

**TRABAJO ESPECIAL DE GRADO**

**PREDICCIÓN DE VIBRACIONES POR RETEMBLADO EN EL  
PROCESO DE FRESADO A TRAVÉS DE UN CÓDIGO  
COMPUTACIONAL**

Presentado ante la Ilustre  
**Universidad Central de Venezuela**

Por los Bachilleres:

**De La Guerra G., Oscar E.**

**Rivero S., Janiel M.**

Para optar al Título de:

**Ingeniero Mecánico**

**Caracas, 2010**

# **TRABAJO ESPECIAL DE GRADO**

## **PREDICCIÓN DE VIBRACIONES POR RETEMBLADO EN EL PROCESO DE FRESADO A TRAVÉS DE UN CÓDIGO COMPUTACIONAL**

TUTOR ACADÉMICO: Prof. Jorge Barillas

Presentado ante la Ilustre  
**Universidad Central de Venezuela**

Por los Bachilleres:  
**De La Guerra G., Oscar E.**  
**Rivero S., Janiel M.**

Para optar al Título de:  
**Ingeniero Mecánico**

**Caracas, 2010**



Caracas, 13 de mayo de 2010

## ACTA

Los abajo firmantes, Miembros del Jurado Examinador designado por el Consejo de Escuela de Ingeniería Mecánica para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por el bachiller:

**OSCAR DE LA GUERRA y JANIEL RIVERO**

*Titulado:*

**“PREDICCIÓN DE VIBRACIONES POR RETEMBLADO EN EL PROCESO DE FRESADO A TRAVÉS DE UN CÓDIGO COMPUTACIONAL”**

Consideran que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el Plan de Estudios conducente al Título de Ingeniero Mecánico

Prof. Hugo Armando Guerrero  
Jurado



Prof. José Gregorio La Riva  
Jurado

Prof. Jorge Barillas  
Tutor

## **DEDICATORIA**

Hay muchas personas a las que me gustaría dedicar este trabajo por haber influido mucho en mi vida y mi educación. A la primera y principal es a mi madre por llevarme hasta donde estoy hoy en día, por su apoyo incondicional y por los valores que me ha inculcado los cuales definen como soy.

Quiero dedicarlo también a José Riobo Vásquez quien ha sido más que un padre para mí todos estos años a pesar de las diferencias que pudimos tener.

A mi familia, sobre todo a los más pequeños de la casa, que este esfuerzo sea un ejemplo a seguir para que también perseveren, triunfen y sean personas exitosas, en el futuro. También a ese ser tan especial que llena mi vida de alegrías y me complementa Paty!.

Quiero hacer una especial dedicatoria a mis dos abuelos: Al Sr. José Botssiere por toda esa sabiduría y enseñanza que me transmitiste y que solíamos charlar, y; a Gonzalo De La Guerra quien siempre se sintió orgulloso de mí, y estoy seguro que desde el cielo sigue sintiendo ese mismo orgullo. Aunque no estén aquí conmigo siempre los llevaré en mi corazón y en mi mente.

***Oscar De La Guerra***

Este trabajo especial de grado representa la culminación de mis estudios para obtener el título como Ingeniero Mecánico, pero más que eso, significa esfuerzo, dedicación, ilusiones, desilusiones y el inicio de carrera como profesional. Y en todo este tiempo, a pesar que no estabas presente, fuiste y seguirás siendo el apoyo y la inspiración para superar todas mis metas sin importar lo difícil que parezcan. Por eso Papá, a ti te dedico este logro por todo lo que fuiste para mí, la dedicación y el amor incondicional que tuviste para nosotros hasta el momento de tu partida.

***Janiel Rivero***

## **AGRADECIMIENTOS**

Nuestro agradecimiento a la Universidad Central de Venezuela, institución que nos brindó la formación académica necesaria para lograr la realización de este trabajo especial de grado con el que será posible convertirnos en Ingenieros Mecánicos. También agradecemos de manera especial y sincera a nuestro Tutor Académico el profesor Jorge Barillas por darnos la oportunidad de desarrollar este trabajo especial de grado, por toda la dedicación y por brindarnos toda la orientación y ayuda que necesitamos.

Agradecimientos de Oscar Eduardo De La Guerra Galvis

Me gustaría darle las gracias a Dios por la vida que me ha brindado, llena de dicha, prosperidad y alegrías. Quiero agradecerle a mi mamá la cual ha sido, es y seguirá siendo una de las personas más importantes en mi vida, quien ha sabido guiarme y aconsejarme, por estar siempre a mi lado en los buenos momentos y aún más en los no tan buenos. Por ser mi amiga y ejemplo a seguir, por enseñarme el poder de la perseverancia, la constancia y enseñarme a ser una persona responsable.

Un agradecimiento profundo y sentido merece el Profesor Elías Izquierdo ante todo mi amigo y quien iniciara mis primeros pasos en el mundo de los números.

Agradezco a todos los profesores que participaron en mi formación académica, por el trato dispensado, por nutrirme con sus conocimientos y transmitirme todas esas experiencias prácticas que han obtenido a través de los años. Especial mención merecen el profesor Christian Murati, la profesora Norma Guzmán y el profesor Luciano Vela por sus aportes invaluable al guiar nuestras ideas, por toda la atención, orientación, tiempo y dedicación que nos brindaron para ayudarnos durante el desarrollo de este trabajo.

De todo corazón agradezco a mis amigos y seres queridos: Paty, Chespy, Daniela, Paola, Mireya, Arydée, Max, Vanessa, Mayuri, Rafael (el gocho), por compartir junto a mí y brindarme su apoyo en los momentos más difíciles en la carrera. Por último me gustaría agradecer a Janiel mi compañero de tesis y uno de mis mejores amigos; sin su esfuerzo y dedicación no hubiera sido posible la culminación de este trabajo.

#### Agradecimientos de Janiel Miguel Rivero Silva

Quiero agradecer a todos los profesores que prestaron su ayuda incondicional, en especial a la Prof. Norma Guzmán, al Prof. Christian Murati y al Prof. Luciano Vela, por sus recomendaciones para la elaboración de este trabajo especial de grado

A mi mamá y a mi hermana por el apoyo brindado en todo momento. Por haber aguantado el mal humor y el stress en los momentos difíciles. Estas palabras son pocas para decir lo agradecido que estoy.

A mis amigos y compañeros de clases que compartieron conmigo los momentos buenos y malos, en particular mi compañero en este trabajo especial de grado, que sin su apoyo y ayuda no hubiese sido posible la culminación de este trabajo.

Al Hospital Universitario de Caracas por darme todo el apoyo y la facilidad de poder trabajar y estudiar al mismo tiempo. También por estar pendiente de mi progreso como estudiante.

**De La Guerra G., Oscar E.**

**Rivero S., Janiel M.**

**“PREDICCIÓN DE VIBRACIONES POR RETEMPLADO EN EL  
PROCESO DE FRESADO A TRAVÉS DE UN CÓDIGO  
COMPUTACIONAL**

**Tutor Académico: Prof. Jorge Barillas, Caracas, UCV Facultad de Ingeniería.  
Escuela de Ingeniería Mecánica. 2010. #Pág.**

**Palabras Claves:** Fresado, Máquinas Herramientas, Vibraciones Mecánicas, Vibraciones Autoexcitadas, Retemplado, Lóbulos de Estabilidad.

***RESUMEN***

El Retemplado es una de las más importantes limitantes durante la fabricación en el proceso de fresado, principalmente porque produce un pobre acabado superficial sobre la pieza de trabajo comprometiendo las precisiones deseadas, disminuye la tasa de remoción de material del proceso de corte haciendo que este sea menos eficiente y, además, disminuye la vida útil de la máquina así como de la herramienta de corte; todo esto se traduce principalmente en pérdidas económicas para la industria manufacturera. El objetivo de este trabajo es predecir el retemplado a través de la aplicación de modelos físico-matemáticos que generen las gráficas de los lóbulos de estabilidad donde se pueda mostrar bajo qué condiciones de trabajo el proceso es estable. La metodología seleccionada y estudiada para este trabajo especial de grado se basa en el modelo lineal de dos grados de libertad con dominio en las frecuencias, desarrollado y publicado por el Dr. Yusuf Altintas<sup>1</sup> y también validado por el Dr. Tony L. Schmitz<sup>2</sup>. El resultado se tradujo en un algoritmo que permite el desarrollo de un código computacional que brinda información gráfica sobre la máxima profundidad de corte axial que se puede lograr en función de la velocidad del husillo sin que se presente el fenómeno de retemplado en el proceso de fresado.

---

<sup>1</sup> Altintas, Y., (2000), “Manufacturing Automation: Metal Cutting Mechanics, Machine Tool Vibrations, and CNC Design”. Cambridge University Press. 286 p.

<sup>2</sup> Schmitz, L. Tony., (2009), “Machining Dynamics: Frequency Response to Improve Productivity”. Springer Science+Business Media. 303 p.

## NOMENCLATURA

$h$	=	espesor de viruta
$\phi$	=	Ángulo de rotación de la herramienta
$f_t$	=	Avance por diente
$f$	=	Avance lineal
$\Omega$	=	Velocidad rotacional de la herramienta
$N_d$	=	Número de dientes
$F_c$	=	Fuerza de corte
$F_T$	=	Fuerza de empuje
$V$	=	Velocidad de corte
$R$	=	Fuerza Resultante
$F_\mu$	=	Fuerza de fricción
$F_s$	=	Fuerza de cizallamiento
$F_n$	=	Fuerza normal
$\mu$	=	Coefficiente de Fricción
$\phi_c$	=	Ángulo de corte
$\alpha$	=	Ángulo de fricción
$\gamma$	=	Ángulo de hélice de la herramienta
$F$	=	Fuerza resultante
$K_s$	=	Coefficiente de corte para fuerza F
$b$	=	Profundidad axial de corte
$F_n$	=	Componente normal de la fuerza F
$F_t$	=	Componente tangencial de la fuerza F



$F_a$	=	Componente axial de la fuerza $F$
$k_n$	=	Coefficiente de corte en la dirección normal
$k_t$	=	Coefficiente de corte en la dirección tangencial
$k_a$	=	Coefficiente de corte en la dirección axial
$\beta$	=	Ángulo instantáneo que se forma entre la Fuerza $F$ y el vector normal a la superficie en corte
$F_x$	=	Fuerza $F$ proyectada en la dirección $x$ .
$F_y$	=	Fuerza $F$ proyectada en la dirección $y$ .
$F_z$	=	Fuerza $F$ proyectada en la dirección $z$ .
$\phi_j$	=	Ángulo de rotación del diente $j$ de la herramienta
$\phi_e$	=	Ángulo de entrada del diente al corte en la pieza
$\phi_s$	=	Ángulo de entrada del diente al corte en la pieza
$T$	=	Torque instantáneo
$P$	=	Potencia instantánea
$D$	=	Diámetro de la herramienta
$r$	=	Radio de la herramienta
$f_d$	=	Frecuencia de paso de los dientes
$\chi$	=	Ángulo de retardo del corte para una herramienta helicoidal
$\kappa'$	=	Ángulo entre el eje de la herramienta y la superficie normal para el corte axial $dz$ para una herramienta de punta esférica
$\theta$	=	Es la longitud de arco de una herramienta de punta esférica para un determinado $dz$
$m$	=	Masa perturbada
$k$	=	Constante de elasticidad

$\omega_n$	=	Frecuencia natural de vibración
$t$	=	Tiempo
$c$	=	Coefficiente de amortiguación
$\zeta$	=	Factor de amortiguamiento
$r$	=	Relación entre la frecuencia de excitación $\omega$ y la frecuencia natural $\omega_n$
$FRF$	=	Función de transferencia del sistema
$\psi$	=	Ángulo de fase entre la fuerza y el desplazamiento
$FRF_{re}$	=	Parte real de la función de transferencia
$FRF_{im}$	=	Parte imaginaria de la función de transferencia
$n$	=	Vector normal a la superficie en corte
$\tau$	=	Es el período de la pasada de los dientes
$g$	=	función escalón
$\Delta x$	=	Diferencia de desplazamiento dinámico de la herramienta en la dirección $x$ entre el corte anterior y el consecutivo
$\Delta y$	=	Diferencia de desplazamiento dinámico de la herramienta en la dirección $y$ entre el corte anterior y el consecutivo#
$a_{xx}$	=	Coefficiente dinámico direccional en $x$ de las fuerzas variantes en el tiempo
$a_{yy}$	=	Coefficiente dinámico direccional en $y$ de las fuerzas variantes en el tiempo#
$a_{xy}$ y $a_{yx}$	=	Coefficientes dinámicos direccionales cruzados de las fuerzas variantes en el tiempo#
$\omega_{diente}$	=	Frecuencia de paso de los dientes
$\alpha_{xx}$	=	Factor direccional promedio en la dirección $x$

- $\alpha_{yy}$  = Factor direccional promedio en la dirección  $y$
- $\alpha_{xy}$  y  $\alpha_{yx}$  = Factores direccionales promedios cruzados
- $FRF_{xx}$  = Función de transferencia en la dirección  $x$
- $FRF_{yy}$  = Función de transferencia en la dirección  $y$
- $FRF_{xy}$  = funciones de transferencias cruzadas
- $b_{lim}$  = Profundidad de corte axial crítica
- $\Lambda$  = Autovalores de la ecuación cuadrática de los Factores direccionales y funciones de transferencia
- $\Lambda_{Re}$  = Parte Real de  $\Lambda$
- $\Lambda_{Im}$  = Parte Imaginaria de  $\Lambda$
- $\kappa$  = Relación de  $\Lambda_{Im}$  entre  $\Lambda_{Re}$

## ÍNDICE

INTRODUCCIÓN .....	1
CAPÍTULO I.....	3
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	3
FORMULACIÓN DEL PROBLEMA .....	5
OBJETIVOS.....	7
Objetivo General.....	7
Objetivos Específicos .....	7
ALCANCE .....	8
ANTECEDENTES .....	8
RECURSOS DISPONIBLES .....	11
CAPÍTULO II.....	13
MARCO TEÓRICO .....	13
Proceso de Manufactura .....	13
El Fresado .....	14
Movimientos Fundamentales de una Fresadora .....	16
Clasificación de las Fresadoras.....	16
Partes de la Fresadora .....	19
Sistemas de Sujeción de la Herramienta.....	21
Sujeción de la Pieza .....	22
Mecánica del Proceso de Corte.....	23
Formación de Viruta .....	25
Espesor de Viruta en el Proceso de Fresado .....	27
Análisis de Fuerzas en el Corte.....	29
Fuerzas Dinámicas de Corte en el Fresado.....	33
Mecánica de una Herramienta Helicoidal.....	37
Mecánica de una Herramienta con Punta Esférica .....	41
Vibraciones Mecánicas.....	44
Vibraciones en Máquinas Herramientas .....	45

Vibraciones Libres.....	47
Vibraciones Forzadas.....	52
Vibraciones Autoexcitadas .....	57
Tipos de Retemblado .....	59
Predicción del Retemblado Regenerativo y Lóbulos de Estabilidad.....	60
Test de Impacto por Matillo .....	76
CAPÍTULO III.....	78
MARCO METODOLÓGICO .....	78
Desarrollo del Código Computacional .....	78
Modo de Funcionamiento del Algoritmo .....	79
Nomenclatura Utilizada en el Código para la Generación de los Lóbulos de Estabilidad .....	80
DEPURACIÓN DE LOS LÓBULOS.....	84
Valor Mínimo del Límite de la Profundidad de Corte.....	85
Intersección de las Curvas .....	85
Cálculo de las Fuerzas Dinámicas del Corte bajo Condiciones Estables.....	100
Modo de Funcionamiento del Algoritmo .....	101
Nomenclatura Utilizada en el Código para la Generación de los Gráficos de Fuerzas.....	102
Diagrama de Flujo del Algoritmo Utilizado para la Generación de los Gráficos de Fuerzas.....	104
Código Desarrollado para la Generación de los Gráficos de Fuerzas.....	105
CAPÍTULO IV.....	108
ANÁLISIS Y COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS.....	108
ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LAS FUERZAS PRODUCIDAS POR EL PROCESO DINÁMICO DE CORTE BAJO CONDICIONES ESTABLES .....	114
CONCLUSIONES .....	119
RECOMENDACIONES.....	121
BIBLIOGRAFÍAS .....	123

## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Figura 1: Detalles de una pieza mecanizada con fresadora, (a) Sin Retemplado y, (b) Con Retemplado.....	9
Figura 2: Esquema de una Fresa Vertical .....	15
Figura 3: Fresado Horizontal .....	17
Figura 4: Fresadora Vertical Fritz Werner .....	18
Figura 5: Fresadora Universal.....	19
Figura 6: Partes de la fresadora.....	21
Figura 7: Operación de fresado frontal y varias herramientas de corte .....	24
Figura 8: Varias operaciones de fresado .....	25
Figura 9: Formación de Viruta.....	26
Figura 10: Esquema de la formación de viruta .....	27
Figura 11: Esquema de un Fresado Periférico. ....	28
Figura 12: Definición del Ángulo de Corte de la Herramienta.....	29
Figura 13: Diagrama de fuerzas en el corte. ....	31
Figura 14: Fuerza de Corte en un proceso de fresado.....	34
Figura 15: Proyección de las Fuerzas de Corte en el plano cartesiano .....	35
Figura 16: Geometría de una Herramienta Típica Helicoidal para Fresadora .....	38
Figura 17: Esquema del Corte con una Herramienta Helicoida.....	39
Figura 18: Vista desenvuelta de una Herramienta Helicoidal.....	40
Figura 19: Versión seccionada de la vista desenvuelta de una herramienta helicoidal .....	40
Figura 20: Geometría de una Herramienta con punta Esférica.....	42
Figura 21: Geometría para la profundidad de corte $d_b$ en una herramienta con punta esférica. ....	43

Figura 22: Modelo simple de un sistema masa-resorte.....	48
Figura 23: Sistema masa-resorte-amortiguador y diagrama de cuerpo libre .....	49
Figura 24: Modelo de un sistema masa-resorte-amortiguador con una fuerza aplicada .....	53
Figura 25: Diagrama de cuerpo libre de la Figura 17 .....	54
Figura 26: Parte real e imaginaria de la función de transferencia.....	56
Figura 27: Diagrama de Argand. Representación vectorial de la FRF .....	57
Figura 28: Visualización del efecto de Retemblado Regenerativo en un proceso de Fresado Frontal .....	59
Figura 29: Variación de la normal a la superficie de corte debido al corte del diente anterior .....	61
Figura 29.1: Geometría del Espesor de Viruta Instantánea para un Proceso de Fresado .....	63
Figura 30: Vista Desenvuelta del Espesor de Viruta Instantánea en un Proceso de Fresado .....	63
Figura 31: Notación para el análisis de estabilidad por las series de Fourier .....	65
Figura 32: Test de Impacto por martillo .....	77
Figura 33: Limpieza de lóbulos.....	84
Figura 34: Limpieza de lóbulos.....	86
Figura 35: Lóbulos depurados.....	87
Figura 36: Comparación de resultados.....	110
Figura 37: Comparación de resultados.....	111
Figura 38: Lóbulos de estabilidad para Acero AISI 1045 .....	112
Figura 39: Lóbulos de estabilidad para Acero AISI 1020 .....	113
Figura 40: Lóbulos de estabilidad para el Aluminio Al 6061 T6 .....	113

Figura 41: Diagrama de Fuerzas para una Herramienta de 4 dientes rectos, para una operación de fresado en oposición .....	114
Figura 42: Diagrama de Fuerzas utilizando los mismos datos de la figura 41 .....	115
Figura 43: Diagrama de Fuerzas para una Herramienta de 4 dientes rectos, para una operación de fresado en concordancia .....	116
Figura 44: Diagrama de Fuerzas utilizando los mismos datos de la figura 41. ....	116
Figura 45: Diagrama de Fuerzas para una Herramienta de 4 dientes rectos, para una operación de fresado en concordancia con múltiples dientes cortando a la vez .....	117
Figura 46: Diagrama de Fuerzas utilizando los mismos datos de la figura 41. ....	118



## INTRODUCCIÓN

Hoy día en la industria manufacturera las máquinas herramientas juegan un papel importante porque con el uso de estas se logra una disminución en los tiempos de producción, y, por lo tanto, una reducción en los costos de fabricación.

Existe una diversidad de máquinas herramientas que son utilizadas para distintas tareas en los procesos de manufactura, entre las máquinas más destacadas se encuentran; el torno, la fresadora, la mandriladora, la rectificadora, etc. Entre estas máquinas herramientas la fresadora es una de las más utilizadas debido a su versatilidad para crear geometrías complejas de un sólo bloque de material, es por ello que es de vital importancia poder controlar su proceso de corte.

Con los avances tecnológicos se han logrado desarrollar fresadoras que trabajen a muy altas velocidades (por encima de las 40.0000 rpm) de manera que se pueda remover una gran cantidad de material en un periodo de tiempo relativamente corto, pero, trabajar bajo estas condiciones de velocidad trae como consecuencia que sea más difícil mantener la estabilidad del proceso de corte principalmente por las vibraciones que en este se presentan.

El retemblado es una de las formas de vibraciones más comunes en los procesos de corte de las máquinas herramientas; este reduce en gran medida la productividad de los mismos. Un pobre acabado superficial y una reducción en la vida útil tanto de la máquina como de la herramienta de corte son los resultados comunes asociados a este fenómeno.

Las vibraciones por retemblado se deben a las interacciones dinámicas entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo. Bajo ciertas condiciones las amplitudes de las vibraciones crecen volviendo al sistema de corte inestable pudiendo hacer que la herramienta salte de la pieza de trabajo.

La predicción del retemblado entre la herramienta y la pieza de trabajo es de vital importancia como una guía para que el operario pueda seleccionar una profundidad de corte y velocidad de rotación del husillo adecuado, resultando esto en una máxima tasa de remoción de material sin la presencia de estas vibraciones indeseables. Esto puede ser realizado por distintos métodos.

Muchos modelos matemáticos se han desarrollado para tratar de predecir las condiciones de corte más efectivas. Estos modelos son usados para predecir los límites de estabilidad del proceso de corte, los cuales pueden ser representados de manera gráfica en lo que se conoce como lóbulos de estabilidad que son una función de las velocidades de rotación del husillo y las profundidades de corte de la herramienta. Una selección adecuada de estos dos parámetros puede maximizar la tasa de remoción de material de un proceso de corte haciendo que este sea más eficiente. El objeto de esta tesis es utilizar uno de estos modelos matemáticos y traducirlos en un algoritmo computacional que genere un código que suministre de forma gráfica la información necesaria al operario sobre cuáles son las condiciones óptimas de trabajo.

# CAPÍTULO I

## *PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA*

En la industria manufacturera la fresadora juega un papel elemental debido a la gran variedad de mecanizados que se pueden realizar con esta máquina herramienta. Por ejemplo, en la industria automotriz se pueden fabricar piezas tales como engranes de transmisión o el bloque de un motor; también tiene amplia aplicación en la industria aeronáutica, como por ejemplo, en la fabricación de los álabes de las turbinas de un avión y partes del fuselaje, entre otras cosas.

Existen una variedad de fresadoras que se diferencian según el sector industrial donde se usen, de manera que se tiene una diversidad de mecanizados que cumplen con estándares de calidad rigurosos. Para cumplir con estos estándares se tiene que profundizar, entre otras cosas, en el estudio de la estabilidad del proceso de corte para garantizar la fabricación de piezas a una alta tasa de producción a un bajo costo manteniendo un alto nivel de calidad, y esto se logra principalmente con una disminución de los tiempos de mecanizado. En el caso de las fresadoras esto se obtiene maximizando la tasa de remoción de material sin llegar a comprometer el acabado superficial de la pieza y las tolerancias requeridas para la fabricación de la misma.

Uno de los problemas que se presenta en el proceso de fresado al querer cumplir con las características antes descritas son las vibraciones mecánicas, estas producen un acabado deficiente en las piezas, afectando completamente las precisiones deseadas requiriendo, en algunos casos, de un tratamiento posterior que ocasionará mayores costos de producción; también disminuyen la vida útil de los elementos de la máquina y de la herramienta de corte lo cual suele producir frecuentes paradas de máquinas por mantenimiento y consecuentemente una disminución en la productividad. Si bien las vibraciones no son el único factor que

puede disminuir la vida útil de los elementos de una máquina, es uno de los más importantes, y con el que se tiene que tener especial cuidado y control.

En los procesos de mecanizado se presentan diferentes tipos de vibraciones, unas transmitidas por las fundaciones de las máquinas herramientas (vibraciones libres), otras se transmiten como consecuencias de desbalanceos o deterioros en las piezas de la máquina (vibraciones forzadas), éstas son de fácil detección y supresión si se siguen los debidos controles de mantenimiento. Existe un tercer tipo de vibración que es generada y mantenida por las fuerzas presentes en el proceso de corte y es llamada retemblado (conocido comúnmente en inglés como *chatter*<sup>3</sup>). Retemblado significa la inestabilidad dinámica del proceso de remoción de material.

El retemblado no es fácil de controlar por simple inspección porque depende de muchos factores que influyen en su generación, tales como: la velocidad de avance de la herramienta, profundidad de corte, velocidad rotacional de la herramienta, el espesor de viruta instantánea no deformada, propiedades mecánicas de la herramienta de corte y de la pieza a ser trabajada, etc. Existen fresadoras modernas que incluyen sistemas de detección y control de vibraciones por retemblado, pero muchas otras que se encuentran en uso no cuentan con estos sistemas, lo que motiva la necesidad de aplicación de un método teórico que permita predecir las vibraciones por retemblado en el proceso de fresado que ayude a ajustar los parámetros de corte, lo que haría más eficiente el proceso de mecanizado; traduciéndose en mayor tiempo de vida para la máquina y la herramienta, un mejor rendimiento en la producción, menor tiempo invertido en mantenimiento y mayores ganancias económicas para la empresa.

---

<sup>3</sup>En Inglés el uso hecho que, con relación a las máquinas-herramientas, la palabra *chatter* exprese específicamente las vibraciones que se generan por la acción de la herramienta. No es *chatter* la vibración producida por el desequilibrio de una pieza giratoria.

## **FORMULACIÓN DEL PROBLEMA**

La predicción de vibraciones por retemblado entre la herramienta de corte y la pieza de trabajo es de vital importancia, orientaría al operario de manera que este pudiera seleccionar una profundidad de corte y velocidad de rotación de la herramienta que optimizara el proceso de corte, resultando esto en una máxima tasa de remoción de material sin que se presenten vibraciones indeseables.

La predicción del retemblado puede ser realizada por algunos métodos, entre los cuales se pueden mencionar:

- (1) Modelo de retemblado ortogonal. Originalmente desarrollado por Tustly, Koenigsberger<sup>4</sup> y Tobías<sup>5</sup>, es un modelo de un grado de libertad, donde se asume que la dirección de las fuerzas de corte así como las vibraciones proyectadas sobre el espesor de viruta son constantes, lo cual es cierto para operaciones con un solo punto de corte como torneado, taladrado y escariado. Este modelo presenta una relación simple entre la máxima profundidad de corte, rigidez de la estructura y la constante de corte específica del proceso. Las ecuaciones de dicho método dan la máxima profundidad de corte con una linealidad proporcional a la rigidez dinámica e inversamente proporcional a la constante de corte.
  
- (2) Modelo lineal de dos grados de libertad con dominio de las frecuencias. Desarrollado por Y. Altintas. En este modelo las fuerzas dinámicas que gobiernan las vibraciones son convertidas desde el dominio del tiempo al dominio de las frecuencias, es decir, se elimina la variable tiempo y se trabaja en función de variaciones de la frecuencia alrededor de la mayor

---

<sup>4</sup> Koenigsberger, F., y Tustly, J., (1967), "Machine Tool Structures-Vol. I: Stability Against Chatter", Pergamon Press

<sup>5</sup> Tobias, S.A., (1965), "Vibraciones en Maquinas Herramientas". Ediciones Urmo. Bilbao. 389 p.

frecuencia natural del sistema. En este método se usa el teorema de Floquet<sup>6</sup> y las series de Fourier para la formulación de la estabilidad en el proceso de fresado, y luego es resuelto por el criterio de Nyquist<sup>7</sup>.

(3) Modelo de semi-discretización del tiempo. Desarrollado por Insperger y Stépán<sup>8</sup>. El objetivo de este modelo consiste en discretizar el término de retardo de las ecuaciones dinámicas del proceso de fresado mientras que el tiempo actual dominante no sufre cambios lo que resulta en un mapa discreto dimensional finito de las ecuaciones diferenciales de retardo.

(4) Método de Elementos Finitos. Desarrollado por P.V. Bayly y J. E. Halley<sup>9</sup>. Este método consiste en el uso de múltiples elementos finitos en el dominio del tiempo, donde la posición y velocidad del diente de corte son igualados al principio y al final de cada elemento. La fuerza de corte regenerativa depende de los valores del desplazamiento del período anterior y una versión discreta del sistema es obtenida. Los autovalores resultantes del mapa lineal determinan la estabilidad. Este método solo ha sido utilizado para modelos de corte de un grado de libertad y sus resultados han sido confirmados experimentalmente.

En este trabajo se usará el modelos teórico lineal de dos grados de libertad para predecir el fenómeno de retemblado en el proceso de fresado. Este modelo se traducirá en un algoritmo computacional que genere un código computacional (haciendo uso del software MatLab8®) que permita obtener las gráficas de lóbulos de estabilidad de dicho proceso.

---

<sup>6</sup> **Teorema de Floquet:** es una rama de la teoría de ecuaciones diferenciales relativa a la clase de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de la forma  $\dot{x} = A(t)x$  donde  $A(t)$  es una función periódica continua de periodo  $T$ .

<sup>7</sup> **El Criterio de Nyquist,** fue nombrado así después de que Harry Nyquist proveyera una simple prueba para la estabilidad de un control de un sistema a lazo cerrado después de examinar el sistema a lazo abierto de la gráfica de Nyquist.

<sup>8</sup> Insperger, T., y Stépán, G., (2000), "Stability of the Milling Process, Periodica Polytechnica", 44:47-57.

<sup>9</sup> Bayly, P. V., Halley, J. E., Davies, M. A., (2000), "Stability Analysis of Interrupted Cutting with Finite Time in the Cut," ASME Publication MED-Vol. 11, Proceedings of the ASME Manufacturing Engineering Division, pp. 989-996.

## **OBJETIVOS**

### ***Objetivo General***

El objetivo de este trabajo de grado es predecir la aparición del fenómeno de retemblado en un proceso de fresado mediante un código computacional, que permita generar los lóbulos de estabilidad.

### ***Objetivos Específicos***

- Desarrollar una formulación teórica de las ecuaciones que modelan el fenómeno de retemblado.
- Implementar las ecuaciones para las vibraciones por retemblado en el proceso de fresado.
- Desarrollar un código computacional en MatLab8® que permita resolver las ecuaciones resultantes y determinar las curvas de estabilidad (lóbulos de estabilidad) del proceso de fresado.
- Comparar las curvas de estabilidad obtenida, con las extraídas de las referencias bibliográficas.

