}{\pi \cdot \omega} \cdot (\phi_{B_c} \cdot \cos(\omega \cdot t) + \phi_{B_s} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t))\end{aligned}\tag{2.97}$$

En la ecuación 2.97, los términos “ $P_{2m}$ ” y “ $Q_{2m}$ ” son series que se pueden resolver numéricamente según un procedimiento establecido por Tasai. El procedimiento a realizar para la obtención de estas series se incluyó en el capítulo de los apéndices de esta investigación. El término “ $\zeta_a$ ” se refiere a la amplitud del oleaje en el infinito, es decir, la amplitud del oleaje no perturbado por la oscilación del cuerpo flotante. Los demás términos, Tasai los define de la siguiente manera con la finalidad de facilitar el manejo de estas ecuaciones: [16]

$$\begin{aligned}
 \phi_{A_{2m}} &= e^{-2m\alpha} \cdot \cos(2m \cdot \theta) \\
 -\nu \cdot M_s \cdot \sum_{n=0}^N &\left\{ (-1)^n \cdot \frac{2n-1}{2m+2n-1} \cdot a_{2n-1} \cdot e^{-(2m+2n-1)\alpha} \cdot \cos((2m+2n-1) \cdot \theta) \right\} \\
 \phi_{B_c} &= \pi \cdot e^{-\nu \cdot y} \cdot \cos(\nu \cdot x) \\
 \phi_{B_s} &= \pi \cdot e^{-\nu \cdot y} \cdot \text{sen}(\nu \cdot |x|) + \int_0^{\infty} \frac{\nu \cdot \text{sen}(k \cdot y) - k \cdot \cos(k \cdot y)}{k^2 + \nu^2} \cdot e^{-k|x|} \cdot dk
 \end{aligned}
 \tag{2.98}$$

El término “ $\nu$ ” en las ecuaciones anteriores se denomina número del oleaje, y para el caso de oleaje en agua profunda se define de la siguiente manera:

$$\nu = \frac{\omega^2}{g}
 \tag{2.99}$$

Al conocer los potenciales de velocidad del flujo, se puede determinar la presión hidrodinámica al aplicar la ecuación de Bernoulli linealizada tal y como se hizo en la sección de la Teoría de Ursell en la ecuación 2.84. La ecuación de Bernoulli linealizada aplicada para la teoría de Tsai se puede expresar como: [16]

$$p = \frac{-\rho \cdot g \cdot \eta_a}{\pi} \cdot \left( \begin{aligned} &\left( \phi_{B_{0_s}} + \sum_{m=1}^{\infty} Q_{2m} \cdot \phi_{A_{0_{2m}}} \right) \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ &+ \left( \phi_{B_{0_c}} + \sum_{m=1}^{\infty} P_{2m} \cdot \phi_{A_{0_{2m}}} \right) \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \end{aligned} \right)
 \tag{2.100}$$

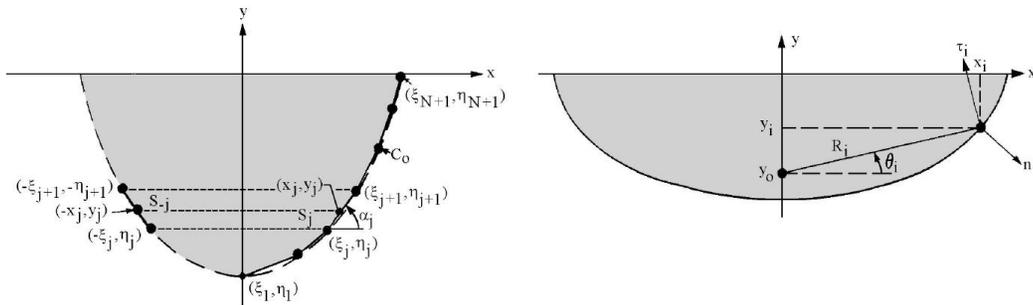
En la ecuación anterior, los términos “ $\phi_{B_{0_s}}$ ”, “ $\phi_{B_{0_c}}$ ” y “ $\phi_{A_{0_{2m}}}$ ” que tienen el número “0” como un subíndice, se obtienen sustituyendo “ $\alpha = 0$ ” en la ecuación 2.98. Para los términos “ $\phi_{B_{0_s}}$ ” y “ $\phi_{B_{0_c}}$ ”, como no dependen

directamente de “ $\alpha$ ”, se debe realizar una sustitución indirecta. Los términos “ $x$ ” e “ $y$ ” dependen de “ $\alpha$ ” por lo que se determinan los términos “ $x_0$ ” e “ $y_0$ ” y se sustituye en la ecuación 2.98. Al conocer la expresión de la presión hidrodinámica, para determinar los coeficientes hidrodinámicos se deben seguir los pasos de la Teoría de Ursell, integrando esta presión a lo largo de la superficie húmeda del cuerpo flotante, utilizando las ecuaciones 2.85, 2.86 y 2.87 para la fuerza horizontal, fuerza vertical y momento hidrodinámico respectivamente. [16]

Para el cálculo de los coeficientes según la Teoría de Tasai, es necesario que la sección transversal posea un ancho finito de la sección transversal en el nivel del agua, por lo que estos cálculos no son válidos para cuerpos totalmente sumergidos.

### **2.5.9. Teoría de Frank**

Esta teoría tiene un enfoque totalmente distinto a la Teoría de Tasai, ya que Frank no utiliza transformaciones conformes conjuntamente con la solución analítica de Ursell para determinar los coeficientes hidrodinámicos de un cuerpo flotante cuya geometría es más compleja que un círculo. Frank consideró desde un principio la sección transversal real de una embarcación, esta sección transversal la dividió en “ $N_F$ ” segmentos conectados entre sí, tal y como se muestra en la siguiente figura: [4]



**Figura 2.27. Notaciones y sistemas de coordenadas utilizados por Frank.**

Tomado de “*Oscillation of Cylinders in or below the Free Surface of Deep Fluids*” por Frank, W.

Para simplificar los cálculos implicados en esta teoría, se tomará como condición, que la sección transversal sea simétrica con respecto al eje vertical, por lo que sólo se segmentará la superficie ubicada en el cuarto cuadrante. Al igual como se hizo en las secciones anteriores, a lo largo de esta sección se mantendrán los sistemas de coordenadas y las notaciones originalmente usadas por Frank. En la figura anterior se puede observar que las coordenadas de los extremos de cada segmento se denotan como “ $(\xi_j, \eta_j)$ ”, mientras que los puntos medios de cada segmento se denotan como “ $(x_j, y_j)$ ”, siendo “ $\alpha_j$ ” el ángulo de inclinación de cada segmento, medido desde el eje x positivo. [4]

En secciones anteriores se establecieron ciertas condiciones que debe satisfacer el potencial de velocidad del flujo, tal como la ecuación de continuidad, la condición de frontera del suelo marino y otras. Frank determinó la función potencial de una fuente pulsante (*pulsating point-sources*) que cumple con todas las condiciones antes establecidas, para determinar esta función potencial, parte de estudios anteriores de Wehausen y Laitone en la determinación de potenciales complejos. La función potencial a la cual llegó Frank es la siguiente: [4], [21]

$$G_F^* = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left( \ln(z - \zeta) - \ln(z - \bar{\zeta}) + 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{\nu - k} \cdot dk \right) \cdot \cos(\omega \cdot t) - e^{-i \cdot \nu \cdot (z - \bar{\zeta})} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \quad (2.101)$$

En la ecuación anterior, las variables “ $z$ ” y “ $\zeta$ ”, son números complejos que están definidos según:

$$\begin{aligned} z_j &= x_j + i \cdot y_j \\ \zeta_j &= \xi_j + i \cdot \eta_j \end{aligned} \quad (2.102)$$

Análogamente a suposiciones realizadas anteriormente, se puede separar el potencial en una parte dependiente del espacio y otra parte dependiente del tiempo de la siguiente forma: [4], [21]

$$G_F^*(z, \zeta, t) = G_F(z, \zeta) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} \quad (2.103)$$

Utilizando las ecuaciones 2.101 y 2.103, se obtiene la expresión del potencial de la fuente pulsante que depende sólo del espacio: [4], [21]

$$G_F(z, \zeta) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \text{Re} \left\{ \ln(z - \zeta) - \ln(z - \bar{\zeta}) + 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{\nu - k} \cdot dk \right\} - i \cdot \text{Re} \left\{ e^{-i \cdot \nu \cdot (z - \bar{\zeta})} \right\} \quad (2.104)$$

Frank para obtener el potencial de velocidad del flujo, aplicó el Principio de Superposición, ya que este coloca en cada segmento una fuente pulsante con una densidad o intensidad dependiente de la ubicación de cada segmento, y la solución será la integración a lo largo de toda la superficie húmeda del cuerpo flotante, expresada en la siguiente ecuación: [4]

$$\Phi(x, y, t) = \operatorname{Re} \left\{ \int_S Q_F \cdot G_F \cdot e^{-i\omega t} \cdot dS \right\} \quad (2.105)$$

En la ecuación 2.105, el término “ $Q_F$ ” es la densidad o intensidad de la fuente pulsante, Frank describe un método numérico para determinar estas densidades por medio de coeficientes de influencia (ver Apéndice C). Al igual que en las teorías anteriores, luego de conocer la expresión del potencial de velocidad del flujo, se aplica la ecuación de Bernoulli linealizada para obtener la expresión de la presión hidrodinámica, que para el caso de Frank, este separa la presión hidrodinámica en dos términos, un término que esta en fase con la aceleración y otro término que esta en fase con la velocidad: [4]

$$p = -\rho \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} = p_a \cdot \cos(\omega \cdot t) + p_v \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t) \quad (2.106)$$

Frank asume que el cuerpo está sometido a un movimiento oscilatorio, expresado según la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} s_j &= sa_j \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ \dot{s}_j &= v_j = -\omega \cdot sa_j \cdot \operatorname{sen}(\omega \cdot t) \\ \ddot{s}_j &= \frac{dv_j}{dt} = -\omega^2 \cdot sa_j \cdot \cos(\omega \cdot t) \end{aligned} \quad (2.107)$$

Según las ecuaciones 2.106 y 2.107, el término “ $p_a$ ” se encuentra en fase con la aceleración, mientras que el término “ $p_v$ ” se encuentra en fase con la velocidad. Conociendo la expresión de la presión hidrodinámica, esta se integra a lo largo de toda la superficie húmeda del cuerpo flotante, lo que resulta la fuerza y momento hidrodinámico, expresiones de las cuales se determinan los

coeficientes hidrodinámicos. Frank separa la presión hidrodinámica en dos términos, uno en fase con la aceleración y otro en fase con la velocidad. La integración por separado de estas presiones hidrodinámicas reciben el nombre de fuerza o momento de masa hidrodinámica ( $M^{(m)}$ ) y fuerza o momento de amortiguación hidrodinámica ( $N^{(m)}$ ). Frank divide el contorno de cuerpo flotante en “ $N_F$ ” segmentos, las integrales se transforman en sumatorias: [4]

$$\begin{aligned} M^{(m)} &= \int_S p_a^{(m)} \cdot n^{(m)} \cdot dS = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N_F} \{ p_a^{(m)} \cdot n_i^{(m)} \cdot |s_i| \} \\ N^{(m)} &= \int_S p_v^{(m)} \cdot n^{(m)} \cdot dS = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N_F} \{ p_v^{(m)} \cdot n_i^{(m)} \cdot |s_i| \} \end{aligned} \quad (2.108)$$

En la ecuación anterior, el superíndice “ $(m)$ ” indica el tipo de movimiento, como se estudia el caso plano, “ $m = 2$ ” indica desplazamiento horizontal, “ $m = 3$ ” desplazamiento vertical y “ $m = 4$ ” rotación. El término “ $n^{(m)}$ ” son los cosenos directores y el término “ $|s_i|$ ” es el tamaño del segmento  $i$ . [4]

Para obtener la expresión de los coeficientes hidrodinámicos, se aplica la definición de estos. Usando la ecuación 2.81 (definición de los coeficientes hidrodinámicos) con la ecuación 2.107 se obtiene la siguiente expresión:

$$X_{kj} = +M_{kj} \cdot sa_j \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) + N_{kj} \cdot sa_j \cdot \omega \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \quad (2.109)$$

Ahora, se determina la relación existente entre la Teoría Potencial de Frank y las definiciones realizadas anteriormente de los coeficientes hidrodinámicos. Los componentes de la fuerza y momento hidrodinámico se pueden expresar como:

$$X_{kj} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N_F} \{p_a^{(j)} \cdot n_i^{(k)} \cdot |s_i|\} \cdot \cos(\omega \cdot t) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N_F} \{p_v^{(j)} \cdot n_i^{(k)} \cdot |s_i|\} \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \quad (2.110)$$

Comparando las ecuaciones 2.109 y 2.110, se determina la expresión de los coeficientes hidrodinámicos:

$$M_{kj} = \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^{N_F} \{p_a^{(j)} \cdot n_i^{(k)} \cdot |s_i|\}}{sa_j \cdot \omega^2} = \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^{N_F} \{p_a^{(j)} \cdot n_i^{(k)} \cdot |s_i|\}}{\omega^2}$$

$$N_{kj} = \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^{N_F} \{p_v^{(j)} \cdot n_i^{(k)} \cdot |s_i|\}}{sa_j \cdot \omega} = \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^{N_F} \{p_v^{(j)} \cdot n_i^{(k)} \cdot |s_i|\}}{\omega} \quad (2.111)$$

La Teoría Potencial de Frank es válida para cuerpos rígidos flotantes y completamente sumergidos, ya que no recurre a Métodos de Transformación Conforme, siendo esto una de sus principales ventajas. Aunque en este trabajo sólo se estudiaron cuerpos rígidos flotantes, existe la posibilidad de calcular los coeficientes hidrodinámicos para cuerpos totalmente sumergidos como submarinos o plataformas sumergidas. La principal desventaja del Método de Frank con respecto al de Tasai, es el tiempo necesario para obtener los resultados, ya que por tratarse de evaluaciones de integrales en el plano complejo, se requiere más tiempo computacional para los cálculos, aunque hoy en día con lo avanzado que se encuentra la tecnología, los tiempos entre un método y otro son parecidos. Un problema muy común del método de Frank son las llamadas frecuencias irregulares, la función potencial de una fuente pulsante no es muy estable, y para ciertas frecuencias los valores de los coeficientes no convergen a un número finito, por lo que se implementan procedimientos de interpolación para poder corregir estas irregularidades, como consecuencia el tiempo computacional aumenta aun más.

En este trabajo no se implementaron los procedimientos adicionales para corregir las irregularidades debidas a la inestabilidad de la función potencial de la fuente pulsante. [4, 8, 9, 18]

### 2.5.10 Estudios posteriores usando los coeficientes hidrodinámicos

Los coeficientes hidrodinámicos son de gran importancia para conocer el comportamiento de una embarcación o una plataforma flotante causado por cargas del oleaje al cual está sometido. Luego de realizar los cálculos pertinentes a estos coeficientes, los resultados se usan para determinar las fuerzas y momentos hidrodinámicos actuantes a lo largo del contorno húmedo del cuerpo rígido en estudio. Como se mencionó anteriormente, existen varios tipos de cargas, las analizadas en esta investigación sólo son las hidrodinámicas, pero si se superponen todos estos tipos de cargas, es decir, se incluyen las cargas hidrostáticas, las cargas de difracción y del oleaje no perturbado, se obtiene un estudio completo del cuerpo en estudio. Al incluir todos estos efectos del oleaje, se pueden determinar los movimientos en función del tiempo, en una ecuación análoga al de un sistema masa-resorte tal y como se muestra a continuación:

$$\sum_{j=1}^6 \left\{ (IM_{kj} + A_{kj}) \cdot \ddot{s}_j + B_{kj} \cdot \dot{s}_j + C_{kj} \cdot s_j \right\} = X_k \quad \text{para } k = 1,2,3,4,5,6$$

(2.112)

Donde el término “ $MI_{kj}$ ” se refiere al coeficiente de masa o inercia del cuerpo, el término “ $C_{kj}$ ” es el coeficiente de amortiguación, el término “ $X_k$ ” son las cargas de excitación del oleaje y los términos “ $A_{kj}$ ” y “ $B_{kj}$ ” son los coeficientes de masa agregada y amortiguación hidrodinámica que se determinan partiendo

de los resultados de los coeficientes hidrodinámicos en el plano, ya que esta ecuación es válida para el espacio, es por ello que tanto “ $j$ ” como “ $k$ ” están definidos de 1 hasta 6.

Definida esta ecuación, se pueden realizar estudios posteriores de estabilidad, donde se acostumbra determinar el metacentro conociéndose así hasta que punto puede rotar una embarcación determinada antes de volcarse. Adicionalmente a este análisis de estabilidad, se realizan estudios de vibraciones, los cuales en la Ingeniería Costa Afuera son de suma importancia, debido a la naturaleza oscilatoria de las cargas del oleaje. En estos estudios de vibraciones se determinan los principales parámetros como la frecuencia natural del sistema y la frecuencia de resonancia.

## CAPÍTULO III

### 3. METODOLOGÍA

#### 3.1 Diagrama metodológico

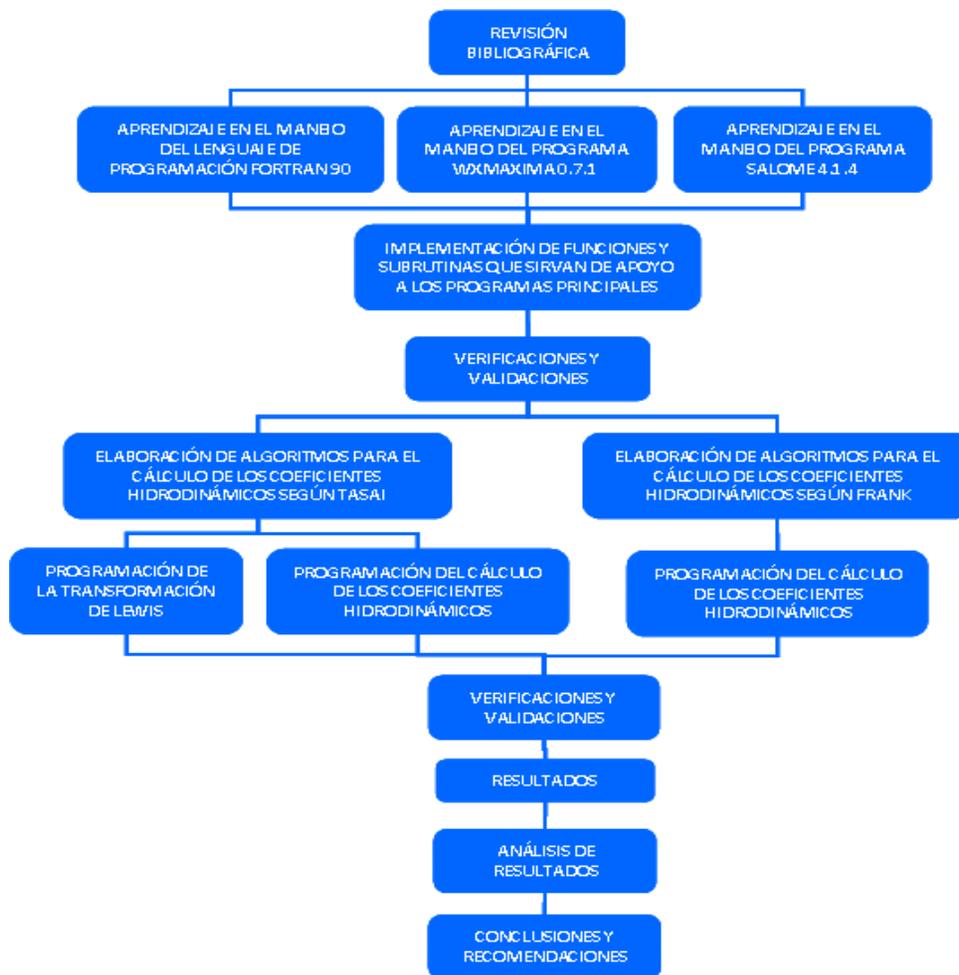


Figura 3.1. Diagrama Metodológico.

### 3.2 Manejo del lenguaje de programación “Fortran 90”

El objetivo general de este trabajo establece que el lenguaje de programación a utilizar es el Fortran 90. Con la finalidad de aprender a manejar este lenguaje, se comenzó por desarrollar algunas subrutinas vinculadas a operaciones sencillas de cálculo. En esta etapa se revisaron documentos con información acerca de los tipos de variables que soporta Fortran 90, la forma como se declaran (variables del tipo real, complejas y enteras). También se estudió la declaración de vectores y matrices, así como funciones ya predefinidas que incluye el Fortran 90 (funciones trigonométricas, logaritmos naturales, potencias y otras). El compilador utilizado fue el gfortran 4.4, este utiliza comandos en el símbolo del sistema si se está trabajando en un sistema operativo Windows XP o superior. A continuación se muestra el ambiente del símbolo del sistema para Windows XP.

```

C:\WINDOWS\system32\cmd.exe - gfortran frank.f90 -o frank.exe
Microsoft Windows XP [Versión 5.1.2600]
(C) Copyright 1985-2001 Microsoft Corp.
U:\DELGADOPJ>cd programas
D:\>cd programas
D:\PROGRAMAS>cd gfortran
D:\PROGRAMAS\gfortran>cd Frank\Frank sin simetria
El sistema no puede hallar la ruta especificada.
D:\PROGRAMAS\gfortran>cd tfor\Frank\Frank sin simetria
D:\PROGRAMAS\gfortran\tfor\Frank\FRANK SIN SIMETRIA>gfortran frank.f90 -o frank.exe
  
```

Figura 3.2. Símbolo del sistema.

Para crear un programa, se elabora un código en el cual se siguen las normas respectivas del código de programación utilizado, en este caso el Fortran 90, para ello se puede elaborar dicho código utilizando un programa editor de texto como WordPad o bloc de notas si se está trabajando en un sistema operativo Windows. Sin embargo se seleccionó un programa mucho más especializado en

la elaboración de códigos de programación, el cual reconoce las funciones predeterminadas del Fortran 90. Dicho programa es el “Programmer’s Notepad 2”. La siguiente figura muestra la ventana principal de este editor de texto.

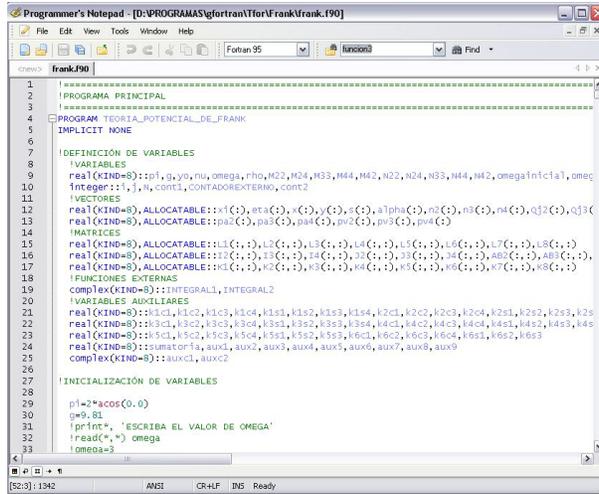


Figura 3.3. Ventana principal de programmer’s notepad 2

Luego de compilar el código de un programa determinado, se corre el archivo ejecutable, que es el programa en si, para esto se usa nuevamente el símbolo del sistema.

La lectura de los datos se puede hacer a través del símbolo del sistema ó por archivos de texto. Se eligió esta ultima opción ya que los datos requeridos para todos los programas utilizados en esta investigación contienen una lista extensa de valores, lo que hace más práctico exportar dichos valores de programas como Microsoft Excel 2003. Las salidas de los programas elaborados a lo largo de este trabajo se imprimieron en archivos de texto, la ventaja de arrojar los resultados de esta forma es que se facilita el manejo de estos valores para la elaboración posterior de tablas y gráficas realizadas en Microsoft Excel 2003, como se mostrará en el capítulo de los resultados.

### 3.3 Manejo del programa wxMaxima 0.7.1

wxMaxima es un módulo de interfaz gráfica del programa Maxima, el cual es muy similar a programas como Maple y Mathematica. Estos tres programas poseen una lista de comandos muy parecidos, lo cual hace que luego de aprender a utilizar uno en específico, el manejo de los demás no resulta complicado.

El motivo principal para utilizar este programa fue facilitar la verificación y validación de muchos cálculos numéricos realizados en esta investigación. Para ello se revisó el manual de ayuda que ofrece este programa y se buscó en Internet varios documentos que contenían información acerca de éste, donde se aprendieron a utilizar las principales funciones necesarias en el cálculo numérico implicado para la determinación de los coeficientes hidrodinámicos. La función más utilizada fue la integración numérica, siendo esta la utilizada con más frecuencia. Específicamente, wxMaxima 0.7.1 permite seleccionar para la evaluación de integrales numéricas varios métodos como el QUADPACK (método seleccionado para la evaluación de integrales definidas), este es un paquete computacional de subrutinas elaborado en Fortran, con la finalidad de resolver integrales definidas unidimensionales. Además de evaluar integrales numéricamente utilizando wxMaxima 0.7.1, también se resolvieron varios sistemas de ecuaciones lineales para verificar y validar algunas funciones implementadas en el código, de lo que se hablará con más detalle en secciones posteriores. A continuación se muestra la ventana principal de la interfaz gráfica wxMaxima 0.7.1, donde se observa alguna de las operaciones principales que se pueden realizar.

