

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

**INTEGRACIÓN ANALÍTICA DE LA MATRIZ DE CONDUCTIVIDAD
TÉRMICA DEL ELEMENTO FINITO ISOPARAMÉTRICO
DE CUATRO NODOS**

Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
por el Br. Benavides A., Luis R.
para optar al Título de
Ingeniero Mecánico

Caracas, 2010

TRABAJO ESPECIAL DE GRADO

**INTEGRACIÓN ANALÍTICA DE LA MATRIZ DE CONDUCTIVIDAD
TÉRMICA DEL ELEMENTO FINITO ISOPARAMÉTRICO
DE CUATRO NODOS**

Tutor académico: Prof. Liber Videla N.

Tutor industrial: Ing. Gustavo Coronel

Presentado ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
por el Br. Benavides A., Luis R.
para optar al Título de
Ingeniero Mecánico

Caracas, 2010



Facultad de Ingeniería
INGENIERIA MECÁNICA
Universidad Central de Venezuela
DEPARTAMENTO DE ENERGETICA



Caracas, 10 de mayo de 2.010

ACTA

Los abajo firmantes, miembros del jurado por el Consejo de Escuela de Ingeniería Mecánica, para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por el bachiller:

BENAVIDES LUIS

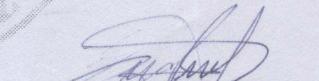
Titulado:

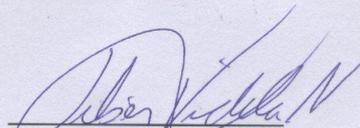
**“INTEGRACION ANALITICA DE LA MATRIZ DE CONDUCTIVIDAD TERMICA
PARA ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMETRICOS DE CUATRO NODOS”,**

Consideran que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el plan de estudio conducente al Título de Ingeniero Mecánico.


Prof. Julio Segura
Jurado




Prof. Eugenio Sansone
Jurado


Prof. Liber Videla
Tutor

“Núcleo de Ingeniería “Armando Mendoza” hacia el 30° Aniversario”

Benavides A., Luis R.

**INTEGRACIÓN ANALÍTICA DE LA MATRIZ DE CONDUCTIVIDAD
TÉRMICA DEL ELEMENTO FINITO ISOPARAMÉTRICO
DE CUATRO NODOS**

**Tutor Académico Prof. Liber Videla. Tutor Industrial Ing. Gustavo Coronel
Caracas, U.C.V. Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería Mecánica 2010.**

Palabras claves: integración analítica, matriz de conductividad, álgebra computacional, elemento finito.

Resumen.

El análisis matricial de medios continuos tiene hoy una aplicación más generalizada, como consecuencia del desarrollo computacional, optimizando así los métodos y técnicas utilizadas. Esto conduce a aplicar estos nuevos desarrollos a los problemas de transferencia de calor en conducción.

El objetivo de este trabajo es presentar la integración analítica de los términos de la matriz de transferencia de calor, utilizando un elemento finito cuadrilátero Isoparamétrico de 4 nodos para el estudio del fenómeno de conductividad térmica. Los términos obtenidos por integración analítica se compararon con los términos obtenidos por integración numérica tradicional (Cuadratura Gauss-Legendre), logrando demostrar las ganancias en los tiempos de ejecución computacional así como el aumento de la precisión de los resultados en elementos de geometría distorsionada.

Para lograr este objetivo se utilizaron técnicas de matemática simbólica, facilitando así la integración analítica de cada término. Los términos de la matriz para el fenómeno de conductividad térmica se agruparon en constantes, quedando expresiones algebraicas más sencillas en función de las variables naturales (ε, η) y estas expresiones contienen a su vez las constantes (x, y) , referentes a la geometría del problema en estudio, y adicionalmente considera el efecto combinado de conducción y convección, k y h . De esta manera se encontraron 4 ecuaciones que calculan todos los términos de la matriz. Mediante el uso de la metodología descrita, se logran obtener ganancias en tiempo de ejecución computacional del orden del 80% y respecto a la precisión se logra demostrar que la solución numérica aproximada se aleja de la analítica cerrada en el orden del 73%.

DEDICATORIA

A mi padrino Octavio y a mi madrina Luisa, a quienes amo. Siempre les estaré agradecido por todo lo que me han dado incondicionalmente.

AGRADECIMIENTOS

A mi familia por su incondicional apoyo, paciencia y comprensión.

A Adriana por ser mi gran motivación y compañera en los buenos y malos momentos.

Quiero agradecer muy especialmente a la familia Hernández Villegas, quienes me dieron cobijo en su hogar durante toda la carrera, a Marisol por su gran afecto y calidez, a César por su gran apoyo y cariño, a César hijo y David por toda su amistad.

A mi amigo y tutor Liber por su paciencia y apoyo.

A Gustavo por su ayuda invaluable.

A Trino por toda su colaboración .

También agradezco a todos mis compañeros y amigos quienes siempre me acompañaron y motivaron en toda la carrera. Especialmente a Jeanpaul por toda su ayuda y colaboración en la realización de este trabajo.

ÍNDICE GENERAL
Pág.

ÍNDICE GENERAL.....	VIII
LISTA DE TABLAS.....	XIII
LISTA DE FIGURAS.....	XIV
<i>INTRODUCCIÓN</i>	1
<i>CAPÍTULO I</i>	3
1.1 ANTECEDENTES.....	3
1.2 OBJETIVOS Y ALCANCES.....	5
1.2.1 OBJETIVO GENERAL.....	5
1.2.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS.....	5
<i>CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO</i>	6
2.1 Transferencia de calor.....	6
2.1.1 Temperatura.....	6
2.1.2 Conducción.....	6
a) Material ortótropo.....	7
b) Material transversalmente isotrópico.....	8
c) Material isotrópico.....	8
2.1.3 Convección.....	9
2.1.4 Radiación.....	9
2.2 Condición de régimen permanente.....	11
2.3 Condiciones de frontera.....	11
2.3.1 Condición de Dirichlet.....	11
2.3.2 Condición de Newman.....	12
2.3.3 Condición de convección en el borde.....	12
2.4 Superficies extendidas.....	12

2.4.1 Aletas de sección transversal uniforme.....	13
2.4.2 Aletas de sección transversal no uniforme.....	13
2.5 Intercambiadores de calor.....	13
2.6 Principio de los trabajos virtuales.....	14
2.7 Método de elemento finito (MEF).....	15
2.7.1 Uso del método de elemento finito.....	17
2.8 Método de Galerkin.....	18
2.9 Formulación general elementos finitos por conductividad térmica.....	20
2.10 Condición de frontera convectiva.....	24
2.11 Generación interna de calor.....	25
2.12 Condición de simetría.....	26
2.13 Interpolación paramétrica de la geometría.....	27
2.14 Tipos de formulaciones.....	30
a) Formulación Superparamétrica.....	30
b) Formulación Isoparamétrica.....	30
c) Formulación Subparamétrica.....	30
2.15 La matriz de conductividad térmica.....	31
2.16 Integración numérica.....	31
2.16.1 Método de Gauss-Legendre.....	31
2.17 Integración analítica cerrada.....	33
2.18 Elementos finitos triangulares en el plano.....	33
2.18.1 Coordenadas naturales.....	36
<i>CAPÍTULO III. METODOLOGÍA.....</i>	<i>39</i>
3.1 Implementación de la técnica analítica.....	39

3.1.1	Procedimiento para integrar analíticamente la matriz del fenómeno de conductividad térmica.....	39
3.1.2	Implementación de la técnica para el elemento finito cuadrilátero isoparamétrico de cuatro nodos.	40
3.1.3	Desarrollo de la formulación en Maple®.	40
3.1.4	Jacobiano de la transformación.	41
3.1.5	Jacobiano de la integración de línea.	42
3.2	Términos de las submatrices.	42
3.2.1	Integración analítica y asignación de las constantes para la matriz de conductividad.....	43
3.2.2	Casos de integración analítica de la matriz para conductividad.....	45
	a) Primer caso de integración ($AJ=BJ=0$).	45
	b) Segundo caso de integración ($AJ=0$).....	46
	c) Tercer caso de integración ($BJ=0$).....	46
	d) Cuarto caso de integración ($AJ \neq 0, BJ \neq 0$).	47
3.3	Integración analítica para la matriz de convectividad en el área del elemento finito	48
3.4	Integración analítica para la matriz de condición convectiva en el borde del elemento.....	49
	3.4.1 Convección en el borde 1-2 del elemento	50
	3.4.2 Convección en el borde 2-3 del elemento	50
	3.4.3 Convección en la frontera 3-4 del elemento.....	51
	3.4.4 Convección en la frontera 4-1 del elemento.....	51
3.5	Ensamblaje de la matriz global.....	51
3.6	Optimización de las ecuaciones.....	53
	3.6.1 Optimización de la integración analítica de la matriz de rigidez	53
	3.6.2 Reducción de las constantes	55
	3.6.3 Optimización de la matriz de conductividad en el área.....	56

<i>CAPÍTULO IV. RESULTADOS DE PRECISIÓN Y TOLERANCIA</i>	57
4.1. Comparación de la integración analítica y numérica de la matriz de rigidez.....	57
4.1.2 Primer Caso (AJ=0, BJ=0)	58
4.1.3. Segundo Caso (AJ =0).....	60
4.1.4. Tercer Caso (BJ=0).....	62
4.1.5. Cuarto caso (AJ ≠0, BJ ≠ 0)	64
4.1.6 Análisis de resultados	66
4.2 Eficiencia de la rutina analítica	66
4.2.1 Capacidad de procesamiento del computador	67
4.2.2 Relación de tiempos de ejecución computacional.....	68
4.2.3 Ganancia en tiempo	68
4.2.4 Resultados de tiempos de ejecución de las rutinas numéricas y analíticas.	69
4.2.5 Análisis de resultados	71
4.3 Tolerancia de la rutina analítica.....	71
4.4 Nulidad de las constantes	71
 <i>CAPÍTULO V. APLICACIÓN Y COMPARACIÓN DE RESULTADOS</i>	 73
5.1 Problema ejemplo #1	74
5.1.1 Descripción del problema.....	74
5.1.3 Análisis de resultados	76
5.2 Problema ejemplo #2.....	77
5.2.1 Descripción del problema.....	77
5.2.2 Análisis de resultados	79
5.3 Problema ejemplo #3	80
5.3.1 Descripción del problema.....	80
5.3.2 Análisis de resultado.....	83

5.4. Problema ejemplo #4	84
5.4.1 Descripción del problema	84
5.4.2 Análisis de resultados	87
5.5. Problema ejemplo #5	88
5.5.1 Descripción del problema	88
5.5.2 Análisis de resultados obtenidos	91
<i>CONCLUSIONES</i>	90
<i>BIBLIOGRAFÍA</i>	91

LISTA DE TABLAS**Pág.**

Tabla 1. Raíces de los polinomios de Legendre $P_{n+1}(Z)$ y sus factores de ponderación para la cuadratura de Gauss-Legendre.....	32
Tabla 2. Error porcentual promedio para algunas geometrías del primer caso.....	59
Tabla 3. Error porcentual promedio para algunas geometrías del segundo caso.....	61
Tabla 4. Error porcentual promedio para algunas geometrías del tercer caso.....	63
Tabla 5. Error porcentual promedio para algunas geometrías del cuarto caso.....	65
Tabla 6. Tabla de tiempos de cálculos computacionales.....	70
Tabla 7. Ejemplo #1 – Características del problema.....	74
Tabla 8. Ejemplo #1 - Propiedades de la malla.....	74
Tabla 9. Ejemplo #1 – Tabla de resultados integración analítica y numérica.....	75
Tabla 10. Ejemplo #2 – Características del problema.....	77
Tabla 11. Ejemplo #2 - Propiedades de la malla.....	77
Tabla 12. Ejemplo #2-Distribución de temperaturas.....	78
Tabla 13. Ejemplo #3-Datos del problema.....	80
Tabla 14. Ejemplo #3-Propiedades de la malla.....	81
Tabla 15. Ejemplo #3-Tabla de resultados integración analítica y numérica.....	82
Tabla 16. Ejemplo #4-Datos del problema.....	84
Tabla 17. Ejemplo #4 - Resultados obtenidos de la distribución de temperaturas de los Nodos.....	86
Tabla 18. Ejemplo #4-Resultados obtenidos de la distribución de cargas de los Nodos de temperaturas conocidas.....	86
Tabla 19. Ejemplo #5- Datos del problema.....	88
Tabla 20. Ejemplo #5 - Propiedades de la malla.....	89
Tabla 21. Ejemplo #5-Distribución de temperatura del modelo.....	90
Tabla 22. Ejemplo #5-Flujo de calor en los nodos donde la temperatura es condición inicial del problema.....	90

LISTA DE FIGURAS**Pág.**

Figura 1. Tres comportamiento distintos en direcciones perpendiculares.....	8
Figura 2. Transversalmente isótropo.....	8
Figura 3. Material isótropo.....	8
Figura 4. Superficie extendida de sección transversal uniforme en una pared plana.....	13
Figura 5. Malla típica sobre un dominio resaltando elemento finito típico así como asignaciones de propiedades elásticas y térmicas.....	17
Figura 6. Elemento con superficie y bordes convectivos (Hutton, 2004:236).....	21
Figura 7. Elemento diferencial con contornos convectivos (Hutton, 2004:236).....	21
Figura 8. Tipos de condiciones de frontera para dos dimensiones. (Hutton ,2004: 241).....	24
Figura 9. (a)Segmento largo en la dirección z con generación interna de calor (b) Representación del modelo en el plano x, y. (modificado de Hutton ,2004: 260).....	25
Figura 10. Mallado en un elemento con simetría geométrica y de condiciones convectivas en el plano.....	27
Figura 11. Cuadratura de Gauss-Legendre sobre elementos cuadriláteros: a)1 x 1 b) 2 x 2 c) 3 x 3 d) 4 x 4 puntos de integración.....	32
Figura 12. Elemento triangular lineal.....	34
Figura 13. Coordenadas naturales del elemento finito triangular lineal.....	37
Figura 14. Elemento cuadrilátero de cuatro nodos en el campo cartesiano. Coronel (2006).....	40
Figura 15. Elemento finito de cuatro nodo con condición de borde convectivo en todas sus caras.....	49
Figura 16. Numeración global de malla formada por cuatro elementos cuadriláteros.....	52
Figura 17. Coordenadas de los nodos de los elementos cuadriláteros.....	74
Figura 18. Modelo distorsionad de cuatro elementos finitos.....	77

Figura 19. Gráfico de distribución de temperatura del ejemplo #5 extraído de FEHT®.....	78
Figura 20. Coordenadas cartesianas de los nodos del modelo.....	81
Figura 21. Disipador de calor adherido a una fuente térmica.....	84
Figura 22. Segmento de la aleta que disipa calor en tres dimensiones.....	84
Figura 23. Modelo plano de la aleta a la cual se le aplica el método de elemento finito.....	84
Figura 24. Malla para cálculo de elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos.....	85
Figura 25. Gráfico de distribución de temperatura extraído de FEHT®.....	87
Figura 26. Sección transversal de panel de tubos.....	88
Figura 27. Malla para la sección plana de la placa de tubos, realizada bajo el criterio de simetría.....	89
Figura 28. Bandas de calor para la distribución de temperatura.....	90

INTRODUCCIÓN

El Método de elementos finitos (MEF) surge en el año 1956 por la presentación de un trabajo presentado por Turne, Clough, Martin y Topp que trataba el estudio de la solución aproximada de problemas de estado plano de tensiones, relacionado con procesos de análisis estructural de la industria aeronáutica. Sin embargo, durante los años sesenta los investigadores descubrieron que la esencia de lo que había sido una mera generalización del cálculo matricial podía utilizarse no sólo para resolver problemas de cálculo de estructuras, sino también problemas de campo en general, tales como problemas de deformación, esfuerzos y de conducción de calor. Y es para estos años que surgen los primeros programas comerciales.

La idea básica es la división de dominios de cálculo en pequeños subdominios y la aproximación en ellos de la variable de campo en función de su valor en puntos privilegiados llamados nodos.

Estas técnicas requieren una gran cantidad de recursos computacionales para su implementación, su popularidad sufrió un incremento sustancial debido a la aparición de computadoras con gran capacidad de cálculo computacional. En la actualidad existen varios programas basados en el método de elemento finitos. Programas tales como Visual Nastran, Abacus, Ansys, etc. Estos programas poseen interfaces gráficas que facilitan la introducción del modelo computacional multifísico. Los programas computacionales antes mencionados están basados en el método de los elementos finitos y calculan los modelos computacionales diseñados mediante integración numérica tradicionales, (Cuadratura Gauss-Legendre), la cual produce errores de importancia en situaciones particulares, debido a esto se hace necesario la implementación de rutinas de cálculo analíticos aumentando así la precisión y la velocidad de dichos cálculos computacionales. De lo señalado se desprende la importancia de este trabajo especial de grado, lograr aplicar las metodologías analíticas para optimizar estos procesos computacionales y en particular el cálculo de la matriz de conductividad térmica así como sus efectos combinados, generando códigos computacionales en un lenguaje de alto nivel tipo Fortran.

En el primer capítulo (Capítulo I) se dará una introducción sobre el presente trabajo así como sus antecedentes y la necesidad de la realización del mismo. Con la reseña de investigaciones recientes en cuanto al fenómeno de transferencia de calor y al desarrollo de formulaciones analíticas en otras áreas, como es el caso de la matriz de rigidez en tensión plana.

En el capítulo II se presentarán los fundamentos teóricos que rigen el fenómeno de transferencia de calor. Además, se explicará el método de los elementos finitos y algunos tipos de formulaciones, necesarias para el desarrollo de la metodología analítica presentada en este trabajo. Dicha metodología se pondrá en uso mediante el desarrollo de las formulaciones analíticas presentadas en el capítulo III, donde se explica la metodología seguida, su codificación en los programas de alto nivel y su optimización.

En el Capítulo IV se presentarán una serie de casos que corresponden a las integrales de los distintos elementos finitos planos distorsionados, comparados con los resultados de los elementos calculados numéricamente con la cuadratura de Gauss-Legendre para 2,3 y 4 puntos.

En el capítulo V se validarán los resultados de la metodología analítica desarrollada en este trabajo comparándola con los resultados arrojados por un programa comercial basado en elementos finitos, mediante el cálculo de ejemplos concretos en transferencia de calor.

Finalmente se presentarán las conclusiones obtenidas en base a los resultados de la metodología y su comparación en cuanto a eficiencia y velocidad, con la integración numérica clásica (Gauss-Legendre).

1.1 ANTECEDENTES

Los proyectos a continuación nombrados están relacionados con el tema que se desarrollará en este trabajo:

En la investigación de Griffiths (1994), se presentó una técnica general con la cual se obtuvo expresiones semi-analíticas para el cálculo de la matriz de rigidez de un elemento finito plano de cuatro nodos isoparamétrico, utilizando integración numérica (cuadratura de Gauss). Esto se realizó con la ayuda de un SAC con el cual se simplificaron, factorizaron y agruparon las expresiones. Reportó mejoras en los tiempos de ejecución computacional (el tiempo de la rutina numérica resultó ser cuatro veces mayor al tiempo de la rutina semianalítica en procesadores escalares).

En el año Videla *et al* (2005), mediante un método analítico obtuvieron expresiones para los términos de la matriz de rigidez de un elemento finito cuadrilátero subparamétrico de ocho nodos, obteniendo mejoras sustanciales al compararla con la integración numérica, Coronel *et al* (2006), en su tesis de grado para Ingeniero Civil de la Universidad Central de Venezuela, calcularon la matriz de rigidez de forma analítica del elemento finito de cuatro nodos isoparamétrico, optimizando la técnica desarrollada por Videla *et al* en 2005 para la solución de integrales de manera analítica, confirmando así la eficiencia de este tipo de metodologías analíticas.

En los trabajos de Videla *et al* (2007); Coronel *et al* (2006); y Baloa *et al* (2006), se ha demostrado que la técnica analítica presenta ventajas ante los problemas de precisión de la integración numérica o semi-analítica cuando se calculan elementos de geometrías distorsionadas y que, además, son más eficiente en términos de tiempo de ejecución que la técnica semi-analítica.

En Klett *et al* (1997), plantearon una metodología para simular las características conductivas de los tejidos de carbono. Mediante el uso de algoritmos computacionales se logró simular la estructura compleja de estas fibras microscópicas, que consistía en aproximar su sección transversal a geometrías esféricas y variar de forma aleatoria sus condiciones de contorno. Se concluyó que dicha metodología aprovecha la simetría del modelo, logrando simular su compleja micro-estructura mediante el uso de elementos finitos triangulares combinados con rutinas computacionales eficientes para lograr estudiar con precisión como varía sus coeficientes de conductividad térmica.

