

**TRABAJO ESPECIAL DE GRADO**

**“PLANIFICACIÓN DE TRAYECTORIAS PARA UN  
VEHÍCULO NO-HOLÓNOMO CON REMOLQUE”**

Presentado ante la Ilustre  
Universidad Central de Venezuela  
Por los Bachilleres  
González R., Oriana I.  
Pinto A., Jesús A.  
Para optar al Título de  
Ingeniero Mecánico

Caracas, 2009

## **TRABAJO ESPECIAL DE GRADO**

### **“PLANIFICACIÓN DE TRAYECTORIAS PARA UN VEHÍCULO NO-HOLÓNOMO CON REMOLQUE”**

Tutor Académico: Prof. Arturo Gil.

Presentado ante la Ilustre  
Universidad Central de Venezuela  
Por los Bachilleres  
González R., Oriana I.  
Pinto A., Jesús A.  
Para optar al Título de  
Ingeniero Mecánico

Caracas, 2009



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE INGENIERIA  
ESCUELA DE INGENIERIA MECANICA  
DEPARTAMENTO DE AUTOMÁTICA



Caracas, 14 de abril de 2.009

## ACTA

Los abajo firmantes, miembros del jurado por el Consejo de Escuela de Ingeniería Mecánica, para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por los bachilleres:

**ORIANA GONZÁLEZ y JESÚS PINTO**

**Titulado:**

**“PLANIFICADOR DE TRAYECTORIAS PARA UN VEHÍCULO NO-HOLONOMO  
CON REMOLQUE”**

Consideran que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el Plan de Estudios conducente al Título de Ingeniero Mecánico.

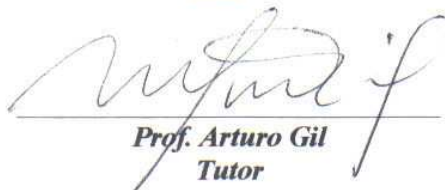


**Prof. Simón Hernández**  
Jurado





**Prof. Jorge Barillas**  
Jurado



**Prof. Arturo Gil**  
Tutor



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE INGENIERIA  
ESUELA DE INGENIERIA MECANICA  
DEPARTAMENTO DE AUTOMÁTICA



Caracas, 14 de abril de 2.009

Ciudadano  
**Prof. GERARDO RAMÍREZ**  
Jefe de División de Control de Estudios

Presente.-

Quienes suscriben Miembros del Jurado Examinador, designado por el Consejo de la Escuela de Ingeniería Mecánica, nos dirigimos a usted, con la finalidad de informarle se ha decidido otorgar a los Bachilleres:

**Br. ORIANA GONZÁLEZ**  
C.I.V.- 17.160.430

**Br. JESÚS PINTO**  
C.I.V.- 17.744.626

## “MENCIÓN HONORÍFICA”

Por la excelencia demostrada en la realización del Trabajo Especial de Grado titulado:

“PLANIFICADOR DE TRAYECTORIAS PARA UN VEHÍCULO NO-HOLONOMO  
CON REMOLQUE”

Sin otro particular a que hacer referencia, quedamos de usted,

  
**Prof. Simón Hernández**  
Jurado



  
**Prof. Arturo Gil**  
Tutor

  
**Prof. Jorge Barillas**  
Jurado

“Hacia el 50<sup>º</sup> Aniversario del 21 de noviembre de 1957, Día del Estudiante”

## DEDICATORIA

---

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

## DEDICATORIA

A mis padres Ildemaro y Zulma, por ser el ejemplo a seguir en mi vida, a quienes dedico no sólo esta tesis sino toda mi vida por siempre brindarme amor y apoyo incondicional en todo momento.

A mi hermana Zulma Carolina, por apoyarme en todas las decisiones que he tomado y ser un orgullo y modelo para mí.

A mi novio José Daniel, por inspirarme a culminar mi tesis con éxito.

A mis amigos, que de una u otra manera intervinieron en este trabajo

Es para Uds.

*Oriana*

Para mis 5 personas importantes:

Mi padre, Fernando, mi madre, Zoraida, mi hermano Manuel y los otros dos seres centrales en mi vida: Leonardo Alayón y Jennyfer Diletto.

*Jesús. A. Pinto*

## AGRADECIMIENTOS

---

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradecemos a Dios, por permitirnos llegar a donde estamos ahora y darnos la oportunidad de conocer gente única en la UCV.

A la ilustre Universidad Central de Venezuela y todos los que en ella laboran por formarnos como Ingeniero.

A nuestras familias, por guiarnos en el camino correcto y siempre confiar en nosotros brindándonos su apoyo incondicional, mil gracias por crearnos un futuro y ser parte de él.

Al tutor, Prof. Arturo Gil por guiarnos durante la elaboración de este Trabajo Especial de Grado y por su mejor disposición en todo momento.

Al jurado, Prof. Simón Hernández y Prof. Jorge Barillas por contribuir en nuestra formación como ingeniero y participar en el desarrollo de este Trabajo Especial de Grado.

Al Prof. José Barriola y Prof. Hans García por compartir sus conocimientos y brindarnos ayuda en la realización de este trabajo.

A nuestros amigos Nancy, Jennyfer, Chuchú, Leo, Jesús, Joel, Raúl, Karla, Perú, Asael, Aura, Chivas, Juan, Yajariyú, Flor, Rommy, Reinaldo e Iván por hacer esta etapa de nuestra vida muy divertida. Su amistad significó mucho para nosotros, mil gracias.

*Oriana y Jesús.*

## RESUMEN

---

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

**González R., Oriana I. y Pinto A., Jesús A.**

### **PLANIFICACIÓN DE TRAYECTORIAS PARA UN VEHÍCULO NO-HOLÓNOMO CON REMOLQUE**

Tutor Académico: Prof. Arturo Gil. Caracas, U. C. V. Facultad de Ingeniería, Escuela de Ingeniería Mecánica. 2009. 156 Pág.

*B-Spline*, Robótica, No-Holónimo.

En este Trabajo Especial de Grado se ilustró un método de planificación de trayectorias para un robot, basado en la aplicación de estrategias de control al modelo cinemático del mismo. El desarrollo se fundamentó en la búsqueda y obtención de trayectorias óptimas para el movimiento del vehículo lo suficientemente versátiles, confiables y económicas en términos de parámetros operativos como energía y tiempo. Se realizó dicha planificación para movimientos en el plano a partir de las curvas *B-Spline*, minimizando los parámetros anteriores sujetos a la condición de no-holonomía y bajo un entorno con obstáculos estáticos. El vehículo empleado contó con tracción de tipo diferencial. Para verificar los resultados obtenidos se compararon las curvas teóricas generadas a partir del modelo computacional desarrollado en MATLAB® con la curva real registrada por un vehículo (robot) Lego® NXT™. El procedimiento se repitió tanto para el vehículo en solitario como para el mismo con un remolque, partiendo de una configuración inicial a una final. Los resultados más satisfactorios se obtuvieron al optimizar energía en ausencia del remolque con una dispersión del error menor al 5% en la configuración final. La mayor desviación de la curva real respecto a la teórica se obtuvo al optimizar tiempo.

## ABSTRACT

---

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

**González R., Oriana I. y Pinto A., Jesús A.**

### **TRAJECTORY PLANNING FOR A NON-HOLONOMIC MOBILE ROBOT WITH TRAILER**

Academic Tutor: Dr. Arturo Gil. Caracas, U. C. V. Faculty of Engineering,  
Mechanical Engineering School. 2009. 156 pages.

## ABSTRACT

*B-Spline*, Robotics, Non-holonomic.

This work proposes a method of trajectory planning for a mobile robot, based on the application of strategies to control the kinematic model of the vehicle. It relayed on searching and obtaining optimal trajectories for the movement sufficiently versatile, reliable and economics on terms of operative parameters such as energy and time. Such planning was realized for flat movements throughout *B-Spline* curves, minimizing the parameters mentioned before subjects to the non-holonomic constraint and developed in an environment with static obstacles. The system used (mobile robot) had differential traction. For verifying the obtained results, theoretical curves generated by the computational model developed in MATLAB® were compared with real curves registered by the vehicle (robot) Lego® NXT™. The procedure was repeated such for the vehicle as for the vehicle with a trailer, starting at an initial configuration until ending at a final configuration. The best results were obtained optimizing energy without the trailer with error dispersion under 5% at the final configuration. The worst results comparing the real curve with the theoretical curve were obtained optimizing time.



## NOMENCLATURA Y SÍMBOLOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónomo con Remolque

## NOMENCLATURA Y SÍMBOLOS

- $B_{i,n}(t)$ : Polinomios *B-Spline*.
- $\mathbf{BA}$ : Vector distancia entre A y B.
- $\mathbf{C}(t)$ : Curva Polinómica (Curva Base, Bèzier y *B-Spline*).
- $CIR$ : Centro Instantáneo de Rotación.
- $d$ : Distancia entre el Punto Medio de las Ruedas Traseras y el Remolque.
- $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ : Vectores de Campo de movimiento y rotación de  $z$ .
- $k$ : Número de Puntos de Control.
- $L$ : Distancia entre las Ruedas Traseras del Robot.
- $n$ : Grado del Polinomio.
- $N_{i,n}(t)$ : Polinomios de Bernstein.
- $NLP$ : Programación no lineal.
- $OCP$ : Problema de control óptimo
- $p$ : Orden del Polinomio.
- $\mathbf{P}_i$ : Puntos de Control.
- $r$ : Radio de la Rueda.
- $\mathbf{r}(t)$ : Vector Posición.
- $SQP$ : Programación Cuadrática Secuencial.
- $t_f$ : Tiempo Final de la Trayectoria.
- $\mathbf{u}_1$ : Velocidad Lineal del Centro de la Rueda.
- $\mathbf{u}_2$ : Velocidad Angular de Dirección.
- $\mathbf{u}$ : Entrada de control.
- $\mathbf{U}$ : Vector de Nodos.
- $\mathbf{v}_0^P$ : Vector Velocidad del punto P respecto a Tierra.
- $\mathbf{v}_0^{A1}$ : Velocidad del Punto A que pertenece al Cuerpo 1 respecto a Tierra.

## NOMENCLATURA Y SÍMBOLOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

- $v_0^{B1}$ : Velocidad del Punto B que pertenece al Cuerpo 1 respecto a Tierra.  
 $v_0^d$ : Velocidad de la Rueda Derecha respecto a Tierra.  
 $v_0^I$ : Velocidad del Punto I, donde se encuentra el CIR, respecto a Tierra.  
 $v_0^i$ : Velocidad de la Rueda Izquierda respecto a Tierra.  
 $v_0^{C1}$ : Velocidad del Centro (C) del Cuerpo 1 respecto a Tierra.  
 $x$ : Coordenada Cartesiana  $x$ .  
 $x_1$ : Coordenada  $x$  del Remolque.  
 $x_2$ : Coordenada  $x$  del Vehículo.  
 $y$ : Coordenada Cartesiana  $y$ .  
 $y_1$ : Coordenada  $y$  del Remolque.  
 $y_2$ : Coordenada  $x$  del Vehículo.  
 $z$ : Vector de Configuración de Parámetros del Robot.

### Símbolos Griegos:

- $\Phi$ : Función de Costo.  
 $\gamma$ : Conjunto Finito de Variables.  
 $\theta$ : Ángulo de Orientación del Robot respecto a una recta horizontal.  
 $\theta_1$ : Ángulo de Orientación del Remolque.  
 $\theta_2$ : Ángulo de Orientación del Vehículo.  
 $\xi_i$ : Puntos de Ruptura.  
 $\rho$ : Radio de Curvatura Instantáneo de la Trayectoria del Robot.  
 $\omega_{10}$ : Velocidad Angular del Cuerpo 1 respecto a Tierra.

## ÍNDICE GENERAL

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

## ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN .....	1
CAPÍTULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA .....	3
OBJETIVOS .....	6
Objetivo General .....	6
Objetivos Específicos.....	6
JUSTIFICACIÓN .....	7
CAPÍTULO II: MARCO REFERENCIAL .....	9
2.1. Antecedentes .....	9
2.2. Bases Teóricas.....	10
2.2.1. Cinemática.....	11
• Modelo de la Partícula .....	11
• Marco de Referencia .....	11
• Coordenadas Cartesianas .....	11
• Vector Posición .....	12
• Vector Velocidad .....	12
• Modelo del Cuerpo Rígido.....	13
• Centro Instantáneo de Rotación (CIR).....	13
• Rodadura .....	14
• Maniobrabilidad .....	14
2.2.2. Robótica .....	15
Estado del Arte .....	15
Diseño de la Arquitectura Robótica .....	17
Robots Móviles .....	19
Vehículos con Ruedas .....	20
Tipos de Locomoción de los Vehículos con Ruedas .....	20

## ÍNDICE GENERAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

1. Ackerman .....	20
2. Triciclo Clásico .....	21
3. <i>Skid Steer</i> .....	21
4. Pistas de deslizamiento .....	22
5. Síncronas .....	23
6. Tracción Omnidireccional .....	23
7. Otras Configuraciones .....	24
8. Tracción Diferencial .....	24
2.2.3. Condición de No-Holonomía .....	26
Sistema No-holónimo .....	26
Condición de no-holonomía .....	27
Control de Sistemas No-Holónomos .....	27
2.2.4. Curva de Dubins .....	29
2.2.5. Curvas <i>B-Spline</i> .....	31
Trayectorias con Parametrizaciones Polinómicas .....	31
Curvas de Bèzier .....	33
Curvas B-Spline .....	35
Características de las <i>B-Spline</i> .....	36
2.2.6. Modelo Cinemático .....	39
Sistemas diferencialmente planos .....	40
Parámetros del Robot: .....	42
Entrada de Control: .....	42
Ecuaciones planas del sistema .....	43
2.2.7. Métodos Numéricos .....	45
Método de Euler o del disparo lineal .....	46
Método de Runge–Kutta .....	48
2.2.8. Optimización .....	49

## ÍNDICE GENERAL

---

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque	
Optimización .....	50
Algoritmos iterativos y Convergencia .....	51
Optimización con restricciones .....	53
Programación no lineal .....	53
2.2.9. OPTRAGEN® .....	54
SNOPT® .....	55
Parametrización del espacio de la trayectoria .....	57
Transcripción del problema de control óptimo en un problema de Programación No-Lineal .....	58
Cuadratura Gaussiana .....	59
2.2.10. Módulo Lego® NXT™ y PID .....	59
Movimiento Mejorado (algoritmo de control PID).....	60
Principios de PID .....	61
CAPÍTULO III:MARCO METODOLÓGICO .....	66
Tipo de Investigación .....	66
Nivel de la Investigación.....	66
Diseño de la Investigación .....	67
Definición de Variables.....	67
Identificación de la Variable: .....	67
Definición Conceptual de la Variable .....	67
Definición Operacional de la Variable.....	67
Operacionalización de la Variable .....	68
Procedimiento .....	69
Desarrollo del Modelo Cinemático .....	71
Planificación de trayectorias óptimas del vehículo con OPTRAGEN®.....	76
Función de Restricciones .....	76
Función de Costo .....	78

## ÍNDICE GENERAL

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

Limitaciones .....	79
Recursos Disponibles .....	81
CAPÍTULO IV: RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS .....	83
Resultados de los Modelos Cinemáticos:.....	83
Curva de Dubins: .....	83
Curvas <i>Splines</i> Generadas con OPTRAGEN®.....	87
Métodos Numéricos .....	92
Resultados Experimentales: .....	93
Resultados de la Comparación de los Diferentes Pasos ( $\delta$ ) del Sistema..	104
Optimización de los Diferentes Parámetros Seleccionados (Energía, Tiempo y Tiempo-Energía) para el Vehículo en Solitario.....	111
Optimización de los Diferentes Parámetros Seleccionados (Energía, Tiempo y Tiempo-Energía) para el Vehículo con Remolque .....	119
Optimización de los Diferentes Parámetros Seleccionados (Energía, Tiempo y Tiempo-Energía) para el Vehículo en Solitario en presencia de Obstáculos .....	127
Optimización de los Diferentes Parámetros Seleccionados (Energía, Tiempo y Tiempo-Energía) para el Vehículo con Remolque en presencia de Obstáculos .....	134
Optimización de Energía para el Vehículo en Solitario en Aparcamiento Paralelo.....	143
CAPÍTULO V: CONCLUSIONES.....	145
RECOMENDACIONES .....	149
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	151

## LISTA DE TABLAS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con remolque

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1: Operacionalización de la Variable. ....	68
Tabla 2: Desviación del Robot en Línea Recta.....	95
Tabla 3: Valores <i>B-Spline</i> , de Euler y Real de la Curva 3 .....	97
Tabla 4: Valores <i>B-Spline</i> , de Euler y Real de la Curva 4 .....	99
Tabla 5: Tabla de errores de la Curva 4 Real respecto a las Teóricas .....	100
Tabla 6: Valores <i>B-Spline</i> , de Euler y Real de la Curva 5 .....	101
Tabla 7: Tabla de errores de la Curva 5 Real respecto a las Teóricas .....	102
Tabla 8: Valores <i>B-Spline</i> , de Euler y Real de la Curva 6 .....	105
Tabla 9: Tabla de errores de la Curva 6 Real respecto a las Teóricas .....	106
Tabla 10: Valores <i>B-Spline</i> , de Euler y Real de la Curva 7. ....	107
Tabla 11: Tabla de errores de la Curva 7 Real respecto a las Teóricas .....	108
Tabla 12: Valores <i>B-Spline</i> , de Euler y Real de la Curva 8 .....	109
Tabla 13: Tabla de errores de la Curva 8 Real respecto a las Teóricas .....	110
Tabla 14: Valores <i>B-Spline</i> , de Euler y Real de la Curva 9. ....	112
Tabla 15: Tabla de errores de la Curva 9 Real respecto a las Teóricas. ....	113
Tabla 16: Parámetros Óptimos de la Curva 9 .....	113
Tabla 17: Valores <i>B-Spline</i> , de Euler y Real de la Curva 10 .....	115
Tabla 18: Tabla de errores de la Curva 10 Real respecto a las Teóricas .....	115
Tabla 19: Parámetros Óptimos de la Curva 10 .....	116
Tabla 20: Valores <i>B-Spline</i> , de Euler y Real de la Curva 11 .....	117
Tabla 21: Tabla de errores de la Curva 11 Real respecto a las Teóricas .....	118
Tabla 22: Parámetros Óptimos de la Curva 11. ....	118
Tabla 23: Valores <i>B-Spline</i> , de Euler y Real de la Curva 12 .....	119
Tabla 24: Tabla de errores de la Curva 12 Real respecto a las Teóricas .....	120
Tabla 25: Parámetros Óptimos de la Curva 12. ....	120
Tabla 26: Valores <i>B-Spline</i> , de Euler y Real de la Curva 13 .....	122

## LISTA DE TABLAS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con remolque

Tabla 27: Tabla de errores de la Curva 13 Real respecto a las Teóricas .....	123
Tabla 28: Parámetros Óptimos de la Curva 13 .....	123
Tabla 29: Valores <i>B-Spline</i> , de Euler y Real de la Curva 14 .....	125
Tabla 30: Tabla de errores de la Curva 14 Real respecto a las Teóricas .....	125
Tabla 31: Parámetros Óptimos de la Curva 14 .....	126
Tabla 32: Valores <i>B-Spline</i> , de Euler y Real de la Curva 15 .....	127
Tabla 33: Tabla de errores de la Curva 15 Real respecto a las Teóricas .....	128
Tabla 34: Parámetros Óptimos de la Curva 15 .....	129
Tabla 35: Valores <i>B-Spline</i> , de Euler y Real de la Curva 16 .....	130
Tabla 36: Tabla de errores de la Curva 16 Real respecto a las Teóricas .....	131
Tabla 37: Parámetros Óptimos de la Curva 16. ....	131
Tabla 38: Valores <i>B-Spline</i> , de Euler y Real de la Curva 17 .....	133
Tabla 39: Tabla de errores de la Curva 17 Real respecto a las Teóricas .....	133
Tabla 40: Parámetros Óptimos de la Curva 17. ....	134
Tabla 41: Valores <i>B-Spline</i> , de Euler y Real de la Curva 18 .....	135
Tabla 42: Tabla de errores de la Curva 18 Real respecto a las Teóricas .....	136
Tabla 43: Parámetros Óptimos de la Curva 18 .....	137
Tabla 44: Valores <i>B-Spline</i> , de Euler y Real de la Curva 19 .....	138
Tabla 45: Tabla de errores de la Curva 19 Real respecto a las Teóricas .....	139
Tabla 46: Parámetros Óptimos de la Curva 19 .....	140
Tabla 47: Valores <i>B-Spline</i> , de Euler y Real de la Curva 20 .....	141
Tabla 48: Tabla de errores de la Curva 20 Real respecto a las Teóricas .....	142
Tabla 49: Parámetros Óptimos de la Curva 20 .....	142
Tabla 50: Valores <i>B-Spline</i> , de Euler y Real de la Curva 21 .....	144
Tabla 51: Tabla de errores de la Curva 21 Real respecto a las Teóricas .....	144



## LISTA DE FIGURAS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con remolque

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Vector Posición.....	12
Figura 2: Robot y su interacción con el entorno. ....	17
Figura 3: Robot con Ruedas (Nomad). ....	19
Figura 4: Robot con Patas. ....	19
Figura 5: Robot tipo aéreo.....	19
Figura 6: Robot submarino. ....	19
Figura 7: Robot humanoide (Asimo, de Honda).....	19
Figura 8: Izquierda: Robot móvil con tracción Ackerman. Derecha: Sistema Ackerman. ....	21
Figura 9: Sistema de Triciclo Clásico. ....	21
Figura 10: Robot móvil con tracción tipo Skid Steer.....	22
Figura 11: Robot móvil tipo Pistas de Deslizamiento.....	22
Figura 12: Tracción de Tipo Síncrona. ....	23
Figura 13: Izquierda: Robots de Tracción Omnidireccional. Derecha: Configuración.....	23
Figura 14: Sistema de Locomoción RAM1. ....	24
Figura 15: Robot móvil con tracción diferencial. ....	25
Figura 16: Sistema de Tracción Diferencial.....	26
Figura 17: Sistema del Monociclo. ....	27
Figura 18: Campo vectorial de maniobra del monociclo $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ .....	29
Figura 19: Ejemplo de Curvas de Dubins para generar una trayectoria .....29	
Figura 20: Esquemas de Curvas de Dubins .....30	
Figura 21: Representación en MATLAB® de una Curva de Dubins con ángulo de salida $\pi/6$ y ángulo de llegada $7\pi/6$ .....	31
Figura 22: Polinomios de Bernstein de grado 3. ....	34
Figura 23: Curva de Bèzier de grado 3. ....	34

## LISTA DE FIGURAS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con remolque

Figura 24: Polinomios <i>B-Spline</i> con $U=\{0,0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1,1\}$ .....	37
Figura 25: Curva <i>B-Spline</i> generada a partir de los polinomios de la fig.24. ....	39
Figura 26: Diagrama de velocidades del robot. ....	43
Figura 27: Sistema del vehículo con el Remolque.....	44
Figura 28: Curva de aproximación de Euler con $\delta$ de 0.009.....	47
Figura 29: Curva de aproximación de Euler con $\delta$ de 0.0009.....	47
Figura 30: Comparación del método de Euler y el método de Runge-Kutta con la curva <i>B-Spline</i> . ....	48
Figura 31: Esquema de la Generación de una Trayectoria .....	50
Figura 32: Una curva <i>B-Spline</i> y sus trozos de polinomios. ....	58
Figura 33: Transcripción de OCP a NLP .....	59
Figura 34: Comparación del vehículo en posición inicial y un instante después. ....	62
Figura 35: Condiciones Iniciales para la construcción de la curva de Dubins...83	
Figura 36: Cálculo del Radio de Curvatura Mínimo.....	84
Figura 37: Definición de la Curva de Dubins Definitiva. ....	85
Figura 38: Diversas Trayectorias Polinómicas para la Parametrización de la Curva de Dubins.....	85
Figura 39: Funciones de Velocidad para las Parametrizaciones de la Curva de Dubins .....	86
Figura 40: Curva <i>B-Spline</i> generada por OPTRAGEN® con condiciones iniciales y finales especificadas en presencia de obstáculos.....	89
Figura 41: Curva <i>B-Spline</i> con polígono de control y su discretización (método de Euler).....	91
Figura 42: Velocidad de la rueda derecha (roja) y velocidad de la rueda izquierda (verde) .....	92
Figura 43: Curva 1. Correlación de Velocidades. $V[m/s]$ vs $V[Lego]$ . ....	94

## LISTA DE FIGURAS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con remolque

Figura 44: Curva 2. Desviación del Vehículo a Máxima Velocidad (0.47m/s).	95
Figura 45: Curva 3. Trayectoria Cerrada (Bucle) con $\delta = 0.05$ s.....	97
Figura 46: Curva 4. Optimización de Energía con Velocidades Instantáneas ...	99
Figura 47: Curva 5. Optimización de Energía con Velocidades Medias .....	101
Figura 48: Esquema de Error de las Velocidades Medias.....	103
Figura 49: Curva 6. Optimización de Energía con $\delta = 0.01$ s .....	105
Figura 50: Curva 7. Optimización de Energía con $\delta = 0.05$ s .....	107
Figura 51: Curva 8. Optimización de Energía con $\delta = 0.10$ s .....	109
Figura 52: Tiempo de Asentamiento (P.I.D.).....	111
Figura 53: Curva 9. Optimización de Energía (sin Remolque).....	112
Figura 54: Curva 10. Optimización del Tiempo de Recorrido (sin Remolque) .....	114
Figura 55: Curva 11. Optimización del Tiempo de Recorrido y Energía (sin Remolque).....	117
Figura 56: Curva 12. Optimización de Energía (con Remolque).....	119
Figura 57: Curva 13. Optimización de Tiempo de Recorrido (con Remolque) .....	122
Figura 58: Curva 14. Optimización del Tiempo de Recorrido y Energía (con Remolque).....	124
Figura 59: Curva 15. Evasión de Obstáculos con Optimización de Energía (sin Remolque).....	127
Figura 60: Curva 16. Evasión de Obstáculos con Optimización del Tiempo (sin Remolque).....	130
Figura 61: Curva 17. Evasión de Obstáculos con Optimización de Tiempo y Energía (sin Remolque).....	132
Figura 62: Curva 18. Evasión de Obstáculos con Optimización de Energía (con Remolque).....	135

## LISTA DE FIGURAS

---

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con remolque

Figura 63: Curva 19. Evasión de Obstáculos con Optimización del Tiempo (con Remolque) .....	138
Figura 64: Curva 20. Evasión de Obstáculos con Optimización del Tiempo y Energía (con Remolque) .....	141
Figura 65: Curva 21. Estacionamiento en Paralelo .....	143

## INTRODUCCIÓN

---

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

## INTRODUCCIÓN

En numerosos sectores industriales existe actualmente la necesidad de automatizar la mayor cantidad de procesos para facilitar y mejorar sus operaciones así como también reducir el tiempo necesario para éstas. Una de estas operaciones automatizables es el transporte, pues es sabido que gran cantidad de industrias cuentan con procesos productivos donde se requiere el movimiento de materiales, enseres e incluso navegación en áreas cuyo acceso es difícil o peligroso para un ser humano; así que se procura entonces que esta actividad sea realizada por vehículos autónomos; que en los últimos años han despertado mayor interés en la industria.

La operación de transporte puede llevarse a cabo por diversos mecanismos autónomos como bandas transportadoras, robots no-móviles y robots móviles. En el caso particular de la presente propuesta se procedió a planificar trayectorias para robots móviles con configuración de dos ruedas y locomoción diferencial. Dicha planificación también está restringida por la condición de no-holonomía del robot, la cual implica que el vehículo no puede desplazarse en la dirección perpendicular a la orientación de las ruedas.

El esquema y dispositivos de control para estos vehículos deben de ser lo suficientemente versátiles y confiables para lograr maniobrabilidad, respuestas rápidas y características de desempeño firmes. Esto implica que el robot debe ser capaz de seguir trayectorias que lo conduzcan de una posición a otra optimizando parámetros como distancia, energía consumida y tiempo durante su movimiento porque, de modo general, al desplazarse un vehículo cualquiera desde un estado inicial a un estado final (ambas previamente establecidas) existen una infinidad de trayectorias posibles no óptimas que éste puede seguir

## INTRODUCCIÓN

---

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

y en las cuales también pueden existir obstáculos que podrían impedir su funcionamiento.

Por todo esto es necesario desarrollar primeramente un modelo matemático que simule el comportamiento cinemático de estos vehículos diferenciales con y sin remolque. Dicho modelo es indispensable para la implementación de otros algoritmos de control que ajusten las trayectorias por las que puede (y debe) desplazarse y de esta forma se hace posible la planificación las trayectorias óptimas cumpliendo con las optimizaciones pertinentes ya mencionadas.

En el Capítulo I, titulado Planteamiento del Problema, se explica detalladamente la situación de interés y la formulación de las interrogantes a las que la investigación dará respuesta, los objetivos a lograr con el estudio y la justificación, de donde se deriva la importancia de la presente investigación.

En el Capítulo II, llamado Marco Referencial, se exponen los antecedentes relacionados con el tema y sus aportes a la investigación, las bases teóricas que sustentan la investigación y forman el soporte conceptual del estudio, y el sistema de variables de la investigación.

En el Capítulo III, que recibe el nombre de Metodología, será donde se plasmen en “cómo” del desarrollo investigativo, es decir, las técnicas y procedimientos utilizados para obtener los resultados.

En el Capítulo IV, titulado Análisis de Resultados, será dónde se plasmen los resultados arrojados por la investigación y su respectiva interpretación enfocada al objeto de estudio.

Seguidamente, se expondrán las conclusiones y recomendaciones derivadas de esta investigación además de las referencias bibliográficas utilizadas en el desarrollo de la misma, que servirán al lector como fuente de información para ampliar el tema y ampliar el conocimiento en cuanto a la planificación de trayectorias y otros aspectos de interés.

## **CAPÍTULO I**

### **PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

Este capítulo tiene como objetivo dar una visión sobre la situación de interés objeto de estudio, la importancia, beneficios, aportes y los objetivos que se pretenden alcanzar con el desarrollo de la investigación.

En este capítulo se describirá el planteamiento del problema, la justificación, el objetivo general y los específicos de la investigación con el propósito de establecer en qué consiste el problema a investigar.

#### **El Problema**

La automatización de procesos es una disciplina de gran envergadura en numerosos sectores y aspectos de la vida del ser humano desde las actividades industriales hasta las tareas ordinarias del hogar. Los primeros progresos en esta área se desarrollaron en las antiguas civilizaciones, impulsadas principalmente por 3 razones: a) el deseo de reemplazar las labores de alto peligro para el ser humano, b) la reducción de actividades repetitivas, especialmente en el ámbito laboral y c) la intención de economizar tiempo y recursos para actividades de gran importancia. Los romanos, por ejemplo, utilizaban sus conocimientos en hidráulica y mecánica para abastecer ciudades con agua y para automatizar la apertura de portones pesados.

## CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

---

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

En el siglo XVIII, la revolución industrial trajo consigo nuevos desafíos para la automatización de procesos, especialmente en el ámbito industrial donde se requerían dispositivos que no sólo cumplieran el cometido, sino que fueran confiables tanto en su operación como en los resultados que ofrecían.

Sin embargo, no fue sino hasta el siglo XX cuando los avances en la electrónica hicieron posible que los dispositivos dotados de lógica propia coexistieran con los típicos dispositivos mecánicos de control manejados en la industria. Los sectores aeroespaciales, automotriz y el petroquímico fueron los que dieron gran impulso al desarrollo de estos nuevos dispositivos como los Controladores Lógicos Programables (PLC).

Con el auge de la exploración del espacio a finales de la década de 1950, el sector aeroespacial fue el principal promotor del desarrollo de los vehículos autónomos y *robots* con miras a implementarlos en la investigación lunar en primera instancia. Debido a los limitados recursos disponibles en entornos fuera de La Tierra y por razones de costo, dimensiones y peso (entre otros factores) se hizo necesario tomar en cuenta la planificación de trayectorias como una herramienta importante para optimizar el desempeño y gasto energético de estos vehículos.

Actualmente muchas industrias a nivel mundial, en aras de disminuir la variabilidad de los procesos y aumentar su productividad, poseen estos dispositivos electromecánicos realizando diversos tipos de operaciones. Incluso cuando el parque industrial de Venezuela no escapa a esta realidad, todavía es posible implementar mejores mecanismos de automatización, como los vehículos autónomos en actividades de transporte bajo condiciones de riesgo con el propósito de mejorar el desempeño de la planta. Para lograr dicha implementación es necesario entonces volver al mismo escenario descrito



## CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

---

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

anteriormente: para economizar energía, recursos y costos, es necesario que estos vehículos sigan trayectorias específicas sujetas a restricciones y condiciones específicas.

Desde el punto de vista institucional y académico, esto se traduce en la necesidad de desarrollar los modelos teórico-matemáticos que permitan obtener las trayectorias descritas y los mecanismos de control apropiados, de acuerdo a la configuración del vehículo, para garantizar que se comporte de acuerdo al modelo desarrollado de modo tal que pueda ser eficazmente empleado en condiciones reales.

El problema de planificación se aborda desde el punto de vista de la teoría de control. Para ello es necesario diseñar leyes de control que, aplicadas al modelo del sistema, generen una trayectoria que una la configuración inicial con la final. De esta manera se pueden obtener trayectorias que satisfacen las restricciones cinemáticas. Si se desea considerar otra clase de restricciones, como por ejemplo posibles colisiones, una vez que se ha planificado el camino, es necesario comprobar si la trayectoria generada presenta algún tipo de conflicto o colisión.

Bajo este panorama es necesario investigar de qué manera pueden obtenerse trayectorias que lleven a un vehículo acompañado de un remolque desde una configuración inicial a una configuración final de manera óptima, esto es, minimizando parámetros como tiempo y energía.

## **CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

---

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

### **OBJETIVOS**

#### **Objetivo General**

- Planificar trayectorias óptimas para un vehículo no-holónimo de dos ruedas de tipo diferencial con y sin remolque.

#### **Objetivos Específicos**

- Desarrollar el modelo matemático para vehículos no-holónomos diferenciales de dos ruedas con y sin remolque.
- Proponer un modelo de simulación desarrollado en MATLAB® v.7.0.
- Optimizar variables específicas asociadas al movimiento del vehículo para ejecutar una trayectoria, tomando en cuenta las restricciones del modelo matemático.
- Proponer una estrategia de control en lazo abierto (planificación) para la estabilización del sistema en una configuración determinada.
- Validar experimentalmente la estrategia propuesta.

### JUSTIFICACIÓN

En el ámbito teórico, esta investigación aportará conocimientos sobre estrategias de control en lazo abierto (planificación) de trayectorias para vehículos no-holónomos, específicamente aquellos con configuración diferencial, a través del desarrollo de los modelos cinemáticos y su implementación en el módulo NXT<sup>TM</sup>. Asimismo, la investigación aportará conocimientos acerca de la herramienta computacional MATLAB® y su paquete OPTRAGEN® en la simulación de problemas de ingeniería en el área de la cinemática de la partícula y el cuerpo rígido.

En el ámbito práctico, la investigación aportará conocimientos y estrategias para la optimización de los procesos productivos específicamente en las tareas de transporte. Para el sector industrial, la oferta de una mayor comodidad para los trabajadores hace conveniente automatización de todos aquellos procesos que así lo admitan o requieran para minimizar las tareas repetitivas y exhaustivas.

Para el trabajador, el hecho de que un robot realice parte de su trabajo supone una serie de beneficios como:

- Mayor tiempo para la relación e interacción con otros seres humanos.
- Mejor distribución del tiempo de la jornada laboral y el tiempo de descanso.
- Jornadas de trabajo de menor intensidad, en términos de la realización de trabajos que requieren esfuerzo corporal y mental así como tareas de menor nivel de riesgos.

Para la empresa esto también supone una serie de beneficios:

- Mayor economía en áreas específicas del proceso productivo.

## CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

---

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

- Incremento de la productividad y disminución de duración de procesos.
- Eliminación de riesgos asociados a labores peligrosas y los pagos asociados a éstas.

En Venezuela, se ha tomado gran importancia a los aspectos de higiene y seguridad laboral a través la Ley Orgánica de Prevención, Condiciones Y Medio Ambiente de Trabajo (LOPCYMAT) que vela por el cumplimiento de condiciones apropiadas para el desarrollo de cualquier actividad laboral. En este sentido, este trabajo apunta en la dirección del mejoramiento de las condiciones en el entorno laboral siempre que sus resultados sean empleados para la automatización de procesos industriales.

Del mismo modo, este trabajo sienta el primer precedente investigativo dentro del área de la robótica en la Escuela de Ingeniería Mecánica de la UCV, promoviendo la incursión de su comunidad académica en ésta área con miras al desarrollo de otras investigaciones de mayor envergadura que incrementen el campo de acción del Departamento de Automática.

Para los autores, el desarrollo de esta investigación no sólo permitirá el crecimiento personal y profesional, sino que proporciona un grado de conocimientos mayor en el área de automatización de procesos industriales y principios de robótica.

Como fin último y aporte metodológico, esta investigación permitirá a futuros investigadores poner en práctica la planificación de trayectorias para vehículos no-holónomos. También, permitirá desarrollar investigaciones en el ámbito de la cinemática, la automatización de procesos y la robótica, no sólo en la escuela de Ingeniería Mecánica de la universidad rigente, sino en diferentes universidades tomando como punto de partida esta investigación y sus resultados.

## CAPÍTULO II

### MARCO REFERENCIAL

#### 2.1. Antecedentes

En un estudio experimental, realizado por el Dr. Arturo Gil Pinto en el año 2007, titulado **“Towards a Control Architecture for Cooperative Nonholonomic Mobile Robots”** desarrollado en Francia, se propuso una arquitectura de control para un grupo de vehículos robóticos no-holónomos, al presentar una estrategia de control descentralizado que permite a cada vehículo calcular autónomamente una trayectoria óptima utilizando sólo la información generada localmente, además se desarrolló un método para incorporar términos de reacción en el proceso de planificación de rutas que adapta la trayectoria de cada robot, evitando así los obstáculos y manteniendo los vínculos de comunicación mientras que se llega a la posición deseada en perfecta formación. Validó los resultados de la simulación y muestra la eficacia y la pertinencia de este método. Propuso una integración de la señal de red inalámbrica de datos con información de los sensores del vehículo para calcular la posición relativa de cada vehículo en una formación establecida y finalmente realizó las simulaciones y resultados experimentales de la propuesta de estrategia de estimación.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

---

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

En otro estudio experimental, realizado en España por Fernando Gómez Bravo, Federico Cuesta Rojo y Aníbal Ollero Baturone en el año 2003, llamado: **“Planificación de Trayectorias en Robots Móviles basada en Técnicas de Control de Sistemas No-Holónomos”** se ilustraron tres métodos de planificación para robots móviles basados en la aplicación de estrategias de control al modelo cinemático de los mismos. Se particularizó la aplicación de los métodos en un sistema tractor-remolque mediante la generación de maniobras de reorientación del vehículo remolque. Realizó una evaluación comparativa de los resultados obtenidos, resaltando las ventajas y desventajas de cada uno de los métodos.

Pierre Rouchon, Michel Fliess, Jean Lévine y Philippe Martin en el año 1993 realizaron en Francia una investigación experimental llamada **“Flatness and Motion Planning: the car with  $n$  trailers”** en la cual se propuso una solución de planificación sin obstáculos para el sistema no-holónimo que describe un vehículo con  $n$  remolques. La solución se basó fundamentalmente en el hecho de que el sistema es plano y se tienen las coordenadas cartesianas del último remolque como salida lineal. El caso del vehículo con un remolque se trató en detalle y se ilustró a través de simulaciones de aparcamiento.