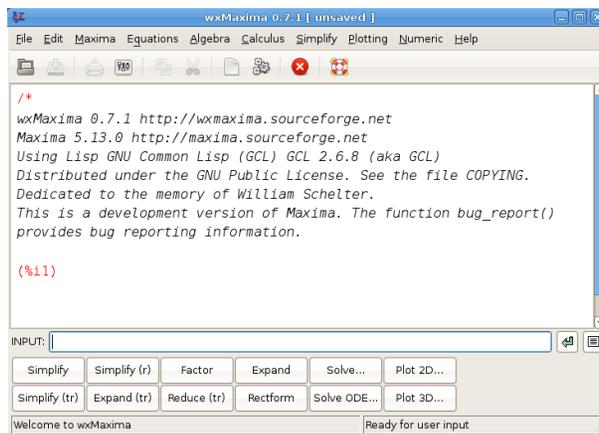


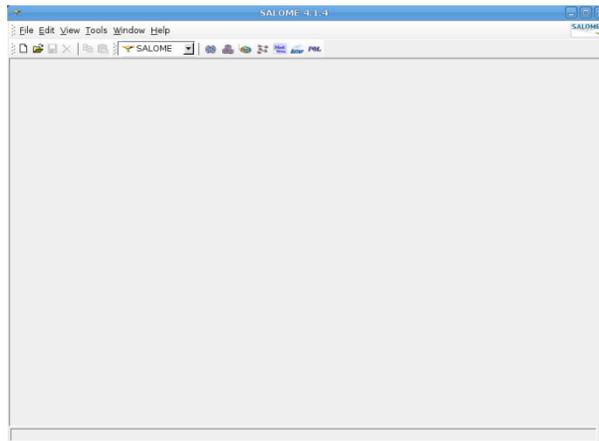
Figura 3.4. Ventana principal del programa wxMaxima 0.7.1.

En el aprendizaje de este programa, se realizaron evaluaciones de integrales que poseen funciones primitivas, comparando los resultados analíticos y numéricos obtenidos por medio de wxMaxima y el módulo de integración numérica desarrollado.

### 3.4 Manejo del programa SALOME 4.1.4

El programa SALOME 4.1.4 es una interfaz gráfica de desarrollo para pre y post-procesamiento en simulaciones numéricas. Principalmente se utilizó este programa para el cálculo de los coeficientes hidrodinámicos por medio del método de Frank, ya que este requiere de una previa segmentación ó discretización de la superficie húmeda del casco de una embarcación. En la realización de esta discretización, primero se dibuja la geometría que se desea estudiar, utilizando el módulo “*geometry*”. Luego de crear la geometría que representa la sección transversal de un cuerpo rígido flotante, se procedió a elaborar una malla usando el módulo “*mesh*”, que en este caso como se está trabajando en dos dimensiones y sólo se desea realizar dicha malla sobre el contorno húmedo del cuerpo rígido, los elementos utilizados son segmentos de

líneas rectas. En la siguiente figura se muestra la ventana principal del programa descrito anteriormente.



**Figura 3.5. Ventana principal del programa SALOME 4.1.4.**

Como se observa en la figura anterior, la interfaz es bastante sencilla, en esta ventana principal es donde se elige el módulo del programa a utilizar. A continuación se explicará brevemente los módulos utilizados y sus respectivas funciones.

### **3.4.1 Módulo “*Geometry*”**

Este módulo proporciona las funciones principales para la creación, visualización y modificación de modelos geométricos CAD (de las siglas en inglés “*computer asisted design*”, que significa diseño asistido por computadora). Se decidió estudiar cuatro diferentes tipos de geometría en esta investigación, partiendo de un semicírculo, un triángulo, un rectángulo y por último una forma más compleja que se asemeja mucho más que las geometrías anteriores a la sección transversal del casco de una embarcación. Las cantidades de interés como el área transversal de la superficie sumergida, el centro de flotabilidad, el calado, entre otras son inferidas a través de este módulo. Estos

datos se utilizaron para el cálculo de los coeficientes hidrodinámicos utilizando el método de Tasai. En la siguiente figura se muestra la ventana principal del módulo “*geometry*”.

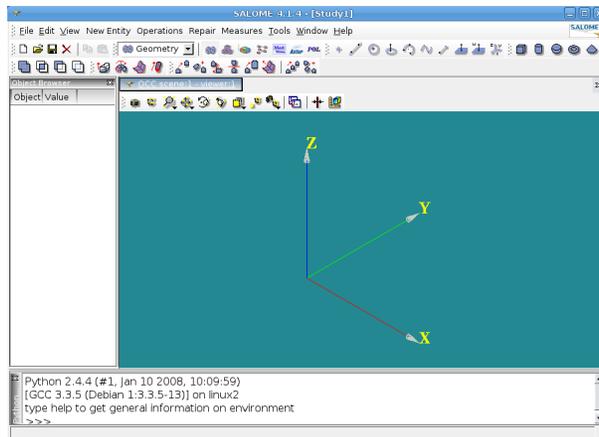


Figura 3.6. Módulo “Geometry” del programa SALOME 4.1.4.

### 3.4.2 Módulo “*Mesh*”

La función de este módulo es la creación de mallas partiendo de una base geométrica creada o importada del módulo “*geometry*”. Para ello se utilizan un conjunto de algoritmos de elaboración de mallas y sus correspondientes condiciones para calcularlas. Este módulo únicamente se utilizó cuando se aplicó el método de Frank. Para cada una de las geometrías que se estudiaron, se realizaron varias mallas, en las cuales el parámetro que se varió fue el número de segmentos requeridos, dejando como un valor constante el tamaño de estos. La cantidad de segmentos para cada geometría fue de cincuenta, cien y doscientos elementos. Las coordenadas de cada segmento fueron exportadas en archivos de texto, los cuales se editaron utilizando Microsoft Excel 2003, ya que el formato en que el programa SALOME 4.1.4 imprime las coordenadas de los segmentos no coincide con el formato de lectura de datos del programa del

método de Frank desarrollado. Se muestra a continuación una imagen que representa el ambiente principal del módulo “*mesh*” antes descrito.

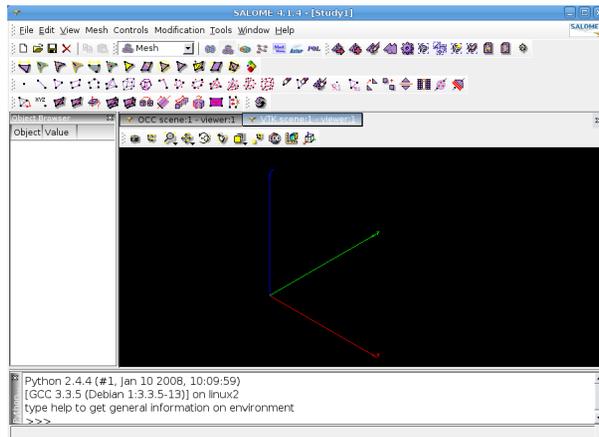


Figura 3.7. Módulo “Mesh” del programa SALOME 4.1.4.

### 3.5 Implementación de funciones y subrutinas auxiliares

La parte de programación, a lo largo de este trabajo utilizó un método efectivo de división recursiva, el cual consiste en la resolución recursiva de un problema dividiéndolo en dos o más subproblemas de igual tipo o similar. El proceso continúa hasta que estos subproblemas llegan a ser lo suficientemente sencillos como para que se resuelvan directamente. Finalmente, las soluciones a cada uno de los subproblemas se combinan para dar la solución al problema original. Es por ello que antes de escribir los códigos pertenecientes al cálculo de los coeficientes hidrodinámicos por medio del procedimiento de Tasai y de Frank, se implementaron varias funciones y subrutinas que sirvieron de apoyo y facilitaron el desarrollo de los programas principales. A continuación se explicarán las funciones y subrutinas empleadas en este trabajo:

### 3.5.1 Integración numérica

Las integrales implicadas en los cálculos pertinentes para la obtención de los coeficientes hidrodinámicos son todas integrales unidimensionales, ya que solamente se estudio el caso plano de los coeficientes hidrodinámicos. Esta es la razón por la cual se implementaron métodos de integración numérica como la regla del punto medio, la regla del trapecio y la regla de Simpson.

#### 3.5.1.1 Regla del punto medio

Este es el método más simple de la integración numérica, se basa en convertir la curva de la función en varios rectángulos, transformando la integral en la sumatoria del área de cada uno de estos. A continuación se muestra una imagen que describe este procedimiento numérico.

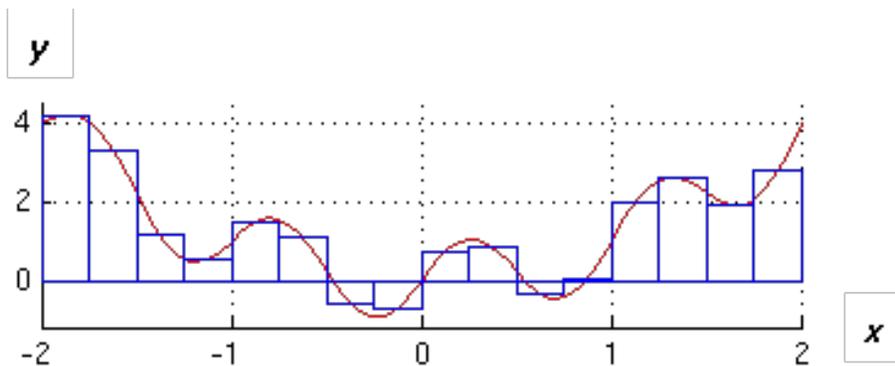


Figura 3.8. Integración numérica usando la regla del punto medio.

3.5.1.2 Regla del trapecio

En este método se convierte la curva de la función en varios trapecios, transformando la integral en una sumatoria del área de los trapecios. La siguiente figura describe este procedimiento numérico.

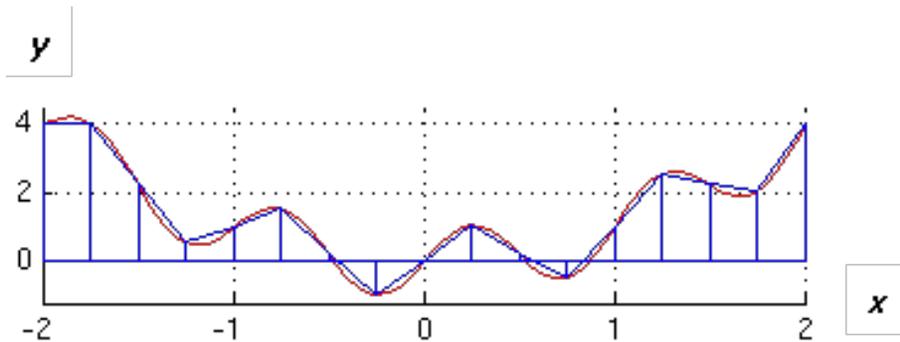


Figura 3.9. Integración numérica usando la regla del trapecio.

3.5.1.3 Regla de Simpson

El principio de este método es el mismo de los anteriores, subdividir el intervalo de integración, la diferencia de este es que utiliza polinomios de segundo grado para aproximar la función que se quiere integrar. En la siguiente figura se muestra un ejemplo de este método.

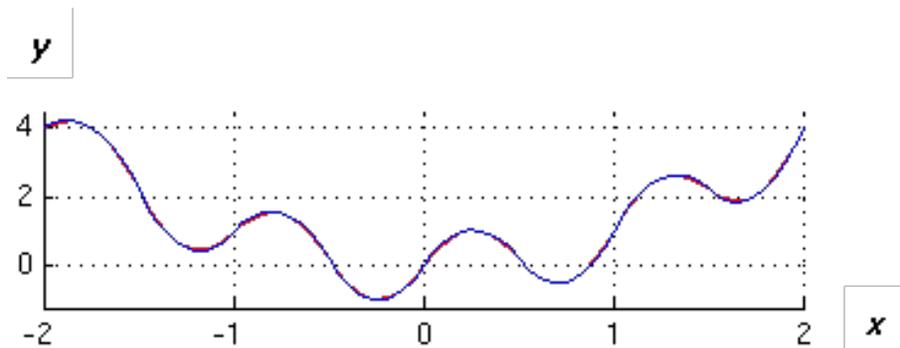
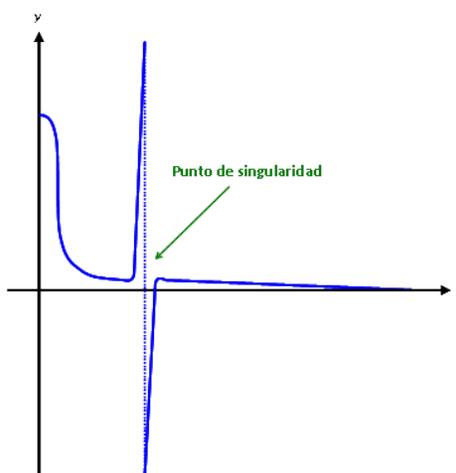


Figura 3.10. Integración numérica usando la regla de Simpson.

Se realizó una comparación entre estos tres métodos numéricos para resolver integrales, eligiéndose la Regla de los Trapecios por ser esta la más práctica. Aunque el último método (Regla de Simpson) presente la mejor aproximación, como el tamaño de la división de cada subintervalo se escogió tan pequeño, los resultados entre el Método de Trapecios y el de Simpson no difieren notablemente.

#### 3.5.1.4 Integrales impropias

En este trabajo fue necesario el empleo de integrales impropias, las cuales por definición exhiben una singularidad en el dominio de integración. Del punto de vista numérico, el tratamiento de la singularidad puede conllevar a errores significativos en los valores obtenidos. En la siguiente figura se muestra un ejemplo de una función que presenta una singularidad en un punto específico de su dominio, el comportamiento que se observa fue extraído de un estudio previamente realizado, específicamente en el cálculo de los coeficientes hidrodinámicos utilizando el método de Frank, esto se explicará con mayor detalle en el capítulo de los resultados.



**Figura 3.11. Integración numérica impropia.**

### 3.5.2 Método de Gauss-Jordan

Para el cálculo de los coeficientes hidrodinámicos por medio del Método de Tasai y de Frank, se requiere en varias ocasiones la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. En este trabajo fue escogido el Método de Gauss-Jordan. Este método consiste en resolver un número finito de ecuaciones, obteniendo un sistema de ecuaciones equivalente en donde cada ecuación tiene una incógnita menos que la anterior. Al final se aplica una técnica de retro sustitución sobre la matriz triangular resultante. Para efectos de este trabajo no se usaron sistemas de ecuaciones de más de 1000 incógnitas, y por lo tanto no se implementaron estrategias de pivoteo que hacen este método mucho más eficiente. Se tomaron en cuenta aquellos casos en los cuales el sistema de ecuaciones no posee solución única, en donde el programa imprime como resultado que no se encontró una solución válida. También se incluyó un módulo en donde se intercambian las filas en caso de que un elemento de la diagonal del sistema de ecuaciones se anule, siendo esto un problema muy común en la resolución de sistema de ecuaciones lineales.

### 3.5.3 Factorial de un Número

Tanto en el programa de Tasai como en el de Frank, se requiere evaluar integrales impropias. Existen procedimientos alternativos para la evaluación de dichas integrales por medio de series de potencias, donde es necesario evaluar el factorial de un número. Es por ello que se implementó una función que calcula el factorial de un número entero. En el desarrollo de todos los programas se usaron variables del tipo real de doble precisión (números decimales con unas 16 cifras, entre  $10^{-308}$  y  $10^{+308}$ ), por ello esta función solamente se puede usar para valores enteros entre 0 y 169, más allá de estos no

se puede obtener resultados a menos que se aumente la precisión de las variables reales. Aunque el valor 169 es el tope del argumento de esta función, para la determinación de integrales indefinidas por medio de series de potencias, no se utilizó un valor mayor a 120, ya que se realizaron estudios de sensibilidad en donde se demostró que no es necesario utilizar valores mayores para obtener buenos resultados.

### 3.5.4 Derivación Numérica

Se implementó una función para poder determinar la derivada de una función, ya que para el cálculo de los coeficientes hidrodinámicos por medio del Método de Frank, se necesita evaluar el gradiente de una función. Para calcular numéricamente la derivada de una función en un punto, se utilizó el Método de las Diferencias Centrales, este consiste en aproximar el valor de la derivada a la pendiente de una recta secante que pasa por dos puntos de la función a derivar. En la siguiente figura se puede observar como se realiza esta derivación numérica, a medida que la distancia “ $2h$ ” se hace más pequeña, se obtienen mejores resultados, pero se requiere de una mayor precisión, lo que hace el tiempo de computación mayor.

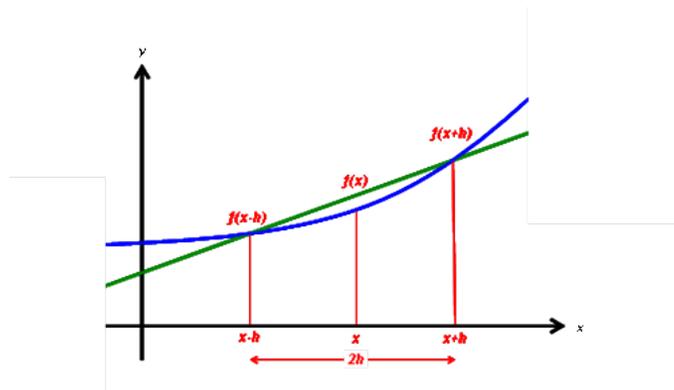


Figura 3.12. Derivación numérica usando diferencias centrales.

### 3.5.5 Verificaciones y validaciones

En cada función y subrutina implementada, se realizaron distintos tipos de verificaciones y validaciones, con la ayuda del programa wxMaxima 0.7.1. Para el caso de la integración numérica, se compararon resultados analíticos de integrales conocidas con resultados numéricos utilizando el método de trapecios y utilizando el programa wxMaxima 0.7.1, realizando varias pruebas de sensibilidad relacionadas con el tamaño de las subdivisiones. En cuanto a la resolución de sistemas de ecuaciones, se verificó la subrutina implementada comparando para ello con sistemas de ecuaciones lineales ya resueltas, donde se incluyeron varios casos: el caso particular donde no se puede obtener una solución única, un caso donde se debe intercambiar filas de la matriz del sistema de ecuaciones para poder resolverlo y un caso genérico. También se usó el programa wxMaxima para resolver estos sistemas de ecuaciones a fin de validar la subrutina Gauss-Jordan.

### 3.6 Programa basado en la Teoría Potencial de Tasai

Luego de realizar una revisión bibliográfica muy detallada, se decidió calcular los coeficientes hidrodinámicos para un movimiento oscilante vertical (*heave motion*), ya que para este caso en particular, los métodos más conocidos que se emplean en la determinación de estos coeficientes arrojan resultados muy semejantes. Este es el caso del método de Frank y de métodos que usan transformaciones conformes conjuntamente con la solución analítica de Ursell, como el método de Tasai. Esta hipótesis se pudo plantear ya que en la literatura se encontró para varios casos donde se determinaron los coeficientes hidrodinámicos relacionados a movimientos horizontales (*sway*) o rotaciones alrededor del eje x (*roll*), que los valores obtenidos por medio del método de

Frank y el método de Tasai se diferenciaban notablemente. Luego de la revisión bibliográfica, se elaboraron algoritmos relacionados con los cálculos requeridos, lo cual se explicará en la siguiente sección.

### **3.6.1 Elaboración de algoritmos**

La elaboración de algoritmos relacionados con los cálculos requeridos por el método de Tasai, facilitó el desarrollo del programa computacional desarrollado. Con esto se pudo determinar antes de empezar a escribir el código, las funciones y subrutinas requeridas en la determinación de los coeficientes hidrodinámicos. En estos algoritmos se ordenó paso a paso las operaciones necesarias para determinar dichos coeficientes. Si se desea conocer en detalle el cálculo de los coeficientes hidrodinámicos, se recomienda revisar los apéndices, donde se incluyen los principales algoritmos utilizados.

### **3.6.2 Programación de la Transformación de Lewis**

Para hallar los resultados utilizando el método de Tasai, primero se debe obtener una aproximación del contorno húmedo del cuerpo rígido en estudio, por medio de Métodos de Transformaciones Conformes. Como el método de Tasai se programó para ayudar a validar el programa basado en el Método de Frank, se utilizó la Transformación de Lewis como Método de Transformación Conforme por ser este el más práctico. Aunque más sencillo, para los casos donde las geometrías implicadas son suaves, los resultados obtenidos dan excelentes aproximaciones. Se debe tener cuidado al utilizar este método en casos donde las geometrías estudiadas poseen aristas o curvaturas pronunciadas. Estos casos se estudiaron en esta investigación y los resultados se comentarán con más detalle en el siguiente capítulo.

### **3.6.3 Programación del cálculo de los coeficientes hidrodinámicos**

Luego de implementar funciones y subrutinas incluyendo la Transformación de Lewis, que se utilizaron para determinar los coeficientes hidrodinámicos, se procedió a completar la escritura del código, siguiendo el esquema elaborado en los algoritmos pertinentes. Para las variables del tipo real, se utilizaron las de doble precisión, no se requirió el empleo de variables complejas, por lo que todos los cálculos y funciones arrojan resultados del tipo real. Se manejaron tanto vectores como matrices, cuyos argumentos son variables del tipo real de doble precisión. Se prestó especial atención en operaciones que contienen variables enteras, ya que en el lenguaje Fortran 90 las operaciones entre enteros arrojan como resultado otro número entero. Un problema frecuente se presentó cuando se realizaron divisiones entre números enteros, donde fue necesario convertir tanto el dividendo como el divisor a números reales para poder obtener el resultado correcto de la operación.

### **3.6.4 Verificaciones y validaciones**

A medida que se desarrolló el código del programa basado en la Teoría Potencial de Tasai, se verificó paso a paso las operaciones numéricas realizadas, con la ayuda de los programas wxMaxima 0.7.1 y Microsoft Excel 2003. Se tuvo especial cuidado con las integrales impropias que se evaluaron, en donde se realizaron estudios detallados de sensibilidad referente a la influencia del tamaño de subdivisiones utilizadas para la integración numérica. Luego de completar el programa referente a esta teoría, los resultados se compararon con gráficas extraídas de la literatura para el casco de una embarcación específica. Adicionalmente, los resultados se compararon con los obtenidos por medio del Método de Frank.

### **3.7 Programa basado en la Teoría Potencial de Frank**

Al igual que en el desarrollo del programa basado en la Teoría Potencial de Tasai, para este caso también se realizó una revisión bibliográfica detallada, donde se prestó especial atención tanto a la nomenclatura como a los sistemas de referencia utilizados por Frank. Se prefirió desarrollar con más detalle la Teoría de Frank, ya que es un método mucho más general para el cálculo de los coeficientes hidrodinámicos, comparado con teorías como la de Tasai, puesto que en esta teoría son utilizados Métodos de Transformación Conforme que requieren de un ancho finito de la sección transversal a nivel del agua. En cambio, el método de Frank se puede generalizar para cuerpos rígidos flotantes ó completamente sumergidos. Adicionalmente a esta ventaja, el método de Frank es un método de paneles en dos dimensiones, por lo que desarrollar un programa que use el método de paneles en tres dimensiones se hace fácil. De la misma forma que en los casos previamente mencionados, se realizaron algoritmos para facilitar el desarrollo del programa basado en esta teoría.

#### **3.7.1 Elaboración de algoritmos**

Los algoritmos facilitaron la programación de los coeficientes hidrodinámicos. Con esto se hizo mucho más práctico el desarrollo del código computacional, pudiendo organizar el orden de las operaciones numéricas requeridas. Al revisar el capítulo de los apéndices, se observa la complejidad del cálculo de los coeficientes hidrodinámicos, evidenciándose la necesidad de la elaboración de un algoritmo de cálculo apropiado.

### 3.7.2 Programación del cálculo de los coeficientes hidrodinámicos

Para este programa computacional, se desarrollaron en primer lugar todos los métodos recomendados por Frank. Como los resultados fueron diferentes a los obtenidos mediante el programa basado en la Teoría de Tasai, se recurrió a diferentes métodos que se implementaron, especialmente para la evaluación de integrales. Un método alternativo consistió en la eliminación de la condición de simetría respecto al eje vertical, evaluando las integrales a lo largo de todo el contorno de la sección transversal, esto difiere del método en el cual la simetría sólo se evalúa en una de las mitades del cuerpo. Además de eliminar la simetría, se usaron en lugar de los métodos recomendados por Frank para determinar el valor de las integrales requeridas, otros métodos numéricos basados en la regla del trapecio. Como las integrales requeridas en este programa son de argumento complejo, se requirió una revisión bibliográfica adicional para poder implementar funciones basadas en la regla del trapecio que permitieron la evaluación de estas, cuyos métodos numéricos difieren de la integración de argumentos reales. Se explica a continuación el procedimiento realizado para la evaluación de este caso particular de integrales.

#### 3.7.2.1 Integrales de línea de argumento complejo

Sea “ $\Omega$ ” un dominio en el plano complejo, y sea  $f : \Omega \rightarrow C$  una función continua. Sea “ $S$ ” una curva regular a trozos contenida en “ $\Omega$ ” y parametrizada por  $z(t) = x(t) + i \cdot y(t)$  para  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Se define la integral de “ $f$ ” sobre “ $S$ ” como:

$$\int_S f(z) \cdot dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \cdot z'(t) \cdot dt \quad (141)$$

Las integrales implicadas en la Teoría Potencial de Frank no tienen un diferencial complejo “ $dz$ ”. Estas poseen un diferencial de curvatura “ $ds$ ”, por lo que antes de seguir el procedimiento descrito anteriormente para la evaluación numérica de ellas, se debe realizar un cambio de variable “ $dS = e^{-i\alpha_j} \cdot d\zeta$ ”, donde “ $d\zeta$ ” es un diferencial complejo. Luego de este cambio de variable si se puede aplicar la ecuación 141.

### 3.7.3 Verificaciones y validaciones

La realización de este programa requirió una buena parte de tiempo, ya que también se realizaron verificaciones mucho más detalladas que en el caso del programa basado en la Teoría Potencial de Tasai, esto debido a las dificultades en la convergencia de los valores de los coeficientes hidrodinámicos. Primero se intentó validar los resultados de este programa con aquel elaborado según la Teoría Potencial de Tasai, pero como se podía apreciar de forma gráfica, había una diferencia importante en los valores de los coeficientes y por lo tanto se procedió a verificar paso a paso la evaluación de las integrales calculadas en todo el programa. Para el cálculo de las integrales, se siguieron los métodos sugeridos por Frank, es por ello que se desarrolló posteriormente un programa en Fortran 90 destinado a calcular cada una de las integrales numéricamente por el método del trapecio. Tanto los resultados obtenidos por medio de este programa, como los resultados arrojados por el programa wxMaxima 0.7.1, se compararon con las aproximaciones recomendadas por Frank para el cálculo de las integrales requeridas en la determinación de los coeficientes hidrodinámicos. Se recomienda ver el capítulo de los apéndices, en donde se detallan los procedimientos utilizados para el cálculo de estas integrales, donde se presentan tanto el método recomendado por Frank, como las operaciones numéricas que se implementaron.