En Feng *et al* (2008), lograron modelar la transferencia de calor por conductividad térmica de un sistema discreto de partículas mediante el uso de la solución analítica del fenómeno de transferencia de calor por conducción para geometrías circulares logrando obtener reducciones en los sistemas de ecuaciones comparándolos con sistemas de ecuaciones derivados de la discretización por elemento finitos.

Gu *et al* (2004), dada la necesidad de calcular los tiempos de exposición de la madera en los hornos de secado proponen modelar su estructura celular en modelos planos de transferencia de calor por conductividad térmica. Propusieron describir la red celular como arreglos de materiales porosos con coeficientes de conductividad térmica constantes como en los materiales isotrópicos debido a que la disposición de las capas de las cortezas en los árboles crece de forma radial. Los cortes de tablas que son tratados térmicamente para el uso en la industria, por el contrario, presentan una estructura celular irregular. Por tanto se caracterizaron los tipos de cortes en la madera para describir de forma precisa las diferentes estructuras celulares; diferenciándolas a su vez entre árboles de larga data, que presentan una densidad celular mayor que los de temprana edad, logrando calcular un rango de valores de coeficientes de conductividad térmica para tablas de diferentes cortes. Concluyeron que es posible programar cronogramas de secado de madera recién cortada, dependiendo de sus características celulares, mediante el uso de modelos de elementos finitos plano para materiales isotrópicos.

La revisión bibliográfica expuesta permite justificar el análisis de l problema de transferencia de calor en conducción vía el método de elemento finito (MEF), utilizando una nueva metodología basada en integración analítica cerrada, con la cual se pudiera lograr mejoras en la precisión de los cálculos en elementos finitos distorsionados planos, isoparamétricos de cuatro nodos para transferencia de calor para el problema de conducción, así como mejorar los tiempos de cálculos computacionales de este tipo de elemento finito al ser comparado por la integración numérica tradicional.

1.2 OBJETIVOS Y ALCANCES

1.2.1 OBJETIVO GENERAL

Obtener la matriz de transferencia de calor del elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos por integración analítica, utilizando un sistema de álgebra computacional.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- 1.- Desarrollar la formulación para el Elemento Finito Isoparamétrico de cuatro nodos en transferencia de calor en conducción térmica.
- 2.- Aplicar una técnica Analítica de Integración al elemento finito de cuatro nodos bilineal isoparamétrico en transferencia de calor de un Sistema de Algebra Computacional.
- 3.- Desarrollar una subrutina para el cálculo de la matriz de conductividad térmica del elemento finito de cuatro nodos bilineal isoparamétrico, basada en integración analítica.
- 4.- Comparar de los resultados de precisión, eficiencia y tiempo entre integración numérica y integración analítica.
- 5.- Validar el código computacional obtenido con problemas de solución conocida.

CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO

2.1 Transferencia de calor

Se define como transferencia de calor como la energía de tránsito debido a una diferencia de temperatura, condición necesaria para que exista calor. Dicho esto, existen diferentes medios por donde se transfiere dicha energía. Estos medios pueden ser líquido, sólidos, gaseosos u a través de ondas electromagnéticas.

2.1.1 Temperatura

Cualitativamente se refiere a temperatura como la sensación térmica de “frío” ó “caliente” al tocar un objeto con las manos. Pero una definición cuantitativa es más difícil de comprender, debido a que la temperatura es una medida de energía de los cuerpos cuya escala es arbitraria. Esta se mide en grados. La temperatura a cero grados Celcius (0 C) es la medida de temperatura a la cual el aire puro, el agua y el hielo permanecen en equilibrio bajo una presión atmosférica de una (1) Atmósfera.

Cuando dos cuerpos están en contacto a diferentes temperaturas, es cuando se produce un gradiente térmico y fluye calor del cuerpo de mayor energía al menos energético. (Obert, 1949).

2.1.2 Conducción

Cuando hablamos de transferencia de calor mediante conducción nos referimos necesariamente a la actividad atómica en los materiales, debido a que existen procesos físicos a nivel atómico y/o molecular que describen este fenómeno. El calor que se manifiesta cuando hay diferencias de energía térmica entre dos sistemas basados en el contacto directo de sus partículas sin flujo neto de materia y que tiende a igualar la temperatura dentro de un cuerpo y entre diferentes cuerpos en contacto este fenómeno se conoce como conducción térmica.

La conducción del calor es muy reducida en el espacio vacío y es nula en el espacio vacío ideal, espacio sin energía.

El principal parámetro dependiente del material que regula la conducción térmica en los materiales es la conductividad térmica, este parámetro es una propiedad física que mide la capacidad de conducción de calor o capacidad de una sustancia de transferir el movimiento cinético de sus moléculas a sus propias moléculas adyacentes o a otras sustancias con las que está en contacto.

La ecuación que gobierna el proceso de transferencia de calor es la conocida como la ley de Fourier, la cual permite cuantificar este fenómeno, la cual se expresa como sigue,

$$q_x'' = -k_x \frac{dT}{dx} \quad (2.1)$$

Siendo q_x'' el flujo de calor o transferencia de calor por unidad de área $q_x'' (W / m^2)$, esta magnitud actúa en la cara perpendicular al gradiente de temperatura siendo esta además proporcional al mismo, en este caso particular es la magnitud medida sobre la cara perpendicular al gradiente en dirección x. La constante de proporcionalidad k_x , es una propiedad de transporte conocida como conductividad térmica $\left(\frac{W}{m \cdot K}\right)$ y es una característica intrínseca al material y dT/dx es el flujo térmico (Incropera, 1996).

En la naturaleza existen diferentes comportamientos en los materiales, respecto a la conductividad térmica los principales son los siguientes.

- a) Material ortótropo: Son aquellos materiales que se comportan de manera diferente en direcciones perpendiculares. Respecto al parámetro de conductividad térmica $k_x \neq k_y \neq k_z$, figura 1.

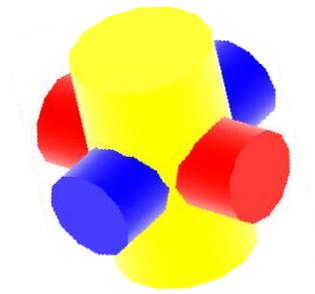


Figura 1. Tres comportamiento distintos en direcciones perpendiculares.

- b) Material Transversalmente isotrópico. Son aquellos materiales que se comportan igual en un plano y diferente en una dirección perpendicular. Respecto al parámetro de conductividad térmica, $k_x=k_y \neq k_z$, figura 2.



Figura 2. Transversalmente isotrópico.

- c) Material isotrópico. Son aquellos que se comportan igual en todas las direcciones, respecto a conductividad térmica, $k_x=k_y=k_z$, figura 3.

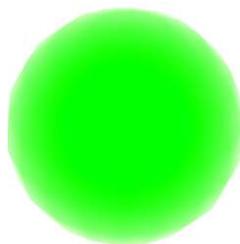


Figura 3. Material isotrópico.

2.1.3 Convección

El fenómeno de transferencia de energía por convección ocurre solo en fluidos y se caracteriza porque se produce por intermedio de un fluido (aire, agua) que transporta el calor entre zonas con diferentes temperaturas, éstos, al calentarse, aumentan de volumen y, por lo tanto, su densidad disminuye y ascienden desplazando el fluido que se encuentra en la parte superior y que está a menor temperatura. Lo que se llama convección en sí, es el transporte de calor por medio de las corrientes ascendente y descendente del fluido, el cual se puede separar en dos aspectos. El conocido como conducción antes mencionado donde las moléculas más energéticas transfieren calor a las menos energéticas, y el movimiento del fluido donde grandes números de moléculas se mueven en forma colectiva dentro del mismo fluido, debido a la presencia de gradientes de temperatura.

La ecuación que gobierna este fenómeno se puede expresar como:

$$q'' = h(T_s - T_\infty) \quad (2.2)$$

Siendo q'' el calor por unidad de área, h el coeficiente de convectividad térmica, T_s la temperatura de superficie del dominio y T_∞ es la temperatura del fluido, entendiendo que es una temperatura prescrita y constante en el medio.

2.1.4 Radiación

La radiación térmica es la energía emitida por la materia que se encuentra a una temperatura determinada. Dicha transferencia de energía se realiza a través de ondas electromagnéticas, es decir que no precisa de un medio material como en el caso de conducción y convección térmica.

Sin importar la forma de la materia, la radiación se puede atribuir a cambios en las configuraciones electrónicas de los átomos o moléculas constitutivas. La energía del campo de radiación es transportada por ondas electromagnéticas ó alternativamente, fotones. Es conocido que la transferencia de radiación ocurre de manera más eficiente en el vacío.

La ecuación de Stefan Boltzmann considera un aspecto de la radiación tal como la potencia emisiva superficial del dominio en estudio y se expresa así:

$$E_b = \sigma \cdot T_s^4 \quad (2.3)$$

Donde T_s es la temperatura absoluta (K) de la superficie del material y σ es la constante de Stefan Boltzmann ($\sigma = 5.67 \cdot 10^8 W / m^2 \cdot K^4$). Dicha superficie del dominio se denomina radiador ideal o cuerpo negro.

El flujo de calor emitido por una superficie real es menor que el de un cuerpo negro a la misma temperatura y está dado por:

$$E_b = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T_s^4 \quad (2.4)$$

Donde ε es una propiedad radiativa de la superficie que se denomina emisividad, con valores entre $0 \leq \varepsilon \leq 1$, σ es la constante de Stefan Boltzmann ($\sigma = 5.67 \cdot 10^8 W / m^2 \cdot K^4$) y T_s es la temperatura absoluta (K) de la superficie en estudio, esta propiedad proporciona una fracción directamente proporcional de la eficiencia con que una superficie emite energía en comparación con un cuerpo negro. Esto depende principalmente del material de la superficie y del acabado superficial.

2.2 Condición de régimen permanente

La condición de régimen permanente se refiere al equilibrio de energías, la energía que entra es igual a la energía que sale. Dicho de otra manera, la temperatura dentro de un dominio estudiado no varía con respecto al tiempo.

2.3 Condiciones de frontera

Antes de resolver un problema de transferencia de calor se debe conocer cómo expresar apropiadamente la ecuación de calor, es decir, conocer las condiciones iniciales y de frontera, (Newman), del elemento. Estas condiciones se fijan al modelo pudiendo este ser estacionario (no depende del tiempo) o transitorio (varia con el tiempo).

2.3.1 Condición de Dirichlet

La condición de Dirichlet es aquella condición en que la superficie del elemento se encuentra a una temperatura (T_s). Este caso se presenta cuando la transferencia de calor ocurre un cambio de fase en un fluido, lo que permite que fluya el calor sin cambios en la temperatura de la superficie en estudio. La condición de Dirichlet matemáticamente se expresa como:

$$T(0,t) = T_s \quad (2.5)$$

2.3.2 Condición de Newman

Esta ocurre en la superficie cuando hay un flujo de calor. Esto sucede cuando existe una fuente de calor constante aplicado sobre una superficie, como es el caso de quemadores químicos o eléctricos, en contacto directo con la superficie en estudio, en cuyo caso se puede suponer que el flujo de calor es constante.

La condición de flujo de calor cero se hace presente cuando la superficie esta en contacto con un material aislante. Este flujo de calor se relaciona mediante la ley de Fourier y se expresa matemáticamente como:

$$q_x''(0) = -k \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} \quad (2.6)$$

2.3.3 Condición de convección en el borde

La condición de borde convectivo tiene que ver con el calentamiento o enfriamiento de la superficie del elemento mediante la diferencia de temperatura de la cara del mismo con un fluido. Esta expresión se expresa como:

$$-k \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = h \cdot [T_\infty - T(0,t)] \quad (2.7)$$

2.4 Superficies extendidas

Se define como superficie extendida a aquella superficie que pertenece a un sólido, el cual experimenta transferencia de energía por conducción dentro de los límites físicos de la superficie en estudio, así como transferencia de energía en las fronteras afectadas por los fenómenos de convección o radiación.

Las superficies extendidas se usan comúnmente para estudiar el efecto combinado de conducción y convección. Un caso particular de estas superficies extendidas es el caso de las aletas las cuales permiten aumentar la superficie del sólido en estudio con el propósito de proporcionarles ciertas características que aumenten el flujo de calor en su frontera, mediante el contacto directo con algún fluido. En la figura 4, se muestra un caso muy común de superficie extendida en una pared plana.

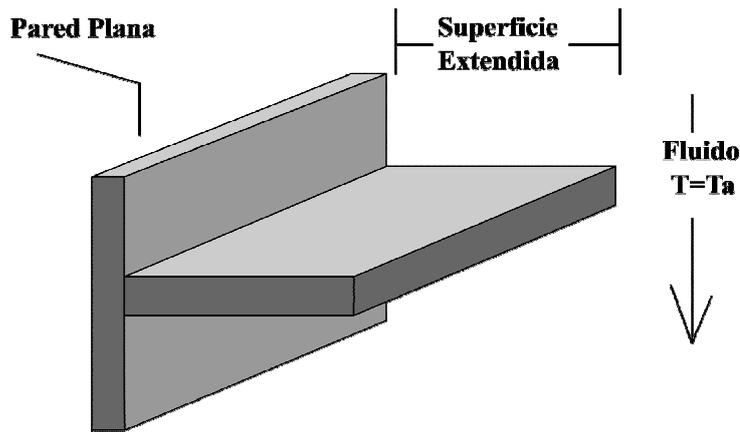


Figura 4. Superficie extendida de sección transversal uniforme en una pared plana.

2.4.1 Aletas de sección transversal uniforme.

Como su nombre lo indica, las aletas de sección transversal uniformes son aquellas aletas cuya área de la sección transversal no varía, siendo este tipo de sección la más ampliamente utilizada en disipadores de calor debido a su fácil construcción.

2.4.2 Aletas de sección transversal no uniforme

El área de las aletas en su sección transversal varía a lo largo de su eje longitudinal.

2.5 Intercambiadores de calor

Es un dispositivo que se usa para generar el fenómeno de intercambio de calor entre dos fluidos que están a diferentes temperaturas y separados por una pared sólida.

Los intercambiadores de calor normalmente se clasifican de acuerdo con el arreglo de flujo y el tipo de construcción, entre ellos se pueden mencionar el caso que los fluidos caliente y frío se mueven en la misma dirección o en direcciones opuestas dentro de un arreglo de tubos concéntrico, arreglos del tipo flujo cruzado con y sin aletas, etc.

Una clase especial e importante de intercambiadores de calor se usa para conseguir un área superficial muy grande. Denominados intercambiadores de calor compactos, estos dispositivos tienen complejos arreglos de tubos con aletas o placas y se usan normalmente cuando al menos uno de los fluidos es un gas, que se caracteriza por tener un coeficiente de convección pequeño.

El propósito de un intercambiador de calor es el calentar un fluido mediante el enfriamiento de otro estando estos separados por una pared sólida.

2.6 Principio de los trabajos virtuales

Dado un sólido deformable, el principio de los trabajos virtuales establece que si suponemos un campo de desplazamientos compatible con los enlaces existentes, llamado campo de desplazamientos virtual, que impiden el movimiento de sólido rígido se cumplirá que el trabajo virtual externo y el trabajo virtual interno serán iguales (Weaver W., Johnston P, 1984).

Cuando se produce un desplazamiento virtual δu_n en los nodos de un elemento, se producen que lo que se llaman trabajos virtuales, estos desplazamientos ocurren en los lugares donde ocurren las fuerzas volumétrica $\{F\}$ y las fuerzas superficiales $\{p\}$.

Por lo que la energía potencial acumulada será igual a el trabajo virtual de las fuerzas, esto se expresa como,

$$\int_{V_n} \{\delta u_n\} \{F\} dV + \int_{S_n} \{\delta u_n\}^T \{p\} dS = \int_{V_n} \{\delta \varepsilon_n\}^T \{\sigma_n\} dV \quad (2.8)$$

Donde el superíndice T significa la matriz transpuesta, V_n el volumen del elemento y S_n la superficie del elemento n. $\{\sigma_n\}$, $\{\varepsilon_n\}$ los esfuerzos y deformaciones respectivamente.

Si aplicáramos el principio de los trabajos virtuales a un sistema discretizado en N elementos, su expresión matemática sería representada como la siguiente suma:

$$\sum_{n=1}^N \left(\int_{V_n} \{\delta u_n\} \{F\} dV + \int_{S_n} \{\delta u_n\}^T \{p\} dS - \int_{V_n} \{\delta \varepsilon_n\}^T \{\sigma_n\} dV \right) = 0 \quad (2.9)$$

Donde S_n es la superficie de los elementos n que coinciden con la superficie del sistema discretizado. (Marroquín, 2004)

2.7 Método de elemento finito (MEF)

En el contexto de los métodos numéricos, se destaca el método de los elementos finitos como uno de los más confiables y eficientes para calcular matrices de rigidez de estructuras complejas, así como en aplicaciones de transferencia de calor y otros fenómenos físicos.

En la aplicación del método de elementos finitos, se observa un grado de complejidad y laboriosidad que dificulta su uso y limita la confiabilidad de los resultados, dependiendo de la geometría particular del elemento en estudio, generándose de esto la necesidad su modificación o superación.

"Generalmente se reconoce que el método de elementos finitos fue introducido por Turner, Clough, Martín y Topp, quienes en 1956 presentaron un trabajo en el cual se ocupaban de la solución aproximada de problemas de estado plano de tensiones, relacionados con procesos de análisis estructural de la industria aeronáutica. El esquema presentado seguía lo que podemos llamar enfoque físico del método de elementos finitos. La idea fundamental consistía

en extender los métodos de análisis matricial de estructuras de barras, para permitir el tratamiento de problemas continuos, bidimensionales y tridimensionales" (Oñate,1992).

Los autores, proponían calcular las matrices de rigidez en forma aproximada usando funciones con parámetros ajustables, típicos de los métodos de Rayleigh-Ritz y Galerkin, adaptando estas funciones al principio de desplazamientos virtuales. De este modo, la técnica aplicada por Rayleigh-Ritz y Galerkin, se simplificaba con la aplicación de funciones de interpolación a subdivisiones o partes del continuo.

En la aplicación de esta técnica, el primer paso es la subdivisión del continuo en un conjunto de regiones, cuyo comportamiento se rige por ciertas funciones de interpolación que están unidas mediante unos puntos denominados nodos. A este conjunto de características se le denomina malla de elementos finitos, definida por las formas geométricas que adopten estos elementos por las funciones de interpolación que utilicen y por el tipo de problema que se trate.

Para problemas de geometría plana y de problemas de transferencia de calor en dominios planos, las formas más utilizadas son triángulos y cuadriláteros que pueden tener lados rectos,(lineales) y/o curvos, (cuadráticos).

La subdivisión del continuo en una malla de elementos finitos es importante, porque posibilita los cálculos y su programación. Para obtener una solución numérica, se toman en cuenta los grados de libertad de los nodos y funciones de interpolación simples. Adicionalmente se debe aclarar que al construir una malla mas densificada dentro del dominio en estudio se obtiene una solución más aproximada, pero para esta densificación existen algunas metodologías de optimización de la generación de la malla, tales como refinamientos tipo **H**, tipo **P**, tipo **HP** y refinamientos adaptables. Los refinamientos tipo **H** son aquellos donde se densifica la malla en todo el dominio en estudio, es decir, se aumentan el número de elementos finitos. Los refinamientos tipo **P**, son aquellos donde se aumenta el grado del polinomio de interpolación, los refinamientos de tipo **HP** mezclan los dos sistemas antes mencionados y finalmente los refinamientos adaptables o “inteligentes”, son aquellos donde se densifica la malla de los elementos finitos solo en las zonas de cambios de geometría o de interés particular, bien sea aumentando el número de elementos finitos así como paralelamente aumentado el grado de los polinomios interpolantes.

La presentación general del método, sirve de fundamento para la consideración sistemática del problema objeto de la investigación: calcular la matriz de rigidez de elementos cuadriláteros isoparamétricos de cuatro nodos en transferencia de calor por conducción, utilizando sistemas de algebra computacional, (SAC), los cuales se basan en matemática simbólica, obteniendo así soluciones analíticas cerradas, las cuales permiten obtener soluciones más confiables, dependiendo de la geometría del elemento en estudio además de sustancialmente más veloces respecto al tiempo de ejecución computacional.

2.7.1 Uso del método de elemento finito

La técnica general del elemento finito consiste en discretizar un dominio correspondiente a algún material o materiales y escoger un tipo de elemento finito adecuado y por consiguiente su función de interpolación propia. Estas propiedades y selecciones serán las utilizadas en la modelación del problema.

Adicionalmente se debe asignar sus propiedades elásticas así como sus propiedades térmicas propias del material en estudio como muestra en la figura 5.