### 2.2. Bases Teóricas

Después de citar los antecedentes que aportarán información al presente Trabajo Especial de Grado, es necesario presentar los fundamentos teóricos que sustentan este estudio introduciendo conceptos que serán empleados para desarrollar la investigación. Se tratarán los fundamentos básicos de la cinemática, como lo son el modelo de la partícula y del cuerpo rígido que permitirán desarrollar el modelo cinemático del vehículo mediante la relación

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

---

de velocidades, tomando en cuenta condiciones importantes como rodadura y la condición de no-holonomía para el caso de un movimiento plano.

#### 2.2.1. Cinemática

Debido a que el método de planificación de la presente investigación es de tipo cinemático se hace necesario la sustentación de dicho método en base a sus principios. De acuerdo con Riley y Sturges (2005), la cinemática es la parte de la mecánica que “describe cómo varían la velocidad y la aceleración de un cuerpo con el tiempo y su cambio de posición” (p. 14).

- *Modelo de la Partícula:* Según Riley y Sturges (2005) “una partícula es un cuerpo cuyo tamaño puede ignorarse al estudiar su movimiento. Tan sólo hay que considerar su centro de masa. La orientación del cuerpo o su rotación no desempeña ningún papel en la descripción de su movimiento”. (p. 14). Se hace necesario la utilización de este modelo, ya que las ecuaciones presentadas en este trabajo se fundamentan en el movimiento de un punto material.
- *Marco de Referencia:* Según Sears y Zemansky (1998) “un sistema de referencia es un sistema de coordenadas más una escala de tiempo” (p. 78), de esta manera, el movimiento descrito por una partícula es medido por un observador respecto a éste. En este trabajo de grado todas las trayectorias fueron descritas respecto al marco de referencia denominado Tierra.
- *Coordenadas Cartesianas:* El sistema de *Coordenadas Rectangulares* o cartesianas, de acuerdo con Riley y Sturges (2005) se define en base a la figura 1 como un sistema donde “la posición de un punto se describe dando su distancia a dos rectas ortogonales fijas, llamadas eje  $x$  e  $y$  y las coordenadas se denominan componentes  $x$  e  $y$  de la posición. Los vectores

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

unitarios asociados a los ejes  $x$  e  $y$  se representan por  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$ , respectivamente.” (p. 35).

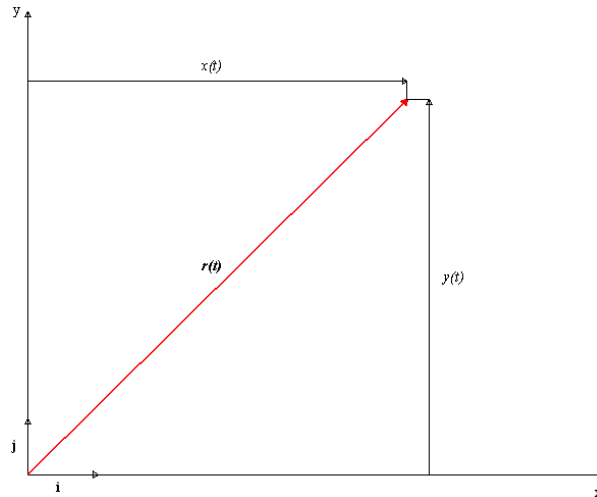


Figura 1: Vector Posición.

- *Vector Posición:* Riley y Sturges (2005) definen el vector posición para un sistema de coordenadas cartesianas de un punto respecto al origen o del sistema fijo de coordenadas como:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad (1)$$

El *vector posición* une al origen de coordenadas con la posición de la partícula y permite describir en forma completa el movimiento de una partícula. Como indica la ecuación anterior y dado que los vectores  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  son fijos, el uso de coordenadas cartesianas permite describir el movimiento del cuerpo únicamente a través de las funciones escalares para la coordenada  $x$  y la coordenada  $y$  como funciones del tiempo, por lo cual son empleadas en esta investigación.

- *Vector Velocidad:* De acuerdo con Riley y Sturges (2005), la velocidad de un punto (denotada por la letra  $\mathbf{v}$ ) es, por definición, “la variación de posición por unidad de tiempo” (p. 15) es decir,



## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

$$\mathbf{v}_0^P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \quad (2)$$

Donde  $P$  es la partícula de estudio y  $O$  es el marco de referencia. En el caso de coordenadas cartesianas esto se traduce en

$$\mathbf{v}_0^P = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}) = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} \quad (3)$$

Este vector es tangente a la trayectoria para todo instante de tiempo. De nuevo, se evidencia que la velocidad también se puede estudiar directamente a través de las funciones escalares para cada coordenada.

- *Modelo del Cuerpo Rígido*: De acuerdo con Beer y Johnston (2004) “un cuerpo rígido es un sistema de partículas consideradas en conjunto” (p. 856). Además, no tienen ningún desplazamiento relativo entre sí, lo cual implica que el sistema no se modifica geoméricamente, así como tampoco pierde ni gana masa, por lo que mantienen constantes todas sus otras propiedades inerciales. En esta investigación, es de notable interés la relación cinemática de velocidades entre dos puntos de un cuerpo rígido, la cual se expresa a través de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{v}_0^{A1} = \mathbf{v}_0^{B1} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{BA} \quad (4)$$

Donde  $A$  y  $B$  son dos puntos del mismo cuerpo rígido (1) medidos desde el marco de referencia inercial (0),  $\boldsymbol{\omega}_{10}$  es la velocidad angular del cuerpo respecto al mismo sistema de referencia y  $\mathbf{BA}$  es el vector distancia entre  $A$  y  $B$ .

- *Centro Instantáneo de Rotación (CIR)*: se conoce también como Centro Instantáneo de Curvatura, y de acuerdo a Riley y Sturges (2005) es “un punto perteneciente a un cuerpo rígido o a una extensión no material de éste, en el cual la velocidad, medida desde un marco de referencia inercial es nula” (p. 97). Cuando el CIR existe en un cuerpo, es único para cada instante particular de tiempo y en el caso particular de cuerpos en rodadura, este

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

punto es llamado también Centro Instantáneo de Rodadura. En este trabajo se empleó esta definición para conseguir el radio de curvatura mínimo del robot con el remolque.

- *Rodadura:* De acuerdo a Sears y Zemansky la rodadura “es un caso importante de traslación y rotación combinadas... donde el punto de la rueda que toca la superficie debe estar momentáneamente en reposo” (p. 302) esto se traduce en:

$$\mathbf{v}_0^{c1} = \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{r} \quad (5)$$

Esto es un caso particular de la ecuación (4), donde  $c$  es el centro de la rueda (cuerpo 1) y  $\mathbf{r}$  es el radio de la misma. En el desarrollo del modelo cinemático del sistema, se consideró la condición de rodadura, que involucra los siguientes aspectos:

1. La superficie sobre la que se produce el movimiento es suave pero tiene rugosidad.
  2. El objeto que rueda posee con un contacto único con esta superficie por lo que no hay deslizamiento traslacional entre la rueda y el suelo.
  3. El punto de contacto carece de velocidad relativa entre ambos cuerpos, es decir, el punto de contacto entre la superficie y el objeto que “rueda” es, en consecuencia, el Centro Instantáneo de Rodadura.
- *Maniobrabilidad:* Según Francisco José Rodríguez Urbano “es la suma de la movilidad, debida a las restricciones de deslizamiento (grado de movilidad) y la movilidad adicional, debida a la dirección de las ruedas orientables (grado de direccionabilidad)”.

La maniobrabilidad se traduce en una medida para implementar el control del sistema ya a medida que este valor es más alto, el sistema requiere mayor cantidad de variables para su control. En este trabajo el grado de movilidad del vehículo utilizado es 2 ya que posee dos ruedas motrices controladas

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

---

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

independientemente y el grado de direccionalidad es 0 porque no posee ruedas directrices, por lo tanto la maniobrabilidad del sistema de tracción diferencial es 2.

#### **2.2.2. Robótica**

Una vez abordados los fundamentos cinemáticos aplicados al modelo desarrollado en esta investigación, es necesario establecer la relación entre éstos y su aplicación a los sistemas de control para vehículos autónomos.

La Real Academia Española (2001) define la robótica como la “técnica que aplica la informática al diseño y empleo de aparatos (denominados robots) que, en sustitución de personas, realizan operaciones o trabajos, por lo general en instalaciones industriales”. Algunos autores como Choset y Lynch (2005) la definen como un arte en vez de sólo una técnica.

#### *Estado del Arte*

En el presente siglo, el desarrollo de máquinas ha estado fuertemente influido por el progreso tecnológico. De esta forma se pasa de máquinas que tienen como objetivo exclusivo la amplificación de la potencia muscular del hombre, sustituyéndolo en su trabajo físico, por máquinas o instrumentos que son también capaces de procesar información, complementando, o incluso sustituyendo al hombre en algunas actividades intelectuales.

El objetivo del control automático es regular procesos sin la intervención de agentes exteriores, especialmente el hombre, quien tomaría el papel de supervisor del proceso.

De acuerdo a la investigación de Gil (2007) según Bloch (2003), existen dos estrategias principales de control aplicables a los robots:

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

---

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

- *Lazo Abierto*: la estrategia de control en lazo abierto busca trayectorias viables en la configuración del espacio libre que conecta un punto inicial con uno final. Toman en consideración varios criterios para evitar obstáculos, el camino más corto y el mínimo esfuerzo de control. El camino más corto con entre dos puntos orientados en el plano sujetos a un límite inferior en el radio de giro fue estudiado por Dubins (1957), al estructurar la ruta en más de tres segmentos de arcos y líneas rectas. Reeds y Sheep (1990) añadieron más maniobrabilidad al emplear más de cinco segmentos de arcos y líneas rectas en el estudio de caminos óptimos. Por otro lado, Laumond (1987) propuso un algoritmo para planificar caminos circulares con maniobras libres de obstáculos para robots no-holónomos cuyo radio de giro fuera un límite inferior. Sin embargo, estas técnicas de lazo abierto no compensan perturbaciones, errores de modelo ni alteraciones en el espacio de configuración donde se encuentra el robot.
- *Lazo Cerrado*: en las estrategias de control en lazo cerrado, la entrada de control es función del estado del sistema para que de esta manera se puedan compensar alteraciones. Generalmente, no hay una ley de control con retroalimentación suave que convierta una información dada en asintóticamente estable. Esto significa que los controladores estabilizadores deberían ampliarse para incluir una retroalimentación no tan suave y variable en el tiempo en las leyes de control. Dada la falta de leyes de control con retroalimentación suave, se trabaja siguiendo trayectorias y siguiendo movimientos de referencia distintos de cero. Otras estrategias de control han sido empleadas para seguimiento de control local de vehículos con ruedas, tales como control PID o modo de deslizamiento.

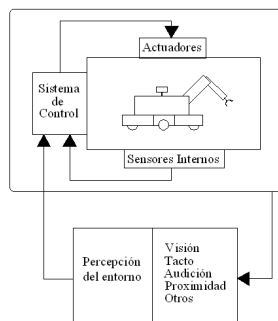
## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónomo con Remolque

La planificación de trayectorias para sistemas no-holónomos es un caso de estos problemas de control y ha sido objeto de una gran cantidad de investigaciones. Éstas han tenido como objetivo encontrar una trayectoria desde una posición inicial a una posición objetivo, evitando obstáculos, y minimizando una determinada función de costo. Dicha planificación se clasifica de acuerdo a la naturaleza del problema, es decir, con o sin obstáculos o por la función costo a ser minimizada como el tiempo o la energía.

Entre los primeros enfoques en la planificación de trayectorias para robots móviles se encuentran el ya mencionado trabajo de Dubins (1957), y el de Reeds y Shepp (1990). En ambos se obtuvo como solución una curva de longitud mínima para robots en ambientes libres de obstáculos la cual puede ser finalmente parametrizada.

#### *Diseño de la Arquitectura Robótica*



*Figura 2: Robot y su interacción con el entorno.*

De acuerdo con Ollero (2001), en la figura 2 se muestra el esquema básico de un robot. En ella se identifican un sistema mecánico, actuadores, sensores y el sistema de control como elemento básico necesario para cerrar la cadena actuación-medidas-actuación.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

---

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

Desde el punto de vista del procesamiento de la información, en robótica se involucran funciones de control de movimientos, *percepción* y planificación. En un sentido amplio, el sistema de control involucra tanto lazos de retroalimentación de la información suministrada tanto por los sensores internos, como por la información del entorno.

Los sensores externos permiten la obtención de información desde el entorno. Con esta información es posible adaptar automáticamente el comportamiento de un robot en función de las variaciones que se producen en su entorno, haciendo frente a situaciones imprevistas. Para ello, el sistema de control del robot incorpora lazos de realimentación sensorial del entorno, generando acciones en función de la comparación de dicha información sensorial con patrones de referencia.

Los sensores internos miden el estado de la estructura mecánica y, en particular, giros o desplazamientos relativos entre las articulaciones, velocidades, fuerzas y pares. Estos sensores permiten cerrar lazos de control de las articulaciones de la estructura mecánica.

Uno de los sensores internos más comunes lo constituyen los servosistemas, los cuales generan automáticamente señales de control que tratan de anular la diferencia entre la señal de consigna y la señal medida en el proceso u objeto que se pretende controlar.

El módulo Lego® NXT™ empleado en esta investigación, posee este tipo de sensores tanto para la recepción de información externa como para el manejo de la información interna. Sin embargo, para la realización de este trabajo de grado sólo se emplearon los sensores internos de rotación de los servomotores del NXT™, que hacen posible que el robot controle en lazo cerrado la velocidad de cada rueda en conjunto con el sensor externo ultrasónico usado para detenerse ante un obstáculo no previsto.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

#### *Robots Móviles*

Como planteó Ollero (2001) “en el término robot confluyen las imágenes de máquinas para la realización de trabajos productivos y de imitación de movimientos y comportamiento de seres vivos”.

Los robots móviles autónomos son aquéllos que cuentan con alguna forma de lógica propia y pueden actuar al tomar decisiones de acuerdo a ella sin necesitar supervisión constante.

El desarrollo de robots móviles responde a la necesidad de extender el campo de aplicación de la robótica, restringiendo inicialmente al alcance de una estructura mecánica anclada en uno de sus extremos.

En el caso de los robots móviles, la definición de la trayectoria debe tener en cuenta las características cinemáticas del vehículo contemplando la interacción vehículo-terreno. Por otra parte, puede también plantearse el problema de la planificación de la velocidad teniendo en cuenta las características del terreno y del camino que se pretende seguir.

Hay varios tipos de robot móviles, entre los que se encuentran:

- Con ruedas.



*Figura 3: Robot con Ruedas (Nomad).*

- Aéreos.



*Figura 5: Robot tipo aéreo.*

- Humanoides.



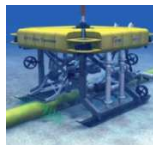
*Figura 7: Robot humanoide (Asimo, de Honda)*

- Con patas.



*Figura 4: Robot con Patas.*

- Submarinos.



*Figura 6: Robot submarino.*

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

---

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

#### *Vehículos con Ruedas*

De acuerdo con Ollero (2001) los vehículos con ruedas son la solución más simple y eficiente para conseguir la movilidad en terrenos suficientemente duros y libres de obstáculos, permitiendo conseguir velocidades relativamente altas. Sin embargo, esta locomoción es poco eficiente en terrenos blandos y tiene como limitación más significativa el deslizamiento en la impulsión. Por otra parte, excepto en configuraciones especiales, no es posible alterar internamente el margen de estabilidad para adaptarse a la configuración del terreno, lo que limita de forma importante los caminos aceptables del soporte, por lo que se emplearon siempre terrenos sólidos y lisos.

Los robots móviles con locomoción mediante ruedas poseen características y propiedades diferentes respecto a la eficiencia energética, dimensiones, cargas útiles y maniobrabilidad.

#### *Tipos de Locomoción de los Vehículos con Ruedas*

Los vehículos con ruedas se distinguen debido a su forma de locomoción y se clasifican en:

##### **1. Ackerman**

El sistema se basa en dos ruedas traseras locomotoras que se montan de forma paralela en el chasis principal del vehículo, mientras que dos ruedas delanteras son las directrices y se utilizan para seguir la trayectoria del robot. El mayor problema de este sistema es la limitación en la maniobrabilidad, se presentan dos ángulos de giro, uno en cada rueda delantera, lo que genera problemas a la hora de realizar el control. En la figura 8 se puede observar este tipo de locomoción.



## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

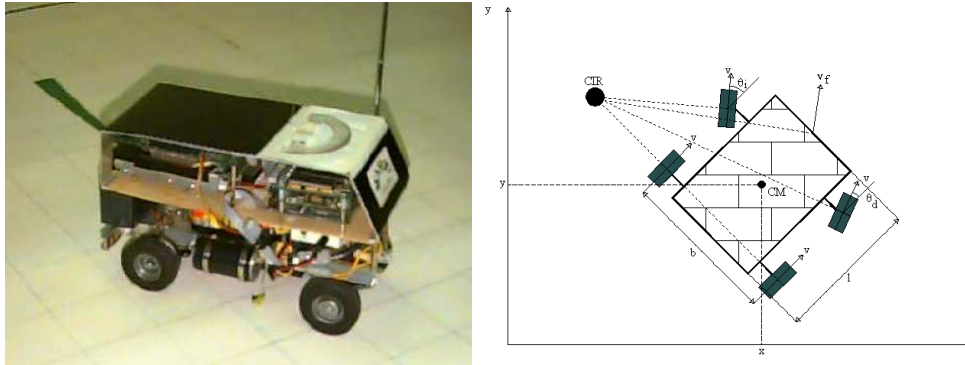


Figura 8: Izquierda: Robot móvil con tracción Ackerman. Derecha: Sistema Ackerman.

### 2. Triciclo Clásico

Este sistema de locomoción se basa en una rueda delantera que sirve tanto para la tracción como para el direccionamiento. El eje trasero, con dos ruedas laterales, es pasivo y sus ruedas se mueven libremente. La maniobrabilidad es mejor que en la configuración Ackerman debido a la existencia de una sola rueda de direccionamiento, pero a su vez se puedan presentar problemas de estabilidad en terrenos abruptos.

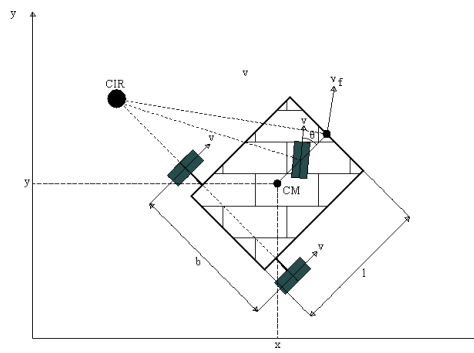


Figura 9: Sistema de Triciclo Clásico.

### 3. Skid Steer

En este sistema se disponen varias ruedas en cada lado del vehículo que actúan de forma simultánea. El movimiento es el resultado de combinar las

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

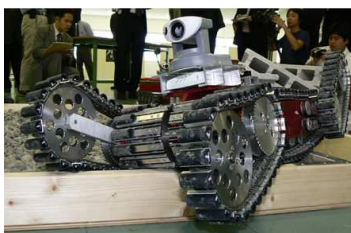
velocidades de las ruedas de la izquierda con las de la derecha. Estos robots se han empleado para la inspección y obtención de mapas de tuberías enterradas utilizando para ello sistemas de radar (*Ground Penetrating Radar*), aplicaciones mineras y de exploración espaciales no tripuladas, entre otras.



*Figura 10: Robot móvil con tracción tipo Skid Steer.*

#### **4. Pistas de deslizamiento**

Son vehículos tipo oruga en los que tanto la impulsión como el direccionamiento se consiguen mediante pistas de deslizamiento. Pueden considerarse funcionalmente análogas al *Skid Steer*. Esta locomoción es útil en navegación “a campo traviesa” o en terrenos irregulares, ya que presenta un buen rendimiento debido a que la impulsión está menos limitada por el deslizamiento y la resistencia al desgaste es mayor.



*Figura 11: Robot móvil tipo Pistas de Deslizamiento.*

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

### 5. Síncronas

Consiste en la actuación simultánea de todas las ruedas, que giran de forma síncrona. La transmisión se consigue mediante coronas de engranajes (*Syncro Drive*) o con correas concéntricas. En una conducción sincrónica del robot, cada rueda es capaz de ser conducida y dirigida. En este tipo de tracción se puede controlar la orientación del eje de rotación.



Figura 12: Tracción de Tipo Síncrona.

### 6. Tracción Omnidireccional

Este sistema de tracción se basa en la utilización de tres ruedas directrices que a la vez son motrices. Al tener tres grados de libertad, puede realizar cualquier movimiento, y posicionarse en cualquier orientación.

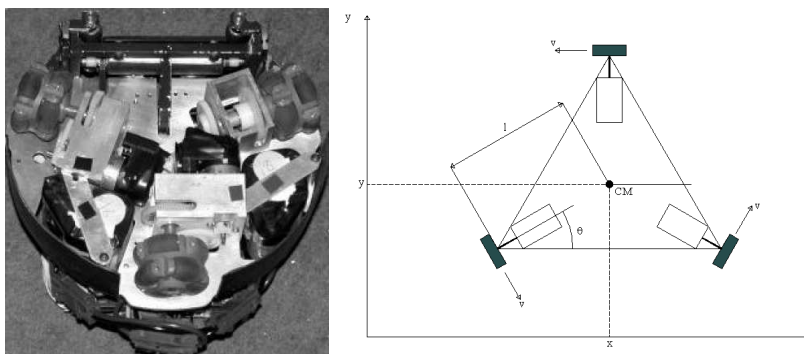


Figura 13: Izquierda: Robots de Tracción Omnidireccional. Derecha: Configuración.

### 7. Otras Configuraciones

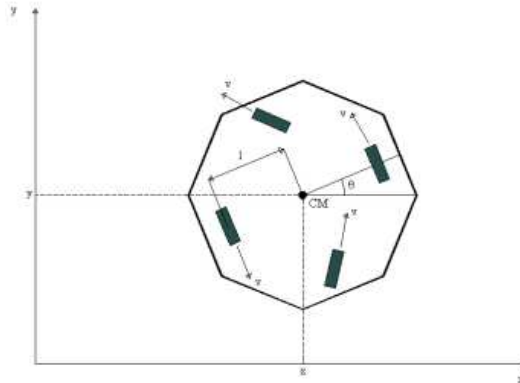


Figura 14: Sistema de Locomoción RAM1.

El sistema de locomoción de RAM1 (Ollero y otros, 1995) consiste en cuatro ruedas dispuestas en los vértices de un rombo, siendo la diagonal principal el eje del vehículo. Las ruedas laterales son controladas de forma independiente. Con este sistema es posible tener un radio de giro nulo y se mantiene las buenas propiedades del guiado diferencial en el seguimiento de caminos.

Otra configuración consiste en el empleo de ruedas especiales, tales como las denominadas “ruedas suecas”, que permiten conseguir el movimiento omnidireccional de un vehículo con cuatro ruedas de este tipo adecuadamente controladas.

### 8. Tracción Diferencial

Este tipo de locomoción es controlado por la diferencia de velocidades de dos ruedas laterales que son las responsables de proporcionar la tracción. Adicionalmente existen una o más ruedas para soporte.

Dichas ruedas están dispuestas en los extremos de un único eje y son independientemente propulsadas y controladas por dos servomotores. Los

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

*parámetros de control* de este sistema son las velocidades de ambas ruedas, de modo que la combinación la rotación de ambas provoca el movimiento alrededor del CIR y se utiliza este fenómeno para hacer girar el robot. Para que el robot gire a la derecha sólo es necesario aumentar la velocidad del lado izquierdo; para ir en línea recta ambas ruedas deben tener la misma velocidad. Este sistema presenta la posibilidad de cambiar su orientación sin movimientos de traslación, lo que se conoce como cambio de *spin*.



Figura 15: Robot móvil con tracción diferencial.

En la figura 15 se muestra el robot móvil empleado en el desarrollo de este estudio. Presenta un tipo de locomoción de tracción diferencial trasera, es decir, dos ruedas motrices traseras más una de apoyo en la parte delantera para darle estabilidad. Las ruedas motrices son las que proporcionan la tracción al robot y la rueda de estabilidad (rueda delantera) o “rueda loca” es una rueda orientable no controlada. En la figura 16 se presenta el esquema de este vehículo que se estudiará más a fondo en apartados sucesivos.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

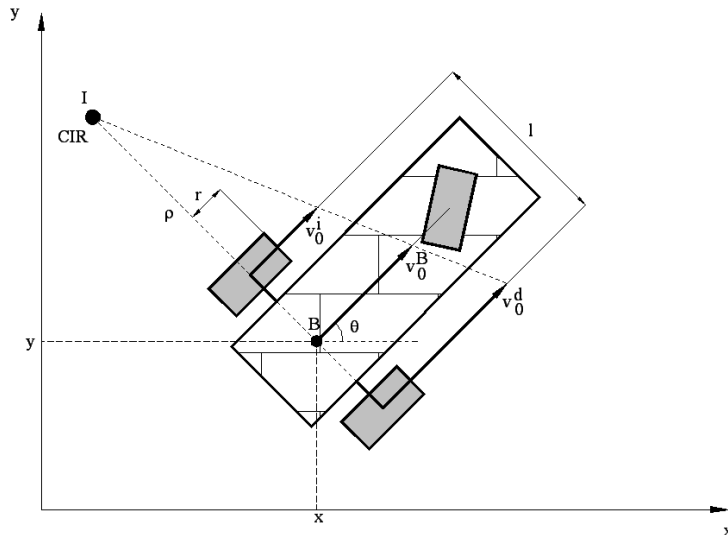


Figura 16: Sistema de Tracción Diferencial.

Este tipo de locomoción es muy sensible a la velocidad relativa de las ruedas (pequeños errores en la velocidad podrían producir diferentes trayectorias) porque no existen ruedas directrices. Además, el cambio de diámetro de las ruedas también distorsiona el control de dirección del vehículo.

### 2.2.3. Condición de No-Holonomía

Una vez expresado que la configuración con la que se trabajará es la de sistema de tracción diferencial, para estudiar el movimiento del robot es necesario tener presente las restricciones impuestas por el sistema, siendo la condición de no-holonomía una de ellas.

*Sistema No-holónimo:* Un sistema no-holónimo, es aquél donde su estado depende del camino a recorrer para lograr un movimiento. Tal sistema, es descrito por una serie de parámetros sujetos a restricciones diferenciales, de manera que cuando el movimiento del sistema se desarrolla a lo largo de una curva en el espacio o en plano, los valores de los parámetros varían

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

continuamente en el tiempo. De acuerdo con Gil (2007) el movimiento de un robot móvil con ruedas está sujeto a restricciones no-holónomas debido a las limitaciones de rodadura de las ruedas, lo que hace imposible un movimiento perpendicular a las ruedas (p. 7).

#### *Condición de no-holonomía*

La condición de no-holonomía establece que el robot puede trasladarse instantáneamente hacia delante o hacia atrás, pero no hacia los laterales, sin que exista derrape.

#### *Control de Sistemas No-Holónomos*

Basado en el estudio realizado por Gil (2007), cuando los sistemas poseen restricciones no integrables, se debe hacer énfasis en las propiedades de control, que no tienen una contraparte en sistemas holónomos. El modelo de un sistema no-holónimo debe ser presentado primero en términos de ecuaciones diferenciales algebraicas definidas en la base de un espacio. Un procedimiento de reducción puede ser llevado a cabo para obtener ecuaciones de estado de menor orden. La principal característica de sistemas mecánicos no-holónomos puede ser ilustrada con el ejemplo del *monociclo*.

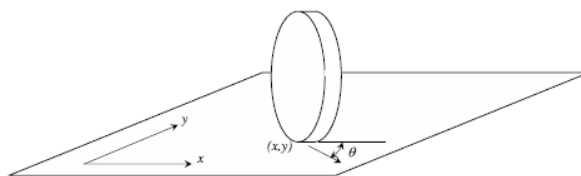


Figura 17: Sistema del Monociclo.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

La representación cinemática del sistema del monociclo se compone de la velocidad lineal del centro de la rueda  $\mathbf{v}=\mathbf{u}_1$  y la velocidad angular de dirección  $\dot{\theta} = \mathbf{u}_2$ . De acuerdo con esto, la entrada de control del monociclo puede ser representada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathbf{u}_1 \cdot \cos(\theta) \\ \dot{y} = \mathbf{u}_1 \cdot \sin(\theta) \\ \dot{\theta} = \mathbf{u}_2 \end{cases} \quad (6)$$

En donde se satisface la restricción de no-holonomía:

$$\dot{y} \cdot \cos(\theta) - \dot{x} \cdot \sin(\theta) = 0 \quad (7)$$

Al conjunto de configuraciones del sistema se le llama  $\mathbf{z}$ , este vector, llamado *configuración*, reúne las posiciones y el ángulo de orientación del sistema; es decir,  $\mathbf{z} = [x, y, \theta]$ . Al aplicar esta definición, el sistema de ecuaciones (6) puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{u}_1 \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{u}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

La ecuación (8) implica que para cada configuración  $\mathbf{z}$  hay sólo dos posibles movimientos representados a través de dos vectores llamados *vectores de campo*. El primero de ellos,  $\mathbf{g}_1 = [\cos(\theta) \quad \sin(\theta) \quad 0]^T$ , representa el movimiento de rodadura con velocidad unitaria del monociclo y  $\mathbf{g}_2 = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ , es la parte de la velocidad unitaria que representa el giro en el plano. Por lo tanto, la capacidad del monociclo para desplazarse y girar puede ser representada por estos dos vectores de campo  $\mathbf{g}_1$  y  $\mathbf{g}_2$ . La representación gráfica de los vectores de campo del ejemplo del monociclo se puede apreciar en la figura 18.



## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

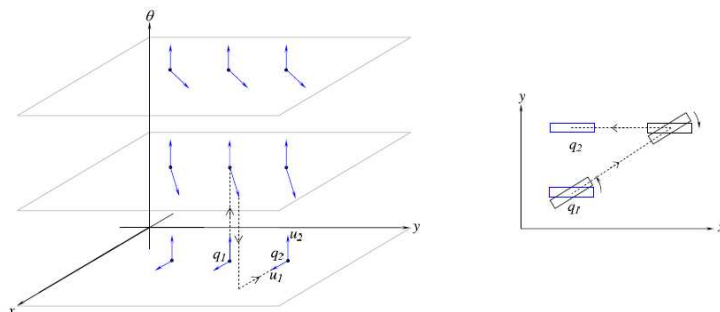


Figura 18: Campo vectorial de maniobra del monociclo  $z_1, z_2$ .

#### 2.2.4. Curva de Dubins

En este Trabajo Especial de Grado, se abordó el problema de planificación mediante las curvas de Dubins para representar la trayectoria a seguir por el vehículo, ya que las mismas pueden ser empleadas ajustándose a la condición de no-holonomía.

Según Dubins (1957) estas curvas “son combinaciones de círculos de radio mínimo y líneas rectas que han demostrado ser el camino de longitud mínima limitado por radios entre dos puntos con direcciones especificadas” (p. 497).

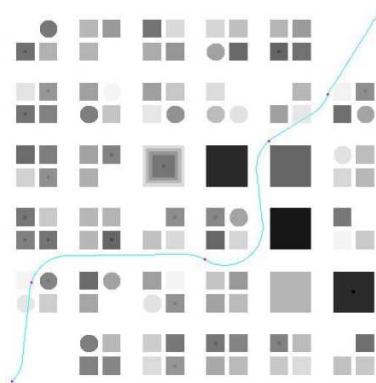


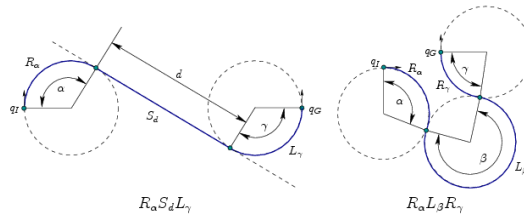
Figura 19: Ejemplo de Curvas de Dubins para generar una trayectoria

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

Como el modelo con el remolque tiene un mínimo radio de giro, las curvas de Dubins pueden aproximarse a modelar el camino en el que se va a desenvolver el sistema vehículo-remolque.

Asimismo, Dubins (1957) asegura que “el camino más corto entre dos configuraciones siempre puede ser encontrado mediante las curvas de Dubins” (p. 507).



*Figura 20: Esquemas de Curvas de Dubins*

La figura 20 ilustra dos casos de la curva de Dubins. Los trozos rectos y arcos de circunferencias en la trayectoria se conocen como primitivas y sus dimensiones deben ser especificadas. En el esquema,  $L$  denota rotación a la izquierda (*Left*) y  $R$  denota rotación a la derecha (*Right*). Los subíndices denotan la cantidad total de rotación en radianes que se acumula durante la aplicación de la primitiva. Para  $S$  (*Straight*) el subíndice denota la distancia total recorrida. Utilizando tales sub-índices, las curvas de Dubins se describen de la siguiente manera:

$$\{L_\alpha R_\beta L_\gamma \quad R_\alpha L_\beta R_\gamma \quad L_\alpha S_d L_\gamma \quad L_\alpha S_d R_\gamma \quad R_\alpha S_d L_\gamma \quad R_\alpha S_d R_\gamma\}$$

Donde

$$\alpha, \gamma \in [0, 2\pi)$$

$$\beta \in (\pi, 2\pi)$$

$$d \geq 0$$

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

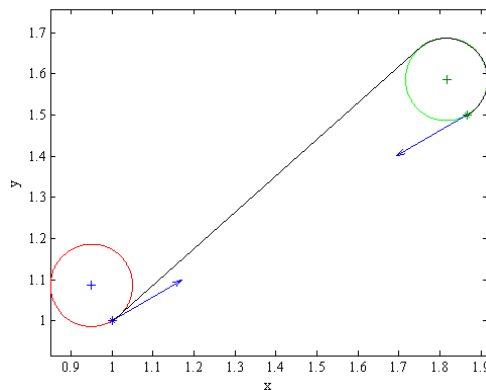


Figura 21: Representación en MATLAB® de una Curva de Dubins con ángulo de salida  $\pi/6$  y ángulo de llegada  $7\pi/6$

#### 2.2.5. Curvas B-Spline

Las curvas de Dubins no son la única manera de solventar el problema de planificación. Existen otras curvas paramétricas polinómicas que también son capaces de hacerlo, éstas son las denominadas curvas *B-Spline* y para definir las con precisión se requiere describir previamente las funciones base de las mismas.

#### *Trayectorias con Parametrizaciones Polinómicas*

Para modelar las trayectorias que va a describir el robot es necesario según Piegl y Tiller (1997) hacerlo mediante ecuaciones paramétricas, por lo que se obtiene una variedad de curvas al permitir que las funciones coordenadas  $x(t)$  y  $y(t)$  sean arbitrarias. La situación ideal conlleva restringirse a funciones que:

- Sean capaces de representar con precisión todas las curvas requeridas.
- Sean simples y matemáticamente bien entendidas.
- Sean fácil y eficientemente implementadas en sistemas computacionales, en particular:

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

- La programación de los puntos y derivadas en las curvas sea eficiente en términos del tiempo de las corridas.
- El procesamiento numérico de las funciones sea relativamente insensible a los errores por redondeo dados en los puntos flotantes.
- Requieran poca memoria de almacenaje, para poder introducir las en el lenguaje del robot.

Una curva polinómica básica ( $C(t)$ ) de enésimo grado viene dada por:

$$C(t) = (x(t), y(t), z(t)) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i \cdot t^i$$
$$t \in [0,1] \quad (9)$$

Las expresiones  $\mathbf{a}_i$  son vectores de la forma  $\mathbf{a}_i = [x_i, y_i, z_i]$  y, por lo tanto, la curva  $C$  puede escribirse en forma matricial:

$$C(t) = [\mathbf{a}_i]^T \times [t^i] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^n \end{bmatrix} \quad (10)$$

Los términos de  $[t^i]$  son llamados las *Funciones Base* y los elementos de  $[\mathbf{a}_i]$  son los coeficientes de la base. Por otro lado, las ecuaciones (9) y (10) también puede separarse en las siguientes tres ecuaciones (para el caso de una curva en el espacio  $\mathbb{R}^3$ ):

$$x(t) = \sum_{i=0}^n x_i \cdot t^i \quad (11a)$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot t^i \quad (11b)$$

$$z(t) = \sum_{i=0}^n z_i \cdot t^i \quad (11c)$$

En esta investigación, el interés se centrará en las ecuaciones (11a) y (11b), ya que son aquellas involucradas en el movimiento plano a estudiado.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

### *Curvas de Bèzier*

Según Piegl y Tiller (1997) la curva de Bèzier (patentada por el ingeniero francés Pierre Bèzier) “es una curva paramétrica polinomial matemáticamente equivalente a las curvas bases descritas anteriormente, ya que ambas utilizan polinomios para crear las coordenadas” (p.9), sin embargo las curvas de Bèzier superan a las curvas básicas en cuanto a la realización de modelos geométricos debido a que las formas básicas tienen las siguientes desventajas:

- Los coeficientes  $[a_i]$  convergen muy poco geoméricamente con respecto a la forma de la curva. Un diseñador típicamente quiere especificar las condiciones en ambos extremos de la curva, no sólo en el punto inicial.
- Los algoritmos para procesar las formas básicas polinomiales tienen una orientación algebraica en vez de geométrica.
- Numéricamente, no dan los resultados esperados, por ejemplo el método de Horner es propenso a errores por redondeo si los coeficientes varían sustancialmente en magnitud.

El método de Bèzier solventó todas estas limitaciones. Una curva de Bèzier de  $n$ -ésimo grado se define como:

$$C(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,n}(t) \cdot P_i$$
$$t \in [0,1] \quad (12)$$

Los coeficientes  $P_i$  son llamados Puntos de Control y las funciones base  $[N_{i,n}(t)]$  son los polinomios clásicos de Bernstein de  $n$ -ésimo grado, dados por:

$$N_{i,n}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot t^i \cdot (1-t)^{n-i} \quad (13)$$

En la figura 22 se puede observar un conjunto polinomios clásicos de Bernstein de grado 3 utilizados para generar la curva de Bèzier de la figura 23, también de grado 3.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

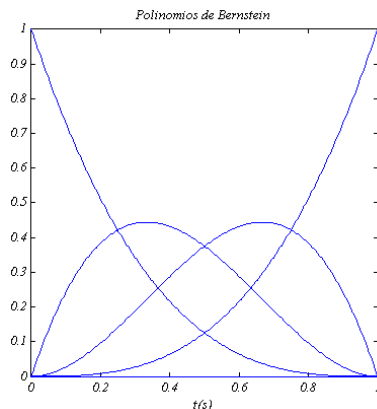


Figura 22: Polinomios de Bernstein de grado 3.

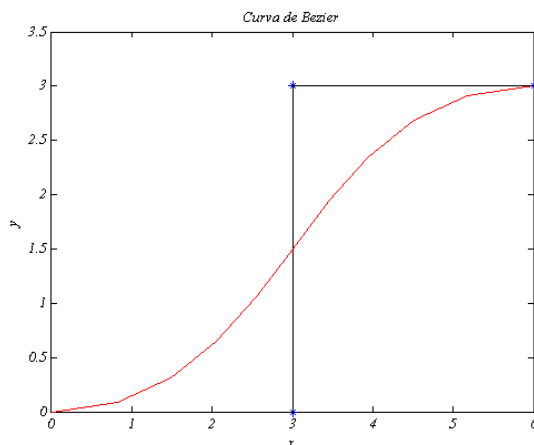


Figura 23: Curva de Bèzier de grado 3.