## CAPÍTULO IV

### 4. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a partir de los distintos estudios realizados a lo largo de esta investigación. Se ilustrarán los resultados mediante tablas y gráficas, y se realizará un análisis de las mismas. A continuación se muestran los datos relacionados con las secciones transversales de los cuerpos rígidos flotantes estudiados.

#### 4.1 Datos de las secciones transversales utilizadas

Con la finalidad de realizar un análisis global de las posibles geometrías que se aproximan a cuerpos rígidos flotantes como plataformas o embarcaciones Costa Afuera, se eligieron tres geometrías básicas: un semicírculo, un triángulo y un rectángulo. Adicionalmente se encontró en la literatura, estudios realizados a una sección transversal de un barco, por lo que también se incluyó dicha geometría [9]. En esta sección se muestran los datos utilizados para cada sección transversal estudiada.

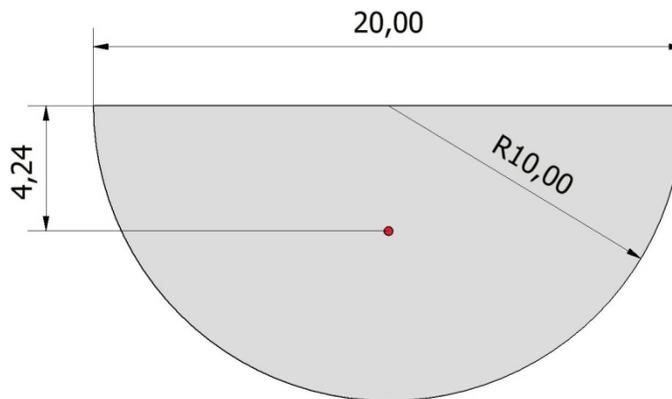
#### 4.1.1 Sección transversal semicircular

La siguiente tabla muestra los datos principales utilizados para la determinación de los coeficientes hidrodinámicos, para el caso de la sección transversal semicircular de radio 10m cuyo centro coincide con el nivel del agua.

**Tabla 4.1. Datos de la sección transversal semicircular.**

$B_s$ (m)	$D_s$ (m)	$A_s$ (m <sup>2</sup> )	$y_0$ (m)
20,00	10,00	157,08	-4,24

La siguiente figura muestra la geometría estudiada, donde se señalan las principales dimensiones. El punto rojo en la figura representa el centro de flotabilidad.



**Figura 4.1. Sección transversal semicircular.**

Este tipo de geometría es la misma que utilizó Ursell en sus estudios [20].

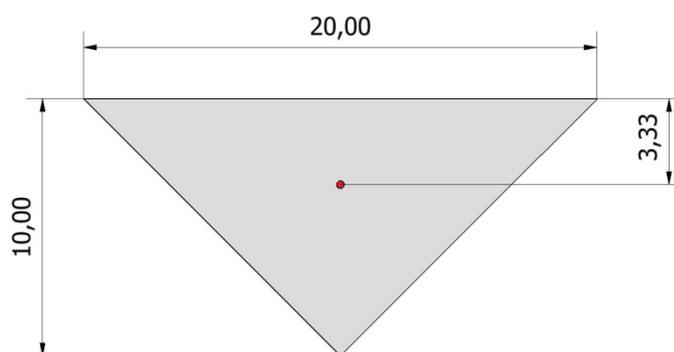
#### 4.1.2 Sección transversal triangular

La siguiente tabla muestra los datos principales utilizados para la determinación de los coeficientes hidrodinámicos para el caso de la sección transversal triangular.

**Tabla 4.2. Datos de la sección transversal triangular.**

$B_S$ (m)	$D_S$ (m)	$A_S$ (m <sup>2</sup> )	$y_0$ (m)
20,00	10,00	100,00	-3,33

La siguiente figura muestra la geometría triangular estudiada, donde se indican las dimensiones principales de esta. Nuevamente, el punto rojo representa el centro de flotabilidad.



**Figura 4.2. Sección transversal triangular.**

#### 4.1.3 Sección transversal rectangular

La siguiente tabla muestra los datos principales utilizados en la determinación de los coeficientes hidrodinámicos para el caso de la sección transversal rectangular.

**Tabla 4.3. Datos de la sección transversal rectangular.**

$B_S$ (m)	$D_S$ (m)	$A_S$ (m <sup>2</sup> )	$y_0$ (m)
20	10	200	-5

A continuación, se ilustran las dimensiones principales de la sección transversal estudiada, donde el punto rojo indica la ubicación del centro de flotabilidad.

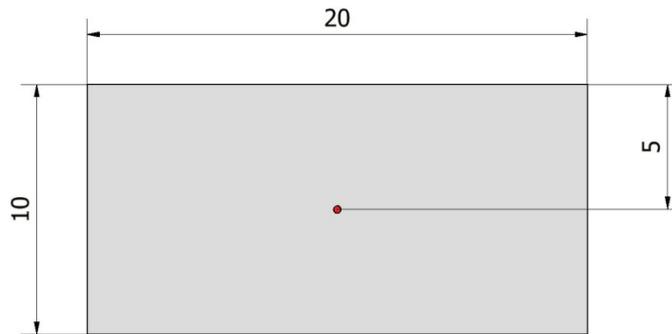


Figura 4.3. Sección transversal rectangular.

#### 4.1.4 Embarcación genérica

Los valores expresados en la siguiente tabla, definen el contorno húmedo de la sección transversal estudiada, tomados de la literatura [9].

Tabla 4.4. Datos del contorno de la sección transversal genérica.

x (m)	y (m)
0,000	-9,000
4,950	-8,865
9,900	-8,730
10,960	-8,500
11,740	-8,000
12,440	-7,000
12,700	-5,950
12,700	-3,000
12,700	0,000

Tomado de “*Offshore Hydromechanics*” por J.M.J. Journée y W.W. Massie”

La siguiente tabla muestra las características principales de la sección transversal de la embarcación estudiada, estos valores fueron calculados a partir de los datos de la embarcación presentados en la Tabla 4.4.

Tabla 4.5. Datos de la sección transversal de la embarcación genérica.

$B_S$ (m)	$D_S$ (m)	$A_S$ (m <sup>2</sup> )	$y_0$ (m)
25,40	9,00	221,13	-4,36

La siguiente figura muestra las dimensiones principales de la embarcación, donde el punto rojo representa el centro de flotabilidad.

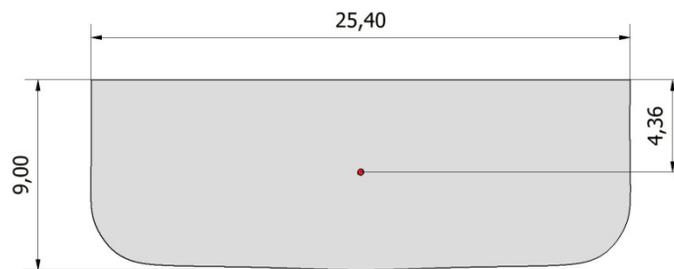


Figura 4.4. Sección transversal embarcación genérica.

## 4.2 Transformación de Lewis

Esta sección tiene como objetivo, comparar el contorno de las secciones transversales estudiadas con sus respectivas aproximaciones realizadas mediante la Transformación de Lewis.

### 4.2.1 Sección transversal semicircular

La tabla 4.6 muestra los coeficientes resultantes de la Transformación de Lewis, como este caso coincide con los estudios particulares realizados por Ursell, los coeficientes de transformación son nulos, lo que hace que la fórmula general de transformación (ecuación 2.89) se convierta en la ecuación de un círculo. [20]

Tabla 4.6. Coeficientes de la Transformación de Lewis del semicírculo.

$M_S$ (m)	$a_1$	$a_3$
10	0	0

En la figura 4.5 se muestra la comparación entre el contorno real y la aproximación usando la Transformación de Lewis. Se aprecie que no existe ninguna diferencia entre las dos. Esto se debe a que los coeficientes de transformación son nulos, por lo tanto no se requiere de las transformaciones conformes para resolver este caso. Recordando que la finalidad de estas transformaciones es la de convertir geometrías complejas en un semicírculo para poder usar las ecuaciones planteadas por Ursell. [20]

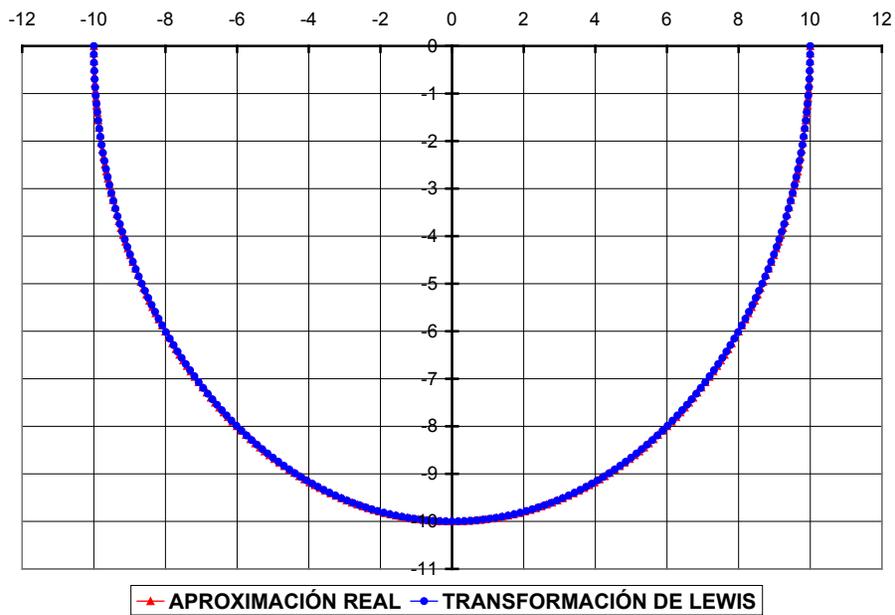


Figura 4.5. Comparación de la Transformación de Lewis con la sección transversal semicircular.

### 4.2.2 Sección transversal triangular

La siguiente tabla muestra los coeficientes obtenidos de la Transformación de Lewis, que a diferencia del caso anterior, al menos uno de los coeficientes de transformación no es nulo.

Tabla 4.7. Coeficientes de la Transformación de Lewis del triángulo.

$M_S$ (m)	$a_1$	$a_3$
8,43	0,00	0,19

La figura 4.6 muestra que existe una ligera desviación entre el contorno real y la aproximación por medio de la Transformación de Lewis. Se observa una mayor desviación a medida que la curva se acerca al vértice inferior, a pesar de esto es una buena aproximación.

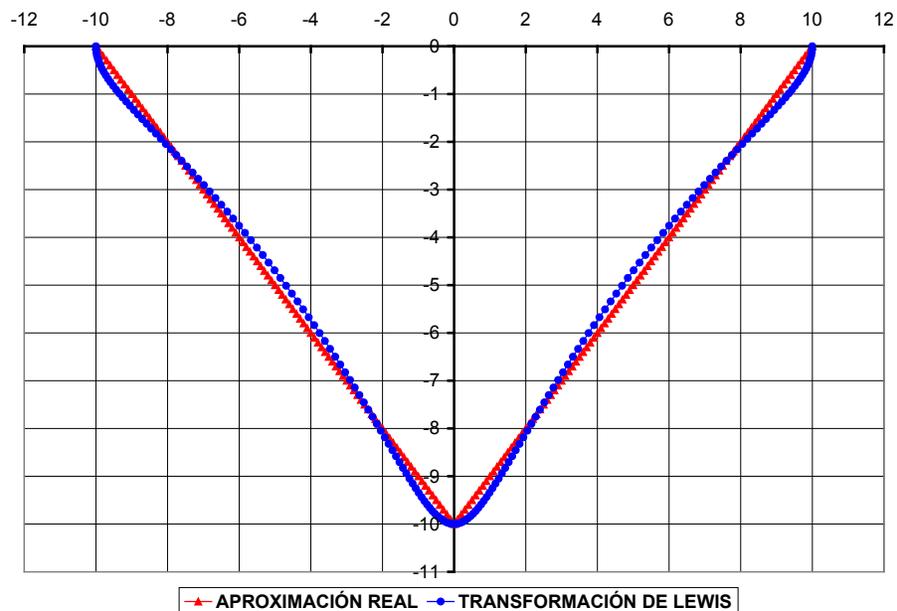


Figura 4.6. Comparación de la Transformación de Lewis con la sección transversal triangular.

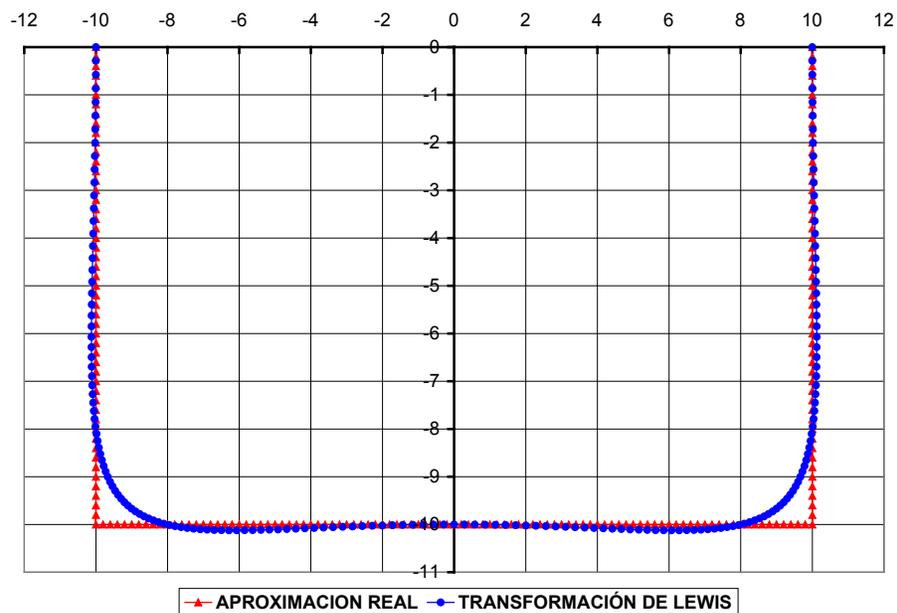
### 4.2.3 Sección transversal rectangular

A continuación se muestra la tabla con los valores pertinentes a la Transformación de Lewis para este caso particular.

**Tabla 4.8. Coeficientes de la Transformación de Lewis del rectángulo.**

$M_S$ (m)	$a_1$	$a_3$
11,6328	0,0000	-0,1404

En la figura 4.7 se observa que en los puntos donde la curva del contorno presenta vértices, la aproximación de Lewis presenta una diferencia más notable de la curva real. Como se explicó en el capítulo del marco teórico en la sección relacionada con la Transformación de Lewis, este tipo de geometrías no es recomendada cuando se utiliza tal transformación, lo cual se aprecia con claridad en la figura 4.7.



**Figura 4.7. Comparación de la Transformación de Lewis con la sección transversal rectangular.**

#### 4.2.4 Sección transversal de la embarcación genérica

A continuación se muestran dos tablas, en las que se indican los coeficientes de la Transformación de Lewis. En la tabla 4.9, los coeficientes calculados en este trabajo y en la tabla 4.10, los valores extraídos de la literatura. [9]

**Tabla 4.9. Coeficientes de la Transformación de Lewis de la embarcación genérica.**

$M_S$ (m)	$a_1$	$a_3$
12,2508	0,1510	-0,1143

**Tabla 4.10. Coeficientes de la Transformación de Lewis de la embarcación genérica.**

$M_S$ (m)	$a_1$	$a_3$
12,2400	0,1511	-0,1136

Tomado de “*Offshore Hydromechanics*” por J.M.J. Journée y W.W. Massie”

Al comparar los resultados de la tabla 4.9 con los de la tabla 4.10, se observa que el módulo de la Transformación de Lewis elaborado funciona correctamente, ya que los coeficientes de transformación poseen valores muy parecidos.

En la siguiente figura, se aprecia una ligera desviación entre ambos contornos, siendo esta más evidente donde la geometría del contorno real posee una mayor curvatura.

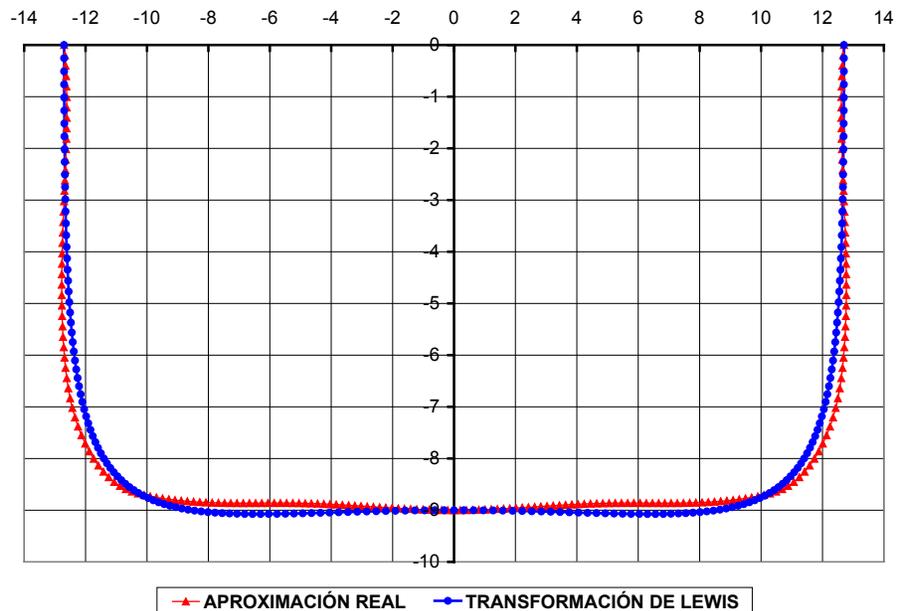


Figura 4.8. Comparación de la Transformación de Lewis con la sección transversal de la embarcación genérica.

### 4.3 Método de Tasai

Luego de analizar los resultados pertinentes a la Transformación de Lewis, se muestran los resultados obtenidos para los coeficientes hidrodinámicos determinados por medio de la Teoría Potencial de Tasai. Para determinar dichos coeficientes, primero se verificó el módulo de la Transformación de Lewis, el cual forma parte del programa basado en esta teoría.

#### 4.3.1 Comparación de resultados de la embarcación genérica

En las siguientes figuras 4.9 y 4.10, se realiza una comparación entre los resultados extraídos de la literatura [9] y los resultados obtenidos utilizando el programa computacional elaborado, para el caso específico de la embarcación genérica descrita en secciones anteriores (figura 4.4). En ambas figuras, se

observa una ligera desviación de las curvas (Azul y roja). Esto se debe principalmente a que la gráfica con la que se compara, fue elaborada por Métodos de Transformación Conforme con muchos más parámetros que los utilizados en este trabajo, y no con los dos parámetros establecidos de acuerdo a la Transformación de Lewis. Sin embargo, el comportamiento de ambas curvas es el mismo, a medida que la frecuencia aumenta, los valores graficados corresponden a un movimiento oscilatorio vertical de la embarcación (coeficientes hidrodinámicos “ $M_{33}$ ” y “ $N_{33}$ ”). Ambos coeficientes se estabilizan en un valor finito, y es en esta zona donde los resultados obtenidos y los resultados extraídos de la literatura se acercan más. [9]

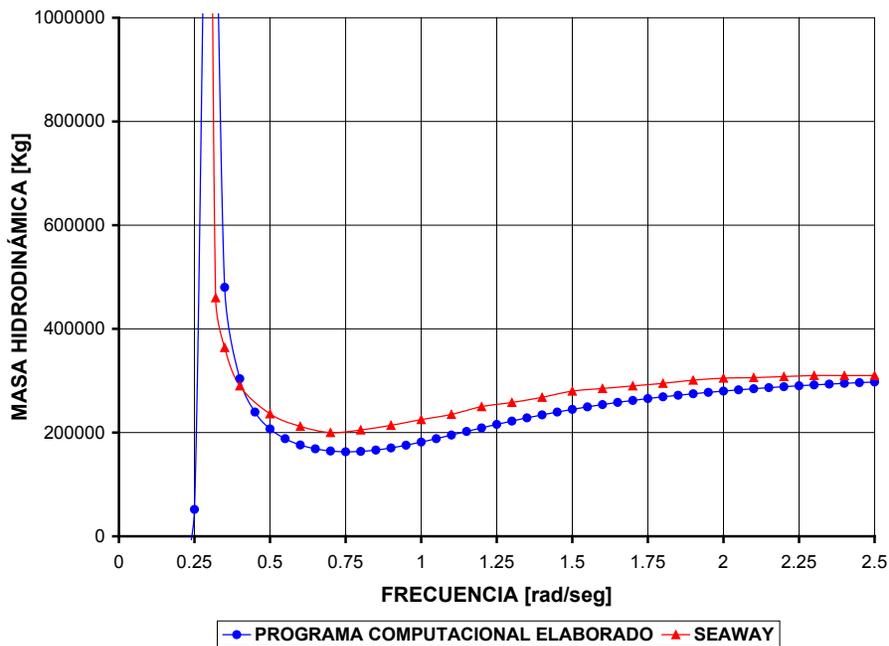


Figura 4.9. Coeficiente de masa hidrodinámica “ $M_{33}$ ”.

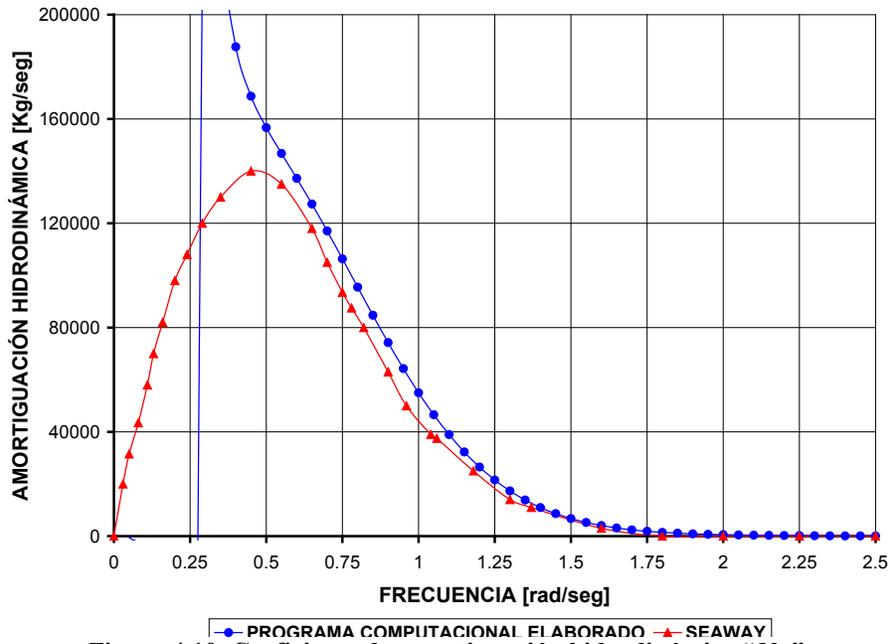


Figura 4.10. Coeficiente de amortiguación hidrodinámica “ $N_{33}$ ”.

En ambos resultados se observa que a medida que la frecuencia es menor, los valores entre ambas curvas difieren más. Esto era de esperarse ya que al revisar los estudios realizados por Tasai [18], se encontró que para bajas frecuencias no se recomienda utilizar su procedimiento, sin embargo, Tasai propone que cuando la frecuencia tiende a cero el coeficiente de masa hidrodinámica (figura 4.9) tiende a infinito y el coeficiente de amortiguación (figura 4.10) tiende a cero, lo que coincide con las gráficas extraídas de la literatura. [9]

### 4.3.2 Comparación de los resultados de las distintas geometrías estudiadas

Las siguientes figuras muestran los coeficientes hidrodinámicos relacionados con un movimiento oscilatorio vertical del cuerpo rígido, donde se presentan los cuatro casos de geometrías estudiadas. En la figura 4.11 se graficaron los valores del coeficiente hidrodinámico “ $M_{33}$ ”, y en la figura 4.12 los valores del coeficiente “ $N_{33}$ ”.

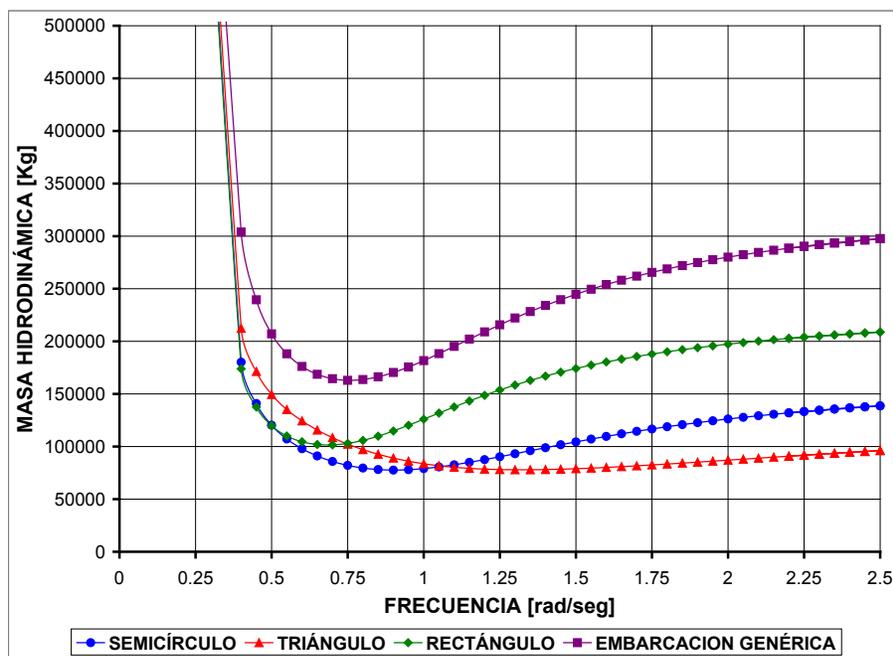


Figura 4.11. Comparación del coeficiente “ $M_{33}$ ” para todas las geometrías estudiadas.