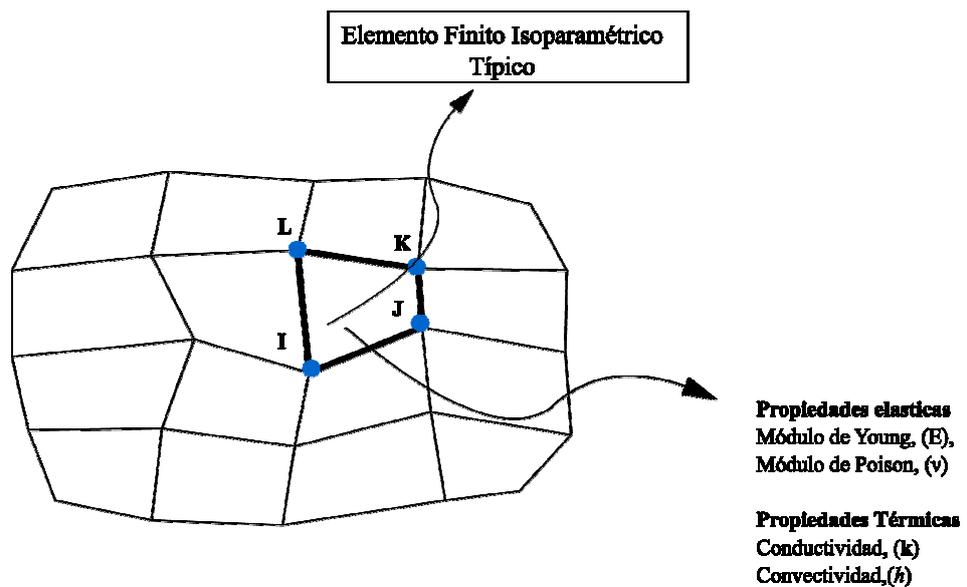


Figura 5. Malla típica sobre un dominio resaltando elemento finito típico así como asignaciones de propiedades elásticas y térmicas.

En la figura 5 se muestra una malla típica así como un elemento finito cuadrilátero típico con las propiedades térmicas del material en estudio. La discretización presentada asume un modelo plano, bajo un estado plano de tensiones, el elemento finito posee un grosor en la dirección de Z constante y de valor la unidad, además que las cargas de superficie actuantes sobre las caras cilíndricas no dependen de Z .

La ecuación (2.10) expresa la temperatura en el material, pudiendo particularizarse para un punto $P(x, y)$ perteneciente al dominio y para obtener los valores de la temperatura entre los nodos del elemento finito es necesario hacer una transformación isoparamétrica la cual establece una interpolación basada en los nodos del elemento finito.

$$T(x, y) = N_1T_1 + N_2T_2 + N_3T_3 + N_4T_4 \quad (2.10)$$

Donde T_1, T_2, T_3 y T_4 son las temperaturas en los nodos además que N_1, N_2, N_3 y N_4 son las funciones de interpolación propias del elemento o también conocidas como las funciones de forma.

El elemento cuadrilátero descrito en la ecuación (2.10) tiene cuatro grados de libertad por elemento, desde el punto de vista de transferencia de calor, los cuatro valores en los nodos se necesita para describir cualquier comportamiento dentro del elemento.

2.8 Método de Galerkin

Para este método, las funciones de interpolación que aproximan el continuo son las mismas funciones N_i usadas para definir las soluciones aproximadas.

El método aproxima la solución de un conjunto de ecuaciones diferenciales con determinadas condiciones de borde que, a su vez, son sustituidas por un grupo de funciones que las satisfacen.

A continuación, se realiza un resumen de la formulación del Método de Galerkin.

Consideremos una ecuación diferencial que se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= P \\ \mathcal{L}(f) - P &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Siendo $\mathcal{L}(\cdot)$ un operador diferencial y P un término que no depende de la función ni de sus derivadas.

Ahora, si queremos una solución aproximada, podemos obtener una \bar{f} que satisfaga las condiciones de borde, quedando la expresión modificada:

$$\mathcal{L}(\bar{f}) - P = \varepsilon(x) \quad (2.12)$$

Donde $\varepsilon(x) \neq 0$ es el error cometido.

Para el Método de los Residuos Ponderados, las funciones de aproximación \bar{f} se pueden expresar como:

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^n \alpha_i N_i \quad (2.13)$$

Luego los parámetros ajustables α_i , se determinan anulando en un sentido promedio el residuo ε , haciendo:

$$\int_x \varepsilon N_i dx = 0 \quad \text{para } i=1, \dots, n \quad (2.14)$$

Donde las α_i son funciones de peso o ponderación. La expresión (2.15) representa el sistema de ecuaciones cuya solución provee los valores de las α_i

Utilizando las expresiones anteriores y simplificando según Galerkin, el uso de una misma función de ponderación, tanto para las funciones de aproximación como para sus parámetros, se obtiene:

$$\int [\mathcal{L}(\alpha_i N_i) - P] N_i dx = 0 \quad (2.16)$$

La ventaja de este enfoque, como se ha visto, sólo utiliza una familia N_i como funciones de interpolación de la f aproximada y sus parámetros; lo que a su vez va a producir una matriz simétrica y bandeda.

2.9 Formulación general elementos finitos por conductividad térmica

Para la formulación del fenómeno de conducción de calor en un elemento se aplica la ley de la conservación de la energía para un dominio en un intervalo de tiempo determinado, siendo E la energía.

$$E_{entra} + E_{generada} - E_{sale} = 0 \quad (2.17)$$

Para el caso particular de estudio de este presente trabajo, se utiliza un elemento finito con condición de convección en el borde. La ecuación diferencial que describe este fenómeno físico para régimen permanente sin generación interna de calor, viene dado por la siguiente expresión ($\Delta E_{almacenada} = 0$):

$$q_x t dy + q_y t dx + Q t dy dx = \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \right) t dy + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) t dx + 2h(T_s - T_a) dy dx \quad (2.18)$$

Siendo q_x y q_y el flujo de calor en la dirección de x e y respectivamente, t es el espesor del elemento diferencial, Q es la generación interna de calor, h es la constante de convectividad, T_s es la temperatura en la superficie del elemento diferencial y T_a es la temperatura del fluido.

Resulta común que diferentes problemas físicos sean gobernados por ecuaciones diferenciales similares, donde varían los valores de los parámetros de las mismas, como también los tipos y valores de condiciones de contorno e iniciales para cada problema. (Vanella, 2003).

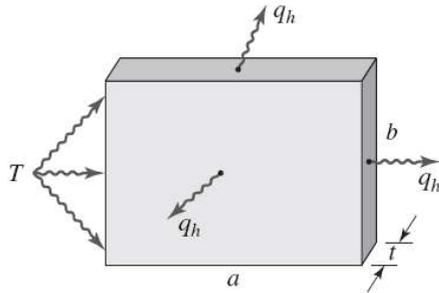


Figura 6. Elemento con superficie y bordes convectivos (Hutton, 2004:236)

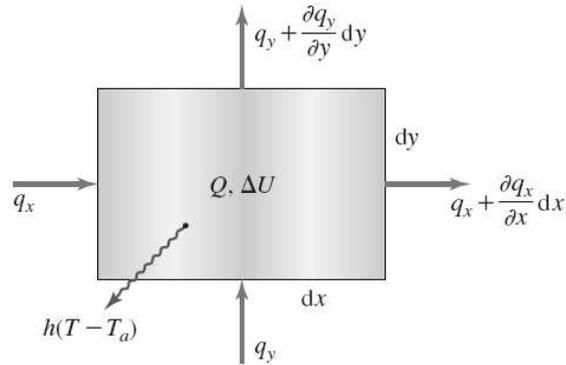


Figura 7. Elemento diferencial con contornos convectivos (Hutton, 2004:236)

Para el desarrollo de la ecuación (2.18), la cual gobierna el fenómeno de conducción de calor se usa un elemento diferencial con espesor $t = 1$, figura 6 y figura 7 y combinando la ley de Fourier, ecuación (2.19), para poder expresar el flujo de calor en las direcciones de las coordenadas x e y .

$$q_x = -k_x \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \quad ; \quad q_y = -k_y \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \quad (2.19)$$

Al aplicar la ley de Fourier a la ecuación (2.18) se desprende una nueva ecuación diferencial que se expresa como,

$$Q t dy dx = \frac{\partial}{\partial x} \left(-k_y \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \right) t dy dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(-k_x \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right) t dy dx + 2h(T_s - T_a) dy dx \quad (2.20)$$

Donde k_x y k_y son las constantes de conductividad térmica en las direcciones de x e y respectivamente.

La transformación de la ecuación anterior por medio de las funciones de interpolación queda expresada.

$$\iint_A N_i(x, y) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(tk_x \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(tk_x \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \right) + Qt - 2h(T_s - T_a) \right] dA = 0 \quad (2.21)$$

Si aplicamos notación indicial se pueden expresar las ecuaciones anteriores como sigue, entonces la distribución de temperatura dentro del elemento se describe como:

$$T(x, y) = \sum_{i=1}^M N_i(\xi, \eta) T_i = [N] \{T\} \quad (2.22)$$

Donde $T(x, y)$ es la temperatura en cualquier punto del dominio, $N_i(\xi, \eta)$ es la función de interpolación, M el número de nodos del elemento y T_i es la temperatura en cada nodo del elemento.

Al sustituir la ecuación (2.22) en la ecuación (2.21) se puede expresar de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} & \iint_A \left(k_x \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] + k_y \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] \right) \{T\} dA + 2h \iint_A [N]^T [N] \{T\} dA \\ & = \iint_A Q [N]^T dA + 2h T_a \iint_A [N]^T dA - \oint_s q_s n_s [N]^T dS \end{aligned} \quad (2.23)$$

La ecuación anterior se puede describir de la forma:

$$[K^{(e)}] \{T\} = \{f_Q^{(e)}\} + \{f_h^{(e)}\} + \{f_g^{(e)}\} \quad (2.24)$$

Donde $K^{(e)}$ es la matriz de transferencia de calor, T la temperatura, $f_Q^{(e)}$ el flujo de calor por generación interna en el elemento, $f_h^{(e)}$ el flujo de calor por convección y

$f_g^{(e)}$ es el flujo de calor en los bordes, la cual es expresada como dos integrales de línea y se define como:

$$\{f_g^{(e)}\} = -\oint_S h[N]^T [N]\{T\}tdS + \oint hTa\{N\}tdS \quad (2.25)$$

En el caso de que exista una condición de borde convectivo en el elemento, se debe considerar una carga en el borde, para luego generar su valor equivalente asignado a los nodos del elemento, definida como:

$$\{f_{hs}^{(e)}\} = \oint_S hTa\{N\}tdS \quad (2.26)$$

El fenómeno de convección se manifiesta en la superficie del elemento y la sollicitación generada sobre el elemento se le denomina “carga térmica” y se define como:

$$\{f_h^{(e)}\} = 2hTa \iint_A \{N\}dA \quad (2.27)$$

Si el elemento esta aislado en su superficie $\{f_h^{(e)}\} = 0$

Finalmente la expresión general de la matriz de transferencia de calor, aplicada al fenómeno de transferencia de calor por conductividad térmica con entorno convectivo es la siguiente.

$$[K^{(e)}] = \iint_A \left(k_x \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial x} \right] + k_y \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right] \right) t dA + 2h \iint_A [N]^T [N] dA + h \oint_S [N]^T [N] t dS \quad (2.28)$$

2.10 Condición de frontera convectiva

En el estudio de transferencia de calor por conducción térmica, se considera el efecto de transferencia de calor por convección en la frontera. Encontrándose así tres tipos de interacciones térmicas para elementos finitos en dos dimensiones, como se ilustra en la figura 8.

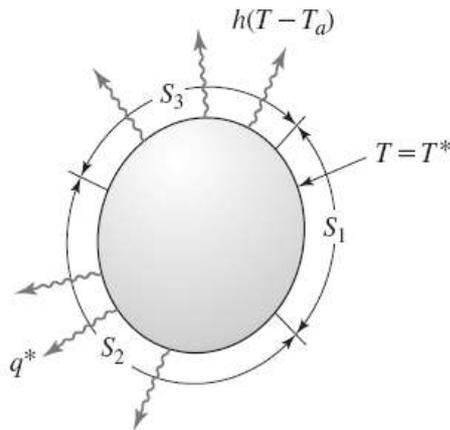


Figura 8. Tipos de condiciones de frontera para dos dimensiones. (Hutton ,2004: 241)

En la superficie S1 se tiene un sumidero T cuyo valor es conocido. En el modelo de elemento finito con este dominio, todos los nodos localizados en S1 tienen este valor de temperatura conocido. Como esta temperatura es constante con respecto al tiempo, este valor es una entrada de datos prescrita.

El flujo de calor de la porción del dominio en S2 es escrita como $q_{S2} = q^*$, cuyo valor se considera como un flujo térmico en las formulaciones de los elementos finitos y el cual es implementado como una condición prescrita en los programas computacionales especializados para fenómenos térmicos. Por lo tanto, todos los nodos ubicados en la frontera S2 del elemento finito plano tienen como expresión:

$$\{f_q^{(e)}\} = - \oint_{S_2} q^* n_{S_2} \{N\} t dS \quad (2.29)$$

Por último, la porción del dominio correspondiente a la frontera S_3 del elemento plano ilustra una condición de borde convectivo, donde el flujo de calor depende del coeficiente convectivo h del fluido que se encuentra en dicha frontera. Para todos los nodos ubicados en la frontera que pertenece a S_3 tienen una pérdida de calor o ganancia según el gradiente de temperatura expresado en la siguiente relación matemática:

$$\{f_q^{(e)}\} = -\oint_{S_3} q_{S_3} n_{S_3} \{N\} t dS = -\oint h(T^{(e)} - T_a) \{N\} t dS \quad (2.30)$$

2.11 Generación interna de calor

En transferencia de calor es muy común el uso de elementos disipadores de calor, como son las superficies con aletas o superficies extendidas. Además de estos sistemas existen otros modelos de interés. Considérese una situación donde un elemento a una sección del mismo es mucho mas larga que sus dimensiones transversales como se muestra en la Figura 9, adicionalmente en la dirección longitudinal del elemento en su interior se encuentra una fuente de generación de calor, como una resistencia térmica o algún tubo capilar que transmita energía al cuerpo para modificar su temperatura. Un caso particular puede ser los cables que transmiten calor a tuberías de agua para evitar que estas se congelen. Estos sistemas se llaman o denominan fuentes lineales de calor.

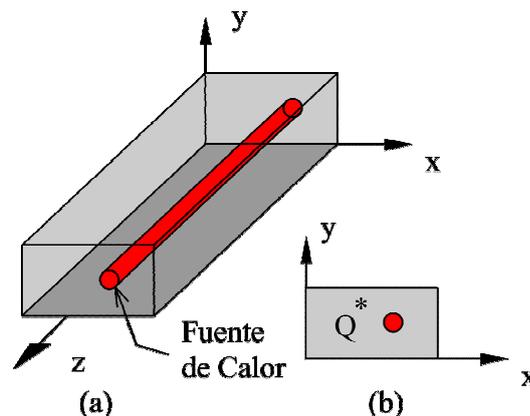


Figura 9. (a) Segmento largo en la dirección z con generación interna de calor
 (b) Representación del modelo en el plano x, y . (modificado de Hutton ,2004: 260)

A excepción de los límites de estos elementos en su sección transversal se puede modelar la transferencia de calor en un plano, es decir, se estudia como la transferencia de calor en dos dimensiones. La carga de calor que corresponde a la generación interna se define como

$$\{f_Q^{(e)}\} = \iint_A Q[N]^T t dA = \iint_A Q\{N\} t dA \quad (2.31)$$

2.12 Condición de simetría

La condición de simetría puede ser utilizada para reducir el tamaño del modelo de elementos finitos para transferencia de calor o para cualquier otro tipo de fenómeno. Generalmente, la simetría se observa en la geometría del elemento, que significa que el dominio físico del elemento finito presenta simetría con respecto a los ejes del espacio o del plano. Aunque la simetría geométrica no es suficiente para aplicar este criterio y asegurar que el modelo es simétrico, es un primer paso para determinar dicha condición. Adicionalmente a esto, se debe verificar las condiciones de frontera del elemento, donde sus cargas y temperaturas también presenten simetría con respecto a algún eje del plano.

Para ilustrar este concepto podemos observar la figura 10, donde se muestra una tubería que transporta vapor de agua a 280 F, con recubrimiento aislante de fibra de vidrio rodeada, a su vez, por aire a temperatura ambiente de 50 F. Este modelo

presenta geometría simétrica con respecto a los dos ejes cartesianos (x,y), así como también material isotrópico cuyas constantes de conductividad térmica en las direcciones (x,y), son iguales $k_x = k_y$. Se observa en dicha figura que no es necesario modelar todo el objeto, sino una cuarta parte del mismo, lo que reduce sustancialmente el número de elementos de la malla y como consecuencia el número de cálculos en el computador.

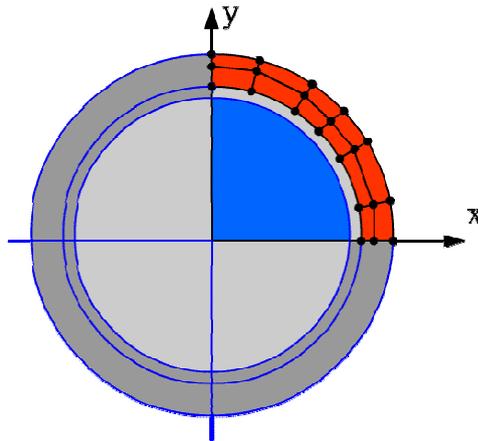


Figura 10. Malla en un elemento con simetría geométrica y de condiciones convectivas en el plano.

2.13 Interpolación paramétrica de la geometría

En transferencia de calor, existen analogías con la formulación para los problemas de elasticidad plana. Los cambios de temperatura en cada punto es análogo a los “desplazamientos” en dichos puntos y se expresan de la siguiente forma:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n Ni(\xi, \eta)ui \quad v(x, y) = \sum_{i=1}^n Ni(\xi, \eta)vi \quad (2.32)$$

Donde las $Ni(\xi, \eta)$ representan las funciones de forma o de interpolación de los desplazamientos en coordenadas naturales y n es el número de nodos del elemento. Oñate, (1992)

Debido a que las funciones de forma no están en función de las coordenadas cartesianas sino de las coordenadas naturales, se utiliza la regla de la derivación en cadena para representar:

$$\frac{\partial Ni}{\partial x} = \frac{\partial Ni}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial Ni}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial Ni}{\partial y} = \frac{\partial Ni}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial Ni}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2.33)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (2.34)$$

La ecuación (2.34) requiere de evaluar las derivadas:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2.35)$$

para lo cual hay que conocer una relación explícita entre las coordenadas naturales y las cartesianas, ésta se puede obtener mediante la interpolación paramétrica del elemento. Oñate (1992).

Si se conocen las coordenadas $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m))$ de m puntos del elemento, se pueden calcular las coordenadas de cualquier punto del mismo interpolando los valores de las coordenadas conocidas.

Esto se escribe como:

$$x = \sum_{i=1}^m \hat{N}_i(\xi, \eta) \cdot x_i ; \quad y = \sum_{i=1}^m \hat{N}_i(\xi, \eta) \cdot y_i \quad (2.36)$$

Oñate (1992) explica que “se deduce que \hat{N}_i son funciones de interpolación de la geometría que satisfacen lo mismos requisitos de que las funciones de forma utilizadas para interpolar los desplazamientos.” Es decir deben tomar el valor de uno en punto i y cero en los demás $(m-1)$ puntos. Con lo que $\hat{N}_i(\xi, \eta)$, se escogen en base al número de puntos m escogidos. La relación (2.36) puede interpretarse como la transformación de coordenadas $(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)$, siendo fundamental que dicha transformación sea en ambos sentidos, del campo normalizado al cartesiano y viceversa.

Debido a que las relaciones (2.36) establecen a las variables cartesianas como función de las variables naturales, no se puede evaluar las derivadas:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (2.37)$$

Pero se pueden evaluar las derivadas:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \xi} \text{ y } \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (2.38)$$

para esto se invierte la derivación en cadena:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (2.39)$$

Y en forma matricial se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \underline{J}^{(e)} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

Donde $\underline{J}^{(e)}$, es el determinante del jacobiano, el cual permite expresar el diferencial de área en coordenadas naturales como:

$$dA = dx dy = |J^{(e)}| d\xi d\eta \quad (2.41)$$

De (2.40) se extrae que:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{|\underline{J}^{(e)}|} \cdot \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \right); \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{|\underline{J}^{(e)}|} \cdot \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) \quad (2.42)$$

2.14 Tipos de formulaciones

Según lo establecido por Oñate (1992)

Hay que considerar dos clases de interpolaciones en un punto. Los que se utilizan para interpolar el campo de desplazamientos (nodos), que definen las funciones de forma N_i , y lo que se utilizan para interpolar la geometría del elemento, que definen las funciones de la geometría \hat{N}_i .