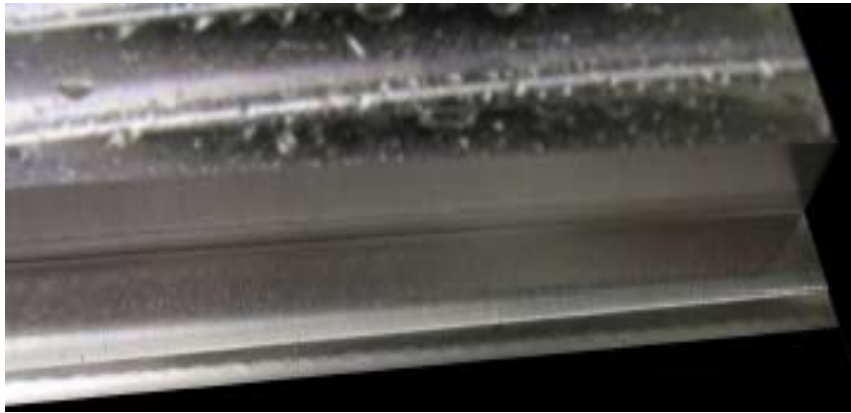
### ***ALCANCE***

- Desarrollar un código computacional para generar los lóbulos de estabilidad que permita al operador de fresadoras usarlo en un proceso de fresado para ajustar los parámetros de corte.
- La información proporcionada por el código computacional se verificará y comparará con modelos existentes, tanto a nivel nacional como internacional.
- Ofrecer al operador de fresadoras, estudiantes de ingeniería y al profesional de la Ingeniería Mecánica la información referente al fenómeno de retemblado aplicado a procesos de fresado y, con el uso del código, obtener un rango de velocidades del husillo en el cual no se presente el fenómeno de retemblado en función de las profundidades de corte.

### ***ANTECEDENTES***

Durante el proceso de fresado, a la combinación particular de velocidad rotacional de la pieza y profundidad de corte se puede producir el retemblado. Este es un fenómeno indeseable, haciendo que la superficie de la pieza trabajada no quede lisa como producto de grandes vibraciones en la herramienta de corte (Figura 1). Por otra parte también se produce un rápido desgaste de la máquina y de la herramienta.





(a)



(b)

**Figura 1: Detalles de una pieza mecanizada con fresadora, (a) Sin Retemblado y, (b) Con Retemblado (Fuente: “Chatter Prediction and Control for High-Speed Milling: Modelling and Experiments”. Ronald Fassen, 2007)**

El retemblado no solo se presenta en el proceso de fresado sino también en otros procesos de maquinado, tales como torneado, rectificado y mandrilado. Taylor fue el primero en descubrir y describir el retemblado en el año 1907. Él dijo que el retemblado es *“el más oscuro y delicado de todos los problemas con los que se enfrenta el maquinista”*. No fue sino hasta finales de 1950 que Tobías y Tlustý iniciaron el estudio del retemblado en máquinas estableciendo las bases de la teoría del retemblado regenerativo.

En los primeros intentos que se hicieron para describir la fuente del retemblado se consideró como condición necesaria la existencia de una fuerza de amortiguación negativa, la cual en vez de ser consumidora de energía, por el contrario alimenta de energía al sistema vibratorio. Luego, identificaron la estructura dinámica de la máquina herramienta y la retroalimentación producida por los cortes subsecuentes sobre la misma superficie como la fuente más importante de vibraciones por retemblado la cual denominaron el efecto regenerativo. Sridhar (1968), fue el primero en introducir los coeficientes de fuerza de corte variables en el tiempo en el modelado de estabilidad de retemblado en el fresado. Minis y Yanushevsky (1990) utilizaron el teorema de Floquet y las series de Fourier para formular la estabilidad del fresado y resolvieron numéricamente utilizando el criterio de Nyquist. Altintas y Budak, en 1995, desarrollaron una aproximación de la estabilidad del proceso de corte haciendo una determinación analítica de los límites de estabilidad. Esta aproximación fue verificada por ensayos numéricos y experimentales. Esta metodología es práctica por su simplicidad. Ismail y Tlusty describieron el comportamiento dinámico de la fresadora e investigaron las zonas límites entre el comportamiento estable e inestable. Altintas y Spence (1991) presentaron un mecanismo de corte mucho más detallado para predecir las fuerzas de corte en el fresado.

Smith y Tlusty en 1991 construyeron un diagrama punto a punto donde evaluaron los resultados de múltiples corridas de simulación de un proceso de fresado en el dominio del tiempo. Campomanes y Altintas en 2003 propusieron un coeficiente no dimensional de retemblado utilizado para predecir el espesor de viruta. En éste método, el espesor máximo de viruta ocurre durante una simulación con un sistema de mecanizado flexible y luego lo compararon con un sistema rígido. Li Cheng en 2003 sugirió una aproximación similar en el cual el coeficiente es calculado con la fuerza resultante en vez del espesor máximo de viruta. Schmitz, en 2003, examinó los datos para cada revolución de los dientes y calculó la variación estática entre el espesor de viruta nominal y el espesor de viruta con perturbaciones generadas

por el diente anterior, siendo la que tenga mayor variación un buen indicador del retemblado.

Kondo, Kawano y Sato en 1981, Tlusty e Ismael en 1982, Tobías y Shi en 1984 estudiaron el retemblado múltiple regenerativo, el cual ocurre si las amplitudes de las vibraciones producidas por el efecto regenerativo se hacen considerablemente grandes de manera que la herramienta pierde contacto con la pieza de trabajo. En 1989, Rivin y Kang aumentaron la amortiguación de una herramienta de corte usando placas de acero y caucho con ciertas propiedades viscoelásticas para diseñar un mecanismo de sujeción que produce una menor tendencia a que se produzca el fenómeno de retemblado.

### ***RECURSOS DISPONIBLES***

Se utilizarán los siguientes recursos:

- Sala de computadoras de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela (UCV).
- Programas que sirvan como herramienta para la redacción del informe, las ecuaciones planteadas y la presentación de la tesis (Microsoft Offices: Word, Excel, Power Point, etc).
- Software computacional MatLab8®.
- Publicaciones de artículos de investigación y trabajos referentes al tema.

- Libros referentes al tema de vibraciones mecánicas, vibraciones en máquinas herramientas y vibraciones autoexcitadas. También se hará uso de libros de aplicación y uso del software.
- Se hará uso de la biblioteca de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la UCV, y de la biblioteca central de la UCV.
- Internet.

## ***CAPÍTULO II***

### ***MARCO TEÓRICO***

#### ***Proceso de Manufactura***

Para definir el concepto de manufactura es necesario tomar un tiempo y mirar los objetos que nos rodean y darnos cuenta que esos objetos en algún momento tenían una forma diferente, otros con materiales diferentes de los cuales no se encuentran en su forma natural debido a que la materia prima ha pasado por una serie de procesos y ensamblada para poder llegar a la forma de un producto final. Toda esa serie de procesos por el cual pasa la materia prima se le define como manufactura.

La palabra *manufactura* proviene del latín *manus factus*, que significa hecho a mano. Es el proceso que transforma la materia prima en un producto para un fin específico. Involucra el diseño del producto, selección de la materia prima y la secuencia de procesos de maquinado a través de los cuales es sometida la misma para llegar a la forma del producto final.

Existe una amplia variedad de procesos para elaborar un producto y por lo general es necesario más de un método de procesamiento en su fabricación. A continuación se mencionan los procesos más utilizados:

- (a) ***Fundición:*** consiste en agregar metal fundido en un molde con la forma deseada, al solidificarse el material fundido es extraído del molde. El molde puede ser desechable o permanente.

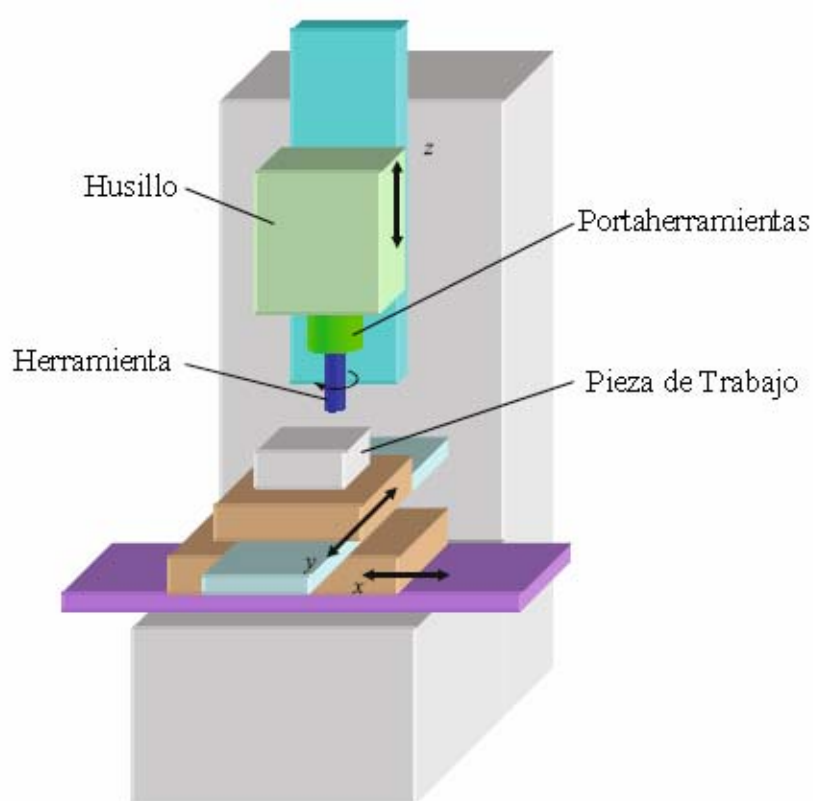
- (b) **Formado y Conformado:** consiste en darle forma al metal mediante la aplicación de una fuerza hasta llegar a una deformación plástica controlada. Entre los procesos se puede mencionar: laminación, forja, extrusión, embutido, pulvimetalurgia, moldes.
- (c) **Mecanizado:** es un proceso de fabricación por arranque de viruta mediante una herramienta de una o más aristas de corte dependiendo del tipo de mecanizado, tales como: torneado, taladrado, barrenado, fresado, cepillado, brochado, esmerilado, etc.
- (d) **Unión:** la unión por soldadura con o sin aporte de material, unión por difusión, unión adhesiva y unión mecánica son métodos de sujeción más utilizados en procesos de manufactura.
- (e) **Acabado:** los acabados se entienden como una etapa de manufactura de primera línea, considerando los requerimientos actuales de los productos. Entre los procesos se mencionan: asentado, lapeado, pulido, desbarbado, bruñido, tratamiento superficial, recubrimiento y depósito.

Este trabajo especial de grado se enfocará en el estudio del Fresado como proceso de mecanizado, su mecánica de corte y las vibraciones que en este proceso se presenta por el fenómeno conocido por retemblado, el cual se tratará más adelante.

### ***El Fresado***

Es un proceso de manufactura por arranque de viruta que consiste en una herramienta rotatoria (fresa) la cual se encuentra sujeta a un portaherramientas el cual está conectado al husillo que le proporciona la velocidad rotacional a la misma. Tal herramienta generalmente tiene múltiples aristas de corte ubicadas simétricamente con respecto al eje de rotación. La herramienta tiene un movimiento de avance

constante relativo a la pieza de trabajo de manera que se elimine progresivamente una determinada cantidad de material de la pieza de trabajo hasta obtener la geometría y dimensiones finales requeridas. La máquina herramienta utilizada para realizar este proceso se llama fresadora, donde los modelos tradicionales tienen tres ejes perpendiculares con libertad de movimiento entre sí. Sobre un plano donde se monta la pieza a ser mecanizada hay dos ejes de movimiento y el otro eje sobre el cual es montada la herramienta es ortogonal a dicho plano. Sin embargo, existen fresadoras modernas utilizadas para mecanizar piezas con contornos no prismáticos; este tipo de fresadoras además de los movimientos tradicionales también poseen la capacidad de rotar sobre cada uno de estos tres ejes de movimiento. En la figura 2 se muestra un esquema de una fresadora vertical tradicional, aunque vale la pena mencionar que también existen configuraciones horizontales de fresadoras.



**Figura 2: Esquema de una Fresa Vertical (Fuente: “Machining Dynamics Frequency Response to Improved Productivity”. Tony L. Schmitz. Pág 100. 2009)**

## ***Movimientos Fundamentales de una Fresadora***

El corte se produce por el movimiento rotativo de la herramienta y al entrar en contacto las aristas de corte con la pieza de trabajo. Existen tres movimientos de avance fundamentales en los procesos de fresado convencionales, tales como:

***Fresado Frontal:*** el avance de la herramienta es perpendicular al eje de giro de la misma, la profundidad de corte es en dirección axial, el acabado superficial se genera con la cara frontal de los dientes de la herramienta y el corte se produce por filos que se encuentra en la periferia de la misma.

***Fresado Periférico:*** el avance de la herramienta es perpendicular al eje de giro de la misma, la profundidad de corte es en dirección radial, el corte es producido por filos periféricos.

***Fresado de Avance Axial:*** tanto el avance y la profundidad de corte son en dirección axial, el corte es producido por los filos que se encuentran en la cara frontal de la herramienta, por lo general, se taladra hasta la profundidad deseada para luego realizar el movimiento en dirección radial.

## ***Clasificación de las Fresadoras***

Las fresadoras se pueden clasificar dependiendo de la dirección del eje de giro y por la cantidad de ejes que operan simultáneamente. A continuación se describe la clasificación según la dirección del eje de giro:

***Fresadoras Horizontales:*** el eje de rotación de la fresa es paralelo a la superficie de la pieza que se va a maquinar. Utiliza fresas cilíndricas que se montan en el eje horizontal acoplado al cabezal de la máquina y el otro extremo al rodamiento ubicado



en el otro lado de la corredera superior. Su función principal es realizar ranurado con diferentes perfiles o formas de la ranura. Uno de los usos más comunes de este tipo de fresas es el mecanizado de engranajes.



*Figura 3: Fresado Horizontal (Fuente: <http://autorneto.com/referencia/ciencia/maquinado-de-engrane-recto/>)*

**Fresadora Vertical:** la dirección del eje de giro de la herramienta de corte es perpendicular a la mesa de trabajo, en esta máquina se pueden realizar fresado frontales que consisten en un avance perpendicular al eje de giro y una profundidad de corte en dirección axial. Se puede desplazar verticalmente, ya sea el husillo o la mesa de trabajo; si el husillo permanece estacionario durante una operación de corte y la mesa se mueve tanto paralelamente como perpendicularmente a la dirección del eje de giro del husillo, se dice que es una fresadora de torreta. Si la mesa de trabajo sólo se mueve perpendicularmente a la dirección del eje de giro del husillo se dice que es una fresadora de banco fijo.



*Figura 4: Fresadora Vertical Fritz Werner (Fuente: [www.cemioperu.tripod.com/fresadoras.html](http://www.cemioperu.tripod.com/fresadoras.html))*

**Fresadora Universal:** se le llama fresadora universal ya que pueden cumplir la función tanto de una fresadora vertical como horizontal. La máquina fresadora universal se caracteriza por la multitud de aplicaciones que tiene; cuenta con un husillo principal para el acoplamiento de ejes portaherramientas horizontales y un cabezal que se acopla a dicho husillo y que convierte la máquina en una fresadora vertical. Su principal característica la constituye su mesa que se inclina y que puede bascular tanto hacia la izquierda como hacia la derecha en  $45^\circ$ . Esta disposición sirve con ayuda del cabezal divisor para fresar ranuras espirales. Los tres movimientos de la mesa en sentido vertical, longitudinal y transversal se pueden efectuar a mano y automáticamente en ambos sentidos. Topes regulables limitan automáticamente la marcha en el punto deseado. En las manivelas que sirven para mover la mesa hay discos graduados que permiten ajustes finos. Su ámbito de aplicación está limitado principalmente por el costo y por el tamaño de las piezas que se pueden trabajar. En

las fresadoras universales, al igual que en las horizontales, el puente es deslizante, puede desplazarse de adelante hacia atrás y viceversa sobre unas guías.



*Figura 5: Fresadora Universal (Fuente: [www.am-per.com.ar/infousadas-6-4-Fresadora+Universal+Puzzi+N2.html](http://www.am-per.com.ar/infousadas-6-4-Fresadora+Universal+Puzzi+N2.html))*

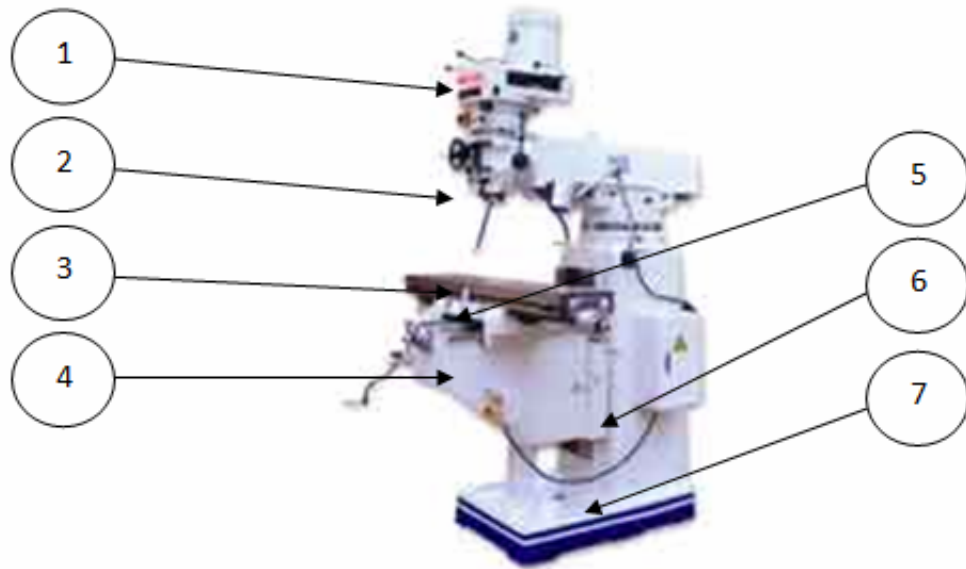
### ***Partes de la Fresadora***

A continuación se nombran las partes básicas que se encuentran en la fresadora. La enumeración hace referencia a la figura 6:

- (1) ***Cabezal:*** Contiene un husillo y los sujetadores de fresas. En las máquinas verticales, el cabezal puede ser fijo o se puede ajustar verticalmente e inclinarse en un plano vertical, en la columna, para cortar superficies oblicuas.
  
- (2) ***Portaherramientas:*** Se define como portaherramientas al operador que une la herramienta de corte con las características de la máquina herramienta donde operan, en particular las fresadoras. Su principal función es transmitir el

movimiento de rotación del mecanismo de accionamiento alojado en el interior del bastidor.

- (3) **Mesa de Trabajo:** La mesa tiene superficie maquinada con mucha precisión sobre la cual se puede agarrar la pieza a trabajar, o ser soportada en un tornillo o sostén adecuado. La mesa está provista de ranuras en T para usar en el amarre de las piezas.
- (4) **Consola o Rodilla:** La consola se desliza verticalmente sobre las guías del cuerpo y sirve de sujeción para la mesa. Soporta la silla y comunica el movimiento vertical a la mesa para poder ajustar la profundidad de corte.
- (5) **Columna:** El cuerpo o bastidor tiene forma de columna y se apoya sobre la base. Habitualmente es de fundición aleada y estabilizada. La columna tiene en la parte frontal unas guías templadas y rectificadas para el movimiento de la consola y unos mandos para el accionamiento y control de la máquina.
- (6) **Silla:** También llamado carro transversal, se encuentra entre la mesa de trabajo y la consola, su principal función es permitir el movimiento transversal de la mesa de trabajo con respecto al eje de giro de la herramienta de corte.
- (7) **Base:** La base permite un apoyo correcto de la fresadora en el suelo. Al igual que la columna es de fundición aleada y por lo general suelen ser una sola pieza.



*Figura 6: Partes de la fresadora (Fuente: [http://maquinas-fresadoras.com/images/fresadoras\\_verticales\\_03\\_x6325b.jpg](http://maquinas-fresadoras.com/images/fresadoras_verticales_03_x6325b.jpg))*

### ***Sistemas de Sujeción de la Herramienta***

Según el mecanismo de sujeción la herramienta de corte se pueden clasificar en fresas con mango cilíndrico, mango cónico y para montar en árbol.

El sistema de sujeción para las fresas de mango cilíndrico consiste en utilizar mandriles con pinzas para poder fijarlos al portaherramientas. En algunos casos, la fresa tiene un agujero en el mango y se fijan empleando un tornillo o eje prisionero que se adaptan por un lado a la fresa mediante un roscado y por el otro lado disponen de un cono para montarse al husillo de la máquina.

La fresa de mango cónico, a excepción de las fresas grandes, se monta al portaherramientas utilizando un mandril o un manguito intermedio de forma que el

alojamiento tiene la misma conicidad que el mango de la fresa. Este tipo de conicidades están normalizadas en según las normas ISO o los conos Morse.

Para la sujeción de fresas de eje horizontal o de montaje sobre árbol tienen un agujero central para acoplar el eje del portaherramientas, cuyo diámetro esta normalizado. La herramienta, dispone de un chavetero que evita el deslizamiento entre la fresa y el árbol y asegurar la rotación. De ser necesario, es posible acoplar varias fresas simultáneamente en lo que se denomina tren de fresado.

### ***Sujeción de la Pieza***

Para conseguir una correcta fijación de las piezas en la mesa de trabajo de una fresadora se utilizan diversos dispositivos. El sistema de sujeción que se adopte debe permitir que la carga y la descarga de las piezas en la mesa de trabajo sean rápidas y precisas, garantizar repetitividad de las posiciones de las piezas y su agarre con una rigidez suficiente. Además, el sistema de sujeción empleado debe garantizar que la herramienta de corte pueda realizar los recorridos durante las operaciones de corte sin chocar con ningún utillaje.

Existen dos tipos principales de dispositivos de fijación: las bridas de apriete y las mordazas, siendo estas últimas las más usuales. Las mordazas empleadas pueden ser de base fija o de base giratoria. Las mordazas de base giratoria están montadas sobre un plato circular graduado. Las mordazas pueden ser de accionamiento manual o de accionamiento hidráulico. Las mordazas hidráulicas permiten automatizar la apertura y el cierre de las mismas así como la presión de apriete. Las mesas circulares, los platos giratorios y los mecanismos divisores son elementos que se colocan entre la mesa de la máquina y la pieza para lograr orientar la pieza en ángulos medibles. El plato divisor es un dispositivo que se fija sobre la mesa de la máquina y permite realizar operaciones espaciadas angularmente respecto a un eje de la pieza a

mecanizar. Se utiliza para la elaboración de engranajes, prismas, escariadores, ejes ranurados, etc.

### ***Mecánica del Proceso de Corte***

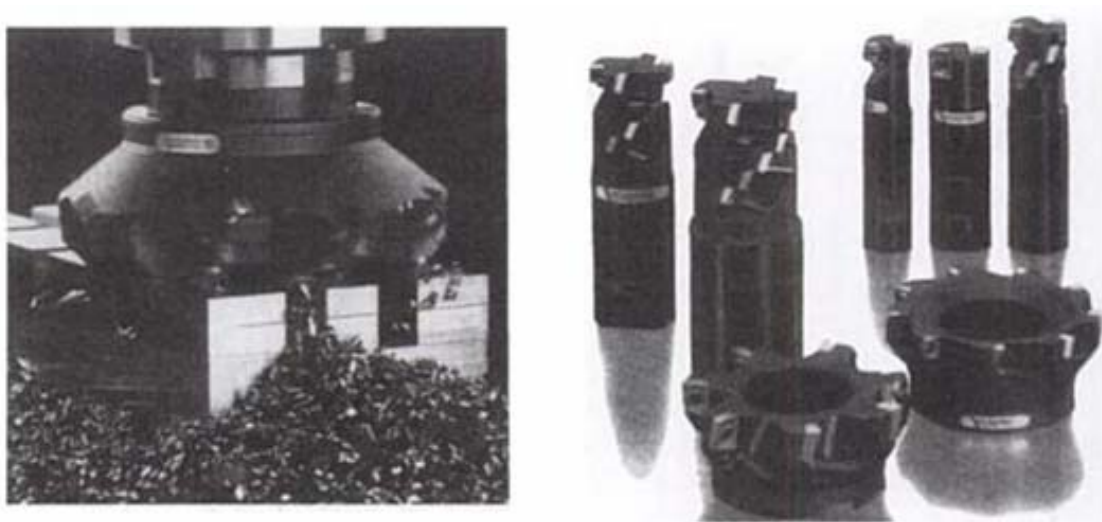
El corte del metal en máquinas herramientas, tiene como finalidad fundamental dar forma a la pieza de trabajo mediante la remoción del material sobrante en forma de viruta. Para realizar este proceso, se requiere una gran cantidad de energía concentrada en la zona de corte, la mayor parte de dicha energía es utilizada para separar el metal en forma de viruta, el resto es absorbida por la fricción ocasionando altas temperaturas y por la deformación elástica en los elementos de la máquina herramienta. La herramienta de corte está diseñada para soportar los esfuerzos, el desgaste y las altas temperaturas generadas por el proceso de corte; en la actualidad, con la creación de materiales más resistentes los procesos de mecanizado por arranque de viruta son más rápidos y eficientes.

El estudio del corte en metales es complicado debido a la gran cantidad de factores que hay que tomar en cuenta y que se mencionan a continuación:

- Material, recubrimientos y estado de la herramienta.
- Forma, acabado superficial y filos de la herramienta.
- Materia, estado y temperatura de la pieza.
- Parámetros de corte, tales como velocidad, avance y profundidad de corte.
- Fluidos del corte.
- Características de la máquina herramienta como por ejemplo rigidez y amortiguamiento.
- Sujeción y soporte de la pieza.
- Tipo de viruta.
- Fuerza y energía disipadas en el proceso.

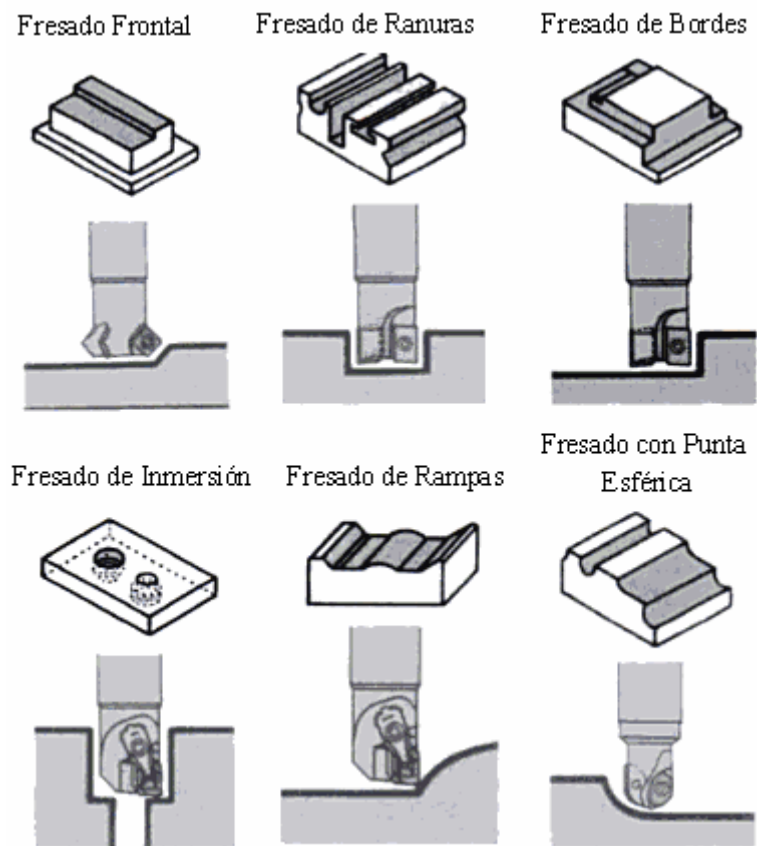
- Aumento de la temperatura de la pieza, la viruta y la herramienta.
- Desgaste y falla de la herramienta.
- Acabado superficial producido en la pieza después de maquinarla.

Una operación de fresado es un proceso de corte intermitente usando un cortador (una herramienta) con uno o más dientes donde dicha herramienta se hace girar con un movimiento de avance hacia la pieza de trabajo. Un ejemplo de una operación de fresado frontal se muestra en la figura 7 junto con varias herramientas de corte. Dependiendo de la geometría requerida, varias herramientas de corte y máquinas son utilizadas. En la figura 8 se muestran varias operaciones de corte en fresado con distintos tipos de herramientas.