#### *Propiedades de los Polinomios de Bernstein:*

Las propiedades de estos polinomios según Piegl y Tiller (1997), que pueden apreciarse en el caso de la figura 22, son las siguientes:

1. No negatividad: Los polinomios sólo toman valores positivos o se hacen nulos en el intervalo  $0 \leq t \leq 1$ . Esto es:  $N_{i,n}(t) \geq 0, \forall i, n$ .
2. Partición de la unidad: La suma de los polinomios de Bernstein en el intervalo  $0 \leq t \leq 1$  es siempre 1, es decir:  $\sum_{i=0}^n N_{i,n}(t) = 1, \forall t \in [0,1]$ .

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

3. Para  $t=0$  y  $t=1$  sólo dos polinomios de Bernstein adquieren el valor de 1, éstos son el primero ( $i=0$ ) y el último ( $i=n$ ) respectivamente. Esto es:  $N_{0,n}(0) = N_{n,n}(1) = 1$ . El resto de ellos toman valores menores a 1.
4. Los polinomios de Bernstein sólo tienen un único valor máximo en el intervalo  $[0,1]$ , el cual ocurre en  $t = \frac{i}{n}$ ,  $\forall N_{i,n}(t)$ .
5. Simetría: Para cualquier valor de  $n$ , el conjunto de polinomios  $N_{i,n}(t)$  es simétrico respecto a  $t = \frac{1}{2}$ .
6. Definición por recursividad: Los polinomios de Bernstein pueden generarse de forma recursiva de acuerdo a la siguiente expresión  $\forall i \in (0, n)$ :

$$N_{i,n}(t) = (1 - t) \cdot N_{i,n-1}(t) + t \cdot N_{i-1,n-1}(t) \quad (14)$$

7. Derivación por recursividad: De modo análogo a la ecuación (14), las derivadas de estos polinomios se pueden obtener por recursividad:

$$N'_{i,n}(t) = \frac{d}{dt} N_{i,n}(t) = n \cdot (N_{i-1,n-1}(t) - N_{i,n-1}(t)) \quad (15)$$

### *Curvas B-Spline*

Existen muchos tipos de curvas que pueden emplearse para aproximar la trayectoria del sistema a controlar como, por ejemplo, series de Fourier, segmentos racionales y los ya citados polinomios básicos. Sin embargo, según Piegl y Tiller (1997) las Curvas *B-Spline* son la mejor manera de representar y manipular formas en programas computacionales ya que cumplen con la

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

capacidad de establecer un nivel de continuidad, sin añadir restricciones adicionales.

La curva *B-Spline* (*Bèzier-Spline*), es una curva polinómica a trozos construida en base a los polinomios de Bèzier. Éstos garantizan continuidad con un sistema numérico de implementación estable. Según Piegl y Tiller (1997) “para definir las funciones *B-Spline* y comprobar la importancia de sus propiedades, se emplea la función de recurrencia, en vista de su utilidad para ser implementada en sistemas de computación” (p. 50).

Se define un conjunto creciente de números reales  $\mathbf{U} = \{u_0, \dots, u_m\}$ , es decir,  $u_i \leq u_{i+1}$ ,  $\forall i \in [0, m - 1]$ . Los elementos  $u_i$  son llamados *nodos*, y  $\mathbf{U}$  es el vector de nodos. La primera función *B-Spline*, se define como:

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq t \leq u_{i+1} \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases} \quad (16)$$

La  $i$ ésima función básica *B-Spline* de grado  $n$  (orden  $p=n+1$ ), denotado por  $B_{i,n}(t)$  se define, utilizando la propiedad de recursividad de las curvas de Bèzier, como:

$$B_{i,n}(t) = \frac{t-u_i}{u_{i+n}-u_i} \cdot B_{i,n-1}(t) + \frac{u_{i+n+1}-t}{u_{i+n+1}-u_{i+1}} \cdot B_{i+1,n-1}(t) \quad (17)$$

### Características de las *B-Spline*

1.  $B_{i,0}(t)$  es la función escalón, igual a cero en todos los puntos excepto en el intervalo semiabierto  $t \in [u_i, u_{i+1})$ .
2. Para  $p>0$ ,  $B_{i,n}(t)$  es una combinación lineal de dos funciones básicas de grado  $n-1$ .



## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

3. La programación de un conjunto de estas funciones requiere la especificación de un vector de nodos ( $U$ ) y el grado  $n$ .
4. Aunque el interés se centra en el intervalo  $[u_0, u_m]$ , los polinomios  $B_{i,n}(t)$  son funciones a trozos que están definidos en toda la recta real.
5. El intervalo semiabierto  $[u_i, u_{i+1})$  proporciona la anchura del *iésimo* segmento entre nodos, que puede incluso tener longitud cero cuando los nodos tengan el mismo valor.
6. La programación de una función de grado  $n$  se esquematiza mediante una tabla triangular truncada como la siguiente:

$$\begin{array}{cccc}
 B_{0,0} & & & \\
 B_{1,0} & B_{0,1} & & \\
 B_{2,0} & B_{1,1} & B_{0,2} & B_{0,3} \\
 B_{3,0} & B_{2,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\
 B_{4,0} & B_{3,1} & B_{2,2} & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

Al generar la secuencia anterior utilizando un vector de nodos específico y un grado ( $n=3$ ) en MATLAB® se obtiene la siguiente curva:

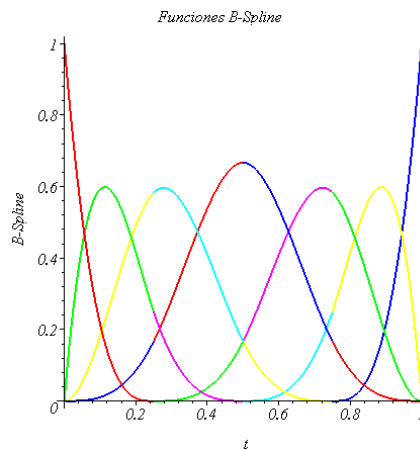


Figura 24: Polinomios B-Spline con  $U=\{0,0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1,1\}$

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

De acuerdo a los polinomios *B-Spline* anteriores, las Curvas *B-Spline* se definen de manera análoga a las ecuaciones (11), para el caso plano:

$$C_x(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot X_i \quad (18a)$$

$$C_y(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \cdot Y_i \quad (18b)$$

Al conjunto  $\mathbf{P}_i = [X_i, Y_i]$  se le llama *Puntos de Control* y constituyen los vértices de un polígono en el plano  $xy$  llamado *Polígono de Control*.  $B_{i,n}(t)$  son las funciones *B-Spline* de grado  $n$  ya mencionadas pero definidas con un vector de nodos específico de  $m+1$  nodos de la forma:

$$\mathbf{U} = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{n+1}, u_{n+1}, \dots, u_{m-n-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{n+1} \right\} \quad (19)$$

El número de *Puntos de Control* ( $k$ ) y el número nodos ( $m$ ), no son dos parámetros independientes, están relacionados según la expresión:

$$k = m - n - 1 \quad (20)$$

Sujeto a la condición del número de nodos mínimos:

$$m > 2(n + 1) \quad (21)$$

Se debe resaltar que si  $m = 2(n + 1)$  y  $\mathbf{U} = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{n+1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{n+1}\}$  entonces se presenta el caso en que la curva *B-Spline* es exactamente una curva de Bèzier.

El grado que se utilizará en este Trabajo Especial de Grado dependerá del desarrollo del modelo para el vehículo en configuración diferencial, lo cual se aborda en el Capítulo III.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

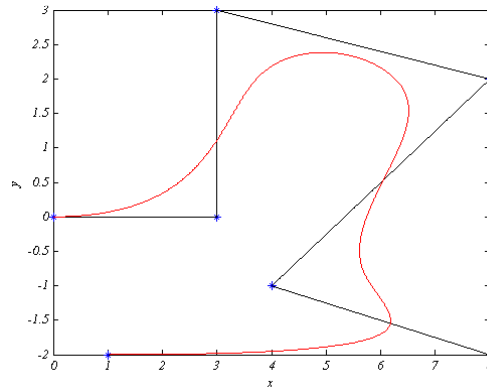


Figura 25: Curva B-Spline generada a partir de los polinomios de la figura 24. Las líneas negras representan el polinomio de control.

#### 2.2.6. Modelo Cinemático

Como se vio anteriormente, las curvas *B-Spline* son lo suficientemente versátiles y estables como para lograr conectar la configuración inicial con la final en una única curva continua. La obtención de la trayectoria más adecuada va a depender de las características del sistema móvil así como del entorno y esto lleva a la necesidad de plantear un modelo cinemático coherente con ambos, de manera tal que pueda ser sometido a operaciones de optimización.

Para proponer una solución de modelo al vehículo con y sin remolque, es necesario que el sistema sea diferencialmente plano. Esto ocurre si el sistema de control cumple las siguientes condiciones:

1. Existe un conjunto finito de variables  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$  que son diferencialmente independientes, es decir, que no están relacionadas por ninguna ecuación diferencial.
2. Los  $\gamma_i$  son funciones diferenciales de las variables del sistema, es decir, son funciones de las variables del sistema (estado, entradas, etc.) y de un número finito de sus derivadas.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

3. Cualquier variable del sistema es una función diferencial de los  $\gamma_i$  es decir, es una función de los  $\gamma_i$  y de un número finito de sus derivadas.

Se llama  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$  a una salida plana o lineal. Su número de componentes equivale al número de canales de entrada independientes. Es de hacerse notar, que el concepto de sistema plano, que puede ser precisado a través del lenguaje de álgebra diferencial, es mejor definido al no distinguir entre entradas, estados, salidas y otras variables.

#### *Sistemas diferencialmente planos*

De acuerdo con Rouchon, Fliess, Lévine y Martin (1993) “las propiedades de un sistema *diferencialmente plano*, de ciertos sistemas no-holónomos, como robots en forma de vehículos, han sido aplicadas a las estrategias de optimización”; por ejemplo, en los algoritmos de generación de trayectorias de Van Nieuwstadt y Milam. Utilizando las propiedades *planas* de los vehículos, se reduce el problema de dimensión y se obtienen mejores resultados de cálculos.

Los sistemas diferencialmente planos constituyen una amplia clase de sistemas dinámicos. Son la prolongación más simple para ir de un sistema de control lineal al dominio de los sistemas no lineales. Los sistemas planos tienen salidas planas finitas diferenciales o salidas que no satisfacen ecuaciones diferenciales no lineales, así que todas las variables del sistema, incluyendo las entradas de control, pueden ser escritas exclusivamente en términos de funciones algebraicas de las salidas diferenciales independientes. Para la dinámica “clásica”,

$$\dot{x} = f(x, u) \quad \text{con} \quad x = (x_1, \dots, x_m) \quad u = (u_1, \dots, u_m) \quad (22)$$

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

Un sistema plano implica la existencia de un vector función evaluado  $h$  tal que:

$$\gamma = h(x, u_1, \dots, u_1^{\beta_1}, \dots, u_m, \dots, u_m^{\beta_m}) \quad (23a)$$

Donde  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$

Los componentes de  $x$  y  $u$  son, además, dados sin ningún procedimiento de integración por los vectores función evaluados  $A$  y  $B$ :

$$\mathbf{x} = A(\gamma_1, \dots, \gamma_1^{\alpha_1}, \dots, \gamma_m, \dots, \gamma_m^{\alpha_m}) \quad (23b)$$

$$\mathbf{u} = B(\gamma_1, \dots, \gamma_1^{\alpha_1+1}, \dots, \gamma_m, \dots, \gamma_m^{\alpha_m+1}) \quad (23c)$$

La propuesta del problema de planificación para (22) consiste en encontrar el control  $[0, T] \ni t \rightarrow u(t)$  direccionando el sistema del estado  $x=a$  en  $t=0$  al estado  $x=b$  en  $t=T$ . Cuando el sistema es plano, este problema es equivalente a encontrar  $[0, T] \ni \gamma \rightarrow \gamma(t)$  tal que:

$$a = A(\gamma_1(0), \dots, \gamma_1^{\alpha_1}(0), \dots, \gamma_m(0), \dots, \gamma_m^{\alpha_m}(0)) \quad (24a)$$

$$b = A(\gamma_1(T), \dots, \gamma_1^{\alpha_1}(T), \dots, \gamma_m(T), \dots, \gamma_m^{\alpha_m}(T)) \quad (24b)$$

Con los puntos:

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_1^{\alpha_1}, \dots, \gamma_m, \dots, \gamma_m^{\alpha_m}) \rightarrow A(\gamma_1, \dots, \gamma_1^{\alpha_1}, \dots, \gamma_m, \dots, \gamma_m^{\alpha_m}) \quad (25)$$

En general, el problema consiste en encontrar una función suave  $\gamma \rightarrow \gamma(t)$  con valores prescritos para algunas de sus derivadas en el tiempo 0 y en el tiempo  $T$  y tal que:

$$[0, T] \ni \gamma \rightarrow A(\gamma_1(t), \dots, \gamma_1^{\alpha_1}(t), \dots, \gamma_m(t), \dots, \gamma_m^{\alpha_m}(t)) \quad (26a)$$

$$[0, T] \ni \gamma \rightarrow B(\gamma_1(t), \dots, \gamma_1^{\alpha_1+1}(t), \dots, \gamma_m(t), \dots, \gamma_m^{\alpha_m+1}(t)) \quad (26b)$$

Sean funciones suaves bien definidas.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

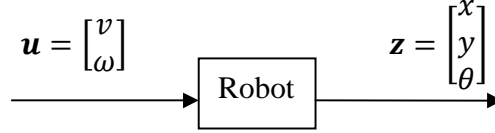
*Parámetros del Robot:*

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix} \quad \text{Donde } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ representan la posición del robot y } \theta \text{ su orientación}$$

*Entrada de Control:*

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \quad \text{Donde } v \text{ es la velocidad lineal del robot y } \omega \text{ su velocidad angular}$$

(no de las ruedas).



En base a la figura 16, se aplica la ecuación de velocidad (4) entre las ruedas derecha e izquierda y se tiene que:

$$\mathbf{v}_0^{d1} = \mathbf{v}_0^{i1} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \mathbf{L} \quad (27)$$

Tomando las magnitudes escalares:

$$v_0^{d1} = v_0^{i1} + \omega_{10} L \quad (28)$$

Lo cual, al despejar la velocidad angular resulta:

$$\omega_{10} = \frac{v_0^{d1} - v_0^{i1}}{L} \quad (29)$$

Simplificando la notación  $\omega_{10} = \omega$  se tiene

$$\omega = \frac{v_0^d - v_0^i}{L} \quad (30)$$

Además, si se relaciona la velocidad del centro con la de cada rueda:

$$\mathbf{v}_0^{i1} = \mathbf{v}_0^{B1} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \left(-\frac{L}{2}\right) \quad (31) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_0^{d1} = \mathbf{v}_0^{B1} + \boldsymbol{\omega}_{10} \times \left(+\frac{L}{2}\right) \quad (32)$$

Al combinar las ecuaciones (31) y (32) y al eliminar  $\boldsymbol{\omega}_{10}$ , se tiene:

$$\mathbf{v}_0^{d1} + \mathbf{v}_0^{i1} = 2 \cdot \mathbf{v}_0^{B1} \quad (33)$$

$$\mathbf{v}_0^{B1} = \frac{\mathbf{v}_0^{d1} + \mathbf{v}_0^{i1}}{2} \quad (34)$$

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

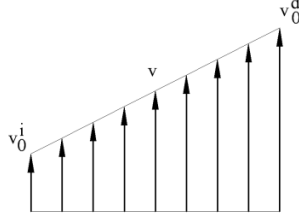


Figura 26: Diagrama de velocidades del robot.

La simplificación y sustitución de  $v_0^{B1}$  por  $v$  produce finalmente:

$$v = \frac{v_0^d + v_0^i}{2} \quad (35)$$

Con las ecuaciones (30) y (35) se construye el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cdot \cos(\theta) \\ \dot{y} = v \cdot \text{sen}(\theta) \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad (36)$$

En la representación cinemática, se sustituirá la velocidad lineal del centro de la rueda  $v = u_1$  y la velocidad angular de dirección  $\dot{\theta} = u_2$  como entradas de control, con lo que se obtiene:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cdot \cos(\theta) \\ \dot{y} = u_1 \cdot \text{sen}(\theta) \\ \dot{\theta} = u_2 \end{cases} \quad (37)$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{v_0^d + v_0^i}{2} \\ \frac{v_0^d - v_0^i}{L} \end{bmatrix} \quad (39)$$

### *Ecuaciones planas del sistema*

Siguiendo las hipótesis de modelo del vehículo sin remolque y las ecuaciones planas explicadas anteriormente, se procede a describir el modelo básico del vehículo con el remolque.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

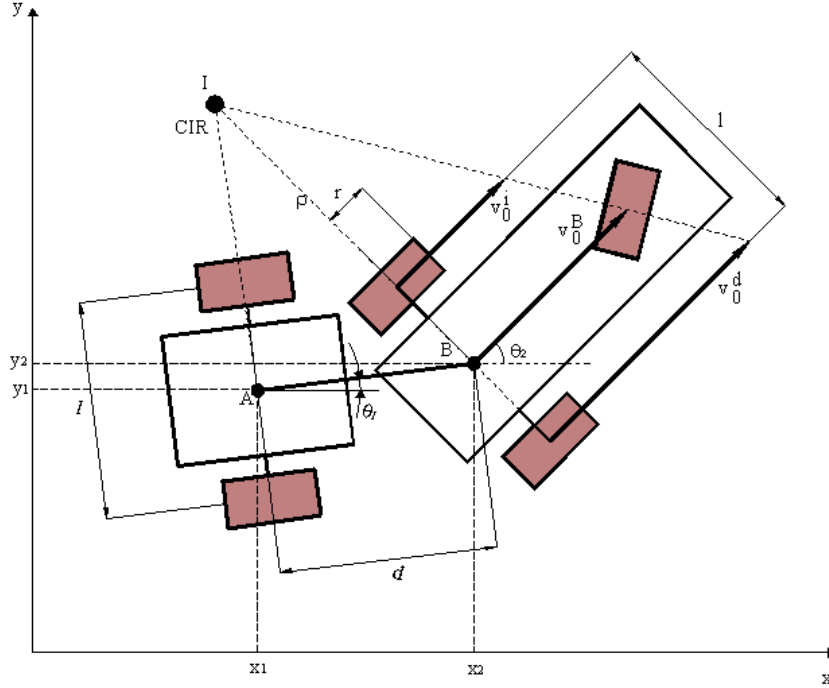


Figura 27: Sistema del vehículo con el Remolque

Recordando las ecuaciones del vehículo sin remolque (ecuación 36), sumando el cuadrado de las dos primeras filas y sustituyendo  $v$  obtenemos:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v^2 = \left( \frac{v_0^d + v_0^i}{2} \right)^2 \rightarrow \frac{v_0^d + v_0^i}{2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \quad (40)$$

Y, por otra parte, considerando que es posible derivar  $\theta$  de esta expresión e igualarla con la ecuación de la tercera fila del modelo del vehículo (36) para obtener una relación con las derivadas.

$$\theta = \text{atan} \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \rightarrow \omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\dot{y}_1 \dot{x}_1 - \dot{x}_1 \dot{y}_1}{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2} \rightarrow \frac{v_0^d - v_0^i}{L} = \frac{\dot{y}_1 \dot{x}_1 - \dot{x}_1 \dot{y}_1}{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2} \quad (41)$$

Al conocer la posición del remolque para cada instante con la curva *B-Spline* se pueden conocer el resto de las variables, trabajando partiendo del remolque al vehículo, se cuenta con la siguiente ecuación:



## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

$$\begin{cases} x_i = x_{i+1} - \sum_{j=0}^{i+1} \cos(\theta_{i+1}) \cdot d_j \\ y_i = y_{i+1} - \sum_{j=0}^{i+1} \sen(\theta_{i+1}) \cdot d_j \\ \theta_i = \text{atan}\left(\frac{y_i}{x_i}\right) \end{cases} \quad (42)$$

Donde  $d$  es la distancia en vehículo y el remolque; para  $i=0..n$ . Para expresar el sistema en función del remolque, se despeja de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + d \cdot \cos(\theta_i) \\ y_{i+1} = y_i + d \cdot \sen(\theta_i) \\ \theta_{i+1} = \text{atan}\left(\frac{y_{i+1}}{x_{i+1}}\right) \end{cases} \quad (43)$$

Una vez teniendo el modelo del vehículo con remolque, se representa la ecuación mediante las curvas *B-Spline*  $(x(t), y(t))$  con las que se pueden obtener sus derivadas sucesivas  $(\dot{x}, \ddot{x}, \dots, \dot{y}, \ddot{y}, \dots)$  para obtener todas las variables tanto del remolque como del vehículo, mediante un sistema diferencialmente plano:

$$\begin{cases} v_0^d = f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots) \\ v_0^i = f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots) \\ \omega = f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots) \end{cases} \quad (44)$$

### 2.2.7. Métodos Numéricos

Las curvas *B-Spline* denotarán la trayectoria a seguir por el robot obtenida a través del modelo cinemático. Éstas curvas, por su naturaleza continua, implicarían la ejecución de órdenes de duración diferencial, que, en términos prácticos se traducirían en una infinidad de órdenes cuyo tiempo de ejecución *tiende* a cero. Como esto no es admisible en el módulo NXT<sup>TM</sup> a emplear en los ensayos, es necesario que las curvas continuas sean discretizadas, de modo tal que puedan obtenerse una secuencia *finita* de órdenes para el robot.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

Los métodos numéricos tienen como función utilizar las ecuaciones diferenciales provenientes del modelo cinemático para formar algoritmos que se aproximen a las coordenadas de los puntos de la curva solución real. En la práctica, no se obtiene una aproximación continua; por el contrario, se generarán aproximaciones a esa solución en varios valores, llamados *puntos de red* con los cuales se puede obtener, por interpolación, la solución aproximada en otros puntos de interés.

En este trabajo se evaluarán dos métodos expuestos a continuación, con el fin de aplicar aquél que pueda generar una buena aproximación a la curva, utilizando para ello, el menor número de operaciones posible en el ordenador:

#### *Método de Euler o del disparo lineal*

El método de Euler según Zill (2002) se basa en el significado geométrico de la derivada de una función en un punto dado, y establece lo siguiente:

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n + \delta \cdot f(t_n, \gamma_n) \quad (45)$$

Donde  $f$  es la función obtenida de la ecuación diferencial  $\dot{\gamma} = f(t, \gamma)$ . Con el uso recursivo de la ecuación (45) para  $n=1,2,3\dots$  se producen las ordenadas  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$  de puntos en “rectas tangentes” sucesivas a la curva solución en:

$$t_1, t_2, t_3, \dots \text{ con } t_n = t_0 + n \cdot \delta \quad (46)$$

Donde  $\delta$  es una constante, y es el tamaño del escalón entre  $t_n$  y  $t_{n+1}$ . Los valores  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$  se aproximan a los valores de una solución  $\gamma(t)$  del problema de valor inicial en  $t_1, t_2, t_3, \dots$  pero todas las ventajas de la ecuación (46), debidas a su simplicidad, se pierden por lo grosero de sus aproximaciones.

Para elegir y aplicar un método numérico en la solución de un problema de valores iniciales, se deben considerar las diversas fuentes de errores. Para algunos tipos de cálculos la acumulación de errores reduciría la exactitud de una aproximación hasta el grado de volver inútiles los resultados.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

La exactitud de la curva aproximada a la real también va a depender del paso ( $\delta$ ) que sea asignado al método, ya que un valor muy grande genera una gran desviación respecto a la curva real, mientras que a medida éste disminuya la curva de Euler se aproxima mucho más a la curva real. Por ejemplo, en la figura 28 se utiliza un delta relativamente grande y en la figura 29 uno más pequeño para aproximar en ambos casos una curva *B-Spline* de grado 3.

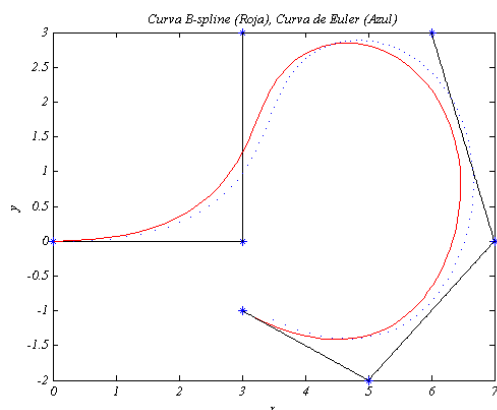


Figura 28: Curva de aproximación de Euler con  $\delta$  de 0.009

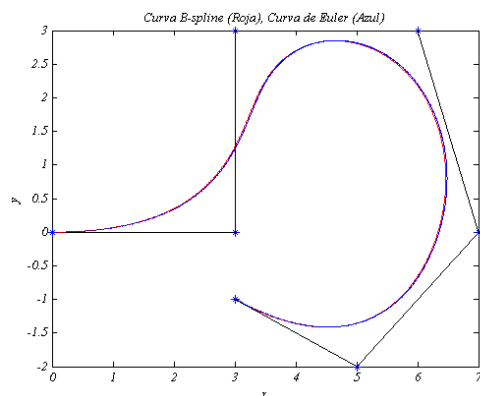


Figura 29: Curva de aproximación de Euler con  $\delta$  de 0.0009

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

#### Método de Runge–Kutta

El método de Runge Kutta de acuerdo con Burden (2002), tiene el error local de truncamiento de orden alto y permiten prescindir del cálculo y evaluación de las derivadas de  $\dot{\gamma} = f(t, \gamma)$ . El procedimiento de Runge–Kutta consiste en determinar las constantes adecuadas para que la fórmula:

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (47)$$

$$\text{Donde} \quad k_1 = \delta \cdot f(t_n, \gamma_n) \quad (48)$$

$$k_2 = \delta \cdot f\left(t_n + \frac{\delta}{2}, \gamma_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (49)$$

$$k_3 = \delta \cdot f\left(t_n + \frac{\delta}{2}, \gamma_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (50)$$

$$k_4 = \delta \cdot f(t_n + \delta, \gamma_n + k_3) \quad (51)$$

Es de hacer notar que  $k_2$  depende de  $k_1$ ;  $k_3$  de  $k_2$  y  $k_4$  de  $k_3$ . También, en  $k_2$  y  $k_3$  intervienen aproximaciones a la pendiente en el punto medio del intervalo entre  $t_n$  y  $t_{n+1}$ .

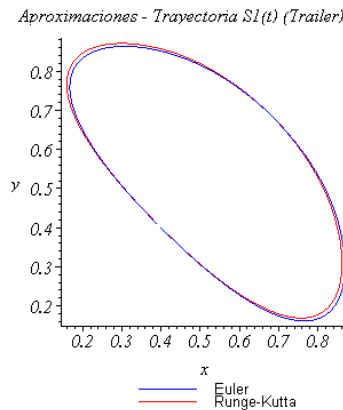


Figura 30: Comparación del método de Euler y el método de Runge Kutta con la curva B-Spline.

Como se mencionó anteriormente, en ambos métodos es imprescindible considerar el error, ya que a medida que se itera este se va acumulando y produce desviaciones.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

$$Error\ Absoluto = Valor\ Real - Valor\ Deseado \quad (52)$$

$$Error\ Relativo = \frac{Valor\ Real - Valor\ Deseado}{Valor\ Deseado} \quad (53)$$

En este Trabajo Especial de Grado se emplea el método de Euler, por lo que se debe mencionar que el error crece un poco a medida que el valor de  $t$  aumenta, este crecimiento es controlado y es consecuencia de la estabilidad del método de Euler, el cual implica que se espera que, en el peor de los casos, el error aumente de forma lineal.

Aunque el método de Euler no es lo suficientemente exacto para justificar su uso en la práctica, resulta lo bastante simple para analizar el error producido en su aplicación.

### 2.2.8. Optimización

Hay muchas trayectorias viables que puede seguir el robot para ir de un punto inicial a un punto final, el problema consiste entonces en generar la trayectoria más apropiada, que tiende a ser la más corta para de esta forma minimizar el tiempo y la energía.

Cuando un robot se desplaza a lo largo de un cierto camino debe satisfacer los conflictos con las demandas establecidas para alcanzar sus objetivos globales que le permitan el mantenimiento de políticas que le guíen y protejan a lo largo del camino. Por ejemplo, al desplazarse de una habitación a otra, el programador debe incluir una serie de hitos a lo largo del camino en las intersecciones de pasillos u otros puntos de su elección que el robot deberá alcanzar tan rápidamente como le sea posible, sometido a condicionantes de seguridad y energía.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

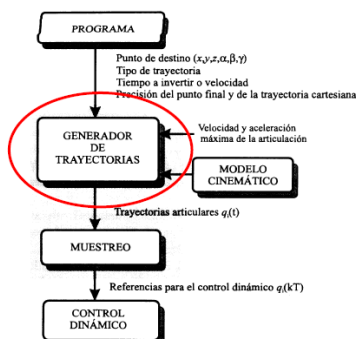


Figura 31: Esquema de la Generación de una Trayectoria

Una forma de reducir la complejidad del movimiento del robot es descomponer la función de control en un conjunto de acciones más simples que sean más fáciles de programar y revisar. Esta estrategia es efectiva en muchas aplicaciones de la Inteligencia Artificial que tratan con sistemas complejos. En robótica móvil, estas unidades primitivas de acción robótica se suelen denominar *conductas* que pueden considerarse como una correspondencia entre el estado interno y las acciones de control del robot que permite la realización de una tarea sencilla dentro de un contexto restringido. En general en este contexto es posible formular una estrategia de movimiento que alcance un objetivo individual parcial. La clave es articular la combinación de conductas para producir acciones más complejas que satisfagan objetivos múltiples.

### *Optimización*

El concepto de optimización según Luenberger (1974) está bien fijado como uno de los principios básicos del análisis de muchos problemas complejos de decisión o ubicación. Suele ofrecer un grado indispensable de simplicidad operacional. Mediante la optimización, se enfoca un problema complejo de decisión, que incluye la selección de valores para cierto número de variables interrelacionadas, centrando la atención en un solo objetivo diseñado para

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

---

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

cuantificar el rendimiento y medir la calidad de la decisión. Este único objetivo se maximiza (o minimiza, dependiendo de la formulación) según las restricciones que pueden limitar la selección de los valores de las variables de decisión.

El problema mismo de la formulación siempre incluye una relación entre objetivos opuestos en la construcción de un modelo matemático complejo suficiente para captar con precisión la descripción del problema y construir un modelo manipulable.

#### *Algoritmos iterativos y Convergencia*

Según Luenberger (1974) para generar la trayectoria más óptima se requiere un computador, cuya característica más importante es su capacidad para efectuar eficientemente operaciones repetitivas, y para explotar esta característica básica, la mayoría de los algoritmos diseñados para resolver grandes problemas de optimización son de naturaleza iterativa. Como norma, al buscar un vector que resuelva el problema de programación, se elige un vector inicial  $X_0$  y el algoritmo genera un vector mejorado  $X_1$ . El proceso se repite y se encuentra una solución aún mejor  $X_2$ . Continuando así, se halla una sucesión de puntos cada vez más apropiados  $X_0, X_1, \dots, X_k, \dots$  que tiende a un punto solución  $X^*$ . En problemas de programación lineal, la sucesión generada es de longitud finita, obteniendo el punto solución exactamente después de un número finito de pasos. Generalmente, en los problemas de programación no lineal, la sucesión no alcanzará nunca el punto solución, sino que converge hacia él. Desde el punto de vista operativo, en problemas no lineales, el proceso termina a efectos prácticos cuando se obtiene un punto suficientemente próximo al punto solución.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

---

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

La teoría de los algoritmos iterativos puede dividirse en tres aspectos (que se solapan en cierto modo). El primero se refiere a la creación de los algoritmos propiamente dichos. Los algoritmos no se conciben arbitrariamente, sino que se basan en un examen creativo del problema de programación, en su estructura inherente y en la eficiencia de los computadores digitales. El segundo aspecto es la comprobación de que un algoritmo dado generará, de hecho, una sucesión convergente hacia un punto solución. Este aspecto se conoce como *análisis de convergencia global*, y estudia la importante cuestión de si el algoritmo, iniciado lejos del punto solución acabará convergiendo hacia este. El tercer aspecto se refiere al *análisis de la convergencia local*, y trata de la proporción en que la sucesión generada de puntos converge hacia la solución. Un problema no se puede considerar resuelto sólo porque se conoce un algoritmo que convergerá a la solución, pues tal vez se necesite mucho tiempo para reducir el error hasta una tolerancia aceptable. Al sugerir un algoritmo, es esencial disponer de una estimación del tiempo necesario para llegar a la solución.

Así, las propiedades de convergencia de un algoritmo iterativo se pueden estimar con confianza ejecutando numerosos experimentos de computador en problemas distintos o mediante un sencillo análisis teórico bien enfocado. No hay duda de que una teoría sencilla proporciona ideas de gran valor, además de la estimación deseada.

Generalmente, en los problemas de programación no lineal, se utilizan varios algoritmos distintos, pero se están desarrollando nuevos métodos a un paso acelerado. La limitada experiencia computacional asociada a cada uno de estos métodos no es suficientemente amplia para permitir hacer comparaciones definitivas. Sin embargo, las propiedades de convergencia de una gran clase de algoritmos iterativos para problemas de programación no lineales se pueden deducir analíticamente por medios bastante sencillos, y este análisis está



## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

respaldado por la experiencia computacional. La presentación del análisis de convergencia, que parece ser realmente el punto central de una teoría destinada a obtener respuestas específicas.

### *Optimización con restricciones*

El enunciado del problema general de la programación matemática según Luenberger (1974) puede ser:

Minimizar:

$$f(\mathbf{x})$$

Sujeto a:

$$h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, r$$

$$\mathbf{x} \in \mathbf{S}$$

En esta formulación,  $\mathbf{x}$  es un vector de incógnitas  $n$ -dimensional  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , y  $f$ ,  $g_j$ ,  $h_i$ , son funciones con valores reales de las variables  $x_1, \dots, x_n$ . El conjunto  $\mathbf{S}$  es un subconjunto de un espacio  $n$ -dimensional. La función  $f$  es la *función objetivo* del problema y las ecuaciones, las desigualdades y el conjunto de restricción son *restricciones*.

### *Programación no lineal*

La programación no lineal según Luenberger (1974) es el proceso de resolución de un sistema de igualdades y desigualdades sujetas a un conjunto de restricciones sobre un conjunto de variables reales desconocidas, con una función objetivo a maximizar, cuando alguna de las restricciones o la función objetivo no son lineales. Es una parte de la investigación operativa cuya misión es proporcionar una serie de resultados y técnicas tendentes a la determinación

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónomo con Remolque

de puntos óptimos para la función objetivo. Así pues, el problema consiste en encontrar las variables de decisión factibles para el problema para las cuales la función objetivo tome el mayor valor posible. Si para un punto, la función objetivo toma el valor máximo de todos los puntos situados en algún entorno suyo, se dice que el máximo es local. Si se encuentra un punto que produce el valor máximo de  $f(\cdot)$  en todo el conjunto de oportunidades, el máximo es global.

### 2.2.9. OPTRAGEN®

Una vez que se transforman las salidas del sistema en una salida plana (un espacio de menor dimensión) se reduce también el tiempo de cálculo y se puede introducir el sistema en el OPTRAGEN® para ser llevado a un problema de programación no lineal. OPTRAGEN® es un *toolbox* de MATLAB® que resuelve numéricamente problemas de control óptimo. OPTRAGEN® traduce problemas de control óptimo de la forma:

$$\min_{x(t), u(t)} \Phi_i(x(t_0), u(t_0), t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \Phi_t(x(t), u(t), t) dt + \Phi_f(x(t_f), u(t_f), t_f) \quad (54)$$

Sujeto a la condición dinámica

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (55)$$

Y a las restricciones

$$l_i \leq \psi_f(x(t_0), u(t_0), t_0) \leq u_i \quad (56a) \text{ (Restricción Inicial)}$$

$$l_i \leq \psi_t(x(t), u(t), t) \leq u_i \quad (56b) \text{ (Restricción de Trayectoria)}$$

$$l_i \leq \psi_f(x(t_f), u(t_f), t_f) \leq u_i \quad (56c) \text{ (Restricción Final)}$$

En problemas de programación no lineal de la forma:

$$\min_{\rho} F(\rho) \quad (57)$$

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

Sujeto a

$$L \leq \begin{Bmatrix} \rho \\ A\rho \\ G(\rho) \end{Bmatrix} \leq U \quad (58)$$

La transcripción de problemas de control óptimo (OCP, *Optimal Control Problem*) a un problema de programación no lineal (NLP, *Nonlinear Programming*) es realizada parametrizando las trayectorias como *Splines*. La salida de la transcripción es una función costo y una función de restricción que pueden ser conectadas con cualquier solucionador comercialmente disponible de programación no lineal. OPTRAGEN® puede ser considerado como un analizador que traduce problemas de control óptimo en problemas de programación no lineal y no posee internamente ningún solucionador de programación no lineal, por lo que para resolver el problema de programación no lineal obtenido, un solucionador de programación no lineal es requerido, para lo que se emplea SNOPT®, ya que el problema de programación no lineal resultante es *disperso*.

### SNOPT®

Es un sistema de propósitos generales para optimización con restricciones. Minimiza una función lineal o no lineal sujeta a límites en las variables y restricciones lineales o no lineales dispersas. Es adecuado para programación lineal o cuadrática a gran escala y para optimización lineal con restricciones, así como para problemas no lineales generales.

SNOPT® encuentra soluciones localmente óptimas e idealmente cualquier función no lineal debería ser suave y el usuario debería proveer los gradientes (las primeras derivadas de  $F(\rho)$  y  $G(\rho)$ ). Por ejemplo, soluciones locales óptimas son comúnmente soluciones globales y discontinuidades en la función gradiente pueden frecuentemente ser toleradas si no están muy cercanas a un

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

---

punto óptimo. Cuando no se conoce el gradiente, se estiman por el método de diferencias finitas.

SNOPT® usa un algoritmo secuencial de programación cuadrática (SQP, *Sequential Quadratic Programming*). Busca direcciones obtenidas por subproblemas de programación cuadrática que minimizan un modelo cuadrático de la función Lagrangiana sujeto a restricciones lineales. El gran mérito de emplear la función Lagrangiana es que reduce la búsqueda a lo largo de cada dirección para garantizar la convergencia desde cualquier punto de comienzo de búsqueda.

En problemas largos, SNOPT® es más eficiente si sólo algunas de las variables son no lineales o hay relativamente pocos grados de libertad en la solución (es decir, muchas restricciones están activas). SNOPT® requiere relativamente pocas evaluaciones de las funciones del problema. Por lo tanto, es especialmente efectivo si el objetivo o las funciones de restricción (y sus gradientes) son difíciles de evaluar.

SNOPT® toma problemas como el descrito anteriormente ya transformado en un problema de programación no lineal, donde  $\rho$  es un vector de  $n$  variables,  $L$  y  $U$  son constantes que representan los límites inferior ( $L$ ) y superior ( $U$ ),  $F(\rho)$  es la función objetivo suave y escalar,  $A$  es una matriz dispersa,  $G(\rho)$  es un vector suave de funciones de restricciones no lineales  $\{G_i(\rho)\}$ .

Los límites inferior y superior deben ser especificados para todas las variables y restricciones. La  $j$ -ésima restricción puede ser definida como una igualdad colocando  $l_j = u_j$ . Si ciertos límites no están presentes, los elementos asociados de  $l$  o  $u$  pueden ser asignados a valores especiales que son tratados como  $+\infty$  o  $-\infty$ . Las variables libres y las restricciones libres tienen ambos límites infinito.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

---

#### *Parametrización del espacio de la trayectoria*

Las trayectorias en OPTRAGEN® son parametrizadas como *B-Splines*. Una *B-Spline* como se vio antes está definida por polinomios que están sujetos a unos *puntos de ruptura* (*break points*) predefinidos, satisfaciendo un número dado de suavidad en un intervalo largo.