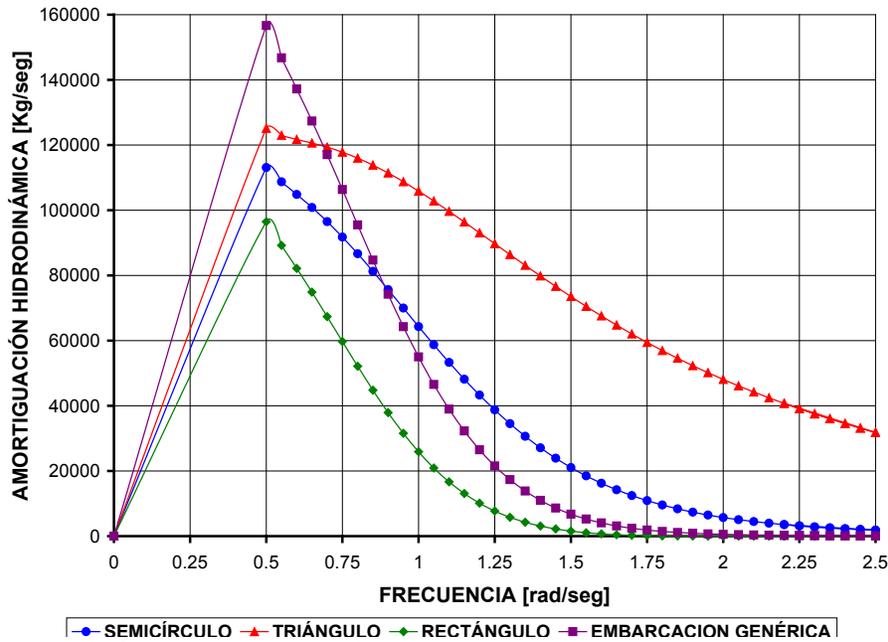


Figura 4.12. Comparación del coeficiente “ $N_{33}$ ” para todas las geometrías estudiadas.

En las figuras 4.11 y 4.12 se observa un comportamiento parecido para las cuatro geometrías estudiadas. En todas estas curvas se observa que a medida que la frecuencia aumenta, el valor de los coeficientes hidrodinámicos estudiados tiende a estabilizarse a un valor finito. Las geometrías que poseen un comportamiento más parecido son la rectangular y la embarcación genérica, esto se debe a que en las figuras 4.7 y 4.8, la aproximación del contorno húmedo por medio de la Transformación de Lewis (curva azul) y el contorno real son curvas muy parecidas. Si se comparan los resultados para el caso de la geometría rectangular y la embarcación genérica, se observa en este último, que los coeficientes “ $M_{33}$ ” y “ $N_{33}$ ” son mayores, de lo que se infiere que para geometrías parecidas, a medida que aumenta el área de la sección transversal, los valores de los coeficientes hidrodinámicos “ $M_{33}$ ” y “ $N_{33}$ ” aumentan. En la figura 4.12, el coeficiente “ $N_{33}$ ” tiende a anularse cuando la frecuencia aumenta.

#### 4.4 Método de Frank

En esta sección se muestran una serie de comparaciones realizadas a lo largo del desarrollo del programa basado en la Teoría Potencial de Frank, asimismo se mostrarán algunos resultados mediante gráficas y tablas comparativas de estudios detallados que permiten validar este programa. Se encontraron posibles causas de errores que se explicarán a continuación, las cuales son de interés para posteriores validaciones de este programa.

Se realizaron dos programas principales, en uno se siguió el procedimiento planteado por Frank, en el cual se asume simetría con respecto al eje vertical y otro, donde partiendo de la función potencial planteada por Frank (ecuación 2.101), se desarrollaron distintos procedimientos siguiendo las bases principales de esta teoría, para poder eliminar la condición de simetría. Sin embargo se utilizaron muchos procedimientos sugeridos por Frank para la evaluación de algunas integrales implicadas en el cálculo de los coeficientes hidrodinámicos. A continuación se muestran algunas comparaciones y validaciones realizadas entre ambos programas, el programa wxMaxima 0.7.1 también fue empleado para la evaluación de algunas ecuaciones integrales. A fin de tener una mejor comprensión de esta sección, se recomienda revisar el Apéndice C, donde se definen los procedimientos sugeridos por Frank para la determinación de los términos que a continuación se comparan y analizan.

#### 4.4.1 Comparaciones y validaciones de los términos implicados en el cálculo de los coeficientes hidrodinámicos basados en la Teoría de Frank

En estas comparaciones se realizaron varios cálculos para distintos casos, donde se varió la cantidad del número de segmentos, el tamaño y las coordenadas de cada uno de ellos. Debido al gran número de términos evaluados, los resultados son mostrados en tablas y para el caso más sencillo estudiado. Luego se hará énfasis en los términos que presentaron problemas.

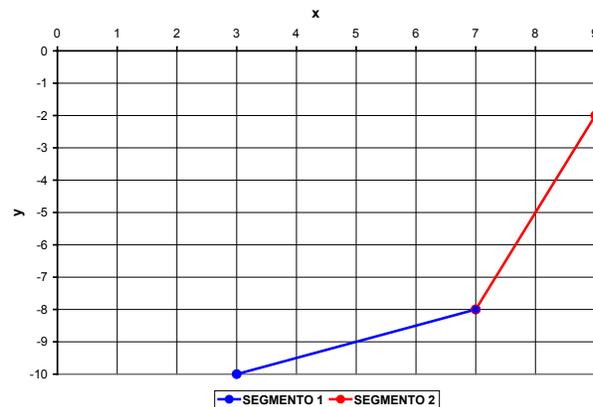
##### 4.4.1.1 Datos de los segmentos utilizados

Se utilizaron dos segmentos interconectados entre si contemplados en el cuarto cuadrante, los cuales se definieron de la siguiente manera:

**Tabla 4.11. Coordenadas de los segmentos ejemplos.**

	$\xi_{inicial}$ (m)	$\eta_{inicial}$ (m)	$\xi_{final}$ (m)	$\eta_{final}$ (m)
<b>Segmento 1</b>	3	-10	7	-8
<b>Segmento 2</b>	7	-8	9	-2

Se muestra a continuación una gráfica donde se representan estos dos segmentos definidos en el plano xy.



**Figura 4.13. Segmentos ejemplos.**

Las constantes utilizadas para la determinación de algunos términos, se presentan en la tabla 4.12.

**Tabla 4.12. Constantes utilizadas para las validaciones.**

<b>g (m/seg<sup>2</sup>)</b>	<b><math>\omega</math> (rad/seg)</b>	<b>k</b>
9,81	2	3

Primero se muestran comparaciones realizadas entre varios procedimientos para la determinación de los términos “ $L$ ”, estos deben calcularse para poder obtener los coeficientes de influencia definidos por Frank (ver Apéndice C). También se muestran las comparaciones realizadas entre los distintos procedimientos para el cálculo de los términos “ $K$ ”, estos se utilizan para la determinación de la función potencial (ver Apéndice C).

#### 4.4.1.2 Término “ $L$ ”

Este término se define de la siguiente forma:

$$L_1 = \text{Re} \left\{ \left( \vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \right) \cdot \left( \int_{s_j} \ln(z - \zeta) \cdot ds \right)_{z=z_i} \right\} \quad (4.1)$$

Siendo el término “ $s_j$ ” el segmento “ $j$ ”, y el término “ $z_i$ ” el número complejo que representa las coordenadas del punto medio del segmento “ $i$ ”. La variable “ $\zeta$ ” es compleja y se debe aplicar el cambio de variable explicado en la sección 3.7.2.1 para poder evaluar numéricamente tal integral. Este término posee una singularidad, ya que en el caso particular de que “ $i = j$ ”, el argumento de la integral no se puede evaluar.

El término “ $LI$ ” en realidad es una matriz de “ $N_F \times N_F$ ” elementos, ya que tanto “ $i$ ” como “ $j$ ” varían de 1 hasta  $N_F$ . Como se utilizaron dos segmentos solamente, la matriz “ $LI$ ” posee cuatro elementos, los cuales se comparan en la tabla 4.13. El Método de Frank se refiere a cálculos realizados siguiendo los procedimientos analíticos que se muestran en el Apéndice C. Estos cálculos fueron realizados en el programa wxMaxima 0.7.1. El método numérico se refiere a los cálculos realizados usando el programa computacional desarrollado, que evalúa todos los términos numéricamente.

**Tabla 4.13. Validación del término “ $LI$ ”.**

	<b>Método de Frank</b>	<b>Método Numérico</b>
$LI_{11}$	$\pi$	3,14159274
$LI_{12}$	0,49106591	0,49101682
$LI_{21}$	0,24117386	0,24116161
$LI_{22}$	$\pi$	3,14159274

Como se puede observar en la tabla anterior, el término  $L1$  no presenta problemas en su evaluación, ya que tanto el método analítico propuesto por Frank como el método numérico desarrollado en esta investigación convergen a un mismo valor, incluyendo el caso donde “ $i = j$ ” (caso singular).

A lo largo de toda esta sección (4.4.1) se utiliza la misma notación que en la tabla 4.13 para denotar los elementos de las matrices que se compararán, siendo el primer subíndice el valor de “ $i$ ” y el segundo el valor de “ $j$ ”, es decir, el elemento “ $LI_{12}$ ” es cuando “ $i = 1$ ” y “ $j = 2$ ”. Es importante no confundir el subíndice “ $j$ ” con el usado en secciones anteriores y posteriores, en donde este significa el tipo de movimiento en estudio.

4.4.1.3 Término “ $L_3$ ”

Este término se define de la siguiente forma:

$$L_3 = \operatorname{Re} \left\{ \left( \vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \right) \cdot \left( \int_{s_j} \ln(z - \bar{\zeta}) \cdot ds \right)_{z=z_i} \right\} \quad (4.2)$$

A diferencia del término “ $L_1$ ”, este no posee un punto singular, por lo que su evaluación es mucho más sencilla, y los resultados obtenidos por el método sugerido por Frank y por el método numérico desarrollado se presentan a continuación:

Tabla 4.14. Validación del término “ $L_3$ ”.

	Método de Frank	Método Numérico
$L_{311}$	0,22108131	0,22108811
$L_{312}$	0,34351370	0,34351331
$L_{321}$	0,15624797	0,15624475
$L_{322}$	0,19219747	0,19921953

En la tabla anterior se observa que los resultados numéricos y analíticos son casi iguales, por lo que el término “ $L_3$ ” no presenta problemas para su evaluación.

4.4.1.4 Término “L5”

Este término se define de la siguiente forma:

$$L_5 = \text{Re} \left\{ \left( \vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \right) \cdot \left( \int_{s_j} PV \int_0^{\infty} \frac{e^{-i \cdot k \cdot (z_i - \bar{\zeta})}}{\nu - k} \cdot dk \cdot ds \right) \right\}_{z=z_i} \quad (4.3)$$

Si se analiza con cuidado el término “L5”, se puede observar que se requiere evaluar una integral impropia, las siglas *PV* (del nombre en inglés *principal value*) se refiere al valor principal o valor de Cauchy. No solamente la integral es impropia debido a su límite de integración, sino también el integrando posee un punto singular cuando “ $k = \nu$ ”. La evaluación de este término presentó muchos problemas debido a la naturaleza de la función a integrar y es la razón fundamental por la que a bajas frecuencias no se logró determinar los coeficientes hidrodinámicos usando el programa computacional basado en la Teoría Potencial de Frank. Cuando se separa la parte real y la parte imaginaria del integrando impropio, se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{e^{-i \cdot k \cdot (z_i - \bar{\zeta})}}{\nu - k} = \frac{e^{(y+\eta)k} \cdot \cos(k \cdot (x - \xi))}{\nu - k} + i \cdot \frac{e^{(y+\eta)k} \cdot \text{sen}(k \cdot (x - \xi))}{\nu - k} \quad (4.4)$$

Entonces cuando la frecuencia es pequeña, el término predominante es el término real, esto se debe a la naturaleza del coseno y del seno. La dificultad en la evaluación de este término se puede explicar mejor mediante el análisis de la siguiente ecuación:

$$f(k) = \frac{e^{-k \cdot |cte|}}{\nu - k} \quad (4.5)$$

En la figura 4.14 se expresa el comportamiento de esta función, para los casos donde la frecuencia no es un valor pequeño.

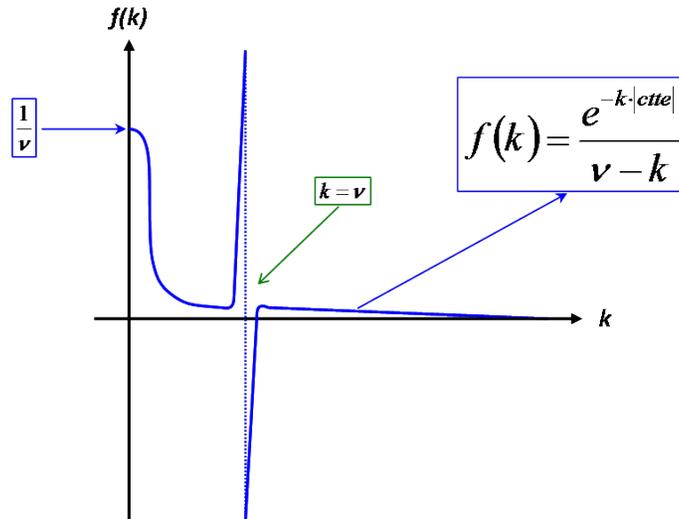


Figura 4.14. Naturaleza de la función de la integral impropia.

Analizando la figura anterior conjuntamente con la ecuación 4.3, se puede explicar el problema que se presenta al intentar evaluar el término L5 para valores pequeños de la frecuencia. En la figura 4.14 se aprecia que el aporte significativo de la función estudiada ocurre a bajas frecuencias donde esta se aproxima a “ $1/\nu$ ”. Para altas frecuencias, la información de la función no es significativa debido al fuerte decrecimiento de la función exponencial, entonces siendo “ $\nu = \omega^2/g$ ”, a medida que la frecuencia es menor, el punto singular mostrado en la figura 4.14 se desplaza hacia la izquierda, y cuando está muy cerca del origen, la integral 4.3 no se puede evaluar numéricamente. En la tabla 4.15 se muestran los valores calculados por tres métodos distintos, el método analítico sugerido por Frank, usando aproximaciones por series de potencias (ver Apéndice C), el método numérico desarrollado en este trabajo y el método numérico que utiliza el wxMaxima 0.7.1 para la evaluación de integrales.

**Tabla 4.15. Validación del término “L5”.**

	<b>Método de Frank</b>	<b>Método Numérico</b>	<b>wxMaxima 0.7.1</b>
<b><i>L5<sub>11</sub></i></b>	-0,04580661	-0,04494803	-0,04498302
<b><i>L5<sub>12</sub></i></b>	-0,03999049	-0,07217999	-0,07218123
<b><i>L5<sub>21</sub></i></b>	-0,06823300	-0,06562391	-0,06578824
<b><i>L5<sub>22</sub></i></b>	0,09947920	-0,08400986	-0,08425160

En la tabla anterior se observa que existe una desviación notable entre los valores obtenidos por el procedimiento descrito por Frank, y los valores numéricos, tanto los calculados por el programa desarrollado en este trabajo como los calculados con la ayuda del programa wxMaxima 0.7.1. Los valores obtenidos de estos últimos procedimientos numéricos son casi iguales, por lo que no se recomienda usar el procedimiento analítico sugerido por Frank para la evaluación del término “L5”. Al parecer las series de potencias no dan buenas aproximaciones en algunos casos específicos como el que se está estudiando, es por ello que se analizó con mayor detalle el problema presentado en la evaluación de este término. En el apéndice D se muestran estudios más detallados, donde se infiere que la utilización de series de potencias a medida que la frecuencia aumenta, conduce a mejores resultados.

4.4.1.5 Término “L7”

Este término se define de la siguiente forma:

$$L_7 = \text{Re} \left\{ \left( \vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \right) \cdot \left( \int_{s_j} e^{-i \cdot v \cdot (z - \bar{\zeta})} \cdot ds \right) \right\}_{z=z_i} \quad (4.6)$$

Al analizar el término “L7” se observa que no posee complicaciones particulares como el término “L5”, por lo que su evaluación no presentó ninguna dificultad. En la tabla 4.16 se comparan los valores obtenidos siguiendo el procedimiento de Frank y los obtenidos usando los métodos numéricos de integración desarrollados en este trabajo.

**Tabla 4.16. Validación del término “L7”.**

	<b>Método de Frank</b>	<b>Método Numérico</b>
<b>L7<sub>11</sub></b>	-0,0009137401	-0,0009137119
<b>L7<sub>12</sub></b>	0,0028249977	0,0028254636
<b>L7<sub>21</sub></b>	-0,0055196346	-0,0055195266
<b>L7<sub>22</sub></b>	-0,0091241845	-0,0091228108

Los valores presentados no muestran desviaciones notables y son prácticamente iguales.

4.4.1.6 Término “K1”

Este término se define de la siguiente manera:

$$K_1 = \text{Re} \left\{ \int_{s_j} \ln(z_i - \zeta) \cdot ds \right\} \quad (4.7)$$

A diferencia de los términos “L”, los términos “K” no poseen el producto punto entre el operador gradiente y el vector normal “ $(\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla})$ ”, lo que simplifica su evaluación numérica. La tabla 4.17 muestra los resultados obtenidos por el método analítico de Frank, y la evaluación numérica desarrollada para el término “KI”.

**Tabla 4.17. Validación del término “KI”.**

	<b>Método de Frank</b>	<b>Método Numérico</b>
<b><math>KI_{11}</math></b>	-0,87332338	-0,87370697
<b><math>KI_{12}</math></b>	9,83350055	9,83343568
<b><math>KI_{21}</math></b>	7,11156727	7,11155237
<b><math>KI_{22}</math></b>	0,95685808	0,95631122

Como se puede apreciar, no existen diferencias notables entre los resultados de ambos métodos.

#### 4.4.1.7 Término “K3”

Este término se define de la siguiente manera:

$$K_3 = \text{Re} \left\{ \int_{s_j} \ln(z_i - \bar{\zeta}) \cdot ds \right\} \quad (4.8)$$

Como el término “K3” es parecido al término “KI”, su evaluación tampoco presentó problemas. A continuación se muestra una tabla comparativa entre los resultados obtenidos siguiendo el procedimiento de Frank y los obtenidos numéricamente.

Tabla 4.18. Validación del término “K3”.

	Método de Frank	Método Numérico
$K3_{11}$	12,9330515	12,9330528
$K3_{12}$	16,8083714	16,8083667
$K3_{21}$	11,9067220	11,9067229
$K3_{22}$	14,4776750	14,4776576

Nuevamente se observa que los resultados tanto numéricos como analíticos poseen valores casi iguales, por lo que el término “K3” no presentó problemas en su determinación.

#### 4.4.1.8 Término “K5”

Este término se define de la siguiente manera:

$$K_5 = \text{Re} \left\{ \int_{s_j} ds \cdot PV \int_0^{\infty} \frac{e^{-i \cdot k \cdot (z_i - \bar{s})}}{v - k} \cdot dk \right\} \quad (4.9)$$

Recordando la sección anterior donde se discutió el término “L5” (4.4.1.4) y si se comparan las ecuaciones 4.3 con la 4.9, se observa que la única diferencia entre ambas es el producto “ $(\vec{n}_i \cdot \vec{\nabla})$ ”, el cual no es el término que presenta problemas para la evaluación de los términos “L5” y “K5”, por lo que todo lo comentado y analizado en la sección 4.4.1.4 relacionado con las dificultades que presenta el término “L5”, son también válidas para esta sección. En la siguiente tabla se muestran los valores del término “L5” calculados por tres métodos distintos. El método sugerido por Frank usando series de potencias (ver Apéndice C), el método numérico desarrollado en este trabajo y el método que utiliza el programa wxMaxima 0.7.1.

Tabla 4.19. Validación del término “K5”.

	Método de Frank	Método Numérico	wxMaxima 0.7.1
<b><i>K5<sub>11</sub></i></b>	0,73719051	0,73179010	0,73190248
<b><i>K5<sub>12</sub></i></b>	1,27031028	1,35031276	1,35065439
<b><i>K5<sub>21</sub></i></b>	0,90856852	0,94674526	0,94701099
<b><i>K5<sub>22</sub></i></b>	2,27283837	2,28225433	2,28532435

Si se observa detalladamente los valores presentados en la tabla 4.19, se aprecia que los valores obtenidos mediante el método numérico y los obtenidos usando el programa wxMaxima 0.7.1 son casi iguales. En cambio, los valores analíticos (Método de Frank) en algunos casos no son parecidos a los obtenidos por los otros dos métodos, como el caso del término “*K5<sub>12</sub>*” y “*K5<sub>21</sub>*”. Aunque la diferencia de valores que presenta este término sea apreciable, se debe recordar que para el caso que se está estudiando, solamente se usaron dos segmentos, pero para casos reales en donde se tenga que dividir el casco de una embarcación en varios segmentos, la propagación del error puede ocasionar resultados incorrectos. Es por ello que se recomienda no utilizar el método analítico sugerido por Frank para la evaluación de estos términos.

4.4.1.9 Término “K7”

Este término se define de la siguiente manera:

$$K_7 = \operatorname{Re} \left\{ \int_{s_j} e^{-i \cdot v \cdot (z_i - \bar{z})} \cdot ds \right\} \quad (4.10)$$

En la ecuación 4.10, se puede apreciar que la evaluación del término “K7” no posee ninguna complicación, es por ello que su determinación numérica resultó más sencilla, cuando se compara con términos como el “K5” o el “L5”. En la siguiente tabla se muestran los valores obtenidos utilizando el procedimiento de Frank y el procedimiento numérico desarrollado.

**Tabla 4.20. Validación del término “K7”.**

	<b>Método de Frank</b>	<b>Método Numérico</b>
<b><i>K7<sub>11</sub></i></b>	0,002658438	0,002658388
<b><i>K7<sub>12</sub></i></b>	0,005041549	0,005040925
<b><i>K7<sub>21</sub></i></b>	0,006095630	0,006095802
<b><i>K7<sub>22</sub></i></b>	0,131622369	0,131627551

Analizando la tabla anterior se observa que los valores obtenidos por ambos métodos son muy semejantes.

#### **4.4.2 Análisis de la variación del tamaño de los segmentos que conforman el contorno húmedo del cuerpo rígido flotante**

Se realizaron varias pruebas con la finalidad de estudiar como el tamaño de los segmentos afecta a los coeficientes hidrodinámicos. Para ello, se dividió el contorno de cada geometría en cincuenta (50), cien (100) y doscientos (200) segmentos. Como se calcularon 10 coeficientes hidrodinámicos para cada tipo de geometría (“ $M_{22}$ ”, “ $N_{22}$ ”, “ $M_{33}$ ”, “ $N_{33}$ ”, “ $M_{44}$ ”, “ $N_{44}$ ”, “ $M_{42}$ ”, “ $N_{42}$ ”, “ $M_{24}$ ” y “ $N_{24}$ ”), sólo se muestran aquellos donde se aprecia mejor la influencia del tamaño de los segmentos. En todos los cálculos de este análisis, se utilizaron los procedimientos de Frank, aplicando la condición de simetría vertical.

##### 4.4.2.1 Sección transversal semicircular

Los valores obtenidos para este tipo de geometría resultaron muy irregulares. Se observa un comportamiento oscilatorio inesperado, Frank en sus estudios comenta la aparición reiterada de frecuencias irregulares, donde para algunos valores particulares, la función potencial toma valores indefinidos. Para solucionar dicho problema se deben realizar posteriores suavizaciones de la curva mediante métodos de interpolación, los cuales no fueron incluidos en este trabajo. A continuación se muestran los resultados del coeficiente de masa hidrodinámica “ $M_{22}$ ” (figura 4.15) y el de amortiguación hidrodinámica “ $N_{22}$ ” (figura 4.16).

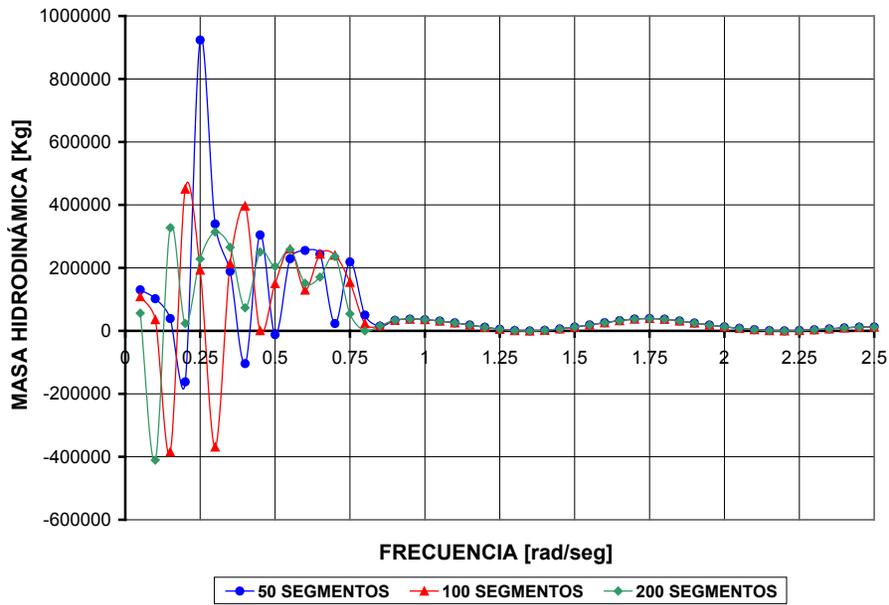


Figura 4.15. Coeficiente de masa hidrodinámica “ $M_{22}$ ”.

