UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO Y MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Tutor: Dr. Juan Manuel Guevara Jordán

Autora:
Br. Chacón Chacón Marjorie
C.I. 16.116.657

Caracas, febrero de 2012

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO Y MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Trabajo de Grado presentado ante la Universidad Central de Venezuela para optar a la Licenciatura en Educación, Mención Matemática.

Caracas, febrero de 2012

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
Facultad de Humanidades y Educación
Escuela de Educación
Coordinación Académica

DEFENSA DE TRABAJOS DE LICENCIATURA VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del jurado designado por el Consejo de la Escuela de Educación en su sesión 1455 de fecha 05-10-2011 para evaluar el Trabajo de Licenciatura presentado por **NOMBRES APELLIDOS: MARJORIE CHACON CHACON C.I. 16. 116.657,** bajo el **Título "PROPUESTA DIDACTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL MINIMO COMUN MULTIPLO Y MAXIMO COMUN DIVISOR ",** para optar al Título de LICENCIADO EN EDUCACIÓN, dejan constancia de lo siguiente:

1. Hoy 28/10/2011 nos reunimos en la sede de la Escuela de Educación para que su(s) autor(es) lo defendiera(n) en forma pública.
2. Culminada la Defensa Pública del referido Trabajo de Licenciatura, conforme a lo dispuesto en el Art. 14 del *"Reglamento de Trabajos de Licenciatura de las Escuelas de la Facultad de Humanidades y Educación"* adoptando como **criterios para otorgar la calificación**: rigurosidad en el razonamiento, coherencia en la exposición, claridad y pertinencia en los procesos metodológicos empleados, adecuación del sustento teórico, así como la calidad de la exposición oral y de las respuestas dadas a las preguntas formuladas por el jurado, **acordamos calificarlo como:**

APLAZADO ○ **APROBADO** ● otorgándole la mención:
SUFICIENTE ○ **DISTINGUIDO** ● **SOBRESALIENTE** ○

Las razones que justifican la calificación otorgada son las siguientes:

El trabajo presentado constituye un aporte en la elaboración de materiales didácticos para la enseñanza de la matemática en la Educación Media

Prof.(a) ADELFA HERNANDEZ

Prof.(a) NORA SUAREZ

Tutor: JUAN MANUEL GUEVARA J.

lm.-

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
Facultad de Humanidades y Educación
COMISIÓN DE ESTUDIOS
EDUCACIÓN

APROBACIÓN DEL TUTOR.

Quien suscribe, el Doctor Juan Manuel Guevara Jordán de la Universidad Central de Venezuela, adscrito a la Escuela de Ciencias, en mi carácter de tutor del Trabajo de Grado titulado Propuesta didáctica para la enseñanza del mínimo común múltiplo y máximo común divisor, realizado por la ciudadana Marjorie Chacón Chacón, portadora de la cédula de identidad V.- 16.116.657, manifiesto que he revisado en su totalidad la versión definitiva de los ejemplares de este trabajo y certifico que se le incorporaron las observaciones y modificaciones indicadas por el jurado evaluador durante la discusión del mismo.

En la ciudad de Caracas a los 7 días del mes de febrero de 2012.

JM Guevara Jordán

Dr. Juan Manuel Guevara Jordán

C.I 6.006.521

DEDICATORIA.

A Dios.

A mis seres queridos: Madre, Tías, Abuela y Hermanos.

A mi Amor Bonito.

AGRADECIMIENTOS.

A Dios, por darme salud y fuerza para que fuera posible alcanzar este triunfo.

A mi madre y mis tías, por todo su amor.

A mi Amigo, Compañero, Caminante, por su paciencia, estimulo, apoyo, comprensión.

A mamá Adelfa, por su apoyo incondicional durante todo este tiempo.

A mi tutor, Prof. Guevara, por su amabilidad, paciencia y buena disposición brindada en cada momento.

Y a todas aquellas personas que de alguna manera colaboraron a la elaboración de este trabajo.

A todos… Muchas Gracias.

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACION
PROGRAMA COOPERATIVO DE FORMACIÓN DOCENTE

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DEL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO Y MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Tutor: Dr. Juan Manuel Guevara Jordán

Autora: Marjorie Chacón Chacón

RESUMEN

Se presenta una propuesta didáctica para mejorar la enseñanza del mínimo común múltiplo (mcm) y el máximo común divisor (MCD) dirigida a docentes de educación media. La misma está motivada por la falta de vinculación entre los conceptos matemáticos estudiados y los problemas reales provenientes del entorno social ó de otras asignaturas. A fin de aliviar dichas deficiencias se desarrollan materiales educativos interactivos con el propósito de crear un ambiente integrado de resolución de problemas para docentes y estudiantes. La propuesta se basa en la utilización de los fundamentos de enseñanza cognitiva, para lo cual se adopta como referencia el Modelo descrito por Manterola (Manterola, 2002), el cual representa una extensión del clásico Modelo de Reigeluth y Moore (Reigeluth, 2000).

PALABRAS CLAVES: enseñanza cognitiva, propuesta didáctica, mínimo común múltiplo, máximo común divisor, resolución de problemas.

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTY OF HUMANITIES AND EDUCATION
SCHOOL OF EDUCATION
COOPERATIVE PROGRAM OF TEACHER EDUCATION

DIDACTICAL PROPOSAL TO TEACHING LEAST COMMON MULTIPLE AND GREATEST COMMON DIVISOR

Tutor: Dr. Juan Manuel Guevara Jordán
Author: Marjorie Chacón Chacón

ABSTRACT

A didactical proposal to teach the least common multiple (LCM) and greatest common divisor (GCD) is presented. It is addressed to teachers and professors and it provides an alternative approach for introducing these concepts at middle school level. The main motivation for developing this proposal was to reduce the lack of connection between mathematical concepts and their application in the solution of applied problems. In order to achieve such education, a set of interactive educational material was created and tested. It produces an integrated environment, which allows teachers and students to solve applied problems in the context of new mathematical concepts. The proposal is based on cognitive learning techniques. It represents an original adaptation of the model described by Manterola (Manterola, 2002), which extends the classical work of Reigeluth and More (Reigeluth, 2000).

KEYWORDS: cognitive learning, didactical proposal, least common multiple, greatest common divisor, problem solving.

ÍNDICE GENERAL.

INTRODUCCIÓN.

La matemática constituye una disciplina multiforme de uso plural, que se ha manifestado en la enseñanza con diferentes rasgos dependientes de las épocas y de los autores. Es considerada de diversas formas: conjunto de técnicas para aprobar un examen, cuerpo de conocimientos para ser aprendido, lenguaje especifico con una notación particular, estudio de las estructuras lógicas subyacentes, juego artificial jugado por un matemático, construcción de modelos útiles en la ciencia, procedimientos de cálculo necesarios para aplicar el conocimiento,… etc. Romberg (citado por Socas y Camacho, 2003).

Autores comentan que lo importante hoy día es el conocimiento de los elementos principales que conforman esta disciplina, el hacer recaer en una serie de estrategias, procesos mentales que tienen más en común con la creatividad y la curiosidad, que con la aplicación mecánica irreflexiva de unas fórmulas determinadas. (Socas y Camacho, 2003).

Podemos decir que en el último cuarto del siglo XX, la matemática es un sistema conceptual lógicamente organizado y socialmente compartido, en cuanto es aprendida de otras personas, y porque está formada por reglas que se siguen habitualmente. Ernest (citado por Socas y Camacho, 2003).