*Figura 7: Operación de fresado frontal y varias herramientas de corte (Fuente: “Manufacturing Automation”. Yusuf Altintas. 2006)*



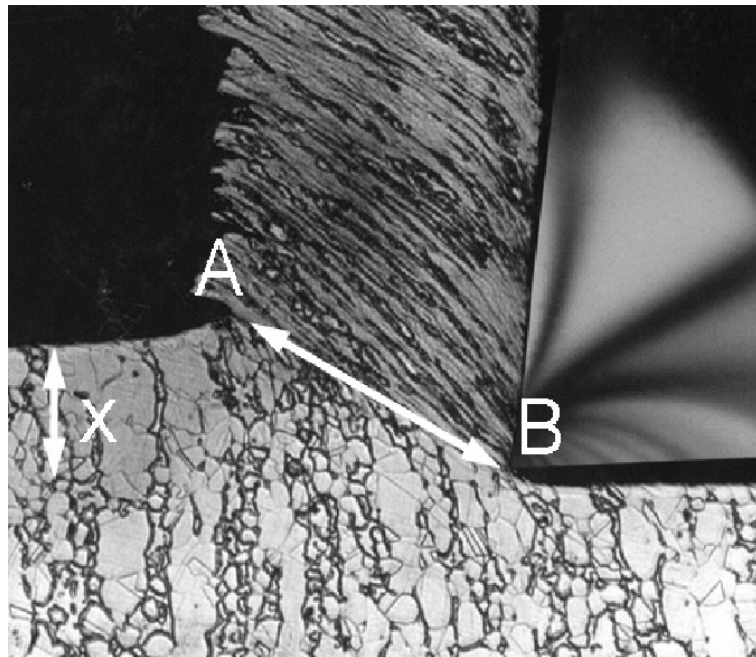


*Figura 8: Varias operaciones de fresado (Fuente: "Manufacturing Automation". Yusuf Altintas. Pág 35. 2006)*

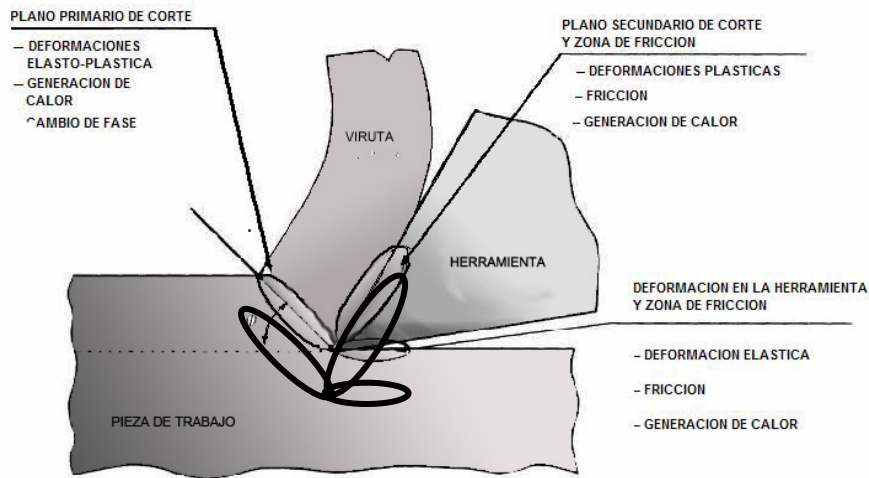
### **Formación de Viruta**

Unas de las características fundamentales en un proceso de maquinado, es la formación de la viruta. En la figura 9 se puede observar el proceso de formación de la viruta durante el corte del metal, donde la herramienta de corte se aproxima desde el lado derecho y la viruta aumenta en forma ascendente. Se han realizado exámenes microscópicos y se ha descubierto que la viruta se produce por el proceso de cizallamiento, acción que se genera en la zona de cizallamiento o plano de corte. Este plano forma un ángulo con la superficie de la pieza llamado ángulo de corte. El

grosor original de la viruta o la profundidad de corte es señalado como la distancia “X” y es comparado con el grosor de viruta después del corte señalada con la línea “A-B”, la deformación se puede observar claramente. Por debajo del plano cortante, la pieza se encuentra sin deformación y por arriba la viruta ya formada va creciendo de forma ascendente en la cara de la herramienta, simultáneamente con el avance. El contacto entre la viruta y la superficie de la cara en la herramienta de corte produce una zona de gran presión y fricción por el desplazamiento de la viruta generando el calentamiento de la herramienta de corte y la pieza de trabajo.



*Figura 9: Formación de Viruta (Fuente: “Modeling of MetalCutting”. C. Rademakers. Pág. 8. 2007)*



**Figura 10: Esquema de la formación de viruta (Fuente: “Modeling of MetalCutting”. C. Rademakers. Pág. 9. 2007)**

La elevada temperatura produce cambios en las propiedades del material de tal forma que la ductilidad del mismo aumente ocasionando defectos en el acabado superficial de la pieza.

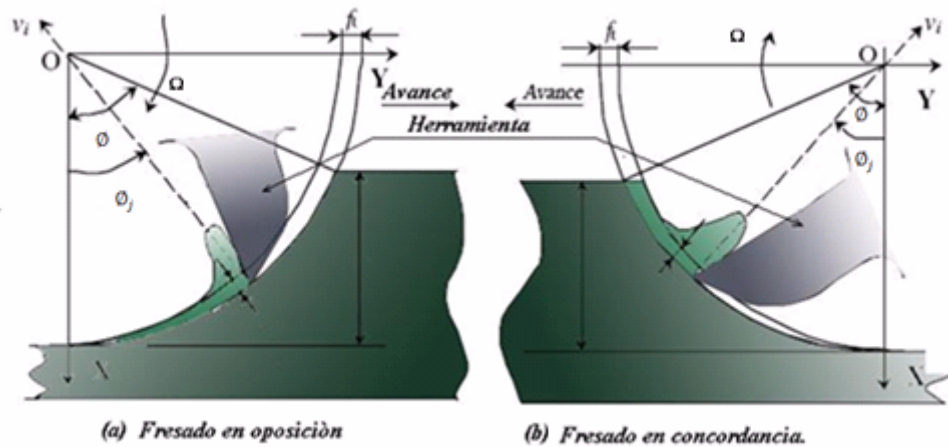
### ***Espesor de Viruta en el Proceso de Fresado***

En el fresado se presentan básicamente tres tipos de operaciones. De acuerdo al tipo de operación la viruta que se forma crece o decrece a medida que el filo de la herramienta va cortando la pieza de trabajo. Estas operaciones de fresado son:

***Fresado de Cara Completa:*** Donde los ángulos de entrada y salida del filo de corte de la herramienta relativo a la pieza de trabajo son distintos de cero. Esta operación de fresado ocasiona grandes cargas pulsantes sobre la máquina herramienta. No es recomendable para máquinas ligeras (medianas o pequeñas).

**Fresado en Concordancia (up milling):** En esta operación de fresado la viruta es mínima al inicio del corte y va aumentando a medida que el diente de la herramienta va avanzando a través de la pieza. El ángulo de entrada del filo de corte de la herramienta es cero y el ángulo de salida es distinto de cero. Esta operación de fresado es comúnmente usada para cortes ligeros, donde se obtienen mejores acabados superficiales.

**Fresado en Oposición (down milling):** En esta operación de fresado la viruta es máxima al inicio del corte y va disminuyendo a medida que el diente de la herramienta va avanzando a través de la pieza. El ángulo de entrada del filo de corte de la herramienta es distinto de cero y el ángulo de salida es 180 grados. Esta operación de fresado es usada comúnmente para grandes remociones de metal donde el golpeteo es reducido.



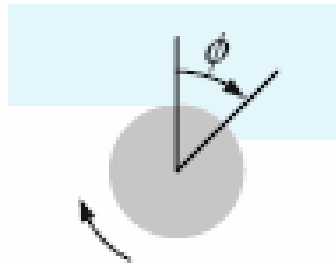
**Figura 11: Esquema de un Fresado Periférico.**

En una operación de fresado cada diente de la herramienta describe una trayectoria de paso Cicloidal, produciendo un espesor de viruta variable y periódico por cada intervalo de paso del diente. Sin embargo como el avance lineal es

relativamente pequeño con respecto a la velocidad rotacional de la herramienta y al radio de la misma, la trayectoria del paso de los dientes se puede aproximar como una serie de círculos. Esta aproximación ofrece suficiente precisión para los objetivos de esta tesis. De manera que el espesor de viruta se puede expresar como:

$$h(\phi) = f_z \sin \phi \quad (2)$$

Donde  $\phi$  como se puede observar en la figura 12 es el ángulo rotacional de la herramienta. El avance por diente  $f_z$  esta descrito en términos del avance lineal  $f$ , velocidad rotacional  $\Omega$  y el número de dientes en la herramienta  $N_d$ .



*Figura 12: Definición del Ángulo de Corte de la Herramienta.*

$$f_z = \frac{f}{\Omega N_d} \quad (2.1)$$

### **Análisis de Fuerzas en el Corte**

La fuerza de cizallamiento y el ángulo del plano de cizallamiento están afectados por la fuerza de rozamiento de la viruta y la contra cara de la herramienta.

La fuerza de rozamiento depende de muchos factores, desde qué tan lisa es la superficie de la herramienta y qué tan afilada, hasta los materiales de la herramienta y la pieza de trabajo, la velocidad de corte y la forma de la herramienta.

Las fuerzas sobre la herramienta de corte para un material dado dependen de un número de consideraciones:

1. Las fuerzas no cambian significativamente con un cambio en la velocidad de corte.
2. A mayor avance de la herramienta, mayores fuerzas.
3. A mayor profundidad de corte, mayores fuerzas.
4. La fuerza tangencial aumenta con el tamaño de la viruta.
5. La fuerza longitudinal disminuye si el radio de la punta se hace más grande o si el ángulo del filo lateral cortante aumenta.

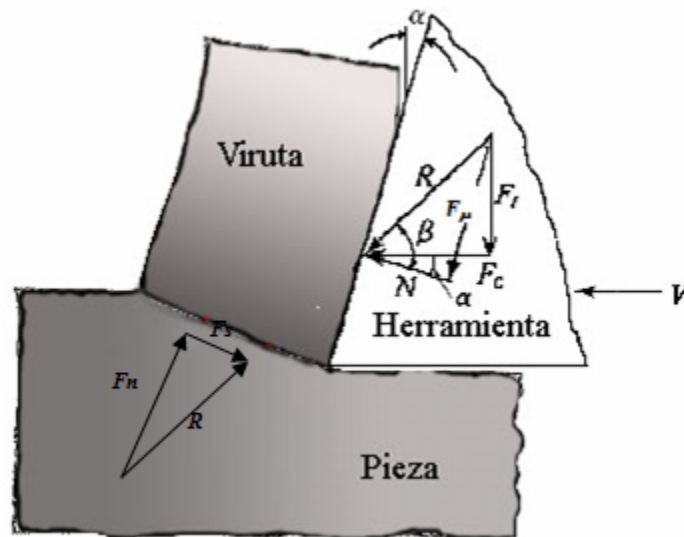
Desde otro punto de vista, es de gran utilidad conocer la fuerza y la potencia en las operaciones de corte por las siguientes razones:

- Se debe conocer los requerimientos de potencia para poder seleccionar la potencia mínima requerida para generar el corte.
- Los datos de fuerza de corte se requieren para diseñar una forma correcta de la máquina herramienta y evitar distorsiones en los elementos y mantener las tolerancias dimensionales en la pieza acabada, las herramientas y sus sujetadores, así como los soportes de la pieza.

Conociendo el valor de la fuerza de corte se puede optimizar la producción de una pieza, de forma tal que la pieza pueda soportar la fuerza sin tener una deformación plástica.

La figura 13, muestra un caso general de las fuerzas que actúan en un proceso de corte ortogonal, la Fuerza de Corte  $F_c$  actúa en dirección de la velocidad de corte,  $V$ , y suministra la fuerza para que se produzca el corte. La Fuerza de Empuje  $F_t$  actúa en dirección normal a la velocidad de corte. Al realizar la suma vectorial de dichas fuerzas se obtiene la Fuerza Resultante  $R$ .

De la misma manera, la fuerza resultante se puede descomponer en dos fuerzas en la cara de la herramienta: una es la Fuerza de Fricción  $F_f$ , ubicada en la zona de contacto entre la viruta y la cara de la herramienta y la Fuerza Normal  $N$ , que es perpendicular a esta.



*Figura 13: Diagrama de fuerzas en el corte (Fuente: "Manufactura, Ingeniería y Tecnología". Kalpakjian. 2002).*

Donde se deduce que:

$$F = R \sin \beta \quad (2.2)$$

$$N = R \cos \beta \quad (2.3)$$

Es de notar, que la fuerza resultante está equilibrada por una fuerza igual y opuesta a lo larga del plano de corte y de igual manera se descompone en la Fuerza de Cizallamiento  $F_s$ , y la Fuerza Normal  $F_n$ . Se demuestra que las fuerzas se pueden descomponer de la siguiente manera:

$$F_s = F_c \cos \phi_c - F_t \sin \phi_c \quad (2.4)$$

$$F_n = F_c \sin \phi_c - F_t \cos \phi_c \quad (2.5)$$

Al conocer el ángulo del plano cortante  $\phi_c$ , y la profundidad de corte, se podría calcular el área de dicho plano y los esfuerzos cortante y normal.

Para el cálculo del coeficiente de fricción,  $\mu$ , entre la superficie de contacto entre la herramienta y la viruta, y el ángulo de fricción  $\alpha$ , se puede deducir de la siguiente manera:

$$\mu = \frac{F F_t + F_c \tan \alpha}{N F_c - F_t \tan \alpha} \quad (2.6)$$

El coeficiente de fricción de corte en los metales está en el rango aproximado de los 0.5 y 2, lo que indica que entre la viruta y la herramienta se generan elevadas fuerzas de roce oponiéndose al movimiento ascendente por la cara de la herramienta. Los esfuerzos locales en la zona de corte y las presiones sobre la herramienta son elevados debido a que el área de contacto es muy pequeña.



Es necesario saber el valor de la fuerza de empuje, ya que el portaherramientas debe ser lo suficientemente rígido para soportar dicha fuerza sin que existan deformaciones considerables. De ser lo contrario, es decir, de no ser lo suficientemente rígido el portaherramientas, si la fuerza es lo suficientemente alta, ésta empujará y apartará la herramienta de la superficie de maquinado, ocasionando cambios en la profundidad de corte, desperfectos superficiales, vibraciones que pueden llegar a producir el fenómeno de retemblado.

### ***Fuerzas Dinámicas de Corte en el Fresado***

Las fuerzas dinámicas de corte en un proceso de fresado, a diferencia del torneado, no son constantes. Estas dependen del espesor de viruta instantánea y como ya se señaló en la ecuación (2), pero a la vez el espesor de viruta depende del ángulo de corte que igualmente varía con el tiempo. Las fuerzas de corte también dependen de la cantidad de dientes cortando simultáneamente el metal.

Para el desarrollo de las ecuaciones de la fuerza de corte se supone el uso de una herramienta y pieza de trabajo totalmente rígida, es decir, que no sufren deformaciones elásticas. También se asume un ángulo de hélice en el filo de la herramienta igual a cero ( $\gamma = 0$ ), por lo que se estudiará el caso de una herramienta para fresado frontal con dientes rectos incrustados. Luego se hará la extensión para el huso de una herramienta helicoidal y una herramienta con punta esférica. De esta manera podemos expresar la fuerza de corte como una fuerza específica en función del área de viruta.

$$F = K_s A = K_s b h \quad (2.7)$$

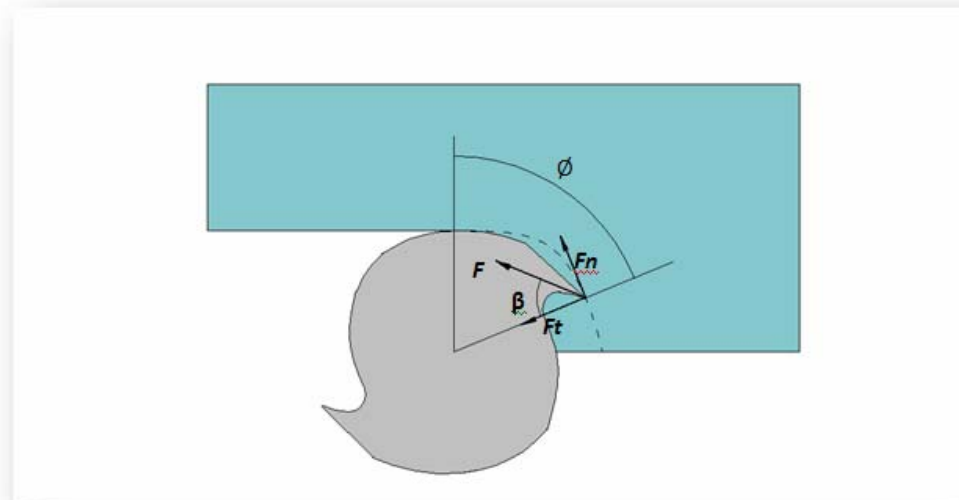
Donde  $K_s$  es un coeficiente de corte,  $b$  es la profundidad axial de corte y  $h$  es el espesor de viruta instantáneo el cual viene dado por la ecuación (2).

Podemos descomponer la fuerza de corte en las componentes tangencial y normal de la siguiente manera:

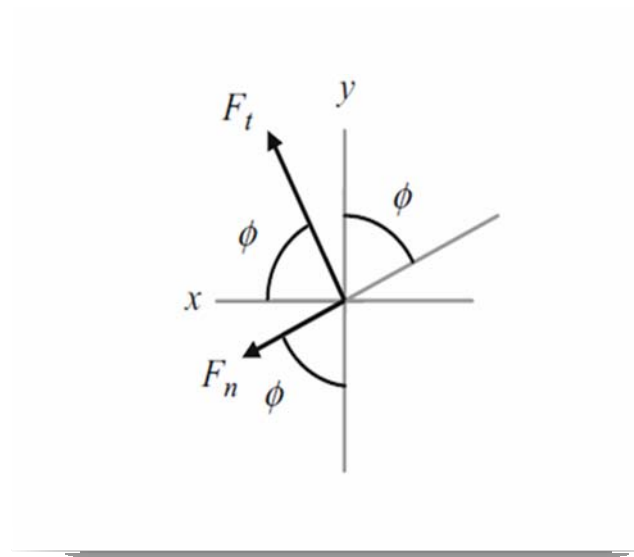
$$F_n = \cos(\beta)K_sbh = k_nbh \quad (2.8)$$

$$F_t = \sin(\beta)K_sbh = k_tbh \quad (2.9)$$

Donde  $\beta$  es el ángulo instantáneo que se forma entre la normal a la superficie de corte y la fuerza de corte resultante,  $k_t$  y  $k_n$  son las constantes de corte en las direcciones tangencial y normal respectivamente. Las figuras 14 y 15, muestran la fuerza de corte resultante producida por el filo de uno de los dientes de la herramienta, y el ángulo  $\beta$  que se forma entre dicha fuerza y la normal a la superficie de corte.



*Figura 14: Fuerza de Corte en un proceso de fresado.*



*Figura 15: Proyección de las Fuerzas de Corte en el plano cartesiano*

Para describir estas fuerzas analíticamente es conveniente proyectarlas en el sistema cartesiano, es decir,  $X$  e  $Y$  de la siguiente manera:

$$F_x = F_t \cdot \cos(\phi) + F_n \cdot \sin(\phi) \quad \# \quad (2.10)$$

$$F_y = F_t \cdot \sin(\phi) - F_n \cdot \cos(\phi) \quad \# \quad (2.11)$$

$$F_z = F_a \quad (2.12)$$

Como se está tratando con una herramienta para fresado frontal con dientes incrustados y se asume un ángulo de hélice igual a cero, entonces  $F_z = 0$ . Esta fuerza axial será tomada en cuenta más adelante para los otros tipos de herramientas.

Sustituyendo la fuerza tangencia y la normal de las ecuaciones (2.8) y (2.9), y el espesor instantáneo de viruta dado en la ecuación (2) se obtiene lo siguiente:

$$F_x = k_t \cdot b \cdot f_c \cdot \text{sen}(\phi) \cdot \cos(\phi) + k_n \cdot b \cdot f_c \cdot \text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\phi) \quad \# \quad (2.13)$$

$$F_y = k_t \cdot b \cdot f_c \cdot \text{sen}(\phi) \cdot \text{sen}(\phi) - k_n \cdot b \cdot f_c \cdot \text{sen}(\phi) \cdot \cos(\phi) \quad (2.14)$$

Las ecuaciones (2.13) y (2.14) son válidas únicamente para cuando se cumple el caso de que un solo diente está cortando a la vez la pieza de trabajo, pero en muchos casos se presenta que dos dientes o más están cortando simultáneamente la pieza, para el cálculo de las fuerzas de corte con múltiples dientes cortando simultáneamente se tiene que la siguiente ecuación:

$$F_x = \sum_{j=1}^{N_c} k_t \cdot b \cdot f_c \cdot \text{sen}(\phi_j) \cdot \cos(\phi_j) + k_n \cdot b \cdot f_c \cdot \text{sen}(\phi_j) \cdot \text{sen}(\phi_j) \quad \# \quad (2.15)$$

$$F_y = \sum_{j=1}^{N_c} k_t \cdot b \cdot f_c \cdot \text{sen}(\phi_j) \cdot \text{sen}(\phi_j) - k_n \cdot b \cdot f_c \cdot \text{sen}(\phi_j) \cdot \cos(\phi_j) \quad \# \quad (2.16)$$

Donde  $j$  indica el diente que está cortando, para lo cual se tiene que cumplir que:

$$\phi_0 \leq \phi_j \leq \phi_2$$

La fuerza resultante instantánea viene dada por:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (2.17)$$

El torque instantáneo de corte viene dado por:

$$T_c = \frac{D}{2} \sum_{j=1}^{N_c} F_{c,j}(\phi_j) = \frac{D}{2} k_t b f_c \sum_{j=1}^{N_c} \text{sen}(\phi_j) \rightarrow \phi_s \leq \phi_j \leq \phi_e \quad (2.18)$$

Donde  $D$  es el diámetro de la herramienta. La Potencia de corte instantánea requerida es:

$$P = V \sum_{j=1}^{N_c} F_{c,j}(\phi_j) \rightarrow \phi_s \leq \phi_j \leq \phi_e \quad (2.19)$$

De donde  $V = \pi D \Omega$  es la velocidad de corte para unas condiciones de corte dadas y  $D$  es el diámetro de la herramienta de corte.

Las fuerzas de corte, torque y potencia son uniformemente periódicas a la frecuencia de paso de los dientes  $f_d = \frac{nN_d}{60}$ . Las fuerzas de corte periódicas dinámicamente cargan y descargan la estructura de la máquina herramienta, la pieza de trabajo, y la herramienta en cada período del diente.

### ***Mecánica de una Herramienta Helicoidal***

Las cargas periódicas causan tensiones mecánicas cíclicas en la herramienta lo que produce el acortamiento de la vida útil de ésta. Herramientas helicoidales son usadas para disminuir las fuertes variaciones de fuerzas en los componentes oscilatorios de la fresa. Estas herramientas son utilizadas cuando la profundidad de corte es muy larga pero el ancho es pequeño en comparación. Una herramienta típica

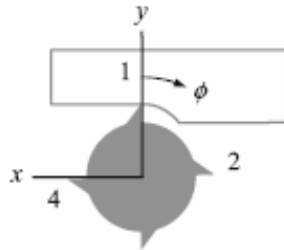
helicoidal para fresadora se muestra en la figura 16. La hélice en la herramienta provee un incremento gradual de la carga por la viruta a lo largo de la estría.



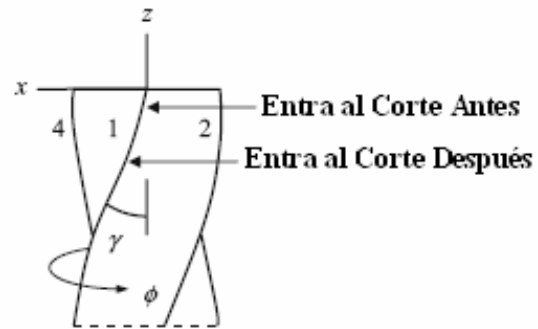
**Figura 16: Geometría de una Herramienta Típica Helicoidal para Fresadora (Fuente: “Manufacturing Automation”. Yusuf Altintas. Pag 40. 2006)**

A medida que la herramienta va cortando la pieza se presenta un retardo en el corte sobre cada punto axial de las estrías de dicha herramienta, el cual depende del ángulo de hélice  $\gamma$ . Cuando el punto de corte más bajo de una de las estrías de una herramienta helicoidal está a una inmersión  $\phi$  en la pieza, otro punto que está a una altura  $z$  justo por encima tendrá un ángulo de inmersión  $(\phi - \chi)$ , donde  $\chi$  es el ángulo de retardo. Obviamente el espesor de viruta sobre el eje de la estría será diferente en cada punto.

**Vista superior de la Herramienta**

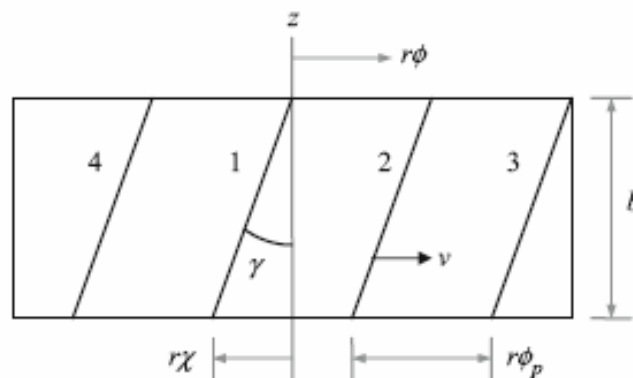


**Vista Lateral**



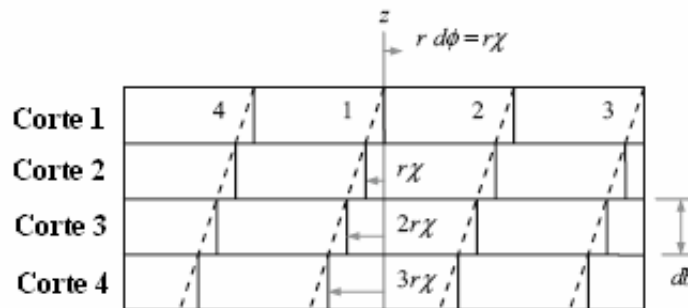
**Figura 17: Esquema del Corte con una Herramienta Helicoida (Fuente: “Machining Dynamics Frequency Response to Improved Productivity”. Tony L. Schmitz. Pág149. 2009)**

Podemos visualizar el ángulo de retardo  $\chi$ , el cual aumenta con la distancia axialmente desde la punta libre de la herramienta hasta el tope de profundidad axial de corte  $b$  desarrollando sobre un plano la periferia de dicha herramienta. Los dientes helicoidales ahora aparecen como líneas rectas. Con una dirección perpendicular al eje  $z$  se presenta la vista desenvuelta de la herramienta junto con el ángulo de retardo en la figura 18.



**Figura 18: Vista desenvuelta de una Herramienta Helicoidal. (Fuente: “Machining Dynamics Frequency Response to Improved Productivity”. Tony L. Schmitz. Pág 149. 2009)**

Como el espesor de viruta varía axialmente sobre las estrías de corte las ecuaciones de fuerzas dinámicas sobre la herramienta descrita en el apartado anterior no pueden ser aplicadas directamente. Para ello se tiene que dividir la profundidad axial de corte  $b$  en pequeñas partes de altura  $db$  y hacer la idea de que cada una de estas partes fuesen rectas, al sumar todas estas pequeñas partes  $db$  se obtienen las fuerzas sobre la herramienta en la dirección x e y del plano de referencia.



**Figura 19: Versión seccionada de la vista desenvuelta de una herramienta helicoidal (Fuente: “Machining Dynamics Frequency Response to Improved Productivity”. Tony L. Schmitz. Pág 150. 2009)**

De la figura 19 se obtiene la relación para las distancias de retardo entre cada uno de los cortes, la cual viene dada por la ecuación:

$$r\chi = db \tan \gamma \tag{2.20}$$



De esta ecuación se obtiene el ángulo de retardo en términos lineales, la cual viene dada como:

$$x = \frac{db \tan \gamma}{r} = \frac{2db \tan \gamma}{D} \quad (2.21)$$

De esta relación se obtiene también el valor de la profundidad de cada uno de los cortes, quedando así:

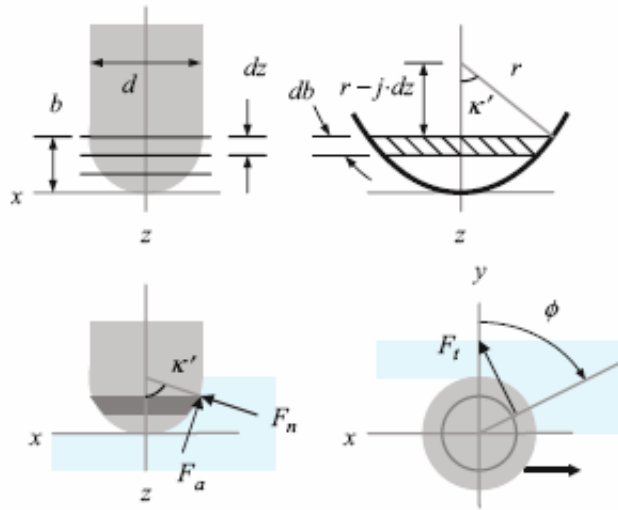
$$db = \frac{rx}{\tan \gamma} = \frac{Dd\phi}{2 \tan \gamma} \quad (2.22)$$

### ***Mecánica de una Herramienta con Punta Esférica***

En esta sección se hace una extensión de la herramienta helicoidal para una herramienta con punta esférica. Adicionalmente se asumirá que el eje de la herramienta es siempre perpendicular a la dirección de avance de la misma (en la práctica las herramientas de punta esféricas muchas veces son utilizadas con dirección del eje inclinada con respecto a la dirección de avance).

Como se puede observar en la figura 20 la profundidad de corte axial  $b$  es dividida en pequeñas partes  $dz$ . Quedando la expresión de  $dz$  como:

$$dz = \frac{Dd\phi}{2 \tan \gamma} \quad (2.23)$$



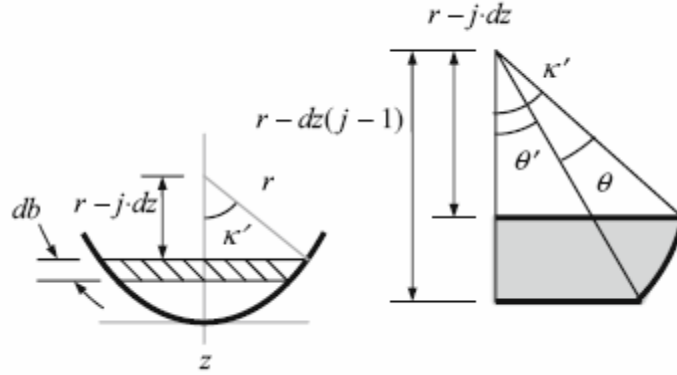
**Figura 20: Geometría de una Herramienta con punta Esférica (Fuente: “Machining Dynamics Frequency Response to Improved Productivity”. Tony L. Schmitz. Pág 157. 2009)**

Una nueva variable es identificada  $\kappa'$  la cual es el ángulo entre el eje de la herramienta y la superficie normal para el corte axial  $dz$ , cuyo valor viene dado por la siguiente ecuación:

$$\kappa' = \cos^{-1} \left( 1 - \frac{f \, dz}{r} \right) = \cos^{-1} \left( 1 - \frac{2f \, dz}{D} \right) \quad (2.24)$$

Donde  $i$  es el corte axial en cuestión y  $D$  es el diámetro de la herramienta.

Para el cálculo de  $db$ , es simple para una herramienta de geometría recta o plana; esto es ahora la longitud del arco del presente corte  $dz$  para una herramienta de punta esférica. La situación se describe en la figura 21 donde se puede observar que la longitud de arco es el producto del radio por el ángulo  $\theta$ . El ángulo  $\theta$  está definido como  $\theta = \kappa' - \theta'$ .



**Figura 21: Geometría para la profundidad de corte  $db$  en una herramienta con punta esférica**  
 (Fuente: “Machining Dynamics Frequency Response to Improved Productivity”. Tony L. Schmitz.  
 Pág 158. 2009).

$$db = r d\theta \quad (2.25)$$

$$\theta' = \cos^{-1}\left(\frac{r - dz(j-1)}{r}\right) = \cos^{-1}\left(1 - \frac{dz(j-1)}{r}\right) = \cos^{-1}\left(1 - \frac{2dz(j-1)}{D}\right) \quad (2.26)$$

Una vez calculado el espesor de viruta  $h$  y el ancho de viruta  $db$  los componentes de las fuerzas tangencial y normal pueden ser calculados con las ecuaciones (2.8) y (2.9) respectivamente. La fuerza axial puede ser calculada de manera similar con la siguiente ecuación:

$$F_a = k_a h db \quad (2.27)$$

Donde  $k_a$  es una constante de fuerza en la dirección axial.