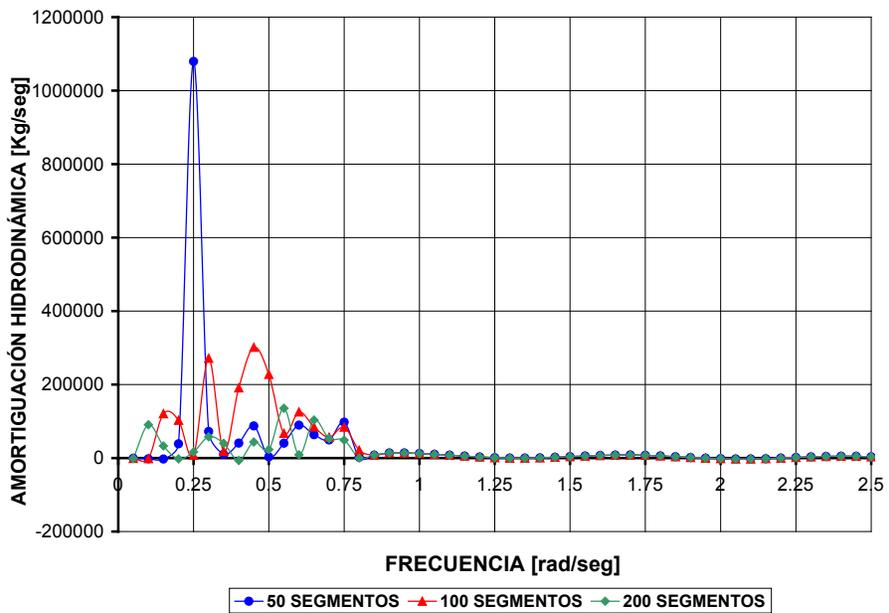


Figura 4.16. Coeficiente de amortiguación hidrodinámica “ $N_{22}$ ”.

Analizando las figuras 4.15 y 4.16, se observa que para bajas frecuencias los valores de los coeficientes hidrodinámicos son más irregulares, esto se debe al problema que se explicó anteriormente en cuanto a la determinación de los términos “ $L5$ ” y “ $K5$ ”. Cuando los valores de la frecuencia no son pequeños, las curvas se estabilizan. También se puede decir que a medida que los segmentos se hacen más pequeños, el comportamiento irregular se vuelve menos pronunciado. Tanto en la figura 4.15 como en la 4.16, se observa que en los puntos máximos y mínimos donde se presentan irregularidades, las curvas son mucho más pronunciadas para el caso de cincuenta segmentos, en el cual su tamaño es mayor. Para doscientos segmentos, las curvas son menos irregulares que en los otros casos, por lo que a medida que los segmentos son más pequeños, se obtienen mejores resultados.

#### 4.4.2.2 Sección transversal triangular

A diferencia del caso anterior, los resultados obtenidos para la geometría triangular no presentaron tantas irregularidades. Esto se observa en las figuras 4.17 y 4.18, donde se muestran los valores de los coeficientes de masa y amortiguación hidrodinámica respectivamente, para el caso de un movimiento oscilatorio vertical del cuerpo rígido.

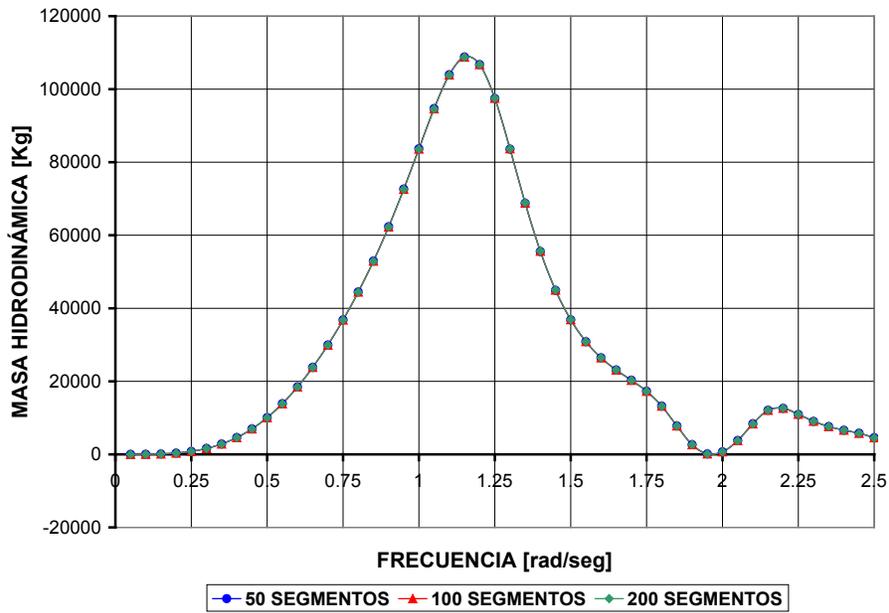


Figura 4.17. Coeficiente de masa hidrodinámica “ $M_{33}$ ”.

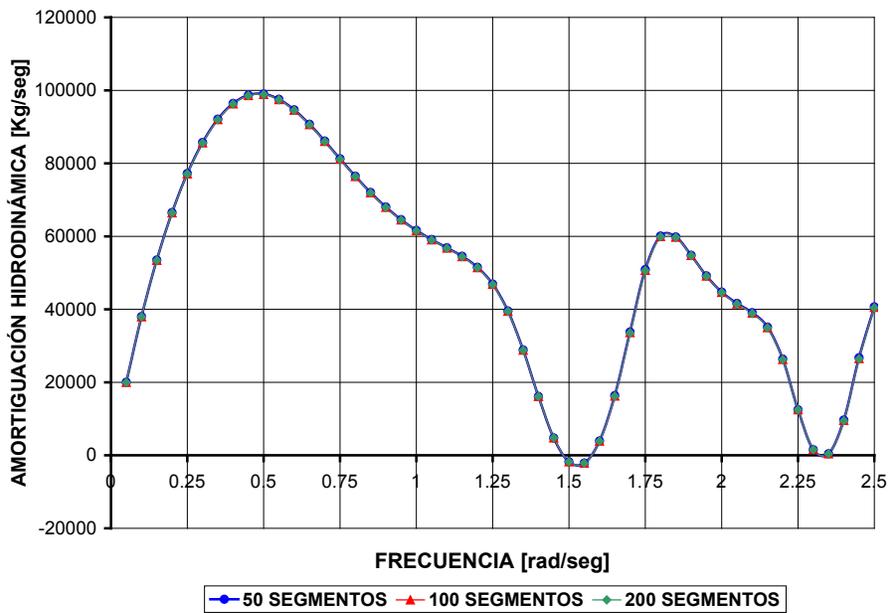


Figura 4.18. Coeficiente de amortiguación hidrodinámica “ $N_{33}$ ”.

En las figuras anteriores se observa que para cincuenta, cien y doscientos segmentos se obtienen exactamente los mismos valores, este comportamiento se repitió para los ocho coeficientes restantes. También se puede observar que las oscilaciones para la geometría triangular disminuyeron notablemente al compararlas con las de la geometría semicircular. Esto podría ser a causa de la variación del ángulo entre los segmentos, es decir, en el caso triangular todos los segmentos que conforman la mitad de la sección transversal poseen el mismo ángulo, ya que están alineados sobre una recta, en cambio, para el caso semicircular los segmentos van variando de ángulo.

#### 4.4.2.3 Sección transversal rectangular

Al igual que para la geometría triangular, en este caso no se presentaron tantas irregularidades como en el caso semicircular, a continuación se muestran dos figuras donde se grafican los valores de los coeficientes de masa y amortiguación para el caso de un movimiento oscilatorio horizontal.

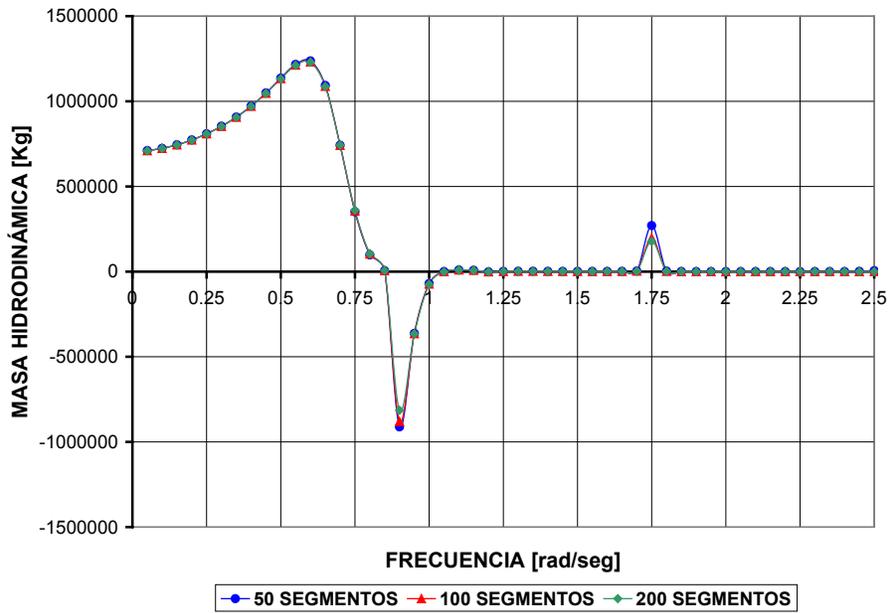


Figura 4.19. Coeficiente de masa hidrodinámica “ $M_{22}$ ”.

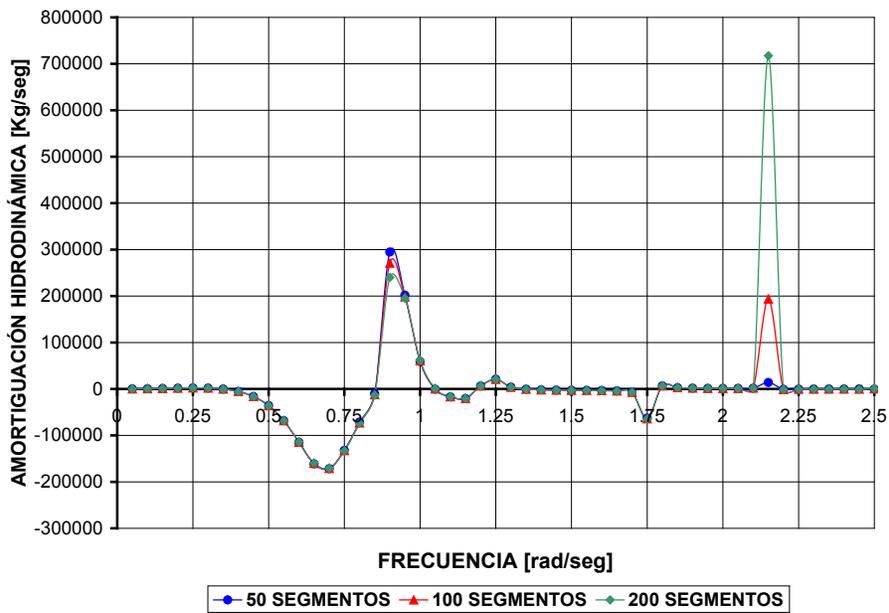


Figura 4.20. Coeficiente de amortiguación hidrodinámica “ $N_{22}$ ”.

Comparando las figuras 4.19 y 4.20 con las figuras 4.17 y 4.18, se observa que en este caso se presentaron mayores irregularidades que para el caso de la geometría triangular. Nuevamente el comportamiento de los coeficientes hidrodinámicos para cincuenta, cien y doscientos segmentos resultó muy semejante, donde en pocas ocasiones sus valores resultaron distintos, como el punto ubicado entre una frecuencia de 2 y 2,5 en la figura 4.20.

#### 4.4.2.4 Sección transversal de la embarcación genérica

Los estudios realizados para este tipo de sección transversal son semejantes a los realizados en el caso semicircular. Para bajas frecuencias se presentan muchas irregularidades, y la estabilización de los resultados se alcanza para frecuencias altas. En las figuras 4.21 y 4.22 se muestran los valores de los coeficientes hidrodinámicos para el caso en el que el contorno de la sección transversal esté conformado por cincuenta, cien y doscientos segmentos.

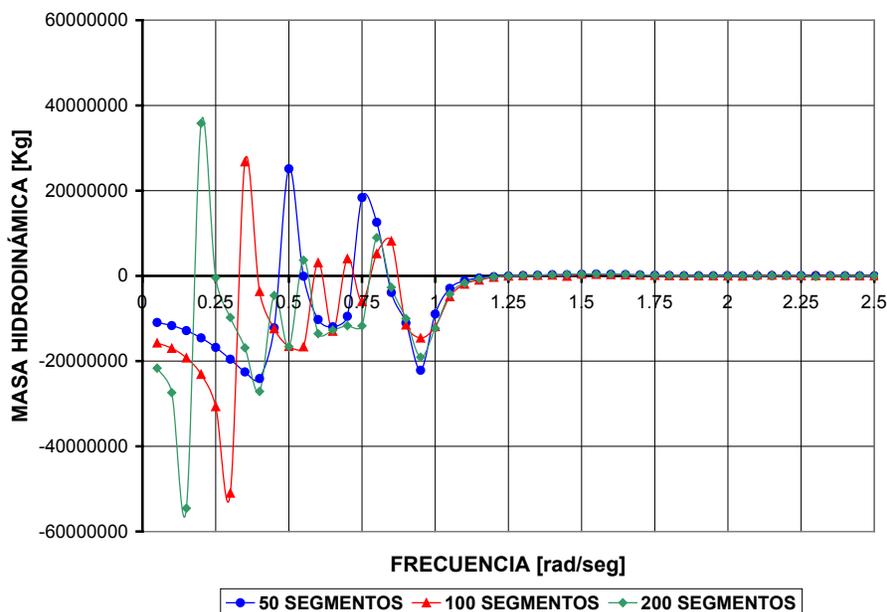


Figura 4.21. Coeficiente de masa hidrodinámica “ $M_{44}$ ”.

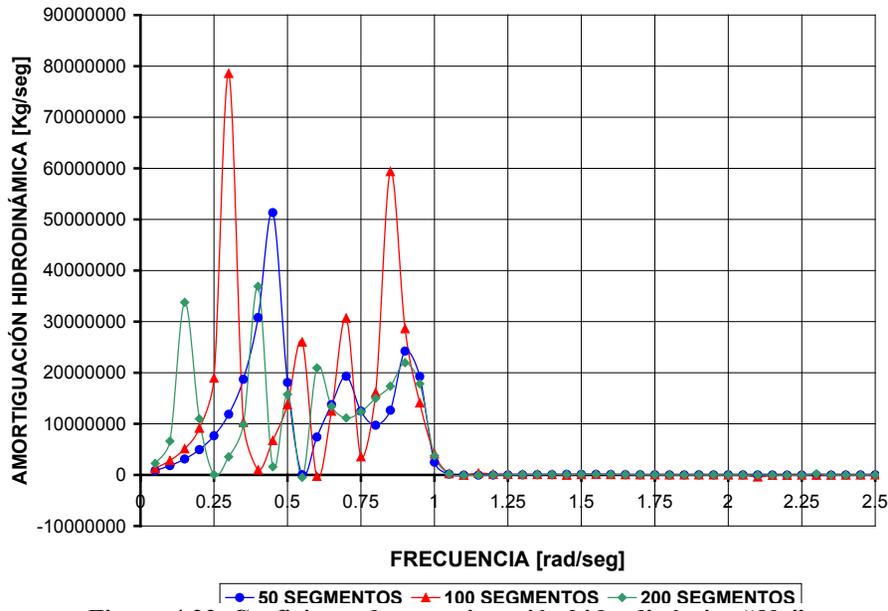


Figura 4.22. Coeficiente de amortiguación hidrodinámica “ $N_{44}$ ”.

Las gráficas anteriores muestran que los resultados con menores oscilaciones pertenecen al cálculo realizado con un contorno de doscientos segmentos, este comportamiento se repitió para los otros ocho coeficientes hidrodinámicos.

A pesar de todas las validaciones, comparaciones y análisis realizados, no se logró reproducir la Teoría Potencial de Frank, por lo que no se pudo generalizar el programa de dos a tres dimensiones. En las secciones anteriores se indicaron algunos problemas encontrados a lo largo del desarrollo del programa basado en esta teoría, dejando abierta esta investigación para estudios posteriores. La mayoría de los términos implicados en el cálculo de los coeficientes hidrodinámicos si fueron validados correctamente.

A continuación se comparan los resultados obtenidos haciendo uso de todos los programas computacionales desarrollados, incluyéndose resultados extraídos de la literatura [9].

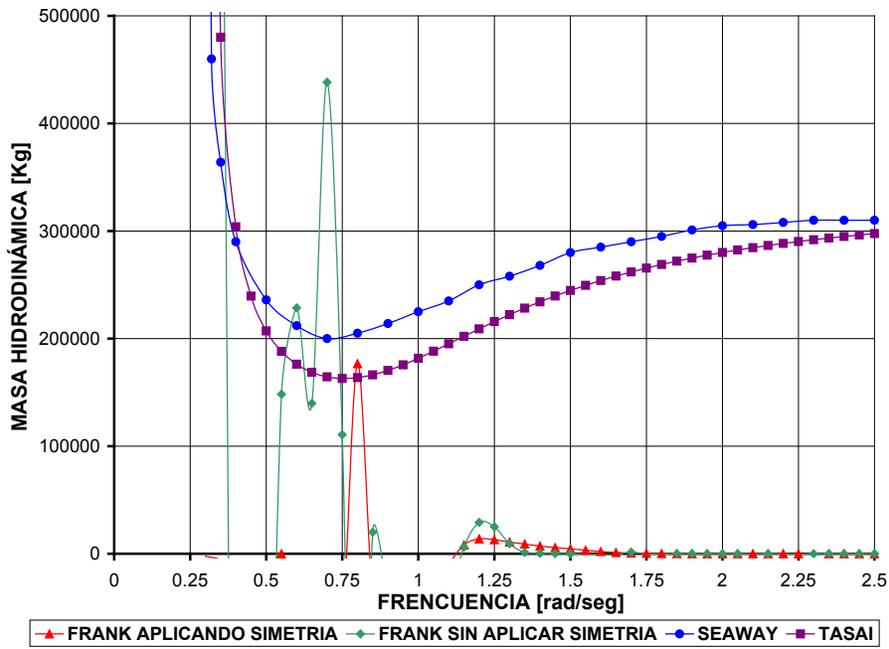


Figura 4.23. Comparación del coeficiente de la masa hidrodinámica “ $M_{33}$ ”.

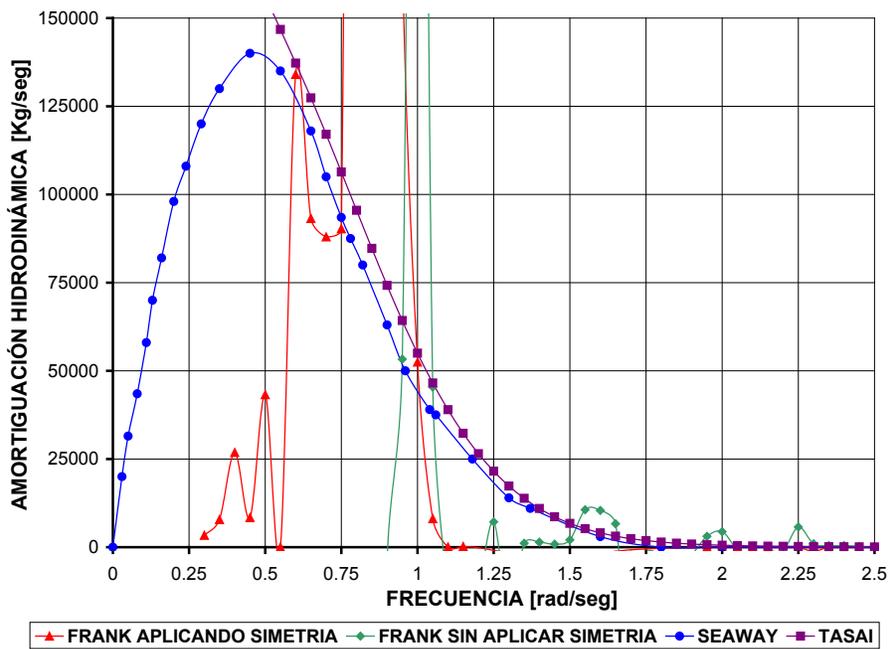


Figura 4.24. Comparación del coeficiente de la amortiguación hidrodinámica “ $N_{33}$ ”.

Las figuras 4.23 y 4.24 muestran que los resultados obtenidos por los programas computacionales basados en la Teoría Potencial de Frank desarrollados, no se aproximan a los resultados esperados. La curva roja (Frank aplicando simetría) se refiere a los resultados obtenidos haciendo uso del programa computacional, en el cual se siguieron todos los procedimientos sugeridos por Frank. El caso de la curva verde (Frank sin aplicar simetría), corresponde al programa computacional realizado partiendo de la función potencial establecida por Frank, donde se utilizaron métodos alternativos desarrollados para la determinación de los términos requeridos en la evaluación de los coeficientes hidrodinámicos (ver Apéndice C). La curva morada, muestra los resultados obtenidos mediante el programa basado en la Teoría Potencial de Tasai, el cual si se pudo validar. Por último, la curva azul (SEAWAY) representa resultados publicados en el texto “*Offshore Hydromechanics*” por Journée, J.M.J. y Massie, W.W.

## CAPÍTULO V

### 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### 5.1 Conclusiones

- La Transformación de Lewis en aquellos casos donde las geometrías son suaves, es el Método de Transformación Conforme más recomendado, debido a lo práctico que resulta. En cambio, cuando se analizan geometrías que poseen curvaturas pronunciadas, vértices o irregularidades, este método no es el más recomendable.
- El programa computacional basado en la Teoría Potencial de Tasai no es satisfactorio en la determinación de los coeficientes hidrodinámicos para bajas frecuencias.
- Para bajas frecuencias, los términos “ $L5$ ” y “ $K5$ ” calculados por el Método de Frank (series de potencia infinita) y por distintos procedimientos numéricos, presentan una desviación significativa. Para frecuencias altas, el Método de Frank no presenta desviaciones con los métodos numéricos, es por ello que se pueden utilizar sin problema aproximaciones por series de potencia.
- El programa computacional basado en la Teoría Potencial de Frank no es satisfactorio en la determinación de los coeficientes hidrodinámicos para bajas frecuencias. A pesar de todas las validaciones, verificaciones

y comparaciones realizadas, no se logró reproducir completamente la función potencial de Frank, aun cuando se calcularon correctamente los coeficientes de influencia y se siguieron todos los principios teóricos de dicha teoría.

## 5.2 Recomendaciones

- Para mejorar los resultados de los coeficientes hidrodinámicos del programa computacional basado en la Teoría Potencial de Tasai, se sugiere utilizar Métodos de Transformación Conforme de mayor orden ( $N > 2$ ).
- Para el caso particular de bajas frecuencias, es conveniente investigar otras teorías para el cálculo de los coeficientes hidrodinámicos, con la finalidad de obtener resultados válidos, ya que el método de Frank y el de Tasai no son recomendados en este caso.
- Realizar estudios posteriores detallados de la función potencial propuesta por Frank en su trabajo, donde se compruebe que esta se cumple en el dominio y con todas las condiciones de frontera (continuidad, condición de frontera del suelo marino, condición de frontera en la superficie libre y la condición de frontera cinemática de la superficie del cuerpo oscilante).
- Se sugiere utilizar los métodos propuestos por Frank para la determinación de los términos “ $L1$ ”, “ $L3$ ”, “ $L7$ ”, “ $K1$ ”, “ $K3$ ” y “ $K7$ ” y utilizar métodos alternativos para la evaluación de los términos “ $L5$ ” y “ $K5$ ”.

## BIBLIOGRAFÍA

### Referencias Bibliográficas

- [1] Çengel, Y.A. y Cimbala, J.M. (2006). Mecánica de Fluidos: Fundamentos y Aplicaciones. México: McGraw Hill Interamericana.
- [2] Corcoran, M. (2008). Diseño y Construcción de Estructuras Costa Afuera. Aberdeen Science & Technology Park, Campus One, Escocia, Reino Unido.
- [3] Faltinsen, O.M. (1990). Sea Loads On Ships And Offshore Structures. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido.
- [4] Frank, W. (1967). Oscillation of Cylinders in or below the Free Surface of Deep Fluids [Reporte técnico]. Naval Ship Research and Development Centre, Washington DC, USA. Documento técnico N°: 2375.
- [5] Journée, J. M. J. (1992). Strip Theory Algorithms [Reporte técnico]. Delft University of Technology, Ship Hydromechanics Laboratory, Holanda. Documento técnico N° 912.
- [6] Journée, J. M. J. (1993). Hydromechanic Coefficients for Calculating Time Domain Motions of Cutter Suction Dredges by Cummins Equations [Reporte técnico]. Delft University of Technology, Ship Hydromechanics Laboratory, Holanda. Documento técnico N° 968.