La matemática es una actividad de resolución de problemas socialmente compartidos. Problemas que pueden tener relación con el mundo natural, social o ser problemas internos de la propia disciplina. (Lakatos, 1981). Además es un lenguaje simbólico característico y constituye un sistema de signos propios con el que se expresan los objetos matemáticos, los problemas y las soluciones encontradas. Como todo lenguaje tiene funciones básicas y reglas de funcionamiento que dificultan el aprendizaje. (Segarra, 1999)

La matemática ha tenido históricamente, y quizás hoy en día todavía sigue teniendo, al menos en el imaginario popular, el papel de “asignatura hueso”, difícil de “digerir” y aprobar. Ello puede ser debido, entre otras razones, a la dificultad de comprensión de las mismas (López y otros, 2002). Para las personas en general, la matemática es una disciplina estática basada en fórmulas aprendidas en las áreas de aritmética, geometría, algebra y cálculo.

Afortunadamente, la matemática continúa creciendo fuera de esta perspectiva con rapidez, haciendo incursiones en nuevos campos y generando nuevas aplicaciones. La matemática actual, trata de rechazar el cálculo rutinario sin comprensión de la realidad y aceptar el tratamiento de problemas realmente prácticos. La sociedad actual necesita más matemática, una matemática diferente, es absurdo pensar que con los mismos contenidos se pueda preparar a las personas que viven en épocas distintas. (Segarra, 1999)

Por todos estos motivos, los materiales educativos, representan una alternativa para el estudiante, que aspira aprender una materia en especial, facilitando de alguna manera la ejecución de estrategias. El siguiente trabajo de investigación tiene como finalidad realizar una propuesta educativa mediante un estudio exploratorio de la situación actual en las unidades didácticas; basándose en las deficiencias localizadas en la enseñanza del mínimo común múltiplo (mcm) y máximo común divisor (MCD), los cuales son de gran importancia en la matemática.

Para ello se siguió la siguiente estructura de trabajo:

Capítulo I. El Problema: se enuncia claramente el problema a tratar, los objetivos y la justificación del trabajo.

Capítulo II. Marco Teórico: se desarrollan los antecedentes de la investigación y las teorías que permiten desarrollar dicha problemática.

Capítulo III. Marco Metodológico: se fundamentan el tipo de investigación, el diseño metodológico y las fases de desarrollo de cómo se abordará la problemática.

Capítulo IV. La Propuesta: se describe el material educativo y se anexa dicho material.

Capitulo V. Análisis de Resultados: se plantean los resultados por fases, también la evaluación de la propuesta por los docentes.

Capítulo VI. Conclusiones: se resumen los principales resultados y aportes más significativos del trabajo.

En este trabajo se presentará una propuesta didáctica basada en el modelo descrito por Manterola (2002), el cual es una extensión del modelo Reigeluth y Moore (Reigeluth, 2000), que se aplico a los docentes del programa “Samuel Robinson” de la Universidad Central de Venezuela (UCV). Se espera de esta manera contribuir a su aplicación, y procurar mejoras en las habilidades de enseñanza de estos entes matemáticos, igualmente que el mismo pueda servir como plataforma para investigaciones en el área de aritmética y así aportar a la educación matemática. De manera que sirva de utilidad tanto a docentes como a estudiantes, específicamente en la etapa de educación media.

Con esta propuesta se pretende ayudar en el proceso de comprensión de las matemáticas generando en nuestros docentes un cambio, lo cual es sin duda un gran aprendizaje de vida para desarrollarse como mejores educadores. Así pues, el material educativo propuesto abrirá camino a nuevas estrategias educativas en las que se ponen de manifiesto herramientas de vanguardia como lo son los juegos didácticos.

En definitiva, la matemática básica actual ha de ser funcional y lúdica (Segarra, 1999). Una persona deberá tener un dominio rápido de los números y de las formas, pero será muy importante no dejar de lado el hecho de que la matemática sirve para pensar, para jugar pensando.

Finalmente cabe mencionar que según (Fletcher, 1971):

“Si se pretende que la enseñanza de la matemática siga siendo viva, se hace necesaria una renovación continúa, lo cual es particularmente cierto en una época en la que los conocimientos matemáticos progresan rápidamente”.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA.

En esta sección de la investigación se enfoca la temática estudiada desde su definición o conceptualización. Partiendo del planteamiento del problema se configura un deber ser o lo que idealmente debería estar sucediendo. Luego se enfoca la situación problemática, basándose en indicadores que dejen claramente entendido que hay un problema, el cual es necesario diagnosticar, para establecer el propósito de la investigación. Los objetivos, la justificación y la delimitación del problema son parte esencial de esta sección.

Planteamiento del Problema.

Desde siempre se ha escuchado que la matemática es un lenguaje universal, y que dicho lenguaje se caracteriza por tener un alto nivel de abstracción lo que nos lleva a decir que es muy sólido, formal pero también algo difícil de dominar y entender por completo. (Socas y Camacho, 2003). Lo antes expuesto nos hace reflexionar acerca de las dificultades que existen al enseñar y crear un ambiente para un aprendizaje eficiente en esta área del conocimiento.

Se ha observado en múltiples ocasiones que la resolución de un problema no se realiza porque el estudiante no comprende aquello que se le solicita, aunque lo que se le solicite no presente ninguna dificultad insalvable para el estudiante. Asimismo, se puede ver que si se le facilita una lectura correcta del problema desaparecen los obstáculos que impedían resolverlo.

Cada vez con más insistencia se piensa que, por las causas que sean, a lo largo de la educación, desde hace muchos años, estos estudiantes aún no han tenido la oportunidad de enfrentarse al problema por sí mismos. Siempre habrá alguien a su lado que le impone la memorización, que le facilitara la fórmula, siendo una tarea que debería solucionar por sí mismo con un mínimo de dedicación y un poco de esfuerzo mental.

En el nivel de educación media la tarea principal del docente, en el área de matemática, es el de optimizar el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos, lo cual por lo general se ve afectado y limitado por un conjunto de creencias y mitos que se generan alrededor de dicha área del conocimiento. En general, un estudiante promedio de educación media lleva consigo un concepto de la matemática bastante obscuro, lo cual dificulta en gran escala el proceso de la enseñanza. (López y otros, 2002)

Debilidades como estas dentro de los modelos utilizados durante el proceso de la enseñanza de la matemática llevaría a plantearse a los futuros docentes el problema de buscar métodos complementarios para la enseñanza del mínimo común múltiplo y el máximo común divisor, con el objetivo de aportar ideas al proceso de resolución de problemas.

Dar, recibir o aprender cada uno según sus capacidades no puede convertirse en una fase de memorización vacía, sino en un horizonte de conocimientos matemáticos con aplicaciones a la vida diaria. Diversos autores (Echenique, 2006; Pérez y Pozo, 1994; Rico, 2000) llevan años planteando que el núcleo de este conjunto de conocimientos matemáticos básicos y comunes para todos, podría ser la resolución de problemas en la vida diaria, y el objetivo a cubrir es el conseguir que nuestros estudiantes lleguen a ser más capaces de resolver problemas.

Dentro del Currículo Básico Nacional (CBN), se desea que los contenidos y procedimientos tengan unas características de accesibilidad que permitan adquirir a todos un nivel mínimo de conocimiento matemático; los cuales puedan ser útiles al individuo para el resto de la formación educativa básica como en su vida ciudadana.

Es importante destacar que en los últimos años se han desarrollado métodos en los cuales se involucran mejoras por parte de los estudiantes en el proceso de resolución de problemas matemáticos. Se recuerda así, el método de las cuatro fases propuestos por el matemático George Polya (Polya, 1982):

- Comprender el problema, estableciendo cuál es la meta, los datos y condiciones de partida.
- Idear un plan de actuación que permita llegar a la solución, conectando los datos con la meta.
- Llevar a cabo el plan ideado previamente.
- Mirar atrás para comprobar el resultado y revisar el procedimiento utilizado.

Lógicamente, dentro de este marco se debería distinguir el concepto de ejercicios, y el de problemas, que muchas veces se utilizan de forma indistinta, pero que presentan diferencias importantes.

Será necesario entonces introducir unas pequeñas dosis de ejercicios con ayuda de tablas, de trabajo práctico con resolución de problemas de la vida diaria, con el fin de darle la oportunidad al estudiante de poder enfrentarse solo a los problemas, ayudado con las herramientas facilitadas por parte del docente.