Dichas interpolaciones pueden coincidir o no y esto hace que la formulación reciba un determinado nombre:

a) Formulación Superparamétrica

Si el número de nodos n usados para la interpolación de los desplazamientos es menor al número de puntos m utilizados para interpolar la geometría, entonces las funciones de interpolación de los desplazamientos o funcione de forma N_i serán de menor grado que las funciones de interpolación de la geometría \hat{N}_i y la formulación se denomina superparamétrica. Esto es ($n < m$). Oñate (1992).

b) Formulación Isoparamétrica

Si ($n = m$), entonces las funciones de interpolación $N_i = \hat{N}_i$, y la formulación se llama isoparamétrica. Oñate (1992)

c) Formulación Subparamétrica

Si entonces ($n > m$), implica que las funciones de forma N_i serán de mayor grado que las funciones de interpolación de la geometría \hat{N}_i . Oñate (1992)

2.15 La matriz de conductividad térmica K_c .

La matriz de conductividad térmica es la integral de la matriz compuesta por el producto de las matrices de transformación y la matriz de coeficientes de conductividad térmica.

$$K_c = \iint B^T k B d\Omega \quad (2.43)$$

También se describe como la suma de matrices de los diferentes fenómenos que acompañan la transferencia de calor como lo son las condiciones de contorno convectivo y la convectividad en el área del elemento finito. En el caso específico de la matriz de transferencia de calor $K^{(e)}$.

$$K^{(e)} = \iint B^T k B d\Omega + 2h \iint N^T d\Omega + h \oint N^t d\Gamma \quad (2.44)$$

2.16 Integración numérica

En el método de elementos finitos se usa comúnmente la integración numérica que no es más que aproximar mediante una suma, una integral, donde se sustituyen unas coordenadas en las variables y se multiplican por unos pesos, estas coordenadas y pesos son propios del método de cuadratura de Gauss-Legendre, esta cuadratura es común en los métodos numéricos debido a lo complicado o laborioso de resolver algunas integrales y en particular integrales racionales propias del método de elementos finitos.

2.16.1 Método de Gauss-Legendre

El método de Gauss-Legendre consiste en calcular la integración analítica mediante una suma de las funciones evaluadas en las raíces de polinomios ortogonales, estas raíces pertenecen a los polinomios de Legendre.

“Cuando la integración por Gauss es utilizada, uno tiene que decidir cuántos puntos de Gauss deberían ser utilizados. Se conoce que para una integral de una dimensión, usando m puntos puede dar la solución exacta para la integral de un integrando polinomial hasta un orden de (2m-1). Como regla general más puntos de Gauss deben ser usados para integrandos de mayor orden de magnitud”. (Liu, 2003)

Mediante el uso de coeficientes ponderados o pesos y las raíces de los polinomios de Legendre se resuelven las integrales tales como:

$$\int_{-1}^1 f(x) = \sum_{K=0}^n w_k f(x_k) \tag{2.45}$$

En la Figura 11 se muestran algunas de las cuadraturas bidimensionales más comunes sobre dominios cuadriláteros.

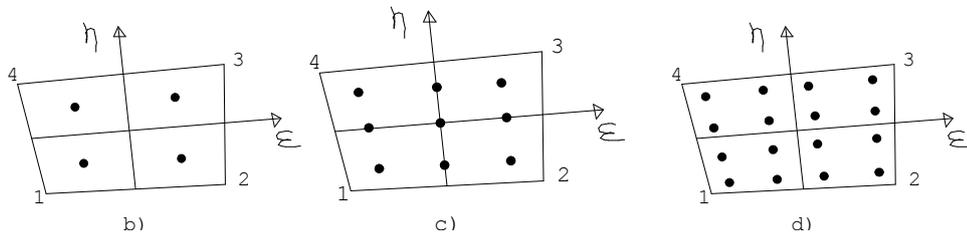


Figura 11. Cuadratura de Gauss-Legendre sobre elementos cuadriláteros:

a) 2 x 2 b) 3 x 3 c) 4 x 4 puntos de integración

Raíces (Zi)	Fórmula $\int_{-1}^{+1} F(z)dZ = \sum_{i=0}^n w_i F(z_i)$	Factores de ponderación (peso)
$\pm 0,577350269189626$	n=1	1,000000000000000
0,000000000000000 $\pm 0,774596669241483$	n=2	0,888888888888888
$\pm 0,339981043584856$ $\pm 0,861136311594053$	n=3	0,652145154862546 0,347854845137454
0,000000000000000 $\pm 0,538469310105683$ $\pm 0,906179845938664$	n=4	0,568888888888889 0,478628670499366 0,236926885056189

Tabla 1. Raíces de los polinomios de Legendre $P_{n+1}(Z)$ y sus factores de ponderación para la cuadratura de Gauss-Legendre.

2.17 Integración analítica cerrada.

Se define como integración analítica cerrada, al método de integrar mediante metodologías de integración conocidas y que además dichas integrales deben tener soluciones elementales o de tablas, estas soluciones son expresiones simbólicas que representan el área bajo la curva de la función integrada. Este método de integración es el que se propone en el presente trabajo como alternativa al método de integración numérica convencional, (Gauss-Legendre), esto se logra aprovechando las bondades de los nuevos sistemas de algebra computacional, (SAC) con capacidades simbólicas tales como lo es Maple®, Mathematica, Derive, MuPAD, Maxima, etc. Estos sistemas de algebra computacional poseen una interfaz gráfica la cual permite transcribir directamente las expresiones a integrar y mostrar los resultados de manera simbólica además de poder traducir estas respuestas a los lenguajes de programación más comunes, tales como Fortran, C+, Pascal etc, para su posterior codificación en un código computacional.

2.18 Elementos finitos triangulares en el plano.

Los elementos finitos triangulares lineales es una de las formas más simples de discretizar las superficies. El elemento lineal triangular para transferencia de calor es representado por la siguiente expresión,

$$T(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (2.46)$$

donde dicha expresión es lineal en la dirección de x e y , y contienen tres coeficientes denominados parámetros ajustables, (α_i).

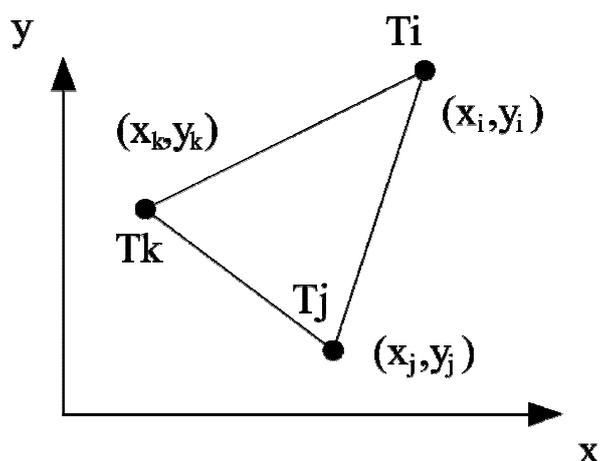


Figura 12. Elemento triangular lineal

Los valores en cada nodo poseen las mismas constantes por lo que se usan las tres ecuaciones (ver figura 12) de la temperatura de dichos nodos para determinar la relación de las tres constantes:

$$T_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i; \quad T_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j; \quad T_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \quad (2.47)$$

lo que queda expresado de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2A} [(x_j y_k - x_k y_j) T_i + (x_k y_i - x_i y_k) T_j + (x_i y_j - x_j y_i) T_k] \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A} [(y_j - y_k) T_i + (y_k - y_i) T_j + (y_i - y_j) T_k] \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A} [(x_k - x_j) T_i + (x_i - x_k) T_j + (x_j - x_i) T_k] \end{aligned} \quad (2.48)$$

Donde A, es el área del triángulo y se calcula como,

$$2A = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} = (x_i y_j - x_j y_i) + (x_k y_i - x_i y_k) + (x_j y_k - x_k y_j) \quad (2.49)$$

Sustituyendo los valores de α_1 , α_1 y α_1 en la ecuación (2.46) y colocando los coeficientes de temperatura T_i , T_j y T_k , se obtiene la siguiente expresión,

$$T = N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

Donde N son las funciones de forma y se expresan como:

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y); \\ N_j &= \frac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y); \\ N_k &= \frac{1}{2A}(a_k + b_k x + c_k y) \end{aligned} \quad (2.51)$$

y

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j; & b_i &= y_j - y_k; & c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_k y_i - x_i y_k; & b_j &= y_k - y_i; & c_j &= x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i; & b_k &= y_i - y_j; & c_k &= x_j - x_i \end{aligned} \quad (2.52)$$

Si se evalúa N_i en el nodo i , donde las coordenadas son (x_i, y_i) , se obtiene lo siguiente,

$$(N_i)_i = \frac{1}{2A}[(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x_i + (x_k - x_j)y_i] = \frac{2A}{2A} = 1 \quad (2.53)$$

Similarmente, se puede verificar que $(N_j)_i = (N_k)_i = 0$.

Se puede ver que las funciones de forma tienen como valor la unidad en cada nodo en estudio del elemento triangular y cero en los otros nodos. Es posible entonces escribir,

$$N_i + N_j + N_k = 1 \quad (2.54)$$

En cualquier punto dentro del elemento triangular y en sus fronteras, los gradientes de temperaturas T están dados por,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} T_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} T_k = \frac{b_i}{2A} T_i + \frac{b_j}{2A} T_j + \frac{b_k}{2A} T_k ; \\ \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial N_i}{\partial y} T_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} T_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} T_k = \frac{c_i}{2A} T_i + \frac{c_j}{2A} T_j + \frac{c_k}{2A} T_k \end{aligned} \quad (2.55)$$

ó también por la siguiente expresión matricial

$$\{g\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix} = [B]\{T\} \quad (2.56)$$

Donde $\frac{\partial T}{\partial x}$ y $\frac{\partial T}{\partial y}$ son constantes dentro de un elemento como b_i, b_j, b_k y c_i, c_j, c_k son constantes para un triángulo dado. Es por esto que los flujos de calor q_x y q_y son también constantes dentro de un elemento triangular lineal.

2.18.1 Coordenadas naturales

Un área o el sistema de coordenadas naturales serán utilizadas para simplificar el proceso de solución de los elementos finitos triangulares lineales. Consideremos un punto P cualquiera dentro del elemento triangular ubicando en cualquier coordenada. Las coordenadas locales L_i, L_j y L_k del punto P pueden

ser establecidas mediante el cálculo adimensional de las distancias del punto a las caras del triángulo. Como se muestra en la Figura 13, se define L_i como la diferencia de la distancia perpendicular desde el punto P al lado 'jk' (OP) hasta la distancia perpendicular del punto i desde el lado del triángulo 'jk' (QR), y se expresa,

$$L_i = \frac{OP}{QR} \quad (2.57)$$

De forma similar las coordenadas naturales L_j y L_k son también definidas. El valor de L_i es también se define como el cociente del área A_i entre el área total del triángulo, esto se escribe matemáticamente como

$$L_i = \frac{A_i}{A} = \frac{OP}{QR} \quad (2.58)$$

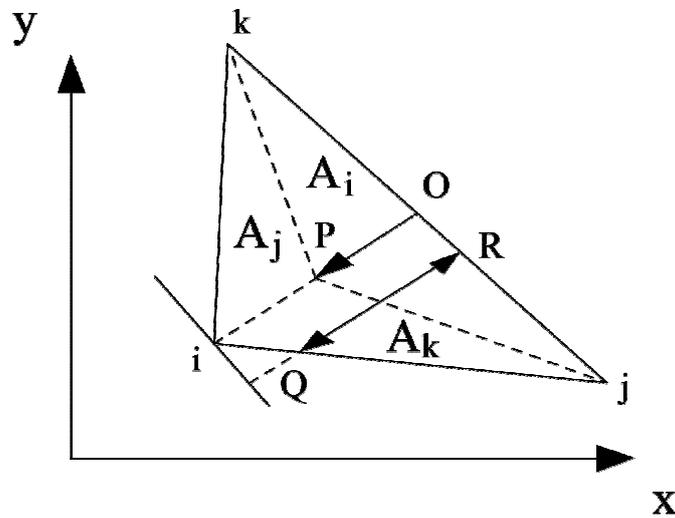


Figura 13. Coordenadas naturales del elemento finito triangular lineal.

Como se observa en la figura 13 se tiene,

$$A_i + A_j + A_k = A \quad (2.59)$$

ó

$$\frac{A_i}{A} + \frac{A_j}{A} + \frac{A_k}{A} = 1 \quad (2.60)$$

De la ecuación (2.60) se deduce que la suma de las coordenadas naturales es igual a la unidad,

$$L_i + L_j + L_k = 1 \quad (2.61)$$

La relación entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas naturales o de área, están dadas por la siguiente ecuación,

$$\begin{aligned} L_i &= \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y); \\ L_j &= \frac{1}{2A}(a_j + b_j x + c_j y); \\ L_k &= \frac{1}{2A}(a_k + b_k x + c_k y) \end{aligned} \quad (2.62)$$

Entonces, se tiene que las coordenadas naturales de área se usan como las funciones de forma para un elemento triangular. En general, las coordenadas locales o naturales y las funciones de forma son las mismas para los elementos triangulares de una, dos y tres dimensiones.

CAPÍTULO III. METODOLOGÍA

3.1 Implementación de la técnica analítica.

En este capítulo se explica el procedimiento seguido para resolver de forma analítica la matriz de conductividad térmica con condición de frontera convectiva, utilizando un sistema de álgebra computacional con capacidades simbólicas llamado Maple® se integraron las expresiones de los términos de la matriz de conductividad térmica del elemento isoparamétrico de cuatro nodos.

En este capítulo además, se describe el uso particular para esta aplicación del sistemas de álgebra computacional utilizado y adicionalmente se detallan los procedimientos para obtener los términos de la matriz de conductividad térmica basada en la metodología desarrollada por Videla *et al* (2005), aplicado a transferencia de calor.

Por último se muestra la metodología utilizada para agrupar en grandes constantes generadas durante la implementación del método de integración analítica, además de optimizaciones previo al momento de codificarlas en rutinas Fortran.

3.1.1 Procedimiento para integrar analíticamente la matriz del fenómeno de conductividad térmica.

Para resolver la integración analítica de la matriz de conductividad térmica se utiliza Maple® en los siguientes pasos

- a.- Se plantean las integrales correspondientes a la conducción de calor y las matrices de entorno convectivo.
- b.- Se calculan las derivadas de las funciones de forma
- c.- Se plantea la función del jacobiano de la transformación de coordenadas al plano Gaussiano adimensional.
- d.- Se calculan los términos de las submatrices de conductividad térmica.

- e.-Se identifica la ecuación característica general, para luego separarla en casos particulares según la geometría.
- f.- Se extraen las constantes generales de cada término.
- g.- Se realiza la integración analítica cerrada de la expresión particular para cada caso discriminado por la geometría.

3.1.2 Implementación de la técnica para el elemento finito cuadrilátero isoparamétrico de cuatro nodos.

Se toma un elemento genérico cuadrilátero definido en el espacio cartesiano (x,y) , de cuatro nodos numerados de forma ascendente siguiendo el sentido de las agujas del reloj, cada uno con dos grados de libertad, representados en una matriz de calor de dimensiones 8×8 , tal como se muestra en la figura 14.

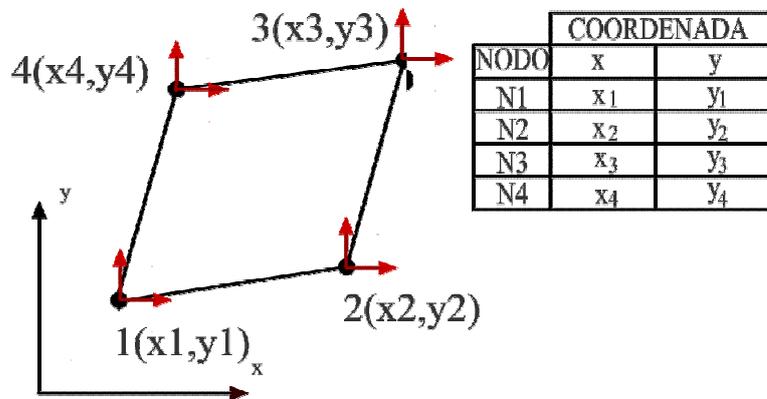


Figura 14. Elemento cuadrilátero de cuatro nodos en el campo cartesiano. Coronel (2006).

3.1.3 Desarrollo de la formulación en Maple® (SAC).

Usando SAC Maple® a través de una interfaz gráfica, se escriben las ecuaciones necesarias para desarrollar las matrices cuyos términos son expresiones derivadas o integrales. En primer lugar se definen las funciones de forma N_1 , N_2 , N_3 y N_4 para un elemento Isoparamétrico de cuatro nodos, en el espacio normalizado y adimensional (ξ, η) .

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \quad (3.1)$$

$$N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \quad (3.2)$$

$$N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \quad (3.3)$$

$$N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \quad (3.4)$$

Una vez definidas las funciones de forma en cada nodo se calculan sus derivadas parciales con respecto a ξ y η

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -\frac{1}{4} + \frac{\xi}{4} ; \frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{4} + \frac{\eta}{4} \quad \text{Diferencial de } N_1 \text{ con respecto a } \eta \text{ y } \xi \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4} - \frac{\xi}{4} ; \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = -\frac{1}{4} + \frac{\eta}{4} \quad \text{Diferencial de } N_2 \text{ con respecto a } \eta \text{ y } \xi \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial \eta} = \frac{1}{4} + \frac{\xi}{4} ; \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4} + \frac{\eta}{4} \quad \text{Diferencial de } N_3 \text{ con respecto a } \eta \text{ y } \xi \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4} - \frac{\xi}{4} ; \frac{\partial N_4}{\partial \xi} = \frac{1}{4} - \frac{\eta}{4} \quad \text{Diferencial de } N_4 \text{ con respecto a } \eta \text{ y } \xi \quad (3.8)$$

3.1.4 Jacobiano de la transformación.

El Jacobiano de la transformación es necesario ya que es la única forma de poder tener alguna regla de correspondencia entre el sistema de coordenadas cartesianas y el sistema de coordenadas gaussianas y para calcular los términos del jacobiano se utilizan las transformaciones isoparamétricas mencionadas anteriormente, obteniendo las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot x_i ; \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot x_i \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot y_i ; \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot y_i \quad (3.10)$$

Por lo que se expresa el jacobiano como

$$J^{(e)} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \cdot x_i & \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \cdot y_i \\ \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \cdot x_i & \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \cdot y_i \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

3.1.5 Jacobiano de la integración de línea.

El jacobiano de la transformación para el caso de la integración de línea quedaría expresado por una constante que depende de la posición geométrica del borde en estudio. Para la integración de línea en el espacio normalizado el jacobiano de la transformación se expresa como,

$$|J| = \sqrt{\left(\frac{\partial N1}{\partial \xi} \cdot x1 + \frac{\partial N2}{\partial \xi} \cdot x2 + \frac{\partial N3}{\partial \xi} \cdot x3 + \frac{\partial N4}{\partial \xi} \cdot x4 \right)^2 + \left(\frac{\partial N1}{\partial \eta} \cdot y1 + \frac{\partial N2}{\partial \eta} \cdot y2 + \frac{\partial N3}{\partial \eta} \cdot y3 + \frac{\partial N4}{\partial \eta} \cdot y4 \right)^2} \quad (3.12)$$

3.2 Términos de las submatrices.

Los términos de la matriz de conductividad térmica se desarrollan individualmente integrándose como subtérminos de la matriz general

$$Kc = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} k_{ij} & \dots & k_{i+nj} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & k_{i+nj+n} \end{bmatrix} dx dy \quad (3.13)$$

donde k_{ij} es la submatriz de la matriz k_e y se define como $k_{ij(2 \times 2)} = t \int_A B_i^T(2 \times 2) k_{(2 \times 2)} B_i(2 \times 2) dx dy$ donde $B_i(2 \times 2)$ es la submatriz de las derivadas parciales de la funciones de forma asociados al nodo i del elemento expresada matricialmente como

$$B_i = \frac{1}{|J^{(e)}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_i} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y_i} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

3.2.1 Integración analítica y asignación de las constantes para la matriz de conductividad.

Antes de integrar la función analíticamente se calcula el determinante del jacobiano y sus coeficientes,

$$|J| = \left(\sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \cdot x_i \cdot \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \cdot y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \xi} \right) \cdot y_i \cdot \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \cdot x_i \right) \quad (3.15)$$

$$|J| = AJ \cdot \xi + BJ \cdot \eta + CJ \quad (3.16)$$

Donde AJ , BJ y CJ son los coeficientes del determinante del jacobiano cuyo valor depende de las coordenadas (x,y) para cada nodo del elemento. Estas constantes que dependen de las coordenadas (x,y) de cada nodo del elemento se expresan como:

$$AJ = \frac{1}{8} \cdot [x1 \cdot (y3 + y4) + x2 \cdot (y3 - y4) + x3 \cdot (y1 - y2) + x4(-y1 + y2)] \quad (3.17)$$

$$BJ = \frac{1}{8} \cdot [x1 \cdot (-y2 + y3) + x2 \cdot (y1 - y4) + x3 \cdot (y1 + y4) + x4(y2 - y3)] \quad (3.18)$$

$$CJ = \frac{1}{8} \cdot [x1 \cdot (y2 - y4) + x2 \cdot (-y1 + y3) + x3 \cdot (-y2 + y4) + x4(y1 - y3)] \quad (3.19)$$

Una vez calculado el determinante del jacobiano de forma simbólica, se escriben las ecuaciones de los subtérminos de la matriz $Kc^{(e)}$

$$\iint_{\Omega} Kc^{(e)} \cdot d\Omega = \iint_{\Omega} \frac{AK\xi^2 + (BK\eta + CK)\xi + DK\eta^2 + EK\eta + FK}{|J|} d\Omega \quad (3.20)$$

Donde los coeficientes de la función de integración del subtérmino (i, j) de la matriz de calor por convección son, por ejemplo para el caso del subtérmino (1,1)

$$\begin{aligned} AK(1,1) &= \frac{1}{8}(y_4 - y_3)^2; \\ BK(1,1) &= \frac{1}{8}(y_3 - y_2)(y_4 - y_3); \\ CK(1,1) &= \frac{1}{8}(y_4 - y_2)(y_4 - y_3); \\ DK(1,1) &= \frac{1}{8}(y_3 - y_2)^2; \\ EK(1,1) &= \frac{1}{8}(y_4 - y_2)(y_3 - y_2); \\ FK(1,1) &= \frac{1}{8}(y_4 - y_2)^2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

De lo expresado anteriormente se encuentra que, integrando la expresión de la ecuación (3.20), se pueden conseguir todos los subtérminos de la matriz $Kc^{(e)}$.