- [7] Journée, J. M. J. (2000). Quick Strip Theory Calculations in Ship Design [Reporte técnico]. Delft University of Technology, Ship Hydromechanics Laboratory, Holanda. Documento técnico N° 902.
- [8] Journée, J. M. J. (2001). Verification and Validation of Ship Motions Program SEAWAY [Reporte técnico]. Delft University of Technology, Ship Hydromechanics Laboratory, Holanda. Documento técnico N° 1213a. Disponible: [www.shipmotions.nl](http://www.shipmotions.nl). [Consulta: 2009, Octubre 25]
- [9] Journée, J.M.J. y Massie, W.W. (2001). Offshore Hydromechanics [Libro en línea]. Delft University of Tehnology, Ship Hydromechanics Laboratory, Holanda. Disponible: [www.shipmotions.nl](http://www.shipmotions.nl). [Consulta: 2009, Octubre 13]
- [10] Journée, J.M.J., Adegeest, L.J.M. (2003). Theoretical Manual of Strip Theory Program “SEAWAY for Windows” [Libro en línea]. Delft University of Tehnology, Ship Hydromechanics Laboratory, Holanda. Disponible: [www.shipmotions.nl](http://www.shipmotions.nl). [Consulta: 2009, Octubre 30]
- [11] Mott, R. (2006). Mecánica de Fluidos Aplicada (6ta ed.). México: Pearson Prentice Hall.
- [12] Potter, M.C., Wiggert, D.C. (2003). Mecánica de Fluidos (3era ed.). México: International Thomson Editores, S.A.
- [13] Ramos, J. y Guedes C. (1996). On the Assessment of Hydrodynamic Coefficients of Cylinders in Heaving. Ocean Engineering, Vol. 24, N° 8, Unit of Marine Technology engineering, Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal, p 743-763

- [14] Streeter, V. (1999). *Mecánica de los Fluidos* (9na ed.). México: McGraw Hill Interamericana.
- [15] Tasai, F. (1959). On the Damping Force and Added Mass of Ships Heaving and Pitching [Reporte técnico]. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University, Japan. Vol. VII. Documento técnico N° 26.
- [16] Tasai F. (1960). Formula for Calculating Hydrodynamic Force on a Cylinder Heaving in the Free Surface [Reporte técnico]. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University, Japón. Vol. VIII. Documento técnico N° 31.
- [17] Tasai F. (1961). Hydrodynamic Force and Moment Produced by Swaying and Rolling Oscillation of Cylinders on the Free Surface [Reporte técnico]. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University, Japón. Vol. IX. Documento técnico N° 35.
- [18] Tasai, F. (1965). Ship Motions in Beam Waves [Reporte técnico]. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University, Japón. Vol. XIII, Documento técnico N° 45.
- [19] Tasai, F. (1969). Improvements in the Theory of Ship Motions in Longitudinal Waves. In Proceedings 12th I.T.T.C.
- [20] Ursell, F. (1949). On the Heaving Motion of a Circular Cylinder on the Surface of a Fluid. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. II.

- [21] Wehausen, J.V. y Laitone, E.V. Surface Waves. Handbuch der Physik, edited by S. Fluegge, Vol. 9, Fluid Dynamics 3, Springer Verlag, Berlín, Alemania, p. 446–778.

### Referencias de Internet

- [22] Advanced Technology Program [Página en Internet]. National Institute of Standards and Technology, Estados Unidos. Disponible: <http://www.atp.nist.gov/index.html>. [Consulta: 2009, Octubre 2]
- [23] Cronus Technology, Inc [Página en Internet]. Cronus Technology Inc, Houston, Estados Unidos. Disponible: <http://www.pagiticas.com/cronus/>. [Consulta: 2009, Septiembre 18]
- [24] Engineering procurement construction installation [Página en Internet]. J. Ray McDermott, Houston, Texas, Estados Unidos. Disponible: <http://www.jraymcdermott.com>. [Consulta: 2009, Octubre 15]
- [25] Moss Maritime: a leader in marine technology [Página en Internet]. Eni Saipem Company, Noruega. Disponible: <http://www.mossw.com/mossmaritime/>. [Consulta: 2009, Septiembre 7]
- [26] Seadrill: setting the standard in drilling [Página en Internet]. Seadrill Company, Oslo, Noruega. Disponible: <http://www.seadrill.com/>. [Consulta: 2009, Octubre 13]

- [27] Sembcorp Marine [Página en Internet]. Tanjong Kling Rd, Boon Lay, Singapur. Disponible: <http://www.sembcorpmarine.com.sg/>. [Consulta: 2009, Octubre 1]
- [28] Trelleborg Selaing Solutions: Your Partner for sealing technology [Página en Internet]. Trelleborg Group, Escandinavia, Noruega. Disponible: <http://www.tss.trelleborg.com/com/www/en/homepage.jsp>. [Consulta: 2009, Octubre 6]
- [29] Us Warships [Página en Internet]. GlobalSecurity.org, Washington, Estados Unidos. Disponible: <http://www.globalsecurity.org/military/systems/ship/>. [Consulta: 2009, Septiembre 15]
- [30] Worldwide Firefighting, Well Control, Engineering & Training [Página en Internet]. Wild Well Control Inc, Houston, Estados Unidos. Disponible: <http://wwcweb.wildwell.com/>. [Consulta: 2009, Septiembre 25]

## APÉNDICES

### APÉNDICE A

#### A.1 Elementos principales del flujo potencial

##### A.1.1 Flujo uniforme

El flujo de bloque de construcción más simple en el que se puede pensar es la corriente uniforme de flujo que se mueve con velocidad constante  $V_\infty$  en la dirección  $x$ . La solución más simple de la ecuación de Laplace (ecuación A.12) es: [14]

$$\Phi = V_\infty \cdot x \tag{A.1}$$

La segunda derivada con respecto a  $x, y, z$  de la ecuación A.1 es nula, es por esto que cumple con la ecuación de Laplace. El significado físico de esta ecuación es un flujo uniforme paralelo a la dirección  $x$ , debido a que sólo existe una componente de la velocidad  $v_x(x, y, z) = V_\infty$ . Como se muestra en la figura A.1, este flujo tiene una serie de líneas de corriente igualmente espaciadas paralelas al eje  $x$ . [1]

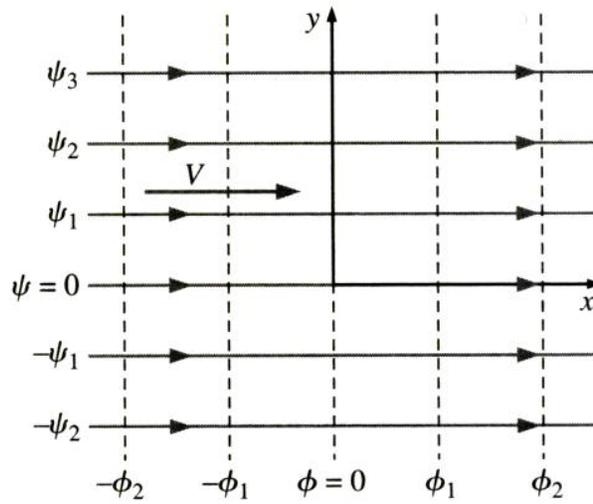


Figura A.1. Flujo uniforme.

Tomado de “Mecánica de Fluidos. Fundamentos y Aplicaciones” de Yunus Cengel y John Cimbala.

Para un flujo uniforme en la dirección positiva del eje  $x$ , se tienen: [1]

$$\Phi = +V_{\infty} \cdot x \tag{A.2}$$

$$\Psi = +V_{\infty} \cdot y \tag{A.3}$$

Para un flujo uniforme en la dirección negativa del eje  $x$ , son válidas las siguientes ecuaciones: [1]

$$\Phi = -V_{\infty} \cdot x \tag{A.4}$$

$$\Psi = -V_{\infty} \cdot y \tag{A.5}$$

### A.1.2 Fuente

Una fuente es un punto del cual el fluido emerge y fluye de manera uniforme hacia fuera en todas direcciones, generalmente se representa como un pequeño círculo que contiene las letras SO (letras derivadas del nombre en inglés “source”) o un signo “+”, esto se muestra en la figura A.2. [1], [9]

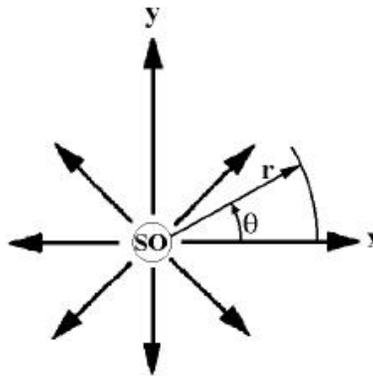


Figura A.2. Fuente.

Tomado de “*Offshore Hydromechanics*” por J.M.J. Journée y W.W. Massie”

La función potencial y la función de corriente de este tipo de elemento en coordenadas cartesianas y polares son las siguientes: [1]

$$\begin{aligned}\Phi &= +\frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \\ \Phi &= +\frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \ln(r)\end{aligned}\tag{A.6}$$

$$\begin{aligned}\Psi &= +\frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \Psi &= +\frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \theta\end{aligned}\tag{A.7}$$

### A.1.3 Sumidero

Un sumidero es un punto que a diferencia de la fuente, el fluido fluye de manera uniforme hacia adentro en todas las direcciones, y generalmente se representa como un pequeño círculo que contiene las letras SK (letras derivadas del nombre en inglés “*sink*”) o un signo menos, esto se muestra en la figura A.3. [1], [9]

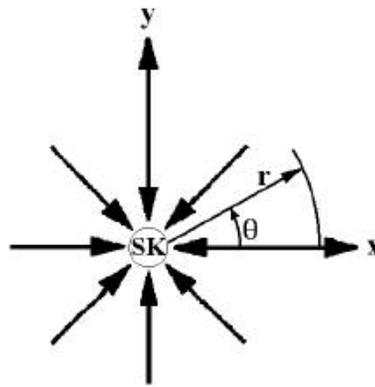


Figura A.3. Sumidero.

Tomado de “*Offshore Hydromechanics*” por J.M.J. Journée y W.W. Massie”

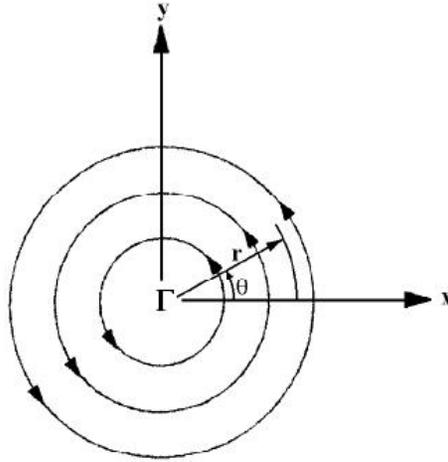
La función potencial y la función de corriente de este tipo de elemento en coordenadas cartesianas y polares son las siguientes: [1]

$$\begin{aligned}\Phi &= -\frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \\ \Phi &= -\frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \ln(r)\end{aligned}\tag{A.8}$$

$$\begin{aligned}\Psi &= -\frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \Psi &= -\frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \theta\end{aligned}\tag{A.9}$$

### A.1.4 Circulación o vórtice

El vórtice o circulación es un flujo tangencial alrededor de un punto tal y como se muestra en la figura A.4.



**Figura A.4. Circulación o vórtice.**

Tomado de “*Offshore Hydromechanics*” por J.M.J. Journée y W.W. Massie”

La función potencial y la función de corriente de un vórtice o circulación en sentido antihorario en coordenadas cartesianas y polares son las siguientes: [1]

$$\begin{aligned}\Phi &= +\frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \Phi &= +\frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \theta\end{aligned}\tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}\Psi &= -\frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \\ \Psi &= -\frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \ln(r)\end{aligned}\tag{A.11}$$

En las ecuaciones A.10 y A.11, el símbolo “ $\Gamma$ ” representa la intensidad del vórtice. De acuerdo con la convención habitual en matemática, “ $\Gamma$ ” positiva representa un vórtice en sentido antihorario, mientras que “ $\Gamma$ ” negativa representa un vórtice en sentido horario. La intensidad del vórtice se puede calcular de la siguiente manera: [1]

$$\Gamma = \oint v_{\theta} \cdot ds = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v_{\theta} \cdot \theta = cte \quad (\text{A.12})$$

### A.1.5 Superposición de los elementos principales del flujo potencial

Aunque cada uno de los patrones de flujo potencial explicados anteriormente puedan ser visualizados fácilmente, la mayoría de los problemas de patrones de flujos reales son mucho más complejos. Una de las ventajas de la Teoría del Flujo Potencial es el hecho que se puede recurrir al Principio de Superposición debido a su linealidad. A continuación se explicaran los casos más comunes de superposiciones. [9]

#### A.1.5.1 Sumidero en flujo uniforme

Para obtener la función de corriente de este patrón de flujo potencial, simplemente se suman los resultados de las ecuaciones A.5 y A.9, obteniendo como resultado un flujo uniforme de derecha a izquierda mezclado con un sumidero, es decir: [9]

$$\Psi = -\frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - V_{\infty} \cdot y \quad (\text{A.13})$$

### A.1.5.2 Fuente en flujo uniforme

Al igual que en el caso anterior, aplicando el principio de superposición con las ecuaciones A.3 y A.7, se obtiene un flujo uniforme de izquierda a derecha mezclado con una fuente, es decir: [9]

$$\Psi = +\frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + V_{\infty} \cdot y \quad (\text{A.14})$$

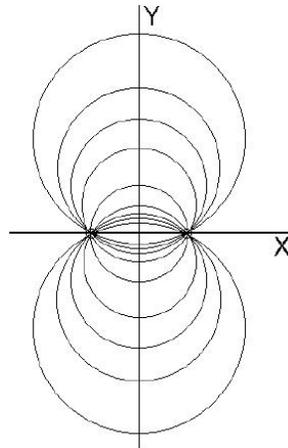
### A.1.5.3 Fuente y sumidero

Si consideramos una fuente ubicada al lado de un sumidero con una intensidad igual pero opuesta, separados por una distancia  $2s$ , usando el principio de superposición con las ecuaciones A.7 y A.9, se obtiene: [9]

$$\Psi = \frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot y \cdot s}{x^2 + y^2 - s^2}\right)$$

$$\Psi = \frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \theta_1 - \frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \theta_2 = cte \quad (\text{A.15})$$

Las líneas de corriente son una serie de círculos centrados en el eje  $y$ , los cuales pasan todos por la fuente y el sumidero, tal y como se observa en la figura A.5.



**Figura A.5. Fuente y sumidero separados por una distancia 2s.**

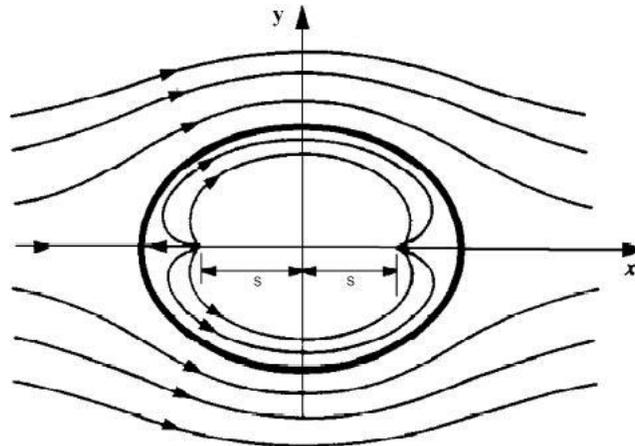
Tomado de “*Offshore Hydromechanics*” por J.M.J. Journée y W.W. Massie”

#### A.1.5.4 Fuente y sumidero en flujo uniforme

La función de corriente para este caso, se obtiene superponiendo las ecuaciones A.3 y A.15: [9]

$$\Psi = \frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \arctan\left(\frac{2 \cdot y \cdot s}{x^2 + y^2 - s^2}\right) + V_{\infty} \cdot y \tag{A.16}$$

Las líneas de corriente que se obtienen se muestran en la figura A.6, donde la elipse que está dibujada con un mayor grosor, es una línea de corriente, por definición no existe flujo a través de esta. A dicha elipse también se le conoce con el nombre de Óvalo de Rankine. El flujo desde la fuente hasta el sumidero se queda dentro de la elipse, y la corriente uniforme se queda por fuera de la elipse rodeándola. Un posible significado físico de este caso podría ser lo que se obtiene de sustituir la elipse por un objeto impermeable. [9], [14]



**Figura A.6. Fuente y sumidero separados por una distancia  $2s$  en flujo uniforme (Óvalo de Rankine).**

Tomado de “*Offshore Hydromechanics*” por J.M.J. Journée y W.W. Massie”

#### A.1.5.5 Doblete o dipolo

El dipolo o doblete se obtiene cuando la distancia que existe entre una fuente y un sumidero se tiende a cero. Tomando la ecuación A.16 y aplicando lo mencionado anteriormente, se tiene: [9]

$$\Psi = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{Q}{2 \cdot \pi} \cdot \arctan \left( \frac{2 \cdot y \cdot s}{x^2 + y^2 - s^2} \right) \right) \quad (\text{A.17})$$

De la ecuación A.17 se observa que el argumento del arco tangente tiende a un valor muy pequeño. Por definición el arco tangente de un argumento pequeño es igual al argumento, es decir  $\lim_{x \rightarrow 0} (\arctan(x)) = x$ . Aplicando esta propiedad del arco tangente en la ecuación A.17:

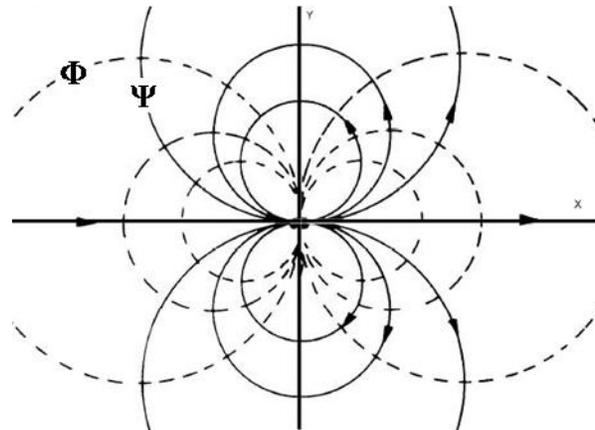
$$\Psi = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{Q}{\pi} \cdot s \cdot \left( \frac{y}{x^2 + y^2 - s^2} \right) \right) \quad (\text{A.18})$$

De la ecuación A.18, el término “ $\frac{Q}{\pi} \cdot s$ ” se llama intensidad del doblete o dipolo y se denota por la letra griega “ $\mu_D$ ”. La función de corriente y la función potencial del doblete o dipolo tanto en coordenadas cartesianas como polares son: [9]

$$\begin{aligned}\Phi &= \mu_D \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \Phi &= \mu_D \cdot \frac{\text{sen}(\theta)}{r}\end{aligned}\tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}\Psi &= \mu_D \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \Psi &= \mu_D \cdot \frac{\text{cos}(\theta)}{r}\end{aligned}\tag{A.20}$$

En la figura A.7, se muestra tanto las líneas de corriente como las líneas potenciales (líneas punteadas), las cuales son círculos centrados en el eje  $y$  y el eje  $x$  respectivamente, pasando todos estos por el origen.



**Figura A.7. Doblete o dipolo.**

Tomado de “*Offshore Hydromechanics*” por J.M.J. Journée y W.W. Massie”

A.1.5.6 Doblete o dipolo en flujo uniforme

Al superponer las ecuaciones A.5 y A.20, se obtiene la función de corriente de un dipolo o doblete en flujo uniforme, la cual es: [1]

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{\mu_D \cdot y}{x^2 + y^2} - V_\infty \cdot y \\ \Psi &= \frac{\mu_D \cdot \text{sen}(\theta)}{r} - V_\infty \cdot r \cdot \text{sen}(\theta)\end{aligned}\tag{A.21}$$

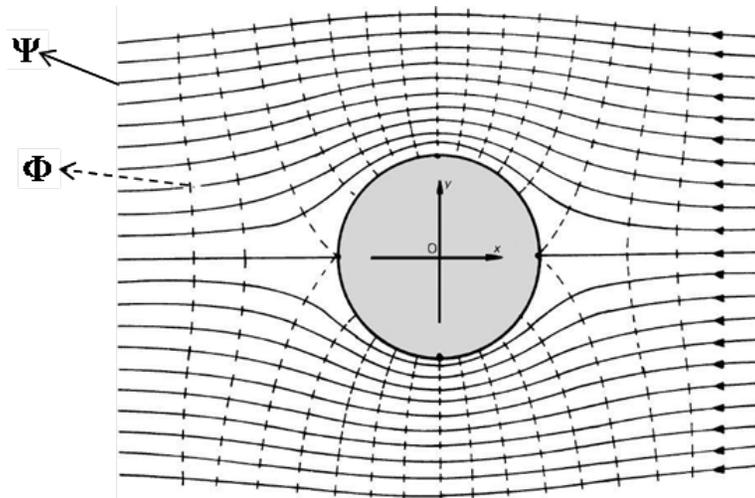
Cuando  $\Psi = 0$  en la ecuación A.21, se obtiene lo siguiente: [1]

$$\Psi = y \cdot \left[ \frac{\mu_D}{x^2 + y^2} - V_\infty \right] = 0\tag{A.22}$$

La ecuación A.22 implica dos cosas, la primera que  $y = 0$ , esto quiere decir que el eje  $x$  es una línea de corriente. Lo segundo es que  $\frac{\mu_D}{x^2 + y^2} - V_\infty = 0$ , reordenando este término se obtiene: [1]

$$x^2 + y^2 = \frac{\mu_D}{V_\infty}\tag{A.23}$$

La ecuación A.23 representa la ecuación de una circunferencia, donde el radio  $R = \sqrt{\frac{\mu_D}{V_\infty}}$ . Estos resultados se muestran en la figura A.8, donde están representadas las líneas de corriente y las líneas potenciales (líneas punteadas). [1]



**Figura A.8. Doblete o dipolo en flujo uniforme.**

Tomado de “*Offshore Hydromechanics*” por J.M.J. Journée y W.W. Massie”

## APÉNDICE B

### B.1 Algoritmo para el cálculo de los coeficientes hidrodinámicos según la Teoría Potencial de Tasai

**Paso 1.** Definir las fórmulas de las coordenadas  $x_0$  y  $y_0$ , estas coordenadas representan la aproximación de la parte húmeda del casco del barco usando la Transformación de Lewis

$$x_0(\theta) = ((1 + a_1) \cdot \cos \theta + a_3 \cdot \cos(3 \cdot \theta)) \cdot M_S$$

$$y_0(\theta) = ((1 - a_1) \cdot \cos \theta + a_3 \cdot \cos(3 \cdot \theta)) \cdot M_S$$

**Paso 2.** Definir la fórmula de la función auxiliar  $h$

$$h(\theta) = \frac{2 \cdot M_S \cdot ((1 + a_1) \cdot \text{sen} \theta - a_3 \cdot \text{sen}(3 \cdot \theta))}{B_S}$$

**Paso 3.** Definir el vector de  $M$  valores que representa la función  $\psi_{A0_{2m}}$ , donde se recomienda utilizar un valor entero entre  $3 \leq M \leq 10$

$$\psi_{A0_{2m}}(\theta) = \text{sen}(2m \cdot \theta) - \frac{\omega^2 \cdot M_S}{g} \cdot \sum_{n=0}^{2m} \left\{ (-1)^n \cdot \left( \frac{2n-1}{2m+2n-1} \right) \cdot a_{2n-1} \cdot \text{sen}((2m+2n-1) \cdot \theta) \right\}$$

**Paso 4.** Definir la fórmula de la función  $\psi_{B0_c}$

$$\psi_{B0_c}(\theta) = \pi \cdot e^{-v \cdot y_0} \cdot \text{sen}(v \cdot |x_0|)$$

**Paso 5.** Definir el vector de  $M$  valores que representa  $f_{2m}$

$$f_{2m}(\theta) = -\psi_{A0_{2m}}(\theta) + \psi_{A0_{2m}}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot h(\theta)$$

**Paso 6.** Definir la matriz de dimensión  $M \times M$ , de los coeficientes de la serie  $P_{2m}$ , la cual es idéntica a la matriz de los coeficientes de la serie  $Q_{2m}$

$$A = \begin{bmatrix} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_2(\theta) \cdot f_2(\theta) \cdot d\theta & \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_4(\theta) \cdot f_2(\theta) \cdot d\theta & \cdots & \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{2m}(\theta) \cdot f_2(\theta) \cdot d\theta \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_2(\theta) \cdot f_4(\theta) \cdot d\theta & \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_4(\theta) \cdot f_4(\theta) \cdot d\theta & \cdots & \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{2m}(\theta) \cdot f_4(\theta) \cdot d\theta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_2(\theta) \cdot f_{2m}(\theta) \cdot d\theta & \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_4(\theta) \cdot f_{2m}(\theta) \cdot d\theta & \cdots & \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{2m}(\theta) \cdot f_{2m}(\theta) \cdot d\theta \end{bmatrix}$$

**Paso 7.** Definir el vector de  $M$  valores  $B_p$

$$B_p = \begin{bmatrix} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \psi_{B0_c}(\theta) - h(\theta) \cdot \psi_{B0_c}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \cdot f_2(\theta) \cdot d\theta \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \psi_{B0_c}(\theta) - h(\theta) \cdot \psi_{B0_c}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \cdot f_4(\theta) \cdot d\theta \\ \vdots \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \psi_{B0_c}(\theta) - h(\theta) \cdot \psi_{B0_c}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \cdot f_{2m}(\theta) \cdot d\theta \end{bmatrix}$$

**Paso 8.** Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente para determinar los  $M$  valores del vector  $P_{2m}$

$$A \cdot P_{2m} = B_p$$

**Paso 9.** Definir el vector de  $M$  valores  $P_{2m}$

$$P_{2m} = \begin{bmatrix} P_2 \\ P_4 \\ \vdots \\ P_{2M} \end{bmatrix}$$

**Paso 10.** Definir la fórmula de la función  $\phi_{B0c}$

$$\phi_{B0c}(\theta) = \pi \cdot e^{-v \cdot y_0} \cdot \cos(v \cdot x_0)$$

**Paso 11.** Determinar el valor de  $N_0$

$$\begin{aligned} N_0 = & -\frac{2 \cdot M_S}{B_S} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi_{B0c}(\theta) \cdot \sum_{n=0}^2 \left( (-1)^n \cdot (2n-1) \cdot a_{2n-1} \cdot \cos((2n-1) \cdot \theta) \right) \cdot d\theta \\ & - \frac{2 \cdot M_S}{B_S} \cdot \sum_{m=1}^{10} (-1)^m \cdot P_{2m} \cdot \sum_{n=0}^2 \left( \frac{(2n-1)^2}{(2m)^2 - (2n-1)^2} \cdot a_{2n-1} \right) \\ & + \frac{\pi \cdot \omega^2 \cdot M_S^2}{2 \cdot g \cdot B_S} \cdot \left( P_2 + \sum_{m=1}^{10} \left( (-1)^m \cdot P_{2m} \cdot \sum_{n=0}^{2-m} \left( (2n-1) \cdot a_{2n-1} \cdot a_{2m+2n-1} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