De las propuestas y resultados de estos investigadores y las ideas antes citadas es que se plantean las siguientes inquietudes al desarrollar esta investigación:

¿Cuáles son las características principales para que una propuesta didáctica contribuya de manera positiva en el proceso de enseñanza-aprendizaje del mínimo común múltiplo y el máximo común divisor, enfocado en la resolución de problemas aplicados a la vida diaria?

¿Qué efectos pudieron observarse en estos docentes, en relación a la aplicación de estos contenidos, en su visión del tema planteado, con la puesta en práctica de esta propuesta didáctica?

Objetivos.

Objetivo General.

Diseñar una propuesta didáctica basada en la resolución de problemas de la vida diaria, para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje del minino común múltiplo (mcm) y máximo común divisor (MCD), dirigido a los docentes en educación media.

Objetivos Específicos.

1. Explorar los conocimientos, habilidades y destrezas presentes en materiales educativos y en docentes del programa “Samuel Robinson UCV”, acerca del mínimo común múltiplo y máximo común divisor seleccionando así, las estrategias necesarias a ser tratadas en el material educativo.
2. Formular una propuesta educativa para ser utilizada en la enseñanza del mínimo común múltiplo y máximo común divisor.
3. Validar por medio de la técnica de juicio de expertos.
4. Aplicar la propuesta.

Justificación.

Si se observan las deficiencias de los estudiantes de educación media a la hora de calcular el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor, se puede establecer que este es un gran problema al que se enfrenta la mayoría de los docentes de matemática. Esta deficiencia en el cálculo de este procedimiento matemático se refleja a lo largo de todo el ciclo de tercera etapa de educación media y el ciclo diversificado. (Mendoza, 2009)

El uso del procedimiento de descomposición en factores para calcular cualquiera de estos dos métodos resulta, para un estudiante de educación media bastante aburrido y complicado (López y otros, 2002).

También presenta un panorama que lo pudiera catalogar de pobreza en la calidad del ejercicio de la enseñanza y de estar dominada por una concepción didáctica conservadora y tradicional (Manterola, 2002). Lo antes mencionado se pudo confirmar durante el desarrollo de las practicas docentes realizadas en la unidad educativa “Gran Colombia” ubicada en el sector de los Rosales, Caracas, donde los estudiantes de educación media tenían grandes dificultades a la hora de calcular la descomposición en factores primos, identificar los divisores y reconocer los números primos, y por ello no llegaban a la solución del problema.

Es entonces, en este punto donde se puede introducir la propuesta didáctica para la enseñanza del mínimo común múltiplo y máximo común divisor, la cual es un herramienta alternativa para enseñar eficientemente estos conceptos, en donde se interrelacionan los conocimientos matemáticos con ejercicios, juegos, problemas, tablas e imágenes que de una u otra manera incentivan positivamente a cualquier estudiante.

Por lo antes expuesto se puede decir que la utilidad de esta investigación radica en que los docentes podrán tener un material, adaptado a su realidad concreta para ayudarles a superar las deficiencias en la comprensión del mínimo común múltiplo y máximo común divisor, y concentrados desde los primeros contenidos que el estudiante debe tener como base.

Igualmente se pretende proveer a los docentes de estrategias para ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades y destrezas, incrementando en ellos la capacidad de análisis como herramienta. Se espera con esta iniciativa hacer un aporte representativo que contribuya a solucionar en parte la grave problemática a la hora de resolver los problemas y despertar el interés en los estudiantes, docentes e investigadores del país en este tema.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO.

El marco teórico sitúa el problema dentro de un conjunto de conocimientos sólidos y confiables que permiten orientar la búsqueda, además ofrecen una conceptualización adecuada de los términos utilizados. En este capítulo se exponen los lineamientos teóricos en los que se apoya la investigación. En una primera parte se mencionan algunos de los trabajos que sirvieron de apoyo y de inspiración para la creación del mismo, luego fueron considerados los compendios de investigaciones sobre teorías de enseñanza enfocadas hacia la matemática, después los aspectos utilizados para la elaboración de la propuesta didáctica y por último las bases teóricas matemáticas.

Antecedentes de la Investigación.

La revisión permitió conocer la existencia de investigaciones resaltantes en el área, se pueden destacar:

Van Reeuwijk Martin (1997). **Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas**. Plantea que los docentes deben comenzar a considerar en el aula de clase los entornos que rodean la vida de los estudiantes, como parte del proceso de enseñanza – aprendizaje, debido que el aprendizaje aplicado al contexto, despierta en los estudiantes motivación e interés por lo que se les está enseñando. Asimismo, puede ayudarlos a comprender como las matemáticas son útiles, necesarias, y empleadas en la sociedad y la vida cotidiana.

Segarra Lluís (1999). **Juego y matemáticas**. Plantea que la sociedad actual necesita una matemática distinta, en consonancia con las necesidades e inquietudes de las personas en esta época; afirma que los juegos matemáticos son los cimientos para los diversos procesos de investigación y del razonamiento matemático, además sugiere introducir nuevos métodos pedagógicos y nuevas técnicas lúdicas educativas que aprovechen al máximo el tiempo del que se dispone en las primeras etapas de la enseñanza.

Rico Luis (2000). **La educación matemática en la enseñanza secundaria**. Presenta una serie de herramientas para el diseño, organización y gestión de unidades didácticas en el área de matemáticas. Este material contiene: análisis fenomenológico, representaciones, modelos, errores, dificultades, materiales, recursos, y desarrollo histórico del tópico.

Alson Pedro (2004). **Números naturales**. Propone un libro de texto que intenta capacitar al estudiante a través de la ejercitación, y a medida que este se va encontrando con las dificultades propias de cada problema: indague, ensaye, consulte, compruebe sus errores, y se dé cuenta también de sus aciertos. Las actividades son muy motivantes para grupos reducidos de alumnos y se recomienda realizarlas, según la medida del tiempo y del ambiente.

Echenique Urdiain Isabel (2006). **Resolución de problemas matemáticos en educación primaria**. Plantea enseñar a los alumnos a resolver problemas, enseñarles a pensar matemáticamente, que sean capaces de abstraer y aplicar ideas matemáticas en un amplio rango de situaciones. Propone algunas ideas generales sobre las competencias matemáticas y numerosas pautas para seguir un proceso ordenado en la resolución de distintos tipos de problemas. Ofrece un modelo de taller para la resolución de problemas organizado por ciclos y cursos. En él se establecen estrategias generales de aplicación y numerosas actividades para realizar, al tiempo que se aportan ideas para que el profesorado diseñe sus propias propuestas y actividades.

Galvis Jorge Enrique (2008). **Didáctica para la enseñanza de la aritmética y el algebra.** Sugiere que las principales dificultades en la enseñanza-aprendizaje de la matemática son las siguientes: alto grado de abstracción y alto grado de secuencialidad. Desarrolló un material didáctico caracterizado por su menor nivel de abstracción y un lenguaje más fácil de digerir (al nivel intelectual del estudiante).

Mendoza Orlando (2009). **Currículo y matemática**. Plantea que el currículo es el elemento directriz de la educación en cualquier sistema educativo, por ser la matemática parte de la vida, al igual que una parte constitutiva de los componentes curriculares, debemos considerarla como parte del currículo y no el currículo de matemática. Es el docente quien orienta el currículo y en sus manos está la semilla inicial para el cambio, pero es una acción colectiva que incluye a los estudiantes, sus madres, padres, representantes, la escuela en su conjunto, el diseño, la sociedad y el estado.

Bases Teóricas.

Didáctica de la Matemática.

Antiguamente se consideraba que la enseñanza de la matemática era un arte y, como tal, difícilmente susceptible de ser analizada, controlada y sometida a reglas. Se suponía que el aprendizaje dependía sólo del grado en que el profesor dominara dicho arte y, al mismo tiempo, de la voluntad y la capacidad de los alumnos para dejarse moldear por el artista. Esta es, todavía, la idea dominante en la cultura corriente y representa una "concepción" precientífica de la enseñanza que sigue siendo muy influyente en la cultura escolar. (Gascón, 1997).