El intervalo largo  $[t_0, t_f]$  es subdividido en intervalos suficientemente pequeños  $[\zeta_i, \zeta_{i+1}]$ , con  $t_0 = \zeta_0 < \dots < \zeta_n = t_f$ . Los puntos  $\zeta_i$  son llamados *puntos de ruptura* o *puntos de nodos*. En cada uno de esos intervalos, polinomios de grados relativamente bajos pueden dar una buena aproximación para  $f(t)$ . La aproximación en intervalos más pequeños ofrece apoyo local.

Los polinomios diferenciales a trozos pueden unirse de tal forma que la función resultante tiene muchas derivadas continuas en los límites del intervalo y los *puntos de ruptura*. El número de derivadas continuas a través de los *puntos de ruptura* define la condición de suavidad de la *Spline*.

**Observación 1:** La continuidad de la curva resultante en los *puntos de ruptura* es determinada por la condición de suavidad.

**Observación 2:** La continuidad de la curva resultante entre los *puntos de ruptura* es determinada por el orden de los polinomios a trozos.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

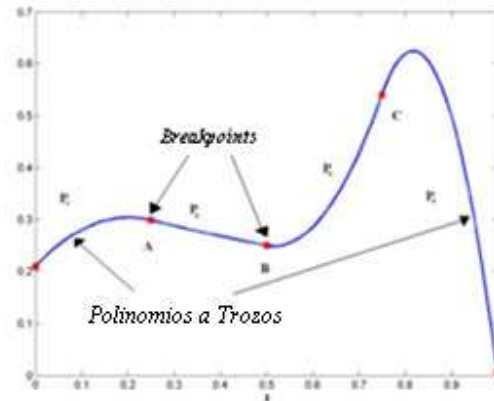


Figura 32: Una curva *B-Spline* y sus polinomios a trozos.

La figura 32 muestra una curva *B-Spline* compuesta por cuatro polinomios a trozos  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$ . Ellos se unen en los *puntos de ruptura* A, B y C.

*Transcripción del problema de control óptimo en un problema de Programación No-Lineal*

La transcripción se logra de la siguiente manera:

- Las trayectorias desconocidas se parametrizan como *B-Splines*.
- El problema de optimización entonces se escribe en términos de los coeficientes  $\alpha_k$  de las *B-Spline*.
- La función de costo y las restricciones son evaluadas y forzadas en los *puntos de colocación*.
- Los *puntos de colocación* son diferentes de los *puntos de ruptura*. En general, los *puntos de colocación* son más densos que los *puntos de ruptura*. El posicionamiento exacto de los *puntos de colocación* puede ser determinada por el orden de la *B-Spline* usando la fórmula de cuadratura Gaussiana.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

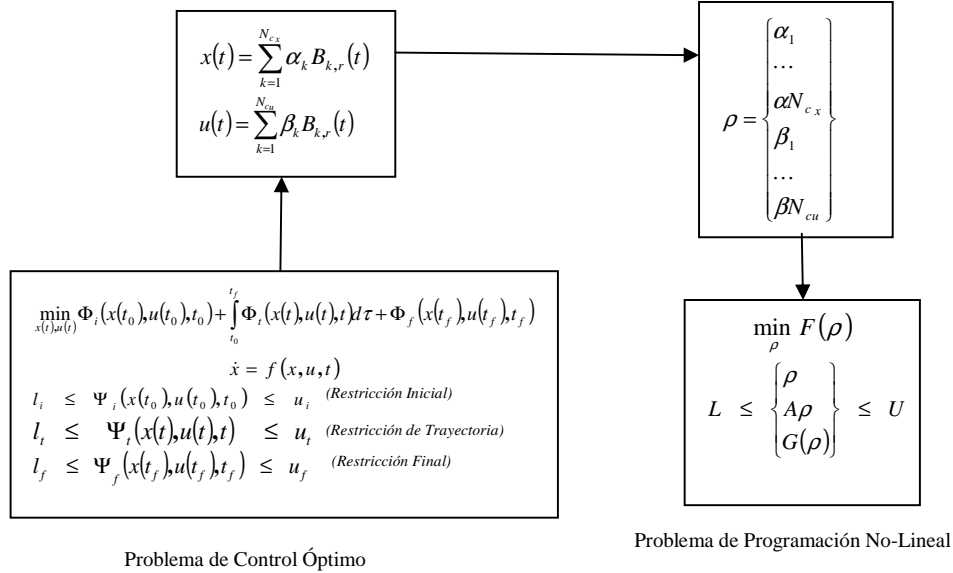


Figura 33: Transcripción de OCP a NLP

### Cuadratura Gaussiana

La fórmula de cuadratura Gaussiana busca obtener el mejor estimado numérico de una integral escogiendo la abscisa óptima  $x_i$  para evaluar  $f(x)$ . El teorema fundamental de la cuadratura Gaussiana dice que la abscisa óptima del  $m$ -punto mediante las fórmulas de cuadratura Gaussiana son precisamente las raíces de los polinomios ortogonales para el mismo intervalo y función de ponderación. La cuadratura Gaussiana es óptima porque se ajusta a todos los polinomios de hasta grado  $2m$  exactamente.

#### 2.2.10. Módulo Lego® NXT™ y PID

Según Hansen (2007) “el módulo del NXT™ representa una mejora significativa sobre las generaciones previas del módulo programable de los LEGO® MINDSTORM™” (p. 18). El módulo NXT™ utiliza un microprocesador ARM7 Atmel de 32-bit corriendo a 48MHz con 256kb de

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

memoria flash no-volátil así como 64kb de memoria RAM. La memoria flash admite aproximadamente 64 archivos y aunque se remuevan las baterías, el sistema operativo así como sus programas permanecen guardados de manera segura en el módulo. También incluye un microprocesador AVR de 8-bit, este chip viene con 4kb de *memory flash* y 512 bytes de memoria RAM, el cual es empleado por el módulo NXT<sup>TM</sup> para controlar la interacción con los servomotores que viene con el robot NXT<sup>TM</sup>. La comunicación con dicho módulo es realizada a través de un cable USB conectado al computador, una vez que se hayan creado los programas en ROBOT-C, el cual es un lenguaje de programación tipo texto basado en la programación en lenguaje C.

#### *Movimiento Mejorado (algoritmo de control PID)*

Cuando el robot se mueve (especialmente en línea recta) tiene cierta desviación, y es claro que para hacer mejoras en su movimiento se debe maniobrar y desacelerar a bajas velocidades.

Aún cuando se asignan valores a los motores para desplazarse a velocidades iguales, el robot se desvía un poco. Un desvío es el resultado de dos motores entregando a distintas velocidades.

```
task main()
{
    motor[motorB]= -50;
    motor[motorC]= -50;
    wait1Msec(1000);
}
```

En realidad, las velocidades no se asignan con los comandos dirigidos al “motor[]”, la potencia entregada por el motor sí. Sin embargo, no todos los motores se crean igual. Varios factores en la construcción del robot y el proceso



## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

---

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

de manufactura para los mismos motores causan pérdidas de energía por fricción en cada motor.

Esto significa que aunque ambos motores comienzan con la misma potencia en la alimentación, la cantidad de potencia que llega a las ruedas para mover al robot varía un poco. Aún aplicando la misma potencia a ambos motores, las velocidades pueden diferir y esto hace que el robot gire, así sea sólo un poco. Para compensar esta situación, se cambian las potencias para que los motores entreguen la misma velocidad, lo cual se puede hacer de manera manual (por ensayo y error del usuario); sincronizando ambos motores pidiéndoles que mantengan un valor fijo (derivado de uno de los motores y manteniendo una relación el uno del otro, ya sea del 100% para una línea recta o del 50% para ocasionar giros) y de esta manera el robot pueda moverse de manera uniforme; finalmente se puede aplicar un algoritmo de control PID para que el movimiento sea más consistente.

#### *Principios de PID*

Se encontró que es posible hacer que un robot se mueva en una línea recta ajustando los niveles de potencia de los motores para que sus ruedas se muevan a la misma velocidad en vez de sólo ser dirigidas con la misma potencia. Sin embargo, hacerlo manualmente tiene severas limitaciones, por lo que se busca la manera de automatizar el proceso.

Empleando los sensores de rotación instalados en los motores del NXT™, el robot puede mostrar cuán lejos se ha movido cada rueda. Comparando la posición actual del motor con la posición hace solo 1/10 de segundo, el robot puede calcular cuán rápido se está moviendo la rueda.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque



Posición Inicial (t = 0s)	Posición Actual (t = 0.1s)
Posición inicial de la rueda antes de comenzar a girar	Poco tiempo después, la rueda ha girado levemente. Como tanto el cambio en posición y el cambio en el tiempo se conocen, el robot puede calcular la velocidad de giro.

*Figura 34: Comparación del vehículo en posición inicial y un instante después.*

Suponiendo que la rueda giró  $30^\circ$  en  $0.1s$ . El robot automáticamente puede calcular la velocidad como:

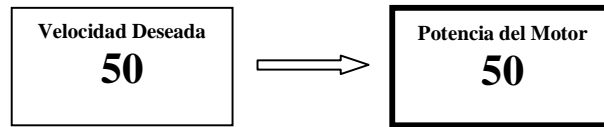
$$Velocidad = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow \frac{30^\circ}{0.1s} = 300^\circ/s \quad (59)$$

Esta velocidad se traduce en una “categoría de velocidades” en el *firmware* del NXT™, de manera que una categoría de velocidad de 100 corresponde a un “motor ideal” funcionando a un 100% de su potencia.

Como el robot puede mostrar cuán rápido se mueve la rueda, puede utilizar PID para ajustar los niveles de potencia del motor para asegurarse que esté corriendo a la velocidad correcta. Si la velocidad actual del motor es más baja de lo que debería ser, el algoritmo PID incrementará su nivel de potencia. Si el motor está corriendo muy rápido, el PID lo desacelerará. A continuación se verá cómo funciona.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

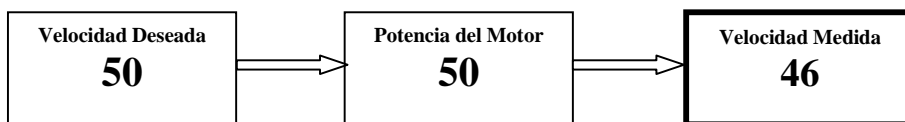
Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque



### 1. Potencia del Motor

Se asigna al motor correr a una potencia que *teóricamente* producirá la velocidad correcta, sin PID este es el único paso a seguir.

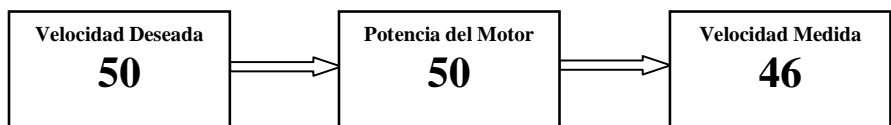
Si no se emplea el PID, el control del motor es un proceso en “lazo abierto”. La potencia del motor se establece, pero no existe ningún mecanismo encargado de ver que la velocidad deseada está siendo alcanzada realmente, por lo que no se pueden hacer correcciones.



### 2. Velocidad Medida

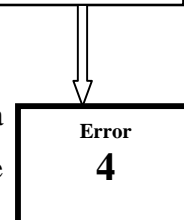
Con PID, el robot también medirá la verdadera velocidad del motor, midiendo la posición de la rueda a través del tiempo (como se mostró anteriormente).

Los motores reales muy rara vez encajan perfectamente con sus “valores ideales”, por lo tanto la verdadera velocidad es diferente cuando se le da la potencia *teóricamente* correcta.



### 3. Error

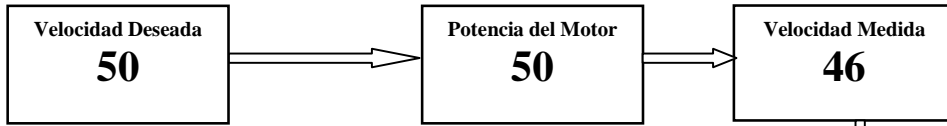
Se calcula la diferencia entre la velocidad deseada y la verdadera, y ésta se llama “error”. Un error muy grande indica que la velocidad actual del motor es significa-



## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

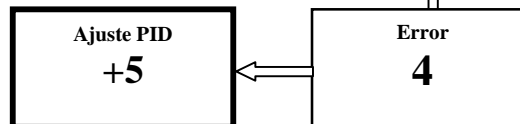
### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

tivamente diferente de la velocidad que debería mantener.

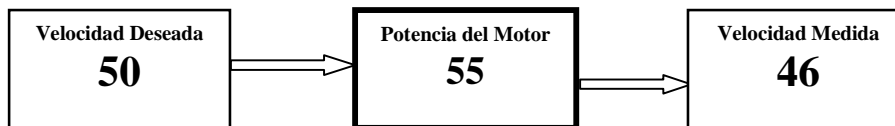


#### 4. Ajuste PID

Basado en el tamaño del error, el algoritmo PID propone

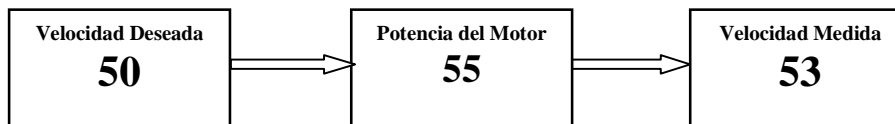
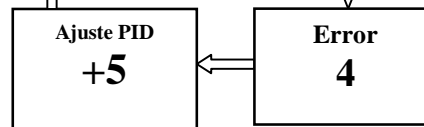


un ajuste en la potencia del motor que debería llevar la velocidad actual del motor más cerca de la velocidad deseada.



#### 5. Ajuste Aplicado

El factor de ajuste del PID se aplica a la potencia del motor ( $50 + 5 = 55$ ).



#### 6. Repetir el Ciclo

El motor corre con la nueva potencia, y el ciclo se repite. El robot mide la nueva velocidad, calcula un nuevo error y un nuevo ajuste. Este proceso de auto-ajuste continua mientras el programa siga corriendo.

## CAPÍTULO II. MARCO REFERENCIAL

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

---

Esta configuración, donde el robot monitorea y ajusta su velocidad basado en medidas que toma el mismo, es un control de “lazo cerrado”.

El algoritmo PID de control le da al robot la habilidad de inteligencia al permitirle auto-ajustar sus niveles de potencia de ambos motores a los valores correctos para mantener la velocidad del robot deseada. El sistema de *lazo cerrado* monitorea el “error” descrito anteriormente y en base a eso toma acciones (haciendo ajustes) en los niveles de potencia del motor de manera acorde.

El algoritmo de control PID que viene incluido en el firmware de ROBOTC tiene las siguientes instrucciones:

```
task main()
{
  nMotorPIDSpeedCtrl[motorB]=mtrSpeedReg;
  nMotorPIDSpeedCtrl[motorC]=mtrSpeedReg;
  motor[motorB]= -99.771349;
  motor[motorC]= -86.863847;
  wait1Msec(10);
}
```

Es una excelente manera de mantener el robot moviéndose de forma consistente. El algoritmo monitorea cuán rápido se mueven los motores contra cuán rápido deberían moverse y ajusta los niveles de potencia entregado por los motores para mantenerlos en el buen camino. Esto le permite al robot ajustar automáticamente variaciones mínimas tanto en el ambiente del robot y en los mismos motores.

## **CAPÍTULO III**

### **MARCO METODOLÓGICO**

#### **Tipo de Investigación**

La presente investigación es de tipo confirmatoria ya que, según Hurtado, J (2007) “Este tipo de investigación requiere de una explicación previa o una serie de supuestos o hipótesis, los cuales se desean confirmar”.

Específicamente, además de ser de tipo confirmatoria, es de verificación empírica y que la misma autora expone que:

En este tipo de investigación, la coherencia con un sistema de ideas aceptado previamente es necesaria, pero no es suficiente; además de esto se requiere que los enunciados sean verificables a través de la experiencia, ya sea mediante la observación o mediante la experimentación.

#### **Nivel de la Investigación**

De acuerdo con Arias, F (2006) este trabajo es explicativo ya que “...la investigación experimental es netamente explicativa, por cuanto su propósito es demostrar que los cambios en la variable dependiente fueron causados por la variable independiente”.

### **Diseño de la Investigación**

Esta investigación pertenece a un diseño experimental ya que según el autor antes mencionado "...es un proceso que consiste en someter a un objeto o un grupo de individuos a determinadas condiciones, estímulos o tratamiento (variable independiente), para observar los efectos o reacciones que se producen (variable dependiente)".

### **Definición de Variables**

#### **Identificación de la Variable:**

Trayectoria

#### *Definición Conceptual de la Variable*

Segun Choset Howie (2005) "Una trayectoria es una curva continua de la configuración espacial. Se representa por funciones continuas que rigen algún parámetro, usualmente tomado en el intervalo unitario [0,1]. La elección del intervalo unitario es arbitraria; cualquier parametrización será suficiente." (p.14)

#### *Definición Operacional de la Variable*

La trayectoria es la curva continua que conecta la configuración inicial y final que asegura el movimiento de un vehículo y es obtenida como polinomios paramétricos a trozos través de un proceso de planificación y optimización.

### CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

#### Operacionalización de la Variable

*Tabla 1: Operacionalización de la Variable.*

<b>Dimensiones</b>	<b>Indicadores</b>
<p style="text-align: center;"><b>Configuración Inicial: <math>z_0</math></b></p> <p>Es el vector con tres dimensiones que determina con exactitud, para el instante inicial del movimiento, a un móvil en el plano a través de la posición y el ángulo.</p>	<p>Posición Inicial: Distancia en metros respecto al origen de coordenadas</p> <p>Ángulo Inicial: Inclinación del móvil respecto a la horizontal</p>
<p style="text-align: center;"><b>Configuración Final: <math>z_f</math></b></p> <p>Es el vector con tres dimensiones que determina con exactitud, para el último momento del movimiento, a un móvil en el plano a través de la posición y el ángulo.</p>	<p style="text-align: center;">Posición Final</p> <p style="text-align: center;">Ángulo Final</p>
<p style="text-align: center;"><b>Obstáculos:</b></p> <p>Conjunto de regiones en el plano del movimiento en las cuales no puede situarse ninguno de los móviles, es decir, son espacios restringidos para el vector de configuración.</p>	<p style="text-align: center;">Obstáculos Estacionarios (Circunferencias)</p>
<p style="text-align: center;"><b>Remolque:</b></p> <p>Móvil conducido cuyo centro se ubica a una distancia <math>d</math> del centro del vehículo motriz, que limita la movilidad del sistema.</p>	<p style="text-align: center;">Parámetro <math>d &gt; 0</math></p> <p>Restricción Angular: Existencia de un máximo valor de inclinación, en el plano del movimiento, entre el eje longitudinal del vehículo y el del remolque.</p>
<p style="text-align: center;"><b>Función De Costo Optimizada:</b></p> <p>Función matemática sujeta al proceso de optimización cuyo comportamiento asociado a las restricciones modifica la geometría de la curva solución</p>	<p style="text-align: center;">Energía Tiempo Tiempo y Energía</p>



### Procedimiento

Con el propósito de seleccionar la información útil para la presente investigación, se realizó un arqueo bibliográfico, identificando los aspectos de especial interés en este estudio. Dicha revisión abarcó las siguientes áreas: cinemática, robótica, funciones paramétricas, optimización, métodos numéricos y programación.

Para desarrollar el estudio, fue necesario recurrir a ciertas curvas que permitieran modelar el comportamiento del sistema en el tiempo, por lo cual se realizó un estudio de varias curvas, donde se hizo un estudio particular de la solución del problema empleando tanto las Curvas de Dubins como las Curvas *B-Spline* con miras de conservar el método que ofreciera los mejores resultados de acuerdo a la continuidad y suavidad de la trayectoria final generada.

Posteriormente se desarrolló del modelo cinemático del vehículo con y sin remolque, de esta manera se obtuvieron funciones para ser sometidas al proceso de optimización. Además de esto, fue necesario la definición de un conjunto de funciones de costo, las cuales modifican el comportamiento del sistema.

La optimización del sistema se llevó a cabo mediante dos herramientas del programa MATLAB® 2007: OPTRAGEN® y SNOPT®, esto se hizo necesario ya que el proceso de optimización es iterativo, complejo y delicado, y no siempre converge a una solución deseada, si ésta existe.

Obtenidas las curvas, se requirió un método numérico capaz de describirlas por trozos discretos con poco margen de error, ya que desde el punto de vista de implementación no se pueden ejecutar infinitas órdenes de duración 0 en el robot, situación que se derivaría al trabajar con las curvas *B-Spline*. Para esto, se seleccionaron dos métodos que fueron comparados, el de Euler y el de Runge Kutta, en términos del error respecto a la *B-Spline* original, de manera

### CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO

---

#### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

que se adoptó aquél que se ajustara mejor a la curva en términos del error generado.

Antes de probar experimentalmente los resultados del modelo computacional, se implementaron una serie de simulaciones para escoger el conjunto mínimo de casos necesarios a ser probados experimentalmente con el módulo Lego® NXT™. Este conjunto de casos se agruparon de la siguiente manera:

1. Trayectoria en línea recta: con el propósito de verificar la desviación del módulo.
2. Trayectoria en forma de Rizo: con el propósito de verificar el error del método de planificación.
3. Prueba entre velocidades instantáneas y velocidades promedio.
4. Escogencia del paso (de las instrucciones discretas) apropiado para describir las trayectorias.
5. Optimización de energía y tiempo para el vehículo en solitario.
6. Optimización de energía y tiempo para el vehículo con el remolque.
7. Optimización de energía y tiempo para el vehículo en solitario en presencia de obstáculos.
8. Optimización de energía y tiempo para el vehículo con el remolque en presencia de obstáculos.

Dado que los lenguajes de programación de MATLAB® y el software de programación del robot, llamado ROBOT-C, son distintos, se hizo una traducción de lenguaje antes de introducir las órdenes al módulo. Una vez realizado esto, se procedió a llevar a cabo los ensayos.

Para capturar el movimiento realizado por el robot, se tomó una cámara de video digital, ubicada a una distancia de 2.8m del suelo, en el cual se extendió

## CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

---

una cuadrícula (sistema de referencia) compuesta por líneas blancas sobre un fondo blanco con medidas de  $2 \times 2m$ .

Tras realizar todos los ensayos, los videos tomados fueron introducidos para su procesamiento en un ordenador a través de los *softwares* Adobe Photoshop® y Adobe Premiere®. Dicho procesamiento se hizo a través de la descomposición de los videos en sus imágenes constituyentes (cuadros o *frames*) para marcar sobre láminas de acetato transparente, cuadro por cuadro, la posición que el vehículo ocupaba en el tiempo.

Finalmente, estas imágenes descompuestas fueron utilizadas para generar las curvas finales, reintroduciendo a MATLAB® las coordenadas del vehículo para realizar la comparación de éstas con las curvas teóricas (*Splines*).

#### Desarrollo del Modelo Cinemático

Para hacer el modelo cinemático se tomaron en cuenta las siguientes condiciones:

1. El robot se mueve sobre una superficie plana.
2. Los ejes de las ruedas son perpendiculares al suelo.
3. Rodadura pura (el deslizamiento con el suelo es despreciable en el período de control).
4. Tanto el robot como el remolque carecen de partes flexibles, es decir, son cuerpos rígidos.
5. La distribución de peso en el robot y en el remolque es lo suficientemente uniforme como para que la deformación en las rueda sea despreciable.

### CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO

#### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

6. Durante un período de tiempo suficientemente pequeño en el que se mantiene constante la consigna de dirección, el vehículo se moverá de un punto al siguiente a lo largo de un arco de circunferencia.

De acuerdo con la figura 27 el vector de posición para el punto A (centro del remolque) respecto al marco de referencia 0 (Tierra) para se expresa como

$$\mathbf{r}_0^{A1} = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} \quad (60)$$

Teniendo en cuenta que la posición varía con el tiempo y de acuerdo con la ecuación (3), su velocidad es:

$$\mathbf{v}_0^{A1} = \dot{x}_1 \mathbf{i} + \dot{y}_1 \mathbf{j} \quad (61)$$

Y, además, la orientación de este centro del remolque con un eje horizontal está dada por la ecuación (41).

$$\theta_1 = \arctan \left( \frac{\dot{y}_1}{\dot{x}_1} \right) \quad (62)$$

De este modo, la variación angular, está definida como de derivada respecto al tiempo de la ecuación anterior:

$$|\omega_{10}| = \dot{\theta}_1 = \frac{d}{dt} \left( \arctan \left( \frac{\dot{y}_1}{\dot{x}_1} \right) \right) = \frac{\ddot{y}_1 \dot{x}_1 - \dot{x}_1 \ddot{y}_1}{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2} \quad (63)$$

De manera análoga, el vehículo delantero (cuyo centro es el punto B) tiene su vector posición definido según:

$$\mathbf{r}_0^{B2} = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} \quad (64)$$

Posición que se relaciona con la posición del remolque, según la figura 27, como:

$$\mathbf{r}_0^{B2} = [x_1 + d \cos(\theta_1)] \mathbf{i} + [y_1 + d \sin(\theta_1)] \mathbf{j} \quad (65)$$

### CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

Y, de la misma manera que el caso anterior, se define a la velocidad de este punto como:

$$\mathbf{v}_0^{B2} = \dot{x}_2 \mathbf{i} + \dot{y}_2 \mathbf{j} \quad (66)$$

Que, relacionándose con las variables del remolque, queda expresada como sigue:

$$\mathbf{v}_0^{B2} = [\dot{x}_1 - d \operatorname{sen}(\theta_1) \dot{\theta}_1] \mathbf{i} + [\dot{y}_1 + d \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1] \mathbf{j} \quad (67)$$

Esta misma ecuación queda expresada en función de las coordenadas  $x$  e  $y$  al introducir las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(\theta_1) = \frac{\dot{y}_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}} \quad (68) \quad \cos(\theta_1) = \frac{\dot{x}_1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2}} \quad (69)$$

Con lo cual se obtiene la siguiente expresión

$$\mathbf{v}_0^{B2} = \left[ \dot{x}_1 - d \frac{\dot{y}_1(\dot{y}_1 \dot{x}_1 - \dot{x}_1 \dot{y}_1)}{(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)^{3/2}} \right] \mathbf{i} + \left[ \dot{y}_1 + d \frac{\dot{x}_1(\dot{y}_1 \dot{x}_1 - \dot{x}_1 \dot{y}_1)}{(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)^{3/2}} \right] \mathbf{j} \quad (70)$$

Entonces, el módulo de la velocidad del vehículo viene dado por la ecuación (40):

$$|\mathbf{v}_0^{B2}| = \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2} \quad (71)$$

Que se expresa en función de las variables del remolque, como:

$$|\mathbf{v}_0^{B2}| = \frac{1}{(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)^{3/2}} \sqrt{\left( \dot{x}_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)^{3/2} - d \dot{y}_1(\dot{y}_1 \dot{x}_1 - \dot{x}_1 \dot{y}_1) \right)^2 + \left( \dot{y}_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)^{3/2} + d \dot{x}_1(\dot{y}_1 \dot{x}_1 - \dot{x}_1 \dot{y}_1) \right)^2} \quad (72)$$

### CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO

#### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

De manera análoga se puede obtener expresiones en función de las variables del remolque para todas las variables que intervienen en el movimiento del vehículo, así, se tiene para el ángulo:

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{\dot{y}_2}{\dot{x}_2}\right) = \frac{\dot{y}_1 + d \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1}{\dot{x}_1 - d \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1} \quad (73)$$

Que queda expresada como:

$$\theta_2 = \frac{(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)^{3/2} \dot{y}_1 + d \dot{x}_1 (\ddot{y}_1 \dot{x}_1 - \ddot{x}_1 \dot{y}_1)}{(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2)^{3/2} \dot{x}_1 - d \dot{y}_1 (\ddot{y}_1 \dot{x}_1 - \ddot{x}_1 \dot{y}_1)} \quad (74)$$

Y para la variación angular, se tiene:

$$|\omega_{20}| = \dot{\theta}_2 = \frac{d}{dt} \left( \arctan\left(\frac{\dot{y}_2}{\dot{x}_2}\right) \right) = \frac{\ddot{y}_2 \dot{x}_2 - \ddot{x}_2 \dot{y}_2}{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2} \quad (75)$$

Que queda expresada como:

$$\frac{(\dot{y}_1 + d [-\sin(\theta_1) \dot{\theta}_1^2 + \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1)]) (\dot{x}_1 - d \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1) - (\dot{x}_1 - d [\cos(\theta_1) \dot{\theta}_1^2 + \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_1)]) (\dot{y}_1 + d \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1)}{(\dot{x}_1 - d \sin(\theta_1) \dot{\theta}_1)^2 + (\dot{y}_1 + d \cos(\theta_1) \dot{\theta}_1)^2} \quad (76)$$

Donde

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{d}{dt} \dot{\theta}_1 = \frac{[\ddot{y}_1 \dot{x}_1 - \ddot{x}_1 \dot{y}_1][\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2] - 2[\dot{x}_1 \ddot{x}_1 + \dot{y}_1 \ddot{y}_1][\dot{y}_1 \dot{x}_1 - \dot{x}_1 \dot{y}_1]}{[\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2]^2} \quad (77)$$

Lo cual queda expresado en función de las variables del remolque como

$$\dot{\theta}_2 = AB + CD \quad (78)$$

Donde

$$A = \left( \dot{y}_1 [\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2]^{\frac{5}{2}} + d [-\dot{y}_1 [\ddot{y}_1 \dot{x}_1 - \ddot{x}_1 \dot{y}_1]^2 + \dot{x}_1 ([\ddot{y}_1 \dot{x}_1 - \ddot{x}_1 \dot{y}_1][\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2] - 2[\dot{x}_1 \ddot{x}_1 + \dot{y}_1 \ddot{y}_1][\dot{y}_1 \dot{x}_1 - \dot{x}_1 \dot{y}_1]) \right) \quad (79)$$

$$B = \frac{\left( \dot{x}_1 [\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2]^{\frac{3}{2}} - d \dot{y}_1 [\ddot{y}_1 \dot{x}_1 - \ddot{x}_1 \dot{y}_1] \right)}{\left[ \left( \dot{x}_1 [\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2]^{\frac{3}{2}} - d \dot{y}_1 [\ddot{y}_1 \dot{x}_1 - \ddot{x}_1 \dot{y}_1] \right)^2 + \left( \dot{y}_1 [\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2]^{\frac{3}{2}} + d \dot{x}_1 [\ddot{y}_1 \dot{x}_1 - \ddot{x}_1 \dot{y}_1] \right)^2 \right]} \quad (80)$$

### CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO

#### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

$$c = -\left(\dot{x}_1[\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2]^{\frac{5}{2}} - d[\dot{x}_1[\ddot{y}_1\dot{x}_1 - \dot{x}_1\ddot{y}_1]^2 + \dot{y}_1([\ddot{y}_1\dot{x}_1 - \dot{x}_1\ddot{y}_1][\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2] - 2[\dot{x}_1\ddot{x}_1 + \dot{y}_1\ddot{y}_1][\dot{y}_1\dot{x}_1 - \dot{x}_1\dot{y}_1])]\right) \quad (81)$$

$$D = \frac{\left(\dot{y}_1[\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2]^{\frac{3}{2}} + d\dot{x}_1[\ddot{y}_1\dot{x}_1 - \dot{x}_1\ddot{y}_1]\right)}{\left[\left(\dot{x}_1[\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2]^{\frac{3}{2}} - d\dot{y}_1[\ddot{y}_1\dot{x}_1 - \dot{x}_1\ddot{y}_1]\right)^2 + \left(\dot{y}_1[\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2]^{\frac{3}{2}} + d\dot{x}_1[\ddot{y}_1\dot{x}_1 - \dot{x}_1\ddot{y}_1]\right)^2\right]} \quad (82)$$

En las ecuaciones presentadas es importante señalar varios aspectos importantes:

1. Al observar todas las ecuaciones presentadas, se corrobora que el sistema estudiado es diferencialmente plano ya que todas las variables que describen el movimiento del sistema se expresaron en función de  $x$ ,  $y$  y sus derivadas sin involucrar ecuaciones diferenciales.
2. Al observar los términos de las ecuaciones para el vehículo, se evidencia que éste es completamente modelado a través de los polinomios *Spline*  $x_I$  e  $y_I$  utilizados para el remolque. Por lo tanto, el modelado y optimización de estos polinomios afecta al comportamiento de todo el sistema. En otras palabras, el sistema tiene un único grado de libertad representado por el parámetro  $t$ .
3. La inspección de las ecuaciones anteriores revela que, el caso general contiene las terceras derivadas respecto al tiempo de los polinomios  $x$  e  $y$ , esto es,  $\ddot{x}$  e  $\ddot{y}$ . Por esto, el caso general de estudio requiere que se empleen polinomios con un grado cúbico como mínimo, a fin de no anular ningún término de las ecuaciones anteriores.
4. Para el caso del vehículo en solitario, basta con hacer  $d=0$ , con lo cual se obtiene una superposición de puntos, es decir  $(x_I, y_I) = (x_2, y_2)$ .

### CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO

#### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

Finalmente, basados en la configuración del vehículo diferencial de la figura 27, el control del sistema se realiza a través de las velocidades de cada una de sus ruedas.

#### *Planificación de trayectorias óptimas del vehículo con OPTRAGEN®*

Para trabajar con OPTRAGEN® es necesario definir una estructura de datos *NLP* que contiene la información necesaria para transcribir el problema de control de optimización a un problema de programación no lineal. Tiene información que es utilizada por la función costo y de restricciones. El programa fue modificado de acuerdo a los objetivos de este Trabajo Especial de Grado para introducir las condiciones iniciales y finales del problema, es decir, en qué puntos del sistema coordenado va a partir el robot y a cuales debe llegar, indicando también los ángulos iniciales y finales que va a describir el robot.

Como el OPTRAGEN® se basa en curvas *B-Spline*, se requiere el grado de los polinomios que conforman las mismas, así como su grado de suavidad.

#### *Función de Restricciones*

Las restricciones se especifican a través de las condiciones (configuraciones) iniciales y finales del vehículo son:

$$\begin{aligned} \text{Constr} = & \\ & \text{constraint}(x_0, 'x', x_0, 'initial') + \dots \\ & \text{constraint}(y_0, 'y', y_0, 'initial') + \dots \\ & \text{constraint}\left(\theta_0, 'arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)', \theta_0, 'initial'\right) + \dots \\ & \text{constraint}(x_f, 'x', x_f, 'final') + \dots \\ & \text{constraint}(y_f, 'y', y_f, 'final') + \dots \\ & \text{constraint}\left(\theta_f, 'arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)', \theta_f, 'final'\right) + \dots \end{aligned}$$



### CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

La restricción que define el tiempo final, que es una variable a ser determinada cuando se optimiza el tiempo es:

$$\text{constraint } (T_k, 'tf', \infty, 'final') + \dots$$

Las restricciones que definen la velocidad máxima a ser entregada por cada rueda del vehículo motor son delimitadas por las ecuaciones (72) y (78):

$$\text{constraint } \left( 0, \sqrt{\frac{1}{tf^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} + \frac{\dot{y}\dot{x} - \dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \frac{d}{2tf}, 0.47, 'trajectory' \right) + \dots$$

$$\text{constraint } \left( 0, \sqrt{\frac{1}{tf^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} - \frac{\dot{y}\dot{x} - \dot{x}\dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \frac{d}{2tf}, 0.47, 'trajectory' \right) + \dots$$

Las restricciones que definen la presencia de obstáculos circulares donde se asignan sus ubicaciones son:

$$\text{constraint } (0.08, (x - 0.6)^2 + (y - 0.5)^2, \infty, 'trajectory') + \dots$$

$$\text{constraint } (0.08, (x - 0.8)^2 + (y - 1.5)^2, \infty, 'trajectory') + \dots$$

La restricción del ángulo que se debe adicionar cuando el vehículo arrastra el remolque es la siguiente:

$$\text{constraint } \left( -\frac{\pi}{3}, \arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) - \arctan\left(\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2} \dot{y} + d \dot{x} (\dot{y}\dot{x} - \dot{x}\dot{y})}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2} \dot{x} - d \dot{y} (\dot{y}\dot{x} - \dot{x}\dot{y})}\right), \frac{\pi}{3}, 'trajectory' \right) + \dots$$

Las restricciones de velocidad que se deben emplear cuando el vehículo arrastra el remolque son:

$$\text{constraint } \left( 0, \sqrt{\frac{1}{tf^2} \left( \left( \dot{x} - \text{sen}\left(\arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\right) * d_0 * \frac{1}{(1 + (\dot{y}/\dot{x})^2)} * \frac{\dot{y} * \dot{x} - \dot{x} * \dot{y}}{\dot{x}^2} \right)^2 + \left( \dot{y} + \text{cos}\left(\arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\right) * d_0 * \frac{1}{(1 + (\dot{y}/\dot{x})^2)} * \frac{\dot{y} * \dot{x} - \dot{x} * \dot{y}}{\dot{x}^2} \right)^2 \right)} + \frac{\dot{y} * \dot{x} - \dot{x} * \dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} * \frac{d_0}{2} * \frac{1}{tf}, 0.47, 'trajectory' \right) + \dots$$

$$\text{constraint } \left( 0, \sqrt{\frac{1}{tf^2} \left( \left( \dot{x} - \text{sen}\left(\arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\right) * d_0 * \frac{1}{(1 + (\dot{y}/\dot{x})^2)} * \frac{\dot{y} * \dot{x} - \dot{x} * \dot{y}}{\dot{x}^2} \right)^2 + \left( \dot{y} + \text{cos}\left(\arctan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\right) * d_0 * \frac{1}{(1 + (\dot{y}/\dot{x})^2)} * \frac{\dot{y} * \dot{x} - \dot{x} * \dot{y}}{\dot{x}^2} \right)^2 \right)} - \frac{\dot{y} * \dot{x} - \dot{x} * \dot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} * \frac{d_0}{2} * \frac{1}{tf}, 0.47, 'trajectory' \right) + \dots$$

### CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO

#### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

A las restricciones anteriores para definir los obstáculos cuando el vehículo arrastra el remolque se deben agregar las que se presentan a continuación, para que tanto el vehículo como el remolque no colisionen:

$$\text{constraint } (0.08, '(x + \cos\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) * d_0 - 0.6)^2 + (y + \text{seno}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) * d_0 - 0.5)^2, \infty, 'trajectory')$$

$$\text{constraint } (0.08, '(x + \cos\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) * d_0 - 0.8)^2 + (y + \text{seno}\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) * d_0 - 1.5)^2, \infty, 'trajectory')$$

#### Función de Costo

En este apartado del OPTRAGEN® se define la función costo, es decir la función que se va a optimizar, para el caso particular de este trabajo de grado, según se definió en el Capítulo I las funciones a optimizar son tiempo, energía y ambas.

La función costo para optimizar tiempo se definió de la siguiente manera:

$$\text{Cost} = \text{cost}('tf^2', 'final');$$

La función costo para optimizar energía se definió de la siguiente manera:

$$\text{Cost} = \text{cost}('x^2 + y^2', 'trajectory');$$

La función costo para optimizar tiempo y energía se definió como:

$$\text{Cost} = \text{cost}\left(\frac{1}{tf^2} * (x^2 + y^2), 'trajectory'\right) + \text{cost}('tf^2', 'final');$$

OPTRAGEN® trabaja asumiendo que la trayectoria inicial es una recta que une los puntos de interés que va desde  $(x_0, y_0)$  hasta  $(x_f, y_f)$  y posteriormente se va ajustando a una curva *B-Spline* obteniendo así puntos de data con el número de intervalos, suavidad y orden que usamos para parametrizar  $x(t)$  y  $y(t)$  convirtiéndose en semillas iniciales como un vector columna que el programa utiliza para iterar utilizando SNOPT®, buscando direcciones basadas en sub-problemas de programación cuadrática hasta llegar a la solución deseada, si existe.