**Paso 12.** Definir la fórmula de la función  $\psi_{B0s}$

$$\psi_{B0s}(\theta) = -\pi \cdot e^{-v \cdot y_0} \cdot \cos(v \cdot x_0) + \int_0^{\infty} \frac{v \cdot \cos(k \cdot y_0) + k \cdot \text{sen}(k \cdot y_0)}{k^2 + v^2} \cdot e^{-k \cdot |x_0|} \cdot dk$$

**Paso 13.** Definir el vector de  $M$  valores  $B_Q$

$$B_Q = \begin{bmatrix} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \psi_{B_{0_s}}(\theta) - h(\theta) \cdot \psi_{B_{0_s}}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \cdot f_2(\theta) \cdot d\theta \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \psi_{B_{0_s}}(\theta) - h(\theta) \cdot \psi_{B_{0_s}}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \cdot f_4(\theta) \cdot d\theta \\ \vdots \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \psi_{B_{0_s}}(\theta) - h(\theta) \cdot \psi_{B_{0_s}}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \cdot f_{2m}(\theta) \cdot d\theta \end{bmatrix}$$

**Paso 12.** Resolver el sistema de ecuaciones lineales siguiente para determinar los  $M$  valores del vector  $Q_{2m}$

$$A \cdot Q_{2m} = B_Q$$

**Paso 13.** Definir el vector de  $M$  valores  $Q_{2m}$

$$Q_{2m} = \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_4 \\ \vdots \\ Q_{2M} \end{bmatrix}$$

**Paso 14.** Definir la fórmula de la función  $\phi_{B_{0_s}}$

$$\phi_{B_{0_s}}(\theta) = \pi \cdot e^{-v \cdot y_0} \cdot \text{sen}(v \cdot |x_0|) + \int_0^{\infty} \frac{v \cdot \text{sen}(k \cdot y_0) - k \cdot \cos(k \cdot y_0)}{k^2 + v^2} \cdot e^{-k \cdot |x_0|} \cdot dk$$

**Paso 15.** Determinar el valor de  $M_0$

$$M_0 = -\frac{2 \cdot M_S}{B_S} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi_{B_{0S}}(\theta) \cdot \sum_{n=0}^2 \left( (-1)^n \cdot (2n-1) \cdot a_{2n-1} \cdot \cos((2n-1) \cdot \theta) \right) \cdot d\theta$$

$$- \frac{2 \cdot M_S}{B_S} \cdot \sum_{m=1}^{10} (-1)^m \cdot Q_{2m} \cdot \sum_{n=0}^2 \left( \frac{(2n-1)^2}{(2m)^2 - (2n-1)^2} \cdot a_{2n-1} \right)$$

$$+ \frac{\pi \cdot \omega^2 \cdot M_S^2}{2 \cdot g \cdot B_S} \cdot \left( Q_2 + \sum_{m=1}^{10} \left( (-1)^m \cdot Q_{2m} \cdot \sum_{n=0}^{2-m} \left( (2n-1) \cdot a_{2n-1} \cdot a_{2m+2n-1} \right) \right) \right)$$

**Paso 16.** Determinar el coeficiente de masa hidrodinámica  $M_{33}$

$$M_{33} = \left( \frac{\rho \cdot B_S^2}{2} \right) \cdot \left( \frac{M_0 \cdot B_0 + N_0 \cdot A_0}{A_0^2 + B_0^2} \right)$$

**Paso 17.** Determinar el coeficiente de amortiguación hidrodinámica  $N_{33}$

$$N_{33} = \left( \frac{\rho \cdot B_S^2}{2} \right) \cdot \left( \frac{M_0 \cdot A_0 - N_0 \cdot B_0}{A_0^2 + B_0^2} \right) \cdot \omega$$

### B.1.1 Integrales impropias

A continuación se presentan los métodos numéricos utilizados para la evaluación de las siguientes integrales impropias.

$$\int_0^{\infty} \frac{v \cdot \cos(k \cdot y_0) - k \cdot \text{sen}(k \cdot y_0)}{k^2 + v^2} \cdot e^{-k|x_0|} \cdot dk$$

$$\int_0^{\infty} \frac{v \cdot \text{sen}(k \cdot y_0) - k \cdot \cos(k \cdot y_0)}{k^2 + v^2} \cdot e^{-k|x_0|} \cdot dk$$

B.1.1.1 Aproximación por series de potencia

$$\int_0^{\infty} \frac{\nu \cdot \cos(k \cdot y_0) + k \cdot \text{sen}(k \cdot y_0)}{k^2 + \nu^2} \cdot e^{-k|x_0|} \cdot dk \approx (Q \cdot \text{sen}(\nu \cdot |x_0|) - (S - \pi) \cdot \cos(\nu \cdot x_0)) \cdot e^{-\nu \cdot y_0}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\nu \cdot \text{sen}(k \cdot y_0) - k \cdot \cos(k \cdot y_0)}{k^2 + \nu^2} \cdot e^{-k|x_0|} \cdot dk \approx (Q \cdot \cos(\nu \cdot x_0) + (S - \pi) \cdot \text{sen}(\nu \cdot |x_0|)) \cdot e^{-\nu \cdot y_0}$$

- $Q = \gamma + \ln\left(\nu \cdot \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \{p_n \cdot \cos(n \cdot \beta)\}$
- $S = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} \{p_n \cdot \text{sen}(n \cdot \beta)\}$
- $\beta = \arctan\left(\frac{|x_0|}{y_0}\right)$
- $p_n = \frac{\nu \cdot \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{n \cdot n!}$
- $\gamma = 0.577215665$       **Constante Euler-Mascheroni**

B.1.1.2 Aproximación numérica

$$\int_0^{\infty} \frac{\nu \cdot \cos(k \cdot y_0) - k \cdot \text{sen}(k \cdot y_0)}{k^2 + \nu^2} \cdot e^{-k|x_0|} \cdot dk = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\nu \cdot \cos(k \cdot y_0) - k \cdot \text{sen}(k \cdot y_0)}{k^2 + \nu^2} \cdot e^{-k|x_0|} \cdot dk$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\nu \cdot \text{sen}(k \cdot y_0) - k \cdot \cos(k \cdot y_0)}{k^2 + \nu^2} \cdot e^{-k|x_0|} \cdot dk = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\nu \cdot \text{sen}(k \cdot y_0) - k \cdot \cos(k \cdot y_0)}{k^2 + \nu^2} \cdot e^{-k|x_0|} \cdot dk$$

El argumento de las integrales anteriores es una función que converge a cero rápidamente, por lo que para calcular estas integrales se sustituye el valor del infinito por un valor numérico no muy grande.

## APÉNDICE C

### C.1 Algoritmo para el cálculo de los coeficientes hidrodinámicos según la Teoría Potencial de Frank

**Paso1.** Definir los vectores directores  $n_i^{(m)}$  relacionados con cada tipo de movimiento.

$$n_i^{(2)} = -\text{sen}(\alpha_i) \quad \text{desplazamiento en la dirección del eje y (sway).}$$

$$n_i^{(3)} = \cos(\alpha_i) \quad \text{desplazamiento en la dirección del eje z (heave).}$$

$$n_i^{(4)} = (y_i - y_0) \cdot \text{sen}(\alpha_i) + x_i \cdot \cos(\alpha_i) \quad \text{rotación alrededor del eje x (roll).}$$

**Paso 2.** Definir la fórmula del coeficiente de influencia  $I_{ij}^{(m)}$ .

$$I_{ij}^{(m)} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \left( (L_1 - L_3 + 2 \cdot L_5) - (-1)^m \cdot (L_2 - L_4 + 2 \cdot L_6) \right)$$

$$L_1 = \text{Re} \left\{ \left( \vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \right) \cdot \left( \int_{s_j} \ln(z - \zeta) \cdot ds \right) \right\}_{z=z_i}$$

$$L_2 = \text{Re} \left\{ \left( \vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \right) \cdot \left( \int_{s_{-j}} \ln(z + \bar{\zeta}) \cdot ds \right) \right\}_{z=z_i}$$

$$L_3 = \text{Re} \left\{ \left( \vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \right) \cdot \left( \int_{s_j} \ln(z - \bar{\zeta}) \cdot ds \right) \right\}_{z=z_i}$$

$$L_4 = \operatorname{Re} \left\{ \left( \vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \right) \cdot \left( \int_{s_j} \ln(z + \zeta) \cdot ds \right) \right\}_{z=z_i}$$

$$L_5 = \operatorname{Re} \left\{ \left( \vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \right) \cdot \left( \int_{s_j} PV \int_0^\infty \frac{e^{-i \cdot k \cdot (z_i - \bar{\zeta})}}{\nu - k} \cdot dk \cdot ds \right) \right\}_{z=z_i}$$

$$L_6 = \operatorname{Re} \left\{ \left( \vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \right) \cdot \left( \int_{s_j} ds \cdot PV \int_0^\infty \frac{e^{-i \cdot k \cdot (z_i + \zeta)}}{\nu - k} \cdot dk \right) \right\}_{z=z_i}$$

**Paso 3.** Definir la fórmula del coeficiente de influencia  $J_{ij}^{(m)}$ .

$$J_{ij}^{(m)} = (L_7) - (-1)^m \cdot (L_8)$$

$$L_7 = \operatorname{Re} \left\{ \left( \vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \right) \cdot \left( \int_{s_j} e^{-i \cdot \nu \cdot (z - \bar{\zeta})} \cdot ds \right) \right\}_{z=z_i}$$

$$L_8 = \operatorname{Re} \left\{ \left( \vec{n}_i \cdot \vec{\nabla} \right) \cdot \left( \int_{s_j} e^{-i \cdot \nu \cdot (z + \zeta)} \cdot ds \right) \right\}_{z=z_i}$$

**Paso 4.** Determinar los coeficientes  $Q_j^{(m)}$  y  $Q_{N+j}^{(m)}$  usando los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$\begin{aligned} + \sum_{j=1}^N \{ Q_j^{(m)} \cdot I_{ij}^{(m)} \} + \sum_{j=1}^N \{ Q_{N+j}^{(m)} \cdot J_{ij}^{(m)} \} &= 0 & i = 1, 2, \dots, N \\ - \sum_{j=1}^N \{ Q_j^{(m)} \cdot J_{ij}^{(m)} \} + \sum_{j=1}^N \{ Q_{N+j}^{(m)} \cdot I_{ij}^{(m)} \} &= \omega \cdot n_i^{(m)} & i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

**Paso 5.** Definir la fórmula del término de la presión hidrodinámica en fase con la velocidad.

$$p_v^{(m)} = \frac{\omega \cdot \rho}{2 \cdot \pi} \cdot \sum_{j=1}^N \left\{ Q_j^{(m)} \cdot (K_1 - K_3 + 2 \cdot K_5 - (-1)^m \cdot (K_2 - K_4 + 2 \cdot K_6)) \right\}$$

$$K_1 = \operatorname{Re} \left\{ \int_{s_j} \ln(z_i - \zeta) \cdot ds \right\} \qquad K_2 = \operatorname{Re} \left\{ \int_{s_{-j}} \ln(z_i + \bar{\zeta}) \cdot ds \right\}$$

$$K_3 = \operatorname{Re} \left\{ \int_{s_j} \ln(z_i - \bar{\zeta}) \cdot ds \right\} \qquad K_4 = \operatorname{Re} \left\{ \int_{s_{-j}} \ln(z_i + \zeta) \cdot ds \right\}$$

$$K_5 = \operatorname{Re} \left\{ \int_{s_j} ds \cdot PV \int_0^{\infty} \frac{e^{-i \cdot k \cdot (z_i - \bar{\zeta})}}{\nu - k} \cdot dk \right\} \qquad K_6 = \operatorname{Re} \left\{ \int_{s_{-j}} ds \cdot PV \int_0^{\infty} \frac{e^{-i \cdot k \cdot (z_i + \zeta)}}{\nu - k} \cdot dk \right\}$$

**Paso 6.** Definir la fórmula del término de la presión hidrodinámica en fase con la aceleración.

$$p_a^{(m)} = \omega \cdot \rho \cdot \sum_{j=1}^N \left\{ Q_{N+j}^{(m)} \cdot (K_7 - (-1)^m \cdot K_8) \right\}$$

$$K_7 = \operatorname{Re} \left\{ \int_{s_j} e^{-i \cdot \nu \cdot (z_i - \bar{\zeta})} \cdot ds \right\} \qquad K_8 = \operatorname{Re} \left\{ \int_{s_{-j}} e^{-i \cdot \nu \cdot (z_i + \zeta)} \cdot ds \right\}$$

**Paso 7.** Calcular el coeficiente potencial de masa hidrodinámica  $M_{kj}$ .

$$M_{kj} = \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^N \left\{ p_a^{(m)} \cdot n_i^{(m)} \cdot |s_i| \right\}}{\omega^2}$$

**Paso 8.** Calcular el coeficiente potencial de amortiguación hidrodinámica  $N_{kj}$ .

$$N_{kj} = \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^N \left\{ p_v^{(m)} \cdot n_i^{(m)} \cdot |s_i| \right\}}{\omega}$$

### C.1.1 Aproximaciones numéricas para la obtención de los términos “L”

#### C.1.1.1 Término L1

$$L_1 = \text{sen}(\alpha_i - \alpha_j) \cdot \ln \left( \frac{\sqrt{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \eta_j)^2}}{\sqrt{(x_i - \xi_{j+1})^2 + (y_i - \eta_{j+1})^2}} \right) + \cos(\alpha_i - \alpha_j) \cdot \left( \begin{array}{c} \arctan \left( \frac{y_i - \eta_j}{x_i - \xi_j} \right) \\ - \arctan \left( \frac{y_i - \eta_{j+1}}{x_i - \xi_{j+1}} \right) \end{array} \right)$$

#### C.1.1.2 Término L2

$$L_2 = \text{sen}(\alpha_i + \alpha_j) \cdot \ln \left( \frac{\sqrt{(x_i + \xi_j)^2 + (y_i - \eta_j)^2}}{\sqrt{(x_i + \xi_{j+1})^2 + (y_i - \eta_{j+1})^2}} \right) + \cos(\alpha_i + \alpha_j) \cdot \left( \begin{array}{c} \arctan \left( \frac{y_i - \eta_j}{x_i + \xi_j} \right) \\ - \arctan \left( \frac{y_i - \eta_{j+1}}{x_i + \xi_{j+1}} \right) \end{array} \right)$$

#### C.1.1.3 Término L3

$$L_3 = \text{sen}(\alpha_i + \alpha_j) \cdot \ln \left( \frac{\sqrt{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i + \eta_j)^2}}{\sqrt{(x_i - \xi_{j+1})^2 + (y_i + \eta_{j+1})^2}} \right) + \cos(\alpha_i + \alpha_j) \cdot \left( \begin{array}{c} \arctan \left( \frac{y_i + \eta_j}{x_i - \xi_j} \right) \\ - \arctan \left( \frac{y_i + \eta_{j+1}}{x_i - \xi_{j+1}} \right) \end{array} \right)$$

#### C.1.1.4 Término L4

$$L_4 = \text{sen}(\alpha_i - \alpha_j) \cdot \ln \left( \frac{\sqrt{(x_i + \xi_j)^2 + (y_i + \eta_j)^2}}{\sqrt{(x_i + \xi_{j+1})^2 + (y_i + \eta_{j+1})^2}} \right) + \cos(\alpha_i - \alpha_j) \cdot \left( \begin{array}{c} \arctan \left( \frac{y_i + \eta_j}{x_i + \xi_j} \right) \\ - \arctan \left( \frac{y_i + \eta_{j+1}}{x_i + \xi_{j+1}} \right) \end{array} \right)$$

C.1.1.5 Término L5

$$L_5 = \text{sen}(\alpha_i + \alpha_j) \cdot \left( \begin{array}{l} PV \int_0^{\infty} \frac{e^{k(y_i + \eta_j)} \cdot \cos(k \cdot (x_i - \xi_j))}{v - k} \cdot dk \\ - PV \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^{k(y_i + \eta_{j+1})} \cdot \cos(k \cdot (x_i - \xi_{j+1}))}{v - k} \cdot dk \end{array} \right) \\ - \cos(\alpha_i + \alpha_j) \cdot \left( \begin{array}{l} PV \int_0^{\infty} \frac{e^{k(y_i + \eta_j)} \cdot \text{sen}(k \cdot (x_i - \xi_j))}{v - k} \cdot dk \\ - PV \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^{k(y_i + \eta_{j+1})} \cdot \text{sen}(k \cdot (x_i - \xi_{j+1}))}{v - k} \cdot dk \end{array} \right)$$

C.1.1.6 Término L6

$$L_6 = \text{sen}(\alpha_i - \alpha_j) \cdot \left( \begin{array}{l} PV \int_0^{\infty} \frac{e^{k(y_i + \eta_j)} \cdot \cos(k \cdot (x_i + \xi_j))}{v - k} \cdot dk \\ - PV \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^{k(y_i + \eta_{j+1})} \cdot \cos(k \cdot (x_i + \xi_{j+1}))}{v - k} \cdot dk \end{array} \right) \\ - \cos(\alpha_i - \alpha_j) \cdot \left( \begin{array}{l} PV \int_0^{\infty} \frac{e^{k(y_i + \eta_j)} \cdot \text{sen}(k \cdot (x_i + \xi_j))}{v - k} \cdot dk \\ - PV \cdot \int_0^{\infty} \frac{e^{k(y_i + \eta_{j+1})} \cdot \text{sen}(k \cdot (x_i + \xi_{j+1}))}{v - k} \cdot dk \end{array} \right)$$

C.1.1.7 Término L7

$$L_7 = \text{sen}(\alpha_i + \alpha_j) \cdot \left( e^{v(y_i + \eta_j)} \cdot \cos(v \cdot (x_i - \xi_j)) - e^{v(y_i + \eta_{j+1})} \cdot \cos(v \cdot (x_i - \xi_{j+1})) \right) \\ - \cos(\alpha_i + \alpha_j) \cdot \left( e^{v(y_i + \eta_j)} \cdot \text{sen}(v \cdot (x_i - \xi_j)) - e^{v(y_i + \eta_{j+1})} \cdot \text{sen}(v \cdot (x_i - \xi_{j+1})) \right)$$

C.1.1.8 Término L8

$$L_8 = \text{sen}(\alpha_i - \alpha_j) \cdot \left( e^{v(y_i + \eta_j)} \cdot \cos(v \cdot (x_i + \xi_j)) - e^{v(y_i + \eta_{j+1})} \cdot \cos(v \cdot (x_i + \xi_{j+1})) \right) \\ - \cos(\alpha_i - \alpha_j) \cdot \left( e^{v(y_i + \eta_j)} \cdot \text{sen}(v \cdot (x_i + \xi_j)) - e^{v(y_i + \eta_{j+1})} \cdot \text{sen}(v \cdot (x_i + \xi_{j+1})) \right)$$

## C.1.2 Aproximaciones numéricas para el cálculo de los términos “K”

### C.1.2.1 Término K1

$$K_1 = \cos(\alpha_j) \cdot (K_{1c1} - K_{1c2} - K_{1c3} + K_{1c4}) + \text{sen}(\alpha_j) \cdot (K_{1s1} - K_{1s2} + K_{1s3} - K_{1s4})$$

- $K_{1c1} = (x_i - \xi_j) \cdot \ln\left(\sqrt{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \eta_j)^2}\right) + (\xi_j - \xi_{j+1})$
- $K_{1c2} = (x_i - \xi_{j+1}) \cdot \ln\left(\sqrt{(x_i - \xi_{j+1})^2 + (y_i - \eta_{j+1})^2}\right)$
- $K_{1c3} = (y_i - \eta_j) \cdot \arctan\left(\frac{y_i - \eta_j}{x_i - \xi_j}\right)$
- $K_{1c4} = (y_i - \eta_{j+1}) \cdot \arctan\left(\frac{y_i - \eta_{j+1}}{x_i - \xi_{j+1}}\right)$
- $K_{1s1} = (y_i - \eta_j) \cdot \ln\left(\sqrt{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \eta_j)^2}\right) + (\eta_j - \eta_{j+1})$
- $K_{1s2} = (y_i - \eta_{j+1}) \cdot \ln\left(\sqrt{(x_i - \xi_{j+1})^2 + (y_i - \eta_{j+1})^2}\right)$
- $K_{1s3} = (x_i - \xi_j) \cdot \arctan\left(\frac{y_i - \eta_j}{x_i - \xi_j}\right)$
- $K_{1s4} = (x_i - \xi_{j+1}) \cdot \arctan\left(\frac{y_i - \eta_{j+1}}{x_i - \xi_{j+1}}\right)$

### C.1.2.2 Término K2

$$K_2 = \cos(\alpha_j) \cdot (K_{2c1} - K_{2c2} - K_{2c3} + K_{2c4}) - \text{sen}(\alpha_j) \cdot (K_{2s1} - K_{2s2} + K_{2s3} - K_{2s4})$$

- $K_{2c1} = (x_i + \xi_j) \cdot \ln\left(\sqrt{(x_i + \xi_j)^2 + (y_i - \eta_j)^2}\right) - (\xi_j - \xi_{j+1})$
- $K_{2c2} = (x_i + \xi_{j+1}) \cdot \ln\left(\sqrt{(x_i + \xi_{j+1})^2 + (y_i - \eta_{j+1})^2}\right)$

- $K_{2c3} = (y_i - \eta_j) \cdot \arctan\left(\frac{y_i - \eta_j}{x_i + \xi_j}\right)$
- $K_{2c4} = (y_i - \eta_{j+1}) \cdot \arctan\left(\frac{y_i - \eta_{j+1}}{x_i + \xi_{j+1}}\right)$
- $K_{2s1} = (y_i - \eta_j) \cdot \ln\left(\sqrt{(x_i + \xi_j)^2 + (y_i - \eta_j)^2}\right) + (\eta_j - \eta_{j+1})$
- $K_{2s2} = (y_i - \eta_{j+1}) \cdot \ln\left(\sqrt{(x_i + \xi_{j+1})^2 + (y_i - \eta_{j+1})^2}\right)$
- $K_{2s3} = (x_i + \xi_j) \cdot \arctan\left(\frac{y_i - \eta_j}{x_i + \xi_j}\right)$
- $K_{2s4} = (x_i + \xi_{j+1}) \cdot \arctan\left(\frac{y_i - \eta_{j+1}}{x_i + \xi_{j+1}}\right)$

### C.1.2.3 Término K3

$$K_3 = \cos(\alpha_j) \cdot (K_{3c1} - K_{3c2} - K_{3c3} + K_{3c4}) + \text{sen}(\alpha_j) \cdot (K_{3s1} - K_{3s2} + K_{3s3} - K_{3s4})$$

- $K_{3c1} = (x_i - \xi_j) \cdot \ln\left(\sqrt{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i + \eta_j)^2}\right) + (\xi_j - \xi_{j+1})$
- $K_{3c2} = (x_i - \xi_{j+1}) \cdot \ln\left(\sqrt{(x_i - \xi_{j+1})^2 + (y_i + \eta_{j+1})^2}\right)$
- $K_{3c3} = (y_i + \eta_j) \cdot \arctan\left(\frac{y_i + \eta_j}{x_i - \xi_j}\right)$
- $K_{3c4} = (y_i + \eta_{j+1}) \cdot \arctan\left(\frac{y_i + \eta_{j+1}}{x_i - \xi_{j+1}}\right)$
- $K_{3s1} = (y_i + \eta_j) \cdot \ln\left(\sqrt{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i + \eta_j)^2}\right) - (\eta_j - \eta_{j+1})$
- $K_{3s2} = (y_i + \eta_{j+1}) \cdot \ln\left(\sqrt{(x_i - \xi_{j+1})^2 + (y_i + \eta_{j+1})^2}\right)$

- $K_{3s3} = (x_i - \xi_j) \cdot \arctan\left(\frac{y_i + \eta_j}{x_i - \xi_j}\right)$
- $K_{3s4} = (x_i - \xi_{j+1}) \cdot \arctan\left(\frac{y_i + \eta_{j+1}}{x_i - \xi_{j+1}}\right)$

#### C.1.2.4 Término K4

$$K_4 = \cos(\alpha_j) \cdot (K_{4c1} - K_{4c2} - K_{4c3} + K_{4c4}) - \text{sen}(\alpha_j) \cdot (K_{4s1} - K_{4s2} + K_{4s3} - K_{4s4})$$

- $K_{4c1} = (x_i + \xi_j) \cdot \ln\left(\sqrt{(x_i + \xi_j)^2 + (y_i + \eta_j)^2}\right) - (\xi_j - \xi_{j+1})$
- $K_{4c2} = (x_i + \xi_{j+1}) \cdot \ln\left(\sqrt{(x_i + \xi_{j+1})^2 + (y_i + \eta_{j+1})^2}\right)$
- $K_{4c3} = (y_i + \eta_j) \cdot \arctan\left(\frac{y_i + \eta_j}{x_i + \xi_j}\right)$
- $K_{4c4} = (y_i + \eta_{j+1}) \cdot \arctan\left(\frac{y_i + \eta_{j+1}}{x_i + \xi_{j+1}}\right)$
- $K_{4s1} = (y_i + \eta_j) \cdot \ln\left(\sqrt{(x_i + \xi_j)^2 + (y_i + \eta_j)^2}\right) - (\eta_j - \eta_{j+1})$
- $K_{4s2} = (y_i + \eta_{j+1}) \cdot \ln\left(\sqrt{(x_i + \xi_{j+1})^2 + (y_i + \eta_{j+1})^2}\right)$
- $K_{4s3} = (x_i + \xi_j) \cdot \arctan\left(\frac{y_i + \eta_j}{x_i + \xi_j}\right)$
- $K_{4s4} = (x_i + \xi_{j+1}) \cdot \arctan\left(\frac{y_i + \eta_{j+1}}{x_i + \xi_{j+1}}\right)$

C.1.2.5 Término K5

$$K_5 = \frac{1}{\nu} \cdot (\cos(\alpha_j) \cdot (K_{5c1} - K_{5c2} + K_{5c3} - K_{5c4}) + \text{sen}(\alpha_j) \cdot (K_{5s1} + K_{5s2} - K_{5s3}))$$