El primer concepto creado por Guy Brousseau, que formó parte de los demás desarrollos, fue el de la Teoría de las Situaciones, formulada en su primera fase a principios de los años setenta, y desarrollada en una segunda fase hasta la publicación de la tesis de Brousseau y posteriormente ampliada por los aportes de Chevallard (1991) en términos de instituciones y de las relaciones con el saber.

Según Guy Brousseau (1986):

"La Didáctica de la Matemática estudia las actividades didácticas, es decir las actividades que tienen por objeto la enseñanza, evidentemente en lo que ellas tienen de específico de la matemática. Los resultados, en este dominio, son cada vez más numerosos; tratan los comportamientos cognitivos de los alumnos, pero también los tipos de situaciones empleados para enseñarles y sobre todo los fenómenos que genera la comunicación del saber. La producción o el mejoramiento de los instrumentos de enseñanza encuentra aquí un apoyo teórico, explicaciones, medios de previsión y de análisis, sugerencias y aun dispositivos y métodos".

A continuación, una síntesis de los principales conceptos ligados a esta línea de investigación, en palabras del propio Brousseau (1986):

"(...) la Teoría de Situaciones estudia la búsqueda y la invención de situaciones características de los diversos conocimientos matemáticos enseñados en la escuela, el estudio y la clasificación de sus variantes, la determinación de sus efectos sobre las concepciones de los alumnos, la segmentación de las nociones y su organización en procesos de aprendizaje largos, constituyen la materia de la didáctica de la matemática y el terreno al cual la teoría de las situaciones provee de conceptos y de métodos de estudio. Para los profesores como para los alumnos, la presentación de los resultados de estos trabajos renueva su conocimiento, así como la idea que tienen de la matemática, y esto incluso si es necesario desarrollar todo un vocabulario nuevo para vincular las condiciones en las que emergen y se enseñan las nociones matemáticas básicas, con la expresión de dichas nociones en la cultura matemática clásica."

Los didactas que comparten esta concepción de la didáctica relacionan todos los aspectos de su actividad con la matemática. Se argumenta, para basar ese enfoque, que el estudio de las transformaciones de la matemática, bien sea desde el punto de vista de la investigación o de la enseñanza, siempre ha formado parte de la actividad del matemático, de igual modo que la búsqueda de problemas y situaciones que requieran para su solución una noción matemática o un teorema.

Teoría de Situaciones Didácticas (TSD).

Chevallard (1991) describe el sistema didáctico en sentido estricto, como formado esencialmente por tres subsistemas: el profesor, el alumno y el saber enseñado**.** Un aporte de la teoría de las situaciones didácticas (TSD) al estudio de los procesos de aprendizaje de la matemática en el contexto escolar es la inclusión, en el clásico "Triángulo Didáctico maestro, alumno, saber", de un cuarto elemento: el medio.

El medio se define como el objeto de la interacción de los alumnos, es la tarea específica que deben llevar a cabo, y las condiciones en que deben realizarla, es decir, el ejercicio, el problema, el juego, incluyendo los materiales, lápiz y papel u otros. En una acepción un poco más amplia, el medio al que el alumno se enfrenta incluye también las acciones del maestro, la consigna que da, las restricciones que pone, las informaciones y las ayudas que proporciona, y podríamos agregar, las expectativas que tiene sobre la acción de los alumnos y que mediante mecanismos diversos, transmite. Es decir, es el subsistema sobre el cual actúa el alumno (materiales, juegos, situaciones didácticas, etc.).

Además está el mundo exterior a la escuela, en el que se hallan la sociedad en general, los padres, los matemáticos, etc. Pero, entre los dos, debe considerarse una zona intermedia, la noosfera, que, integrada al anterior, constituye con él el sistema didáctico en sentido amplio, y que es lugar, a la vez, de conflictos y transacciones por las que se realiza la articulación entre el sistema y su entorno. La noosfera es por tanto "la capa exterior que contiene todas las personas que en la sociedad piensan sobre los contenidos y métodos de enseñanza".

La teoría que estamos describiendo, en su formulación global, incorpora también una visión propia del aprendizaje matemático, aunque pueden identificarse planteamientos similares sobre aspectos parciales en otras teorías. Se adopta una perspectiva piagetiana, en el sentido de que se postula que todo conocimiento se construye por interacción constante entre el sujeto y el objeto, pero se distingue de otras teorías constructivistas por su modo de afrontar las relaciones entre el alumno y el saber.

En la teoría de situaciones didácticas Brousseau (1986) se define que una situación didáctica es un conjunto de relaciones explícita y/o implícitamente establecidas entre un alumno o un grupo de alumnos, algún entorno (que puede incluir instrumentos o materiales) y el profesor, con un fin de permitir a los alumnos aprender esto es, reconstruir algún conocimiento. Las situaciones son específicas del mismo.

Para que el alumno "construya" el conocimiento, es necesario que se interese personalmente por la resolución del problema planteado en la situación didáctica. En este caso se dice que se ha conseguido la devolución de la situación al alumno. El proceso de resolución del problema planteado se compara a un juego de estrategia o a un proceso de toma de decisiones.

Una situación funciona de manera “a-didáctica” cuando el alumno y el maestro logran que el primero asuma el problema planteado como propio, y entre en un proceso de búsqueda autónomo, sin ser guiado por lo que pudiera suponer que el maestro espera.

Por otro lado, debido a la peculiar característica del conocimiento matemático, que incluye tanto conceptos como sistemas de representación simbólica, procedimientos de desarrollo y validación de nuevas ideas matemáticas, es preciso contemplar varios tipos de situaciones:

- SITUACIONES DE ACCIÓN: sobre el medio, que favorecen el surgimiento de teorías (implícitas) que después funcionarán en la clase como modelos proto-matemáticos.
- SITUACIONES DE FORMULACIÓN: que favorecen la adquisición de modelos y lenguajes explícitos. En estas suelen diferenciarse las situaciones de comunicación, que son las situaciones de formulación que tienen dimensiones sociales explícitas.
- SITUACIONES DE VALIDACIÓN: requieren de los alumnos la explicitación de pruebas y por tanto explicaciones de las teorías relacionadas, con medios que subyacen en los procesos de demostración.
- SITUACIONES DE INSTITUCIONALIZACIÓN: que tienen por finalidad establecer y dar un status oficial a algún conocimiento aparecido durante la actividad de la clase. En particular se refiere al conocimiento, las representaciones simbólicas, etc., que deben ser retenidas para el trabajo posterior.

El proceso de institucionalización es un proceso de aprendizaje por adaptación, cuando los alumnos logran desarrollar una estrategia que resuelve el problema, el conocimiento que subyace a éste no se les revela como un nuevo saber: si pudieron resolver el problema, es, para ellos, porque sabían hacerlo. Los alumnos no tienen la posibilidad de identificar por sí mismos la presencia de un nuevo conocimiento, y menos aún el hecho de que dicho conocimiento corresponde a un saber cultural. Esto requiere de un proceso de institucionalización, que cae bajo la responsabilidad del maestro.

El Obstáculo.

En la formación del espíritu científico, Bachelard (1985) establece la idea de que, "el obstáculo epistemológico*,* el cual debe comprenderse como el efecto limitativo de un sistema de conceptos sobre el desarrollo del pensamiento, y da un listado extenso de los mismos, que impiden que un modo de pensamiento pre-científico conciba asimismo el enfoque científico.*"*

Brousseau se basa en esta idea al analizar el aprendizaje. Si el aprendizaje lo entendemos como adaptación al medio, esto implica necesariamente rupturas cognitivas, acomodaciones, cambio de modelos implícitos (concepciones), de lenguajes, y de sistemas cognitivos. Si se obliga a un alumno o a un grupo a una progresión paso a paso, el mismo principio de adaptación puede contrariar el rechazo, necesario, de un conocimiento inadecuado. Las ideas transitorias resisten y persisten. Estas rupturas pueden ser previstas por el estudio directo de las situaciones y por el indirecto de los comportamientos de los alumnos.