Las fuerzas producidas en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$  para una herramienta con punta esférica vienen dadas por la siguiente ecuación:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_j & \text{sen} \phi_j \text{sen} \kappa' & -\text{sen} \phi_j \text{cos} \kappa' \\ \text{sen} \phi_j & -\text{cos} \phi_j \text{sen} \kappa' & \text{cos} \phi_j \text{cos} \kappa' \\ 0 & -\text{cos} \kappa' & -\text{sen} \kappa' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_c \\ F_n \\ F_a \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

### ***Vibraciones Mecánicas***

Las vibraciones mecánicas son un fenómeno que se refleja por oscilaciones presentes en un cuerpo o sistema, las cuales se pueden producir por la aplicación de una fuerza externa o por efecto del propio funcionamiento de una máquina o equipo.

En la mayoría de los procesos industriales las vibraciones mecánicas representan un problema ya que alteran el funcionamiento de las máquinas utilizadas en dichos procesos.

El estudio de las vibraciones mecánicas es algo esencial para todo ingeniero mecánico porque son indeseables en la mayoría de las máquinas; de modo que se debería tener la capacidad de determinar las causas de estas vibraciones para poner en funcionamiento algún método de supresión o disminución de las mismas.

Actualmente, el campo de estudio de las vibraciones mecánicas es un campo muy amplio dada su complejidad. El contenido discutido a continuación está formulado en el contexto de las máquinas herramientas, y proporciona información fundamental para el cumplimiento de los objetivos de esta investigación.

## ***Vibraciones en Máquinas Herramientas***

Las vibraciones en las máquinas herramientas son bien conocidas por causar problemas durante el maquinado, entre los cuales se pueden mencionar: desgaste de la herramienta, ruptura de la herramienta, desgaste y falla del husillo, acabado superficial inadecuado, ruido, calidad inferior del producto y un alto consumo de energía.

Las estructuras elásticas que se emplean en la construcción de máquinas herramientas muestran, generalmente, modos de vibración extremadamente complejos. Estos problemas de vibraciones pueden muchas veces simplificarse de una forma considerable si las estructuras utilizadas en la realidad (y compuestas de una cierta masa y elasticidad distribuidas) se sustituyen por modelos teóricos equivalentes compuestos de masas con resortes y amortiguadores. Las características dinámicas del modelo son, evidentemente, las que aseguran que su comportamiento vibratorio se asemeja todo lo posible al real.

En algunos casos, la vibración del sistema original puede reducirse a la vibración de un sistema compuesto de una masa equivalente única, un resorte y amortiguador equivalentes.

Las vibraciones pueden ser clasificadas de distintas maneras de acuerdo al número de posibles factores que intervienen en ellas. Por el momento, las vibraciones se clasifican en vibraciones libres, vibraciones forzadas y vibraciones autoexcitadas. Es útil identificar los tipos de vibraciones que se presentan en las máquinas herramientas para evitar cualquiera de las consecuencias ya mencionadas.

Las vibraciones se pueden modelar en uno, dos o infinitos grados de libertad. Se entiende por grados de libertad de un sistema mecánico el número de coordenadas que se requieren para definir la posición del sistema vibratorio en cualquier momento.

En máquinas herramientas se tiene, por ejemplo, que en el proceso de torneado las vibraciones presentes se pueden modelar en un grado de libertad, por el contrario en el proceso de fresado (objeto de estudio de esta investigación) las vibraciones se modelan mas apropiadamente con dos grados de libertad.

Las ecuaciones que describen los modos de vibración para un grado de libertad, son aplicables igualmente para dos o infinitos grados de libertad pero a cada uno de sus distintos modos de vibración.

El proceso de fresado es distinguido por una herramienta rotacional con uno o más dientes que remueven material mientras ésta se puede mover en diferentes ejes con respecto a la pieza de trabajo. El acoplamiento de cada diente en la pieza de trabajo es discontinuo en el proceso de fresado a diferencia del proceso de torneado. A medida que cada diente penetra el material, éste recibe un golpe seguidamente de una variación en la fuerza de corte. La excitación continua y la variación de la fuerza de corte inducen vibraciones entre la herramienta y la pieza de trabajo. Esto puede proveer la energía necesaria para excitar uno de los modos naturales de vibración en cualquier parte del sistema de mecanizado. Estas vibraciones deben ser minimizadas porque pueden, y frecuentemente lo hacen, que se degrade la exactitud del mecanizado y el acabado superficial. Por otra parte, en condiciones desfavorables estas vibraciones pueden volverse inestables, produciendo el fenómeno conocido como retemblado, el cual puede causar un desgaste acelerado de la herramienta o ruptura, un desgaste acelerado de la fresadora, e inclusive dañar la fresadora o las partes que la componen. Además este tipo de vibraciones disminuye enormemente la productividad de la empresa lo que se traduciría en pérdidas económicas.

Existen dos fuentes principales del retemblado en el proceso de fresado: a) Vibraciones Forzadas y b) Vibraciones Autoexcitadas. Estas fuentes de vibración serán explicadas más adelante.

## ***Vibraciones Libres***

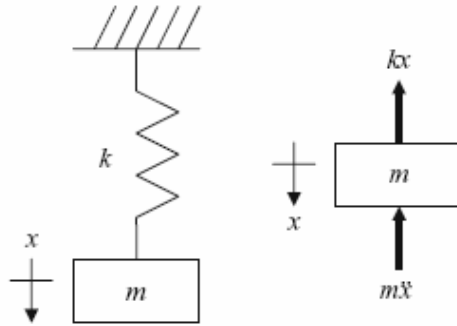
Si una fuente de energía externa es aplicada al sistema para iniciar las vibraciones y luego removida, las vibraciones resultantes en el sistema se conocen como vibraciones libres. En ausencia de fuerzas no conservativas, las vibraciones libres se mantienen y son periódicas.

Las vibraciones libres producen oscilaciones en una o más de las frecuencias naturales del sistema y, como todas las estructuras físicas tienen algún tipo de amortiguamiento (o disipación de energía), las oscilaciones producidas por vibraciones libres van decayendo y generalmente duran periodos cortos de tiempo.

En máquinas herramientas la acción de una excitación pulsante puede tratarse como vibraciones libres. Una excitación pulsante en una máquina herramienta puede tener origen como consecuencia de:

- Las fuerzas producidas por el contacto al corte de la herramienta de un proceso de fresado.
- Las fuerzas de inercia o el movimiento recíprocante de las partes móviles
- Las vibraciones transmitidas por los bastidores de las máquinas
- Imperfecciones en el material

Para la definición de las ecuaciones que describen las vibraciones libres se utilizará el siguiente esquema:



*Figura 22: Modelo simple de un sistema masa-resorte*

A la izquierda se observa el modelo compuesto de una masa rígida  $m$  colgada de un resorte (de masa despreciable) con coeficiente  $k$ , el cual provee de una fuerza proporcional al desplazamiento de la masa desde su posición de equilibrio. Como a la masa le está permitida solo movimiento vertical se trata de un sistema de un grado de libertad.

A la derecha se observa el diagrama de cuerpo libre del sistema. Haciendo sumatorias de fuerzas en la dirección  $x$  se obtiene la siguiente ecuación del sistema:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2.29)$$

Dadas las siguientes condiciones iniciales:

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$



La solución de la ecuación (2.29) es:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (2.30)$$

Donde  $x$  representa el desplazamiento en el tiempo  $t$   
 $x_0$  es el desplazamiento inicial de la masa

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$  Es la frecuencia natural no amortiguada

Ahora, agregándole amortiguación al sistema se tiene el siguiente diagrama:

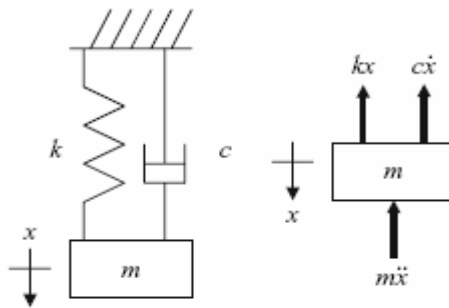


Figura 23: Sistema masa-resorte-amortiguador y diagrama de cuerpo libre

La forma general de la ecuación diferencial para vibraciones libres amortiguadas viene dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.31)$$

Donde  $c$  es el coeficiente de amortiguamiento del sistema.

Ahora dividiendo la ecuación (2.31) entre la masa se tiene:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (2.32)$$

La solución general de la ecuación es obtenida asumiendo lo siguiente:

$$x(t) = B e^{\alpha t} \quad (2.33)$$

Al sustituir la ecuación (2.32) en la ecuación (2.33) nos queda la siguiente ecuación cuadrática para  $\alpha$ :

$$\alpha^2 + \frac{c}{m}\alpha + \frac{k}{m} = 0 \quad (2.34)$$

La fórmula cuadrática es usada para obtener las soluciones de la ecuación (2.34), quedando:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (2.35)$$

El comportamiento vibratorio del sistema masa-resorte-amortiguador dependerá del término dentro de la raíz. Si  $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < 0$  se dice que el sistema es subamortiguado. Si  $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$  el sistema es críticamente amortiguado. Finalmente si  $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} > 0$  el sistema se conoce como sobreamortiguado. Para estos dos casos las vibraciones no ocurren debido a que el amortiguamiento es

generalmente bajo en ensamblaje de la herramienta en el proceso de fresado, se considerará solamente el caso subamortiguado en los análisis posteriores.

Se definirá entonces el factor de amortiguamiento  $\zeta$ , el cual es inherente a las propiedades de los parámetros del sistema.

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Este factor de amortiguamiento siempre será menor a 1 en el caso de las máquinas herramientas, según Yusuf Altintas  $\zeta < 0,05$  y en algunos casos hasta menor, por lo que siempre se tendrá el caso de vibraciones libres subamortiguadas.

Reescribiendo la ecuación (2.35) en términos de  $\zeta$  y  $\omega_n$  se tiene:

$$\alpha_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Quedando entonces la solución general de la ecuación (2.31):

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left( C_1 e^{\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}t} + C_2 e^{-\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}t} \right) \quad (2.36)$$

Donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes arbitrarias de integración. De la ecuación (2.36) es evidente que la naturaleza del movimiento depende del valor de  $\zeta$ . La ecuación (2.31) finalmente queda de la siguiente forma:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = 0$$

Esta es la ecuación diferencial estándar que gobierna las vibraciones libres con amortiguamiento.

### ***Vibraciones Forzadas***

Las vibraciones forzadas toman lugar cuando una excitación continua y periódica produce una respuesta en el sistema que se divide en dos partes, una respuesta debido a la vibración libre (que desaparece después de un tiempo) y una respuesta permanente con la misma frecuencia del sistema (que es el tipo de vibración predominante en este caso).

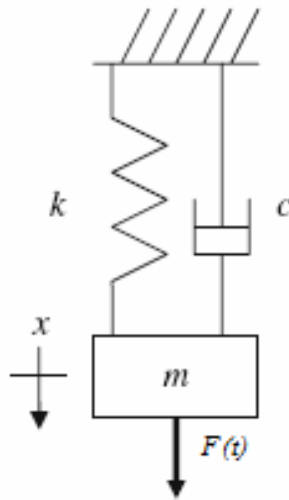
Para los sistemas de mecanizados en las operaciones de fresado, la herramienta, el porta herramienta y el husillo forman el ensamblaje de la herramienta, y la pieza de trabajo y sus accesorios forman el ensamblaje de trabajo. Cuando la excitación continua y la variación de la fuerza de corte son aplicadas al ensamblaje de la herramienta y de trabajo, estos inducen vibraciones en estas estructuras elásticas.

Las vibraciones forzadas tienen un gran impacto en el proceso de mecanizado cuando una o más de las frecuencias de la excitación continúa y la variación de fuerza de corte son iguales o cerca de uno de los modos de frecuencia natural del sistema de mecanizado. Si la frecuencia del paso de los dientes de la herramienta es igual o muy cercana a la frecuencia natural del ensamble de la herramienta, la variación cíclica de la fuerza de corte se excitará hasta llegar a resonancia y por lo tanto la herramienta vibrará excesivamente.

En un proceso de fresado de alta velocidad, si la velocidad del husillo es suficientemente alta para la frecuencia de pasada de los dientes de la herramienta hasta alcanzar una frecuencia natural del sistema de mecanizado, las vibraciones forzadas pueden llegar a generar retemblado. En este caso, el problema puede ser

eliminado seleccionando cuidadosamente una velocidad del husillo de manera que la frecuencia del paso de los dientes de la herramienta no sea igual o cercana a alguna de las frecuencias naturales del sistema de mecanizado una vez que estas sean identificadas. Por lo tanto, es vital tener las frecuencias naturales del sistema de mecanizado antes de realizar un proceso de corte.

A continuación se especificarán las ecuaciones que rigen las vibraciones forzadas para un grado de libertad. Para la definición del comportamiento genérico se tiene el siguiente esquema:



*Figura 24: Modelo de un sistema masa-resorte-amortiguador con una fuerza aplicada*

La masa  $m$  es perturbada por una excitación armónica de la forma  $F(t) = F_0 \sin(\omega t + \varphi)$ . Donde  $F$  es la amplitud de la fuerza,  $\omega$  es la frecuencia de excitación,  $t$  es el tiempo y  $\varphi$  es el ángulo de fase. Realizando el diagrama de cuerpo libre se tiene:

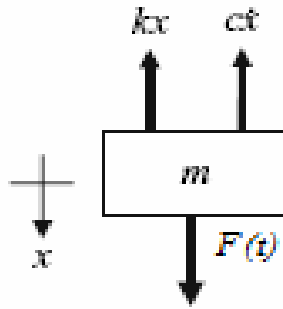


Figura 25: Diagrama de cuerpo libre de la Figura 17

Haciendo sumatoria de fuerzas en la dirección vertical se obtiene la ecuación diferencial que describe al sistema la cual viene dada por:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (2.37)$$

Es matemáticamente más conveniente utilizar funciones armónicas complejas en estas vibraciones poder desarrollar las ecuaciones a utilizar más adelante. Entonces se tiene que la fuerza armónica se puede expresar como  $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$  de manera que se puede asumir la solución a la ecuación (2.37) de la siguiente manera:

$$x(t) = X e^{i\omega t} \quad (2.38)$$

Al derivar la ecuación (2.38) una y dos veces se obtiene la velocidad y aceleración respectivamente, quedando lo siguiente:

$$\dot{x}(t) = i\omega X e^{i\omega t} \quad (2.39)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 X e^{i\omega t} \quad (2.40)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación (2.37) se tiene que:

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k)X e^{i\omega t} = f e^{i\omega t} \quad (2.41)$$

La amplitud y ángulo de fase resultantes de la ecuación (2.41) son las siguientes:

$$FRF = \left| \frac{X}{F_0} \right| = \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (2.42)$$

$$\psi = \tan^{-1} \left( \frac{2\zeta r}{1-r^2} \right) \quad (2.43)$$

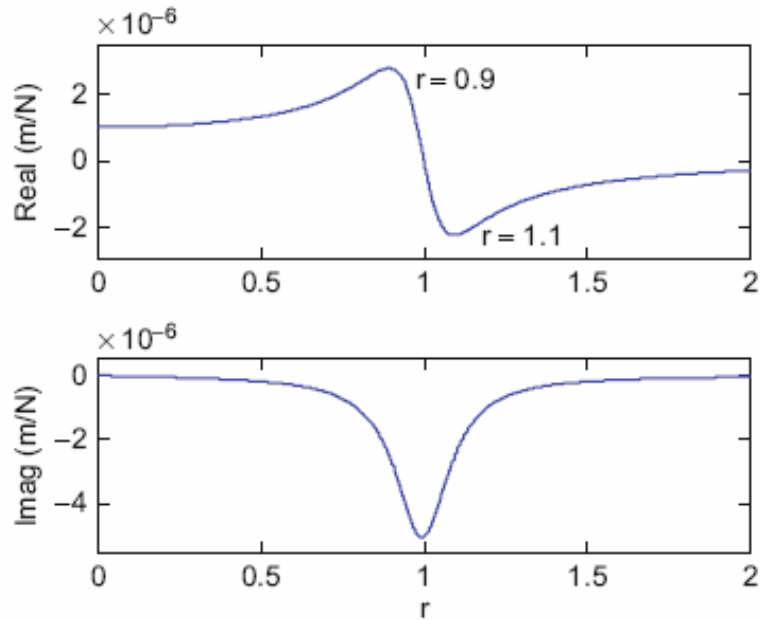
En las ecuaciones (2.42) y (2.43) se introduce el término  $r$  que es mejor conocido como la relación de frecuencia natural del cual  $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ . También se tiene que la ecuación (2.42) es mejor conocida como la función de transferencia o función de respuesta de la frecuencia (FRF por sus siglas en inglés). La FRF se puede separar en sus componentes real e imaginaria, quedando como:

$$FRF_{Re} = \frac{1}{k} \left( \frac{1-r^2}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right) \quad (2.44)$$

$$FRF_{Im} = \frac{1}{k} \left( \frac{-2\zeta r}{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right) \quad (2.45)$$

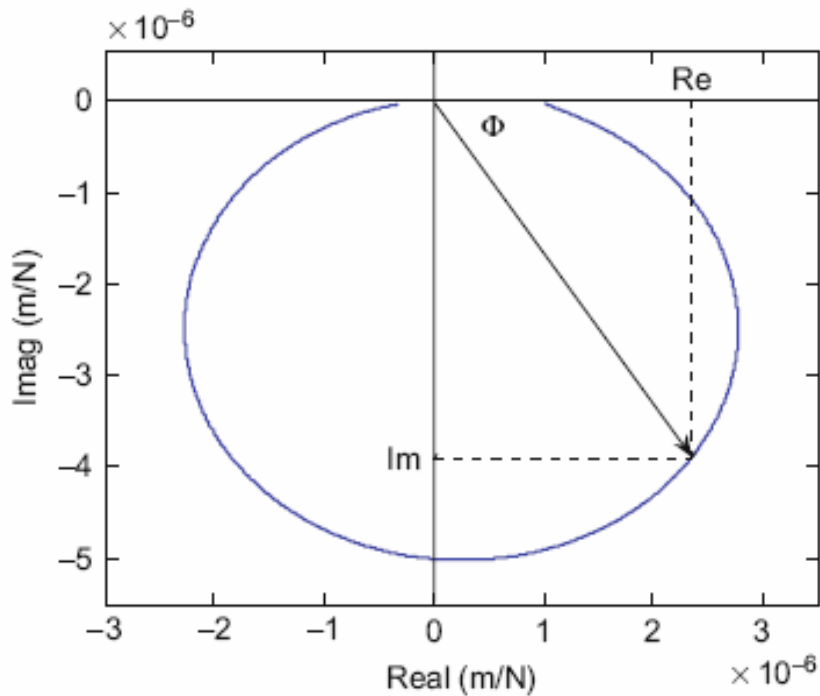
Donde  $FRF = FRF_{Re} + jFRF_{Im}$ .

Las partes real e imaginaria de la FRF son ilustradas por separado en la figura 26 y en el diagrama polar o mejor conocido como diagrama de Argand en la figura 27. A la frecuencia cero cruzando, la parte real es igual a la flexibilidad estática ( $1/k$ ). A medida que la frecuencia de excitación se acerca a la frecuencia natural ( $r$  tiende a 1), el sistema entra en resonancia, las amplitudes de las vibraciones se vuelven máximas y el ángulo de fase se aproxima a los  $-90$  grados. Si la frecuencia de excitación sigue incrementando el ángulo de fase se aproxima a los  $-180$  grados; la amplitud decrece porque la estructura física del sistema no puede responder a altas frecuencias de perturbación.



*Figura 26: Parte real e imaginaria de la función de transferencia.*





*Figura 27: Diagrama de Argand. Representación vectorial de la FRF*

### ***Vibraciones Autoexcitadas***

Además de las vibraciones libres y forzadas, existe un tipo de vibración denominada autoexcitada la cual es comúnmente conocida en las máquinas herramientas como retemblado regenerativo. Una vibración autoexcitada es un tipo de vibración en la cual la fuente de vibración proviene del sistema. Como ya se describió en el apartado anterior, el retemblado puede ser causado también por vibraciones forzadas, pero usualmente no es el mayor problema.

El retemblado ocurre principalmente porque uno de los modos estructurales de la máquina el sistema herramienta-pieza de trabajo es excitado inicialmente por fuerzas de corte. El retemblado es un problema de inestabilidad en el proceso de maquinado, caracterizado por una vibración excesiva indeseada entre la herramienta y

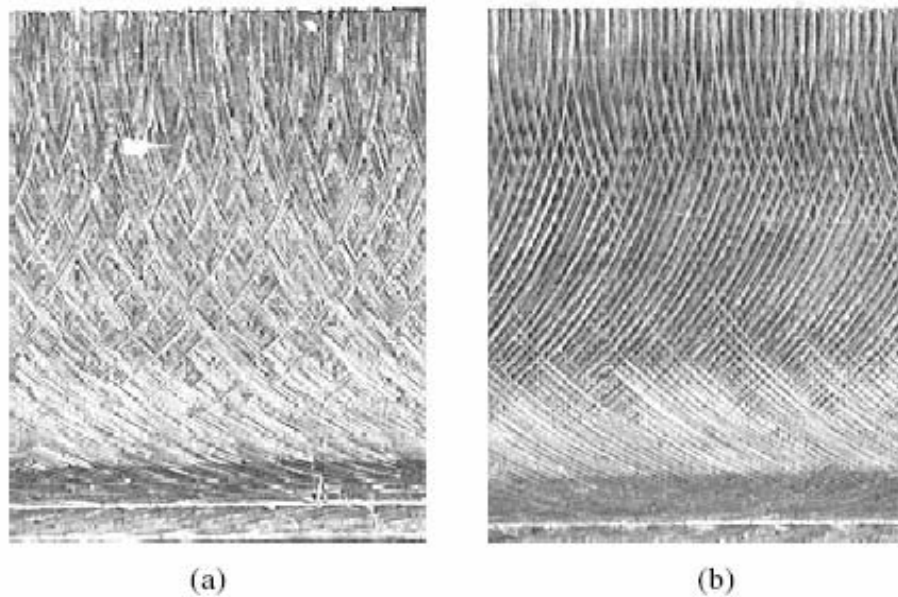
la pieza de trabajo, altos niveles de ruido, y como efecto un pobre acabado superficial. Este fenómeno también tiende a deteriorar la vida útil de la máquina y reduce la vida útil de la herramienta.

En el proceso de fresado, los ensambles tanto de la herramienta como de la pieza de trabajo vibrarán debido a las fuerzas de corte. Como es conocido, el sistema de mecanizado tiende a vibrar a sus frecuencias naturales durante el proceso de mecanizado. A través de la punta de la herramienta, las vibraciones dejan una ondulación en la superficie mecanizada. Estas ondulaciones pueden causar al pasar el próximo filo de corte (próximo diente) que se experimente una variación en el espesor de viruta deformada. Esta variación en el espesor de viruta deformado es producto de la vibración producida por la pasada del diente anterior causa fluctuaciones adicionales en la fuerza de corte, que alimentan las vibraciones ya existentes, de tal manera que se forma un sistema de ciclo cerrado, y puede empeorar las vibraciones en general. Cuando la fuerza de corte dinámico está fuera de fase con el movimiento relativo instantáneo entre la herramienta y la pieza de trabajo, esto conlleva al desarrollo de vibraciones autoexcitadas. Este tipo de inestabilidad es llamada **retemblado regenerativo** porque la vibración autoreproduce al momento de pasar el diente por la ondulación dejada por el diente anterior. Ésta es la forma más significativa de vibraciones autoexcitadas. Existe otro tipo de vibración autoexcitada, no es retemblado regenerativo, la cual ocurre sin las ondulaciones, y es relativamente poco común.

Las características fundamentales de las vibraciones autoexcitadas son: a) el incremento de la amplitud de las mismas hasta un límite debido a un efecto no lineal; b) su frecuencia es una de las frecuencias naturales de vibración del sistema de mecanizado.

En general, las vibraciones autoexcitadas se pueden distinguir de las vibraciones forzadas, porque las frecuencias de las vibraciones forzadas son iguales a

algunas de las múltiples frecuencias de la velocidad del husillo y la frecuencia de paso de los dientes, y las frecuencias de las vibraciones autoexcitadas no necesariamente tienen que ser igual a las frecuencias múltiples de la velocidad del husillo. Para diferentes procesos de mecanizados con diferentes velocidades de corte, si las vibraciones persisten a una frecuencia específica, estas son vibraciones autoexcitadas.



**Figura 28:** Visualización del efecto de Retemblado Regenerativo en un proceso de Fresado Frontal (Fuente: “*Machining Dynamics Fundamentals, Applications and Practices*”. Kai Cheng. Pag 100. 2009)

### ***Tipos de Retemblado***

Se distinguen principalmente tres tipos de retemblado. El primer retemblado es dependiente de la velocidad de corte, fue descubierto por Arnold y está basado en que existe una dependencia entre la variación de las fuerzas de corte con la variación de la velocidad de corte. El segundo tipo de retemblado es conocido como retemblado

regenerativo, el cual ocurre cuando la herramienta al ir cortando la superficie de la pieza va dejando una huella en ella y al momento que ésta se tope con una de estas huellas se producen variaciones en las fuerzas de corte causando una degeneración de las mismas. Dependiendo de la distancia entre dos huellas sucesivas, el espesor máximo de viruta puede crecer exponencialmente mientras la herramienta oscila a una frecuencia de retemblado que está cerca pero no es igual al modo de frecuencia dominante estructural del sistema. Las crecientes vibraciones incrementan las fuerzas de corte produciendo un pobre y ondulado acabado superficial. La tercera forma de retemblado está dada por el modo de acoplamiento, cuando las fuerzas actúan en una dirección y la estructura de la máquina herramienta causa un movimiento en sentido contrario y viceversa. Esto provoca vibraciones simultáneas en dos de direcciones. Físicamente esto es causado por un número de fuentes, tales como la fricción en el rastrillo y la remoción de la superficie. Este modo de vibración fue descrito matemáticamente por Wiercigroh<sup>10</sup>.

La mayoría de los retemblado que ocurren en los procesos de mecanizados son del tipo regenerativo aunque otros retemblados son común en algunos casos. El objetivo de esta investigación está basado en el estudio y predicción del retemblado regenerativo.

### ***Predicción del Retemblado Regenerativo y Lóbulos de Estabilidad***

Schmitz al igual que Altintas, Budak y Cheng hicieron una aproximación del retemblado por series de Fourier la cual es bastante buena en cuanto a la predicción de los lóbulos de estabilidad en el proceso de fresado. En esta tesis se trabajaran con esas ecuaciones las cuales serán presentadas a continuación.

---

<sup>10</sup> Wiercigroh, M. (1997), "Chaotic vibrations of a simple model of the machine tool-cutting process system". Transactions of the ASME: Journal of Vibration Acoustics, 119: 468-475

Si se obviara la idea que se planteó anteriormente del uso de una herramienta totalmente rígida, entonces las fuerzas de corte pudieran causar deflexión en la herramienta de corte. Adicionalmente, si la herramienta vibra a medida que remueve material, es de esperarse que esas vibraciones se impriman en la superficie del material. Este proceso sucede con el paso de diente a diente y es el que provee de energía al efecto regenerativo. Estas condiciones producen un espesor de viruta instantáneo variable que afecta las fuerzas ejercidas sobre la herramienta ya que como se dijo estas dependen directamente del espesor de viruta producido durante el corte, dando como resultado la posibilidad de inestabilidad o retemblado

Las vibraciones producidas se considerarán en la dirección normal a la superficie de corte de manera de determinar el espesor de viruta. Sin embargo, es de advertir que esta dirección normal varía a medida que la herramienta rota. Ver figura 29.



*Figura 29: Variación de la normal a la superficie de corte debido al corte del diente anterior (Fuente: "Machining Dynamics Frequency Response to Improved Productivity". Tony L. Schmitz. Pág 115. 2009)*

La remoción relativa de material que existe sobre la superficie ondulada que va de un diente a otro determina el nivel de las variaciones de las fuerzas y el ancho de viruta. Esta variación producida en las fuerzas de corte y el ancho de viruta puede

producir deflexión en la herramienta lo que hace que esta última siga generando una superficie ondulada sobre la pieza de trabajo. Dependiendo de las condiciones de corte y la alineación de las ondas generadas las vibraciones pueden crecer (condición de retemblado) o disminuir (condición estable) con el paso subsecuente de los dientes.

Como fue mencionado, el espesor de viruta es medido a lo largo de la normal de la superficie en corte. Pero la normal de la superficie es una función del ángulo de corte. La ecuación del espesor de viruta instantánea bajo condiciones estables ya fue mostrada (ecuación (2)). Sin embargo, si ahora se asume que la herramienta está bajo condiciones de vibraciones en las direcciones  $x$  e  $y$  debido a las fuerzas de corte y la condición de una herramienta no rígida, la ecuación del espesor de viruta instantánea debe ser modificada.

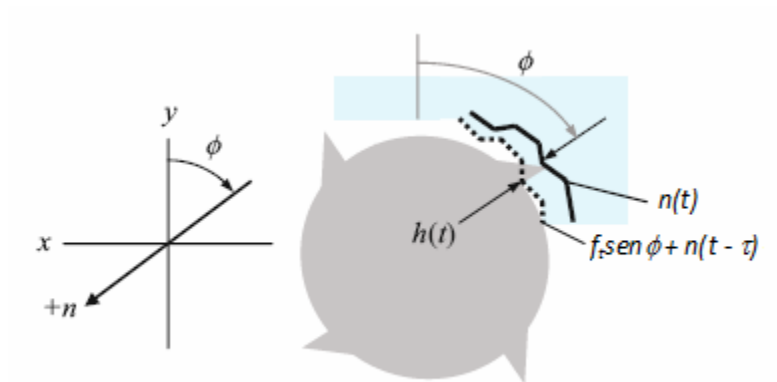
Primero se debe proyectar los ejes  $x$  e  $y$  sobre la normal a la superficie en corte de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$n = -x \operatorname{sen} \phi - y \operatorname{cos} \phi \quad (2.46)$$

Nótese que la dirección positiva de  $n$  está fuera del corte. Como el ángulo de corte varía con el tiempo  $\phi = \Omega 2\pi \frac{180}{\pi 60} t = 6\Omega t$  donde  $\Omega$  es dado en rpm y  $t$  en segundos, la dirección de  $n$  también es una función del tiempo. Luego la ecuación (2) puede ser reescrita como:

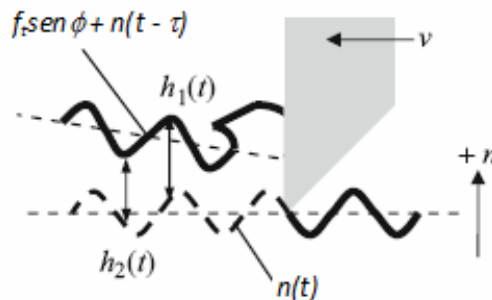
$$h(t) = f_c \operatorname{sen} \phi + n(t - \tau) - n(t) \quad (2.47)$$

Donde  $f_r \cdot \text{sen} \phi$  es el espesor de viruta principal removido sin el efecto de vibraciones. El término  $\tau = \frac{60}{nN_f}$  es el período del paso del diente en segundos. El término  $n(t - \tau)$  representa la contribución por las vibraciones sobre la normal a la superficie debido al paso del diente anterior y  $n(t)$  representa la vibración debido al paso del diente actual. Si las vibraciones de un diente a otro son iguales la ecuación (2.47) se reduce a la ecuación (2). En la figura 29 muestra un esquema de la ecuación (2.47).