- $K_{5c1} = \arctan\left(\frac{y_i + \eta_j}{x_i - \xi_j}\right)$
- $K_{5c2} = \arctan\left(\frac{y_i + \eta_{j+1}}{x_i - \xi_{j+1}}\right)$
- $K_{5c3} = PV \int_0^{\infty} \frac{e^{k \cdot (y_i + \eta_j)} \cdot \text{sen}(k \cdot (x_i - \xi_j))}{\nu - k} \cdot dk$
- $K_{5c4} = PV \int_0^{\infty} \frac{e^{k \cdot (y_i + \eta_{j+1})} \cdot \text{sen}(k \cdot (x_i - \xi_{j+1}))}{\nu - k} \cdot dk$
- $K_{5s1} = \ln\left(\sqrt{\frac{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i + \eta_j)^2}{(x_i - \xi_{j+1})^2 + (y_i + \eta_{j+1})^2}}\right)$
- $K_{5s2} = PV \int_0^{\infty} \frac{e^{k \cdot (y_i + \eta_{j+1})} \cdot \cos(k \cdot (x_i - \xi_{j+1}))}{\nu - k} \cdot dk$
- $K_{5s3} = PV \int_0^{\infty} \frac{e^{k \cdot (y_i + \eta_j)} \cdot \cos(k \cdot (x_i - \xi_j))}{\nu - k} \cdot dk$

C.1.2.6 Término K6

$$K_6 = \frac{1}{\nu} \cdot (\cos(\alpha_j) \cdot (K_{6c1} - K_{6c2} + K_{6c3} - K_{6c4}) - \text{sen}(\alpha_j) \cdot (K_{6s1} + K_{6s2} - K_{6s3}))$$

- $K_{6c1} = \arctan\left(\frac{y_i + \eta_j}{x_i + \xi_j}\right)$
- $K_{6c2} = \arctan\left(\frac{y_i + \eta_{j+1}}{x_i + \xi_{j+1}}\right)$

- $K_{6c3} = PV \int_0^{\infty} \frac{e^{k \cdot (y_i + \eta_j)} \cdot \text{sen}(k \cdot (x_i + \xi_j))}{\nu - k} \cdot dk$
- $K_{6c4} = PV \int_0^{\infty} \frac{e^{k \cdot (y_i + \eta_{j+1})} \cdot \text{sen}(k \cdot (x_i + \xi_{j+1}))}{\nu - k} \cdot dk$
- $K_{6s1} = \ln \left( \sqrt{\frac{(x_i + \xi_j)^2 + (y_i + \eta_j)^2}{(x_i + \xi_{j+1})^2 + (y_i + \eta_{j+1})^2}} \right)$
- $K_{6s2} = PV \int_0^{\infty} \frac{e^{k \cdot (y_i + \eta_{j+1})} \cdot \cos(k \cdot (x_i + \xi_{j+1}))}{\nu - k} \cdot dk$
- $K_{6s3} = PV \int_0^{\infty} \frac{e^{k \cdot (y_i + \eta_j)} \cdot \cos(k \cdot (x_i + \xi_j))}{\nu - k} \cdot dk$

#### C.1.2.7 Término K7

$$K_7 = \frac{1}{\nu} \cdot \left( e^{\nu \cdot (y_i + \eta_j)} \cdot \text{sen}(\nu \cdot (x_i - \xi_j) - \alpha_j) - e^{\nu \cdot (y_i + \eta_{j+1})} \cdot \text{sen}(\nu \cdot (x_i - \xi_{j+1}) - \alpha_j) \right)$$

#### C.1.2.8 Término K8

$$K_8 = \frac{1}{\nu} \cdot \left( e^{\nu \cdot (y_i + \eta_j)} \cdot \text{sen}(\nu \cdot (x_i + \xi_j) + \alpha_j) - e^{\nu \cdot (y_i + \eta_{j+1})} \cdot \text{sen}(\nu \cdot (x_i + \xi_{j+1}) + \alpha_j) \right)$$

### **C.1.3 Integrales impropias**

A continuación se presentan métodos numéricos para la evaluación de las integrales impropias.

$$PV \int_0^{\infty} \frac{e^{k \cdot (y + \eta)} \cdot \cos(k \cdot (x - \xi))}{\nu - k} \cdot dk = \text{Re} \left\{ PV \int_0^{\infty} \frac{e^{-i \cdot k \cdot (z - \bar{\zeta})}}{\nu - k} \cdot dk \right\}$$

$$PV \int_0^{\infty} \frac{e^{k \cdot (y + \eta)} \cdot \text{sen}(k \cdot (x - \xi))}{\nu - k} \cdot dk = \text{Im} \left\{ PV \int_0^{\infty} \frac{e^{-i \cdot k \cdot (z - \bar{\zeta})}}{\nu - k} \cdot dk \right\}$$

$$PV \int_0^{\infty} \frac{e^{k(y+\eta)} \cdot \cos(k \cdot (x + \xi))}{\nu - k} \cdot dk = \operatorname{Re} \left\{ PV \int_0^{\infty} \frac{e^{-i \cdot k \cdot (z + \zeta)}}{\nu - k} \cdot dk \right\}$$

$$PV \int_0^{\infty} \frac{e^{k(y+\eta)} \cdot \operatorname{sen}(k \cdot (x + \xi))}{\nu - k} \cdot dk = \operatorname{Im} \left\{ PV \int_0^{\infty} \frac{e^{-i \cdot k \cdot (z + \zeta)}}{\nu - k} \cdot dk \right\}$$

### C.1.3.1 Aproximación por series de potencias

$$PV \int_0^{\infty} \frac{e^{-i \cdot k \cdot (z - \bar{\zeta})}}{\nu - k} \cdot dk = e^{-i \cdot \nu \cdot (z - \bar{\zeta})} \cdot \left( \gamma + \ln(-i \cdot \nu \cdot (z - \bar{\zeta})) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-i \cdot \nu \cdot (z - \bar{\zeta}))^n}{n \cdot n!} \right)$$

$$PV \int_0^{\infty} \frac{e^{-i \cdot k \cdot (z + \zeta)}}{\nu - k} \cdot dk = e^{-i \cdot \nu \cdot (z + \zeta)} \cdot \left( \gamma + \ln(-i \cdot \nu \cdot (z + \zeta)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-i \cdot \nu \cdot (z + \zeta))^n}{n \cdot n!} \right)$$

$\gamma = 0.577215665$       **Constante Euler-Mascheroni**

### C.1.3.2 Aproximación numérica

$$PV \int_0^{\infty} \frac{e^{-i \cdot k \cdot (z - \bar{\zeta})}}{\nu - k} \cdot dk = \lim_{a \rightarrow \nu^-} \int_0^a \frac{e^{-i \cdot k \cdot (z - \bar{\zeta})}}{\nu - k} \cdot dk + \lim_{b \rightarrow \nu^+} \int_b^{\infty} \frac{e^{-i \cdot k \cdot (z - \bar{\zeta})}}{\nu - k} \cdot dk$$

$$PV \int_0^{\infty} \frac{e^{-i \cdot k \cdot (z + \zeta)}}{\nu - k} \cdot dk = \lim_{a \rightarrow \nu^-} \int_0^a \frac{e^{-i \cdot k \cdot (z + \zeta)}}{\nu - k} \cdot dk + \lim_{b \rightarrow \nu^+} \int_b^{\infty} \frac{e^{-i \cdot k \cdot (z + \zeta)}}{\nu - k} \cdot dk$$

El argumento de las integrales anteriores es una función que converge a cero rápidamente, por lo que para calcular estas integrales se sustituye el valor del infinito por un valor numérico no muy grande.

## APÉNDICE D

### D.1 Análisis del término “ $L5$ ” para varias frecuencias

En esta sección se comparan los valores del término “ $L5$ ” obtenidos por el Método de Frank (método analítico) y el método numérico desarrollado, para varias frecuencias. Se utilizó el mismo ejemplo de la sección 4.4.1 (tabla 4.11 y 4.12). Los cálculos requeridos en el Método de Frank (usando series de potencia infinitas) se realizaron mediante los programas wxMaxima 0.7.1 y el desarrollado en este trabajo. Como ambos resultados son prácticamente iguales, sólo se muestran los obtenidos por el programa desarrollado en este trabajo. Para calcular el error porcentual se tomó como referencia el valor del método analítico. En las cuatro tablas mostradas posteriormente se observa que al aumentar la frecuencia, los valores entre ambos métodos se acercan más, disminuyendo el error.

#### D.1.1 Término “ $L5_{II}$ ”

Tabla D.1. Comparación del término “ $L5_{II}$ ” para distintas frecuencias.

$\omega$ (rad/seg)	Método numérico	Método Analítico	Error (%)
2	-0,044982717	-0,045806609	1,831575524
3	-0,015208655	-0,015208215	0,002890761
4	-0,008010853	-0,008010853	0,000000018
5	-0,004989015	-0,004989015	0,000000000
6	-0,003415852	-0,003415852	0,000000000
7	-0,002488751	-0,002488751	0,000000000
8	-0,001895301	-0,001895301	0,000000000

**D.1.2 Término “ $L5_{12}$ ”**

**Tabla D.2. Comparación del término “ $L5_{12}$ ” para distintas frecuencias.**

$\omega$ (rad/seg)	Método numérico	Método Analítico	Error (%)
2	-0,072181068	-0,039990493	44,59697854
3	-0,022395139	-0,022476426	0,362963008
4	-0,012230467	-0,012230448	0,000154947
5	-0,007677124	-0,007677124	0,000000021
6	-0,005274118	-0,005274118	0,000000000
7	-0,003849624	-0,003849624	0,000000000
8	-0,002934886	-0,002934886	0,000000000

**D.1.3 Término “ $L5_{21}$ ”**

**Tabla D.3. Comparación del término “ $L5_{21}$ ” para distintas frecuencias.**

$\omega$ (rad/seg)	Método numérico	Método Analítico	Error (%)
2	-0,065781138	-0,068232998	3,727299103
3	-0,019563363	-0,019545623	0,090678556
4	-0,009823889	-0,009823888	0,000018981
5	-0,006018417	-0,006018417	0,000000000
6	-0,004087645	-0,004087645	0,000000000
7	-0,002964544	-0,002964544	0,000000000
8	-0,002251116	-0,002251116	0,000000000

**D.1.4 Término “ $L5_{22}$ ”**

**Tabla D.4. Comparación del término “ $L5_{22}$ ” para distintas frecuencias.**

$\omega$ (rad/seg)	Método numérico	Método Analítico	Error (%)
2	-0,084249668	0,099479196	218,0766621
3	-0,023732062	-0,018815953	20,71505106
4	-0,011810413	-0,011791366	0,161272944
5	-0,007297743	-0,007297761	0,000252549
6	-0,004965477	-0,004965477	0,000000438
7	-0,003603646	-0,003603646	0,000000000
8	-0,002737346	-0,002737346	0,000000000

## D.2 Análisis de la integral impropia del término “L5”

La integral impropia contenida en el término “L5” es la siguiente:

$$F4_{ij} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-i.k.(z_i - \bar{\zeta}_j)}}{\nu - k} \cdot dk \quad (\text{D.1})$$

Para la evaluación de esta integral, el programa numérico desarrollado procede de la siguiente manera:

$$F4_{ij} = \int_0^{\nu - tol} \frac{e^{-i.k.(z_i - \bar{\zeta}_j)}}{\nu - k} \cdot dk + \int_{\nu + tol}^{\infty} \frac{e^{-i.k.(z_i - \bar{\zeta}_j)}}{\nu - k} \cdot dk \quad (\text{D.2})$$

Las integrales de la ecuación D.2, se resuelven por medio del Método del Trapecio, donde el tamaño de las divisiones (base de cada trapecio) es igual al valor del término “tol”. La siguiente figura muestra como se resuelve la primera integral de la ecuación D.2, indicando los principales parámetros.

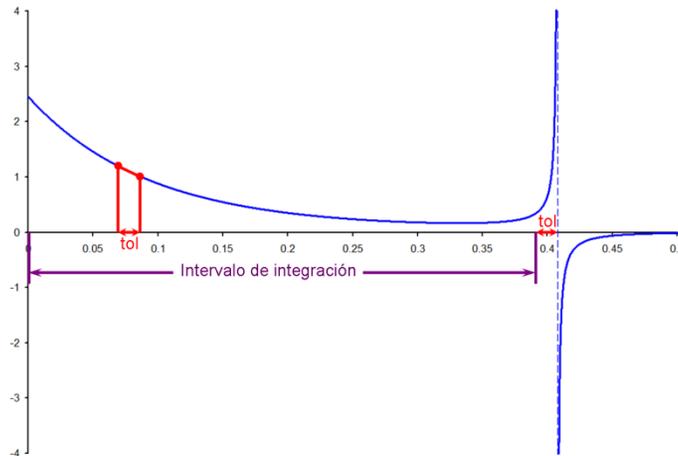


Figura D.1. Integración del término “F4<sub>ij</sub>”

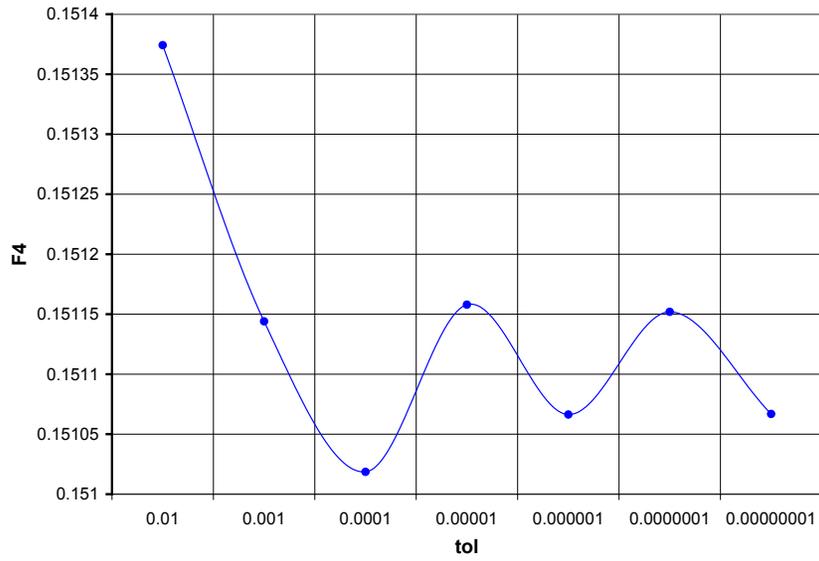
Se realizó un análisis de sensibilidad variando el valor del término “ $tol$ ”, los resultados se muestran a continuación:

**Tabla D.5. Análisis de sensibilidad del término “ $tol$ ”.**

<b>tol</b>	<b>F4<sub>11</sub></b>	<b>F4<sub>12</sub></b>	<b>F4<sub>21</sub></b>	<b>F4<sub>22</sub></b>
0,10000000	0,181335806	0,197728412	0,199626413	0,253722732
0,01000000	0,151374176	0,173155547	0,174737913	0,248462534
0,00100000	0,151144034	0,173076802	0,174380855	0,249317275
0,00010000	0,151018579	0,172795864	0,174812605	0,247374219
0,00001000	0,151157912	0,173110535	0,174347762	0,249521299
0,00000100	0,151066366	0,172903596	0,174655735	0,248105086
0,00000010	0,151151974	0,173097092	0,174367991	0,249428887
0,00000001	0,151066866	0,172904722	0,174654090	0,248112733

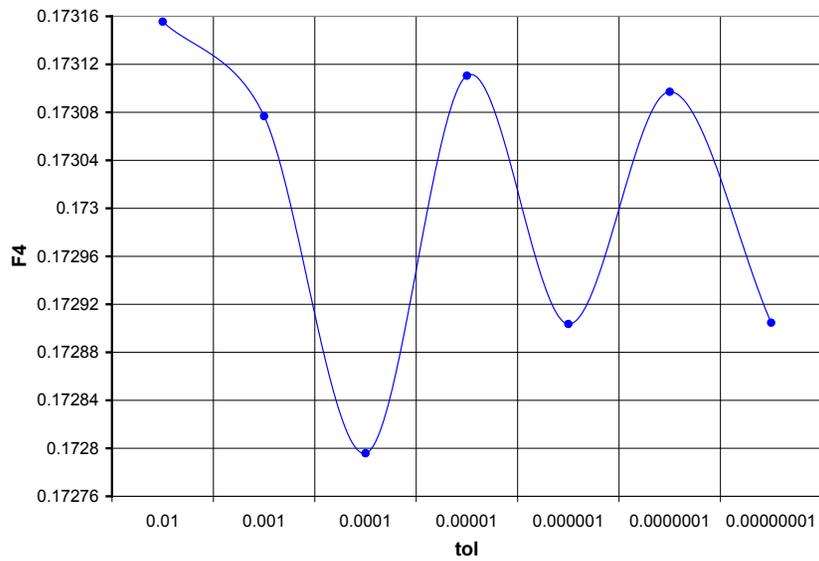
En la tabla anterior se observa que al aumentar el valor de “ $tol$ ”, los valores de la integral (ecuación D.1) se estabilizan. En las siguientes secciones se mostrarán gráficas asociadas a la tabla anterior para apreciar mejor el comportamiento de la integral en estudio, no se tomó en cuenta los resultados para “ $tol=0,1$ ”. En las gráficas siguientes, se observa que el valor de la integral presenta oscilaciones pequeñas, y cuando se aumenta el valor de “ $tol$ ”, estas oscilaciones tienden a disminuir.

**D.2.1 Término “ $F_{411}$ ”**



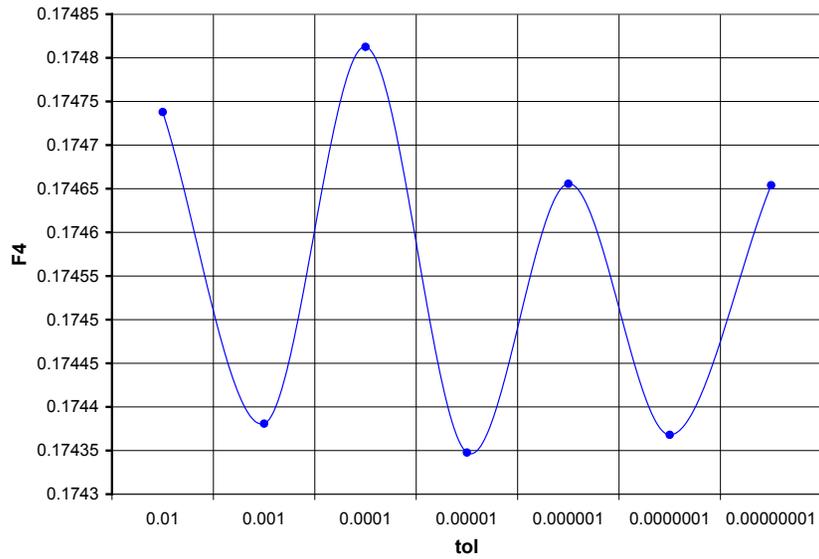
**Figura D.2. Análisis de sensibilidad del término “ $F_{411}$ ”.**

**D.2.2 Término “ $F_{412}$ ”**



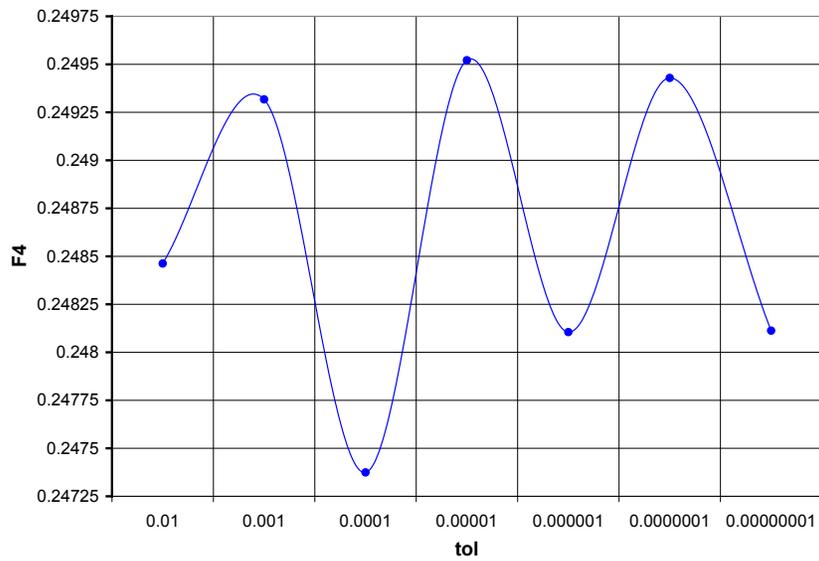
**Figura D.3. Análisis de sensibilidad del término “ $F_{412}$ ”.**

**D.2.3 Término “ $F_{421}$ ”**



**Figura D.4. Análisis de sensibilidad del término “ $F_{421}$ ”.**

**D.2.4 Término “ $F_{422}$ ”**



**Figura D.5. Análisis de sensibilidad del término “ $F_{422}$ ”.**

De la sección anterior, el término que presentó el mayor error fue el “ $L5_{22}$ ”, por lo que a continuación se analizará con mayor detalle a continuación. Se graficará la curva que representa la función a integrar del término “ $F4_{22}$ ”, tomando como valores todos los puntos de integración del programa desarrollado en este trabajo, para el caso cuando “ $tol=0,00001$ ”. La función a graficar es la siguiente:

$$F3_{22} = \frac{e^{-i.k(z_2 - \bar{\zeta}_2)}}{\nu - k} \quad (D.3)$$

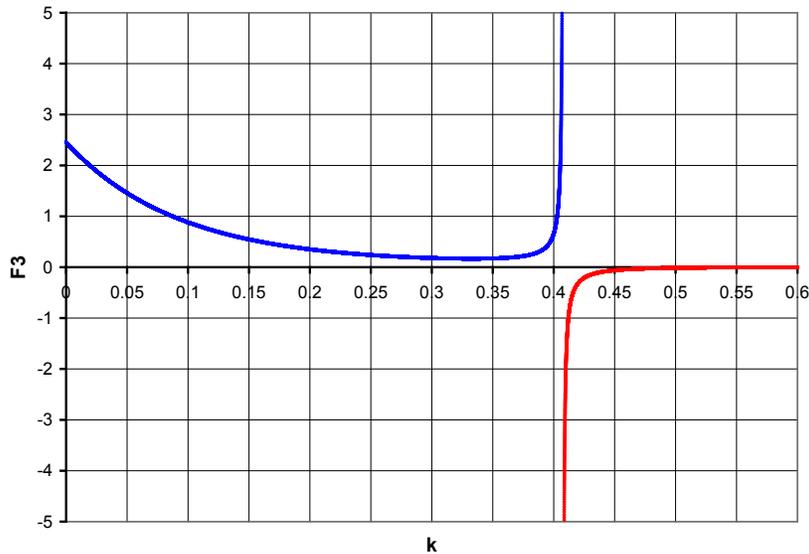
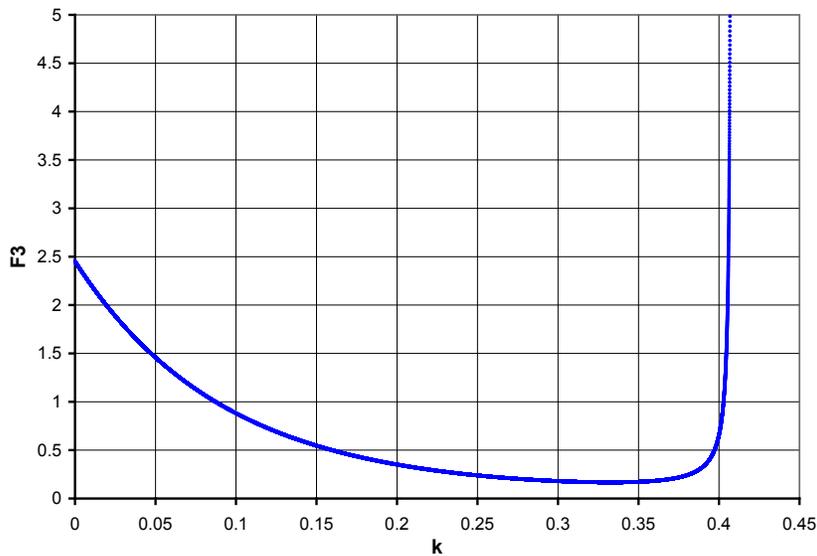


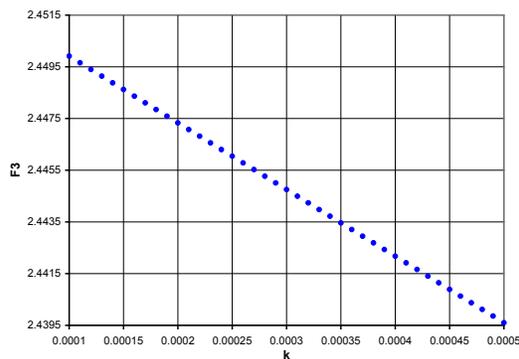
Figura D.6. Gráfica de la función “ $F3_{22}$ ”.

Al observar la gráfica anterior, la función “ $F3_{22}$ ” antes del punto singular ( $k = \nu$ ), posee el mayor aporte para la integral (ecuación D.1). Al graficar con más detalle esta porción de la curva, se tiene la siguiente gráfica:



**Figura D.7. Parte significativa de la función “ $F_{3_{22}}$ ”.**

En esta figura se observa que el procedimiento de integración numérico desarrollado, para el tamaño de las subdivisiones utilizado ( $tol=0,00001$ ), procede de manera adecuada, ya que se aprecia claramente el comportamiento de la función. La precisión utilizada es tan alta, que para el rango de valores mostrados la figura D.4 es una curva suave. Si se elige un rango de valores mucho más pequeño para graficar, se podrán apreciar los puntos que utiliza el programa desarrollado para evaluar la integral, como en la siguiente figura:



**Figura D.8. Puntos de integración del término “ $F_{4_{22}}$ ”**