3.2.2 Casos de integración analítica de la matriz para conductividad.

En la matriz de conductividad térmica se deben integrar los subtérminos de la matriz de forma analítica. Cómo se observa en la ecuación (3.20) cada subtérmino se divide por el determinante del jacobiano que a su vez se expresa como la función (3.16). Sucede que para este jacobiano cuando los coeficientes AJ, BJ se hacen cero estamos presentes de una singularidad matemática, es decir, una división por cero. Lo que presenta una incongruencia, es por ello como se demostró en Videla *et al* (1994) que se plantean cuatro integrales diferentes, una para cada caso de integración, tal como veremos a continuación.

a) Primer caso de integración (AJ=BJ=0).

Para el primer caso de integración, se escribe la expresión a integrar como se muestra en la ecuación (3.22). Se observa que en el denominador queda el valor constante CJ del determinante del jacobiano, que sólo depende de las coordenadas cartesianas del elemento (3.19). Este coeficiente tiene la especial característica que nunca es nulo ni toma valores negativos, ya que depende del área de cada elemento.

$$\iint_{\Omega} \frac{AK\xi^2 + (BK\eta + CK)\xi + DK\eta^2 + EK\eta + FK}{CJ} d\Omega \quad (3.22)$$

La expresión integrada para el primer caso, es la más sencilla y se escribe como:

$$F_{1er_caso} := \frac{\frac{4 AK}{3} + \frac{4 DK}{3} + 4 FK}{CJ}$$

b) Segundo caso de integración (AJ=0).

El segundo caso de integración se presenta cuando el coeficiente de la función determinante del jacobiano se hace cero ($AJ = 0$). La ecuación que se integra analíticamente queda como

$$\iint_{\Omega} \frac{AK\xi^2 + (BK\eta + CK)\xi + DK\eta^2 + EK\eta + FK}{BJ \cdot \eta + CJ} d\Omega \quad (3.23)$$

Observemos que a diferencia del primer caso de integración se suprime el término que es cero, ya que si integramos el caso general se obtiene un resultado que queda dividido por un valor nulo, generando una indeterminación, (división por cero).

La expresión integrada queda como:

$$F_{2do_caso} = \frac{4EK}{BJ} - \frac{4CJDK}{BJ^2} + \frac{2 \ln(BJ+CJ) AK}{3BJ} + \frac{2 \ln(BJ+CJ) FK}{BJ} - \frac{2 \ln(BJ+CJ) CJ EK}{BJ^2} + \frac{2 \ln(BJ+CJ) CJ^2 DK}{BJ^3} - \frac{2 \ln(-BJ+CJ) AK}{3BJ} - \frac{2 \ln(-BJ+CJ) FK}{BJ} + \frac{2 \ln(-BJ+CJ) CJ EK}{BJ^2} - \frac{2 \ln(-BJ+CJ) CJ^2 DK}{BJ^3}$$

c) Tercer caso de integración (BJ=0).

Para el tercer caso de integración analítica de los subtérminos de la matriz de calor, el coeficiente BJ del determinante del jacobiano es nulo. Por lo que se integra la expresión de la siguiente manera:

$$\iint_{\Omega} \frac{AK\xi^2 + (BK\eta + CK)\xi + DK\eta^2 + EK\eta + FK}{AJ \cdot \xi + CJ} d\Omega \quad (3.24)$$

De esta forma se asegura que la expresión nunca quede dividida por un factor nulo, luego de hacer la integración analítica. Al integrar la ecuación general en Maple, se obtiene la siguiente expresión:

$$F_{3er_caso} := -\frac{2 \ln(-AJ + CJ) FK}{AJ} + \frac{2 \ln(AJ + CJ) DK}{3 AJ} - \frac{4 CJ AK}{AJ^2} + \frac{2 \ln(AJ + CJ) FK}{AJ} - \frac{2 \ln(-AJ + CJ) DK}{3 AJ} + \frac{2 \ln(-AJ + CJ) CJ CK}{AJ^2} - \frac{2 \ln(-AJ + CJ) CJ^2 AK}{AJ^3} - \frac{2 \ln(AJ + CJ) CJ CK}{AJ^2} + \frac{2 \ln(AJ + CJ) CJ^2 AK}{AJ^3} + \frac{4 CK}{AJ}$$

c) Cuarto caso de integración ($AJ \neq 0, BJ \neq 0$).

El primer caso de integración surge cuando ninguna de la constantes del determinante del jacobiano se hace cero ($AJ \neq 0, BJ \neq 0$). Por lo que la integral a evaluar se expresa de la siguiente manera:

$$\iint_{\Omega} \frac{AK\xi^2 + (BK\eta + CK)\xi + DK\eta^2 + EK\eta + FK}{AJ \cdot \xi + BJ \cdot \eta + CJ} d\Omega \quad (3.25)$$

La integral es resuelta en Maple y queda expresada de la siguiente forma:

$$F_{4to_caso} := -\frac{8 AK CJ}{3 AJ^2} - \frac{1 AK \ln(AJ - BJ + CJ)}{3 BJ} - \frac{FK \ln(AJ - BJ + CJ)}{BJ} - \frac{1 CK \ln(AJ - BJ + CJ)}{2 BJ} - \frac{1 AK \ln(-AJ + BJ + CJ)}{3 BJ} - \frac{1 DK \ln(-AJ - BJ + CJ)}{3 AJ} - \frac{FK \ln(-AJ - BJ + CJ)}{BJ} - \frac{1 AK \ln(-AJ - BJ + CJ)}{3 BJ} + \frac{1 BJ BK \ln(-AJ - BJ + CJ)}{3 AJ^2} - \frac{1 BJ^2 AK \ln(-AJ - BJ + CJ)}{3 AJ^3} - \frac{1 BJ BK \ln(AJ - BJ + CJ)}{3 AJ^2} + \frac{FK \ln(AJ + BJ + CJ)}{AJ} - \frac{AK CJ^2 \ln(-AJ + BJ + CJ)}{AJ^3} - \frac{FK \ln(-AJ + BJ + CJ) CJ}{AJ BJ} + \dots$$

3.3 Integración analítica para la matriz de convección en el área del elemento finito Kh .

Cuando existe convección en el área del elemento finito, aparece un término a integrar cuyo valor se suma a cada subtérmino de la matriz de calor. Esta expresión se define como

$$Kh^{(e)} = 2 \cdot h \cdot \iint_{\Omega} \begin{bmatrix} N1^2 & N1N2 & N1N3 & N1N4 \\ N1N2 & N2^2 & N2N3 & N2N4 \\ N1N3 & N2N3 & N3^2 & N3N4 \\ N1N4 & N2N4 & N3N4 & N4^2 \end{bmatrix} \cdot |J| \cdot d\Omega \quad (3.26)$$

A diferencia de la matriz conductividad térmica, para la convección en el área no se tiene singularidad en la expresión. Además, por ser esta mas sencilla de integrar, no se hace necesaria separar las constantes de cada subtérmino como se hizo en la ecuación (3.25).

Cada subtérmino de la matriz se escribe en su forma general como:

$$\iint_{\Omega} Kh_{i,j} \cdot d\Omega = \iint_{\Omega} 2 \cdot N_i \cdot h \cdot N_j \cdot |J| d\Omega \quad (3.27)$$

Siendo $Kh_{i,j}$ el término de la matriz correspondiente a la fila (i) y columna (j).

Por ser una matriz simétrica sólo se calculan los términos triangulares superiores tal y como se hizo para la matriz de calor.

3.4 Integración analítica para la matriz de condición convectiva en el borde del elemento K_{hs} .

Cada elemento finito para transferencia de calor pudiera tener en su frontera condiciones de borde convectivo, para calcular el flujo de calor por los bordes a diferencia de su área, se integra analíticamente los subtérminos matriz K_{hs} mediante la integral de línea

$$K_{hs} = h \cdot t \cdot \oint N^T | \ell | d\Gamma \quad (3.28)$$

La matriz de condiciones de borde convectivo tiene una especial característica que mostraremos a continuación. Para cada cara del elemento la matriz a diferencia de las matrices de calor y de convección en el área. Las matrices de condiciones de borde presentan otro tipo de simetría.

Cuando el elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos esta rodeado por un fluido, es decir, hay transferencia de calor mediante convección como por todas sus caras, como se muestra en la figura 15, se escriben las matrices que corresponden a cada cara del elemento.

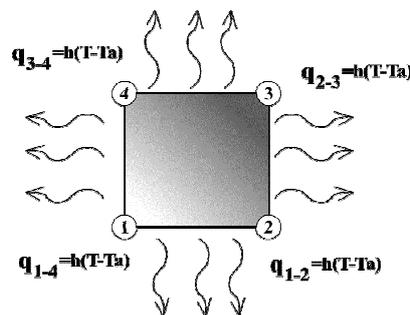


Figura 15. Elemento finito de cuatro nodo con condición de borde convectivo en todas sus caras.

3.4.1 Convección en el borde 1-2 del elemento

Una vez integrada la ecuación (3.28), la matriz que corresponde a la convección en el borde 1-2 del elemento finito se expresa de la siguiente manera

$$Khs_{1-2} = h \cdot t \cdot \sqrt{(x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Se observa que la matriz de convección sólo depende de las coordenadas cartesianas de los nodos 1-2. Que corresponden a la longitud de la cara donde existe fenómeno de transferencia por conducción que multiplicado por la constante t, que es el espesor del elemento finito, nos da el área de flujo de calor. Para este caso la variable $\eta = -1$, que es el valor de la recta sobre la cual se esta integrando y que pertenece al campo normalizado.

3.4.2 Convección en el borde 2-3 del elemento

Similar al caso anterior pero integrando sobre la recta $\xi = 1$, la matriz de convección en el borde 2-3 del elemento, se expresa como sigue

$$Khs_{2-3} = h \cdot t \cdot \sqrt{(x2 - x3)^2 + (y2 - y3)^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Como era de esperarse, la función depende ahora de las coordenadas que corresponden a los nodos N2 y N3, que son los nodos de frontera del elemento.

Sin embargo se observa que la matriz simétrica tiene otra forma a la del caso anterior.

3.4.3 Convección en la frontera 3-4 del elemento

Integrando sobre la recta $\eta = 1$ del campo normalizado, para la convección en los bordes del elemento 3-4, se obtiene la siguiente expresión característica

$$Khs_{4-1} = h \cdot t \cdot \sqrt{(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

3.4.4 Convección en la frontera 4-1 del elemento

Cuando existe transferencia de calor por convección en el borde 4-1 del elemento se integra sobre la recta $\xi = -1$. Tal como se hizo en los casos anteriores la integral analítica se expresa como

$$Khs_{4-1} = h \cdot t \cdot \sqrt{(x_4 - x_1)^2 + (y_4 - y_1)^2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

3.5 Ensamblaje de la matriz global

Una vez obtenida las matrices $K^{(e)}$ de cada elemento se procede a calcular la matriz global, que es la matriz que representa el sistema de ecuaciones a resolver, para calcular las incógnitas de cualquier problema de

elementos finitos. Esto se hace a través de la conectividad de los elementos, que no es más que la interacción entre los nodos de todos los elementos de la malla.

Para el caso de un continuo discretizado en cuatro elementos de cuatro nodos, se obtiene la numeración global de cada elemento como se muestra en la siguiente figura:

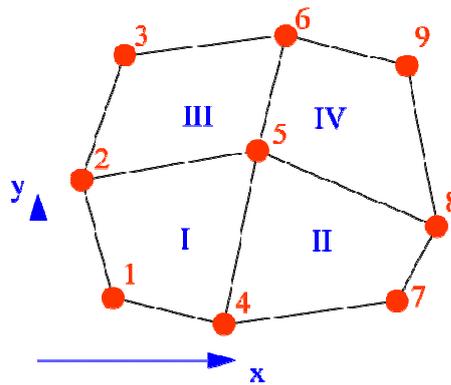


Figura 16. Numeración global de malla formada por cuatro elementos cuadriláteros.

luego se le asigna esta numeración a cada elemento como corresponde en el sistema general de ecuaciones.

Para cada elemento la numeración local se realiza en sentido contrario a las agujas del reloj, por lo que la numeración de la Figura 16, queda como se muestra en los siguientes vectores:

$$\begin{aligned}
 Td_I &= [1 \quad 4 \quad 5 \quad 2]; & Td_{II} &= [4 \quad 7 \quad 8 \quad 5] \\
 Td_{III} &= [5 \quad 8 \quad 9 \quad 6]; & Td_{IV} &= [2 \quad 5 \quad 6 \quad 3]
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Una vez conocida esta correspondencia se construye la matriz global cuyas dimensiones corresponden al número de nodos de todos los elementos en su conjunto. Para el caso del ejemplo citado en la Figura 16, corresponde una matriz global de dimensiones 9 filas por 9 columnas, lo cual conforma el siguiente sistema de ecuaciones:

$$K^{(e)} \{T\} = \begin{bmatrix} K_{cc} & K_{ca} \\ K_{ac} & K_{aa} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_c \\ T_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_c \\ F_a \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Donde T_c son las temperaturas de los nodos conocidas y T_a la temperatura en la frontera del dominio de cada elemento tal y como se explica anteriormente (ver capítulo 2.3).

De la ecuación (3.34) se extraen dos sistemas de ecuaciones que se resuelven para calcular la distribución de temperatura y las cargas térmica q de cada nodo. Para calcular la distribución de temperaturas se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones

$$[K_{aa}] \cdot \{T_a\} = \{F_a\} - [K_{ac}] \cdot \{T_c\} \quad (3.35)$$

El segundo sistema de ecuaciones que se deriva de la ecuación 3.91 se resuelve para calcular, después de obtenidas las temperaturas desconocida, las cargas de cada nodo de todos los elementos. La ecuación que se resuelve se expresa como:

$$[K_{cc}] \cdot \{T_c\} + [K_{ca}] \cdot \{T_c\} = \{F_c\} \quad (3.36)$$

3.6 Optimización de las ecuaciones

Para optimizar el tiempo de cálculo computacional, en la rutina analítica se pueden simplificar la forma en que el programa resuelve los sistemas de ecuaciones, a continuación se desarrollan los casos donde la optimización de algunos parámetros se hace posible.

3.6.1 Optimización de la integración analítica de la matriz de calor

Para calcular todos los subtérminos de la matriz de calor se programan las ecuaciones en Fortran90, por lo que es necesario optimizar los cálculos para

reducir los tiempos de ejecución en el programa. Esta optimización se puede realizar trabajando directamente con los algoritmos evitando redundar en los cálculos de los términos.

Una de las simplificaciones mas importantes y obvias, es la de calcular la matriz triangular superior debido a que las matrices de conducción térmica en todos sus casos, tanto cuando existe convección o no, es simétrica. Es por esto que la matriz $K^{(e)}$ se escribe como,

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} K(1) & K(2) & K(3) & K(4) & K(5) & K(6) & K(7) & K(8) \\ & K(9) & K(10) & K(11) & K(12) & K(13) & K(14) & K(15) \\ & & K(16) & K(17) & K(18) & K(19) & K(20) & K(21) \\ & & & K(22) & K(23) & K(24) & K(25) & K(26) \\ & & & & K(27) & K(28) & K(29) & K(30) \\ & & & & & K(31) & K(32) & K(33) \\ & & & & & & K(34) & K(35) \\ & & & & & & & K(36) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Dejando para calcular de forma directa sólo 20 elementos debido a que muchos de estos términos son nulos como se muestra en la ecuación (3.38), condición particular de la matriz de conductividad térmica.

$$K(2)=K(4)=K(5)=K(7)=K(10)=K(12)=K(14)=K(17)=K(19)=K(21)=K(23)=K(25)=K(28)=K(30)=K(32)=K(35)=0 \quad (3.38)$$

Vista la forma general de los subtérminos de la matriz de calor, se simplifican cada uno de sus subtérminos. Como se comento en capítulos anteriores, la integral de la matriz de calor se calculo en cuatro casos. Para demostrar la recursividad de algunos términos de las ecuaciones se escribe la integral analítica del cuarto caso que tiene la forma

$$K_{ij} = \frac{ACK^4(Z) \cdot ALOG^4 + BCK^4(Z) \cdot BLOG^4 + CCK^4(Z) \cdot CLOG^4(Z) + DCK^4(Z) \cdot DLOG^4(Z) + ECK(Z)}{FCK^4} \quad (3.39)$$

Se evita evaluar recursivamente los logaritmos de esta expresión debido a que sus valores son constantes y pueden ser separados de los ciclos donde se calculan las ecuaciones integradas analíticamente, sus expresiones son:

$$\begin{aligned} ALOG4 &= \ln(AJ + BJ + CJ); & BLOG4 &= \ln(AJ - BJ + CJ) \\ CLOG4 &= \ln(-AJ + BJ + CJ); & DLOG4 &= \ln(-AJ - BJ + CJ) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Como se muestra en las ecuaciones (3.40) lo mismo sucede con los otros casos de integración de la matriz de conductividad, donde se simplifican los cálculos evaluando a priori algunos términos de la ecuación.

Otro caso de simplificación viene dado por el llamado a rutinas internas del programa Fortran90. Se muestra a continuación, el siguiente término que calcula un valor constante para el subtérmino de la matriz de calor

$$FK(22) = (-x1/8 + x3/8)**2 \quad (3.41)$$

Donde se simplifica rescribiendo la ecuación como

$$FK(22) = 1/8*(AX6)*(AX6) \quad (3.42)$$

Con este simple cambio en la expresión evita que el programa realice una subrutina interna que calcule la potencia cuadrada de un término. En cambio, sólo calcula el producto de dos términos.

3.6.2 Reducción de las constantes

Un método utilizado para simplificar los cálculos en las rutinas analíticas es la reducción de las constantes, como se demostró en Coronel (2006), para reducir el tiempo de cálculo computacional es asignar a las diferencias de las

coordenadas cartesianas presentes en toda la formulación con nuevas constantes (ver 3.50), estas nuevas expresiones se escriben como:

$$\begin{aligned} AX1=x4-x3; AX2=x2-x1; AX3=x3-x2; AX4=x4-x1; AX5=x4-x2; AX6=x3-x1; \\ AY1=y4-y3; AY2=y2-y1; AY3=y3-y2; AY4=y4-y1; AY5=y4-y2; AY6=y3-y1. \end{aligned} \quad (3.43)$$

3.6.3 Optimización de la matriz de conductividad en el área

La matriz simétrica presenta términos que son iguales y que pueden ser calculados sólo una vez, lo que permite optimizar los tiempos de cálculos para la matriz de calor con convección en el área.

$$Kh^{(e)} = 2 \cdot h \cdot \iint_{\Omega} \begin{bmatrix} Kh(1) & Kh(2) & Kh(3) & Kh(4) \\ & Kh(5) & Kh(2) & Kh(7) \\ & & Kh(8) & Kh(9) \\ & & & Kh(10) \end{bmatrix} \cdot |J| \cdot d\Omega \quad (3.44)$$

Se observa que el subtérmino $Kh(2) = Kh(6)$ de la matriz $Kh^{(e)}$ para todos los casos de integración de la matriz $K^{(e)}$. Por lo que no se calcula directamente el subtérmino $Kh(6)$ de la matriz $Kh^{(e)}$, sino, que se iguala el valor obtenido de evaluar la función en el subtérmino $K(2)$.