**Figura 29.1: Geometría del Espesor de Viruta Instantánea para un Proceso de Fresado**

Haciendo el desarrollo de la superficie fresada se puede apreciar un mejor esquema de la ecuación (2.47). Véase la siguiente figura:



**Figura 30: Vista Desenvuelta del Espesor de Viruta Instantánea en un Proceso de Fresado**

Reescribiendo la ecuación (2.47) en función del ángulo de rotación de los dientes de la herramienta nos queda:

$$h(\phi_j) = (f_r \text{sen} \phi_j + n_{j-1} - n_j)g(\phi_j) \quad (2.48)$$

Donde el primer término de la ecuación representa el espesor de viruta instantáneo para el diente  $j$ ,  $n_{j-1}$  indica la dirección normal de la vibración producida por el diente anterior y  $n_j$  la dirección normal debido a las vibraciones por el diente actual. La función  $g(\phi_j)$  es una función escalón e indica el rango de valores por los cuales la ecuación es válida. El rango de valores es el siguiente:

$$g(\phi_j) = \begin{cases} 1, \text{ donde } \phi_e \leq \phi_j \leq \phi_s \\ 0, \text{ donde } \phi_e > \phi_j > \phi_s \end{cases} \quad (2.49)$$

Donde:

Para fresado en oposición:

$$\phi_e = 0 \text{ grados y } \phi_s = \cos^{-1}\left(\frac{r-l}{r}\right)$$

Y para fresado en concordancia:

$$\phi_e = 180 - \cos^{-1}\left(\frac{r-l}{r}\right) \text{ y } \phi_s = 180 \text{ grados}$$



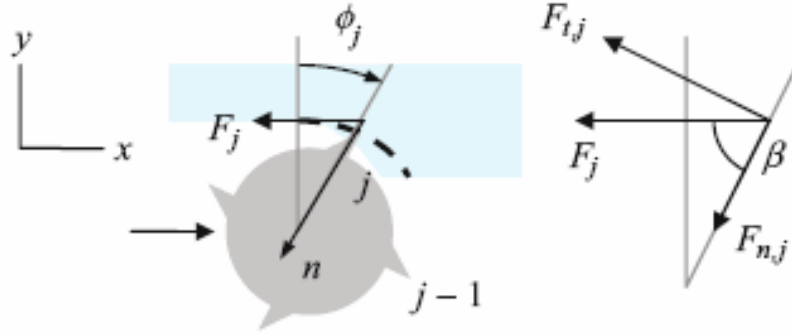


Figura 31: Notación para el análisis de estabilidad por las series de Fourier

Al sustituir la ecuación (2.45) en la ecuación (2.48) y haciendo caso omiso del término  $f_j \text{sen} \phi$  (es ignorado debido a que el mismo es estable y no influye en la inestabilidad del sistema). Se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 h(\phi_j) &= \left( (-x_{j-1} \text{sen}(\phi_j) - y_{j-1} \text{cos}(\phi_j)) \right. \\
 &\quad \left. - (-x_j \text{sen}(\phi_j) - y_j \text{cos}(\phi_j)) \right) \cdot g(\phi_j) \\
 h(\phi_j) &= \left( (x_j - x_{j-1}) \text{sen}(\phi_j) + (y_j - y_{j-1}) \text{cos}(\phi_j) \right) \cdot g(\phi_j) \\
 h(\phi_j) &= (\Delta x \cdot \text{sen}(\phi_j) + \Delta y \cdot \text{cos}(\phi_j)) \cdot g(\phi_j)
 \end{aligned} \tag{2.50}$$

La fuerza normal (radial) y tangencial se pueden escribir en función del espesor de viruta de la siguiente manera:

$$F_{\tau,j} = K_{\tau} b h(\phi_j) \text{ y } F_{n,j} = K_n F_{\tau,j} = K_n K_{\tau} b h(\phi_j) \tag{2.51}$$

Donde  $K_{\tau}$  es igual a la constante ya definida anteriormente como  $k_{\tau}$ .

La fuerza resultante se expresa de la siguiente manera:

$$F_j = K_r b h(\phi_j) = \sqrt{F_{n,j}^2 + F_{t,j}^2} = b h(\phi_j) K_r \sqrt{(1 + K_n^2)} \quad (2.52)$$

Donde se tiene que  $K_r = K_t \sqrt{(1 + K_n^2)}$ ,  $\tan(\beta) = \frac{F_{t,j}}{F_{n,j}} = \frac{1}{K_n}$ .

Ahora para proyectar las fuerzas tangencial y normal en el plano cartesiano (x, y), se aplica lo siguiente:

$$F_{x,j} = -F_{t,j} \cos(\phi_j) - F_{n,j} \sin(\phi_j) \text{ y } F_{y,j} = -F_{n,j} \cos(\phi_j) + F_{t,j} \sin(\phi_j) \quad (2.53)$$

Al sustituir en la componente de  $F_{x,j}$  se tiene que:

$$F_{x,j} = \left( \begin{array}{l} - \left( K_r \cdot b \cdot \cos(\phi_j) \left( (\Delta x \sin(\phi_j) + \Delta y \cos(\phi_j)) g(\phi_j) \right) \right) - \\ \left( K_r \cdot K_n \cdot b \cdot \sin(\phi_j) \left( (\Delta x \sin(\phi_j) + \Delta y \cos(\phi_j)) g(\phi_j) \right) \right) \end{array} \right) \#$$

$$F_{x,j} = -K_r \cdot b g(\phi_j) \left( \begin{array}{l} \cos(\phi_j) \left( (\Delta x \sin(\phi_j) + \Delta y \cos(\phi_j)) \right) + \\ K_n \sin(\phi_j) \left( (\Delta x \sin(\phi_j) + \Delta y \cos(\phi_j)) \right) \end{array} \right) \quad (2.54)$$

$$F_{x,j} = -K_r b g(\phi_j) \left( \begin{array}{l} \Delta x \left( \sin(\phi_j) \cos(\phi_j) + K_n \sin^2(\phi_j) \right) + \\ \Delta y \left( \cos^2(\phi_j) + K_n \sin(\phi_j) \cos(\phi_j) \right) \end{array} \right)$$

De la misma manera se obtiene la fuerza en dirección y:

$$F_{y,j} = K_t b g(\phi_j) \left( \frac{\Delta x (\text{sen}^2(\phi_j) - K_n \cos(\phi_j) \text{sen}(\phi_j)) + \Delta y (\text{sen}(\phi_j) \cos(\phi_j) - K_n \cos^2(\phi_j))}{\Delta y (\text{sen}(\phi_j) \cos(\phi_j) - K_n \cos^2(\phi_j))} \right) \quad (2.55)$$

Sustituyendo por las identidades trigonométricas:  $\text{sen}(\phi) \cos(\phi) = \frac{\text{sen}(2\phi)}{2}$ ,  $\text{sen}^2(\phi) = \frac{1 - \cos(2\phi)}{2}$ , y  $\cos^2 \phi = \frac{1 + \cos(2\phi)}{2}$  dentro de las ecuaciones (2.54) y (2.55), queda lo siguiente:

$$F_{x,j} = -\frac{1}{2} K_t b g(\phi_j) \left( \frac{\Delta x (\text{sen}(2\phi_j) + K_n (1 - \cos(2\phi_j))) + \Delta y (1 + \cos(2\phi_j) + K_n \text{sen}(2\phi_j))}{\Delta y (1 + \cos(2\phi_j) + K_n \text{sen}(2\phi_j))} \right) \quad (2.56)$$

$$F_{y,j} = \frac{1}{2} K_t b g(\phi_j) \left( \frac{\Delta x (1 - \cos(2\phi_j) - K_n \text{sen}(2\phi_j)) + \Delta y \text{sen}(2\phi_j) - K_n (1 + \cos(2\phi_j))}{\Delta y \text{sen}(2\phi_j) - K_n (1 + \cos(2\phi_j))} \right) \quad (2.57)$$

El cálculo de las fuerzas de corte con múltiples dientes actuando simultáneamente en el corte, se represente mediante una sumatoria de las fuerzas aplicada por cada diente:

$$F_x = \sum_{j=1}^{N_t} F_{x,j} \text{ y } F_y = \sum_{j=1}^{N_t} F_{y,j} \quad (2.58)$$

Aplicando un arreglo matricial, podemos expresar las fuerzas en  $\mathbf{F_x}$  y  $\mathbf{F_y}$  de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} K_t b \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} K_t b [A] (\Delta) \quad (2.59)$$

Los elementos de la matriz  $A$  se denominan como “Coeficientes dinámicos direccionales de las fuerzas variantes en el tiempo”.

$$\begin{aligned} a_{xx} &= \sum_{j=1}^{N_t} -g(\phi_j) (\text{sen}(2\phi_j) + K_n(1 - \text{cos}(2\phi_j))) \\ a_{xy} &= \sum_{j=1}^{N_t} -g(\phi_j) ((1 + \text{cos}(2\phi_j) + K_n \text{sen}(2\phi_j)) \\ a_{yx} &= \sum_{j=1}^{N_t} g(\phi_j) ((1 - \text{cos}(2\phi_j) + K_n \text{sen}(2\phi_j)) \\ a_{yy} &= \sum_{j=1}^{N_t} g(\phi_j) (\text{sen}(2\phi_j) - K_n(1 + \text{cos}(2\phi_j))) \end{aligned} \quad (2.59a)$$

Nótese que la interacción entre los dientes de la herramienta y la pieza de trabajo es periódica de periodo  $\phi_p = \frac{2\pi}{N_t}$ , además, es periódica con respecto al tiempo de periodo  $T = \frac{60}{\Omega N_t}$  (s), pero la matriz  $A$  viene expresada en función de  $\phi$ , por lo que es también función del tiempo de la siguiente manera,  $t = \frac{\phi 60}{\Omega 2\pi}$  (s), donde  $\Omega$  viene expresado en rpm y  $\phi$  en radianes. Para eliminar la dependencia del tiempo a la matriz  $A$ , se escribirá de manera explícita como  $[A(t)]$ , utilizando aproximación por transformada de Fourier:

$$[A(t)] = \sum_{r=0}^{\infty} [A(r)] e^{i r \omega_{diente} t} \quad (2.60)$$

Donde  $\omega_{diente} = 2\pi \cdot f_{diente}$ . Luego el coeficiente de la serie de Fourier es:

$$[A(r)] = \frac{1}{N_c \tau} \int_0^{N_c \tau} [A(t)] e^{-i r \omega_{diente} t} dt,$$

Es necesario tener los límites de integración entre los radios de inmersión de la herramienta, evaluando en  $r = 0$  se obtiene lo siguiente:

$$[A_0] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [A(\phi)] d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{\phi_s}^{\phi_e} [A(\phi)] d\phi = \frac{N_c}{2\pi} \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Los términos de matriz se llaman factores direccionales promedios y se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \alpha_{xx} &= \left[ \frac{1}{2} (\cos(2\phi) - 2K_n \phi + K_n \sin(2\phi)) \right]_{\phi_s}^{\phi_e} \\ \alpha_{yx} &= \left[ \frac{1}{2} (-\sin(2\phi) - 2\phi + K_n \cos(2\phi)) \right]_{\phi_s}^{\phi_e} \\ \alpha_{xy} &= \left[ \frac{1}{2} (-\sin(2\phi) + 2\phi + K_n \cos(2\phi)) \right]_{\phi_s}^{\phi_e} \end{aligned} \quad (2.61a)$$

$$\alpha_{yy} = \left[ \frac{1}{2} (-\cos(2\phi) - 2K_x \phi - K_x \sin(2\phi)) \right]_{\phi_c}^{\phi_e}$$

El análisis de estabilidad comienza con la ecuación de vibración de la frecuencia dominante en las direcciones  $x$  e  $y$  con el producto de la matriz de la función de transferencia y la representación de la frecuencia dominante de las fuerzas de corte.

$$\begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} FRF_{xx} & FRF_{yx} \\ FRF_{xy} & FRF_{yy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} e^{i\omega_c t} = \begin{bmatrix} FRF_{xx} & 0 \\ 0 & FRF_{yy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} e^{i\omega_c t} \quad (2.62)$$

El término  $FRF_{xy}$ , representa la medición en la dirección  $X$  con la excitación en la dirección  $Y$  y  $FRF_{yx}$ , las mediciones en la dirección  $Y$  con excitaciones en la dirección  $X$ . Al ser las direcciones  $X$  e  $Y$  ortogonales entre sí, dichos términos se anulan. La notación  $\omega_c$  representa la frecuencia de retemblado y se mide en (rad/s). La vibración producida por el diente anterior se deduce de forma similar:

$$\begin{pmatrix} X_{j-1} \\ Y_{j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \end{pmatrix} e^{-i\omega_c \tau} = \begin{bmatrix} FRF_{xx} & 0 \\ 0 & FRF_{yy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} e^{i\omega_c t} \cdot e^{-i\omega_c \tau} \quad (2.63)$$

Donde  $e^{-i\omega_c \tau}$ , representa el retardo en un periodo entre dientes, haciendo la resta entre las ecuaciones (2.62) y (2.63) queda:

$$\begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_{j-1} \\ Y_{j-1} \end{pmatrix} = (1 - e^{-i\omega_c \tau}) \begin{bmatrix} FRF_{xx} & 0 \\ 0 & FRF_{yy} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} e^{i\omega_c t} \quad (2.64)$$

Tal resta se puede escribir como  $\begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_{j-1} \\ Y_{j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{pmatrix}$ , sustituyendo en la ecuación (2.59) se obtiene “la ecuación dinámica de fresado”:

$$\begin{pmatrix} X_j \\ Y_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_{j-1} \\ Y_{j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

Igualando la ecuación a cero y aplicando factor común se obtiene lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} e^{i\omega_c t} \left( [I] - \frac{1}{2} K_c b [A_0] (1 - e^{-i\omega_c \tau}) \begin{bmatrix} FRF_{xx} & 0 \\ 0 & FRF_{yy} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (2.66)$$

Para la cual no tendría solución trivial si el determinante es igual a cero:

$$\det \left( [I] - \frac{1}{2} K_c b [A_0] (1 - e^{-i\omega_c \tau}) \begin{bmatrix} FRF_{xx} & 0 \\ 0 & FRF_{yy} \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (2.67)$$

Donde  $[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  es la matriz identidad, el producto de  $[A_0][FRF]$  se desarrolla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [A_0][FRF] &= \frac{N_c}{2\pi} \begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} FRF_{xx} & 0 \\ 0 & FRF_{yy} \end{bmatrix} = \frac{N_c}{2\pi} \begin{bmatrix} \alpha_{xx} FRF_{xx} & \alpha_{xy} FRF_{yy} \\ \alpha_{yx} FRF_{xx} & \alpha_{yy} FRF_{yy} \end{bmatrix} \\ &= \frac{N_c}{2\pi} [FRF_{or}] \end{aligned} \quad (2.68)$$

Ahora se introduce una nueva variable: de manera que la ecuación característica pueda ser reescrita:

$$\Lambda = \frac{N_c}{2\pi} \left( -\frac{1}{2} bK_c (1 - e^{-t\omega_c \tau}) \right) = -\frac{N_c}{4\pi} bK_c (1 - e^{-t\omega_c \tau}) \quad (2.69)$$

Quedando la ecuación característica de la siguiente manera:

$$\det([I] + \Lambda[FRF_{or}]) = 0 \quad (2.70)$$

Desarrollando el determinante,  $\det \begin{bmatrix} 1 + \Lambda\alpha_{xx}FRF_{xx} & \Lambda\alpha_{xy}FRF_{yy} \\ \Lambda\alpha_{yx}FRF_{xx} & 1 + \Lambda\alpha_{yy}FRF_{yy} \end{bmatrix} = 0$

se obtienen la siguiente expresión cuadrática en  $\Lambda$ :

$$\begin{aligned} (1 + \Lambda\alpha_{xx}FRF_{xx})(1 + \Lambda\alpha_{yy}FRF_{yy}) - \Lambda^2(\alpha_{xy}FRF_{yy})(\alpha_{yx}FRF_{xx}) &= 0 \\ \Lambda^2(\alpha_{xx}\alpha_{yy}FRF_{xx}FRF_{yy} - \alpha_{xy}\alpha_{yx}FRF_{xx}FRF_{yy}) + \Lambda(\alpha_{xx}FRF_{xx} + \alpha_{yy}FRF_{yy}) + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación la podemos escribir de forma cuadrática de la siguiente manera:

$a_0\Lambda^2 + a_1\Lambda + 1 = 0$ , donde:

$$a_0 = FRF_{xx}FRF_{yy}(\alpha_{xx}\alpha_{yy} - \alpha_{xy}\alpha_{yx})$$

$$a_1 = \alpha_{xx}FRF_{xx} + \alpha_{yy}FRF_{yy}$$



Como es una ecuación cuadrática se obtienen dos resultados,  $\Lambda_1$  y  $\Lambda_2$  y se determina utilizando la resolvente:

$$\Lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2a_0} = -\frac{1}{2a_0}(a_1 \mp \sqrt{a_1^2 - 4a_0})$$

Cada valor de  $\Lambda$ , va a tener parte real e imaginaria de la forma  $\Lambda = \Lambda_{Re} + i\Lambda_{Im}$ , y sustituyendo por la identidad de Euler:

$$\Lambda_{Re} + i\Lambda_{Im} = -\frac{N_c}{4\pi} b K_c (1 - \cos(\omega_c \tau) + i \operatorname{sen}(\omega_c \tau)). \quad (2.71)$$

De la ecuación (2.71) se despeja  $b$  para obtener así el límite de profundidad de corte de viruta  $b_{lim}$ :

$$b_{lim} = -(\Lambda_{Re} + i\Lambda_{Im}) \frac{4\pi}{N_c K_c} \frac{1}{(1 - \cos(\omega_c \tau) + i \operatorname{sen}(\omega_c \tau))} \quad (2.72)$$

Racionalizando la ecuación (2.72) se obtiene la ecuación (2.73):

$$b_{\text{im}} = -(\Lambda_{\text{Re}} + i\Lambda_{\text{Im}}) \frac{4\pi}{N_c K_c} \frac{1 - \cos(\omega_c \tau) + i \text{sen}(\omega_c \tau)}{((1 - \cos(\omega_c \tau))^2 + \text{sen}(\omega_c \tau)^2)}$$

$$b_{\text{im}} = -\frac{4\pi}{N_c K_c} \frac{(\Lambda_{\text{Re}} + i\Lambda_{\text{Im}})(1 - \cos(\omega_c \tau) + i \text{sen}(\omega_c \tau))}{(2 - 2\cos(\omega_c \tau))} \quad (2.73)$$

$$b_{\text{im}} = -\frac{2\pi}{N_c K_c} \left( \frac{(\Lambda_{\text{Re}}(1 - \cos(\omega_c \tau)) + \Lambda_{\text{Im}} \text{sen}(\omega_c \tau))}{(1 - \cos(\omega_c \tau))} + i \frac{(\Lambda_{\text{Im}}(1 - \cos(\omega_c \tau)) - \Lambda_{\text{Re}} \text{sen}(\omega_c \tau))}{(1 - \cos(\omega_c \tau))} \right)$$

Debido a que la profundidad de corte de viruta tiene que ser un número real, la parte imaginaria de la ecuación (2.73) tiene que ser igual a cero, es decir, que  $(\Lambda_{\text{Im}}(1 - \cos(\omega_c \tau)) - \Lambda_{\text{Re}} \text{sen}(\omega_c \tau)) = 0$ . Para ello se define una nueva variable  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{\Lambda_{\text{Im}}}{\Lambda_{\text{Re}}} = \frac{\text{sen}(\omega_c \tau)}{1 - \cos(\omega_c \tau)} \quad (2.74)$$

Reescribiendo la ecuación (2.73) integrando la nueva variable se tiene que:

$$b_{\text{im}} = -\frac{2\pi}{N_c K_c} \left( \frac{(\Lambda_{\text{Re}}(1 - \cos(\omega_c \tau)) + \Lambda_{\text{Im}} \text{sen}(\omega_c \tau))}{(1 - \cos(\omega_c \tau))} \right)$$

$$b_{\text{im}} = -\frac{2\pi}{N_c K_c} \left( \Lambda_{\text{Re}} + \frac{\Lambda_{\text{Im}} \text{sen}(\omega_c \tau)}{(1 - \cos(\omega_c \tau))} \right) \quad (2.75)$$

$$b_{\text{im}} = -\frac{2\pi}{N_c K_c} \Lambda_{\text{Re}} \left( 1 + \frac{\Lambda_{\text{Im}}}{\Lambda_{\text{Re}}} \frac{\Lambda_{\text{Im}} \text{sen}(\omega_c \tau)}{(1 - \cos(\omega_c \tau))} \right) = -\frac{2\pi}{N_c K_c} \Lambda_{\text{Re}} (1 + \kappa^2)$$

La frecuencia correspondiente es dependiente de la velocidad del husillo, es determinada mediante el ángulo de fase, las ondulaciones en la superficie de trabajo y las provenientes del diente en acción de corte,  $\delta = \pi - 2\psi$  (rad), donde  $\psi = \tan^{-1}(\kappa)$ . El periodo de paso del diente se obtiene de la siguiente con:  $T = \frac{1}{\omega_c} (\delta - j \cdot 2\pi)$  (s), siendo  $j = 1, 2, 3 \dots$  números enteros de ondas entre dientes.

Finalmente la velocidad del husillo se obtiene con la siguiente expresión:

$$\Omega = \frac{60}{N_z \cdot T} \text{ (rpm)} \quad (2.76)$$

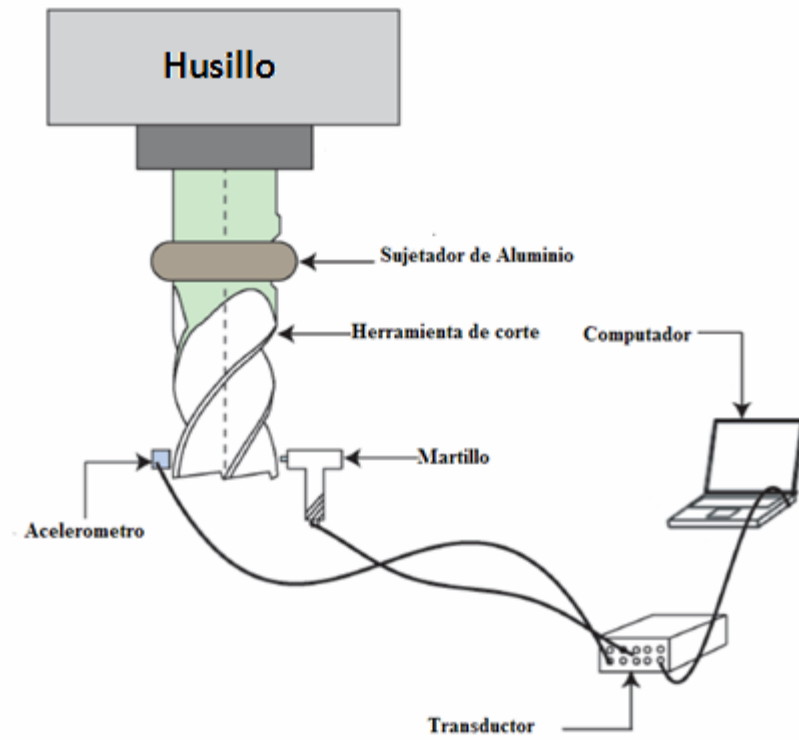
### *Test de Impacto por Matillo*

Del desarrollo de las ecuaciones para la predicción del retemblado se observa que en las funciones de transferencia para  $X$  y  $Y$  respectivamente, es necesario introducir los modos de frecuencia natural de vibración y los factores de amortiguamiento del acoplamiento de la máquina herramienta; este tema no es objeto de esta tesis pero a continuación se hace una pequeña mención sobre uno de los métodos utilizados para detectar dichos parámetros puesto a que la fiabilidad y la semejanza de los resultados teóricos con los experimentales están estrechamente relacionados con la exactitud con la que se obtengan estos datos.

El método más utilizado para la detección de los parámetros mencionados en el apartado anterior es el conocido como *Test de Impacto de Martillo*. Este test es rápido, eficiente, y de bajo costo lo que lo convierte en opción conveniente para encontrar los modos de vibración de la máquina herramienta y consiste en excitar la máquina por impactos de un martillo a una fuerza constante y a una frecuencia conocida. La respuesta de la máquina herramienta a la excitación es medida mediante un acelerómetro colocado cerca del acople de la herramienta de corte. Este proceso se repite en las diferentes direcciones de estudio, para el caso de este trabajo especial de grado, la dirección en  $X$  y  $Y$  del plano perpendicular al eje de rotación de la Herramienta.

Toda la base de datos obtenida por el acelerómetro y el dinamómetro, es almacenada en un computador, calculando el promedio de las mediciones de cada impacto para cada dirección.

Los parámetros obtenidos para cada dirección por este métodos son: La constante Elástica ( $k$ ), El factor de amortiguamiento ( $\zeta$ ) y la Frecuencia natural ( $f_n$ ).



*Figura 32: Test de Impacto por martillo (Fuente: “Experimental and Numerical Investigation of the Subcritical Bifurcation in Milling”, Tesis Pag 22.)*

## CAPÍTULO III

### *MARCO METODOLÓGICO*

#### *Desarrollo del Código Computacional*

Para realizar el código computacional, se utilizó la herramienta numérica MatLab8®, y teniendo el código ya programado se utilizaron los datos de trabajos realizados por diferentes autores tales como Ing. Tony L. Smitchz y el Dr. Yusuf Altintas para el cálculo de los lóbulos de estabilidad.

Los datos requeridos para el cálculo de los lóbulos de estabilidad fueron los siguientes:

- Frecuencias naturales de la herramienta en las direcciones X y Y.
- Factores de elasticidad de la herramienta en las direcciones X y Y.
- Factores de amortiguamiento de la Herramienta en las direcciones X y Y.
- Dirección de fresado, es decir, si se encuentra en oposición (up milling) o en concordancia (down milling).
- Diámetro de la herramienta.
- Número de dientes de la herramienta.
- Inmersión de la herramienta, ya sea ángulos de entrada y salida, porcentaje de inmersión o profundidad de inmersión.
- Fuerza específica del material.
- Ángulo de la fuerza resultante, medido desde la dirección normal del plano de corte.

### ***Modo de Funcionamiento del Algoritmo***

Primero hay que hallar los límites de iteración de tal manera que el lóbulo se genere completamente. Para ello, se selecciona un valor inicial muy cercano a la frecuencia natural más pequeña y mayor a ésta, que se le llamará frecuencia de retemblado ( $w_c$ ). Éste se colocó de la siguiente manera:  $w_c = 1.0000001 * w_{n1}$ . El valor máximo seleccionado será 50% mayor a la frecuencia natural mas grande, es decir,  $w_c = 1,5 * w_{n2}$ . Estos valores pueden variar dependiendo del criterio del programador.

Luego de calcular las fuerzas específicas en las direcciones normal y tangencial se procede a calcular los elementos de la matriz  $A$ , que se denominan “Factores direccionales promedios de las fuerzas variantes en el tiempo” con la ecuación (2.61a).

Al comienzo de las iteraciones, se calcula la parte real e imaginaria de la función de transferencia en la direcciones  $X$  y  $Y$  con las ecuaciones 2.44 y 2.45 y se genera el vector de la función de transferencia de la siguiente manera:  $FRF = ReFRF + ImFRF * i$ .

Luego de obtener estos valores, se calculan los coeficientes de la ecuación de segundo grado  $a_2 A^2 + a_1 A + 1 = 0$  para obtener los autovalores de la matriz. Con los coeficientes se crea una matriz de  $3 \times 1$  a la cual llamamos  $A$ , aplicando la función “roots” de MatLab, calculamos las raíces del polinomio característico. Por ser un polinomio de segundo grado obtenemos dos raíces  $A1$  y  $A2$ , de la forma  $A = ReA + ImA * i$ .

Al tener los dos autovalores, se debe escoger el autovalor que cumpla con la condición que en la parte real siempre tiene que ser negativa, para que al calcular la profundidad de corte ésta siempre nos dé positiva, caso contrario, nos daría negativa y

sería físicamente inconsistente. Ahora, para separar la parte real y la parte imaginaria, usaremos los comandos “real (A1)” para la parte real e “imag (A1)” para la parte imaginaria.

El ángulo de fase se calcula aplicando la ecuación (2.43). Para calcular el tiempo que dura el diente cortando se usa la ecuación  $\tau = \frac{1}{\omega_j}(s - j \cdot 2\pi)$ , donde el término  $j$ , indica el número de lóbulos generados para  $j=1, 2, 3\dots$

Para el cálculo de la profundidad de corte, se utiliza la ecuación 2.75 y para la velocidad rotacional del husillo se utiliza la ecuación 2.76. Se define el incremento de la frecuencia de retemblado para cada iteración. Es importante señalar que si el paso es más pequeño más exacta es la gráfica pero aumenta la cantidad de iteración cargando el ciclo de cálculo computacional y el costo de cómputo.