"Un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas, pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones y para ayudarlos a conseguirlo." (Brousseau, 1986).

Brousseau (1986) da las siguientes características de los obstáculos:

- Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento.
- El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto que encuentra con frecuencia.
- Cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigiría un punto de vista diferente.
- El alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.
- Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo, de forma esporádica.

Se distinguen los siguientes tipos de obstáculos:

- OBSTÁCULOS ONTOGENÉTICOS: a veces llamados obstáculos psicogenéticos se deben a las características del desarrollo del niño.
- OBSTÁCULOS DIDÁCTICOS: que resultan de las elecciones didácticas hechas para establecer la situación de enseñanza.
- OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS: intrínsecamente relacionados con el propio concepto.

Otros conceptos teóricos de la teoría de las situaciones didácticas son:

Contrato Didáctico.

El contrato didáctico es un conjunto de reglas con frecuencia no enunciadas explícitamente, que organizan las relaciones entre el contenido enseñado, los alumnos y el profesor dentro de la clase de matemática (Brousseau, 1986). Los estudios sobre el contrato didáctico y sus relaciones con los procesos de aprendizaje son esenciales ya que, lo que está en juego es el significado real del conocimiento construido por los alumnos.

Y la misma noción en la teoría antropológica es enunciada por Gascón (1997)**:**

"Recordemos que el contrato didáctico institucional (Chevallard 1991) está formado por un conjunto de cláusulas que distribuyen las responsabilidades recíprocas en el juego que se establece en cada institución docente entre los estudiantes, el conocimiento matemático y el profesor, como director del proceso de estudio. Las cláusulas del contrato tienen un carácter marcadamente implícito (el contrato siempre está presente, pero no se puede explicitar) y no rigen todos los aspectos de la relación que se establece entre los estudiantes y el profesor, sino únicamente los que hacen referencia al conocimiento matemático a estudiar".

Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Chevallard (1991) ha adoptado una posición de notable generalidad para los estudios de didáctica. Desde una perspectiva antropológica, la didáctica de la matemática sería el estudio del hombre, las sociedades humanas aprendiendo y enseñando matemática. Plantea que el objeto principal de estudio de la didáctica de la matemática está constituido por los diferentes tipos de sistemas didácticos formados por los subsistemas: docentes, alumnos y saber enseñado que existan actualmente o que puedan ser creados, por ejemplo, mediante la organización de un tipo especial de enseñanza.

Sintetizando algunas características de esta perspectiva Gascón (1997) expresa:

"El modelo que propone actualmente la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD), describe el conocimiento matemático en términos de organizaciones o praxeologías matemáticas cuyos componentes principales son tipos de tareas, técnicas, tecnologías, y teorías. Recordemos que las organizaciones matemáticas se componen de un bloque práctico o 'saber-hacer' formado por los tipos de tareas y las técnicas, y por un bloque teórico o 'saber' formado por el discurso tecnológico-teórico que describe, explica y justifica la práctica docente."

El problema central de la didáctica es para Chevallard el estudio de la relación institucional con el saber, de sus condiciones y de sus efectos, considerando el conjunto de condicionantes cognitivos, culturales, sociales, inconscientes, fisiológicos del alumno, que juegan o pueden jugar un papel en la formación de su relación personal con el objeto de saber en cuestión.

Transposición Didáctica.

Chevallard (1991) plantea el concepto, como la adaptación del conocimiento matemático para transformarlo en conocimiento para ser enseñado.

Según Chevallard:

"¿Qué es la transposición de los saberes?
O, mejor dicho: ¿por qué hay transposición de los saberes?
La respuesta es a priori muy simple y se puede explicitar en algunos puntos.
1. Los saberes nacen y crecen en ciertos "lugares" determinados de la sociedad.
2. Las necesidades sociales hacen que los saberes producidos deban vivir también en otros lugares de la sociedad. (Cada objeto de uso cotidiano "contiene" hoy día, de manera invisible para el usuario, matemáticas "cristalizadas", y un montón de otros saberes más.)
3. Para poder vivir "lejos" de sus lugares de producción, los saberes sufren transformaciones que los adaptan a las ecologías "locales" correspondientes. (De este modo, los objetos matemáticos que manipulan ingenieros, economistas o geógrafos deben empezar a vivir "en asociación" con otros objetos, que el matemático ignora y que, por lo menos culturalmente, parecen propios de estos ámbitos específicos de la práctica social.)…"

El esquema anterior define de manera muy amplia los procesos sociales de transposición. Al respecto, de transposición institucional de los saberes, porque los “lugares” mencionados son instituciones, tal saber, que vive en tal institución, se transpone en otra institución. Cuando un saber se transpone en una institución para ser estudiado, se dice de transposición didáctica.

El estudio de la transposición didáctica se preocupa, entre otras cuestiones, de detectar y analizar esta clase de diferencias y hallar las causas por las cuales se han producido, con objeto de subsanarlas y evitar que la enseñanza transmita significados inadecuados sobre los objetos matemáticos.

Campos Conceptuales.

Los conceptos matemáticos se dotan de significado a partir de una variedad de situaciones; cada situación no puede ser analizada usualmente con la ayuda de un solo concepto sino que precisa varios de ellos. Esta es la razón que ha llevado a Vergnaud (1990) al estudio de la enseñanza y aprendizaje de campos conceptuales, esto es, grandes conjuntos de situaciones cuyo análisis y tratamiento requiere varios tipos de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas que están conectadas unas con otras. Como ejemplos de tales campos conceptuales pueden citarse las estructuras aditivas, estructuras multiplicativas, la lógica de clases y el álgebra elemental. A estas nociones habría que añadir otras como las del juego de cuadros, dialéctica útil, ingeniería didáctica, reproductibilidad (Artigue y Douady, 1998).

Ingeniería Didáctica.

La ingeniería didáctica surgió en la didáctica de las matemáticas francesa, a principios de los años ochenta, como una metodología para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la Teoría de Situaciones Didácticas y de la Transposición Didáctica. En realidad el término ingeniería didáctica se utiliza en didáctica de las matemáticas con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje; conforme mencionó Artigue y Douady (1998):

"… el término Ingeniería Didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es al mismo tiempo un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase."

Artigue y Douady (1998) distingue varias dimensiones ligadas a los procesos de construcción de ingenierías didácticas:

- DIMENSIÓN EPISTEMOLÓGICA: asociada a las características del saber puesto en funcionamiento.
- DIMENSIÓN COGNITIVA: asociada a las características cognitivas de los alumnos a los que se dirige la enseñanza.
- DIMENSIÓN DIDÁCTICA: asociada a las características del funcionamiento del sistema re-enseñanza.

El sustento teórico de la ingeniería didáctica proviene de la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1986) y la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1991), que tienen una visión sistémica al considerar a la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con el objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto.

En la Figura 1 cada vértice actúa como un polo de referencia: el vértice saber representa el polo ontológico o epistemológico, el vértice alumno representa el polo genético o psicológico y el vértice maestro representa el polo funcional o pedagógico. Cada lado evidencia relaciones entre dos polos: el lado saber alumno se podría identificar con el verbo aprender, el lado saber maestro con el verbo enseñar y el lado maestro alumno es en ocasiones resumido en el verbo animar.