### Limitaciones

En primer lugar, desarrollar un programa de optimización y realizar su puesta a punto es complejo debido, esencialmente, a su programación no lineal (en este caso cuadrática); este aspecto se escapa de los lineamientos establecidos para un trabajo de pregrado por lo cual fue necesario recurrir a un programa de optimización, que en este caso fue OPTRAGEN® debido a que se encontraba disponible para la plataforma de MATLAB®.

Por otra parte, al desarrollar el modelo cinemático se realizaron ciertas suposiciones, entre las que se encontraba la del desplazamiento sobre una superficie plana, así mismo, para que cumpla con la condición de rodadura se necesita una superficie suave pero con rugosidad. El tamaño inicial de las trayectorias a ser descritas por el robot abarcaría un espacio de  $4 \times 5m$  y no se disponía de un recinto lo suficientemente alto para colocar en el punto medio de la cuadrícula, perpendicular a ésta, una cámara de video que cubriera todas las trayectorias para grabarlas y posteriormente ser comparadas.

La intención de los experimentos es comparar las curvas reales con las teóricas, por lo que se consideró la posibilidad de dibujar en la superficie una cuadrícula con tizas, lo cual resultó ser impráctico, debido a que el robot debía dejar un rastro en dicha cuadrícula que debía ser borrada y redibujada para cada experimento a realizar; por esta razón se decidió crear una cuadrícula realizada en AUTOCAD® e imprimir varias copias en un plotter, para de esta manera luego de realizar un experimento cambiar sucesivamente la cuadrícula.

De nuevo se necesitaba que el robot dejara un rastro ahora sobre el papel bond, por lo que se debía idear la manera de colocar un bolígrafo o un marcador en los puntos de interés, que fueron el punto medio de eje de las ruedas motrices y el punto medio del eje de las ruedas del remolque. Sin embargo, el

### CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO

#### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

---

espacio disponible para colocarlos era muy estrecho y sólo cabía un marcador de punta fina cuya marca no se distinguía por la lejanía y resolución de la cámara. Se ideó un mecanismo para colocar un marcador de punta más gruesa pero el espacio entre los puntos de interés y el piso era muy limitado para mantenerlo fijo y estable (5mm aproximadamente). Posteriormente se colocó un pedazo de tiza cuyo extremo se encontraba unido a un mondadientes para ser posicionada contra la superficie pero, en este caso, la tiza no marcaba con suficiente intensidad y si se utilizaba un sistema de resortes que la mantuviera en contacto con el piso en todo momento para que marcara más se añadía una fuerza de roce adicional que distorsionaba la trayectoria. Entre otras ideas, se concibió el colocar un tanque de arena o talco pero ésta añadía un peso adicional que igual que en el caso anterior distorsionaría la trayectoria. Finalmente se colocó un gotero con tinta que, a pesar de ser de secado rápido, no lo hacía lo suficientemente rápido y ocurría que el remolque rodaba encima de la tinta de modo que, al final, las trayectorias no eran identificables con exactitud. Además, cuando se alcanzaba la posición final, mientras se retiraba el robot, éste seguía goteando tinta, lo que impedía definir con exactitud dicho punto.

Considerando todo lo anterior, se decidió filmar las trayectorias sobre la cuadrícula y después con el software Adobe Premier® descomponer los videos en fotogramas para tomar en cada momento la posición del robot con respecto a la cuadrícula, para luego reintroducir estos datos en MATLAB® tomando en cuenta la distorsión de la imagen por la cámara.

Todas las trayectorias fueron generadas considerando condiciones óptimas de las baterías, y a medida que se realizaban experimentos éstas se iban descargando, ocasionando que el vehículo fuese más lento y por lo tanto no alcanzara la posición final.

## CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO

---

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

### Recursos Disponibles

Con el fin de ejecutar el presente trabajo especial de grado se tienen disponibles los siguientes elementos computacionales clasificados en software, hardware y otros:

#### Software

- Microsoft Windows XP
- Microsoft Office 2003/2007 Professional
- Auto CAD 2006/2007.
- MATLAB® 7.0 / Maple® 10
- ROBOT-C® 1.10

#### Hardware

- PC Intel® Pentium® IV, 1.4 GHz, 256 MB RAM, DD 60 GB
- PC Intel® Pentium® D, 3.4 GHz, 1 GB RAM, DD 120 GB
- Impresoras: Lexmark X5100 series, Lexmark E230, Epson Stylus CX 4700
- Sala de computadoras de la Escuela de Ingeniería Mecánica
- Módulo Lego® NTX
- Cámara Fotográfica/Video Olympus FE-250

#### Otros recursos

- Acceso a Internet en forma particular, en la Bibliotecas de la Facultad de Ingeniería, Central y en la Escuela de Ingeniería Mecánica de la UCV.

### **CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO**

---

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

- Material Bibliográfico existente en las Bibliotecas de la Escuela de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería y Central de la UCV.
- Instalaciones y equipos de medición de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la UCV.

## CAPÍTULO IV

### RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presentarán, a través de gráficas y tablas, los resultados obtenidos a partir de los experimentos realizados conjuntamente con su respectivo análisis. En la primera parte se presentan los resultados del modelo cinemático desarrollado en MATLAB® junto con sus simulaciones mientras que en la segunda parte se presentan los resultados experimentales obtenidos a partir de la implementación del modelo cinemático en el vehículo de tracción diferencial.

#### Resultados de los Modelos Cinemáticos:

##### Curva de Dubins:

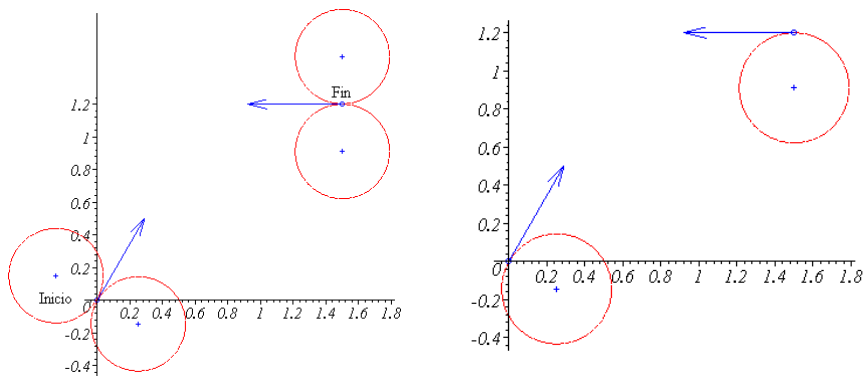
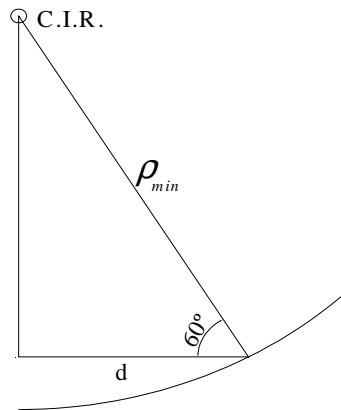


Figura 35: Condiciones Iniciales para la construcción de la curva de Dubins.  
Izquierda: Condiciones Iniciales      Derecha: Circunferencias “de giro” seleccionadas

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

En la figura 35 se observa que el problema consistió en hallar la trayectoria más corta entre los puntos (0,0) con un ángulo inicial de  $60^\circ$  sobre la horizontal y el punto (1.5,1.2) con ángulo de  $180^\circ$  con respecto a la horizontal. Inicialmente el algoritmo planteó las dos posibilidades de giro (antihorario y horario) tanto al inicio como al final, lo cual se representa a través de las circunferencias rojas. El radio de giro utilizado provino del valor  $\rho_{min}$  calculado de acuerdo según el siguiente esquema:



$$\cos(60^\circ) = \frac{d}{\rho_{min}} \quad (83)$$

Donde  $d = 0.145m$  y el ángulo de  $60^\circ$  es la máxima separación posible entre el vehículo y el remolque sin que exista contacto entre ellos. De manera que

$$\rho_{min} = \frac{d}{\cos(60^\circ)} = 0.29m$$

Figura 36: Cálculo del Radio de Curvatura Mínimo.

En la misma figura 35 se observa que el algoritmo fue capaz de seleccionar el par circunferencias “de giro” más convenientes para el movimiento, una para su inicio y otra para su final. Esto lo logró al identificar cuál par de circunferencias se intersecan al hacer la menor extensión de sus radios, manteniendo fijos en el proceso tanto el punto inicial como final (representados como la base de los vectores de la imagen) y la dirección que éstos forman con el centro de las circunferencias que tienen asociadas.



## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónomo con Remolque

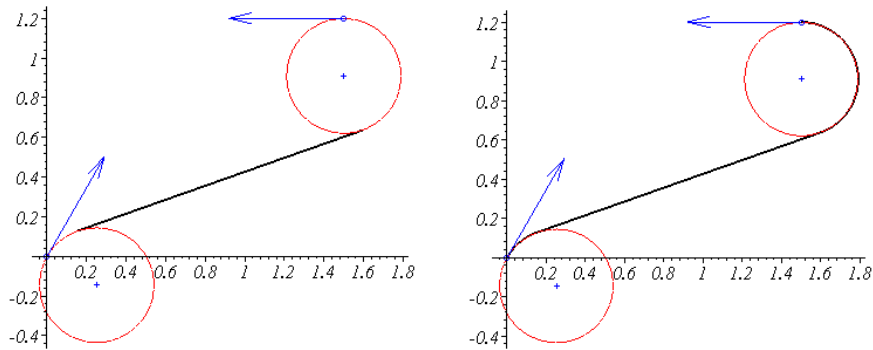


Figura 37: Definición de la Curva de Dubins Definitiva.  
Izquierda: Definición de la Recta Tangente Derecha: Curva Definitiva

De acuerdo con la figura 37 el algoritmo propuesto también fue capaz de seleccionar la recta tangente a las dos circunferencias de giro de manera coherente con el movimiento propuesto. Para ello descartó a las otras posibles rectas tangentes al verificar que violan las restricciones de la dirección de movimiento impuestas, representadas por los vectores inicial y final mostrados. Finalmente, el modelo propuesto completa la curva al trazar los dos arcos de circunferencia que completan la trayectoria con las condiciones impuestas.

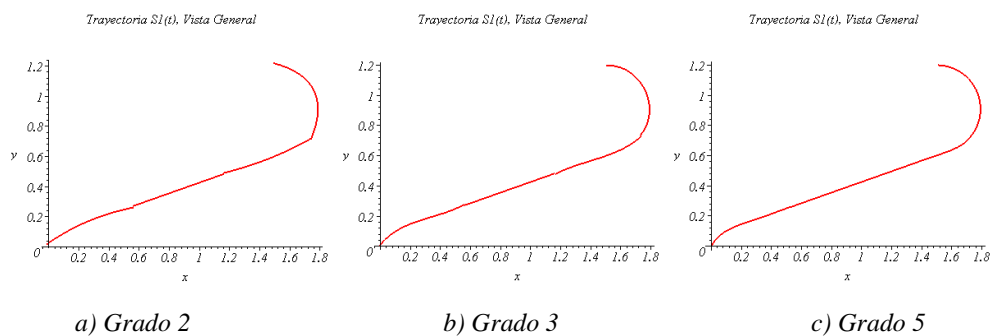


Figura 38: Diversas Trayectorias Polinómicas para la Parametrización de la Curva de Dubins

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

El modelo propuesto pudo parametrizar la curva de Dubins a través de una aproximación por mínimos cuadrados basado en la toma de valores discretos a lo largo de toda la trayectoria. Para mejorar los resultados, la parametrización fue hecha utilizando diversos intervalos del parámetro *tiempo*, de manera de producir una parametrización particular para cada intervalo. El número de intervalos utilizado por el algoritmo fue de 5, con el objeto de disminuir las discontinuidades en la trayectoria final.

Como se tenía previsto, la figura 38 muestra que el algoritmo arrojó mejores resultados a medida que la aproximación por mínimos cuadrados se hacía con polinomios de mayor grado. En el caso de la curva cuadrática, el resultado produjo una curva discontinua, lo cual no es admisible para la planificación del movimiento del vehículo autónomo. De la misma manera, la curva cúbica no resolvió por completo este problema y sólo al aumentar el grado de la aproximación a 5 fue cuando logró obtenerse una curva suave y continua. Sin embargo, esto no resulta completamente satisfactorio para la planificación porque con el aumento del grado aumenta la inestabilidad del polinomio.

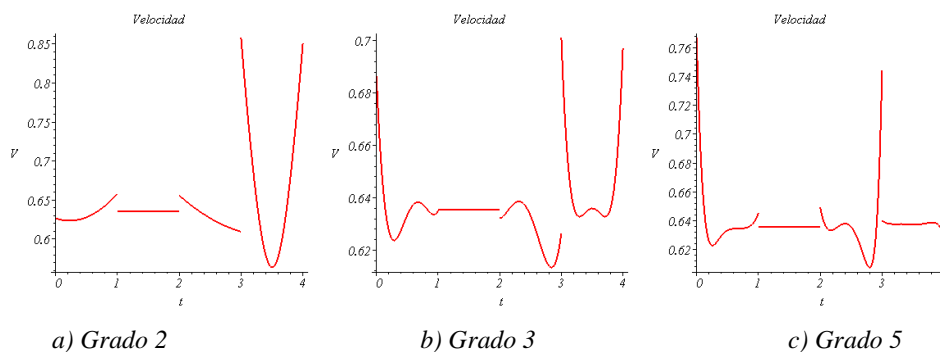


Figura 39: Funciones de Velocidad para las Parametrizaciones de la Curva de Dubins

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónomo con Remolque

Las funciones de velocidad obtenidas revelan que el método de parametrización utilizado no garantiza continuidad en la función velocidad, lo cual es de suma importancia para la implementación del modelo cinemático en el robot NXT<sup>TM</sup>. A pesar de que la trayectoria se vuelve continua y suave a medida que se aumentó el grado del polinomio empleado, ninguna función velocidad obtuvo esta importante característica y de implementarse estos polinomios se somete al vehículo a bruscos cambios de velocidad que no garantizan el correcto desarrollo del movimiento planteado.

El método se caracterizó por:

- a) Ser programable con facilidad cuando la distancia que separa al punto de inicio con el punto final es mayor a  $2\rho$ , es decir, mayor al doble del radio de curvatura mínimo del vehículo. Sin embargo, cuando esta condición no se cumple es necesario someter al algoritmo a numerosas pruebas lógicas para llegar a un resultado satisfactorio.
- b) Requirió de la imposición de un radio mínimo de curvatura en los cálculos, de otra manera todas las soluciones se reducen a una línea recta entre el punto inicial y final, lo cual no satisface todas las restricciones de los problemas abordados en esta investigación.

#### **Curvas *Splines* Generadas con OPTRAGEN®**

Para poder generar la trayectoria que optimice parámetros específicos para ir de un punto inicial a uno final, se utilizó la caja de herramientas de OPTRAGEN® en MATLAB®. Su utilización consiste en transformar el problema de optimización en un problema de programación no-lineal que produzca una salida (trayectoria), mediante las curvas *B-Spline*, que pueda ser descrita por el vehículo, tomando en cuenta las limitaciones que presenta.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónomo con Remolque

---

Al emplear esta herramienta, se asignaron las siguientes condiciones:

- Condiciones y parámetros para el vehículo en solitario.
  1. Grado de las *B-Splines* ( $n$ ): Restringido a un número entero positivo.
  2. Posición Inicial ( $x_0, y_0$ ): representada por un par ordenado de números reales en metros.
  3. Ángulo Inicial ( $\theta_0$ ): representado por un número real en radianes.
  4. Posición Final ( $x_m, y_m$ ): igualmente medida en metros con un par de números reales.
  5. Ángulo Final ( $\theta_m$ ): al igual que el caso anterior es un número real en radianes.
  6. Velocidad Máxima del Robot (*VMR*): es la velocidad máxima en metros por segundo que el servomotor del robot puede entregar.
  
- Condiciones y parámetros para el vehículo vinculado al remolque:
  7. Distancia entre los centros de los ejes de los vehículos ( $d$ ): Es la distancia medida en metros entre ambos ejes.
  8. Ángulo Máximo Entre Vehículos ( $\theta_{max}$ ): Medido en radianes, es la máxima desviación del remolque respecto al eje del vehículo que garantiza la no-colisión entre ambos móviles.
  
- Condiciones y parámetros para la evasión de obstáculos:
  9. Obstáculos: Representados por circunferencias, tanto su radio y posición se miden en metros. Se introdujeron a OPTRAGEN® de la misma forma en que se introdujeron las posiciones para el vehículo.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

- Restricciones y funciones de peso:
  10. Funciones de costo: Energía y tiempo de recorrido

Mediante el empleo de la herramienta, se asignan estos valores y funciones al sistema. En la figura 40 se observa una curva solución cuyas condiciones iniciales son (0,0) con un ángulo de  $\pi/2$  sobre la horizontal y con condiciones finales de (1.2,1.6) con un ángulo de  $\pi/2$  sobre la horizontal, en presencia de obstáculos circulares de radio 0.36, ubicados en (0.6,0.5) y (0.8,1.5). Más adelante en este capítulo, se puede encontrar que esto corresponde al caso del ensayo de la Curva – 16. Utilizando grado 3 para las curvas solución (*Splines*) OPTRAGEN® parte de una línea recta que une ambos puntos (inicial y final) e itera hasta llegar a una solución (si existe) que cumpla con las todas las condiciones descritas anteriormente y no colisione con los obstáculos descritos.

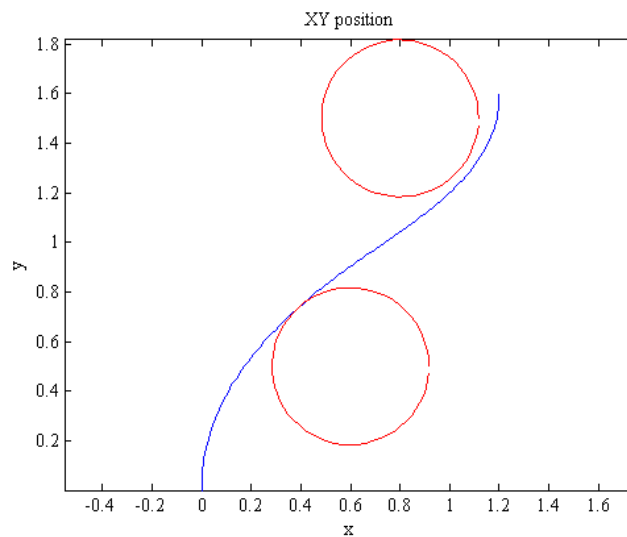


Figura 40: Curva B-Spline generada por OPTRAGEN® con condiciones iniciales y finales especificadas en presencia de obstáculos.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónomo con Remolque

Al encontrar la solución, la salida de OPTRAGEN® proporciona tres arreglos matemáticos (*arrays*):

1. Vector de nodos  $U$ : La salida otorga estos arreglos de la forma  $U = [a, a, a, a, b, c, c, c, c]$  con  $a < b < c$ . La multiplicidad de  $n+1$  (es decir, 4) tanto para el valor de  $a$  como el de  $c$  garantizaron el paso de la *Spline* por los puntos final e inicial, respectivamente. Del mismo modo, el valor de  $c$  representa directamente el valor del tiempo de recorrido mínimo (en segundos) que cumple con las condiciones impuestas.
2. Arreglo de puntos de control  $x_i$ : Este arreglo, similar al anterior es una lista secuencial de las posiciones de las abscisas de los puntos de control de la *Spline*. Genera exactamente  $k-n-1$ , al ser  $k$  el número de valores del vector  $U$ , resultó que, al emplear el grado 3, este número mínimo de valores es 9, obteniéndose, en consecuencia, 5 puntos de control.
3. Arreglo de puntos de control  $y_i$ : De manera análoga al caso anterior, OPTRAGEN® generó 5 valores que representan las ordenadas de los 5 puntos de control.

Para el caso específico de la figura 40, el vector de nodos  $U$  que arroja OPTRAGEN® es:

$$U = [0.00, 0.00, 0.00, 0.00, 2.54, 5.08, 5.08, 5.08, 5.08]$$

De acuerdo con el modelo planteado, esto indica entonces que el tiempo mínimo para realizar esta trayectoria, sujeta a las condiciones descritas anteriormente, es de 5.08s. Además, el vector también indica que de 0 a 2.54s la trayectoria es gobernada por una regla de correspondencia (polinomios) diferente a la que gobierna el intervalo siguiente de 2.54 a 5.08s.

Por otro lado, OPTRAGEN® arroja los siguientes puntos de control:

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

$$X = [0.00, 0.00, 0.48, 1.20, 1.20]$$

$$Y = [0.00, 0.36, 0.91, 1.26, 1.60]$$

En la figura 41 se pueden observar los puntos de control como asteriscos ocupando los vértices del polígono. Con estos resultados se utilizan otras rutinas en MATLAB para obtener la *Spline* final que posteriormente se discretizó utilizando el método de Euler, tomando en cuenta el modelo cinemático del vehículo, para de esta forma poder transferir la información de la velocidad a cada servomotor.

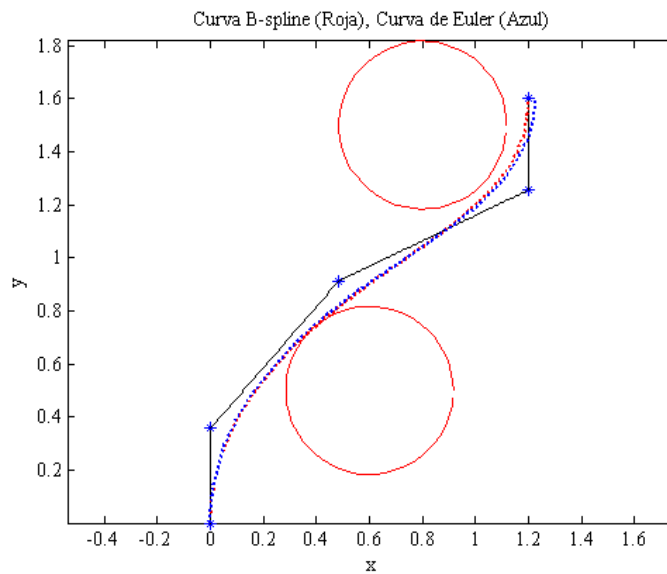


Figura 41: Curva B-Spline con polígono de control y su discretización (método de Euler)

OPTRAGEN® no sólo suministra la curva, sino también el tiempo que tardaría el vehículo en recorrerla (para el caso específico de la figura 41 son 5.0784s) tomando en cuenta las velocidades máximas que puede alcanzar cada servomotor (para el caso anterior se asumió como velocidad máxima de cada

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

rueda  $0.45m/s$ ). La gráfica de la velocidad de cada rueda muestra no sólo que OPTRAGEN® genera una curva que cumpla con las restricciones de velocidad, sino también que dicha curva es continua y suave de tal manera que puede ser descrita por el robot.

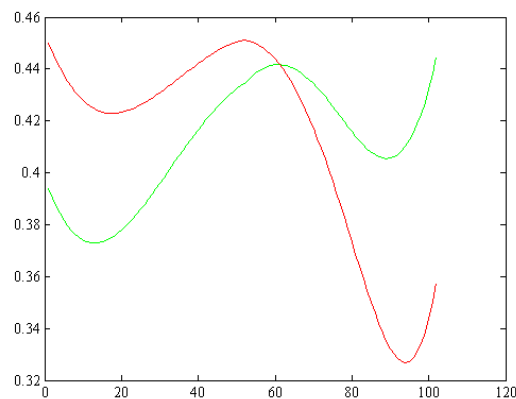


Figura 42: Velocidad de la rueda derecha (roja) y velocidad de la rueda izquierda (verde)

### Métodos Numéricos

Respecto a los métodos numéricos empleados, fue el tiempo de ejecución de las corridas lo que limitó el uso del método de Runge-Kutta debido a que el control del módulo debió realizarse utilizando pasos ( $\delta$ ) muy pequeños. A pesar de que éste converge con mayor rapidez y genera una dispersión del error también ocurre que la cantidad de pasos necesarios quintuplica al número de pasos necesarios para implementar el método de Euler, lo cual se traduce en un incremento del tiempo de las corridas de los algoritmos.

Además de esto, al incrementar la cantidad de puntos discretos de las *B-Spline*, la discretización de Euler, como se esperaba, redujo el error al punto de ser viable su implementación, como se apreciará en los apartados sucesivos.



### **Resultados Experimentales:**

Es importante señalar que todos los resultados experimentales descritos en la presente sección se encuentran sujetos a errores asociados a la toma de videos del movimiento y a la lectura e interpretación de las correspondientes gráficas experimentales obtenidas mediante éstos, los cuales se agrupan de la siguiente manera:

- a) En primer lugar, existe un error debido a la resolución disponible para tomar los videos (320x240 pixeles), esto dificultó la identificación exacta de la posición que el vehículo ocupaba durante su movimiento.
- b) También se presentan errores debido a que estos videos fueron tomados en un ambiente real; esto significa que la perspectiva (proyección cónica) produce variaciones respecto al sistema de proyección cilíndrico ortogonal sobre el cual se desarrollaron todos los modelos teóricos. Este error se conoce como “Error de Alineación” y aumenta medida que los objetos se alejan del centro de la cámara.
- c) Finalmente, existe error en la toma de datos de las curvas experimentales debido al método cuadro a cuadro empleado para ubicar el trazo dejado tanto por el vehículo como por el remolque. El error está asociado a la inspección visual necesaria para ubicar los puntos de la trayectoria a mano alzada.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

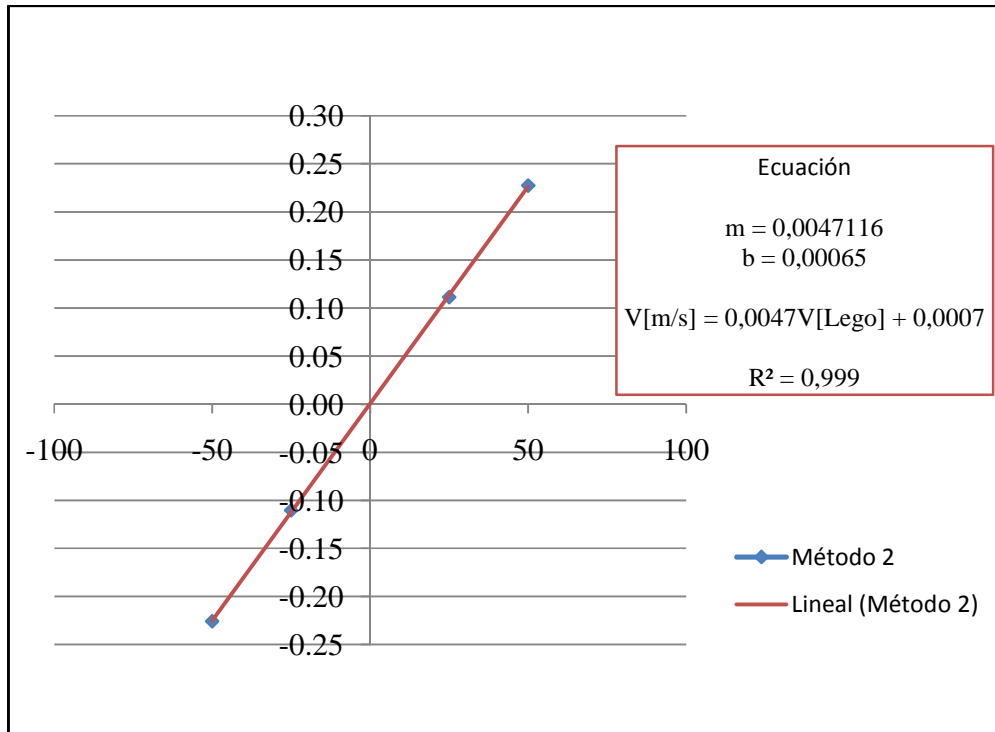


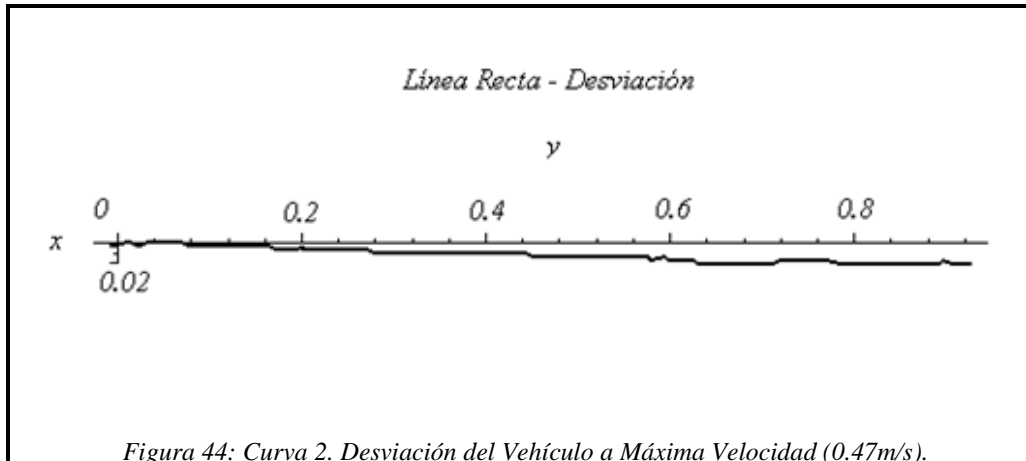
Figura 43: Curva 1. Correlación de Velocidades.  $V[m/s]$  vs.  $V[Lego]$ .

De acuerdo con la figura 43, la correlación arroja que la máxima velocidad que el módulo NXT<sup>TM</sup> puede desarrollar se encuentra en el orden de los 0,45m/s. Dado que esta correlación se desarrolló utilizando, como máximo, el 50% de la velocidad máxima y baterías con un voltaje ligeramente inferior a los 9V nominales que emplea el módulo, es posible que éste desarrolle realmente entre un 2% y un 4% extra de velocidad máxima.

El Coeficiente de Correlación obtenido ( $R=0.99$ ), indica que estos resultados son satisfactorios y, por lo tanto, su uso para el resto del desarrollo de la investigación fue apropiado.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque



*Tabla 2: Desviación del Robot en Línea Recta*

<i>x(m)</i>	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00
$\Delta y(m)$	0.00	0.003	0.007	0.015	0.019	0.020

En esta curva se observa que el módulo NXT™ tiene una pequeña tendencia a desviarse a la derecha mientras avanza. La desviación es proporcional al avance que el vehículo haya realizado, a razón de 2 centímetros por cada metro avanzado a máxima velocidad (constante). Esto es debido a la configuración diferencial del módulo en la cual pequeñas diferencias (en el orden de las centésimas) de velocidad relativa entre las ruedas lo conducen a describir arcos de circunferencia en vez de la línea recta deseada.

Las causas principales de esta diferencia relativa de velocidades, en modo general, son las siguientes:

- a. *La heterogeneidad en los servomotores del módulo:* Los servomotores tienen uso desigual y no son idénticos debido a la variabilidad inherente a todo proceso de fabricación, esto conduce de manera inevitable a que el par de servomotores no puedan desarrollar la misma velocidad, originando la desviación en línea curva.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

---

- b. *Heterogeneidades en el entorno de movimiento:* Cualquier variación o deformación de la horizontalidad en la superficie (depresiones, cúspides, entre otros) sobre la que se produce el movimiento puede provocar el efecto de desviación.
- c. *Pérdida de la condición de rodadura:* El movimiento pierde su uniformidad si alguna de las ruedas cesa el contacto con la superficie o si cesa la rodadura de éstas (deslizamiento). Una aceleración súbita puede provocar esto.
- d. *Decremento del radio de las ruedas:* Si alguna de las ruedas se deforma o su radio se ve disminuido sustancialmente, la velocidad lineal de sus centros serán diferentes incluso cuando la velocidad angular de ambas sea la misma. Esto puede ocurrir si hay una distribución desigual en los pesos del vehículo.

En esta investigación, el peso del módulo (de aproximadamente 1Kg, simétricamente distribuido) y la ausencia de transporte de pesos (aparte del suyo propio) descartan la posibilidad de una deformación significativa (en el orden de los milímetros) en alguna de las ruedas. Además, todos los ensayos se realizaron sobre la misma superficie, cuidando siempre su homogeneidad y horizontalidad. En vista de esto, las causas que más impacto tuvieron sobre este ensayo fue la pérdida de la condición de rodadura y la heterogeneidad de los servomotores.

A pesar de estos efectos, la duración de cada movimiento (de acuerdo con la discretización del modelo teórico) se hizo en espacios de tiempo divididos en intervalos comprendidos entre los 0.01 y los 0.1 segundos; que mantienen este error de curvatura menor a los 3 milímetros de acuerdo con la gráfica.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

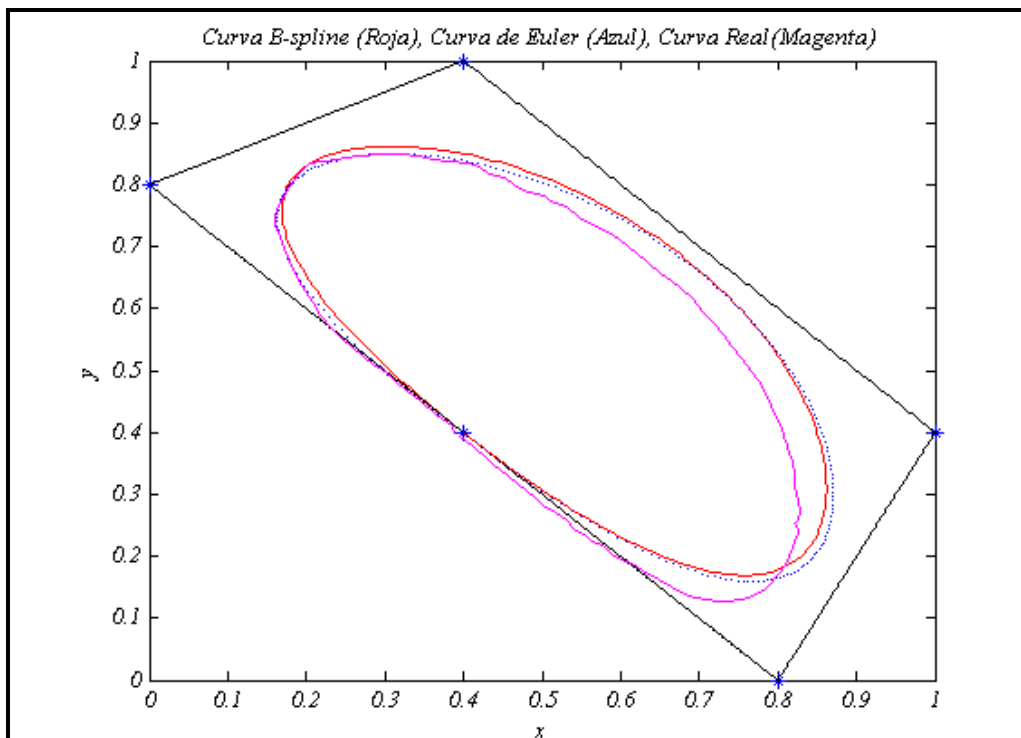


Figura 45: Curva 3. Trayectoria Cerrada (Bucle) con  $\delta = 0.05$  s

Tabla 3: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 3

Teórico B-Spline	Condiciones Iniciales		Condiciones Finales		
		$(x_2, y_2)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.50, 1.60)
	$\theta_2$ (rad)	$5\pi/2$	$\theta_2$ (rad)	$5\pi/2$	
Euler	Valores Iniciales		Valores Finales		
		$(x_2, y_2)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.54, 1.58)
		$\theta_2$ (rad)	7.85	$\theta_2$ (rad)	7.81
Real	Valores Iniciales		Valores Finales		
		$(x_2, y_2)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.53, 1.63)
		$\theta_2$ (rad)	7.85	$\theta_2$ (rad)	7.85

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

---

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

En base a la figura 45 se observa que la curva experimental obtenida presenta una desviación significativa en el tramo inicial respecto al modelo teórico. Sin embargo, también se puede observar que el vehículo consiguió completar el bucle propuesto al partir y llegar al punto especificado (0.4,0.4) sin desviación significativa. Este error se debe, en primera instancia, a que el arranque súbito del vehículo desde el reposo a la velocidad inicial de 0,42m/s (lo cual representa el 89.4% de la velocidad máxima del mismo) produjo deslizamiento en las ruedas, lo cual interrumpió momentáneamente la condición de rodadura al inicio del movimiento.

Además de esto, el error observado en la gráfica se debe principalmente al error de alineación; pues el sistema de captura de video se configuró de tal forma que el foco de la cámara se posicionara encima del punto (1,1) del sistema de coordenadas utilizado, por lo tanto la imagen obtenida se percibe desviada.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

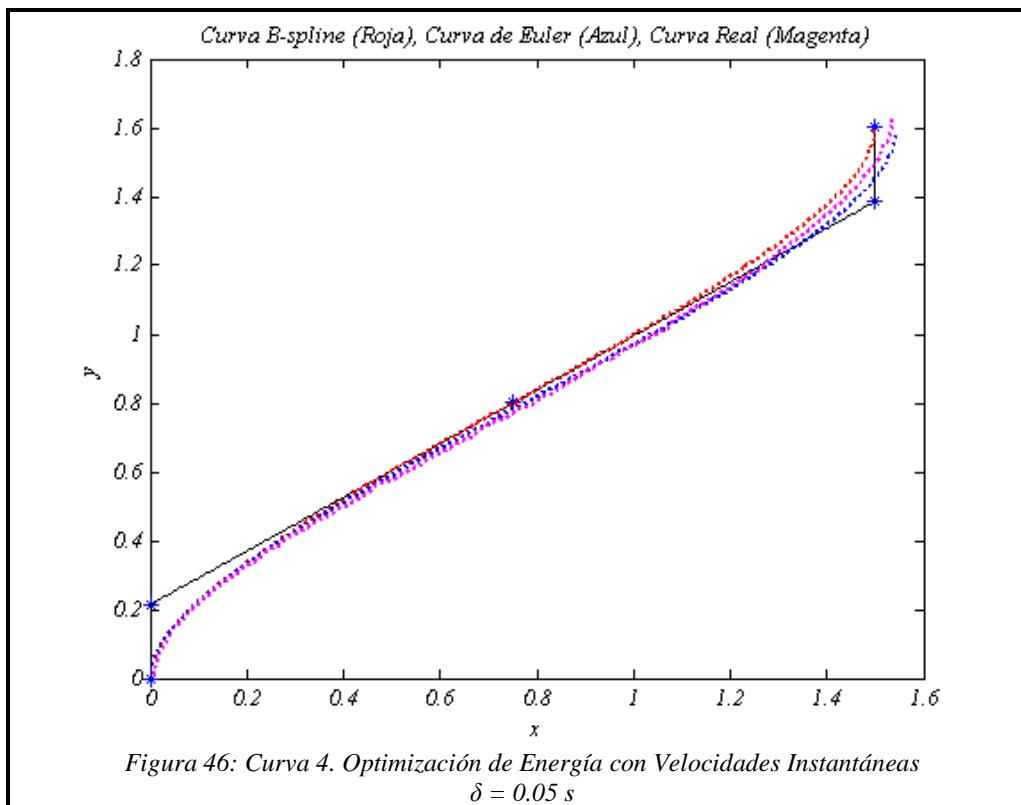


Tabla 4: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 4

Teórico B-Spline	Condiciones Iniciales		Condiciones Finales	
		$(x_2, y_2)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)
	$\theta_2$ (rad)	$5\pi/2$	$\theta_2$ (rad)	$5\pi/2$
Euler	Valores Iniciales		Valores Finales	
		$(x_2, y_2)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)
	$\theta_2$ (rad)	7.85	$\theta_2$ (rad)	7.81
Real	Valores Iniciales		Valores Finales	
		$(x_2, y_2)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)
	$\theta_2$ (rad)	7.85	$\theta_2$ (rad)	7.85

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

Tabla 5: Tabla de errores de la Curva 4 Real respecto a las Teóricas			
Vehículo en Solitario / $\delta = 0.05 s$			
Velocidades Instantáneas / Optimización de Energía			
Error – Curva 4		Absoluto	Relativo
Real / <i>B-Spline</i>	$x_2 (m)$	+0.03	+2.00%
	$y_2 (m)$	+0.03	+1.87%
	$\theta_2 (rad)$	0.00	0.00%
Real / Euler	$x_2 (m)$	-0.01	-0.65%
	$y_2 (m)$	+0.05	+3.16%
	$\theta_2 (rad)$	+0.04	+0.51%

La gráfica y el error calculado en la posición final indican que la curva real presenta el mayor error relativo en la posición vertical (respecto a la curva de Euler), con un 3,16% por encima del valor establecido de 1.58m. En relación a la curva teórica los resultados muestran una dispersión del error menor para el valor del ángulo (en el cual el vehículo coincidió) y para la desviación vertical.