### ***Nomenclatura Utilizada en el Código para la Generación de los Lóbulos de Estabilidad***

A continuación, se presenta una lista con la simbología utilizada en el código para la generación de los lóbulos:

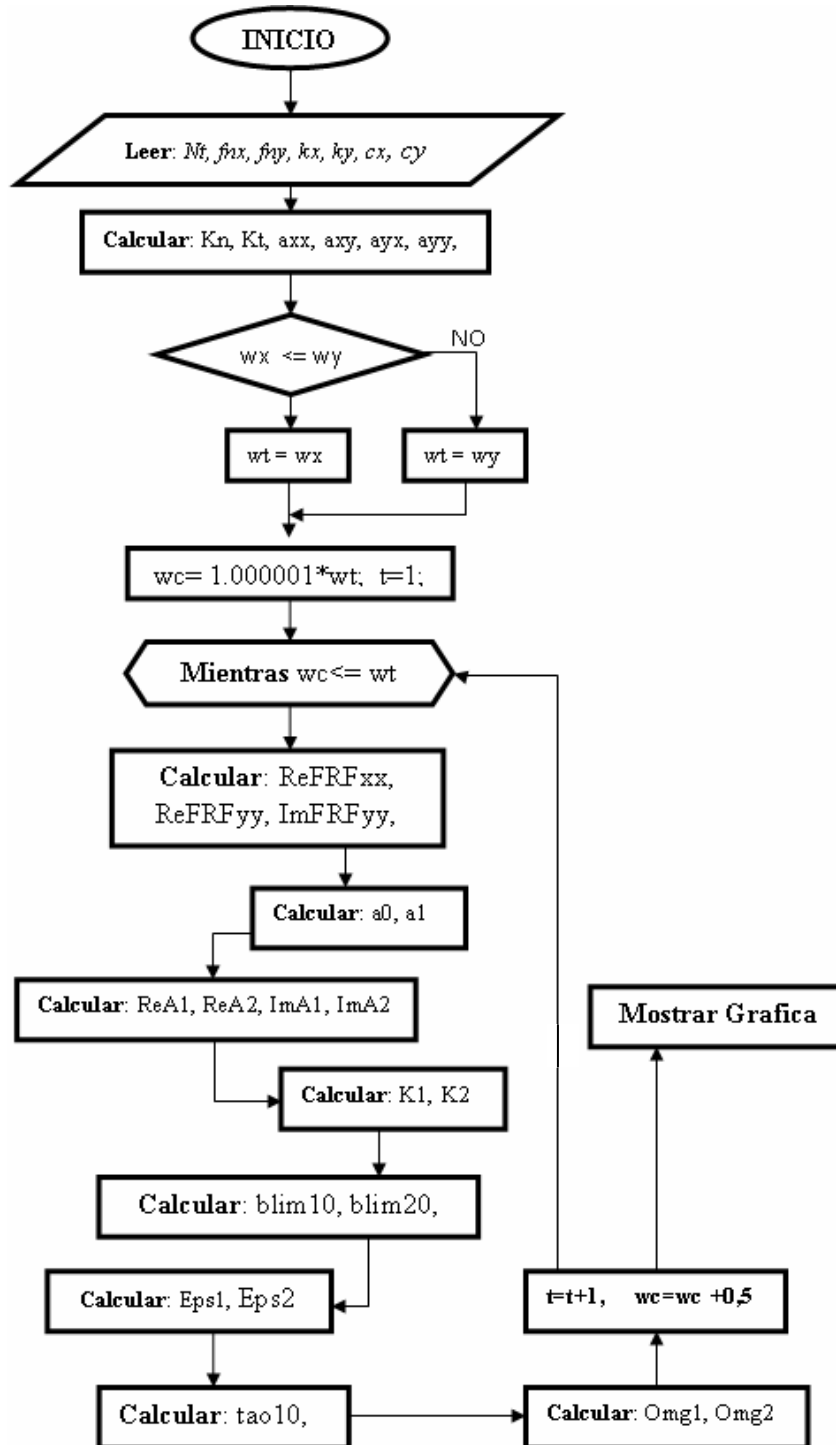
- Nt: Numero de dientes
- Fis: Ángulo de entrada [deg]
- Fie: Ángulo de Salida [deg]
- fnx: Frecuencia Natural en x [Hz]
- fny: Frecuencia Natural en y [Hz]
- kx: Constante elástica en x [N/mm]
- ky: Constante elástica en y [N/mm]
- cx: Factor de amortiguamiento en x [adimensional]



- $c_y$ : Factor de amortiguamiento en y [adimensional]
- $D$ : Diámetro de la herramienta [mm]
- $K_s$ : fuerza específica [ $N/mm^2$ ]
- $B$ : Angulo de la fuerza [deg]
- $w_x$ : Frecuencia natura en x [rad]
- $w_y$ : Frecuencia natura en y [rad]
- $a_{xx}$ ,  $a_{xy}$ ,  $a_{yx}$ ,  $a_{yy}$ : Coeficientes dinámicos direccionales de las fuerzas [adimensional]
- $t$ : Numero de iteraciones
- $w_c$ : Frecuencia de resonancia[rad]
- $j$ : Contador de Lóbulos
- $r_x$ : Relación de frecuencias en x [adimensional]
- $r_y$ : Relación de frecuencias en y [adimensional]
- $ReFRF_{xx}$ : Parte real de la función de transferencia de Transferencia en x [mm/N]
- $ReFRF_{yy}$ : Parte real de la función de transferencia de Transferencia en y [mm/N]
- $ImFRF_{xx}$ : Parte imaginaria de la función de transferencia de Transferencia en x [mm/N]
- $ImFRF_{yy}$ : Parte imaginaria de la función de transferencia de Transferencia en y [mm/N]
- $FRF_{xx}$ : función de transferencia en x [mm/N]
- $FRF_{yy}$ : función de transferencia en y [mm/N]
- $a_0$ ,  $a_1$ : coeficientes del polinomio característico [adimensional]
- $A$ : Autovalores
- $ReA_1$ : Parte real del autovalor 1 [adimensional]
- $ReA_2$ : Parte real del autovalor 2 [adimensional]
- $ImA_1$ : Parte imaginaria del autovalor 1 [adimensional]
- $ImA_2$ : Parte imaginaria del autovalor 2 [adimensional]
- $blim_{10}$ : Profundidad de corte para el autovalor 1 [mm]

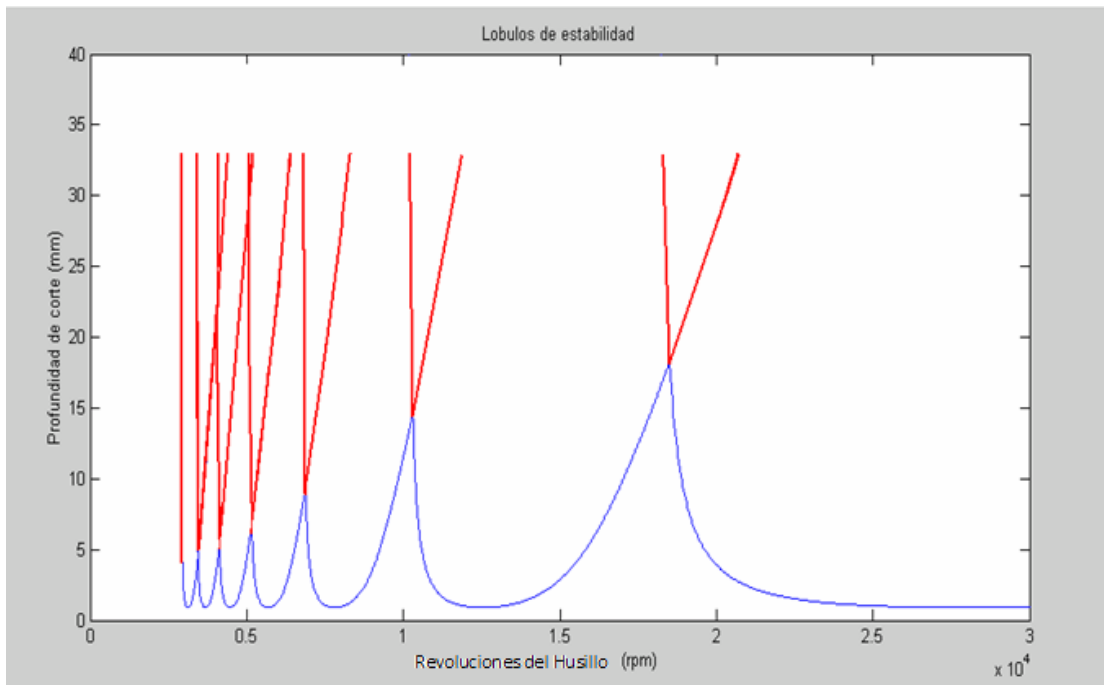
- $blim20$ : Profundidad de corte para el autovalor 2 [mm]
- $Fi1$ : Angulo de fase para el autovalor 1 [rad]
- $Fi2$ : Angulo de fase para el autovalor 2 [rad]
- $tao10$ : Periodo de tiempo del diente en acción de corte para el autovalor 1 [s]
- $tao20$ : Periodo de tiempo del diente en acción de corte para el autovalor 2 [s]
- $Omg0, Omg1, \dots, Omg7$ : velocidad de rotación del usillo para cada Lóbulo [rpm]

*Diagrama de Flujo del Código para Generar los Lóbulos*



### DEPURACIÓN DE LOS LÓBULOS

La depuración de los lóbulos consiste en eliminar la parte superior de cada lóbulo tomando como referencia el punto de intersección entre los mismos. Esta limpieza tiene como finalidad mejorar la visibilidad de la línea límite entre un proceso estable y un proceso en presencia de retemblado.



*Figura 33: Limpieza de lóbulos (Fuente: Los Autores).*

El método de la limpieza de lóbulos no es único, cada programador genera su propio método de limpieza. Algunos más eficientes que otro, esto es, menos líneas de código y menos iteraciones para obtener el mismo resultado.

Para comenzar a explicar el método utilizado en el código de limpieza de lóbulos, hay que tomar en cuenta que las ecuaciones se trabajaron de forma paramétricas, es decir, que para un valor de  $t$  (número de la iteración) se le asignan dos valores: el límite de la profundidad de corte (blim10) y la velocidad rotacional del

husillo ( $Omg_0, Omg_1, Omg_2\dots$ ). Entonces el valor a encontrar es el valor de la iteración ( $t$ ) donde sea mínimo el valor de profundidad de corte de la gráfica y el punto donde se intercepten las curvas.

### ***Valor Mínimo del Límite de la Profundidad de Corte***

El primer paso para limpieza es encontrar el número de la iteración donde el valor de límite de profundidad de corte sea mínimo; este valor es común para todos los lóbulos; dicho punto va a ser el inicio ascendente de las iteraciones para encontrar el número de la iteración donde se encuentra la intersección del lóbulo( $n$ ) con el lóbulo( $n+1$ ). El método es sencillo, la iteración comienza con  $t=1$ , que es el valor máximo del límite de profundidad de corte y lo compara con el siguiente de esta forma: *mientras*  $blim10(t)/blim10(t+1) \leq 1$ ;  $t=t+1$ . Las iteraciones se van a detener cuando el valor sea 1 ó mayor por una iteración adicional. El valor de  $t$  va ser el valor de la iteración donde el valor del límite de la profundidad de corte sea mínima.

### ***Intersección de las Curvas***

Para encontrar el valor de la iteración donde se intercepten las dos curvas, se realizó de manera similar pero con la diferencia que son dos comparaciones simultáneas; una comienza de  $t=1$  y la otra de  $t=p$ , donde  $p$  es el valor de la iteración donde es mínima la profundidad de corte.

En la figura 34 se representa gráficamente, señalado con las líneas negras el comienzo de las iteraciones y el fin de las iteraciones con las líneas rojas. La comparación que detiene el ciclo es: *mientras*  $Omg_0(L_0)/Omg_1(p+l_0) \Rightarrow > 1$ , que es donde las gráficas se interceptan. Debido a que la curva no tiene distribuido uniformemente la cantidad de iteraciones, es decir, para desde el inicio de la curva

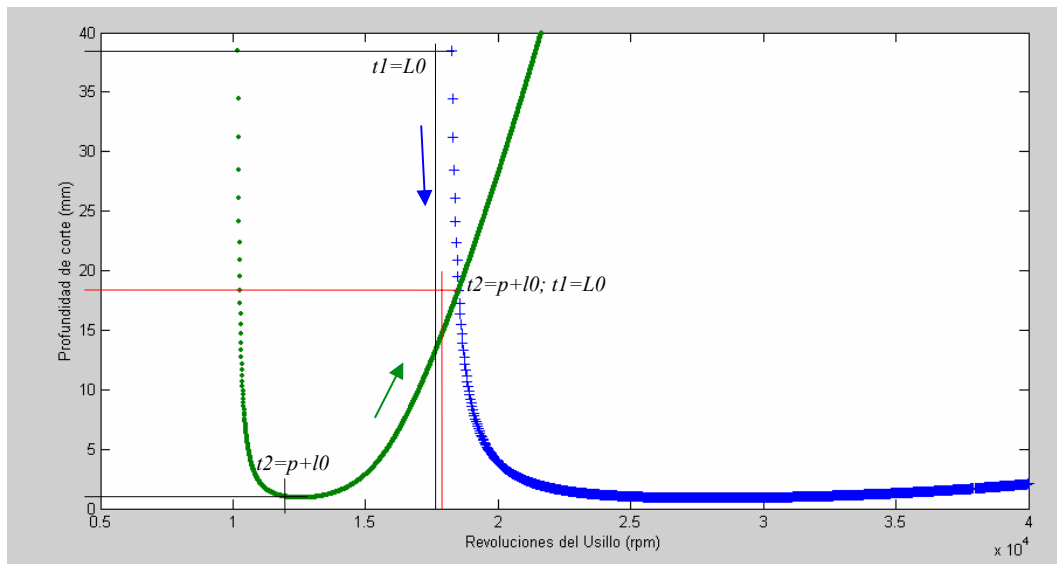
( $t=l$ ) hasta el punto mínimo del límite de la profundidad de corte ( $t=p$ ), hace un promedio de 700 iteraciones y para el resto de la gráfica aproximadamente 8000 iteraciones. Entonces, las velocidades de llegar al punto de intercepción son diferentes. Para solucionar el problema se aplica la segunda condición:

Si  $(blim10(L0)/blim10(p+10))>1$

$$L0=L0+1; i0=i0+1;$$

Si no se cumple:

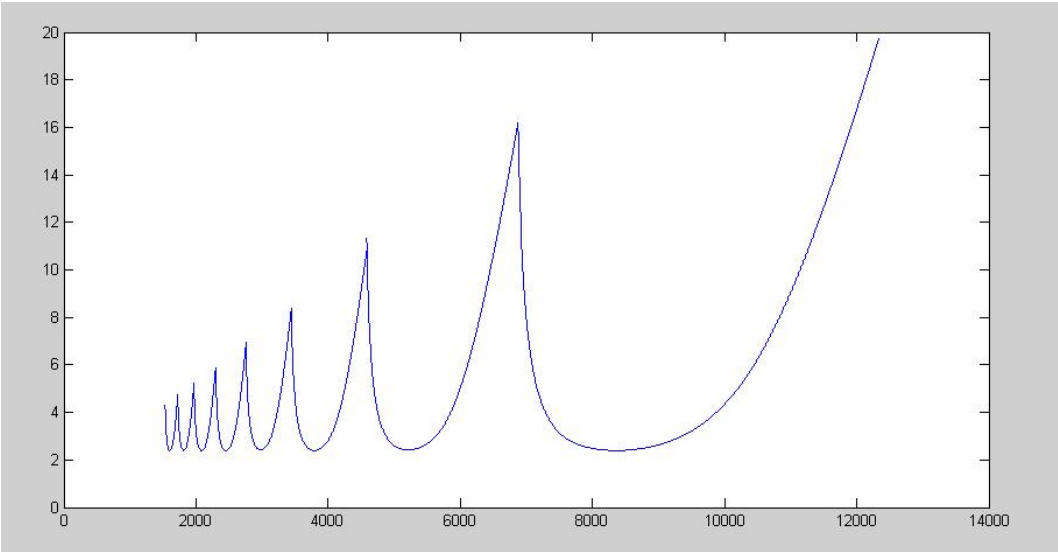
$$L0=L0-1; i0=i0+1;$$



**Figura 34: Limpieza de lóbulos (Fuente: Los Autores).**

Esta condición compara los límites de profundidad de corte, de tal manera que cuando  $blim10(L0)$  sea menor que  $blim10(p+10)$ , al contador  $L0$  se reste una iteración, manteniendo los valores de  $blim10$  muy cercanos entre ellos hasta llegar al punto de intercepción. De esta forma se obtiene el inicio y el comienzo para cada

lóbulo. Ahora, para graficar se hace una nueva base de datos para cada lóbulo acotado con los límites obtenidos con las intercepciones. El gráfico a obtener es similar a la figura 33 con la diferencia que se han eliminado las líneas de color rojo (ver figura 35).



*Figura 35: Lóbulos depurados (Fuente: Los Autores).*

## ***Código para la Generación de los Lóbulos Depurados***

```
format long;

clear all

clc

%-----
%
%          DATOS (Ejemplo 4.3.6 del Schmitz, pag 143)
%-----

Nt=4;%.....numero de dientes
FIs=126.9;%.....angulo de entrada(deg)
FIe=180;%.....angulo de Salida(deg)
fnx=900;%.....frecuencia Natural en x(Hz)
fny=950;%.....frecuencia Natutal en y (Hz)
kx=9000;%.....constante elastica en x(N/mm)
ky=10000;%.....constante elastica en y(N/mm)
cx=0.01;%.....factor de amortiguamiento en x
cy=0.02;%.....factor de amortiguamiento en y
D=19;%.....diametro de la herramienta(mm)
Ks=2250;%.....fuerza especifica (N/mm^2)
B=75;%.....Angulo de la fuerza (deg)

%-----
%
%          COVERSIONES
%-----

FIs=FIs*pi/180;%.....Deg a Rad
FIe=FIe*pi/180;
wy=fny*2*pi; %....Hz a Rad/s
wx=fnx*2*pi;
Cx=cx/100;
cy=cy/100;
```



```

%-----
%
%                                CALCULOS (sin iteraciones)
%-----
Kn=(1/tan(B*pi/180));
Kt=(Ks/(1+Kn^2)^0.5);
axx=0.5*((cos(2*Fle)-(2*Fle*Kn)+Kn*sin(2*Fle))-(cos(2*FIs)-(2*FIs*Kn)+Kn*sin(2*FIs)));
axy=0.5*((-sin(2*Fle)-2*Fle+Kn*cos(2*Fle))-(-sin(2*FIs)-2*FIs+Kn*cos(2*FIs)));
ayx=0.5*((-sin(2*Fle)+(2*Fle)+Kn*cos(2*Fle))-(-sin(2*FIs)+(2*FIs)+Kn*cos(2*FIs)));
ayy=0.5*((-cos(2*Fle)-(2*Kn*Fle)-Kn*sin(2*Fle))-(-cos(2*FIs)-(2*Kn*FIs)-Kn*sin(2*FIs)));
%-----
%
%                                ITERACIONES
%-----
t=1;%                               Numero de iteraciones.
wc(t)=1.000001*wx;%                 Valor inicial de la frecuencia de resonancia.
j=1;%                               Contador de Lóbulos.
while wc(t)<=1.5*wy
    rx=wc(t)/wx;
    ry=wc(t)/wy;
    ReFRFxx=(1/kx)*((1-rx^2)/((1-rx^2)^2+(2*cx*rx)^2));
    ImFRFxx=(1/kx)*((-2*cx*rx)/((1-rx^2)^2+(2*cx*rx)^2));
    ImFRFyy=(1/ky)*((1-ry^2)/((1-ry^2)^2+(2*cy*ry)^2));
    ReFRFyy=(1/ky)*((-2*cy*ry)/((1-ry^2)^2+(2*cy*ry)^2));
    % FRFxx=(ReFRFxx+ImFRFxx*i);
    % FRFyy=(ReFRFyy+ImFRFyy*i);
%-----
%
%                                Calculo de los auto valores aplicando la ecuacion Resolvente
%-----
%    /-----parte Real-----/ /-----parte Imaginaria-----/

```

```

a0=((ReFRFxx*ReFRFyy-ImFRFxx*ImFRFyy)+(ReFRFxx*ImFRFyy-
ImFRFxx*ReFRFyy)*i)*(axx*ayy-ayx*axy);

a1=(axx*ReFRFxx+ayy*ReFRFyy)+((axx*ImFRFxx+ayy*ImFRFyy))*i;

M=[a0 a1 1];

A=roots(M);

%-----

ReA1(t)=real(A(1));

ReA2(t)=real(A(2));

ImA1(t)=imag(A(1));

ImA2(t)=imag(A(2));

K1=ImA1(t)/ReA1(t);

K2=ImA2(t)/ReA2(t);

%-----

blim10(t)=-2*pi*ReA1(t)*(1+K1^2)/(Nt*Kt);

Fi1(t)=atan(K1);

Eps1=pi-2*Fi1(t);

tao10=((Eps1+j*2*pi)/wc(t));

Omg0(t)=60/(Nt*tao10);

tao11=(1/wc(t))*(Eps1+(j+1)*2*pi);

Omg1(t)=60/(Nt*tao11);

tao12=((Eps1+(j+2)*2*pi)/wc(t));

Omg2(t)=60/(Nt*tao12);

tao13=(1/wc(t))*(Eps1+(j+3)*2*pi);

Omg3(t)=60/(Nt*tao13);

tao14=(1/wc(t))*(Eps1+(j+4)*2*pi);

Omg4(t)=60/(Nt*tao14);

tao15=(1/wc(t))*(Eps1+(j+5)*2*pi);

Omg5(t)=60/(Nt*tao15);

tao16=(1/wc(t))*(Eps1+(j+6)*2*pi);

```

```

Omg6(t)=60/(Nt*tao16);
tao17=(1/wc(t))*(Eps1+(j+7)*2*pi);
Omg7(t)=60/(Nt*tao17);
t=t+1;
wc(t)=wc(t-1)+0.5;
end;
%-----
%
%                               Limpieza de Lobulos
%-----
p=0;Min=0;

while Min<1
    p=p+1; Min=blim10(p+1)/blim10(p);
end;
%-----
%
%                               Primer Lobulo
%-----
l0=1; L0=1;
while ((Omg0(L0)/Omg1(p+l0))>1)
    if (blim10(L0)/blim10(p+l0))>1
        L0=L0+1; l0=l0+1;
    else
        L0=L0-1; l0=l0+1;
    end;
end;
st(1)=wc(L0); ex(1)=wc(p+l0+400);
ex(2)=wc(p+l0);
%-----
%
%                               Segundo Lobulo

```

```

%-----
l1=1; L1=1;
while (Omg1(L1)/Omg2(p+l1))>1
  if (blim10(L1)/blim10(p+l1))>1
    L1=L1+1; l1=l1+1;
  else
    L1=L1-1; l1=l1+1;
  end;
end;
st(2)=wc(L1); ex(3)=wc(p+l1);
%-----
%
%                               Tercer Lobulo
%-----

l2=1; L2=1;
while (Omg2(L2)/Omg3(p+l2))>1
  if (blim10(L2)/blim10(p+l2))>1
    L2=L2+1; l2=l2+1;
  else
    L2=L2-1; l2=l2+1;
  end;
end;
st(3)=wc(L2); ex(4)=wc(p+l2);

%-----
%
%                               Cuarto Lobulo
%-----

l3=1; L3=1;
while (Omg3(L3)/Omg4(p+l3))>1
  if (blim10(L3)/blim10(p+l3))>1

```

```

    L3=L3+1; l3=l3+1;
else
    L3=L3-1; l3=l3+1;
end;
end;
st(4)=wc(L3); ex(5)=wc(p+l3);
%-----
%                               Quinto Lobulo
%-----
l4=1; L4=1;
while (Omg4(L4)/Omg5(p+l4))>1
    if (blim10(L4)/blim10(p+l4))>1
        L4=L4+1; l4=l4+1;
    else
        L4=L4-1; l4=l4+1;
    end;
end;
st(5)=wc(L4); ex(6)=wc(p+l4);
%-----
%                               Sexto Lobulo
%-----
l5=1; L5=1;
while (Omg5(L5)/Omg6(p+l5))>1
    if (blim10(L5)/blim10(p+l5))>1
        L5=L5+1; l5=l5+1;
    else
        L5=L5-1; l5=l5+1;
    end;
end;
end;

```

```

st(6)=wc(L5); ex(7)=wc(p+15);

%-----
%
%                               Septimo Lobulo
%-----

l6=1; L6=1;
while (Omg6(L6)/Omg7(p+l6))>1
    if (blim10(L6)/blim10(p+l6))>1
        L6=L6+1; l6=l6+1;
    else
        L6=L6-1; l6=l6+1;
    end;
end;
st(7)=wc(L6); ex(8)=wc(p+l6); st(8)=wc(L6+10);

%-----
%
%                               Lobulos Depurados
%-----

t1=1;   wc1(t1)=st(1);
while wc1(t1)<=ex(1)
    rx=wc1(t1)/wx; ry=wc1(t1)/wy;
    ReFRFxx=(1/kx)*((1-rx^2)/((1-rx^2)^2+(2*cx*rx)^2));
    ImFRFxx=(1/kx)*((-2*cx*rx)/((1-rx^2)^2+(2*cx*rx)^2));%
    ImFRFyy=(1/ky)*((1-ry^2)/((1-ry^2)^2+(2*cy*ry)^2));
    ReFRFyy=(1/ky)*((-2*cy*ry)/((1-ry^2)^2+(2*cy*ry)^2));
    a0=((ReFRFxx*ReFRFyy-ImFRFxx*ImFRFyy)+(ReFRFxx*ImFRFyy-
ImFRFxx*ReFRFyy)*i)*(axx*ayy-ayx*axy);
    a1=(axx*ReFRFxx+ayy*ReFRFyy)+((axx*ImFRFxx+ayy*ImFRFyy))*i;
    M=[a0 a1 1]; A=roots(M);
    ReA1(t1)=real(A(1));   ImA1(t1)=imag(A(1));

```

```

K1=ImA1(t1)/ReA1(t1);
blim0(t1)=-2*pi*ReA1(t1)*(1+K1^2)/(Nt*Kt);
Fil(t1)=atan(K1);  Eps1=pi-2*Fil(t1);
tao10=((Eps1+1*2*pi)/wc1(t1));
Omg0L(t1)=60/(Nt*tao10);
t1=t1+1;      wc1(t1)=wc1(t1-1)+0.5;
end; 1

t2=1;  wc2(t2)=st(2);
while wc2(t2)<=ex(2)
    rx=wc2(t2)/wx; ry=wc2(t2)/wy;
    ReFRFxx=(1/kx)*((1-rx^2)/((1-rx^2)^2+(2*cx*rx)^2));
    ImFRFxx=(1/kx)*((-2*cx*rx)/((1-rx^2)^2+(2*cx*rx)^2));%
    ImFRFyy=(1/ky)*((1-ry^2)/((1-ry^2)^2+(2*cy*ry)^2));
    ReFRFyy=(1/ky)*((-2*cy*ry)/((1-ry^2)^2+(2*cy*ry)^2));
    a0=((ReFRFxx*ReFRFyy-ImFRFxx*ImFRFyy)+(ReFRFxx*ImFRFyy-
    ImFRFxx*ReFRFyy)*i)*(axx*ayy-ayx*axy);
    a1=(axx*ReFRFxx+ayy*ReFRFyy)+((axx*ImFRFxx+ayy*ImFRFyy))*i;
    M=[a0 a1 1];  A=roots(M);
    ReA1(t2)=real(A(1));  ImA1(t2)=imag(A(1));
    K1=ImA1(t2)/ReA1(t2);
    blim1(t2)=-2*pi*ReA1(t2)*(1+K1^2)/(Nt*Kt);
    Fil(t2)=atan(K1);  Eps1=pi-2*Fil(t2);
    tao10=((Eps1+2*2*pi)/wc2(t2));
    Omg1L(t2)=60/(Nt*tao10);
    t2=t2+1;      wc2(t2)=wc2(t2-1)+0.5;
end; 2

t3=1;  wc3(t3)=st(3);
while wc3(t3)<=ex(3)

```

```

rx=wc3(t3)/wx; ry=wc3(t3)/wy;
ReFRFxx=(1/kx)*((1-rx^2)/((1-rx^2)^2+(2*cx*rx)^2));
ImFRFxx=(1/kx)*((-2*cx*rx)/((1-rx^2)^2+(2*cx*rx)^2));%
ImFRFyy=(1/ky)*((1-ry^2)/((1-ry^2)^2+(2*cy*ry)^2));
ReFRFyy=(1/ky)*((-2*cy*ry)/((1-ry^2)^2+(2*cy*ry)^2));
a0=((ReFRFxx*ReFRFyy-ImFRFxx*ImFRFyy)+(ReFRFxx*ImFRFyy-
ImFRFxx*ReFRFyy)*i)*(axx*ayy-ayx*axy);
a1=(axx*ReFRFxx+ayy*ReFRFyy)+((axx*ImFRFxx+ayy*ImFRFyy))*i;
M=[a0 a1 1]; A=roots(M);
ReA1(t3)=real(A(1)); ImA1(t3)=imag(A(1));
K1=ImA1(t3)/ReA1(t3);
blim2(t3)=-2*pi*ReA1(t3)*(1+K1^2)/(Nt*Kt);
Fi1(t3)=atan(K1); Eps1=pi-2*Fi1(t3);
tao10=((Eps1+3*2*pi)/wc3(t3));
Omg2L(t3)=60/(Nt*tao10);
t3=t3+1; wc3(t3)=wc3(t3-1)+0.5;
end; 3
t4=1; wc4(t4)=st(4);
while wc4(t4)<=ex(4)
rx=wc4(t4)/wx; ry=wc4(t4)/wy;
ReFRFxx=(1/kx)*((1-rx^2)/((1-rx^2)^2+(2*cx*rx)^2));
ImFRFxx=(1/kx)*((-2*cx*rx)/((1-rx^2)^2+(2*cx*rx)^2));%
ImFRFyy=(1/ky)*((1-ry^2)/((1-ry^2)^2+(2*cy*ry)^2));
ReFRFyy=(1/ky)*((-2*cy*ry)/((1-ry^2)^2+(2*cy*ry)^2));
a0=((ReFRFxx*ReFRFyy-ImFRFxx*ImFRFyy)+(ReFRFxx*ImFRFyy-
ImFRFxx*ReFRFyy)*i)*(axx*ayy-ayx*axy);
a1=(axx*ReFRFxx+ayy*ReFRFyy)+((axx*ImFRFxx+ayy*ImFRFyy))*i;
M=[a0 a1 1]; A=roots(M);
ReA1(t4)=real(A(1)); ImA1(t4)=imag(A(1));
K1=ImA1(t4)/ReA1(t4);