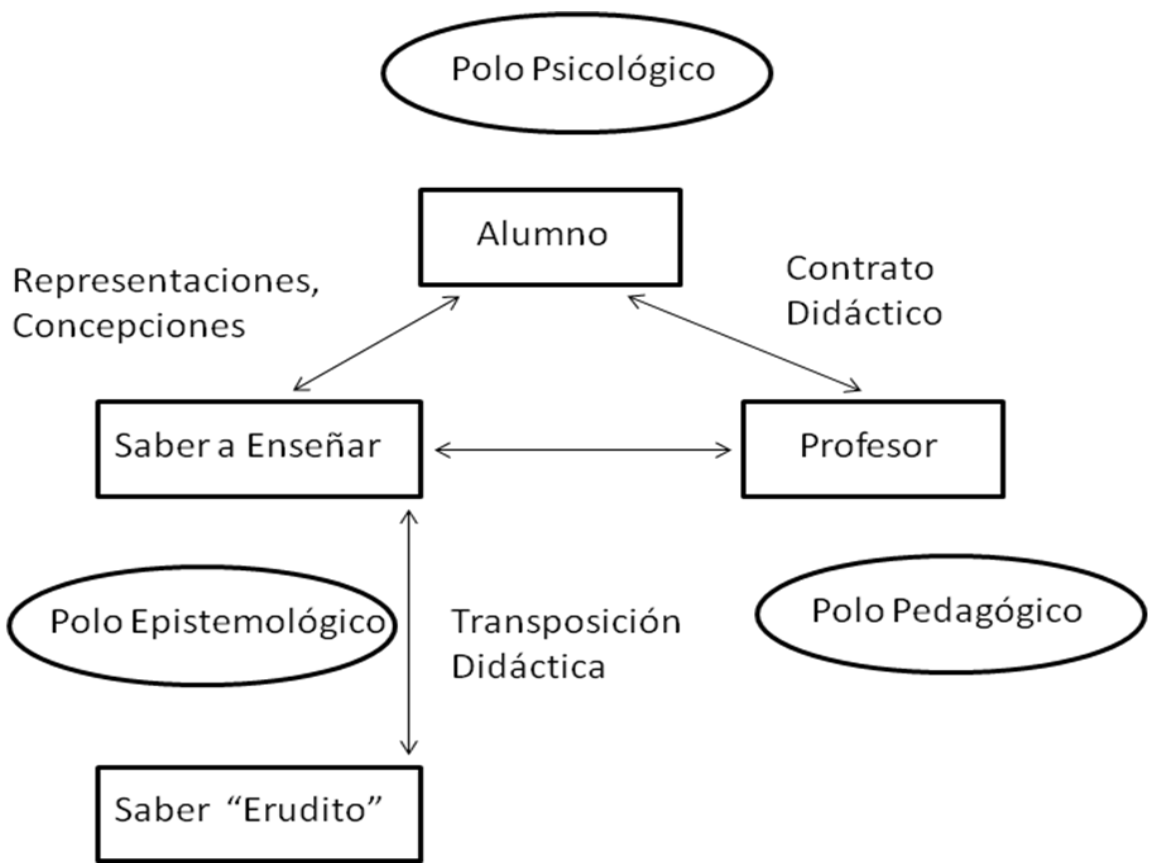


Figura 1. Esquema de la Ingeniería Didáctica. Fuente: Artigue y Douady (1998)

Modelos de Enseñanza.

Los modelos son propuestas teóricas que vinculan entre sí diversos componentes que hay que tomar en cuenta a la hora de entender y planificar la enseñanza. El modelo selecciona datos de la realidad, determinando los que son más importantes para hacerla comprensible. (Gimeno, 1985).

Los modelos son esquemas amplios por su grado de generalidad, lo que implica que pueden existir varios modelos para interpretar la misma realidad; sus diferencias radican en la elección de los factores que se toman en cuenta para darle significado a esa realidad.

Modelo de Reigeluth y Moore.

Reigeluth (2000) presenta seis componentes básicos, los cuales desde una posición didáctica, son relevantes o importantes para una buena enseñanza. Estos tienen la virtud de ser extraídos del mismo proceso de aula, de la dinámica misma de la enseñanza, en contraposición a una escogencia de componentes de tipo formal, tales como objetivos, contenidos, evaluación, etc., de tipo estático, componentes sin dirección.

Los componentes del modelo de estos autores son:

1. Tipo de aprendizaje
2. Control del aprendizaje
3. Dirección del aprendizaje
4. Agrupamiento para aprender
5. Interacciones para aprender
6. Apoyo para aprender

Sin embargo, Manterola (2002) apunta críticamente que el Modelo de Reigeluth y Moore presenta un sesgo psicologista, propio de la cultura educativa norteamericana, heredada de la propuesta conductista, en donde el proceso didáctico se concibe y se explica desde su término, desde el fin a donde queremos llegar, el aprendizaje del estudiante.

Esta restricción en la interpretación de la enseñanza en función del aprendizaje tergiversa su naturaleza, limitándola a márgenes muy estrechos, alejados de las numerosas variables procesales y colectivas que supone el concepto de enseñanza. Es por esta concepción limitante de enseñanza que está detrás del modelo de Reigeluth y Moore, que Manterola modifica parcialmente su modelo didáctico.

En la Figura 2 el Modelo Didáctico presenta seis componentes, que se han llamado: Dirección de la enseñanza, Nivel de exigencia, Interacción didáctica, Apoyo al alumno, Control de la enseñanza y Organización de los alumnos.

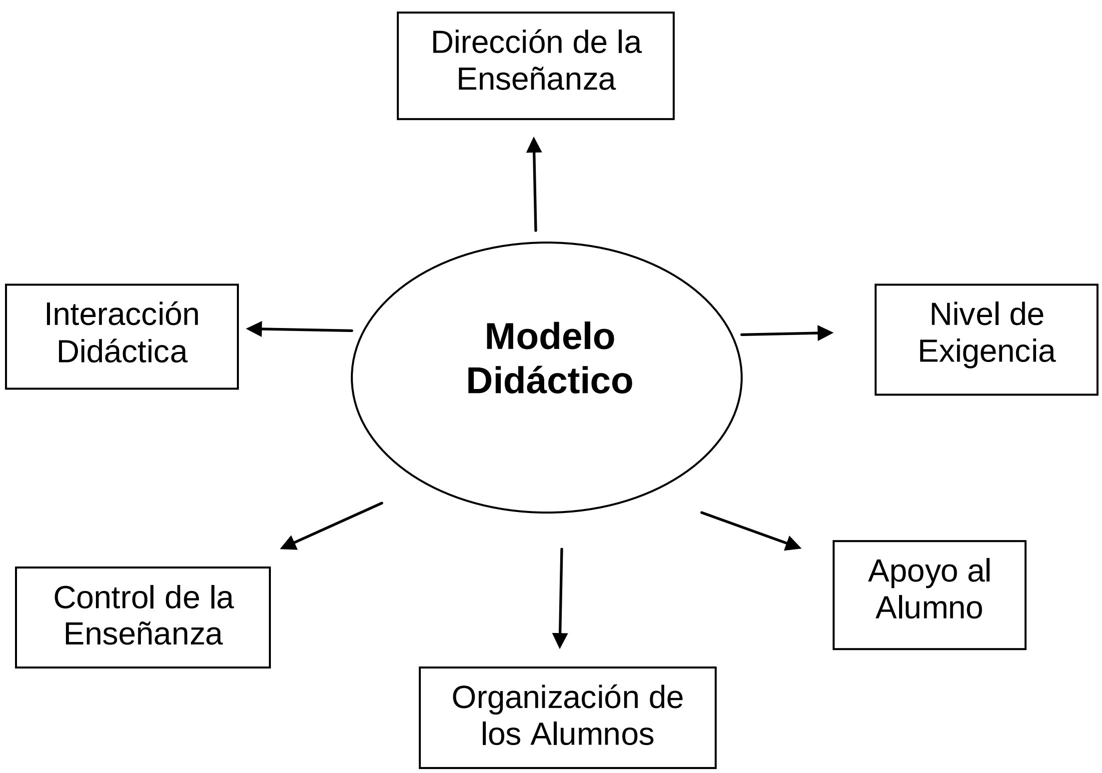


Figura 2. Modelo Didáctico de Manterola. Fuente: Manterola (2002)

Como se puede apreciar, la propuesta de Manterola posee características que permiten clasificarla como una buena teoría, en referencia a su facilidad de comprensión por parte de los docentes y a su sencillez de implementación. Cabe descartar que, dentro de estas características se fundamentan los cambios que hemos realizado al modelo de Reigeluth y Moore, es decir, que son más de forma y de intensidad de enfoque, que de modificación sustancial de algún componente.