CAPÍTULO IV. RESULTADOS DE PRECISIÓN Y TOLERANCIA

4.1. Comparación de la integración analítica y numérica de la matriz de conducción

En este capítulo se presentan una serie de tablas, que calculan los elementos de la matriz de calor mediante la cuadratura de gauss comparándolos con los resultados obtenidos mediante la integración analítica, desarrollada en este trabajo. Se calcula los errores de cada geometría según los casos de integración como se vio en el capítulo III. Los resultados de ambos métodos se compararan mediante el error porcentual promedio.

El error porcentual promedio se expresa como:

$$Ep_i = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{64} (T_{analítica_i} - T_{numérica})^2}}{\sum_{i=1}^{64} |T_{analítica_i}|} \cdot 100 \quad (4.1)$$

Donde $T_{analítica}$ es la temperatura obtenida por la metodología de integración analítica, y $T_{numérica}$ la temperatura obtenida de la integración numérica clásica (Gauss-Legendre)

Se espera que los resultados obtenidos para el cálculo analítico sea más preciso que mediante el método de Gauss-Legendre, ya que el método por integración numérico presenta errores cuando los elementos finitos son distorsionados.

Las siguientes tablas se construyen según el caso de integración.

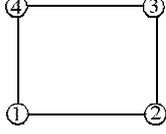
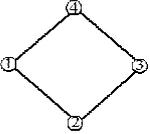
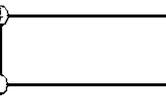
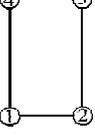
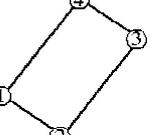
4.1.2 Primer Caso ($AJ=0$, $BJ=0$)

El primer caso de integración incluye todos los paralelogramos, cuyos lados sean paralelos o no al los ejes de coordenados. Para este caso de integración se calcula la matriz de calor mediante el método analítico y numérico estableciendo sus diferencias mediante la obtención del error porcentual promedio.

El primer caso de integración se presenta cuando las constantes del Jacobiano AJ y BJ son nulas. La geometría característica de los elementos que hacen que estas constantes que dependen de las coordenadas (x,y) sean cero son todos aquellos elementos cuyos lados son paralelos. Esta característica se puede dar en elementos cuadrados y rectangulares. Estos elementos pueden ser o no paralelos con los ejes de coordenados, lo que hace que el primer caso de integración no se limite a esta condición.

A continuación se presenta en la tabla 2. Diferentes casos de de elementos con las características antes descritas.

Tabla 2. Error porcentual promedio para algunas geometrías del primer caso.

Nombre del elemento	Descripción	Geometría	Coordenadas			Error porcentual promedio		
			Nodo	x	y	2pto de Gauss	3ptos. de Gauss	4ptos. de Gauss
CUA1A	Elemento cuadrilátero cuadrado con sus lados paralelos a los ejes de coordenadas		1	0	0	0	0	0
			2	1	0			
			3	1	1			
			4	0	1			
CUA1B	Elemento cuadrado rotado 45° con respecto al eje de coordenadas		1	0	0	0	0	0
			2	0,7071	-0,7071			
			3	1,4142	0			
			4	0,7071	0,7071			
CUA1C	Elemento rectangular paralelo al eje de coordenada, con base mayor a la altura		1	0	0	0	0	0
			2	20	0			
			3	20	10			
			4	0	10			
CUA1D	Elemento rectangular paralelo al eje de coordenadas con base menor a su altura		1	0	0	0	0	0
			2	10	0			
			3	10	20			
			4	0	20			
CUA1E	Elemento rectangular rotado 45° con respecto al eje de coordenadas		1	-4	3	0	0	0
			2	0	0			
			3	6	8			
			4	2	11			

4.1.3. Segundo Caso ($AJ = 0$)

El segundo caso de integración se presenta cuando la constante del jacobiano AJ es nulo (ver 3.23). Esto sucede en los elementos finitos distorsionados en la dirección x coordenado. Caso en que se calculara al igual que para el primer caso una serie de elementos con características geométricas particulares.

Los elementos que se presentan para el segundo caso de integración son todos cuadriláteros con distorsión en cualquiera de sus vértices en la dirección x de la coordenada cartesiana. Esta distorsión es muy útil para superficies extendidas con secciones transversales variable, cuyo eje se encuentra en la dirección del eje y .

En la siguiente tabla se van a calcular varios ejemplos de elementos finitos de cuatro nodos con este tipo de distorsión que corresponde al segundo caso de integración.

Tabla 3. Error porcentual promedio para algunas geometrías del segundo caso.

Nombre del elemento	Descripción	Geometría	Coordenadas			Error porcentual promedio		
			Nodo	x	y	2ptos. de Gauss	3ptos. de Gauss	4ptos. de Gauss
CUA2A	Cuadrado con distorsión en la dirección x y en un vértice		1	0	0	25,25	25,15	25,13
			2	10	0			
			3	15	5			
			4	0	5			
CUA2B	Cuadrilátero con distorsión pronunciada en dirección x del nodo 3		1	0	0	53,18	53,15	53,13
			2	10	0			
			3	100	5			
			4	0	5			
CUA2C	Cuadrilátero con dos distorsiones en la dirección x en los nodos 3 y 4 del elemento		1	-10	0	60,94	60,73	60,73
			2	10	0			
			3	100	5			
			4	0	5			
CUA2D	Trapezio con simetría en el eje y		1	0	0	12,29	8,29	4,72
			2	55	0			
			3	30	5			
			4	25	5			
CUA2E	Cuadrilátero con lados en ángulo de 45° a los ejes coordenados		1	3	-4	33,41	33,03	31,99
			2	7	-1			
			3	8	6			
			4	0	0			
CUA2F	Elemento cuadrilátero con distorsión en los cuatro vértices		1	0	0	77,56	77,47	77,44
			2	10	5			
			3	11	11,5			
			4	5,5	8,75			
CUA2G	Elemento cuadrilátero con sus cuatro vértices distorsionados con dos ángulos agudos		1	0	0	257,73	251,98	251,47
			2	10	5			
			3	11	11,5			
			4	8	10			

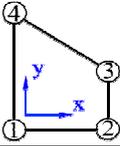
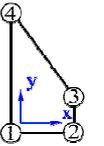
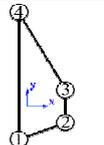
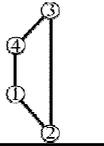
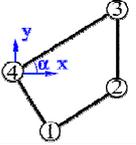
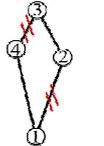
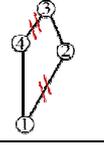
4.1.4. Tercer Caso ($BJ=0$)

El tercer caso de integración corresponde a los elementos finitos cuadriláteros distorsionados en la dirección de y , en cualquiera de sus nodos. Cuando esto ocurre la constante del jacobiano BJ es nulo, ver ecuación (3.24). Caso en que se calculara al igual que para el primer caso una serie de elementos con características geométricas particulares.

Los elementos que se presentan para el tercer caso de integración son todos cuadriláteros con distorsión en cualquiera de sus vértices en la dirección y coordenada. Esta distorsión es muy útil para superficies extendidas con secciones transversales variable, cuyo eje se encuentra en la dirección del eje x .

En la siguiente tabla se van a calcular varios ejemplos de elementos finitos de cuatro nodos con este tipo de distorsión que corresponde al segundo caso de integración.

Tabla 4. Error porcentual promedio para algunas geometrías del tercer caso.

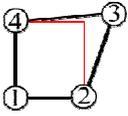
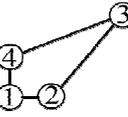
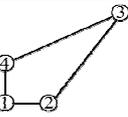
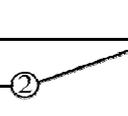
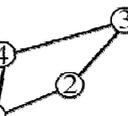
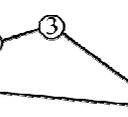
Nombre del elemento	Descripción	Geometría	Coordenadas			Error porcentual promedio		
			Nodo	x	y	2ptos. de Gauss	3ptos. de Gauss	4ptos. de Gauss
CUA3A	Elemento con dos lados paralelos a y con pequeña distorsión en uno de sus vértices		1	0	0	23,43	24,46	24,47
			2	5	0			
			3	5	10			
			4	0	15			
CUA3B	Elemento con dos lados paralelos a y con gran distorsión		1	0	0	67,43	59,86	33,54
			2	5	0			
			3	5	10			
			4	0	100			
CUA3C	Elemento con distorsión en dos vértices		1	0	0	27,48	24,73	8,59
			2	5	-25			
			3	5	30			
			4	0	10			
CUA3D	Elemento distorsionado simétrico con lados paralelos al eje y		1	0	0	27,48	24,73	8,59
			2	5	-25			
			3	5	30			
			4	0	10			
CUA3E	Elemento con lados paralelos entre si rotado 45° con respecto al eje de coordenadas		1	0	0	35,06	34,95	31,52
			2	4	-3			
			3	7	1			
			4	6	8			
CUA3F	Elemento distorsionado con dos lados paralelos con ángulos internos <150°		1	-0,85	10,3	89,49	89,39	84,68
			2	0	0			
			3	5	10			
			4	1,9	15,8			
CUA3G	Elemento distorsionado con dos lados paralelos con ángulos internos >150°		1	0,4	12,8	271,75	267,29	217,1
			2	0	0			
			3	5	10			
			4	1,9	15,8			

4.1.5. Cuarto caso ($AJ \neq 0$, $BJ \neq 0$)

El cuarto caso de la integración analítica de la matriz de calor se presenta cuando ninguna constante del determinante del Jacobiano es nula. Esto ocurre en los casos de geometrías de elementos con distorsiones en la dirección (x,y) de las coordenada de sus nodos.

A continuación se presenta una tabla en la que se calculan algunos elementos del cuarto caso de integración.

Tabla 5. Error porcentual promedio para algunas geometrías del cuarto caso.

Nombre del elemento	Descripción	Geometría	Coordenadas			Error porcentual promedio		
			Nodo	x	y	2ptos. de Gauss	3ptos. de Gauss	4ptos. de Gauss
Cua4a	Elemento trapezoidal levemente distorsionado en uno de sus vértices		1	0	0	6,35	6,21	6,21
			2	10	0			
			3	11	11			
			4	0	10			
Cua4b	Elemento distorsionado en uno de sus vértices de forma simétrica		1	0	0	77,21	76,57	76,41
			2	10	0			
			3	100	100			
			4	0	10			
Cua4c	Elemento con gran distorsión en uno de sus vértices de forma simétrica		1	0	0	74,44	74,44	74,44
			2	10	0			
			3	10000	10000			
			4	0	10			
Cua4d	Elemento muy distorsionado en uno de sus vértices de forma asimétrica		1	0	0	77,41	76,57	76,21
			2	10	0			
			3	100	100			
			4	0	10			
Cua4e	Elemento distorsionado en la dirección x en uno de sus vértices		1	0	0	54,33	53,8	53,64
			2	10	0			
			3	100	10			
			4	0	10			
Cua4f	Elemento cuadrilátero con ángulo interno mayor a 150°		1	0	0	132,75	132,75	132,75
			2	30	10			
			3	40	50			
			4	15	30			
Cua4g	Elemento cuadrilátero con ángulo interno mayor a 150°		1	0	0	10,02	7,54	7,48
			2	-5	50			
			3	10	15			
			4	2,5	10			

4.1.6 Análisis de resultados

Se observa en las tablas anteriores que la integración numérica mediante las cuadraturas de gauss en transferencia de calor por conducción, sólo las geometrías del primer caso donde los ejes eran ortogonales, el error es despreciable. De igual forma para ninguna otra geometría en los siguientes casos se aprecia este error porcentual, a excepción de los elementos CUA2D, CUA4A y CUA4G, del segundo y cuarto caso respectivamente, cuyos errores porcentuales comparados con la integración analítica rondaban el 10 %.

Se observa claramente que el método de cuadraturas de gauss, sólo es preciso para geometría que no estén distorsionadas, es por ello que, no es conveniente usarlos para simular el fenómeno de transferencia de calor por conducción con geometrías que no posean estas características, al menos para elementos cuadriláteros de cuatro nodos, que es el caso estudiado en el presente trabajo. Esto explica el porque toda la bibliografía encontrada el método mas común utilizado es de cuadraturas de gauss usando elementos cuadrados o rectangulares, que son las geometrías calculadas donde los errores son cero respecto a la analítica.

En resumen, en cuanto a precisión es obvia la diferencia entre el método analítico y las cuadraturas de gauss, en el caso específico de transferencia de calor la matriz de calor goza de mayor precisión en todos los casos de geometrías distorsionadas de los elementos, lo que nos permite tener resultados mas confiables a la hora de dividir mediante una malla un modelo físico con geometría irregular.

4.2 Eficiencia de la rutina analítica

La eficiencia de la rutina analítica se mide mediante el cálculo del tiempo durante el cual el algoritmo programado y optimizado, de la integración a analítica para transferencia de calor, se calcula. Esta eficiencia se puede medir para comparar los efectos de las optimizaciones en las rutinas tanto analítica como numérica (ver 3.4.8).

En este capítulo se tratara la eficiencia con dos propósitos. El primer propósito consiste en verificar el tiempo de las rutinas analíticas optimizadas, cuyos algoritmos fueron transcritos a Fortran90. EL segundo propósito consiste en comparar esos tiempos de ejecución con las rutinas numéricas, que son las ecuaciones halladas por el método de las cuadraturas de Gauss-Legendre.

Dicho esto, se espera obtener mediante la comparación de las eficiencias de ambos métodos, la integración analítica y la numérica, conocer si la rutina analítica presenta una ventaja modesta o sustancial con respecto al método numérico. En caso contrario, verificar si la rutina analítica no tiene ganancia en cuanto al tiempo.

4.2.1 Capacidad de procesamiento del computador

Debido a que el tiempo de ejecución de los algoritmos son sensibles a cambios según el hardware que se emplee para su ejecución, para esta prueba de eficiencia se usa la misma herramienta en todos los casos. El equipo utilizado para medir la eficiencia de los métodos tanto analítico como numérico, tiene las siguientes características

Procesador Intel Pentium 2.6 GHZ

Memoria RAM 1 GB

Con el fin de garantizar un tiempo de ejecución determinado, atribuible a las rutinas optimizadas, la rutina analítica fue llevada a cabo varias veces y promediada, con el fin de despejar cualquier duda sobre alguna pérdida de recurso por parte del computador ajeno a los propósitos de las pruebas. Esto se debe a que el programa que va a medir los tiempos esta bajo ambiente Windows Xp, lo que hace que exista la posibilidad de que durante la ejecución del programa este sistema operativo ejecute en paralelo alguna otra actividad.

4.2.2 Relación de tiempos de ejecución computacional

La relación de tiempos de ejecución es el cociente entre los tiempos obtenidos de las rutinas analíticas y las rutinas numéricas. La expresión para esta relación se expresa como:

$$R_{N-A} = \frac{N}{A} \quad (4.3)$$

Donde N es el tiempo de ejecución de la rutina numérica y A el tiempo de la analítica. En el caso satisfactorio en que el tiempo de ejecución de la rutina analítica sea menor a la numérica, el valor de R_{N-A} debe ser un valor positivo que refleja el tiempo más veloz que ejecuto la rutina analítica. De ser menor que la unidad, el tiempo obtenido mediante la rutina analítica será mayor que la numérica, es decir, menos eficiente.

4.2.3 Ganancia en tiempo

El porcentaje de tiempo optimizado es la proporción en que la rutina analítica supero o no en tiempo a la rutina numérica. Este valor se define calculando la diferencia de los tiempos obtenido para cada método entre el tiempo obtenido por la rutina analítica, se expresa como:

$$Top = \frac{N - A}{N} \cdot 100 \quad (4.4)$$

Donde A y N son los tiempos obtenidos de ejecutar las rutinas analíticas y numéricas respectivamente.

4.2.4 Resultados de tiempos de ejecución de las rutinas numéricas y analíticas.

A continuación se presenta una tabla de resultados de los tiempos obtenidos de las iteraciones de las rutinas computacionales. Se calcularon las ecuaciones, obtenidas de la integración analítica y los cálculos de la integración por cuadraturas de Gauss, para diez mil elementos finitos, cien mil elementos finitos y un millón de elementos finitos isoparamétricos de cuatro nodos.

Se espera que para todos los casos de la integración analítica, sea más veloz que para los cálculos con la integración numérica clásica

	PRIMER CASO AJ=0 BJ=0			SEGUNDO CASO AJ=0 BJ=0			TERCER CASO AJ=0 BJ=0			CUARTO CASO AJ=0 BJ=0		
	Tiempo [seg.]	R = N/A	Topt. [%]	Tiempo [seg.]	R = N/A	Topt. [%]	Tiempo [seg.]	R = N/A	Topt. [%]	Tiempo [seg.]	R = N/A	Topt. [%]
	10 000 Elementos											
Analítica	0,03125			0,03125			0,01562			0,1406		
2 puntos	0,7423	23,75	96	0,7187	23,00	96	0,7187	46	98	0,7187	5,11	80
3 puntos	1,5937	51,00	98	1,6093	51,50	98	1,6093	103	99	1,6093	11,45	91
4 puntos	2,8593	91,50	99	2,8906	92,50	99	2,8906	185	99	2,8906	20,56	95
	100 000 Elementos											
Analítica	0,25			0,2187			0,2031			1,28		
2 puntos	7,1718	28,69	97	7,1718	32,79	97	7,1718	35	97	7,1718	5,60	82
3 puntos	16,2187	64,87	98	16,2187	2,26	99	16,2187	80	99	16,2187	12,67	92
4 puntos	28,5156	114,06	99	28,5156	1,76	99	28,5156	140	99	28,5156	22,28	96
	1000 000 Elementos											
Analítica	2,3593			2,0156			2,2031			12,6406		
2 puntos	71,0781	30,13	97	71,0781	35,26	97	71,0781	32	97	71,0781	5,62	82
3 puntos	159,5312	67,62	99	159,5312	79,15	99	159,5312	72	99	159,5312	12,62	92
4 puntos	283,5781	120,20	99	283,5781	140,69	99	283,5781	129	99	283,5781	22,43	96

Tabla 6. Tabla de tiempos de cálculos computacionales.

4.2.5 Análisis de resultados

En la tabla de tiempos y relaciones entre la rutina analítica y la numérica se observó un aumento en la velocidad de los cálculos computacionales aplicando el método analítico lo que ofrece una ventaja en modelos de transferencia de calor por conducción.

En cuanto a los casos de integración se observa como las geometrías escogidas para elaborar la malla del elemento finito es determinante para incidir directamente en los tiempos de ejecución, aunque la disminución en los tiempos como, específicamente en el cuarto caso, no presentan cambios sustanciales en la eficiencia de la rutina analítica comparado con la rutina numérica.

4.5 Tolerancia de la rutina analítica

En Coronel (2006) se demostró que existe una tolerancia mínima para el cálculo del determinante del jacobiano. Cuando el elemento finito tiende a la geometría cuadrada, los coeficientes AJ, BJ toman un valor muy pequeño con respecto a CJ, y esto hace que, en determinados casos, la integral de los subterminos de la matriz $K^{(e)}$ no converja. Es por ello que se definió un criterio que fue llamado como tolerancia mínima, donde se busca, una relación entre los coeficientes AJ y BJ del jacobiano con la constante CJ del mismo. Recordando al lector que la constante CJ nunca es cero, es decir, nunca es nula.

4.6 Nulidad de las constantes

Se hace necesario definir un valor mínimo de las constantes AJ y BJ, que permita hacer la discriminación de los casos para los problemas límites, de esta forma poder generalizar la rutina analítica. En Coronel (2006) se encontró que esa tolerancia mínima era que las constantes AJ y/o BJ eran de 0.25% del valor de la constante CJ. Por lo que se define las constantes AJ y/o BJ como nulas cuando $TOL_{min}=0.0025*CJ$.

Cuando se codificó en Fortran90 las rutinas analíticas para transferencia de calor en el presente trabajo se implementó este criterio para evitar la divergencia de los resultados de los términos de la matriz en los casos límites de distorsión del elemento. Este criterio se aplica utilizando las siguientes condiciones dentro de las rutinas del método

Si $(|AJ| < TOLmin)$ entonces $AJ=0$

Si $(|BJ| < TOLmin)$ entonces $BJ=0$

CAPÍTULO V. APLICACIÓN Y COMPARACIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo se presentan una serie de ejemplos que se resuelven usando la técnica de integración analítica que fue desarrollada en el presente trabajo. Además se calcula los mismo problemas mediante el uso de programa de elemento finito llamado FEHT®, con el propósito de verificar los resultados obtenidos con la integración analítica. Otro propósito por el cual se realizan estos ejemplos es para comprobar las diferentes geometrías de los elementos finitos que conforman la malla aplicándolos a problemas reales.