```



```

blim3(t4)=-2*pi*ReA1(t4)*(1+K1^2)/(Nt*Kt);
Fi1(t)=atan(K1);  Eps1=pi-2*Fi1(t);
tao10=((Eps1+4*2*pi)/wc4(t4));
Omg3L(t4)=60/(Nt*tao10);
t4=t4+1;      wc4(t4)=wc4(t4-1)+0.5;
end; 4
t5=1;  wc5(t5)=st(5);
while wc5(t5)<=ex(5)
    rx=wc5(t5)/wx; ry=wc5(t5)/wy;
    ReFRFxx=(1/kx)*((1-rx^2)/((1-rx^2)^2+(2*cx*rx)^2));
    ImFRFxx=(1/kx)*((-2*cx*rx)/((1-rx^2)^2+(2*cx*rx)^2));%
    ImFRFyy=(1/ky)*((1-ry^2)/((1-ry^2)^2+(2*cy*ry)^2));
    ReFRFyy=(1/ky)*((-2*cy*ry)/((1-ry^2)^2+(2*cy*ry)^2));
    a0=((ReFRFxx*ReFRFyy-ImFRFxx*ImFRFyy)+(ReFRFxx*ImFRFyy-
ImFRFxx*ReFRFyy)*i)*(axx*ayy-ayx*axy);
    a1=(axx*ReFRFxx+ayy*ReFRFyy)+((axx*ImFRFxx+ayy*ImFRFyy))*i;
    M=[a0 a1 1];  A=roots(M);
    ReA1(t5)=real(A(1));  ImA1(t5)=imag(A(1));
    K1=ImA1(t5)/ReA1(t5);
    blim4(t5)=-2*pi*ReA1(t5)*(1+K1^2)/(Nt*Kt);
    Fi1(t5)=atan(K1);  Eps1=pi-2*Fi1(t5);
    tao10=((Eps1+5*2*pi)/wc5(t5));
    Omg4L(t5)=60/(Nt*tao10);
    t5=t5+1;      wc5(t5)=wc5(t5-1)+0.5;
end; 5
t6=1;  wc6(t6)=st(6);
while wc6(t6)<=ex(6)
    rx=wc6(t6)/wx; ry=wc6(t6)/wy;
    ReFRFxx=(1/kx)*((1-rx^2)/((1-rx^2)^2+(2*cx*rx)^2));

```

```

ImFRFxx=(1/kx)*((-2*cx*rx)/((1-rx^2)^2+(2*cx*rx)^2));%
ImFRFyy=(1/ky)*((1-ry^2)/((1-ry^2)^2+(2*cy*ry)^2));
ReFRFyy=(1/ky)*((-2*cy*ry)/((1-ry^2)^2+(2*cy*ry)^2));
a0=((ReFRFxx*ReFRFyy-ImFRFxx*ImFRFyy)+(ReFRFxx*ImFRFyy-
ImFRFxx*ReFRFyy)*i)*(axx*ayy-ayx*axy);
a1=(axx*ReFRFxx+ayy*ReFRFyy)+((axx*ImFRFxx+ayy*ImFRFyy))*i;
M=[a0 a1 1]; A=roots(M);
ReA1(t6)=real(A(1)); ImA1(t6)=imag(A(1));
K1=ImA1(t6)/ReA1(t6);
blim5(t6)=-2*pi*ReA1(t6)*(1+K1^2)/(Nt*Kt);
Fil(t6)=atan(K1); Eps1=pi-2*Fil(t6);
tao10=((Eps1+6*2*pi)/wc6(t6));
Omg5L(t6)=60/(Nt*tao10);
t6=t6+1; wc6(t6)=wc6(t6-1)+0.5;
end; 6
t7=1; wc7(t7)=st(7);
while wc7(t7)<=ex(7)
rx=wc7(t7)/wx; ry=wc7(t7)/wy;
ReFRFxx=(1/kx)*((1-rx^2)/((1-rx^2)^2+(2*cx*rx)^2));
ImFRFxx=(1/kx)*((-2*cx*rx)/((1-rx^2)^2+(2*cx*rx)^2));%
ImFRFyy=(1/ky)*((1-ry^2)/((1-ry^2)^2+(2*cy*ry)^2));
ReFRFyy=(1/ky)*((-2*cy*ry)/((1-ry^2)^2+(2*cy*ry)^2));
a0=((ReFRFxx*ReFRFyy-ImFRFxx*ImFRFyy)+(ReFRFxx*ImFRFyy-
ImFRFxx*ReFRFyy)*i)*(axx*ayy-ayx*axy);
a1=(axx*ReFRFxx+ayy*ReFRFyy)+((axx*ImFRFxx+ayy*ImFRFyy))*i;
M=[a0 a1 1]; A=roots(M);
ReA1(t7)=real(A(1)); ImA1(t7)=imag(A(1));
K1=ImA1(t7)/ReA1(t7);
blim6(t7)=-2*pi*ReA1(t7)*(1+K1^2)/(Nt*Kt);
Fil(t7)=atan(K1); Eps1=pi-2*Fil(t7);

```

```

tao10=((Eps1+7*2*pi)/wc7(t7));
Omg6L(t7)=60/(Nt*tao10);
t7=t7+1;    wc7(t7)=wc7(t7-1)+0.5;
end;
t8=1;    wc8(t8)=st(8);
while wc8(t8)<=ex(8)
    rx=wc8(t8)/wx; ry=wc8(t8)/wy;
    ReFRFxx=(1/kx)*((1-rx^2)/((1-rx^2)^2+(2*cx*rx)^2));
    ImFRFxx=(1/kx)*((-2*cx*rx)/((1-rx^2)^2+(2*cx*rx)^2));%
    ImFRFyy=(1/ky)*((1-ry^2)/((1-ry^2)^2+(2*cy*ry)^2));
    ReFRFyy=(1/ky)*((-2*cy*ry)/((1-ry^2)^2+(2*cy*ry)^2));
    a0=((ReFRFxx*ReFRFyy-ImFRFxx*ImFRFyy)+(ReFRFxx*ImFRFyy-
ImFRFxx*ReFRFyy)*i)*(axx*ayy-ayx*axy);
    a1=(axx*ReFRFxx+ayy*ReFRFyy)+((axx*ImFRFxx+ayy*ImFRFyy))*i;
    M=[a0 a1 1]; A=roots(M);
    ReA1(t8)=real(A(1));    ImA1(t8)=imag(A(1));
    K1=ImA1(t8)/ReA1(t8);
    blim7(t8)=-2*pi*ReA1(t8)*(1+K1^2)/(Nt*Kt);
    Fi1(t8)=atan(K1);    Eps1=pi-2*Fi1(t8);
    tao10=((Eps1+8*2*pi)/wc8(t8));
    Omg7L(t8)=60/(Nt*tao10);
    t8=t8+1;    wc8(t8)=wc8(t8-1)+0.5;
end; plot(Omg0L,blim0,'b',Omg1L,blim1,'b',Omg2L,blim2,'b',Omg3L,blim3,'b',Omg4L,blim4,'b',O
mg5L,blim5,'b',Omg6L,blim6,'b',Omg7L,blim7,'b');

```

## *Cálculo de las Fuerzas Dinámicas del Corte bajo Condiciones Estables*

Para el cálculo de las Fuerzas se desarrolló un algoritmo con el software MatLab8®

Una vez hechos los cálculos de los lóbulos de estabilidad se procede a calcular el diagrama de fuerzas dinámicas de corte para un proceso de fresado bajo condiciones estables, cuyos datos de entrada se extraen del gráfico de los lóbulos ya indicado.

Los diagramas de fuerza sirven como guía al operario para saber cuáles son las fuerzas de corte máximas producidas sobre la pieza de trabajo y sobre la herramienta, además del torque máximo producido y la potencia mínima requerida (bajo condiciones estables) para realizar el corte sin que se “tranque” la herramienta.

Para realizar los cálculos del diagrama de fuerzas, el torque y la potencia fue necesario introducir los siguientes datos:

- Diámetro de la herramienta de corte.
- Inmersión de la herramienta de corte en la pieza.
- La velocidad rotacional de la herramienta.
- Dirección de fresado, es decir, si se encuentra en oposición (up milling) o en concordancia (Down milling).
- Número de dientes de la herramienta.
- Profundidad de corte axial.
- Velocidad de avance.

### ***Modo de Funcionamiento del Algoritmo***

Lo primero que hace el algoritmo es determinar el tipo de fresado (en oposición o concordancia) para luego determinar los ángulos de entrada y salida de la herramienta al momento de cortar la pieza de acuerdo al grado de inmersión introducido. Luego, el algoritmo calcula el avance por diente  $f_t$  de acuerdo al número de dientes, la velocidad de rotación del husillo y el avance lineal introducidos previamente. Posteriormente, se calcula el ángulo de paso entre dientes y el rango de corte de acuerdo a los ángulos de entrada y salida de la herramienta.

El algoritmo está diseñado para hacer los cálculos de fuerzas para una vuelta entera de la herramienta de corte (360 grados) de manera que se pueda ver en la gráfica las fuerzas de corte debido a cada uno de los dientes de la herramienta. Los cálculos se realizan cada  $d\phi$ , el cual va aumentando de 0 a 360 grados para cubrir una vuelta completa, el  $d\phi$  viene por defecto como 1 grado.

Para realizar los cálculos se utilizó un ciclo que va incrementando la variable  $d\phi$ . Al comienzo de cada iteración el algoritmo va salvando en un vector (phi1) el valor de cada  $d\phi$ . Luego, dentro del primer ciclo se creó un segundo ciclo para poder salvar dentro de una matriz (phi2) los valores de los  $d\phi$  barridos por cada diente de la herramienta. Después se determinan los ángulos de entrada y salida de cada diente al momento de cortar, se usó una función escalón ( $g(\phi)$ ) tal que vale 1 si el diente examinado se encuentra cortando y vale 0 en caso contrario; esta función se multiplicó por la ecuación (2) la cual es la ecuación de viruta instantánea de manera que si el diente está cortando se calcula el espesor de viruta, en caso contrario no lo hace. Los valores producidos por la ecuación (2) para cada diente se van almacenando en una matriz  $h_{i,j}$ , donde en  $i$  se van guardando los valores calculados para cada  $d\phi$  y  $j$  representa el diente correspondiente a dichos cálculos.

Una vez obtenidos los valores del espesor de viruta instantáneo para cada iteración se calcularon las fuerzas normal ( $F_n$ ) y tangencial ( $F_t$ ) producidas por cada diente, para luego calcular las fuerzas en  $x$  ( $F_x$ ) y  $y$  ( $F_y$ ), y la fuerza total ( $F$ ) correspondientes a cada iteración y a cada diente; si se presentan múltiples dientes cortando a la vez estas fuerzas se suman de acuerdo a las ecuaciones (2.15) y (2.16). Finalmente, el algoritmo grafica todas estas fuerzas, se determina la fuerza total ( $F$ ) y Torque ( $T$ ) máximos y la Potencia mínima requerida para efectuar el proceso de corte.

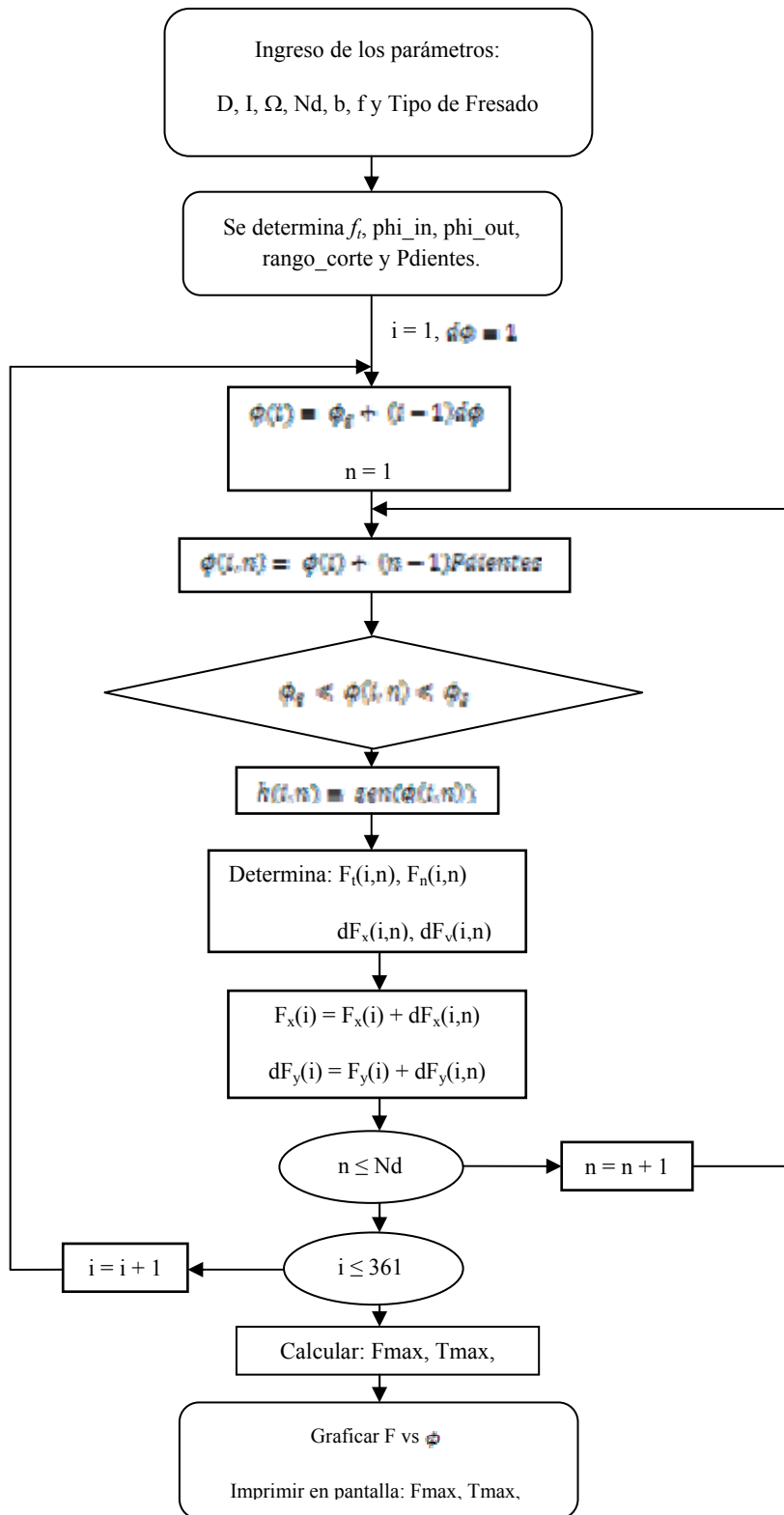
### ***Nomenclatura Utilizada en el Código para la Generación de los Gráficos de Fuerzas***

La Nomenclatura utilizada en el código para generar las gráficas de fuerzas es la siguiente:

- Nd: Número de dientes
- milling: Para indicar el tipo de operación de fresado (en concordancia o en oposición)
- phi\_in: Ángulo de entrada [grados]
- phi\_out: Ángulo de salida [grados]
- D: Diámetro de la herramienta [mm]
- r: Radio de la herramienta [mm]
- Omega: Velocidad rotacional del husillo [rpm]
- $f_t$ : avance por diente [mm/diente]
- f: avance lineal [mm/min]
- b: Profundidad de corte axial [mm]
- Kn: Coeficiente de corte en la dirección normal [ $N/mm^2$ ]
- Kt: Coeficiente de corte en la dirección tangencial [ $N/mm^2$ ]
- rango\_corte: Rango de corte de la herramienta en la pieza [grados]

- $P_{dientes}$ : Ángulo de paso entre los dientes [grados]
- $D\phi_i$ : diferencial del ángulo  $\phi$  ( $d\phi$ ) [grados]
- $i$ : Contador de posiciones vectoriales
- $n$ : Contador de dientes
- $\phi_{barrido}$ : Ángulo barrido a medida que va aumentando ( $d\phi$ ) [grados]
- Contador: Contador de iteraciones
- $\phi_{i1}$ : Es el vector donde se guardan todos los ángulos barridos [grados]
- $C_i$ : Es el comienzo de las iteraciones para el momento en que cada diente entra al corte [grados]
- $F_i$ : Es final de las iteraciones cuando cada diente sale del corte [grados]
- $\phi_{i2}$ : matriz que guarda los ángulos barridos por cada diente [grados]
- $g$ : Función escalón
- $h$ : Espesor de viruta instantáneo [mm]
- $F_t$ : Fuerza en la dirección tangencial [N]
- $F_n$ : Fuerza en la dirección normal [N]
- $DF_x$ : Diferencial  $\Delta F_x$  correspondiente a cada iteración [N]
- $DF_y$ : Diferencial  $\Delta F_y$  correspondiente a cada iteración [N]
- $F_x$ : Fuerza  $F$  proyectada en la dirección  $x$  [N]
- $F_y$ : Fuerza  $F$  proyectada en la dirección  $y$  [N]
- $F$ : Fuerza total [N]
- $F_{max}$ : Fuerza máxima durante el corte [N]
- $T_{max}$ : Torque mínimo requerido para el proceso de corte [N.mm]
- $P_{min}$ : Potencia mínima requerida para el proceso de corte [Watt]

**Diagrama de Flujo del Algoritmo Utilizado para la  
Generación de los Gráficos de Fuerzas**





## **Código Desarrollado para la Generación de los Gráficos de Fuerzas**

```
format short;
clear all;
clc

D =20;..... Diametro de la Herramienta [mm]
r = D/2;..... Radio de la Herramienta [mm]
I = 5;..... Inmersión Radial de Corte [mm]
Nd = 4;..... Numero de Dientes en la Herramienta
Omega= 25;..... Velocidad Rotacional de la Herramienta [rpm]
f= 1000;..... Avance lineal de la Herramienta [mm/min]
b = 5;..... Profundidad de Corte Axial [mm]
Kn = 250;..... Constante de Corte en la Dirección Normal [N/mm^2]
Kt = 750;..... Constante de Corte en la Dirección Radial [N/mm^2]
milling = 1;..... Fresado en Oposición (Up Milling)
milling = 2;..... Fresado en Concordancia (Down Milling)

ft = f/(Omega*Nd);
if milling == 1

    phi_in = 0*180/pi;..... Ángulo de
Inmersión de la Herramienta [grados]
    phi_out = (acos((r - I) / r))*180/pi;..... Ángulo de Salida
de la Herramienta [grados]
    rango_corte = abs(phi_in - phi_out);..... Rango de corte de
la herramienta en la pieza [grados]

elseif milling == 2

    phi_in = (pi - acos((r - I) / r))*180/pi;
    phi_out = 180;
    rango_corte = abs(phi_in - phi_out);

end

Pdientes = 360/Nd;..... Ángulo de paso entre dientes [grados]
Dphi = 1;..... Diferencial Angular [grados]

i=1;
phi_barrido = phi_in;
for contador = phi_in:1:phi_in + 1080
    Fx(i) = 0;
    Fy(i) = 0;
    F(i) = 0;

    phil(i) = phi_in*pi/180 + (i-1)*Dphi*pi/180;
```

```

for n = 1:1:Nd*3

    phi2(i,n) = phi1(i) + (n-1)*Pdientes*pi/180;

    Ci= phi_in + (n-1)*Pdientes;
    Fi= phi_out + (n-1)*Pdientes;

    if phi_barrido >= Ci && phi_barrido <= Fi
        g=1;
    else
        g=0;
    end;

    h(i,n) = ft*sin(phi2(i,n))*g;
    Ft = Kt*b*h(i,n);
    Fn = Kn*b*h(i,n);

    DFx(i,n) = Ft*cos(phi2(i,n)) + Fn*sin(phi2(i,n));
    DFy(i,n) = Ft*sin(phi2(i,n)) - Fn*cos(phi2(i,n));

    if DFy(i,n) < 0
        DFy(i,n)= 0;
    end

end

for N = 1:1:Nd*3
    Fx(i) = Fx(i) + DFx(i,N);
    Fy(i) = Fy(i) + DFy(i,N);
    F(i) = sqrt(Fx(i)^2 + Fy(i)^2);
end

phi_barrido = phi_barrido + 1;
i=i+1;
end

i=0;
for n = 1:1:361
    phi(n) = i;
    i=i+1;
end

if rango_corte < Pdientes

    j = 360;
    for i = 1:1:Pdientes + 1

        Fx2(i) = Fx(j);
        Fy2(i) = Fy(j);
    end
end

```

```

        j =j+1;
        end

    end

    if rango_corte > Pdientes

        j = 360;
        for i = 1:1:rango_corte + 1

            Fx2(i) = Fx(j);
            Fy2(i) = Fy(j);

            j =j+1;
            end

        end

        i = 1;
        for n = 1:1:361

            if i > Pdientes + 1
                i = 1;
            end

            Fx3(n) = Fx2(i);
            Fy3(n) = Fy2(i);
            Ftotal(n) = sqrt(Fx3(i)^2 + Fy3(i)^2);

            i=i+1;
            end

        close
        figure(1)
        plot(phi, Fx3, '--g',phi, Fy3,'--m', phi, Ftotal, 'black');
        title('DIAGRAMA DE FUERZAS');
        xlabel('Phi [Grados]');
        ylabel('Fuerza [N]');

        Fmax = max(Ftotal);
        Tmax = Fmax*(D/2);
        Pmin = Fmax*f*(1/60)*(1/1000);

        fprintf('La Fuerza máxima producida es: %f N\n\n', Fmax);
        fprintf('El Torque máxima producido es: %f N.mm\n\n', Tmax);
        fprintf('La Potencia mínima requerida es: %f Watt\n\n', Pmin);

```

## CAPÍTULO IV

### *ANÁLISIS Y COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS*

En el trabajo especial de grado, usando la herramienta numérica MatLab8®, se desarrolló un código para la predicción del fenómeno de retemblado en un proceso de fresado con una herramienta de eje de rotación vertical, basándose en modelos teóricos de estabilidad en máquinas herramientas realizados por el Dr. Yusuf Altintas.

Para poder verificar los resultados es necesario compararlos con trabajos de otros autores con las mismas condiciones de trabajo. Existen diferentes métodos para generar los lóbulos de estabilidad y por ser aproximaciones numéricas, dichos métodos difieren de acuerdo a las consideraciones tomadas por cada autor y la forma en la que se realizan los cálculos. Hay que destacar que los resultados obtenidos teóricamente son aproximaciones de los resultados obtenidos experimentalmente. Los datos que se utiliza tales como, el factor de amortiguamiento ( $\zeta$ ), las constantes elásticas de la máquina herramienta, son valores obtenidos experimentalmente, es decir, son valores promedios.

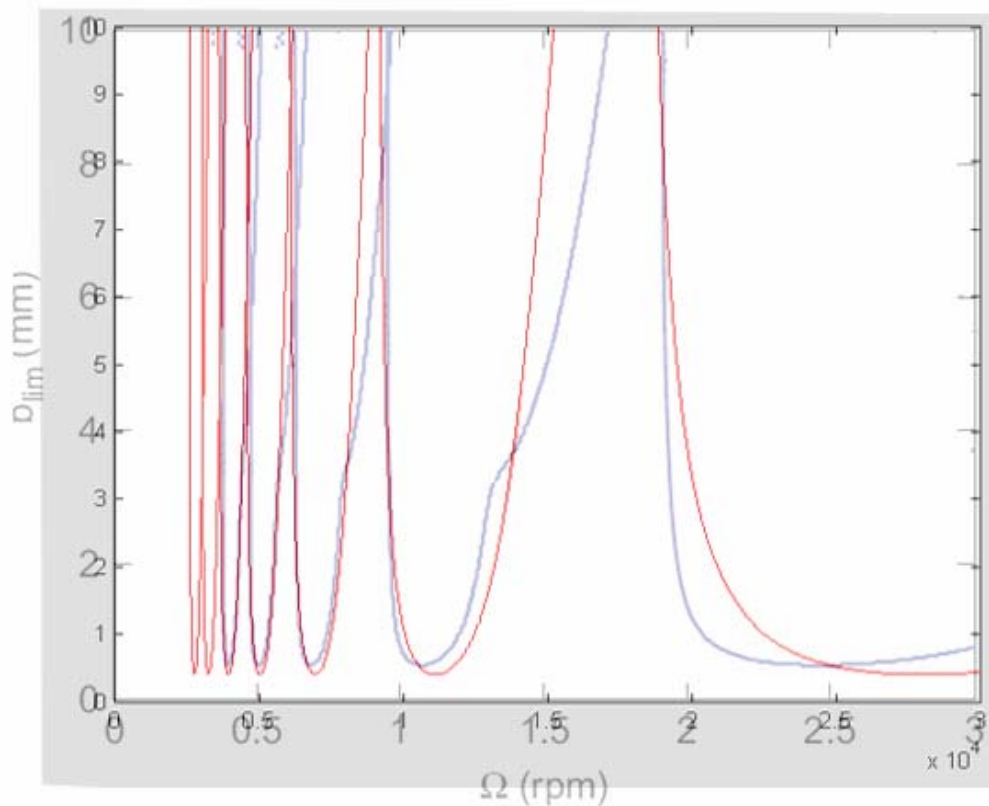
Otro punto a tomar en cuenta es que todos los datos para cada método son diferentes. Por ejemplo, para el gráfico de estabilidad por el método desarrollado por el Dr. Altintas, las variables a comparar son la profundidad de límite corte axial y la velocidad de rotación de husillo, en cambio para el método del Dr. Tobías las variables son la relación entre el factor de amortiguamiento crítico y el efectivo.

El método utilizado para este trabajo especial de grado fue el desarrollado por el Dr. Altintas, donde el estudio de estabilidad se basa en la generación de viruta y las ondulaciones producidas por el diente anterior al diente en acción de corte. Este método, se encuentra comercializado en un software computacional llamado CutPro.

A continuación, se realiza la comparación de la gráfica de los lóbulos de estabilidad generada por el código desarrollado para este trabajo especial de grado con un ejemplo encontrado en el libro titulado “Machining Dynamics” de autores Tony L. Schmitz y Kevin S. Smith, ya que utilizan la misma metodología para generar los lóbulos sólo con cambios leves que no afectan considerablemente los resultados.

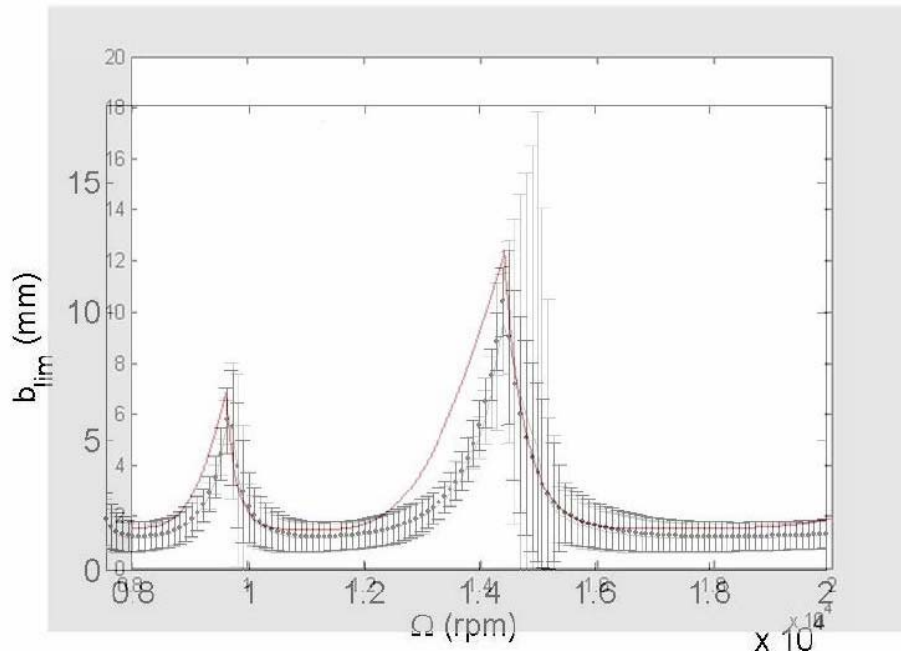
La figura 36 muestra la comparación de los dos gráficos, donde las curvas de color rojo son generadas por el código del trabajo de grado. Se puede observar que las gráficas son muy similares para revoluciones por debajo de 10.000 rpm porque a revoluciones bajas los lóbulos se hacen más estrechos.

La ecuación de profundidad de corte límite utilizada por los autores del libro para generar los lóbulos, difieren de la ecuación utilizada por el método de Altintas; estas diferencias se deben a que utilizaron el comando *eig()* de MatLab para calcular los autovalores de la matriz de función de transferencia orientada, dando como resultado la parte real positiva. Este cambio en la ecuación de profundidad de corte límite genera, para ciertas condiciones, un cambio en la curvatura como podemos apreciar en las curvas de color azul de la Figura 36. En el libro del Dr. Yusuf Altintas, “*Manufacturing Automation*”, las gráficas de los lóbulos de estabilidad para un procesos de fresado no tienen esa curvatura.



*Figura 36: Comparación de resultados (Fuente: los autores)*

En la siguiente comparación, la gráfica fue obtenida de un Paper que se titula **“Uncertainty Propagation for selected analytical milling stability limit analyses”**, realizado por: G. Scott Duncan, Mohammad H. Kurdi, Tony L. Schmitz de la Universidad de Florida, Departamento de Ingeniería Mecánica y Aeroespacial. La gráfica compara dos métodos diferentes, el de Thuly, que se basa en aproximar el fenómeno de retemblado de dos grado de libertad a un grado proyectando las dirección “X” y “Y” en la dirección normal al plano de corte y el otro método es el desarrollado por el Dr. Altintas.



**Figura 37: Comparación de resultados (Fuente: Los Autores)**

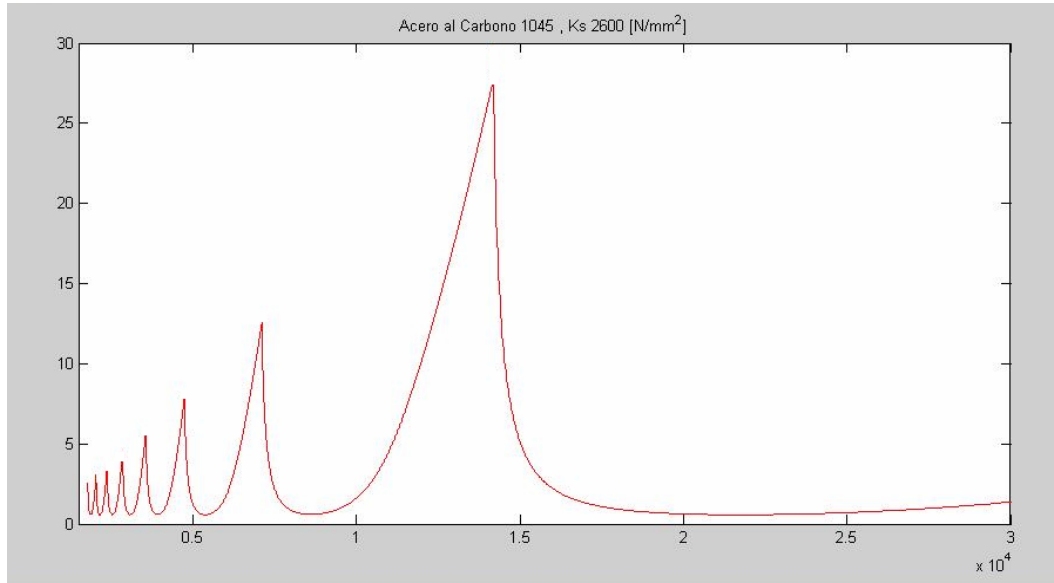
Las líneas por puntos representa el método desarrollado por el Dr. Altintas, las líneas rectas representa el método desarrollado por Tlusty, la línea continua de color rojo es la generada por el código desarrollado en este trabajo de grado. Nótese que la línea se superpone con algunos puntos al método de Altintas y lo relevante es que los puntos de intersección, es decir, los puntos máximos de la grafica están muy cerca entre los métodos. Es de gran importancia que los puntos máximos coincidan debido que por debajo de ellos se encuentra la zona estable, es decir, sin la presencia de retemblado.