Dirección de la Enseñanza. La propone como primer componente porque es una de las primeras decisiones que se suelen tomar en la planificación didáctica. Los docentes en su planificación, sea por proyecto pedagógico de aula o no, van a tener que decidir si el contenido a trabajar va a analizarse desde el marco conceptual de una asignatura específica o como pregunta abierta que puede entenderse en una visión más interdisciplinaria. Esta decisión hay que irla tomando en los primeros momentos de la planificación porque su repercusión en la estructura didáctica posterior es grande.

Este componente manifiesta, además, la diferencia didáctica que puede existir entre un proceso de enseñanza basado en la investigación o fundamentado en la explicación de un tema. Se trata de apreciar la diferencia que existe en el proceso didáctico cuando el contenido se presenta como problema a resolver o cuando el docente lo planifica como un tema particular; el primer enfoque dirige la enseñanza hacia un ambiente inquisitivo y buscador de información, el segundo, la presentación del contenido como tema promueve la descripción o explicación del docente.

Nivel de Exigencia. Los autores lo llaman tipo de aprendizaje. Este componente se materializa en los tres elementos curriculares que definen la demanda educativa: objetivos, contenidos y actividades. El nivel de exigencia es uno de los componentes más importantes y se suele presentar normalmente como la relación necesaria que tiene que existir entre objetivos y contenidos (las actividades suelen mencionarse en un segundo plano y son, en especial las que van a fijar el grado de dificultad, de facilidad cognoscitiva o afectiva que tiene la enseñanza en el trabajo en clase).

Si existe poca exigencia, si se hacen tareas elementales y fáciles para el alumno, la enseñanza será fastidiosa y aburrida y la escuela presentará problemas disciplinares; si los contenidos y objetivos se presentan en actividades exigentes, que impliquen retos (por el momento desconocidos para los alumnos), la enseñanza será eficiente y motivadora, sin mayores dificultades en la disciplina escolar. En la realidad didáctica, el tema de la exigencia cognoscitiva, afectiva o social se toma rara vez en cuenta. El nivel de demanda, para Reigeluth y Moore (Reigeluth, 2000), está marcado por el tipo de aprendizaje que se busca en la enseñanza: la información memorística, las relaciones de comprensión, las aplicaciones de técnicas y la aplicación de técnicas genéricas, aunque, sea preferible medirlo por algo más fácil de observar y planificar como es la interrelación entre objetivos y contenidos materializada en las actividades que se realizan en el aula.

Interacción Didáctica. Una vez que se ha determinado la dirección general de la enseñanza y su nivel de exigencia, el modelo define el tipo o tipos de interacción que van a existir en el proceso didáctico. Es decir, si la enseñanza se mantiene en ese "solipsismo didáctico", por el cuál el docente se constituye en el único factor de ayuda del proceso que realiza el alumno, ó si por el contrario, se agregan otros mediadores de naturaleza y virtualidades diferentes. Se considera que este componente, alerta sobre un aspecto clave en la enseñanza de calidad ya que éste normalmente pasa desapercibido en los análisis de la didáctica, otorgándole un lugar secundario, auxiliar a la enseñanza como recurso didáctico.

Aquí, en cambio se estudia el recurso didáctico por el significado de intervención que posee en el trabajo cognoscitivo, afectivo y social que tiene que realizar el alumno. El recurso tiene su estructura propia, con sus limitaciones y fortalezas, y no es fortuito que el recurso con frecuencia se convierta en obstáculo de la enseñanza, aunque se haya previsto con una función completamente distinta. Por ello, es muy importante pensar en la diversidad de interacción y en la calidad de la misma.

Apoyo al Alumno. Este componente define mejor la función principal del docente en la interacción didáctica, la de apoyar al alumno en su aprendizaje cuando lo necesite, sin quererlo suplantar, ni frenar en su crecimiento autónomo.

Con este componente el docente cae en cuenta de la necesidad que tienen los alumnos de su presencia y del tipo de intervención que solicitan. Consiste en estar atento a lo que ellos necesitan en el momento oportuno sin substituirlos. Una función muy difícil de cumplir en un salón con treinta y cinco alumnos y con grandes diferencias culturales.

Reigeluth y Moore diferencian el apoyo cognitivo del emocional, aunque regularmente se dan los dos simultáneamente. El primero se refiere al respaldo que recibe el alumno cuando elabora el conocimiento o la destreza requerida. Se puede realizar de varias maneras: suministrando información o el recurso adecuado, dándole un juicio evaluativo sobre el trabajo que realiza, llamándole la atención sobre algo que no ha caído en cuenta, etc. Cuando el apoyo respalda las actitudes, emociones, sensaciones y la autoconfianza del alumno lo denominan apoyo emocional.

Control de la Enseñanza. Este componente y el siguiente, la organización de los alumnos, son factores que se consiguen con más frecuencia en los modelos didácticos, los cuales promueven una didáctica con un mayor protagonismo de los alumnos. La práctica didáctica suele estar controlada totalmente por los docentes, ellos determinan los objetivos, seleccionan el contenido, los medios, el tipo de actividades y la evaluación a utilizar.

Este componente nos remite a la importancia que tiene la participación de los estudiantes en la toma de decisiones; por el hecho de que esa participación asegura la presencia de la cultura de los estudiantes en la enseñanza. El componente alerta al profesor sobre la necesidad de trabajar en el aula de clases, no sobre la cultura del Currículo Básico Nacional (CBN) o del docente, o de la cultura escolar, sino sobre la cultura de los alumnos y de sus familias.

Organización de los Alumnos. Este componente se refiere a la forma de agrupación que toman los alumnos en el trabajo didáctico, aunque los pupitres de nuestras aulas suelen convertir este factor de la enseñanza en pura “teoría”. Como no se suele organizar el trabajo sino únicamente basado en la labor individual de cada estudiante, los educadores no piensan en las posibilidades didácticas que tienen las diferentes formas de agruparse para el trabajo escolar. Muchas actividades podrán hacerse mejor en equipos de cuatro ó cinco personas, otras tareas será preferible hacerlas por parejas o individualmente. El grupo de un mayor número de alumnos (siete o más) será necesario en trabajos de folklore, manualidades y representaciones teatrales.

Pero este no es el único interés de las diversas formas de agruparse los estudiantes ante las tareas que deben realizar en el aula. La enseñanza de procesos y de valores suelen aprenderse mejor en equipos pequeños que en grupos grandes, y las ayudas que sean necesarias para los estudiantes más rezagados podrán exigir el trabajo en parejas. De acuerdo a la interacción didáctica que se pueda dar en actividades extraescolares o extra salón de clases, la organización de los alumnos también será diferente.

Resolución de Problemas en Matemática.

La resolución de problemas es la actividad más complicada e importante que se plantea en matemática. Los contenidos del área cobran sentido desde el momento en que es necesario aplicarlos para poder resolver una situación problemática. Cuando se trabajan en el aula de forma sistemática, dando opción al alumno a que razone y explique cuál es su forma de afrontar y avanzar en el desarrollo de la actividad, salen a la luz las dificultades que el propio proceso de resolución de problemas conlleva. (Echenique, 2006).

Dichas dificultades están relacionadas en algunos casos con la falta de asimilación de contenidos propios de los diferentes bloques del área; en otras ocasiones se basan en la comprensión lectora, en el uso del lenguaje o en el desconocimiento de conceptos propios de otras disciplinas que intervienen en la situación planteada. No obstante, suponen una importante fuente de información para dar a conocer los aspectos que se debieran retomar e incorporarlos nuevamente al proceso de enseñanza - aprendizaje.