Para comprobar la validez de los resultados obtenidos mediante el método analítico se calculo el error porcentual de la distribución de temperatura versus la distribución obtenida con FEHT®. El error porcentual es calculado con la siguiente ecuación.

Para una mejor ilustración de los resultados obtenidos se graficó las bandas de calor por colores de los modelos utilizando la herramienta gráfica de FEHT®.

$$Ep = \frac{T_{an} - T_{feht}}{T_{an}} \cdot 100 \quad (5.1)$$

Donde T_{an} es la temperatura resultado de la integración analítica y T_{feht} es la temperatura resultado de utilizar el programa computacional FEHT®.

Los casos resueltos a continuación se validaron con el programa FEHT®, que se basa en el calculo de elementos finitos triangulares, lo que no permite hacer comparaciones directas en cuanto a eficiencia y precisión en contraparte a los elementos finitos cuadriláteros. Este programa sólo fue utilizado para validar las respuestas obtenidas por el método de integración analítica.

5.1 Problema ejemplo #1

5.1.1 Descripción del problema

Se desea calcular la distribución de temperatura de una aleta con sección transversal constantes. Cuya temperatura T_c en los nodos 1,2 y 3 es conocida, rodeada de un fluido con características específicas que se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 7. Ejemplo #1 – Características del problema.

Para la conducción				Para la convección	
Material	k [$\frac{btu}{hr \cdot pie \cdot F}$]	T_c [F]	espesor (pulg)	h [$\frac{btu}{hr \cdot pie^2 \cdot F}$]	T_a [F]
Aleación	20	180	0,5	50	68

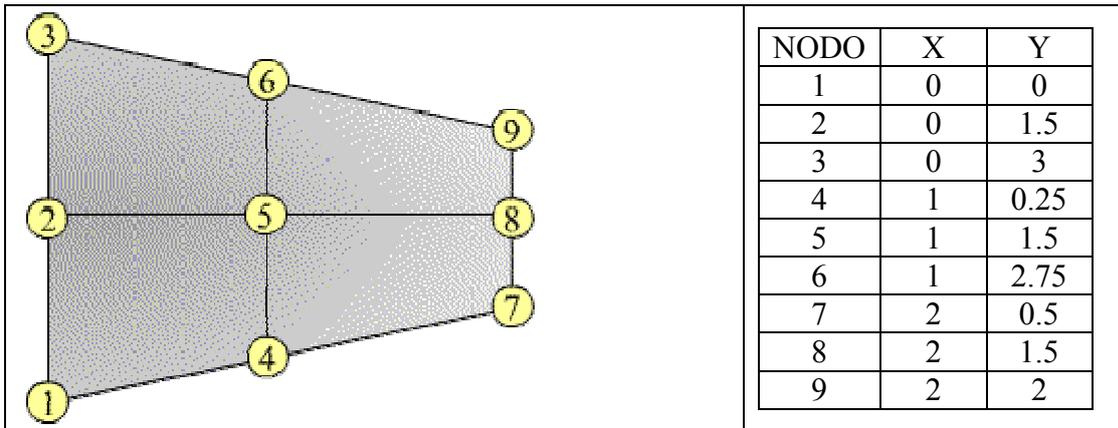


Figura 17. Coordenadas de los nodos de los elementos cuadriláteros.

Tabla 8. Ejemplo #1-Propiedades de la malla.

Número de Elementos	Número de Nodos	Elemento Tipo I	Tipo II	TipoIII	Tipo IV
4	9	0	0	4	0

Tabla 9. Ejemplo #1 – Tabla de resultados integración analítica y numérica.

No. NODO	TEMPERATURA [F]	TEMPERATURA [F] FEHT®	Error Porcentual [%]
1	180,0000	180,0000	-
2	180,0000	180,0000	-
3	180,0000	180,0000	-
4	148,3336	149,1270	0,54
5	156,3392	154,3843	1,25
6	150,3912	149,4894	0,60
7	131,8091	131,4306	0,29
8	136,3829	135,8997	0,35
9	135,6411	131,2295	3,25

5.4.2 Análisis de resultados

Se observa de este modelo dos características fundamentales. La primera característica es que, es una superficie extendida de sección transversal variable por lo que la rutina numérica para este caso no tendría la misma precisión que la rutina analítica, lo que ya se demostró en el capítulo IV. Esta aleta tiene forma simétrica cuya malla esta formada por cuatro elementos con distorsiones en el sentido y de la coordenada.

En cuanto a la distribución de temperatura a diferencia del ejemplo anterior, donde se presenta una distribución simétrica, se observa que los resultados de los nodos simétricos al eje x, no tienen los mismos valores. Esto se debe a que los elementos tienen diferentes distorsiones en los vértices, lo que hace que los resultados tengan algún error de precisión. Este es un ejemplo claro de donde el criterio de simetría se hace más útil que en otros casos, tal y como se observaron en los ejemplo 1 y 2.

A pesar de la diferencia en temperatura de los nodos simétricos el orden de los valores de los resultados es bastante aceptable debido a que en comparación con FEHT, en proporción presentan las mismas desviaciones, lo que se puede apreciar en los errores porcentuales. También se observa en ambos casos como al no usar el criterio de la simetría no se garantiza una simetría en la distribución de temperatura.

5.2 Problema ejemplo #2

5.5.1 Descripción del problema

Con el siguiente ejemplo, ver Figura 18, se busca modelar, con diferentes distorsiones de los elementos, una aleta cuya condiciones iniciales son iguales a las del ejemplo anterior. Esto se hace con el propósito de verificar la confiabilidad de los resultados para diferentes geometrías de los elementos y como éstas inciden las distorsiones de los elementos en la ejecución de la rutina analítica.

Tabla 10. Ejemplo #2 – Características del problema.

Para la conducción			Para la convección		
Material	k $\left[\frac{btu}{hr \cdot pie \cdot F} \right]$	Tc [F]	espesor (pulg)	h $\left[\frac{btu}{hr \cdot pie^2 \cdot F} \right]$	Ta [F]
Aleación	20	180	0,5	50	68

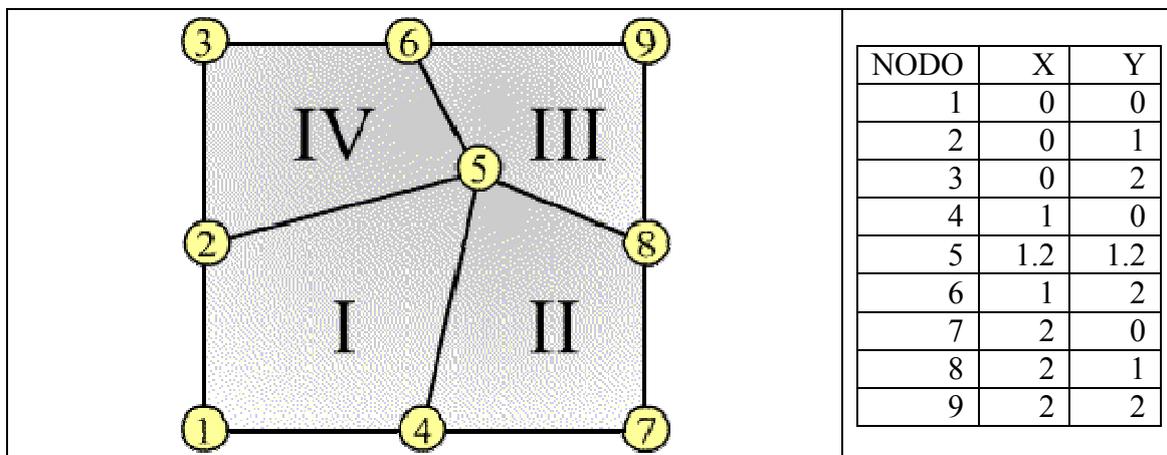


Figura 18. Modelo distorsionad de cuatro elementos finitos.

Tabla 11. Ejemplo #2 - Propiedades de la malla.

Número de Elementos	Número de Nodos	Elemento Tipo I	Tipo II	TipoIII	Tipo IV
4	9	0	0	0	4

Tabla 12. Ejemplo #2-Distribución de temperaturas.

No. NODO	TEMPERATURA [F] Analítico	TEMPERATURA [F] FEHT®	Error Porcentual [%]
1	180,0000	180,0000	-
2	180,0000	180,0000	-
3	180,0000	180,0000	-
4	141,6799	142,2022	0,37
5	144,5750	143,3160	0,87
6	140,4618	142,8763	1,71
7	122,8971	123,4443	1,09
8	130,0983	129,5018	0,46
9	123,9980	123,7154	0,51

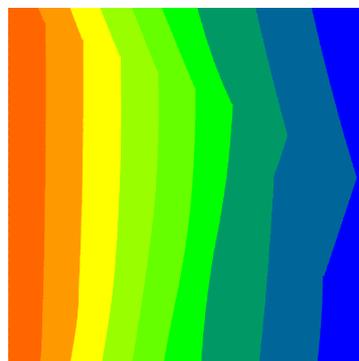


Figura 19. Gráfico de distribución de temperatura del ejemplo #5 extraído de FEHT®.

5.5.2 Análisis de resultados

Se observan en los resultados que a diferencia del ejemplo anterior tenemos una aleta con sección transversal uniforme lo que sería más sencillo de modelar con elementos no distorsionados del tipo I, sin embargo se usaron para este caso cuatro elementos del tipo IV para calcular la distribución de temperatura y compararlos con los resultados que se obtienen con el programa FEHT®.

Se observa en la distribución de temperatura que los resultados obtenidos para los elementos del tipo IV son confiables. Los resultados no presentan simetría como era de esperarse debido a que la malla usa elementos distorsionados.

La característica más resaltante de este problema es que si se observa el elemento III de la malla está tan deformado que su geometría tiende a la geometría de un triángulo. Es decir que el elemento III está cerca del límite de la tolerancia del elemento finito cuadrilátero de cuatro nodos, como se estudió en el capítulo IV. Lo que se observa es una precisión en los resultados incluso para elementos con una distorsión importante.

5.3 Problema ejemplo #3

5.3.1 Descripción del problema

Se tiene una sección de un ala cuadrada de dimensiones 3 x 3 pulgadas adherida a una fuente de calor a temperatura constante de 180 [F]. La aleta esta rodeada por un fluido que se encuentra a 68 [F] presentando condición de borde convectivo solo en su partes laterales, obviándose así, la convección en su superficie. Las propiedades del material se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 13. Ejemplo #3-Datos del problema.

Para la conducción			Para la convección		
Material	k $\left[\frac{btu}{hr \cdot pie \cdot F} \right]$	Tc [F]	espesor (pulg)	h $\left[\frac{btu}{hr \cdot pie^2 \cdot F} \right]$	Ta [F]
Aleación	20	180	0,5	50	68

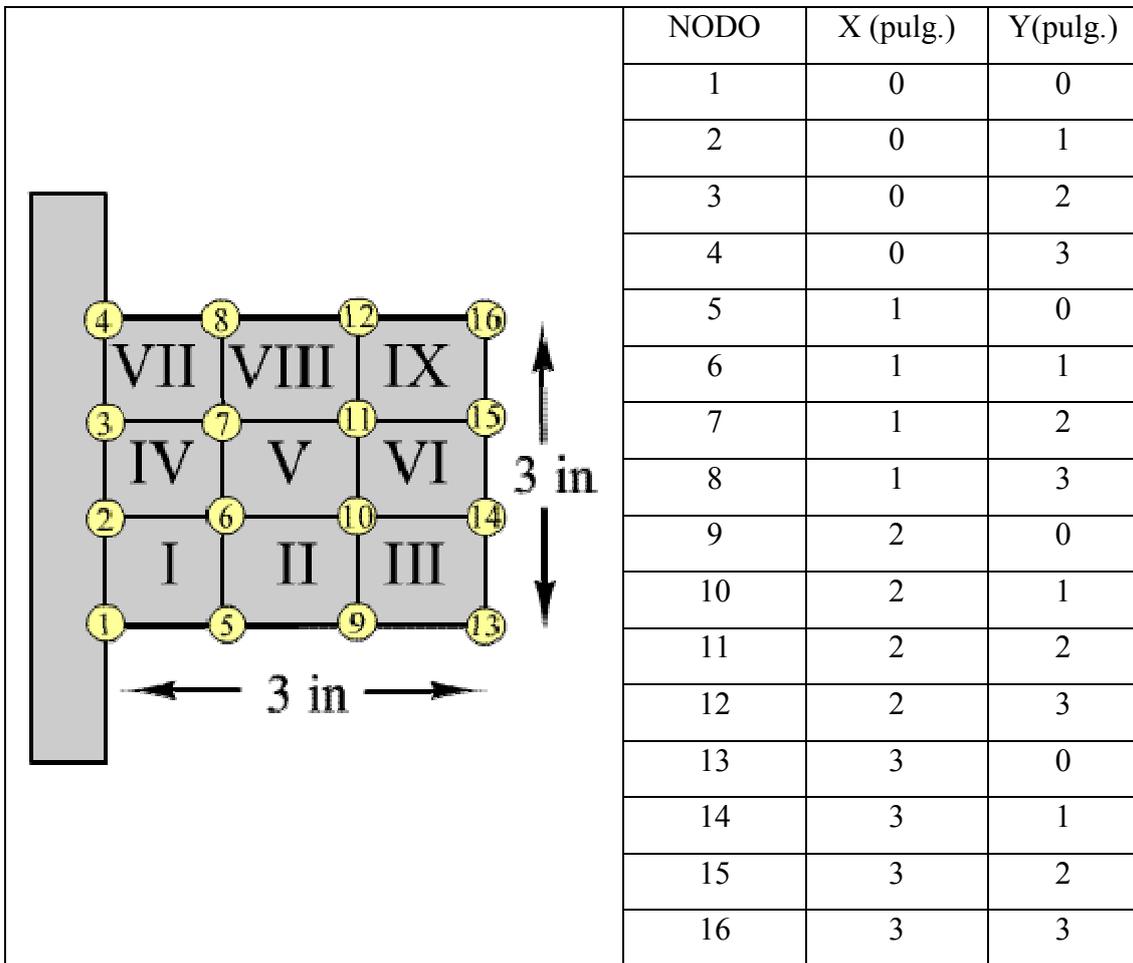


Figura 20. Coordenadas cartesianas de los nodos del modelo.

Tabla 14. Ejemplo #3-Propiedades de la malla.

Número de Elementos	Número de Nodos	Elemento Tipo I	Tipo II	Tipo III	Tipo IV
9	16	9	0	0	0

Tabla 15. Ejemplo #3-Tabla de resultados integración analítica y numérica.

No. NODO	TEMPERATURA [F]	Numérico FEHT®	Error porcentual (%)
1	180,0000	180,0000	-
2	180,0000	180,0000	-
3	180,0000	180,0000	-
4	180,0000	180,0000	-
5	141,4768	143,1099	1,15
6	152,1382	151,1159	0,67
7	152,1382	151,1159	0,67
8	141,4768	143,1099	1,15
9	122,6618	122,6439	0,01
10	130,4143	130,2380	0,13
11	130,4143	130,2380	0,13
12	122,6618	122,6439	0,01
13	110,7814	110,3236	0,41
14	116,8517	116,9541	0,09
15	116,8517	116,9541	0,09
16	110,7814	110,3236	0,41

5.3.2 Análisis de resultado

Cómo se observa en esta superficie extendida modelada mediante el uso de la metodología analítica, no se usó el criterio de la simetría que muy bien hubiese podido ser aplicado, debido a que la figura presenta esta simetría tanto en su geometría como en sus condiciones de frontera. No se hizo de esta manera para corroborar que los resultados obtenidos son simétricos. Resultado que se puede extrapolar a cualquier cálculo de transferencia de calor con efectos combinados de conducción y convección.

Se observa además un modelo matemático que en cuanto a precisión, no existen diferencias entre el modelo analítico y el método numérico. Pero como se demostró en el capítulo cuatro, para la rutina analítica los tiempos de cálculo computacional para este tipo de geometría son superiores a los numéricos.

Cualquiera de los dos métodos para superficies extendidas con sección transversal constantes presenta resultados confiables, por lo que el método analítico para este tipo de problemas sólo presenta ventajas en cuanto al tiempo de ejecución. Es por eso que este ejemplo nos demuestra que para transferencia de calor con efectos combinados para superficies extendidas con sección transversal constantes el método analítico no presenta una ventaja en cuanto a precisión para elementos con geometrías cuadradas.

5.4. Problema ejemplo #4

5.4.1 Descripción del problema

Se desea modelar la disipación de calor de una serie de aletas de aluminio adheridas a una placa. El modelo en el espacio es tal como se muestra en la siguiente figura:

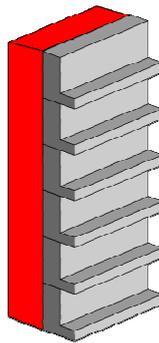


Figura 21. Disipador de calor adherido a una fuente térmica.

Tabla 16. Ejemplo #4-Datos del problema.

Para la conducción			Para la convección		
Material	k $\left[\frac{btu}{hr \cdot pie \cdot F} \right]$	Tc [F]	espesor (pulg)	h $\left[\frac{btu}{hr \cdot pie^2 \cdot F} \right]$	Ta [F]
Aleación	20	180	0,5	50	68

<p>Figura 22. Segmento de la aleta que disipa calor en tres dimensiones.</p>	<p>Figura 23. Modelo plano de la aleta a la cual se le aplica el método de elemento finito.</p>

Tabla 17. Ejemplo #4 – Resultados de la distribución de temperatura dentro del elemento.

Nodo	X [pulg]	Y [pulg]	T [°F]	ERROR PROCENTUAL [%]	Nodo	X [pulg]	Y [pulg]	T [°F]	ERROR PROCENTUAL [%]
1	4,00	0,00	103,3	2,9E-03	25	4,00	0,20	103,3	2,9E-03
2	3,25	0,00	112	2,7E-03	26	3,25	0,20	112,0	2,7E-03
3	2,50	0,00	139,0	2,2E-03	27	2,50	0,20	139,0	2,2E-03
4	2,00	0,00	168,7	1,8E-03	28	2,00	0,20	168,7	1,8E-03
5	1,35	0,00	205,2	1,5E-03	29	1,35	0,20	207,9	1,4E-03
6	0,00	0,00	285,0	-	30	0,60	0,20	244,5	1,2E-03
7	0,00	0,50	285,0	-	31	0,60	0,50	258,7	1,2E-03
8	0,00	1,00	285,0	-	32	0,60	1,00	267,2	1,1E-03
9	0,00	1,50	285,0	-	33	0,60	1,50	272,4	1,1E-03
10	0,00	2,00	285,0	-	34	0,60	2,00	272,8	1,1E-03
11	0,00	2,50	285,0	-	35	0,60	2,50	270,1	1,1E-03
12	0,00	3,00	285,0	-	36	0,60	3,00	267,4	1,1E-03
13	4,00	0,10	103,3	2,9E-03	37	4,00	0,33	103,3	2,9E-03
14	3,25	0,10	112,0	2,7E-03	38	3,25	0,33	112,0	2,7E-03
15	2,50	0,10	139,0	2,2E-03	39	2,50	0,33	139,0	2,2E-03
16	2,00	0,10	168,7	1,8E-03	40	2,00	0,33	168,2	1,8E-03
17	1,35	0,10	206,5	1,5E-03	41	1,35	0,33	208,2	1,4E-03
18	0,30	0,10	265,0	1,1E-03	42	1,00	0,33	230,4	1,3E-03
19	0,30	0,50	271,2	1,1E-03	43	1,00	0,50	248,2	1,2E-03
20	0,30	1,00	276,3	1,1E-03	44	1,00	1,00	261,0	1,1E-03
21	0,30	1,50	278,6	1,1E-03	45	1,00	1,50	266,3	1,1E-03
22	0,30	2,00	278,8	1,1E-03	46	1,00	2,00	267,1	1,1E-03
23	0,30	2,50	277,0	1,1E-03	47	1,00	2,50	265,2	1,1E-03
24	0,30	3,00	274,3	1,1E-03	48	1,00	3,00	262,0	1,1E-03

Tabla 18. Ejemplo #4-Resultados obtenidos de la distribución de cargas de los nodos de temperaturas conocidas.

q_6 [btu/hr.pulg]	q_7 [btu/hr.pulg]	q_8 [btu/hr.pulg]	q_9 [btu/hr.pulg]	q_{10} [btu/hr.pulg]	q_{11} [btu/hr.pulg]	q_{12} [btu/hr.pulg]
588,2	396,6	674,8	819,5	713,4	1026	1636

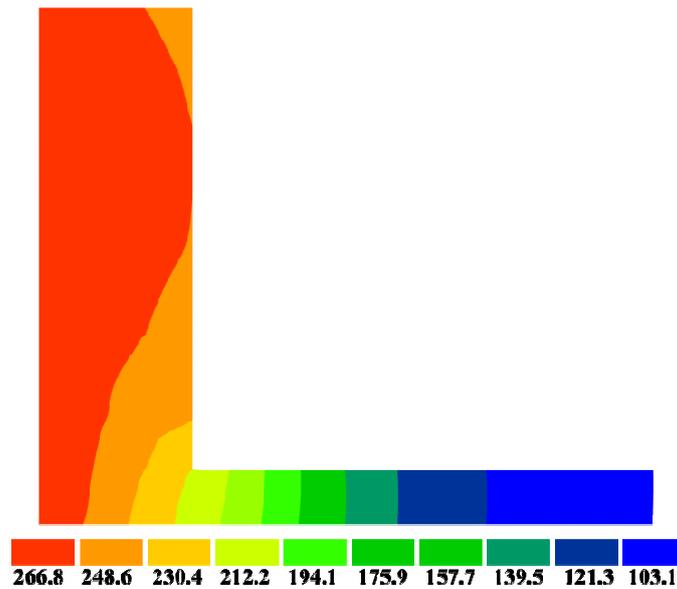


Figura 25. Gráfico de distribución de temperatura extraído de FEHT®

5.4.2 Análisis de resultados

Se aplicó para este ejemplo el criterio de simetría, para optimizar recursos computacionales. Se observa cómo la metodología puede aproximar ejemplos de superficies en tres dimensiones, que son estudiadas en el plano. Para este ejemplo en concreto, se abordó el caso típico de un disipador de calor para alguna superficie caliente, configuración que se encuentra como en los procesadores y chips de computadoras.