Las diferencias de que se aprecian en la figura 36 se deben a los diferentes métodos de aproximación numérica, y como se señaló ninguno de los métodos es exacto, todos los métodos son aproximaciones de procesos reales; por lo que pequeñas variaciones entre las graficas se consideran aceptables.

Otra forma para afirmar el buen funcionamiento del código, es variando las condiciones de corte y observar la forma en que varía el gráfico.

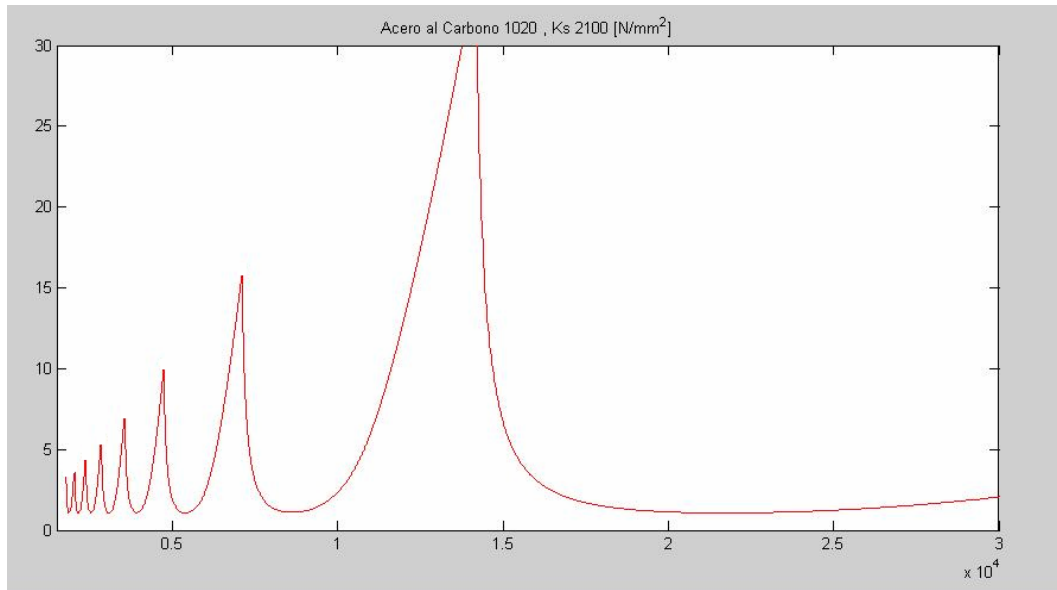
A continuación se presentan una serie de gráficos de corridas del código con los mismos datos de la máquina herramienta pero variando el material de la pieza de trabajo. Los resultados esperados serían que la gráfica con el material más dúctil tenga el límite de profundidad de corte mayor a la de un material más duro.

En la Figura 38 se graficaron los lóbulos de estabilidad para el acero al carbono AISI 1045 donde la menor profundidad mínima de corte es de 0.57mm; en la figura 39 para el acero AISI 1020 con la profundidad mínima de corte de 1.07mm, y; en la figura 40, para el Aluminio Al 6061 T6 con una profundidad mínima de corte de 5.70mm. Estos resultados son justamente los esperados, dando más fiabilidad al código desarrollado para este trabajo especial de grado.

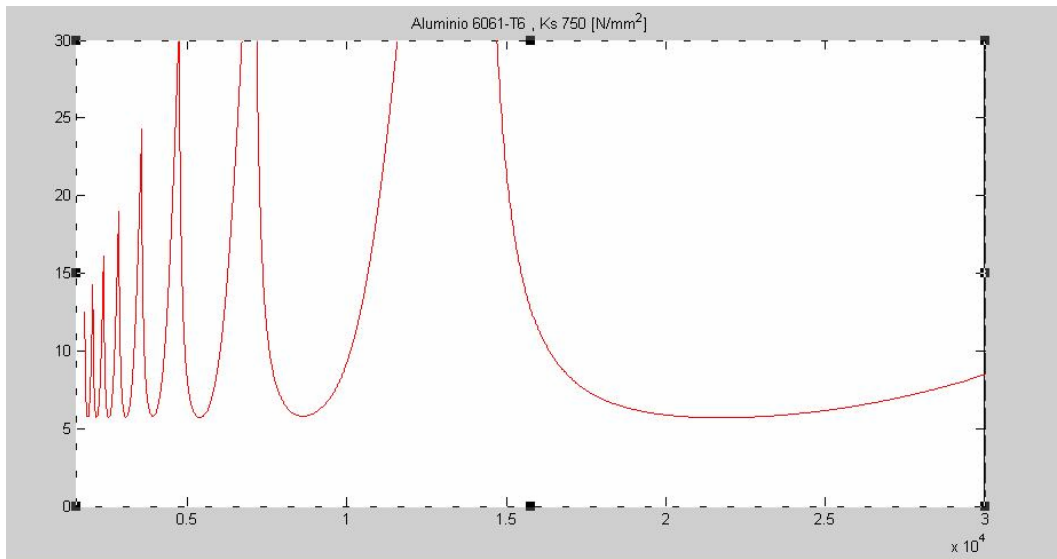


**Figura 38: Lóbulos de estabilidad para Acero AISI 1045 (Fuente: Los Autores)**





**Figura 39: Lóbulos de estabilidad para Acero AISI 1020 (Fuente: Los Autores)**

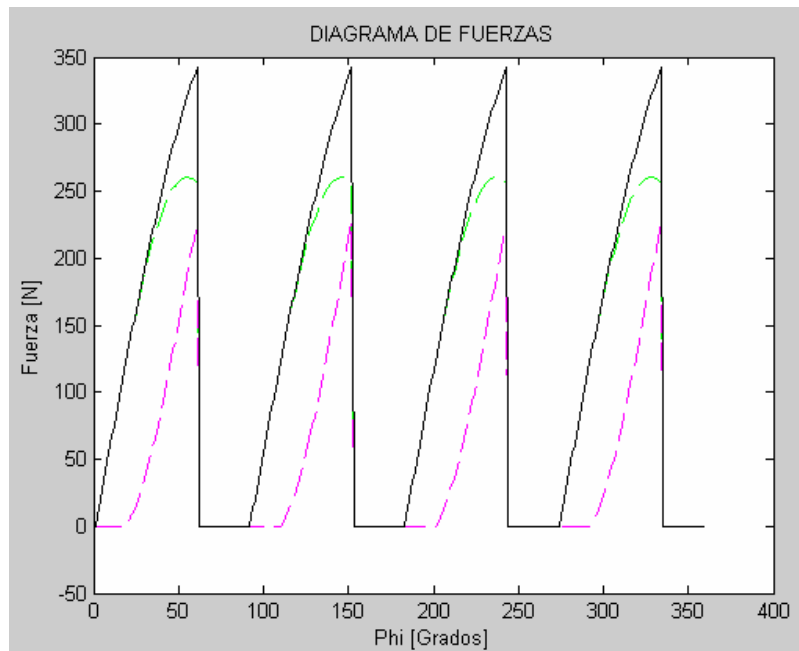


**Figura 40: Lóbulos de estabilidad para el Aluminio Al 6061 T6 (Fuente: Los Autores)**

## **ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LAS FUERZAS PRODUCIDAS POR EL PROCESO DINÁMICO DE CORTE BAJO CONDICIONES ESTABLES**

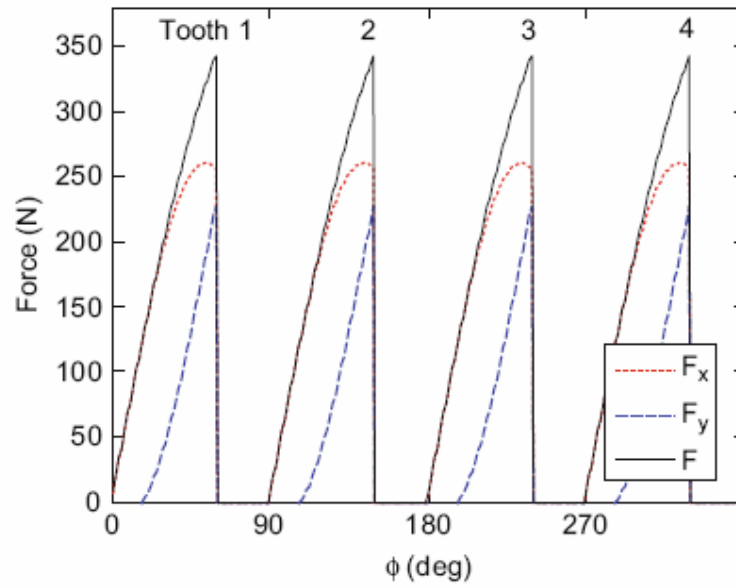
En el código para predecir las dinámicas producidas durante un proceso de corte en condiciones estables se simularon tres casos principales cuyos datos fueron extraídos del libro “Machining Dynamics” del Dr. Tony L. Schmitz, y los resultados fueron comparados con los resultados obtenidos por él en su libro.

En la figura 41 se muestra una gráfica de fuerzas para un proceso de fresado en oposición cuyos datos son los siguientes: 25% de inmersión radial, para una herramienta de un diámetro 19mm,  $N_d = 4$  dientes, con constantes  $K_t = 750 \text{ N/mm}^2$ , y  $K_n = 250 \text{ N/mm}^2$ , con una profundidad axial de corte  $b=5\text{mm}$ , y  $f_t = 0,1 \text{ mm/diente}$ .



**Figura 41: Diagrama de Fuerzas para una Herramienta de 4 dientes rectos, para una operación de fresado en oposición (Fuente: los Autores)**

Al comparar esta figura con la del libro se puede observar que el patrón se mantiene y las fuerzas generadas son las mismas. (Ver figura 42).



**Figura 42: Diagrama de Fuerzas utilizando los mismos datos de la figura 41. (Fuente: “Machining Dynamics Frequency Response to Improved Productivity”. Tony L. Schmitz. Pág 106. 2009)**

Los mismos datos se utilizaron en una segunda prueba pero para una operación de fresado en concordancia, por lo que se puede observar que ambas gráficas (la del libro y la del código) son iguales. En este caso se puede observar que las fuerzas proyectadas en la dirección x son negativas.

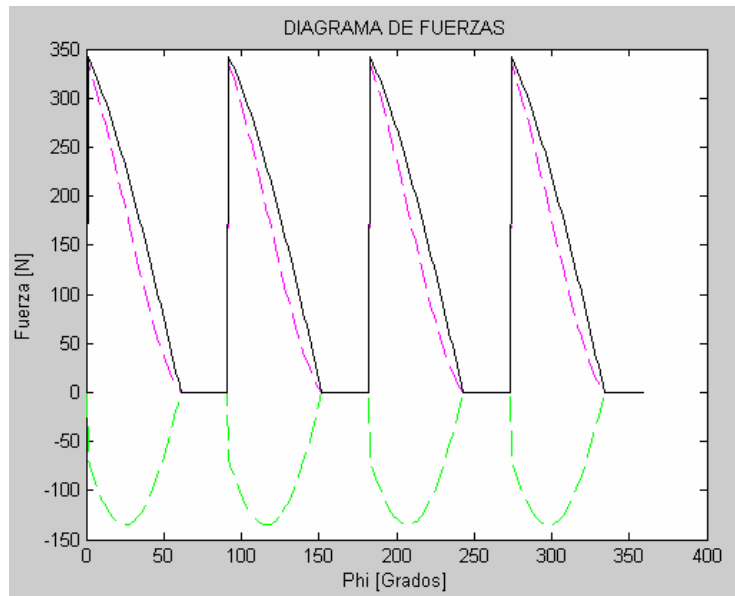


Figura 43: Diagrama de Fuerzas para una Herramienta de 4 dientes rectos, para una operación de fresado en concordancia (Fuente: los Autores)

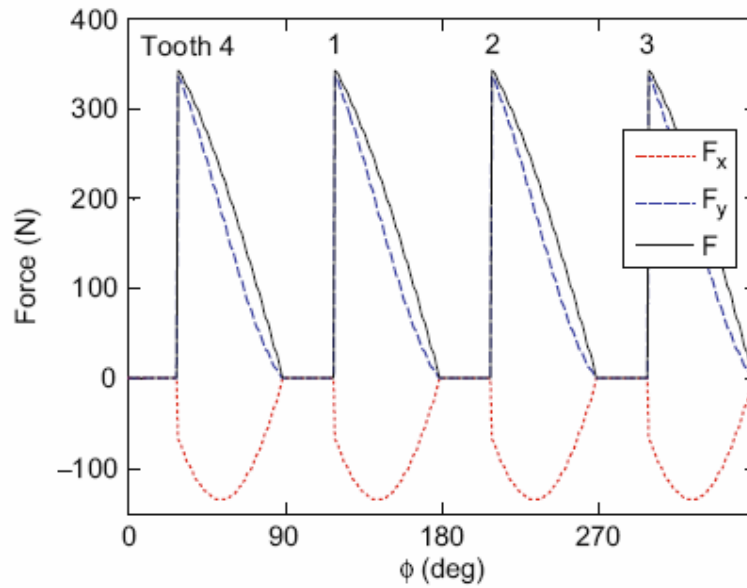
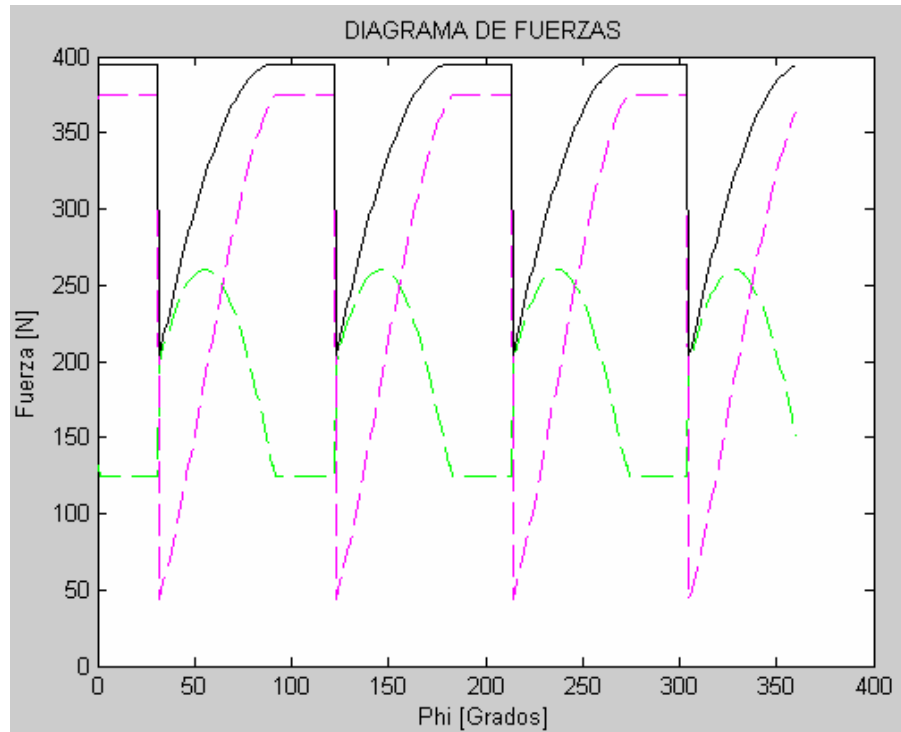
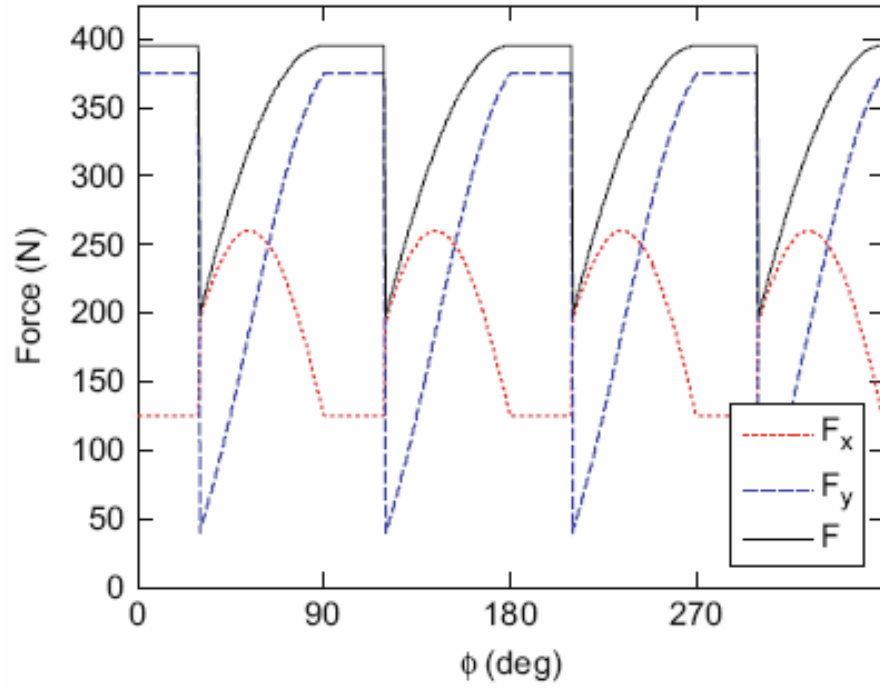


Figura 44: Diagrama de Fuerzas utilizando los mismos datos de la figura 41. (Fuente: "Machining Dynamics Frequency Response to Improved Productivity". Tony L. Schmitz, Pág 107. 2009)

Finalmente se hizo una prueba para una operación de fresado en oposición utilizando los mismos datos de la figura 41, pero con una inmersión radial de 75%, en este caso se tiene que hay partes donde dos dientes cortan la pieza a la vez, y se observa que la fuerzas nunca se hacen cero.



**Figura 45: Diagrama de Fuerzas para una Herramienta de 4 dientes rectos, para una operación de fresado en concordancia con múltiples dientes cortando a la vez (Fuente: los Autores)**



**Figura 46:** Diagrama de Fuerzas utilizando los mismos datos de la figura 41. (Fuente: “Machining Dynamics Frequency Response to Improved Productivity”. Tony L. Schmitz. Pág 111. 2009)

## CONCLUSIONES

El código computacional desarrollado proporciona la gráfica de los lóbulos de estabilidad para un proceso de fresado con una herramienta de dientes rectos. Este código suministra información fiable referente a la profundidad de corte axial y la velocidad de rotación del husillo sin la presencia de retemblado.

Después de simular con distintos materiales se puede decir que en operaciones de fresado con materiales de alta dureza se puede lograr una mejor eficiencia del proceso haciendo una selección adecuada de una profundidad de corte y velocidad del husillo donde no se presente el fenómeno de retemblado de acuerdo a los lóbulos de estabilidad simulados.

También se puede concluir que a medida que aumenta la velocidad rotacional del husillo se puede aumentar en gran medida la tasa de remoción de material porque a altas rpm hay más zona estable en la gráfica donde se puede seleccionar un punto de trabajo con mayor profundidad, por el contrario, indistintamente del material a muy bajas rpm, ya por debajo de 2000 rpm aproximadamente los lóbulos de estabilidad se acercan mucho entre ellos haciendo que la mayor profundidad axial de corte que se pueda alcanzar se vuelva un valor constante, el cual sería el punto mínimo de los lóbulos.

Es importante comentar, que para materiales más blandos se puede lograr una mayor tasa de remoción de material que para materiales más duros, ya que las profundidades axiales de corte mínima de cada lóbulo se hacen mayor a medida que es más blando el material.

Para procesos de fresado más complejos con geometrías de herramientas más complejas el método teórico utilizado no puede ser aplicado, por lo tanto, el código no suministraría resultados fiables.

Además de los lóbulos de estabilidad, el programa proporciona el gráfico de las fuerzas generadas para un proceso estable de corte. Una vez obtenido los lóbulos de estabilidad el usuario puede escoger un punto de trabajo estable y simular las fuerzas generadas bajo esas condiciones, de esa manera puede conocer las fuerzas máximas ejercidas tanto en la pieza como en la herramienta de corte. Otra información importante suministrada por el programa son el torque máximo y la potencia mínima generada durante el proceso de corte, así el usuario podrá seleccionar en la máquina cuál es la potencia mínima con la que tiene que trabajar para que no se tranque la herramienta al intentar cortar la pieza.

Se realizó la limpieza de los lóbulos mediante la programación de un código adicional con la finalidad de obtener una imagen clara de la línea que separa la zona estable de la zona en presencia de retemblado.

La fiabilidad de los resultados está estrechamente relacionada con la fiabilidad de las constantes utilizadas, tales como las frecuencias naturales en  $X$  y  $Y$ , los factores de amortiguamiento ( $\zeta_x$ ,  $\zeta_y$ ) y las constantes elásticas ( $K_x$  y  $K_y$ ) de la máquina herramienta, en específico el sistema de acople de la herramienta.

Los resultados fueron comparados con ejemplos realizados por personas que tienen amplio dominio del tema, donde la mayoría de los ejemplos fueron comparados experimentalmente. En consecuencia, podemos decir que los resultados obtenidos son aceptables.

En el país, los estudios de vibraciones aplicados a máquinas herramientas son escasos, más aún si se trata de vibraciones auto excitadas o el también llamado fenómeno de retemblado regenerativo en máquinas herramientas. Por esta razón, consideramos que este trabajo especial de grado aporta información valiosa en el estudio de este fenómeno.



## RECOMENDACIONES

En la realización de este trabajo especial de grado, hay que subrayar que el tema de retemblado y vibraciones auto-excitadas no es muy conocido, pues no forma parte del contenido teórico en la materia vibraciones mecánicas, por lo que recomendamos que este tema sea anexado al contenido de la materia.

El código generado en el trabajo especial de grado es de gran utilidad. Si varían los datos de entrada, tales como las frecuencias naturales y las constantes de amortiguamiento de la máquina herramienta, el coeficiente de fuerza específica del material se puede ver gráficamente como cambia la estabilidad en el proceso de fresado y las fuerzas de corte para condiciones estables; convirtiéndolo en un instrumento Pedagógico de gran utilidad.

La fiabilidad del programa dependerá de la exactitud de los datos que se ingresen en el mismo, por ello, nuestra recomendación es realizar estudios sobre los métodos con los cuales se obtienen las frecuencias naturales, las constantes elásticas y los factores de amortiguamiento de la máquina herramienta, así como, verificar experimentalmente los resultados obtenidos teóricamente, para de esta manera desarrollar prototipos de análisis de estabilidad en máquinas herramienta. En el mercado industrial ya se encuentran programas de predicción de retemblado, como el CutPro®, creado por el Dr. Yusuf Altintas profesor de University of British Columbia y autor de la metodología utilizada en este trabajo especial de grado.

En la actualidad, uno de los objetivos principales de las empresas e industrias es maximizar la productividad obteniendo un mínimo de pérdidas de materia prima y aumentando la vida útil de la herramienta, que impacta positivamente la reducción de costos de producción y en esta búsqueda de la máxima productividad se tiene que encontrar la velocidad de corte y la tasa de remoción de material que produzca la mayor eficiencia. La implementación de programas de predicción de retemblado en

máquinas herramientas similares al elaborados en este trabajo especial de grado son fundamentales para hallar gráficamente esos puntos de máxima productividad sin la presencia de retemblado. Reducir la presencia de esta perturbación, aumenta la vida útil de la herramienta, ya que se reducen los impactos entre la herramienta y la pieza de trabajo.

Igualmente, se recomienda hacer estudios en trabajos posteriores sobre mecanismos automatizados que puedan predecir y poner en funcionamiento sistemas de control de retemblado en fresadoras.

El método aplicado en este trabajo es un método práctico con una buena aproximación, pero a pesar de las simplificaciones en las ecuaciones es recomendable aplicar otro método mucho más preciso (ejemplo método de elementos finitos) para poder lograr mejores eficiencias en los procesos de fresado.

El estudio de las fuerzas de corte desarrollado en este trabajo sólo se hizo bajo condiciones estables, se recomienda hacerlo también bajo condiciones de retemblado, y desarrollar una metodología que pueda estimar el tiempo de vida de la herramienta de corte.

Finalmente, se recomienda hacer estudios de predicción de retemblado en procesos de fresado con geometrías de herramientas más complejas e inclusive para fresadoras con más de dos grados de libertad.

## BIBLIOGRAFÍAS

- [1] Altintas, Y. (2000), “Manufacturing Automation: Metal Cutting Mechanics,- Machine Tool Vibrations, and CNC Design”. Cambridge University Press. 286 p.
- [2] Altintas, Y. (2001). “Modeling approaches and Software For Predicting the Performance of Milling Operations al MAL - UBC”. University of British Columbia. (UBC). [Revista en línea]. Disponible en: <http://www.sciencedirect.com> [Consulta: 2010, Marzo].
- [3] Altintas, Y. y Budak, E. (1995), “Analytical Prediction of Stability Lobes in Milling”. Annals of the CIRP, pp. 357-362.
- [4] ARIAS, F. (1999). “El proyecto de Investigación (Guía para su Elaboración)”. [Libro en línea]. 3era. Edición. Editorial Episteme. Disponible: <http://www.monografias.com/trabajos-pdf/proyecto-investigacion/proyecto-investigacion.pdf>
- [5] Araujo, O. y Linares J. (2008) “Ajuste teórico de los parámetros de corte en el proceso de torneado para la reducción de vibraciones por retemblado a través de una metodología numérica” Trabajo especial de grado, inédito. Universidad Central de Venezuela. Caracas.
- [6] Bayly, P. V. (2003). “Stability of Interrupted cutting by Temporal Finite element Analysis”. Washington University, St Louis [Revista en línea]. Disponible en : <http://www.sciencedirect.com> [Consulta: 2010, Febrero].
- [7] Caulfield, F. “Electromechanical Actuator Development for Integrated Chatter Prediction on High Speed Machining Centers”. Trabajo de grado de maestría. North Carolina State University. North Carolina.
- [8] Cheng K. (2009). “Machining Dynamics, Fundamentals, Applications and Practices” Londres: Springer. 328p.
- [9] Del Toro R.M, Haber, R.E, Palmies, J. y Bustillo, A. (2008). “Modelado y Simulación del Proceso de fresado a Alta Velocidad en MATLAB Simulink” Instituto de Automática Industrial. España [Revista en línea]. Disponible en:

- <http://www.sciencedirect.com> [Consulta: 2010, Marzo].
- [10] Duncan G. Mohamemd H. y Schmitz, T. (2006). “Uncertainty Propagation for Selected Analytical Milling stability Limit Analyses” University of Florida Gainesville. [Revista en línea]. Disponible en: <http://www.sciencedirect.com> [Consulta: 2010, Marzo].
- [11] H. B. Lacerda, T. V. Lima. (2002). “Evaluation of Cutting Forces and Prediction of Chatter Vibrations in Milling”. Escuela de Ingeniería Mecánica. Universidad Federal de Uberlandia. MG Brazil. [Revista en línea]. Disponible en: <http://www.sciencedirect.com> [Consulta: 2010, Febrero].
- [12] HUNT, B. y otros. (2001). “A Guide to MATLAB for Beginners and Experienced Users”. [Libro en línea]. Cambridge University Press. Disponible:  
<http://www.cambridge.org/us/catalogue/catalogue.asp?isbn=9780521615655>  
[Consulta: 2010, Abril].
- [13] Insperger, T., Stépán, G., (2000), “Stability of the Milling Process, Periodica Polytechnica”, 44:47–57.
- [14] Kalpakjian, S. (2002). “Manufactura, ingeniería y tecnología”. University of Notre Dame. Inglaterra. pp 534-774.
- [15] Koenigsberger, F., Thusty, J., (1967), “Machine Tool Structures-Vol. I: Stability Against Chatter”, Pergamon Press.
- [16] LEÓN, J. (2004) “Dinámica de máquinas (Introducción a la teoría de máquinas)”. Caracas, Venezuela. Universidad Simón Bolívar. 380 p.
- [17] Máquinas herramientas, Fresadoras. Disponible: <http://www.Wikipedia.com>. [Enciclopedia en línea]. [Consulta: Enero 2010].
- [18] Correa, M., y otros. (2000). “Factores que afectan el acabado superficial en los procesos de mecanizado: técnica de análisis y Modelos”. Instituto de Automática Industrial. Madrid, España.
- [19] Eyian, M., H. Onozuka. (2007). “Modeling of Metal Cutting”. Technische Universiteit Eindhoven. Department of Mechanical Engineering, section Dynamics and Control Technology. Eindhoven, Holanda.

- [20] Radhakrisnan, A. (2007). “Experimental And Numerical Inverication of Subcritical Bifurcations In Millins” Trabajo de grado de maestría, University of Missouri-Columbia. [Consulta: abril 2010].
- [21] RÁNDEZ, L. (2007). “Introducción al MATLAB” [Manual en línea]. Universidad de Zaragoza. Facultad de Ciencias. Departamento de Matemática Aplicada. Disponible: <http://pcmap.unizar.es/~randez/matlab.pdf> [Consulta: 2010, Marzo].
- [22] Faassen, R., (2006). “Modelling and detection of machine tool chatter in high speed milling”. Department of Mechanicals Engineering. Eindhoven University of Technology. Holanda.
- [23] Schmitz, T. y otros (2009). “Machining Dynamics, Frequency Responce to Improved Productivity”. University of Florida. Mechanical and Aerospace Engineering. Gainesville, Florida. 303 p.
- [24] Tamás, I. y otros.(2001). “Experimental Identification of Chatter in Milling”. Department of Applied Mechanics. Washington University in St. Louis.
- [25] Tobias, S.A., (1965), “Vibraciones en Maquinas Herramientas”. Ediciones Urmo. Bilbao. 389 p.
- [26] UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA. Facultad de Ingeniería. Comisión de Bibliotecas. (2005). “Instructivo para la presentación de trabajos especiales de grado”. Caracas: Lic. María Padrón.
- [27] Wiercigroch, M. (1997), “Chaotic vibrations of a simple model of the machine tool-cutting process system”. Transactions of the ASME: Journal of Vibration Acoustics, pp 468–475
- [28] Zhongqun, L. Qiang , L. (2008). “Solution and Analysis of Chatter Stability for End Milling in the Time-domain”. Escuela de Ingeniería Mecánica y automatización. Universidad de Aeronáutica y Astronáutica de Beijing. China. [Revista en línea]. Disponible en: <http://www.sciencedirect.com> [Consulta: 2010, Febrero].