La figura 46 también revela que el error respecto a la curva teórica y la de Euler se propagó de forma creciente; manteniendo la tendencia del módulo a desviarse a la derecha pero, a pesar de esto, describió una trayectoria que compensa el error propagado al discretizar el modelo teórico a través de la curva de Euler.

Estos resultados, obtenidos utilizando el modelo de velocidades instantáneas, resultan satisfactorios en vista de que el error relativo propagado fue, en todos los casos, menor a 5%; es decir, no superó los 5cm de error absoluto. En términos del error en el ángulo, la mayor variación no superó los 3° (0.04rad) en el error absoluto.

Estas ligeras diferencias se encuentran en la heterogeneidad de los servomotores y en la discretización del modelo teórico a través de la curva de Euler.



## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

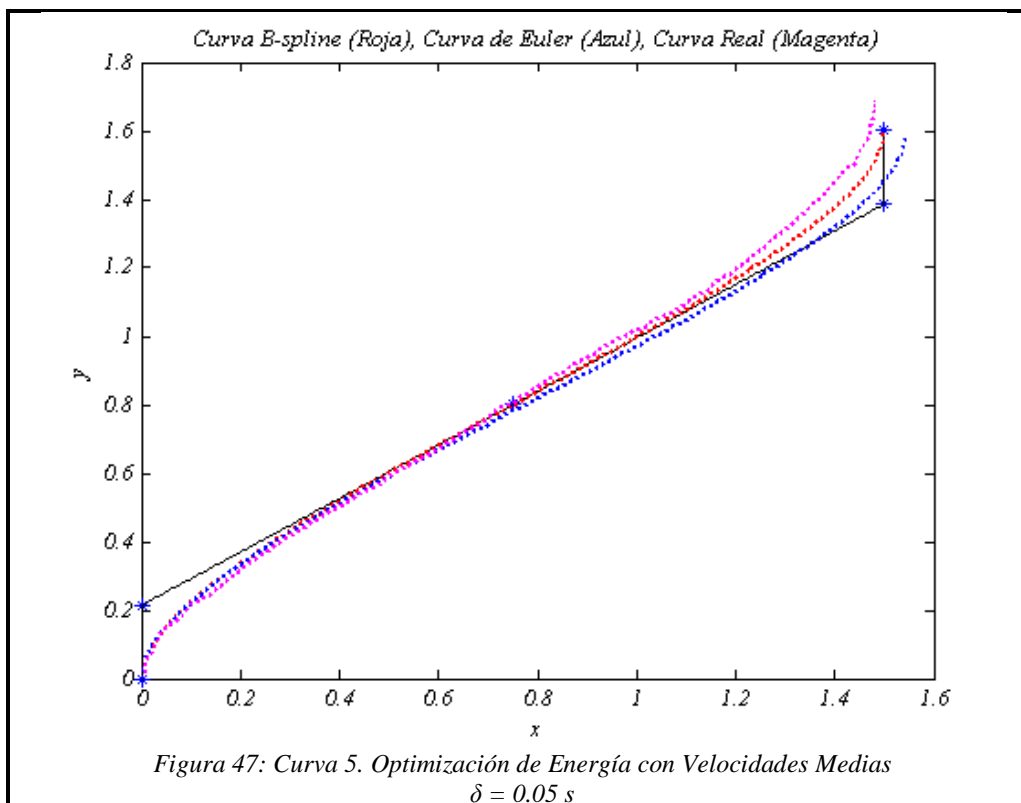


Tabla 6: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 5

Teórico B-Spline	Condiciones Iniciales		Condiciones Finales	
		$(x_2, y_2)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)
	$\theta_2$ (rad)	$5\pi/2$	$\theta_2$ (rad)	$5\pi/2$
Euler	Valores Iniciales		Valores Finales	
	$(x_2, y_2)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.54, 1.58)
	$\theta_2$ (rad)	7.85	$\theta_2$ (rad)	7.81
Real	Valores Iniciales		Valores Finales	
	$(x_2, y_2)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.48, 1.69)
	$\theta_2$ (rad)	7.85	$\theta_2$ (rad)	7.85

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

Tabla 7: Tabla de errores de la Curva 5 Real respecto a las Teóricas			
Vehículo en Solitario / $\delta = 0.05 s$			
Velocidades Medias / Optimización de Energía			
Error – Curva 5		Absoluto	Relativo
Real / B-Spline	$x_2 (m)$	-0.02	-1.33%
	$y_2 (m)$	+0.09	+5.62%
	$\theta_2 (rad)$	0.00	0.00%
Real / Euler	$x_2 (m)$	-0.06	-3.90%
	$y_2 (m)$	+0.11	+6.96%
	$\theta_2 (rad)$	+0.04	+0.51%

Dejando a un lado el hecho de que no hubo desviación angular respecto a la curva teórica, los resultados muestran, en este caso, que la menor desviación ocurrió en la posición horizontal respecto a la curva teórica, con un 1.33% de déficit respecto al valor de  $1.50m$ , que se traduce en  $2cm$  de error absoluto. A pesar de esto, el desempeño del vehículo bajo este modelo de velocidades medias, no resultó mejor en términos del error máximo; pues éste se ubicó en +5,62% para la posición vertical ( $9cm$  de error absoluto) respecto a la curva teórica y en +6,96% ( $11cm$  de error absoluto) en la misma posición respecto a la discretización de Euler.

La figura 47 revela que este modelo también mantiene al error propagándose de manera continua y estable. En este caso, el vehículo tomó una desviación constante hacia la izquierda y aunque ésta tiende a compensar la desviación original del vehículo hacia la derecha, ocurre que esta nueva desviación genera un error mayor de acuerdo con los resultados obtenidos.

Además de la influencia de las heterogeneidades de los servomotores; la dispersión del error se debe a la aplicación del teorema del valor medio de la integral al movimiento del vehículo, obteniendo la velocidad media ( $V_m$ ):

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

$$\frac{1}{\delta} \int_{t_i}^{t_i+\delta} V dx = V m_i \quad (84)$$

Donde  $i$  denota el instante de tiempo  $i$ -ésimo. Esto indica que la distancia recorrida en el tiempo  $\delta$  será el área de un trapecio en el caso de funciones discretas. La velocidad media garantiza la misma distancia recorrida al moverse uniformemente en *una dimensión* que la integración de la función velocidad continua. Estas discretizaciones (tanto Euler, como Runge-Kutta) aproximan las curvas teóricas continuas a través de tramos rectos en el plano bidimensional y al aplicar los resultados del teorema al modelo cinemático del vehículo, se tiene entonces:

$$|\bar{v}_{1i}^D| = V m_i + \omega_i \cdot \left(\frac{L}{2}\right) \quad (85) \quad |\bar{v}_{1i}^I| = V m_i - \omega_i \cdot \left(\frac{L}{2}\right) \quad (86)$$

Lo cual, de acuerdo con el modelo del robot diferencial empleado, genera movimiento sobre un arco de circunferencia y no sobre un tramo recto, como muestra la siguiente figura:

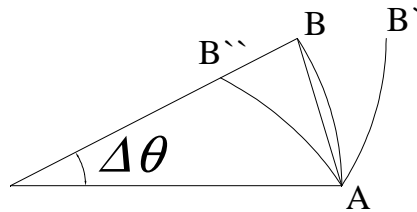


Figura 48: Esquema de Error de las Velocidades Medias

En este esquema,  $B'$  y  $B''$  son las posiciones tras el tiempo  $\delta$  si las velocidades medias son menores o mayores que la velocidad en  $A$ , respectivamente. Así, aunque para intervalos de tiempos pequeños la recta secante  $AB$  tiende al valor del arco de circunferencia  $AB$ , el error se acumula gradualmente al hacer este promedio de velocidades.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

---

Para evitar la propagación del error con este método, el resto de los ensayos se llevaron a cabo utilizando únicamente el método de velocidades instantáneas.

#### **Resultados de la Comparación de los Diferentes Pasos ( $\delta$ ) del Sistema**

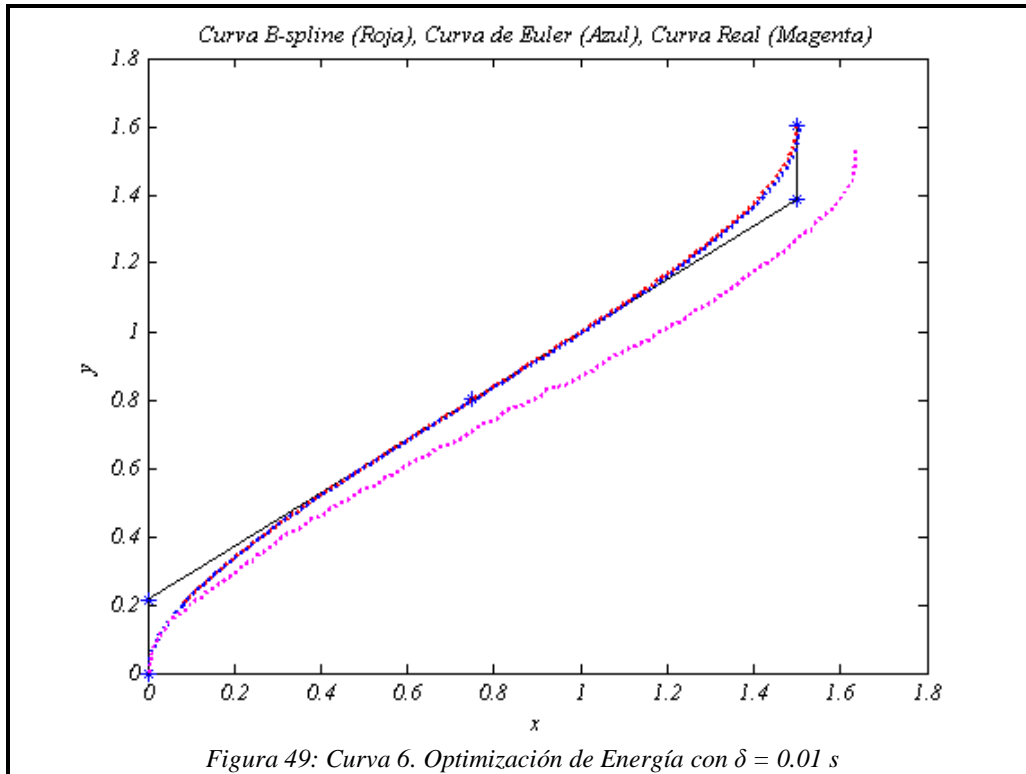
El paso del sistema no sólo juega un papel fundamental en el comportamiento de las discretizaciones del modelo teórico sino que, además, tiene influencia directa sobre el sistema puesto que la duración de cada orden en el vehículo está determinada por este parámetro.

El paso mínimo permisible por el módulo NXT<sup>TM</sup> es de  $1ms$ , es decir,  $0.001s$ , esto está determinado por la arquitectura interna de su unidad central de procesamiento y el software (Robot-C) con el que se controló al mismo. De esta manera, un primer ensayo reveló que este valor mínimo del paso involucraba aproximadamente 9000 instrucciones de velocidad y 9000 instrucciones de compensación P.I.D. por cada rueda así como 9000 instrucciones más por concepto del paso del sistema. Esto suma una cantidad total de 45000 órdenes, lo cual mermó la memoria disponible de  $2^{15}bytes$ . De esta manera, el compilador no permitió verificar el comportamiento del módulo con este paso.

A continuación siguieron los tres ensayos con los pasos seleccionados de  $0.01s$ ,  $0.05s$  y  $0.1s$ . No se tomaron en cuenta pasos mayores a  $0.1s$  debido a que la dispersión del error se hace muy significativa (mayor a 10%) entre la curva de Euler y la curva *B-Spline* como se expuso anteriormente.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque



*Tabla 8: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 6*

Teórico B-Spline	Condiciones Iniciales		Condiciones Finales		
		$(x_2, y_2)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.5, 1.6)
	$\theta_2$ (rad)	$5\pi/2$	$\theta_2$ (rad)	$5\pi/2$	
Euler	Valores Iniciales		Valores Finales		
		$(x_2, y_2)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.51, 1.59)
		$\theta_2$ (rad)	7.85	$\theta_2$ (rad)	7.84
Real	Valores Iniciales		Valores Finales		
		$(x_2, y_2)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.64, 1.53)
		$\theta_2$ (rad)	7.85	$\theta_2$ (rad)	7.85

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

<i>Tabla 9: Tabla de errores de la Curva 6 Real respecto a las Teóricas</i>			
Vehículo en Solitario / $\delta = 0.01 s$			
Velocidades Instantáneas / Optimización de Energía			
Error – Curva 6		Absoluto	Relativo
Real / <i>B-Spline</i>	$x_2 (m)$	+0.14	+9.33%
	$y_2 (m)$	-0.07	-4.38%
	$\theta_2 (rad)$	0.00	0.00%
Real / Euler	$x_2 (m)$	+0.13	+8.61%
	$y_2 (m)$	-0.06	-3.77%
	$\theta_2 (rad)$	+0.01	+0.13%

A pesar de que se esperaba que un paso fino como éste de 0.01s garantizara una baja dispersión del error en el sistema de acuerdo con el modelo teórico, el ensayo mostró que esto no ocurrió de esta manera. Incluso cuando la desviación angular fue prácticamente inexistente, el error absoluto en la posición horizontal fue de 14cm y 13cm respecto a la curva teórica y la de Euler, respectivamente.

Además de esto, el vehículo se desvió hacia la derecha de manera más pronunciada que en todos los casos anteriores, llevando a resultados poco satisfactorios pues el error relativo fue de +9.33% respecto a la curva teórica y de +8.61% respecto a la curva de Euler.

Por otro lado, las heterogeneidades de los servomotores, el error es consecuencia del uso del paso de 0.01s, que es muy corto en comparación con el tiempo de asentamiento ( $t_s$ ) de la respuesta del sistema. De esta manera no se garantiza la convergencia de dicha respuesta mientras se aplica el algoritmo P.I.D. para controlar las velocidades del módulo, ocasionando este incremento en la propagación del error.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

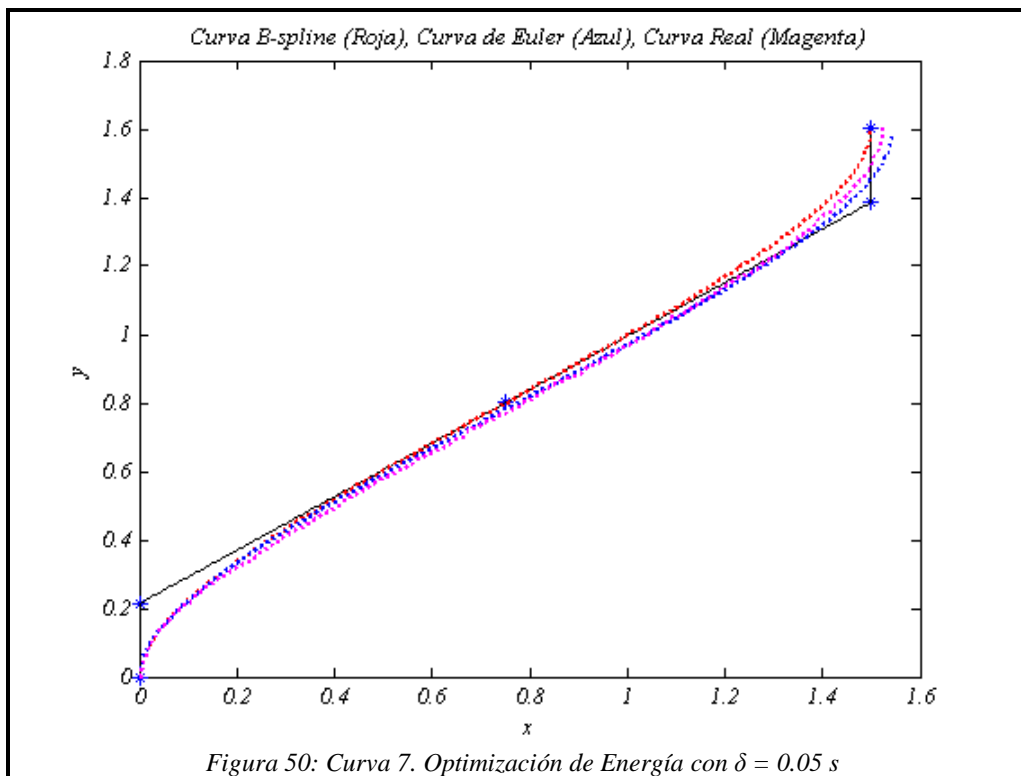


Tabla 10: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 7.

Teórico B-Spline	Condiciones Iniciales		Condiciones Finales		
		$(x_2, y_2)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.50, 1.60)
	$\theta_2$ (rad)	$5\pi/2$	$\theta_2$ (rad)	$5\pi/2$	
Euler	Valores Iniciales		Valores Finales		
		$(x_2, y_2)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.54, 1.58)
		$\theta_2$ (rad)	7.85	$\theta_2$ (rad)	7.81
Real	Valores Iniciales		Valores Finales		
		$(x_2, y_2)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.53, 1.62)
		$\theta_2$ (rad)	7.85	$\theta_2$ (rad)	7.85

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

Tabla 11: Tabla de errores de la Curva 7 Real respecto a las Teóricas			
Vehículo en Solitario / $\delta = 0.05 s$			
Velocidades Instantáneas / Optimización de Energía			
Error – Curva 7		Absoluto	Relativo
Real / <i>B-Spline</i>	$x_2 (m)$	+0.03	+2.00%
	$y_2 (m)$	+0.02	+1.25%
	$\theta_2 (rad)$	0.00	0.00%
Real / Euler	$x_2 (m)$	-0.01	-0.65%
	$y_2 (m)$	+0.04	+2.53%
	$\theta_2 (rad)$	+0.04	+0.51%

La figura 50 y el cálculo del error muestran una mejoría muy significativa del comportamiento del módulo en este caso. La mayor desviación se encontró en la posición vertical con 4cm por encima del valor respecto a la curva de Euler y 3cm por encima de la curva teórica original. Aunado a esto, el ángulo del vehículo en el instante final coincidió con las condiciones impuestas al movimiento. Por esto, el comportamiento del sistema resultó satisfactorio con un error relativo inferior al +2,53% para todos los casos.

Es importante señalar que de acuerdo con la gráfica, el robot mantuvo su tendencia a desviarse a la derecha como se esperaba. Sin embargo, al igual que en la Curva 4, la desviación real del vehículo respecto a la curva teórica fue menor que el error de la curva de Euler respecto a la misma.

En este caso, el tiempo de asentamiento del sistema es mucho menor que el paso de 0.05s seleccionado. Gracias a esto el algoritmo P.I.D. pudo mantener el control de las velocidades de manera efectiva dando origen a la baja dispersión del error mostrada. El error nuevamente se hace presente debido a las ya mencionadas disparidades en los servomotores conjuntamente con la sensibilidad descrita del módulo a las variaciones de velocidades.



## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

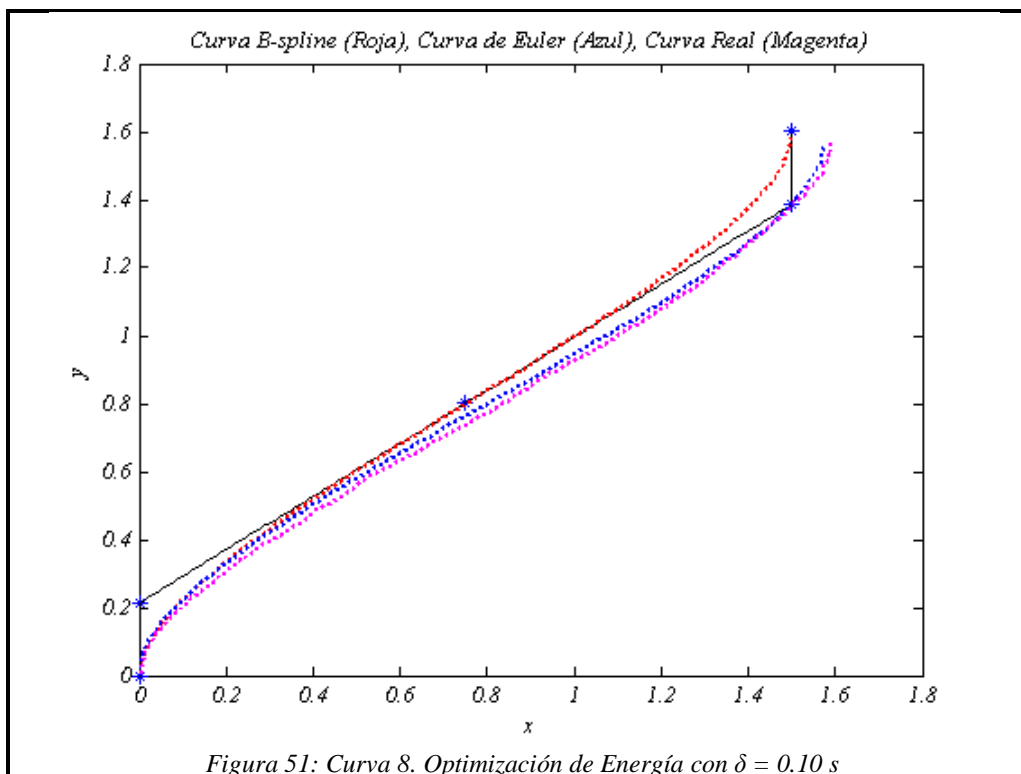


Figura 51: Curva 8. Optimización de Energía con  $\delta = 0.10$  s

Tabla 12: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 8

Teórico B-Spline	Condiciones Iniciales		Condiciones Finales	
		$(x_2, y_2)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)
	$\theta_2$ (rad)	$5\pi/2$	$\theta_2$ (rad)	$5\pi/2$
Euler	Valores Iniciales		Valores Finales	
	$(x_2, y_2)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.57, 1.55)
	$\theta_2$ (rad)	7.85	$\theta_2$ (rad)	7.73
Real	Valores Iniciales		Valores Finales	
	$(x_2, y_2)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.59, 1.58)
	$\theta_2$ (rad)	7.85	$\theta_2$ (rad)	7.85

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

<i>Tabla 13: Tabla de errores de la Curva 8 Real respecto a las Teóricas</i>			
Vehículo en Solitario / $\delta = 0.10 s$			
Velocidades Instantáneas / Optimización de Energía			
Error – Curva 8		Absoluto	Relativo
Real / <i>B-Spline</i>	$x_2 (m)$	+0.09	+6.00%
	$y_2 (m)$	-0.02	-1.25%
	$\theta_2 (rad)$	0.00	0.00%
Real / Euler	$x_2 (m)$	+0.02	+1.27%
	$y_2 (m)$	+0.03	+1.94%
	$\theta_2 (rad)$	+0.12	+1.55%

De acuerdo con la gráfica obtenida y al los resultados reportados por la tabla, se observa una desviación absoluta de  $9cm$  en la posición horizontal, que representa un error relativo del  $+6.00\%$ . Conjuntamente, el robot no presentó desviación en el ángulo para la posición final respecto a la curva teórica.

Al inspeccionar la figura 51 se evidencia que la diferencia entre la curva de Euler y la curva del vehículo es bastante reducida ( $2cm$  y  $3cm$  de error absoluto horizontal y vertical, respectivamente), sin embargo, como predijo el modelo matemático, las diferencias entre el modelo teórico y la curva discreta de Euler es muy marcada debido a este paso de  $0.10 s$ , dando lugar a una trayectoria notoriamente diferente a la deseada.

Igualmente, el vehículo mantuvo la tendencia a desviarse a la derecha, aunque en este caso la variación fue menor que la presentada en el caso del paso de  $0.01s$ . El error de nuevo se mantiene apegado a las causas descritas en los casos con poca desviación: la heterogeneidad de los servomotores.

En base a estas tres comparaciones, se seleccionó el paso de  $0.05s$  para el desarrollo del resto de los experimentos de este trabajo ya que permite controlar un número razonable de instrucciones ( $900$  en total) de acuerdo con la memoria disponible en el módulo sin que se propague excesivamente el error.

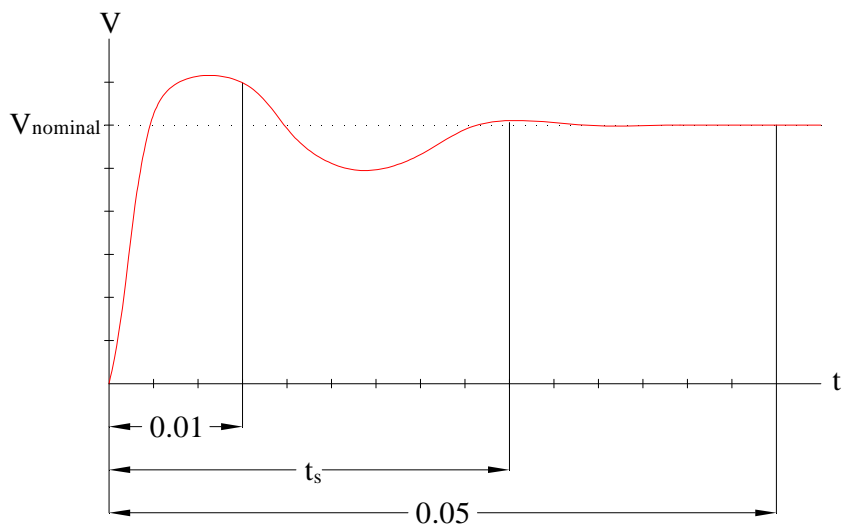


Figura 52: Tiempo de Asentamiento (P.I.D.)

Aunque no se conoce con exactitud el tiempo de asentamiento del sistema empleado, los resultados indican que éste tiene un valor mayor a  $0.01s$  e inferior a  $0.05s$  de acuerdo con el esquema mostrado.

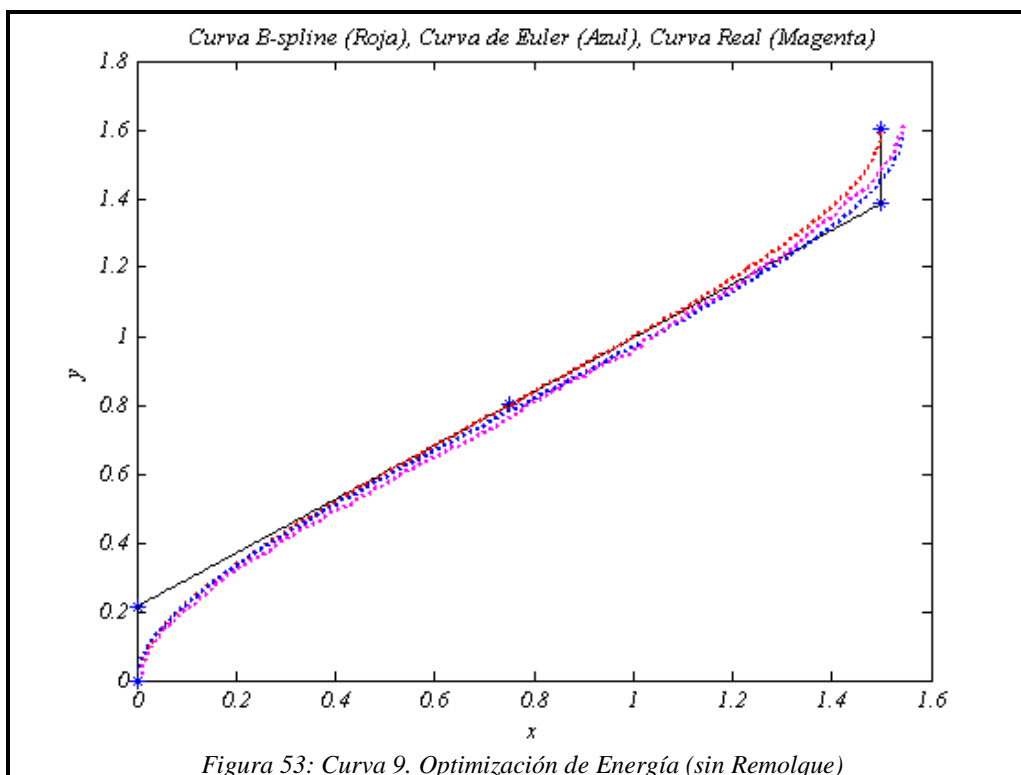
### Optimización de los Diferentes Parámetros Seleccionados (Energía, Tiempo y Tiempo-Energía) para el Vehículo en Solitario

Los siguientes resultados se llevaron a cabo sometiendo al modelo matemático desarrollado en este trabajo a operaciones de optimización a través de la herramienta OPTRAGEN® para MATLAB®.

En los tres casos expuestos a continuación, las condiciones consideradas para llevar a cabo la optimización fueron la imposición de una configuración inicial y final en términos de posición y ángulo con respecto a la horizontal. Por otro lado la optimización para cada caso se hizo en ausencia de obstáculos en el entorno de movimiento y sin el acoplamiento del remolque al vehículo.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque



*Tabla 14: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 9.*

Teórico B-Spline	Condiciones Iniciales		Condiciones Finales	
		$(x_2, y_2) (m)$	(0.00,0.00)	$(x_2, y_2) (m)$
	$\theta_2 (rad)$	$5\pi/2$	$\theta_2 (rad)$	$5\pi/2$
Euler	Valores Iniciales		Valores Finales	
		$(x_2, y_2) (m)$	(0.00,0.00)	$(x_2, y_2) (m)$
		$\theta_2 (rad)$	$\theta_2 (rad)$	7.81
Real	Valores Iniciales		Valores Finales	
		$(x_2, y_2) (m)$	(0.00,0.00)	$(x_2, y_2) (m)$
		$\theta_2 (rad)$	$\theta_2 (rad)$	7.85

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

<i>Tabla 15: Tabla de errores de la Curva 9 Real respecto a las Teóricas.</i>			
Vehículo en Solitario / $\delta = 0.05 s$			
Velocidades Instantáneas / Optimización de Energía			
Error – Curva 9		Absoluto	Relativo
Real / <i>B-Spline</i>	$x_2 (m)$	+0.05	+3.33%
	$y_2 (m)$	+0.01	+0.63%
	$\theta_2 (rad)$	0.00	0.00%
Real / Euler	$x_2 (m)$	+0.01	+0.65%
	$y_2 (m)$	+0.03	+1.90%
	$\theta_2 (rad)$	+0.04	+0.51%

Los resultados reflejan una dispersión baja del error, pues la mayor desviación se encontró en la posición horizontal con un 3.33% de exceso en referencia al valor impuesto teóricamente de  $1.50m$ , lo cual se traduce en  $5cm$  de desviación absoluta respecto a la *Spline* teórica. En referencia a la curva de Euler, la desviación máxima absoluta fue de  $3cm$  en la dirección vertical, equivalentes a un error relativo de +1.90% respecto al valor de  $1.58m$ .

En relación al ángulo, el vehículo tuvo una desviación máxima de 4 centésimas de radián respecto a la curva de Euler, esto es menor a 2.3 grados sexagesimales.

La poca dispersión del error en esta trayectoria está relacionada a la baja velocidad empleada por el vehículo para recorrerla. Al optimizar la energía del sistema, hay una tendencia a disminuir las velocidades, produciendo un movimiento suave.

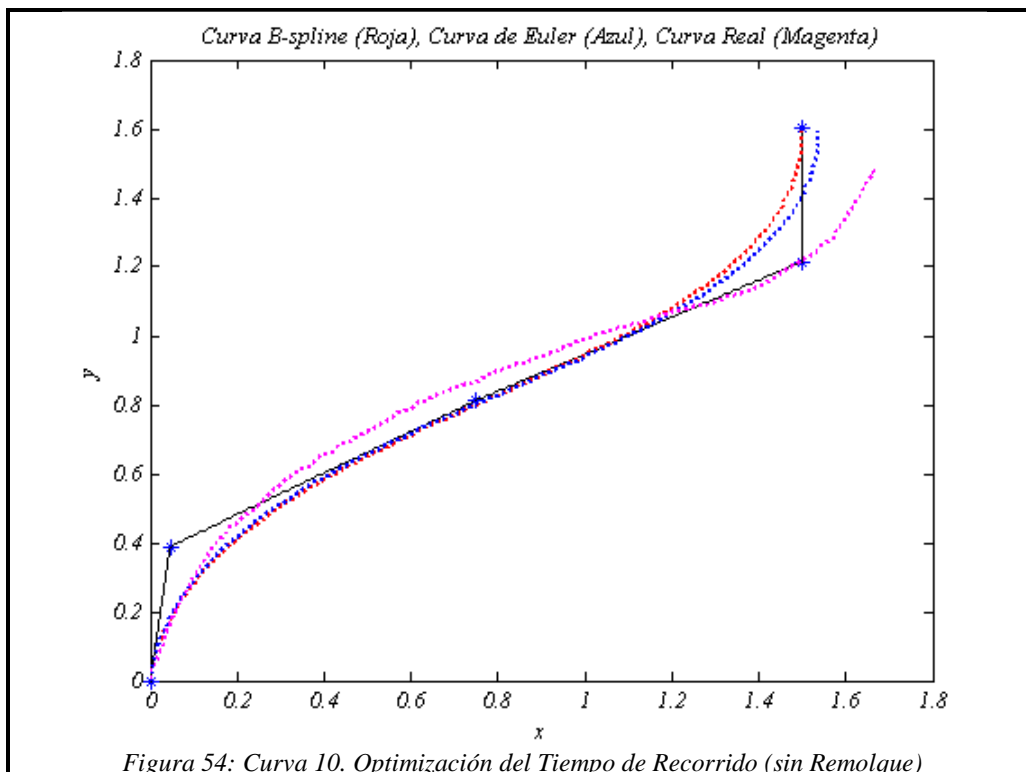
<i>Tabla 16: Parámetros Óptimos de la Curva 9</i>					
t (s)	8.92	$V_0 (m/s)$	0.14	$V_0 (%)$	29.79
D (m)	2.25	$V_{max} (m/s)$	0.32	$V_{max} (%)$	68.09

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

En este caso la optimización empleó  $8.92s$  en una trayectoria de  $2.25m$ , la velocidad inicial es de  $0.14m/s$  (promedio de las ruedas), lo cual representa el 29.79% de la velocidad máxima del robot, esto garantizó la condición de rodadura al inicio del movimiento debido a una aceleración inicial no abrupta. La velocidad máxima también se mantuvo lejos del valor máximo del robot a 68.09% respecto a la velocidad máxima del robot.

Conjuntamente, la influencia de las disparidades en los servomotores permanece presente. Se evidencia que la tendencia del vehículo a desviarse a la derecha se mantuvo; especialmente en la primera mitad del movimiento a diferencia del tramo final, donde el margen de error fue menor al 5% con respecto a la curva de Euler, como indica la tabla 15.



## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónomo con Remolque

*Tabla 17: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 10*

Teórico B-Spline	Condiciones Iniciales		Condiciones Finales	
	$(x_2, y_2) (m)$	(0.00,0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(1.50,1.60)
	$\theta_2 (rad)$	$5\pi/2$	$\theta_2 (rad)$	$5\pi/2$
Euler	Valores Iniciales		Valores Finales	
	$(x_2, y_2) (m)$	(0.00,0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(1.54,1.59)
	$\theta_2 (rad)$	7.85	$\theta_2 (rad)$	7.80
Real	Valores Iniciales		Valores Finales	
	$(x_2, y_2) (m)$	(0.00,0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(1.66,1.49)
	$\theta_2 (rad)$	7.85	$\theta_2 (rad)$	7.59

*Tabla 18: Tabla de errores de la Curva 10 Real respecto a las Teóricas*

Vehículo en Solitario / $\delta = 0.05$				
Velocidades Instantáneas / Optimización del Tiempo de Recorrido				
Error – Curva 10			Absoluto	Relativo
Real / B-Spline	$x_2 (m)$		+0.16	+10.67%
	$y_2 (m)$		-0.11	-6.68%
	$\theta_2 (rad)$		-0.26	-3.31%
Real / Euler	$x_2 (m)$		+0.12	+7.79%
	$y_2 (m)$		-0.10	-6.29%
	$\theta_2 (rad)$		-0.21	-2.69%

La optimización del tiempo de recorrido arrojó una dispersión mayor al 5% en la mayoría de los parámetros estudiados. La desviación horizontal superó los 10cm en relación a la curva de Euler y al *Spline* teórico, arrojando errores relativos de +7.79% y +10.67% respectivamente. De la misma manera, el error absoluto en el ángulo estuvo en 0.21rad (12.03°) por debajo de la condición final para el caso de la curva de Euler y en 0.26rad (14.90°) por debajo para la *Spline* teórica.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

Sin embargo, el bajo error relativo en la medición del ángulo se debe a que la referencia tomada fue  $2\pi$ , para evitar discontinuidades asociadas al utilizar el valor 0. Por ello es conveniente evaluar el comportamiento del vehículo en términos del error absoluto al hacer referencia a la desviación angular.

En este caso, toda esta dispersión está vinculada a la velocidad inicial del movimiento puesto que al optimizar el tiempo las velocidades tienden a ser mayores que en el caso de la energía.

t (s)	5.35	$V_0$ (m/s)	0.44	$V_0$ (%)	93.62%
D (m)	2.30	$V_{\max}$ (m/s)	0.47	$V_{\max}$ (%)	100.00%

La optimización empleó 5.35s para recorrer la trayectoria de 2.30m. Según los resultados el robot alcanzó su velocidad máxima de 0.47m/s en este movimiento, sin embargo, la velocidad inicial de 0.44m/s, que representa el 93.62% produjo una aceleración súbita que se tradujo en un deslizamiento momentáneo de las ruedas. Además, esta arrancada brusca puede evidenciarse en un tramo prácticamente recto en los primeros 0.30m de la trayectoria, tras los cuales efectivamente el vehículo comenzó a realizar el giro programado.

La gráfica también revela que el módulo se desvió significativamente a la izquierda, esta desviación fue compensada por la tendencia del robot a desviarse a la derecha, como ya se ha mencionado anteriormente conjuntamente con la influencia de las disparidades en los servomotores.



## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

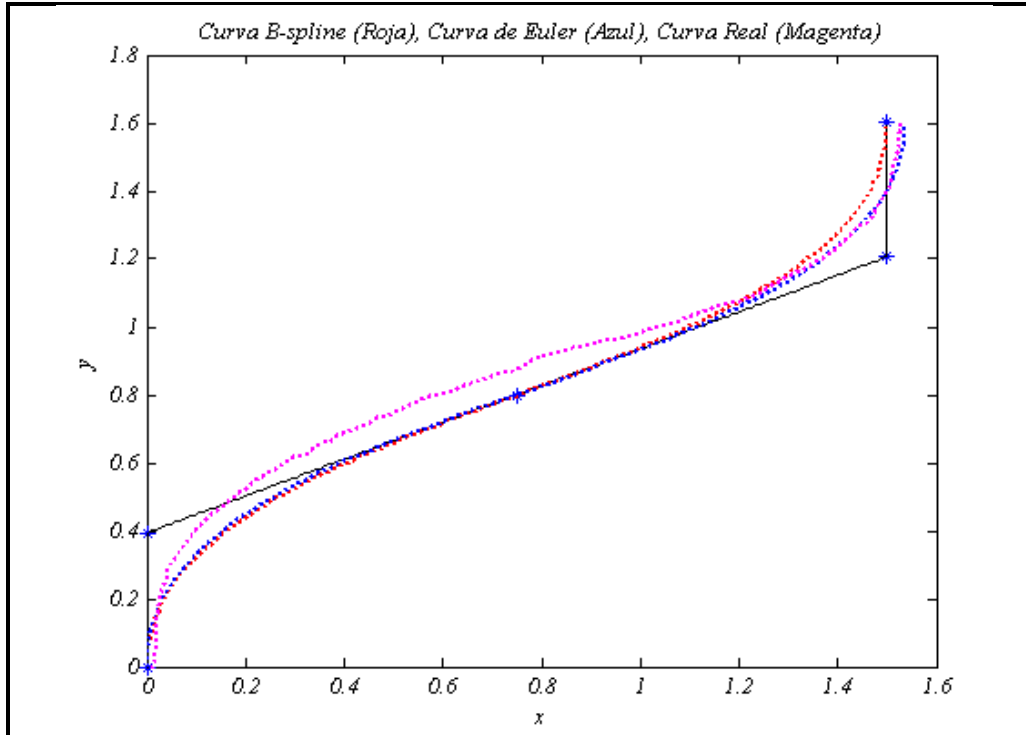


Figura 55: Curva 11. Optimización del Tiempo de Recorrido y Energía (sin Remolque)

Tabla 20: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 11

Teórico B-Spline	Condiciones Iniciales		Condiciones Finales		
		$(x_2, y_2) (m)$	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(1.50, 1.60)
	$\theta_2 (rad)$	$5\pi/2$	$\theta_2 (rad)$	$5\pi/2$	
Euler	Valores Iniciales		Valores Finales		
		$(x_2, y_2) (m)$	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(1.54, 1.59)
		$\theta_2 (rad)$	7.85	$\theta_2 (rad)$	7.80
Real	Valores Iniciales		Valores Finales		
		$(x_2, y_2) (m)$	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(1.53, 1.61)
		$\theta_2 (rad)$	7.85	$\theta_2 (rad)$	7.85

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

<i>Tabla 21: Tabla de errores de la Curva 11 Real respecto a las Teóricas</i>			
Vehículo en Solitario / $\delta = 0.05$			
Velocidades Instantáneas / Optimización del Tiempo de Recorrido y Energía			
Error – Curva 8		Absoluto	Relativo
Real / <i>B-Spline</i>	$x_2 (m)$	+0.03	+2.00%
	$y_2 (m)$	+0.01	+0.63%
	$\theta_2 (rad)$	0.00	0.00%
Real / Euler	$x_2 (m)$	-0.01	-0.65%
	$y_2 (m)$	+0.02	+1.26%
	$\theta_2 (rad)$	+0.05	+0.64%

La optimización del tiempo de recorrido conjuntamente con la energía arrojó resultados satisfactorios debido a una dispersión menor al 5% en todas las condiciones finales impuestas. La desviación, tanto horizontal como vertical no superaron los  $3cm$  en relación a la curva de Euler y al *Spline* teórico. De la misma manera, el error absoluto en el ángulo estuvo en  $0.21rad$  ( $12.03^\circ$ ) por debajo de la condición final para el caso de la curva de Euler y en  $0.26rad$  ( $14.90^\circ$ ) por debajo para la *Spline* teórica.

<i>Tabla 22: Parámetros Óptimos de la Curva 11.</i>					
t (s)	5.45	$V_0 (m/s)$	0.43	$V_0 (%)$	91.45
D (m)	2.31	$V_{max} (m/s)$	0.47	$V_{max} (%)$	100.00

Sin embargo, el comportamiento inicial de la curva resultó notoriamente desviado respecto a los modelos matemáticos a consecuencia de la aceleración súbita por la velocidad de arranque en  $0.43m/s$  (91,45% de la velocidad máxima). Esto produjo nuevamente deslizamiento en el instante inicial y la tendencia a moverse en línea recta en los primeros  $30cm$  del recorrido que se compensaron por la tendencia del vehículo a desviarse a la derecha.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

### Optimización de los Diferentes Parámetros Seleccionados (Energía, Tiempo y Tiempo-Energía) para el Vehículo con Remolque

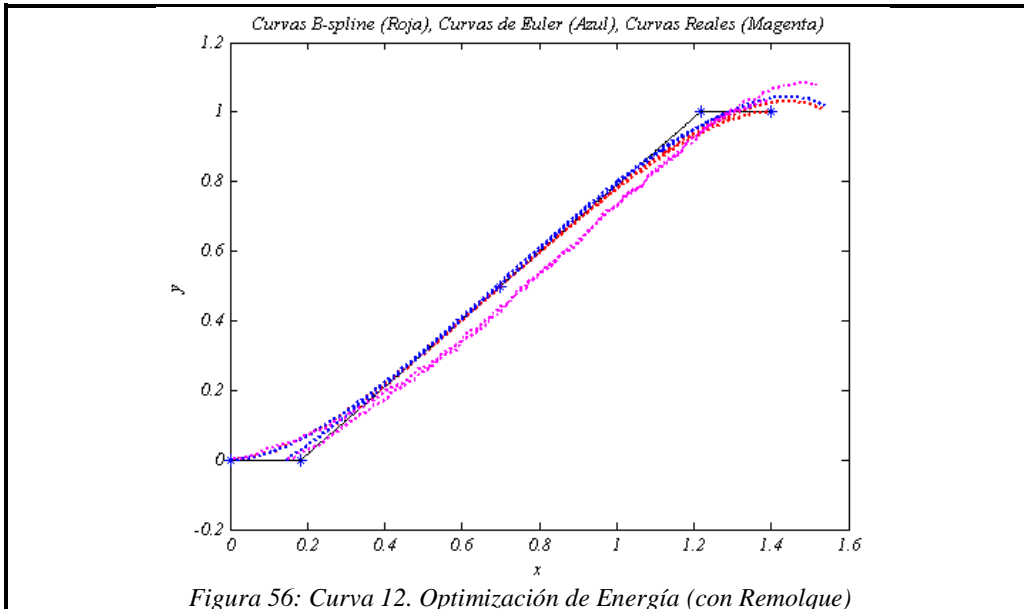


Figura 56: Curva 12. Optimización de Energía (con Remolque)

Tabla 23: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 12

		Condiciones Iniciales		Condiciones Finales		
		$(x_1, y_1)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_1, y_1)$ (m)	(1.40, 1.00)	
Teórico B-Spline	1Re	$\theta_1$ (rad)	$2\pi$	$\theta_1$ (rad)	$2\pi$	
		2Ve	$(x_2, y_2)$ (m)	(0.15, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.54, 1.00)
	$\theta_2$ (rad)		6.90	$\theta_2$ (rad)	5.66	
	Euler	1Re	$(x_1, y_1)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_1, y_1)$ (m)	(1.38, 1.02)
$\theta_1$ (rad)			6.28	$\theta_1$ (rad)	6.34	
2Ve		$(x_2, y_2)$ (m)	(0.15, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.54, 1.02)	
		$\theta_2$ (rad)	6.90	$\theta_2$ (rad)	5.74	
Real		1Re	$(x_1, y_1)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_1, y_1)$ (m)	(1.40, 1.03)
			$\theta_1$ (rad)	6.28	$\theta_1$ (rad)	6.64
	2Ve	$(x_2, y_2)$ (m)	(0.15, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.52, 1.07)	
		$\theta_2$ (rad)	6.90	$\theta_2$ (rad)	5.81	

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

Tabla 24: Tabla de errores de la Curva 12 Real respecto a las Teóricas				
Vehículo con Remolque / $\delta = 0.05s$				
Velocidades Instantáneas / Optimización de Energía				
Error – Curva 12			Absoluto	Relativo
Real / B-Spline	1Re	$x_1 (m)$	0.00	0.00%
		$y_1 (m)$	+0.03	+3.00%
		$\theta_1 (rad)$	+0.36	5.73%
	2Ve	$x_2 (m)$	-0.02	-1.30%
		$y_2 (m)$	+0.07	+7.00%
		$\theta_2 (rad)$	+0.15	+2.65%
Real / Euler	1Re	$x_1 (m)$	+0.02	+1.45%
		$y_1 (m)$	+0.01	+0.98%
		$\theta_1 (rad)$	+0.30	+4.73%
	2Ve	$x_2 (m)$	-0.02	-1.30%
		$y_2 (m)$	+0.05	+4.90%
		$\theta_2 (rad)$	+0.07	+1.22%

A tratarse de optimización de energía, los resultados muestran que el comportamiento del remolque tuvo poca dispersión de error como ocurrió en casos anteriores mientras que el vehículo acumuló un grado de error un tanto mayor. La máxima desviación absoluta del vehículo fue de  $7cm$  por encima de la condición vertical inicial de  $1.00m$  mientras que la máxima desviación del remolque fue de  $3cm$  también por encima de la referencia de  $1.00m$ .

El comportamiento angular tuvo un error absoluto máximo de  $0.36rad$  ( $20.63^\circ$ ) por encima de la referencia de  $2\pi rad$  en el caso del remolque y de  $0.15rad$  ( $8.59^\circ$ ) en el caso del vehículo respecto a la *Spline* teórica.

Tabla 25: Parámetros Óptimos de la Curva 12.					
t (s)	9.00	$V_0 (m/s)$	0.15	$V_0 (%)$	31.91
D (m)	1.79	$V_{max} (m/s)$	0.24	$V_{max} (%)$	51.06

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

---

La tabla 25 muestra que la velocidad máxima en el movimiento fue de  $0.24m/s$  que equivalen al 51.06% de la velocidad máxima del vehículo. Del mismo modo, la velocidad inicial fue de  $0.15m/s$ , lo suficientemente baja como para evitar el deslizamiento de las ruedas del robot y, de esta manera garantizar el desarrollo del movimiento con poca dispersión del error.

En cuanto a la desviación, al comparar los resultados del vehículo en solitario con los presentados en este ensayo, se evidencia un mejor comportamiento en el primer caso, esto se debe a la creación de una condición dinámica en el sistema a través del pasador que sujeta al remolque con el vehículo:

En primer lugar, es necesario tener en cuenta que este pasador no es ideal y esto se traduce en la presencia de fricción cuyos efectos eran inexistentes en el caso del vehículo en solitario.

En segundo lugar, el pasador genera fuerzas reactivas que están vinculadas con la fuerza de roce presentes en las ruedas del remolque, por lo tanto, a pesar de que el peso éste es mucho menor que el del vehículo también ocurre que la magnitud de la fuerza de roce presente tendrá un valor máximo en el instante de arranque y luego un valor menor y constante durante la duración del movimiento de acuerdo con la Ley de Fricción Seca de Coulomb. Estos valores de la fuerza de roce están relacionados con las reacciones normales entre las ruedas y el suelo; las cuales son proporcionales al peso de acuerdo con la Segunda Ley de Newton. Este es otro fenómeno que no se presenta en el caso del movimiento del vehículo en solitario.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

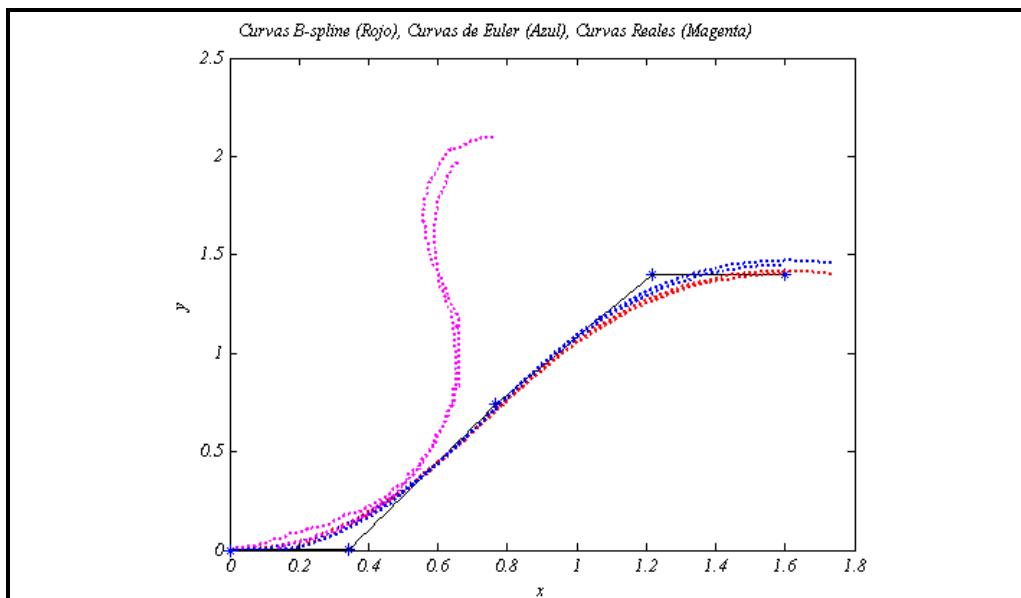


Figura 57: Curva 13. Optimización de Tiempo de Recorrido (con Remolque)

Tabla 26: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 13

		Condiciones Iniciales		Condiciones Finales	
		$(x_1, y_1)$ (m)		$(x_1, y_1)$ (m)	
Teórico B-Spline	1Re	$(x_1, y_1)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_1, y_1)$ (m)	(1.60, 1.40)
		$\theta_1$ (rad)	$2\pi$	$\theta_1$ (rad)	$2\pi$
	2Ve	$(x_2, y_2)$ (m)	(0.15, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.75, 1.40)
		$\theta_2$ (rad)	6.58	$\theta_2$ (rad)	6.07
		Valores Iniciales		Valores Finales	
Euler	1Re	$(x_1, y_1)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_1, y_1)$ (m)	(1.60, 1.45)
		$\theta_1$ (rad)	6.28	$\theta_1$ (rad)	6.32
	2Ve	$(x_2, y_2)$ (m)	(0.15, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.74, 1.46)
		$\theta_2$ (rad)	6.58	$\theta_2$ (rad)	6.10
		Valores Iniciales		Valores Finales	
Real	1Re	$(x_1, y_1)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_1, y_1)$ (m)	(0.66, 1.97)
		$\theta_1$ (rad)	6.28	$\theta_1$ (rad)	7.18
	2Ve	$(x_2, y_2)$ (m)	(0.15, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(0.76, 2.09)
		$\theta_2$ (rad)	6.58	$\theta_2$ (rad)	6.28

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

<i>Tabla 27: Tabla de errores de la Curva 13 Real respecto a las Teóricas</i>					
Vehículo con Remolque / $\delta = 0.05s$					
Velocidades Instantáneas / Optimización de Tiempo de Recorrido					
Error – Curva 13			Absoluto	Relativo	
<b>Real / B-Spline</b>	1Re	$x_1 (m)$	-0.94	-58.75%	
		$y_1 (m)$	+0.57	+40.71%	
		$\theta_1 (rad)$	+0.90	+14.71%	
	2Ve	$x_2 (m)$	-0.99	-56.57%	
		$y_2 (m)$	+0.69	+49.29%	
		$\theta_2 (rad)$	+0.21	+3.46%	
<b>Real / Euler</b>	1Re	$x_1 (m)$	-0.94	-58.75%	
		$y_1 (m)$	+0.52	+35.86%	
		$\theta_1 (rad)$	+0.86	+13.61%	
	2Ve	$x_2 (m)$	-0.98	-56.32%	
		$y_2 (m)$	+0.63	+43.15%	
		$\theta_2 (rad)$	+0.18	+2.95%	

Al optimizar el tiempo, tanto la gráfica como la tabla 27 evidencian un comportamiento insatisfactorio debido a la alta desviación resultante. Con respecto a la *Spline* teórica, la desviación máxima del vehículo fue de 99cm menos que la condición horizontal final de 1.74m mientras que la máxima desviación del remolque fue de 94cm también por debajo de la referencia horizontal de 1.60m.

El comportamiento angular tuvo un error relativo menor que las desviaciones longitudinales. Sin embargo, tampoco resultan satisfactorios pues el error máximo fue de 0.90rad (51.57°) por encima de la referencia de  $2\pi rad$  en el caso del vehículo y de 0.21rad (12.03°) en el caso del remolque respecto a su *Spline* teórica.

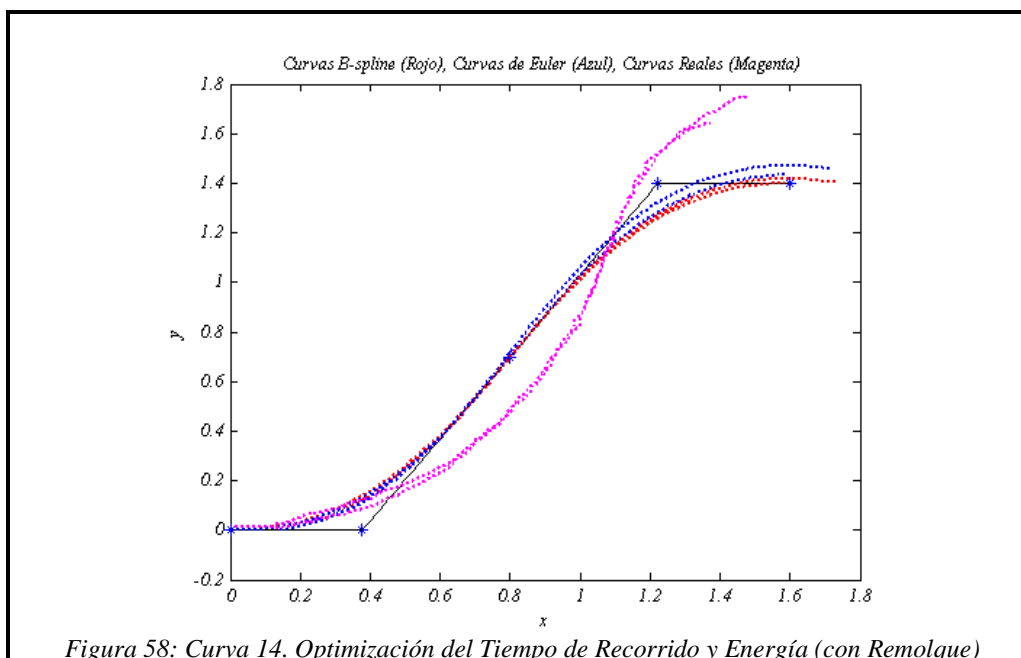
<i>Tabla 28: Parámetros Óptimos de la Curva 13</i>					
t (s)	5.51	$V_0 (m/s)$	0.39	$V_0 (%)$	82.98
D (m)	2.26	$V_{max} (m/s)$	0.45	$V_{max} (%)$	95.74

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

La tabla 28 muestra que la velocidad máxima en el movimiento fue de  $0.45m/s$  que equivalen al 95.74% de la velocidad máxima del vehículo. La velocidad inicial fue de  $0.39m/s$ , que corresponde al 82.98% de la velocidad máxima; en este caso este valor tan elevado produjo la pérdida de la rodadura al inicio del movimiento gracias a la súbita aceleración desde el reposo propiciando la alta dispersión del error.

Como se evidenció en el caso anterior, las condiciones dinámicas presentes en el pasador tuvieron influencia en el movimiento. En este caso la desviación se hace mayor porque las fuerzas presentes son mayores debido a la presencia de mayores variaciones de velocidad en un intervalo de tiempo menor. En el caso anterior el recorrido de  $1.79m$  fue hecho en  $9.00s$  en tanto que en este caso el recorrido de  $2.26m$  fue hecho en  $5.31s$ , lo que implica la presencia de mayores velocidades y aceleraciones.





## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

*Tabla 29: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 14*

<i>Tabla 29: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 14</i>					
Teórico B-Spline		Condiciones Iniciales		Condiciones Finales	
		1Re	$(x_1, y_1) (m)$	(0.00,0.00)	$(x_1, y_1) (m)$
$\theta_1 (rad)$	$2\pi$		$\theta_1 (rad)$	$2\pi$	
2Ve	$(x_2, y_2) (m)$	(0.15,0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(1.75,1.4)	
	$\theta_2 (rad)$	6.51	$\theta_2 (rad)$	6.05	
Euler		Valores Iniciales		Valores Finales	
		1Re	$(x_1, y_1) (m)$	(0.00,0.00)	$(x_1, y_1) (m)$
$\theta_1 (rad)$	6.28		$\theta_1 (rad)$	6.34	
2Ve	$(x_2, y_2) (m)$	(0.15,0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(1.72,1.46)	
	$\theta_2 (rad)$	6.51	$\theta_2 (rad)$	6.11	
Real		Valores Iniciales		Valores Finales	
		1Re	$(x_1, y_1) (m)$	(0.00,0.00)	$(x_1, y_1) (m)$
$\theta_1 (rad)$	6.28		$\theta_1 (rad)$	7.12	
2Ve	$(x_2, y_2) (m)$	(0.15,0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(1.48,1.75)	
	$\theta_2 (rad)$	6.51	$\theta_2 (rad)$	6.48	

*Tabla 30: Tabla de errores de la Curva 14 Real respecto a las Teóricas*

<i>Tabla 30: Tabla de errores de la Curva 14 Real respecto a las Teóricas</i>				
Vehículo con Remolque / $\delta = 0.05s$				
Velocidades Instantáneas / Optimización del Tiempo de Recorrido y Energía				
Error – Curva 14		Absoluto		Relativo
Real / B-Spline	1Re	$x_1 (m)$	-0.22	-13.75%
		$y_1 (m)$	+0.24	+17.14%
		$\theta_1 (rad)$	+0.84	+13.38%
	2Ve	$x_2 (m)$	-0.27	-15.43%
		$y_2 (m)$	+0.35	+25.00%
		$\theta_2 (rad)$	+0.43	+7.11%
Real / Euler	1Re	$x_1 (m)$	-0.21	-13.21%
		$y_1 (m)$	+0.21	+14.69%
		$\theta_1 (rad)$	+0.78	+12.30%
	2Ve	$x_2 (m)$	-0.24	-13.95%
		$y_2 (m)$	+0.29	+19.86%
		$\theta_2 (rad)$	+0.37	+6.06%

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

Al ser un compromiso entre el tiempo y la energía, esta optimización también tuvo un comportamiento insatisfactorio debido a la alta desviación resultante, aunque sus resultados fueron mejores que en el caso anterior. Con respecto a la *Spline* teórica, la desviación máxima del remolque fue de  $-22\text{cm}$  en la dirección horizontal equivalentes a un  $-13.75\%$  mientras que la máxima desviación del vehículo fue de  $+35\text{cm}$  ( $+25.00\%$ ) respecto al valor vertical de  $1.40\text{m}$ .

En cuanto al ángulo, el un error relativo fue menor que las desviaciones longitudinales. Igualmente son resultados pobres pues el error máximo fue de  $+0.84\text{rad}$  ( $+48.12^\circ$ ) en el caso del remolque y de  $+0.43\text{rad}$  ( $+24.64^\circ$ ) en el caso del vehículo respecto a su *Spline* teórica.

t (s)	5.46	$V_0$ (m/s)	0.43	$V_0$ (%)	91.49
D (m)	2.26	$V_{\max}$ (m/s)	0.45	$V_{\max}$ (%)	95.74

Se observa que la velocidad inicial volvió a ser elevada, partiendo con una velocidad de  $0.43\text{m/s}$  que representan el  $91.49\%$  de la velocidad máxima del robot. De nuevo esto sometió al vehículo a aceleraciones súbitas que generaron la pérdida de la condición de rodadura con lo cual se condenó el desempeño del resto del movimiento el cual, de acuerdo con la figura 58, concordó muy poco con la curva originalmente planificada.

Al igual que en los casos anteriores, las condiciones dinámicas asociadas a la unión del remolque y el vehículo a través del pasador se hacen presentes contribuyendo con la desviación del movimiento. En este caso, las aceleraciones en el sistema fueron similares de acuerdo con la distancia de  $2.26\text{m}$ , el tiempo de  $5.46\text{s}$  y las velocidades de la trayectoria, por lo cual dichas condiciones dinámicas fueron similares y produjeron efectos similares.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

### Optimización de los Diferentes Parámetros Seleccionados (Energía, Tiempo y Tiempo-Energía) para el Vehículo en Solitario en presencia de Obstáculos

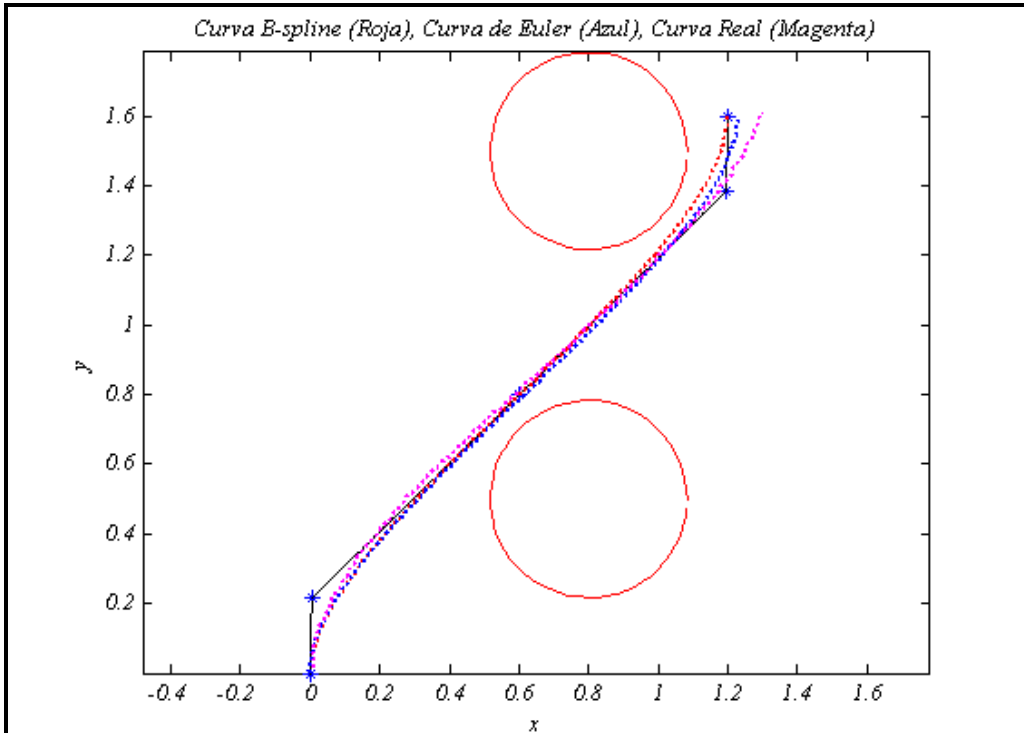


Figura 59: Curva 15. Evasión de Obstáculos con Optimización de Energía (sin Remolque)

Tabla 32: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 15

Teórico B-Spline	Condiciones Iniciales		Condiciones Finales		
		$(x_2, y_2) (m)$	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(1.20, 1.60)
	$\theta_2 (rad)$	$5\pi/2$	$\theta_2 (rad)$	$5\pi/2$	
Euler	Valores Iniciales		Valores Finales		
		$(x_2, y_2) (m)$	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(1.23, 1.59)
		$\theta_2 (rad)$	7.85	$\theta_2 (rad)$	7.75
Real	Valores Iniciales		Valores Finales		
		$(x_2, y_2) (m)$	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(1.30, 1.62)
		$\theta_2 (rad)$	7.85	$\theta_2 (rad)$	7.47

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

<i>Tabla 33: Tabla de errores de la Curva 15 Real respecto a las Teóricas</i>			
Evasión de Obstáculos / Vehículo en Solitario / $\delta = 0.05s$ Velocidades Instantáneas / Optimización de Energía			
Error – Curva 15		Absoluto	Relativo
Real / <i>B-Spline</i>	$x_2 (m)$	+0.10	+8.33%
	$y_2 (m)$	+0.02	+1.25%
	$\theta_2 (rad)$	-0.38	-4.84%
Real / Euler	$x_2 (m)$	+0.07	+5.69%
	$y_2 (m)$	+0.03	+1.89%
	$\theta_2 (rad)$	-0.28	-3.61%

La optimización de energía en presencia de obstáculos previamente definidos presenta resultados satisfactorios, aunque se observa una dispersión del error mayor al 4% en la mayoría de los casos. Al remitirse a la figura 59 se observa que la curva real para cada instante de tiempo presenta poca desviación respecto a la curva *B-Spline* así como respecto a la curva de Euler. Si se compara las curvas *B-Spline* y de *Euler* con la real, la mayor desviación se encontró en la posición horizontal para ambos casos con un 8.33% de exceso en referencia al valor impuesto teóricamente de 1.20m, lo cual se traduce en 10cm de desviación absoluta respecto a la *Spline* teórica y un 5.69% de exceso, lo cual se traduce en 7cm de desviación absoluta, respecto a la curva teórica de Euler. Con respecto a la posición vertical no se presentan desviaciones significativas (menos del 2%) en ambas curvas.

En relación al ángulo, el vehículo tuvo una desviación máxima de 38 centésimas de radián respecto a la curva *B-Spline*, esto es menor a 2.3 grados sexagesimales.

La curva real muestra gran similitud con ambas curvas teóricas durante aproximadamente las primeras  $\frac{3}{4}$  partes de la trayectoria, lo que está relacionado a la baja velocidad empleada por el vehículo para recorrerla. Sin

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

embargo, al finalizar la trayectoria se registraron las velocidades más altas, lo que ocasionó un poco de inestabilidad en el sistema. Finalmente, se observa que se alcanzó el objetivo esperado al evitar colisiones con los obstáculos con un margen de distancia satisfactorio.

t (s)	8.95	$V_0$ (m/s)	0.14	$V_0$ (%)	29.79
D (m)	2.04	$V_{\max}$ (m/s)	0.28	$V_{\max}$ (%)	59.57

En este caso la optimización empleó 8.95s en una trayectoria de 2.04m, la velocidad inicial fue de 0.14m/s (promedio de las ruedas), que representa el 29.79% de la velocidad máxima del robot. Esto garantizó la condición de rodadura al inicio del movimiento debido a una aceleración inicial no abrupta. La velocidad máxima también se mantuvo lejos del valor máximo del robot a 59.57% respecto a la velocidad máxima del robot.

Como se esperaba, se obtuvieron resultados con poco error ya que en la mayoría del movimiento no se superó la mitad de la velocidad máxima del robot. Sin embargo, persistió la tendencia del vehículo a desviarse a la derecha; especialmente en el último cuarto de la trayectoria a diferencia del tramo inicial, donde el margen de error fue bajo con respecto a ambas curvas teóricas.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

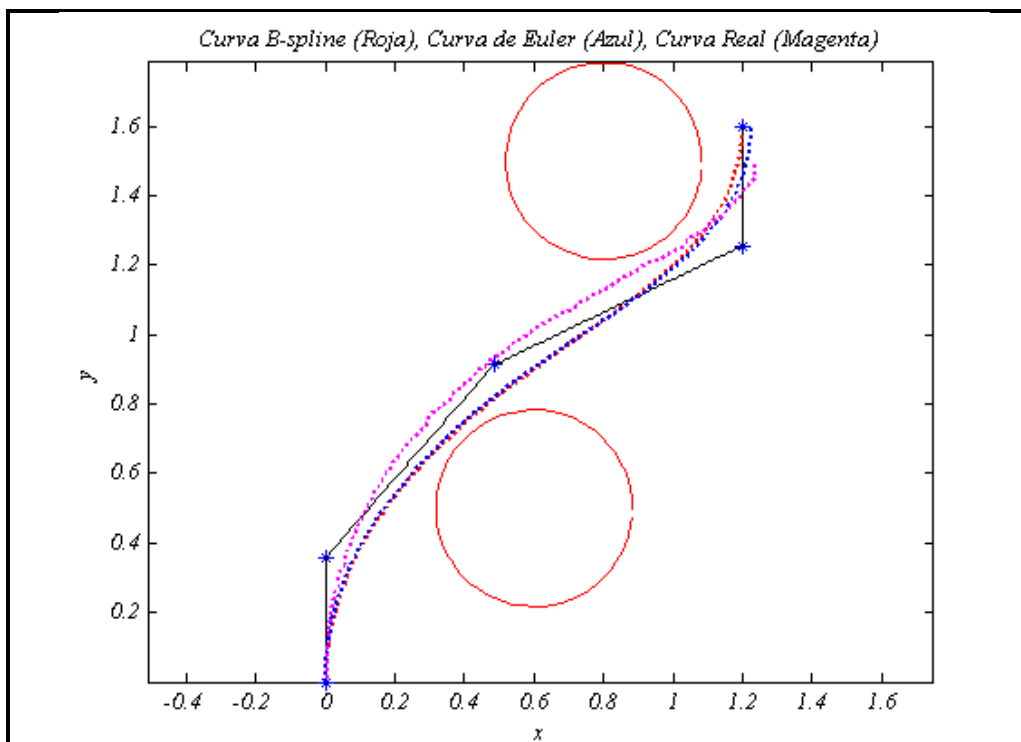


Figura 60: Curva 16. Evasión de Obstáculos con Optimización del Tiempo (sin Remolque)

Tabla 35: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 16

Teórico B-Spline	Condiciones Iniciales		Condiciones Finales		
		$(x_2, y_2) (m)$	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(1.20, 1.60)
	$\theta_2 (rad)$	$5\pi/2$	$\theta_2 (rad)$	$5\pi/2$	
Euler	Valores Iniciales		Valores Finales		
		$(x_2, y_2) (m)$	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(1.23, 1.59)
		$\theta_2 (rad)$	7.85	$\theta_2 (rad)$	7.79
Real	Valores Iniciales		Valores Finales		
		$(x_2, y_2) (m)$	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(1.24, 1.49)
		$\theta_2 (rad)$	7.85	$\theta_2 (rad)$	7.85

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

<i>Tabla 36: Tabla de errores de la Curva 16 Real respecto a las Teóricas</i>			
Evasión de Obstáculos / Vehículo en Solitario / $\delta = 0.05$			
Velocidades Instantáneas / Optimización del Tiempo de Recorrido			
Error – Curva 16		Absoluto	Relativo
Real / <i>B-Spline</i>	$x_2 (m)$	+0.04	+3.33%
	$y_2 (m)$	-0.11	-6.88%
	$\theta_2 (rad)$	0.00	0.00%
Real / Euler	$x_2 (m)$	+0.01	+0.81%
	$y_2 (m)$	-0.10	-6.29%
	$\theta_2 (rad)$	+0.06	+0.77%

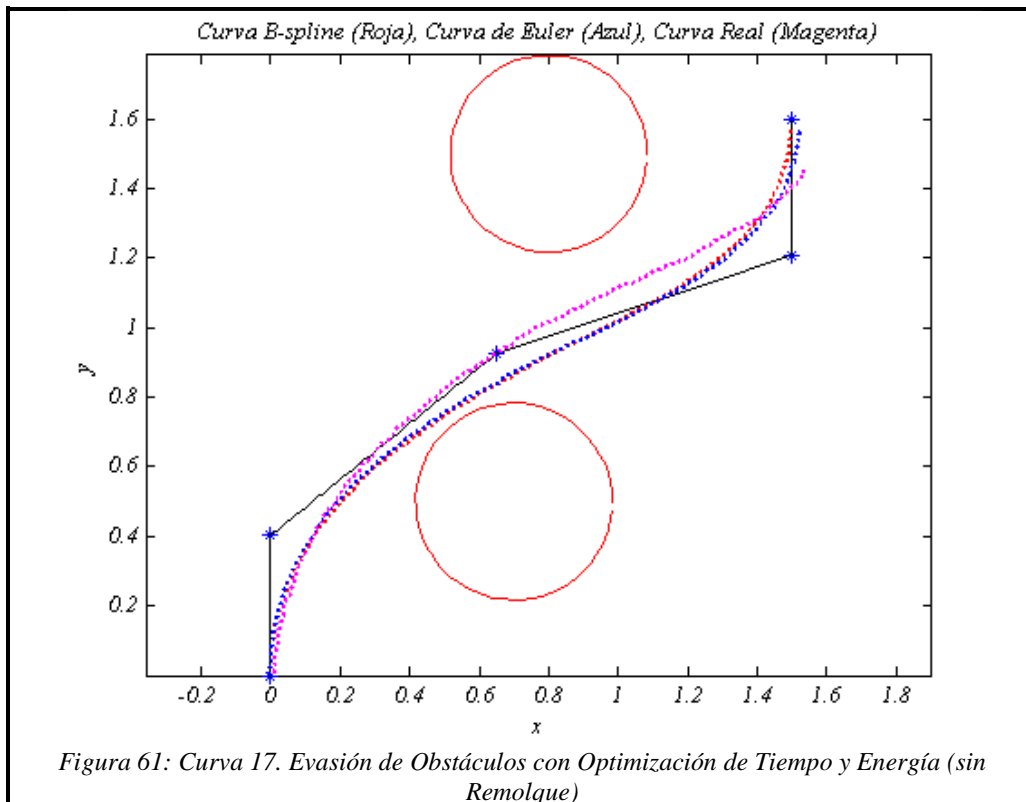
En la figura 60 se aprecia una desviación considerable al inicio de la trayectoria debido a una salida abrupta. Sin embargo, el movimiento se pudo corregir al alcanzar la estabilización del PID, por lo que se pudo cumplir con el objetivo principal de evadir los obstáculos; la desviación inicial se fue adicionando para generar una desviación significativa que afectó la llegada del vehículo a las condiciones finales deseadas, produciendo en la posición vertical una dispersión de -6.88% (-11cm de error) con respecto a la curva *B-Spline* y del -6.29% (-10cm de error) con respecto a la curva de Euler. En cuanto a la posición horizontal, el error con ambas curvas es pequeño, producto de la estabilización en el tramo final. De la misma manera, el vehículo logró describir la trayectoria al inicio y al final con los ángulos esperados respecto al *Spline* teórico.

<i>Tabla 37: Parámetros Óptimos de la Curva 16.</i>					
t (s)	5.08	$V_0 (m/s)$	0.42	$V_0 (%)$	89.36
D (m)	2.09	$V_{max} (m/s)$	0.44	$V_{max} (%)$	93.62

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

Como se evidencia en la tabla 37, la optimización empleó 5.08s para recorrer la trayectoria de 2.09m. Al optimizar el tiempo (en contraste con la optimización de energía) se observa un cambio drástico debido a la duplicación de las velocidades obtenidas al optimizar energía. Según los resultados, el robot alcanzó la velocidad de 0.44m/s en este movimiento donde la velocidad inicial de 0.42m/s, que representa el 89.36%, produjo una aceleración súbita que se tradujo en un deslizamiento momentáneo de las ruedas. Este arranque brusco del vehículo es el responsable de la modificación de su comportamiento en la salida.





## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónomo con Remolque

*Tabla 38: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 17*

Teórico B-Spline	Condiciones Iniciales		Condiciones Finales	
	$(x_2, y_2) (m)$	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(1.50, 1.60)
	$\theta_2 (rad)$	$5\pi/2$	$\theta_2 (rad)$	$5\pi/2$
Euler	Valores Iniciales		Valores Finales	
	$(x_2, y_2) (m)$	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(1.52, 1.58)
	$\theta_2 (rad)$	7.85	$\theta_2 (rad)$	7.78
Real	Valores Iniciales		Valores Finales	
	$(x_2, y_2) (m)$	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(1.54, 1.45)
	$\theta_2 (rad)$	7.85	$\theta_2 (rad)$	7.29

*Tabla 39: Tabla de errores de la Curva 17 Real respecto a las Teóricas*

Evasión de Obstáculos / Vehículo en Solitario / $\delta = 0.05$			
Velocidades Instantáneas / Optimización del Tiempo de Recorrido y Energía			
Error – Curva 17		Absoluto	Relativo
Real / B-Spline	$x_2 (m)$	+0.04	+2.67%
	$y_2 (m)$	-0.11	-9.38%
	$\theta_2 (rad)$	-0.56	-7.13%
Real / Euler	$x_2 (m)$	+0.01	+1.32%
	$y_2 (m)$	-0.10	-8.23%
	$\theta_2 (rad)$	-0.06	-6.30%

La optimización del tiempo de recorrido conjuntamente con la energía arrojó resultados muy similares a la optimización del tiempo como se puede observar en ambas figuras, sin embargo el desvío inicial es menor, ya que al optimizar energía se trata de minimizar las variaciones de las velocidades. La desviación que se observa al inicio de la trayectoria también fue incrementándose durante el resto del movimiento para ocasionar que el vehículo no alcanzara la posición final esperada. En la posición vertical, se observa que el mayor error absoluto alcanza  $-11\text{ cm}$  respecto al *Spline* teórico y -

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

10cm respecto a la curva de Euler. En cuanto a la posición horizontal, la curva real no supera 4cm de desviación en relación a la curva de Euler y al *Spline* teórico. De la misma manera, el error absoluto en el ángulo estuvo en 0.06rad (3.44°) por debajo de la condición final para el caso de la curva de Euler y en 0.56rad (32.09°) por debajo para la *Spline* teórica.

t (s)	5.50	V <sub>0</sub> (m/s)	0.44	V <sub>0</sub> (%)	93.62
D (m)	2.32	V <sub>max</sub> (m/s)	0.47	V <sub>max</sub> (%)	100.00

La aceleración súbita por la velocidad de arranque en 0.44m/s (93,62% de la velocidad máxima) ocasionó que el comportamiento inicial de la curva resultara notoriamente desviado respecto a los modelos matemáticos. Esto produjo nuevamente deslizamiento en el instante inicial y la tendencia a cambiar la dirección en el arranque, además de la ya mencionada desviación que presenta el vehículo hacia la derecha. La curva real también muestra que el movimiento se lleva a cabo sin colisiones, lo cual es importante en este apartado.

#### **Optimización de los Diferentes Parámetros Seleccionados (Energía, Tiempo y Tiempo-Energía) para el Vehículo con Remolque en presencia de Obstáculos**

Debido a la desviación observada que presentó el vehículo hacia la derecha en los experimentos anteriores ocurrió que en esta serie de ensayos el remolque colisionaba con los obstáculos ubicados a la derecha, por lo que se invirtieron de posición los servomotores del vehículo esperando que la desviación original ocurriera ahora hacia la izquierda y así evitar la colisión.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

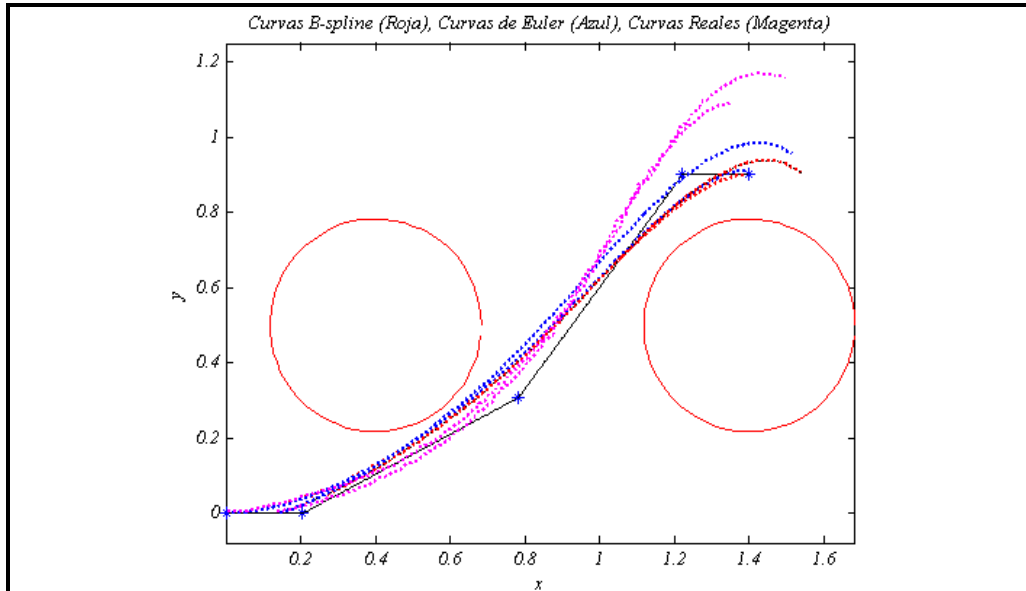


Figura 62: Curva 18. Evasión de Obstáculos con Optimización de Energía (con Remolque)

Tabla 41: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 18

		Condiciones Iniciales		Condiciones Finales	
		$(x_1, y_1) (m)$	$(0.00, 0.00)$	$(x_1, y_1) (m)$	$(1.40, 0.90)$
Teórico B-Spline	1Re	$\theta_1 (rad)$	$2\pi$	$\theta_1 (rad)$	$2\pi$
		$(x_2, y_2) (m)$	$(0.15, 0.00)$	$(x_2, y_2) (m)$	$(1.54, 0.90)$
	2Ve	$\theta_2 (rad)$	$6.62$	$\theta_2 (rad)$	$5.55$
		Valores Iniciales		Valores Finales	
Euler	1Re	$(x_1, y_1) (m)$	$(0.00, 0.00)$	$(x_1, y_1) (m)$	$(1.39, 0.91)$
		$\theta_1 (rad)$	$6.28$	$\theta_1 (rad)$	$6.38$
	2Ve	$(x_2, y_2) (m)$	$(0.15, 0.00)$	$(x_2, y_2) (m)$	$(1.51, 0.95)$
		$\theta_2 (rad)$	$6.62$	$\theta_2 (rad)$	$5.67$
Real	1Re	$(x_1, y_1) (m)$	$(0.00, 0.00)$	$(x_1, y_1) (m)$	$(1.35, 1.09)$
		$\theta_1 (rad)$	$6.28$	$\theta_1 (rad)$	$6.68$
	2Ve	$(x_2, y_2) (m)$	$(0.15, 0.00)$	$(x_2, y_2) (m)$	$(1.50, 1.15)$
		$\theta_2 (rad)$	$6.62$	$\theta_2 (rad)$	$5.83$

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

<i>Tabla 42: Tabla de errores de la Curva 18 Real respecto a las Teóricas</i>				
Evasión de Obstáculos / Vehículo con Remolque / $\delta = 0.05$				
Velocidades Instantáneas / Optimización de Energía				
Error – Curva 18		Absoluto		Relativo
<b>Real / B-Spline</b>	1Re	$x_1 (m)$	-0.05	-3.57%
		$y_1 (m)$	+0.19	+21.11%
		$\theta_1 (rad)$	+0.40	+6.37%
	2Ve	$x_2 (m)$	-0.04	-2.60%
		$y_2 (m)$	+0.25	+27.78%
		$\theta_2 (rad)$	+0.28	+5.05%
<b>Real / Euler</b>	1Re	$x_1 (m)$	-0.04	-2.88%
		$y_1 (m)$	+0.18	+19.78%
		$\theta_1 (rad)$	+0.30	+4.70%
	2Ve	$x_2 (m)$	-0.01	-0.66%
		$y_2 (m)$	+0.20	+21.05%
		$\theta_2 (rad)$	+0.16	+2.82%

Debido a la desviación hacia la izquierda que ahora presenta el vehículo, tanto éste como el remolque lograron describir el movimiento libre de colisiones. A pesar de esto, esta tendencia a moverse ahora hacia la izquierda fue aumentando la desviación a medida que se describía la trayectoria, por lo que ambos móviles presentan desviaciones significativas respecto a las posiciones finales teóricas. La máxima desviación absoluta del vehículo fue de 25cm por encima de la condición vertical inicial de 0.90m mientras que la máxima desviación del remolque fue de 19cm también por encima de la referencia de 0.90m. El comportamiento angular del remolque tuvo un error absoluto máximo de 0.40rad (22.62°) por encima de la referencia de  $2\pi rad$  y de +0.28rad (16.04°) en el caso del vehículo respecto a la *Spline* teórica.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

Como se observa en la figura 62, al discretizar la curva *B-Spline* mediante el método de Euler se observa que entre ellas ya existe una diferencia significativa en la posición final, la que se incrementa, como se esperaba, en la curva real del vehículo.

*Tabla 43: Parámetros Óptimos de la Curva 18*

t (s)	9.00	$V_0$ (m/s)	0.14	$V_0$ (%)	29.79
D (m)	1.73	$V_{\max}$ (m/s)	0.23	$V_{\max}$ (%)	48.94

La tabla 43 muestra que la velocidad máxima en el movimiento fue de  $0.23\text{m/s}$  que equivalen al 48.94% de la velocidad máxima del vehículo. Del mismo modo, la velocidad inicial fue de  $0.14\text{m/s}$  fue lo suficientemente baja como para evitar el deslizamiento de las ruedas del robot que garantizan el desarrollo inicial de la trayectoria sin mayor desviación.

Al comparar los resultados del vehículo en solitario al optimizar energía con los presentados en este ensayo se evidencia, al igual que en el caso sin obstáculos, un mejor comportamiento del vehículo en ausencia del remolque. Como se explicó anteriormente este comportamiento se debe a la creación de una condición dinámica en el sistema en el pasador que vincula al remolque con el vehículo.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

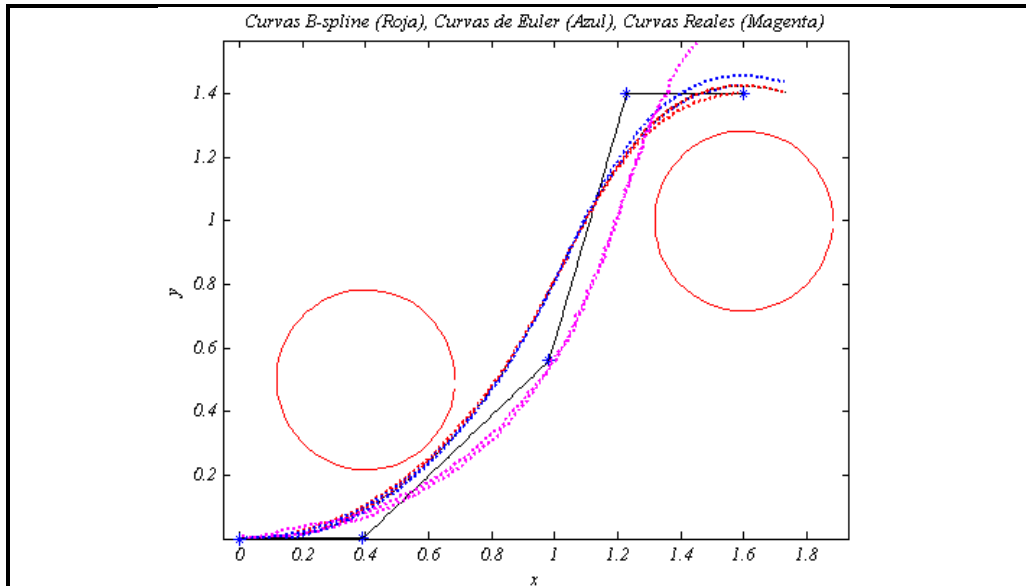


Figura 63: Curva 19. Evasión de Obstáculos con Optimización del Tiempo (con Remolque)

Tabla 44: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 19

		Condiciones Iniciales		Condiciones Finales	
		$(x_1, y_1)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_1, y_1)$ (m)	(1.60, 1.40)
Teórico B-Spline	1Re	$\theta_1$ (rad)	$2\pi$	$\theta_1$ (rad)	$2\pi$
		$(x_2, y_2)$ (m)	(0.15, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.75, 1.40)
	2Ve	$\theta_2$ (rad)	6.46	$\theta_2$ (rad)	5.99
		Valores Iniciales		Valores Finales	
Euler	1Re	$(x_1, y_1)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_1, y_1)$ (m)	(1.59, 1.43)
		$\theta_1$ (rad)	6.28	$\theta_1$ (rad)	6.35
	2Ve	$(x_2, y_2)$ (m)	(0.15, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.73, 1.44)
		$\theta_2$ (rad)	6.46	$\theta_2$ (rad)	6.04
Real	1Re	$(x_1, y_1)$ (m)	(0.00, 0.00)	$(x_1, y_1)$ (m)	(1.37, 1.41)
		$\theta_1$ (rad)	6.28	$\theta_1$ (rad)	7.36
	2Ve	$(x_2, y_2)$ (m)	(0.15, 0.00)	$(x_2, y_2)$ (m)	(1.46, 1.57)
		$\theta_2$ (rad)	6.46	$\theta_2$ (rad)	7.07

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

<i>Tabla 45: Tabla de errores de la Curva 19 Real respecto a las Teóricas</i>				
Evasión de Obstáculos / Vehículo con Remolque / $\delta = 0.05$				
Velocidades Instantáneas / Optimización del Tiempo de Recorrido				
Error – Curva 19		Absoluto		Relativo
<b>Real / B-Spline</b>	1Re	$x_1 (m)$	-0.23	-14.38%
		$y_1 (m)$	+0.01	+0.71%
		$\theta_1 (rad)$	+1.08	+17.20%
	2Ve	$x_2 (m)$	-0.29	-16.57%
		$y_2 (m)$	+0.17	+12.14%
		$\theta_2 (rad)$	+1.08	+18.03%
<b>Real / Euler</b>	1Re	$x_1 (m)$	-0.22	-13.84%
		$y_1 (m)$	-0.02	-1.40%
		$\theta_1 (rad)$	+1.01	+15.91%
	2Ve	$x_2 (m)$	-0.27	-15.61%
		$y_2 (m)$	+0.13	+9.03%
		$\theta_2 (rad)$	+1.03	+17.05%

Al optimizar el tiempo, se observan resultados insatisfactorios debido a la alta desviación resultante. Sin embargo, a pesar de la marcada desviación, el vehículo también logró describir la trayectoria sin colisiones. Con respecto a la *Spline* teórica, la desviación máxima del remolque ocurrió en la posición horizontal con 23cm menos que la condición horizontal final de 1.60m mientras que la máxima desviación del vehículo fue de 29cm también por debajo de la referencia horizontal de 1.75m.

El comportamiento angular presentó el mayor error relativo en relación con las desviaciones longitudinales. El error máximo fue de 1.08rad (61.88°) por encima de la referencia de  $2\pi rad$  en el caso del remolque respecto a la *B-Spline*. Este error es el de mayor interés, ya que la curva del remolque es la que se controla y optimiza a través del uso de OPTRAGEN®.

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

*Tabla 46: Parámetros Óptimos de la Curva 19*

t (s)	5.67	V <sub>0</sub> (m/s)	0.42	V <sub>0</sub> (%)	89.36
D (m)	2.28	V <sub>max</sub> (m/s)	0.43	V <sub>max</sub> (%)	91.49

El vehículo recorre una distancia de  $2.28m$  en un tiempo de  $5.67s$ , con una velocidad máxima en el movimiento de  $0.43m/s$  que equivalen al  $91.49\%$  de la velocidad máxima del vehículo. La velocidad inicial fue de  $0.42m/s$ , que corresponde al  $89.36\%$  de la velocidad máxima. Como en los otros casos donde se optimizó el tiempo de recorrido, nuevamente estos valores tan elevados produjeron la pérdida de la rodadura al inicio del movimiento gracias a la súbita aceleración desde el reposo y nuevamente propiciaron la alta dispersión del error.

Nuevamente, como en casos anteriores, la carga adicional del remolque le añade condiciones dinámicas al sistema y de nuevo introducen la problemática explicada en los casos anteriores, la cual ocasiona que la desviación se incremente.



## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónomo con Remolque

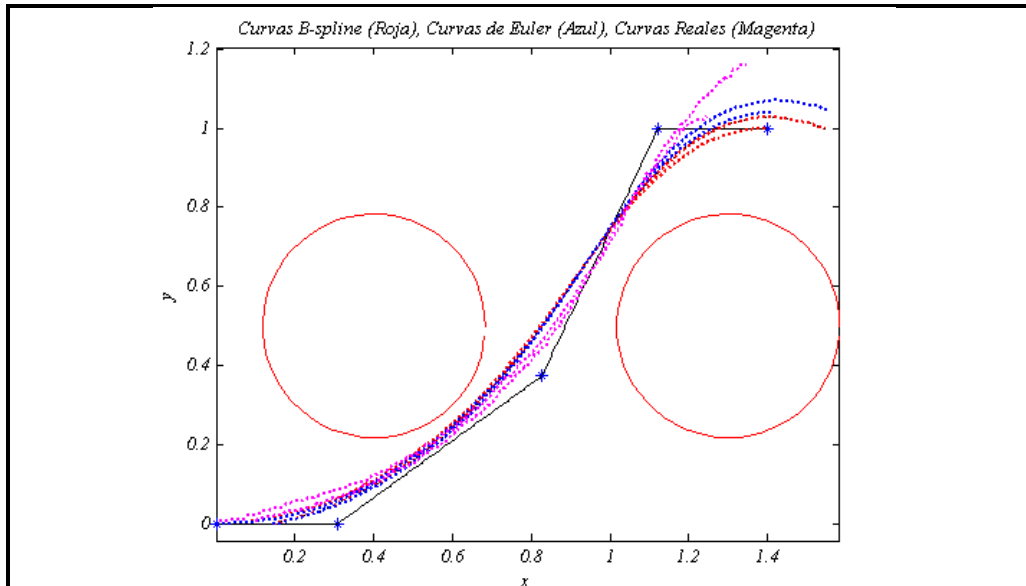


Figura 64: Curva 20. Evasión de Obstáculos con Optimización del Tiempo y Energía (con Remolque)

Tabla 47: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 20

		Condiciones Iniciales		Condiciones Finales		
		Teórico B-Spline		1Re	$(x_1, y_1) (m)$	$(0.00, 0.00)$
	$\theta_1 (rad)$			$2\pi$	$\theta_1 (rad)$	$2\pi$
		2Ve	$(x_2, y_2) (m)$	$(0.15, 0.00)$	$(x_2, y_2) (m)$	$(1.55, 1.00)$
			$\theta_2 (rad)$	$6.47$	$\theta_2 (rad)$	$5.91$
Euler		Valores Iniciales		Valores Finales		
		1Re	$(x_1, y_1) (m)$	$(0.00, 0.00)$	$(x_1, y_1) (m)$	$(1.41, 1.04)$
	$\theta_1 (rad)$	$6.28$	$\theta_1 (rad)$	$6.33$		
2Ve	$(x_2, y_2) (m)$	$(0.15, 0.00)$	$(x_2, y_2) (m)$	$(1.56, 1.04)$		
	$\theta_2 (rad)$	$6.47$	$\theta_2 (rad)$	$5.95$		
Real		Valores Iniciales		Valores Finales		
		1Re	$(x_1, y_1) (m)$	$(0.00, 0.00)$	$(x_1, y_1) (m)$	$(1.24, 1.03)$
	$\theta_1 (rad)$	$6.28$	$\theta_1 (rad)$	$7.18$		
2Ve	$(x_2, y_2) (m)$	$(0.15, 0.00)$	$(x_2, y_2) (m)$	$(1.35, 1.16)$		
	$\theta_2 (rad)$	$6.47$	$\theta_2 (rad)$	$6.45$		

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

<i>Tabla 48: Tabla de errores de la Curva 20 Real respecto a las Teóricas</i>					
Evasión de Obstáculos / Vehículo con Remolque / $\delta = 0.05$					
Velocidades Instantáneas / Optimización del Tiempo de Recorrido y Energía					
Error – Curva 20			Absoluto	Relativo	
<b>Real / B-Spline</b>	1Re	$x_1 (m)$	-0.16	-11.43%	
		$y_1 (m)$	+0.03	+3.00%	
		$\theta_1 (rad)$	+0.90	+14.33%	
	2Ve	$x_2 (m)$	-0.20	-12.90%	
		$y_2 (m)$	+0.16	+16.00%	
		$\theta_2 (rad)$	+0.54	+9.14%	
<b>Real / Euler</b>	1Re	$x_1 (m)$	-0.17	-12.06%	
		$y_1 (m)$	-0.01	-0.96%	
		$\theta_1 (rad)$	+0.85	+13.43%	
	2Ve	$x_2 (m)$	-0.21	-13.46%	
		$y_2 (m)$	+0.12	+11.54%	
		$\theta_2 (rad)$	+0.50	+8.40%	

Quando se optimiza tiempo y energía, a pesar que la optimización de la energía tiende a disminuir las velocidades, la condición de tiempo requiere que dichas velocidades sean elevadas. Con respecto a la *Spline* teórica, la desviación máxima del remolque fue de  $-16cm$  en la dirección horizontal equivalentes a un  $-11.43\%$  mientras que la máxima desviación del vehículo fue de  $+16cm$  ( $+16.00\%$ ) respecto al valor vertical de  $1.00m$ .

En cuanto al ángulo, éste presenta mayor dispersión que las desviaciones longitudinales. Igualmente son resultados pobres pues el error máximo fue de  $+0.90rad$  ( $51.57^\circ$ ) en el caso del remolque y de  $+0.54rad$  ( $30.94^\circ$ ) en el caso del vehículo, ambas respecto a sus *Splines* teóricas.

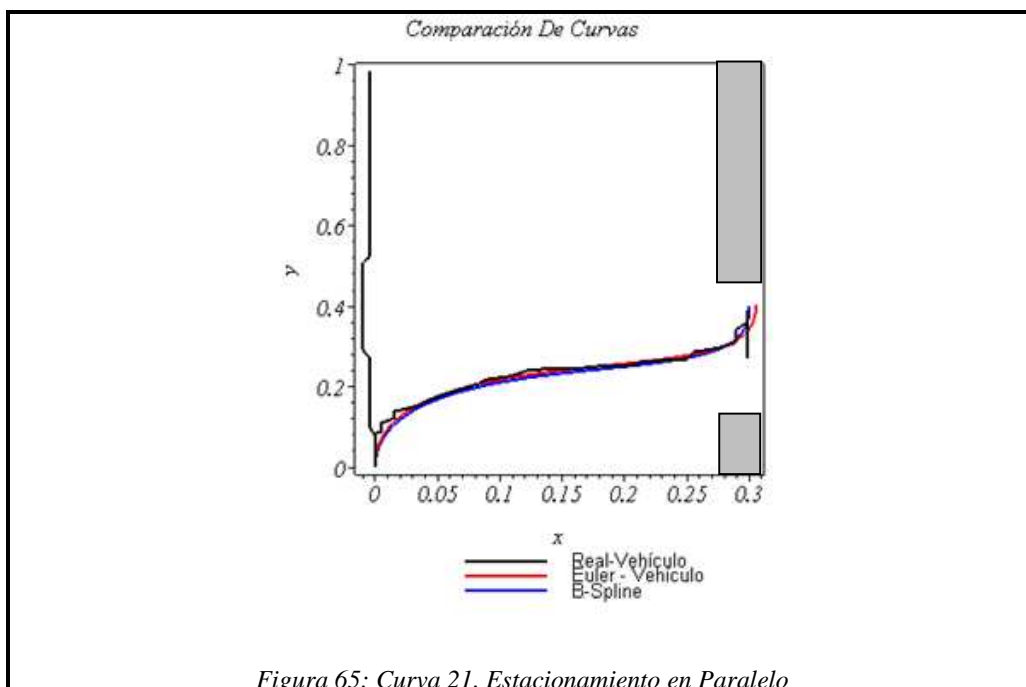
<i>Tabla 49: Parámetros Óptimos de la Curva 20</i>					
t (s)	4.50	$V_0 (m/s)$	0.42	$V_0 (\%)$	89.36
D (m)	1.82	$V_{max} (m/s)$	0.43	$V_{max} (\%)$	91.49

## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

La trayectoria abarca una distancia de  $1.82m$  realizada en un tiempo de  $4.50s$ . En este caso se observa que la velocidad máxima es de  $0.43m/s$  que representan el  $91.49\%$  de la velocidad máxima del robot. Esto indica que, de nuevo, la velocidad inicial volvió a ser elevada, ocasionando otra salida brusca indeseada. Considerando los problemas anteriores que presenta el vehículo con el remolque, de acuerdo con la figura 64, hubo gran concordancia en las primeras  $\frac{3}{4}$  partes de la trayectoria de acuerdo con la curva originalmente planificada. Los resultados no son completamente satisfactorios debido a que hubo gran desviación respecto a la posición final establecida a pesar de haber evadido exitosamente los obstáculos presentes.

### Optimización de Energía para el Vehículo en Solitario en Aparcamiento Paralelo



## CAPÍTULO IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con Remolque

<i>Tabla 50: Valores B-Spline, de Euler y Real de la Curva 21</i>				
<b>Teórico B-Spline</b>	Condiciones Iniciales		Condiciones Finales	
	$(x_2, y_2) (m)$	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(0.30, 0.40)
	$\theta_2 (rad)$	$5\pi/2$	$\theta_2 (rad)$	$5\pi/2$
<b>Euler</b>	Valores Iniciales		Valores Finales	
	$(x_2, y_2) (m)$	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(0.31, 0.41)
	$\theta_2 (rad)$	7.85	$\theta_2 (rad)$	7.85
<b>Real</b>	Valores Iniciales		Valores Finales	
	$(x_2, y_2) (m)$	(0.00, 0.00)	$(x_2, y_2) (m)$	(0.30, 0.38)
	$\theta_2 (rad)$	7.85	$\theta_2 (rad)$	7.85
<b>Nota</b>	Resultados expresados sólo para la sección curva			

<i>Tabla 51: Tabla de errores de la Curva 21 Real respecto a las Teóricas</i>			
Evasión de Obstáculos / Vehículo en Solitario / $\delta = 0.05$			
Estacionamiento en Paralelo			
Error – Curva 21		Absoluto	Relativo
<b>Real / B-Spline</b>	$x_2 (m)$	0.00	0.00%
	$y_2 (m)$	-0.02	-5.00%
	$\theta_2 (rad)$	0.00	0.00%
<b>Real / Euler</b>	$x_2 (m)$	-0.01	-3.23%
	$y_2 (m)$	-0.03	-7.32%
	$\theta_2 (rad)$	0.00	0.00%

Este ensayo se llevó a cabo para poner a prueba la versatilidad de la planificación con *Splines*. Este movimiento del vehículo en solitario alcanza su objetivo principal de evitar los obstáculos presentados alcanzando la posición final deseada. En la figura 65 y la tabla 51 se evidencia que la curva real con respecto a ambas curvas (*B-Spline* y de Euler) muestra desviación mínima en cuanto al ángulo, así mismo, el vehículo con respecto a la posición horizontal alcanza la posición deseada y presenta 2cm de desviación respecto a la posición vertical ambas medidas con respecto a la curva *B-Spline*.

## CAPÍTULO V. CONCLUSIONES

---

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con remolque

### CAPÍTULO V CONCLUSIONES

- Se describió el modelo matemático del comportamiento cinemático de un vehículo no-holónimo de tracción diferencial trasera con y sin remolque, interpretando a cabalidad las ecuaciones que rigen su comportamiento y logrando un entendimiento bastante amplio de las variables que afectan su movimiento.
- Se desarrolló un modelo matemático para vehículos no-holónomos diferenciales de dos ruedas con y sin remolque, utilizando para ello principios de la mecánica de la partícula y del cuerpo rígido.
- Se desarrolló un conjunto de algoritmos en MATLAB® 7.0 capaces de simular el movimiento del vehículo de tracción diferencial considerando la cantidad mínima de casos necesarios de acuerdo a la disposición del sistema con y sin remolque, así como en presencia y ausencia de obstáculos.
- Se optimizaron variables específicas asociadas al movimiento del vehículo para ejecutar una trayectoria, en particular el tiempo y la

## CAPÍTULO V. CONCLUSIONES

---

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con remolque

energía, tomando en cuenta las restricciones del modelo matemático. Para esto se utilizaron las herramientas OPTRAGEN® y SNOPT®.

- Se verificó la versatilidad de las curvas *B-Spline*, para llevar a cabo la planificación de trayectorias para el sistema no-holónimo. Por otro lado, las curvas de Dubins pueden ser utilizadas para describir rutas de longitud mínima entre dos configuraciones, sin embargo, dan polinomios inestables como resultado al parametrizarlas.
- Se consideró la influencia de la forma en que fueron tomados los datos, lo cual ocasionó errores y desviaciones debido al error de alineación, la resolución de los videos y al proceso de toma de datos manual a través de un acetato, su escaneo y nuevamente a la digitalización de datos realizada igualmente de forma manual.
- Se corrigió la desviación del vehículo debido a heterogeneidad en los servomotores del módulo mediante un algoritmo de control PID propio del módulo NXT™.
- Para el vehículo en solitario, se observó poca desviación en el vehículo al realizar trayectorias sin optimizar y fue capaz de ir de una configuración inicial a una final con un error inferior al 5%.
- Se observó experimentalmente que el sistema ofrece mejores resultados cuando no se promedian las velocidades en los algoritmos de control; sino que, por el contrario, el sistema ofreció mejores resultados en

## CAPÍTULO V. CONCLUSIONES

---

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con remolque

términos del error en la configuración final al utilizar las velocidades instantáneas obtenidas a través del método de Euler.

- En cuanto a la comparación de los diferentes pasos del sistema, se observó que la selección del mismo es un parámetro de influencia significativa en el control del sistema. Un paso cercano a  $0.1s$  produce gran dispersión de error en el método de Euler en tanto que un paso inferior a  $0.05s$  puede producir dispersión del error asociado a la falta de asentamiento del algoritmo PID de los servomotores del módulo.
- Se desconoce el tiempo de asentamiento en el control PID de los servomotores empleados. Sin embargo, a través de los ensayos se sabe que este valor está comprendido en el intervalo  $t=(0.01,0.05]$
- La optimización de energía produce las menores aceleraciones y bajas fluctuaciones de velocidades en el sistema, con esto el comportamiento fue bastante estable y la trayectoria se ajustó con el menor error en todos los ensayos, tanto para el vehículo en solitario como para éste con remolque.
- La optimización del tiempo incrementa las velocidades y aceleraciones, lo cual hace inestable al sistema y por ende, la desviación fue significativa. Asimismo, esta optimización involucra partidas con velocidades elevadas que producen pérdida del control del sistema y por lo tanto, involucran también un aumento del error.

## CAPÍTULO V. CONCLUSIONES

---

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con remolque

- Respecto al comportamiento del sistema vehículo remolque, al crear un vínculo entre el vehículo y el remolque a través del pasador no ideal, se crean un conjunto de condiciones dinámicas que influyen en el comportamiento del sistema ya que las reacciones internas entorpecen el desarrollo de las trayectorias.
- Se modelaron obstáculos estacionarios como círculos, tanto para el caso del vehículo en solitario como con el remolque, que formaron parte de las restricciones de las operaciones de optimización. El patrón descrito con el vehículo en solitario se repitió, es decir, la optimización de energía arrojó los menores errores en tanto que la optimización de tiempo incrementó el error a causa de las altas velocidades.
- De modo general, se evidenció que los métodos de planificación cinemáticos basados en curvas *B-Spline* utilizados en este trabajo son efectivos para el caso del vehículo en solitario siempre que las trayectorias generadas sean recorridas a bajas velocidades, lo cual ocurre al optimizar la energía en el proceso de planificación y seleccionando un paso adecuado para las discretizaciones. Asimismo, los métodos geométricos no demostraron ser efectivos a la hora de realizar planificaciones para vehículos vinculados a través de articulaciones (remolque).



## RECOMENDACIONES

---

Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con remolque

### RECOMENDACIONES

- En primer lugar, se recomienda realizar investigaciones análogas a ésta, pero utilizando un vehículo tipo ackerman, ya que éste tiene la particularidad de ser mucho más estable para implementar el control.
- Realizar nuevamente el análisis experimental pero ésta vez considerando las condiciones dinámicas y no sólo las cinemáticas, ya que el remolque añade un peso adicional que tiende a reducir la velocidad del vehículo y por no ser considerado de las ecuaciones del remolque se pasó a las del vehículo sin consideraciones adicionales excepto la distancia que los separa.
- En este trabajo se estableció un paso de 0.05 para trabajar todas las curvas, sin embargo, puede realizarse una búsqueda del paso óptimo que permita para mejorar la precisión al conseguir el tiempo de asentamiento de los algoritmos PID.
- Sí se implementan los resultados de esta investigación en la industria se recomienda optimizar la energía en las trayectorias ya que este parámetro proporciona resultados con el menor error.
- Si se desea implementar un control en sistemas móviles vinculados a través de pasadores es aconsejable abordar el problema desde el punto de vista dinámico y no sólo desde el punto de vista cinemático como el de la

## RECOMENDACIONES

---

### Planificación de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con remolque

presente investigación, con el objeto de tener un modelo más versátil. De realizase la recomendada investigación, el peso de la carga transportada en el remolque, el peso del propio vehículo y la posibilidad de una deformación considerable en las ruedas deberá ser considerada.

- La estrategia de control a través de velocidades promedios utilizado en esta investigación se hizo a través de la toma del valor medio entre dos velocidades lineales de cada rueda. Se recomienda la verificación de esta estrategia abordando la toma de promedios para las velocidades angulares y no las lineales.
- El control del sistema no-holónimo se hizo a través de funciones independientes para la coordenada  $x$  y la coordenada  $y$ . Como el robot se mueve a través de arcos de circunferencia y no a través de los trazos rectos que los métodos numéricos arrojan, podría realizarse una investigación en la cual se controle al sistema no-holónimo a través de funciones de radio de curvatura paramétricas y comparar sus resultados con esta investigación.
- Para mejorar los resultados se recomienda utilizar un sistema automatizado que permita ubicar la posición del robot de manera tal que se evite recurrir a la medición imprecisa de forma manual. Los resultados también mejorarían si la cámara de video empleada esté equipada con una mejor resolución.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

Planificador de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con remolque

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ailon, A. Berman, N. y Arogeti, S. (2005). *On controllability and trajectory tracking of a kinematic vehicle model*. vol. 41, no. 5. [Revista en línea] Disponible <http://www.sciencedirect.com/science>. [Consulta 2009, Enero 10].
- Arias, F (2006). *El proyecto de investigación. Introducción a la metodología científica*. (5ta ed.) Venezuela: Episteme.
- Bloch, A. Reyhanoglu, M. y McClamroch, N. (1992). *Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems*. vol. 37, no. 11. [Revista en línea] Disponible <http://www.ieee.com>. [Consulta 2008, Noviembre 29].
- Burden, R. (2002). *Análisis Numérico*. Séptima Edición. Editorial Math Learning. Caracas.
- Choset, H. Lynch, K. Hutchinson, S. Kantor, G. y otros. (2005). *Principles of Robot Motion*. Editorial Bradford Book. Estados Unidos.
- Dubins, L. (1957). *On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents*. Revista American Journal of Mathematics. pp. 497-516, vol. 79.
- Gil, A. (2007). *Towards a Control Architecture for Cooperative Nonholonomic Mobile Robots*. Tesis de Doctorado, Universidad de Montpellier 2. Francia.
- Gómez-Bravo, F. Cuesta, F. y Ollero, A. (2003). *Planificación de Trayectorias en Robots Móviles basada en Técnicas de Control de Sistemas No-Holónomos*. [Documento en Línea] Disponible en

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

Planificador de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con remolque

[http://www.uhu.es/omar\\_sanchez/Omar's%20Resources/Cinematicavehiculos.pdf](http://www.uhu.es/omar_sanchez/Omar's%20Resources/Cinematicavehiculos.pdf). [Consulta 2008, Noviembre 12].

- Hurtado, J (2007). *El proyecto de investigación. Metodología de la investigación holística*. (5ta ed) Venezuela: Editorial Sypal.
- Lamiriaux, F. y Laumond, J. (2001). *Smooth Motion Planning for Car-Like Vehicles*. pp. 498-501, vol. 17. Conferencia en Robótica y Automatización. [Revista en línea] Disponible <http://www.ieee.com>. [Consulta 2008, Noviembre 20].
- Latombe, J. (1991). *Robot motion Planning*. Editorial Kluwer Academic Publishers. Estados Unidos.
- Laumond, J. (1987). *Finding collision-free smooth trajectories for a nonholonomic mobile robot*. Décima Conferencia Internacional en Inteligencia Artificial. Disponible en <http://www.ieee.com>. [Consulta 2008, Diciembre 15].
- Laumond, J. Jacobs, P. y otros. (1994). *A Motion Planner for Nonholonomic Mobile Robots*. pp. 577-593, vol. 10 (document). [Revista en línea] Disponible <http://www.ieee.com>. [Consulta 2008, Diciembre 16].
- Luenberger D. (1974). *Programación Lineal y No Lineal*. Segunda Edición. Editorial Addison Wesley Iberoamericana. Estados Unidos.
- Milam, M. (2003). *Real-time optimal trajectory generation for constrained dynamical systems*. Ph.D. dissertation, California Institute of Technology.
- Morin, P. y Samson, C. (2004) *Trajectory tracking for non-holonomic vehicles: overview and case study*. Forth International Workshop on Robot

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

Planificador de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con remolque

- Motion and Control. [Revista en línea] Disponible <http://www.scirus.com>. [Consulta 2008, Noviembre 20].
- Murray, R. y Sastry, S. (1990). *Steering Nonholonomic System Using Sinusoids*. pp. 1136-1141. Conferencia Internacional en Decisión y Control. [Revista en línea] Disponible <http://www.ieee.com>. [Consulta 2008, Noviembre 20].
  - Nelson, W. y Cox, I. (1988). *Local path control for an autonomous vehicle*. Conferencia Internacional de la IEEE. Disponible <http://www.ieee.com>. [Consulta 2008, Diciembre 20].
  - Nieuwstadt, M. y Murray, R. (1998). *Real-time trajectory generation for differentially at systems*. International Journal of Robust and Nonlinear Control. vol. 8, no. 11. [Revista en Línea] Disponible [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1239\(199809\)8:11<995::AID-RNC373>3.0.CO;2-W](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1099-1239(199809)8:11<995::AID-RNC373>3.0.CO;2-W). [Consulta 2009, Enero 11].
  - Ollero Baturone, A. (2001). *Robótica: Manipuladores y Robots móviles*. Editorial Marcombo. España.
  - Piegl, L. y Tiller, W. (1997). *The NURBS Book*. Segunda Edición. Editorial Springer-Verlag. Alemania.
  - Reeds, J. y Shepp, L. (1990). *Optimal paths for a car that goes both forwards and backwards*. Revista Pacific Journal of Mathematics. pp. 367-393, vol. 145.
  - Riley, W. y Sturges, L. (1996) *Ingeniería Mecánica: Dinámica*. Segunda Edición. Editorial Reverté, S.A. Venezuela.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

Planificador de Trayectorias para un Vehículo No-holónimo con remolque

- Rouchon, P. Fliess, M. Lévine, J. y Martin, P. (1993). *Flatness and Motion Planning: the car with  $n$  trailers*. [Documento en Línea] Disponible en [http://www.esi2.us.es/~vivas/ayr2iaei/LOC\\_MOV.pdf](http://www.esi2.us.es/~vivas/ayr2iaei/LOC_MOV.pdf). [Consulta 2008, Noviembre 10].
- Samson, C. y Ait-Abderrahim, K. (1991). *Feedback stabilization of a nonholonomic wheeled mobile robot*. Conferencia en Inteligencia Robótica y Sistemas. Disponible <http://www.ieee.com>. [Consulta 2008, Noviembre 22].
- Ting-Yung Wen, J. (1997). *Control of Nonholonomic System*. The Control Handbook, IEEE Press. Disponible <http://www.ieee.com>. [Consulta 2008, Diciembre 16].
- Zill, D. (2002). *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera*. Quinta Edición. Editorial Math Learning. Caracas.