Se observa en la distribución de temperatura como el cambio de la geometría de una pared plana incide directamente en como se va a distribuir la temperatura dentro del elemento, incrementando o disminuyendo el flujo de calor para temperatura en áreas específicas.

Utilizando el diagrama de bandas de calor que se muestra en el programa FEHT, podemos ver el comportamiento de las isotermas dentro del elemento existiendo un aumento en el área de contacto para incrementar el efecto convectivo de las fronteras. Se usan las aletas extendidas para inducir el calor a la superficie y ayudar a que por convección se disipe más calor que sino existiera este tipo de geometría.

5.5. Problema ejemplo #5

5.5.1 Descripción del problema

Se presenta en la Figura 26, una placa que sostiene un arreglo de tubos utilizados para los intercambiadores de calor, se desea obtener la distribución de temperatura de dicha placa mediante el modelado de elemento finito por integración analítica en el plano. Como se puede observar en dicha figura tenemos una geometría compleja y lo que se busca usando el criterio de simetría simplificar los cálculos, esta simetría ocurre en toda el área de la placa como se muestra en el área mas oscura de la misma, lo que se muestra en la Figura 27.

Tabla 19. Ejemplo #5- Datos del problema.

Para la conducción				
Material	k $\left[\frac{btu}{hr \cdot pulg \cdot F} \right]$	Tc [°F]	Tc2 [°F]	espesor (pulg)
Aleación	50	325	290	0,5

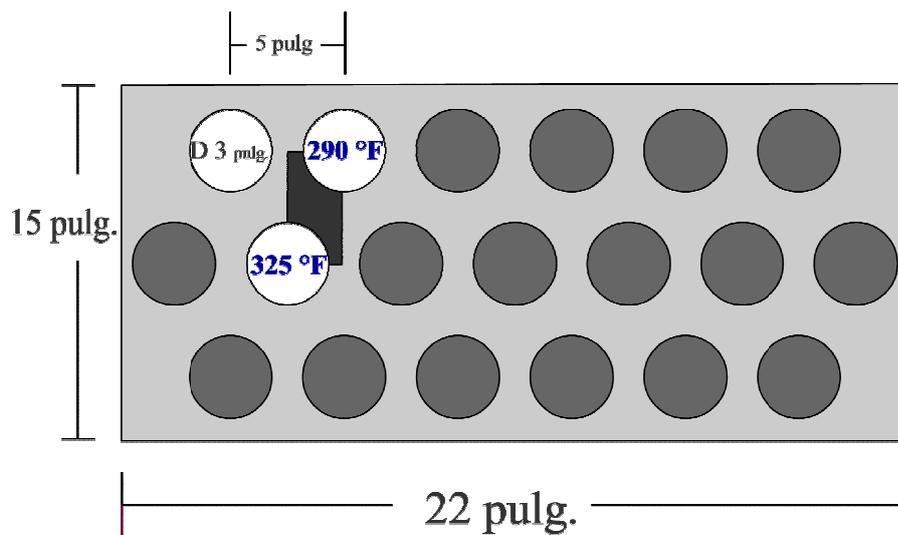


Figura 26. Sección transversal de panel de tubos.

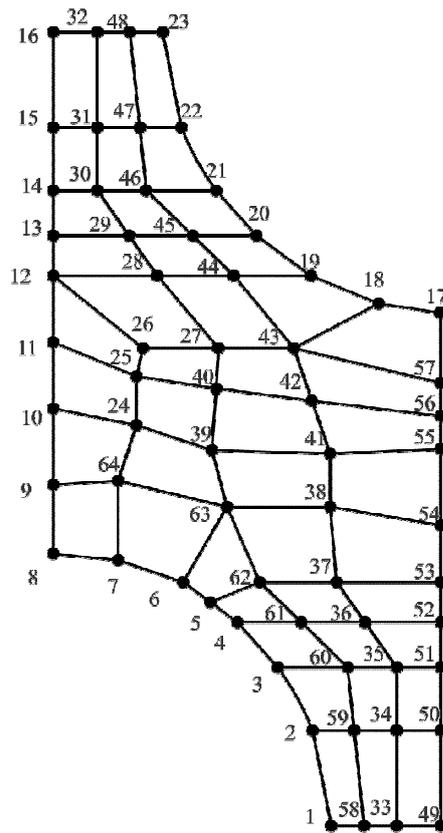


Figura 27. Malla para la sección plana de la placa de tubos, realizada bajo el criterio de simetría.

Tabla 20. Ejemplo #5 - Propiedades de la malla.

Número de Elementos	Número de Nodos	Elemento Tipo I	Tipo II	TipoIII	Tipo IV
45	64	5	17	0	22

Tabla 21. Ejemplo #5-Distribución de temperatura del modelo.

Nodo	X [pulg.]	Y [pulg.]	Temperatura Analítica [°F]	Error Porcentual [%]	Nodo	X [pulg.]	Y [pulg.]	Temperatura Analítica [°F]	Error Porcentual [%]
1	1,50	0,00	325	-	33	0,6	2,33	311,9	-
2	1,47	0,35	325	-	34	2,0	2,11	310,1	-
3	1,32	0,77	325	-	35	0,5	1,86	318,8	-
4	1,11	1,08	325	-	36	1,3	1,69	317,3	-
5	0,75	1,35	325	-	37	1,9	1,64	315,3	-
6	0,41	1,50	325	-	38	2,5	1,51	315,7	-
7	0,00	1,50	325	-	39	2,5	2,09	309,9	-
8	0,00	5,00	293	-	40	1,3	2,12	312,4	2,35
9	1,00	5,00	290	-	41	2,5	2,53	304,7	-
10	1,06	4,61	290	-	42	1,9	2,56	304,9	-
11	1,25	4,23	290	-	43	2,5	3,01	298,1	-
12	1,43	3,92	290	-	44	1,8	3,03	298,9	-
13	1,89	3,61	290	-	45	0,8	4,62	291,7	-
14	2,24	3,54	290	-	46	0,3	4,61	293,2	-
15	2,50	3,50	290	-	47	0,0	4,61	293,5	-
16	2,50	0,00	322,3	-	48	0,3	5,00	292,7	1,72
17	1,40	0,56	325	-	49	0,6	5,00	291,9	-
18	1,77	0,35	323,5	0,16	50	0,0	4,23	294,8	0,15
19	2,14	0,35	322,3	1,36	51	0,3	4,23	294,5	0,45
20	2,50	0,35	321,9	1,76	52	0,8	4,23	292,7	2,25
21	1,79	0,00	323,7	0,04	53	0,0	3,92	296,5	1,55
22	2,16	0,00	322,6	1,06	54	0,3	3,92	296,2	1,25
23	1,71	0,62	323	0,66	55	1,0	3,92	293,7	1,25
24	2,09	0,64	321,6	2,06	56	1,2	3,62	295,1	0,15
25	2,50	0,64	321,1	2,56	57	0,4	3,64	298	3,05
26	1,65	0,86	322,3	1,36	58	0,0	3,58	298,9	3,95
27	2,07	0,88	320,6	3,06	59	1,2	3,08	300,8	4,12
28	2,50	0,90	320	3,66	60	0,5	3,21	301,8	3,25
29	1,55	1,18	320,9	2,76	61	0,0	3,01	304,4	2,30
30	2,04	1,21	318,7	4,96	62	0,6	2,84	305,7	3,40
31	2,50	1,19	318,2	2,75	63	1,1	2,69	305,9	3,72
32	0,00	1,79	320,3	3,36	64	0,0	2,34	312,4	2,40

Tabla 22. Ejemplo #5-Flujo de calor en los nodos donde la temperatura es condición inicial del problema.

Nodo	q[btu/pulg-hr-F]	Error [%]	Nodo	q[btu/pulg-hr-F]	Error [%]
1	102,9	1,05	17	-130,90	0,83
2	206,0	0,52	18	-334,20	0,32
3	343,8	0,31	19	-367,60	0,29
4	683,6	0,16	20	-834,90	0,13
5	818,7	0,13	21	-1053,00	0,10
6	977,2	0,11	22	-616,80	0,18
7	374,1	0,29	23	-335,30	0,32
8	166	0,65			

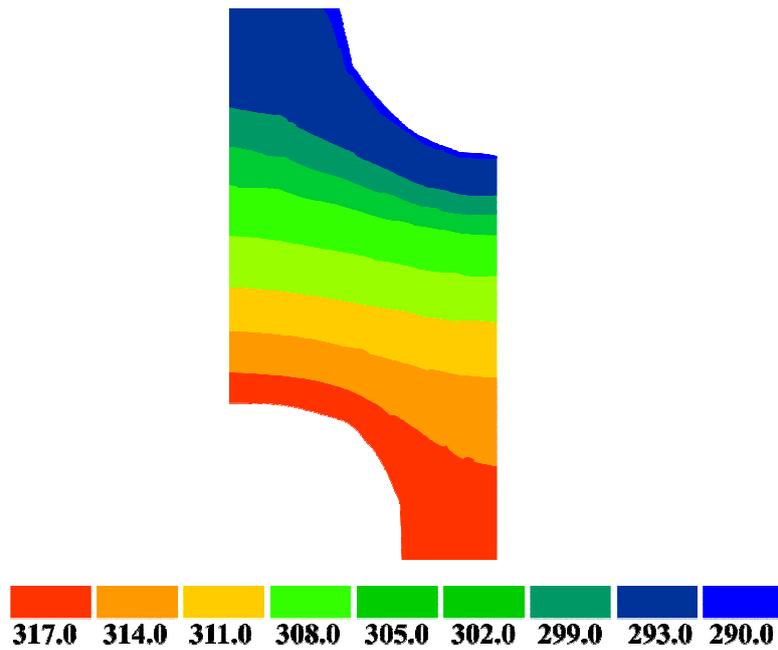


Figura 28. Bandas de calor para la distribución de temperatura.

5.5.2 Análisis de resultados obtenidos

En este problema se observa un caso particular del modelo de transferencia de calos para superficies extendidas donde no existe convección en la frontera del elemento, dando así dos fuentes de temperatura constantes diferentes, lo que genera un gradiente y una distribución de temperatura específica. Se muestra como se puede estudiar una zona específica del modelo sin tener que recurrir a un modelado general del problema, podemos tomar una zona particular de interés y modelarla para obtener algún resultado concreto. Otra forma de hacerlo sería hacer una malla general y un refinamiento en el área de interés, lo que redundaría en cálculos y en detrimento de la eficiencia de los cálculos.

Con respecto a los resultados obtenidos se observa que existe una distribución uniforme de temperatura sin embargo los flujos de calor obtenidos van en diferentes direcciones. Se observa que para los nodos $N=17...23$ el flujo de calor va en dirección contraria al dominio del problema, lo que significa que se esta transfiriendo calor al tubo. Por ser un intercambiador de calor que transfiere energía a través del desplazamiento de masa dentro de un fluido lo que se busca es calentar algún otro fluido

en contacto con estas tuberías. Lo que ocurre en este modelo es que la pérdida de calor de la tubería hace que la diferencia de temperatura existente en el banco de tubo y el material con que esta echo, que parte de esa energía regrese a la tubería recalentando así el fluido que circula por las tuberías. Lo que no es conveniente pues se desperdicia energía en esa etapa del proceso.

CONCLUSIONES

Se concluye que, la metodología de integración analítica es más precisa, eficiente y veloz en los cálculos computacionales, comparada con la cuadratura de Gauss ó integración Numérica clásica para los elementos finitos isoparamétricos de cuatro nodos, en transferencia de calor por conducción con entorno convectivo.

Al comparar el método analítico desarrollado en este trabajo con el método numérico de cuadraturas de Gauss-Legendre se concluye que el método analítico es mas preciso, por lo que los errores obtenidos para las otras geometrías son considerables, mientras que con el método analítico se pueden modelar elementos finitos cuadriláteros distorsionados con mejor precisión.

Se pudo desarrollar una metodología analítica para el estudio plano de la transferencia de calor por conducción con o sin condiciones de borde convectivo.

Se demostró que la integración analítica de los términos de la matriz de rigidez proporciona mejoras en tiempos de cálculo, se obtuvo una ganancia del 90% con respecto a la integración por cuadraturas de Gauss.

Se realizó una rutina en un lenguaje de alto nivel que permite calcular la matriz de rigidez para transferencia de calor con condiciones de frontera convectiva.

Se pudo comprobar que la eficiencia del método analítico es mayor en relación a las rutinas realizadas mediante el método numérico para 2, 3 y 4 puntos de gauss.

Se comprobó la confiabilidad de la rutina analítica para diferentes geometrías de elementos finitos, a través de la realización de ejemplos concretos donde se validaron los resultados con un programa de métodos numéricos llamado FEHT®

BIBLIOGRAFÍA

- Andersen C.M. and Noor A.K (1975). A computerized symbolic integration technique for development of triangular and quadrilateral composite shallow shell finite element, *Rep.NASA TN D-8067*.
- Balao T., Videla L (2005) “*Integración analítica de la matriz de rigidez de un elemento finito isoparamétrico de 8 nodos en elasticidad plana por simplificación simbólica*”, *Memorias II Congreso Internacional de Ingeniería Civil*, Barquisimeto – Venezuela.
- Balao, T. Videla N, L (2004). “*Aplicación de la matemática simbólica para obtener dos formas de calcular en forma simplificada los términos de la matriz de rigidez de un elemento finito cuadrilátero isoparamétrico de ocho nodos*”. San Cristóbal, Venezuela – CIMENICS.
- Balao, T. Videla N, L (2006). “*Cálculo de la matriz de rigidez de elementos finitos isoparamétricos de ocho nodos en elasticidad plana*”, VIII International Congress on Numerical Method in Engineering and Applied Sciences.
- Balao, T. Videla N, L. Aplicación de la matemática simbólica para obtener de forma analítica los términos de la matriz de rigidez de un elemento finito cuadrilátero subparamétrico de ocho nodos. *Jornadas de investigación, Facultad de Ingeniería, UCV, JIFI-2004. “ Simposio Simón Lamar”*.
- Bardel N.S (1989). “*The application of symbolic to computing to the hierarchical finite element method*”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 28, 1181 – 1204.
- Bathe, K.J (1982). “*Finite Element Procedures in Engineering Analysis*”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Coronel, G. Balao, T. Videla N, L (2006). “*Optimización del cálculo de la matriz de rigidez en forma analítica de un elemento finito isoparamétrico de cuatro nodos en elasticidad plana*”, VIII International Congress on Numerical Method in Engineering and Applied Sciences.
- Coronel, G. Balao, T. Videla, L (2008). “*Optimización y eliminación de errores en el cálculo de matrices de rigidez de elementos finitos por integración analítica*”, IX International Congress on Numerical Methods in engineering and applied sciences.

- Feng .Y. T (2008)., eta al, “*Discrete thermal element modelling of heat conduction in particle systems: Basic formulations*”, I Journal of Computational Physics 5072–5089. Sciendirect.
- Griffiths D.V (1994). “*Stiffness Matrix of the Four-Node Quadrilateral Element in Closed Form*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, 1027-1038,.
- Griffiths D.V. and Smith I (2002). “*Programming the finite element method*”, John Wiley, New York.
- Hutton D (2004), “*Fundamentals of Finite Element Analysis*”, McGraw Hill, New York.
- Incropera F (1999), “*Fundamentos de Transferencia de Calor*”, 4ta edición, Prentice Hall, México.
- Jensen J. and Niordson F. (1977). “*Symbolic and algebraic manipulation languages and their application in mechanics*”, in Perrone & Pilkeg (Eds.), *Structural Mechanics Software Series*, Univ. Press of Virginia, Charlottesville.
- Kikuchi M (1989). Application of the symbolic mathematics system to the finite element program, *Comput. Mech.*, 5, 41 – 47.
- Korncoff A. R and Fenves S. J (1979). “*Symbolic generation generation of finite element stiffness matrices*”, *Comput. & Struct.*, 10,119-124.
- Korncoff A.R (1977). “*Finite element stiffness matrix generation via symbolic manipulation*”, in C.Wellford (Ed), *Proc. Symposium on Application of Comp.Meth. in Eng.*, Vol.II, pp.779-785.
- Kreith F (1973), “*Principios de Transferencia de Calor*”, tercera edición, IEP, Editorial Dun-Donnelley, México.
- Lewis, Nithiarasu y Seetharamu (2004) “*Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*”, John Wiley, New York.
- Liu G. R. & Quek S. S. (2003). “*The Finite Element Method a Practical Course*”, Butterworth-Heinemann, London, England.
- Marroquín G (2004). “Diseño de un semieje automotriz por los métodos clásicos y el método del elemento finito”. Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional, México.
- Noor A.K. and Andersen C.M (1979). “*Computerized symbolic manipulation in structural mechanics: Progress and Potential*”, *Comput. & Struct.*, 10, 95-118

- Obert E (1949). "*Elements of Thermodynamics and Heat Transfer*", McGraw-Hill, New York.
- Oñate E (1992). "*Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos*", Cimne, Barcelona-España. Prentice-Hall, Inc. U.S.A. pp 78-85.
- Rathod H. D (1988). Some analytical integration formulae for a four node isoparametric element, *Comput. & Struct.*, 30(5):1101-1109.
- Rengarajan G, Knight N. and Aminpour M (1995). Comparison of symbolic and numerical integration methods for an assumed-stress hybrid shell element, *Comm. Num. Meth. Eng.*, 11, 307-316.
- Vanella M (2003). "*Herramientas Computacionales para la Mecánica de Sólidos y Transferencia de Calor basadas en el Método de Elementos Finitos*", Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba
- Videla L, Baloa T., Griffiths D.V. and Cerrolaza M (2007). "Exact integration of the stiffness matrix of an 8-node plane elastic finite element by symbolic computation", *Journal in Analysis and design in Finite Elements*. (Submitted).
- Videla N, L. Ochoa R, Aparicio N. and Cerrolaza M (1996) "Explicit Integration of the Stiffness Matrix of a Four-Noded-Plane Elasticity Finite Element", *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 12, 731-743.
- Videla N, L. T. Baloa, Griffiths D.V., Cerrolaza M. "*Cálculo de la matriz de rigidez por integración analítica de un elemento finito cuadrilátero subparamétrico de ocho nodos*". *Boletín técnico, IMME*, Nov. 2006, Vol. 44, N°. 3, p. 27-42.
- Vlachoutsis S (1990). Explicit integration for three-dimensional degenerate shell finite element, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 29,861-880.
- Weaver W., Johnston P (1984). "*Finite Elements for Structural Analysis*". Prentice-Hall, Inc. U.S.A.
- Yagawa G, Ye G.W. and Yoshimura S (1990). A numerical integration scheme for finite element method based on symbolic manipulation, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 29, 1539-1549.
- Yang T.Y. (1986), "*Finite element structural analysis*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 543 pp.
- Zienkiewicz O.C., R. L. Taylor (1989). "*The finite Element Method*", Vol. I, 4ta. Edición, McGraw-Hill, Berkeley, California.