Concepto de Problema Matemático.

Un problema es una situación que un individuo o grupo quiere o necesita resolver y para la cual no dispone, en principio, de un camino rápido y directo que le lleve a la solución; consecuentemente eso produce un bloqueo. Conlleva siempre un grado de dificultad apreciable, es un reto que debe ser adecuado al nivel de formación de la persona o personas que se enfrentan a él.

Si la dificultad es muy elevada en comparación con su formación matemática, desistirán rápidamente al tomar consciencia de la frustración que la actividad les produce. Por el contrario, si es demasiado fácil y su resolución no presenta especial dificultad ya que desde el principio ven claramente cuál debe ser el proceso a seguir para llegar al resultado final, esta actividad no será un problema para ellos sino un simple ejercicio. De este modo podemos decir que la actividad que para alumnos de ciertas edades puede concebirse como un problema, para otros no pasa de ser un mero ejercicio.

Los ejercicios no implican una actividad intensa de pensamiento para su resolución. Al realizarlos, el alumno se da cuenta muy pronto de que no le exigen grandes esfuerzos. Generalmente tienen una sola solución, son actividades de entrenamiento, de aplicación mecánica de contenidos o algoritmos aprendidos o memorizados. Le sirven al profesor para comprobar que los alumnos han automatizado los conocimientos que él pretendía enseñarles y, a su vez, al alumno para consolidar dichas adquisiciones.

Según Echenique (2006), hacer ejercicios en serie puede provocar aburrimiento, ya que generalmente son repetitivos y pueden resultar poco interesantes. Sin embargo, en algunas ocasiones sirven para motivar a los alumnos, pues de esa manera toman conciencia de los conocimientos que van adquiriendo. Son un tipo de actividades muy abundantes en los libros de texto. Los docentes no deben abusar de su realización, sino seleccionar cuidadosamente aquellos que nos resultan más útiles para evaluar el grado de comprensión de los conceptos y la adquisición de algoritmos matemáticos por parte de los alumnos.

Por contraposición, los problemas no se resuelven con la aplicación de una regla o receta conocida a priori. Exigen al resolutor sumergirse en su interior para navegar entre los conocimientos matemáticos que posee y rescatar de entre ellos los que pueden serle útiles para aplicar en el proceso de resolución. Puede servirse de experiencias anteriores que hagan referencia a situaciones parecidas, para rememorar cuál fue el camino o vía seguida, en caso de poder volver a utilizarlos en esta nueva situación.

Los problemas pueden tener una o varias soluciones y en muchos casos existen diferentes maneras de llegar a ellas. Cuando un alumno o un grupo se implican en esta actividad, se vuelca en ella, muestra entusiasmo y desarrolla su creatividad personal. Es frecuente manifestar cierto nivel de satisfacción al descubrir el camino que le conduce al resultado final como fruto de la investigación llevada a cabo. El tiempo que se dedica a la resolución de un problema es bastante mayor que el que lleva la realización de un ejercicio.

Diferencias entre Problemas y Ejercicios

La tabla que viene a continuación recoge de una manera más gráfica y comparada las principales diferencias que existen entre estos dos tipos de actividades:

Características de los Ejercicios	**Características de los Problemas**
Se ve claramente qué hay que hacer	Suponen un reto
La finalidad es la aplicación mecánica de algoritmos.	La finalidad es ahondar en los conocimientos y experiencias que se poseen, para rescatar aquellos que son útiles para llegar a la solución esperada.
Se resuelven en un tiempo relativamente corto.	Requieren más tiempo para su resolución.
No se establecen lazos especiales entre el ejercicio y la persona que lo resuelve	La persona que se implica en la resolución lo hace emocionalmente. El bloqueo inicial, debido a que la situación le desconcierta, dará paso a la voluntariedad y perseverancia por encontrar la solución y, por último, al grado de satisfacción una vez que esta se ha conseguido
Generalmente tienen una sola solución.	Pueden tener una o más soluciones y las vías para llegar a ellas pueden ser variadas.
Son muy numerosos en los libros de texto.	Suelen ser escasos en los libros de texto.

Tabla 1. Comparación entre Ejercicios y Problemas. Fuente: Echenique (2006)

Echenique (2006) sugiere que, cuando se trabajan problemas con los alumnos, se proponen unas actividades con las que puedan sentirse retados según sus capacidades matemáticas. De este modo podrán experimentar el gusto por la investigación y el descubrimiento de la solución a la situación planteada.

¿Cómo se debe afrontar la Resolución de Problemas?

Una modalidad de aprendizaje de las matemáticas es la que se lleva a cabo a través de la resolución de problemas de forma activa, como fruto de variadas reflexiones sobre los contenidos conceptuales y procedimentales que se poseen, para retomar en cada momento aquello que puede ser útil. Puesto que los problemas matemáticos son las actividades más complejas que se le proponen al alumno al abordar esta área, es necesario ser consecuentes en su tratamiento. (Echenique, 2006)

Pérez y Pozo (1994) establecen que enseñar a resolver problemas debe figurar entre las intenciones educativas del currículum escolar. No basta con poner problemas matemáticos para que los alumnos los resuelvan. Es necesario darle un tratamiento adecuado, analizando estrategias y técnicas de resolución, "verbalizando" el pensamiento y contrastándolo con el de otras personas. Deben enseñarles procesos de resolución a través de buenos modelos, con ejemplos adecuados, dedicar un espacio en el horario escolar y conseguir un clima propicio en el aula que favorezca la adquisición de las correspondientes destrezas y hábitos. Es cierto que cada problema tiene unas peculiaridades concretas, sin embargo hay un proceso común a la mayor parte de ellos que es el método de resolución y en la enseñanza del mismo es precisamente donde deben insistir.

La escuela es el lugar donde los alumnos deben aprender a resolver problemas y, si no dedicarle a ello el tiempo que la actividad requiere, difícilmente se logrará en años posteriores. Como Polya (1982) dijo: "la resolución de problemas es un arte práctico, como nadar o tocar el piano. De la misma forma que es necesario introducirse en el agua para aprender a nadar, para aprender a resolver problemas, los alumnos han de invertir mucho tiempo enfrentándose a ellos".

Echenique (2006) expresa que en la etapa de educación primaria deben asentarse las bases que contribuirán a que los alumnos sean capaces de enfrentarse con un mayor porcentaje de éxito a este tipo de actividades. Un buen resolutor de problemas se va formando poco a poco y se identifica porque dispone de:

- Un buen bagaje de conocimientos matemáticos claros, estructurados e interconectados que le permiten enfrentarse a las diferentes situaciones.
- Un método de resolución acompañado de una serie de estrategias heurísticas para poder hacer uso de ellas durante el proceso.
- Una actitud positiva al aceptar el reto que se le propone. Es perseverante y disfruta resolviendo problemas.

Esto no debe llevar a creer que el buen resolutor es capaz de resolver correctamente cualquier problema matemático que se le presente. Sin embargo, sí que cuenta con unos buenos procedimientos de los que hará uso al enfrentarse a la resolución de la situación-problema.

El Método en la Resolución de Problemas.

Existen muchos enfoques en la resolución de problemas dado el gran número de autores que han realizado estudios e investigaciones en este tema. La preocupación por conseguir buenos resolutores ha llevado a determinar diferentes fases en el proceso de resolución. George Polya (1982) estableció cuatro etapas que después sirvieron de referencia para muchos planteamientos y modelos posteriores, en los que se fueron añadiendo nuevos matices, si bien el esquema básico de todos ellos se mantiene. Las etapas del proceso de resolución que determina Polya son las siguientes:

- COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA: Implica entender tanto el texto como la situación que se presenta el problema, diferenciar los distintos tipos de información que nos ofrece el enunciado y comprender qué debe hacerse con la información que nos es aportada.

- CONCEPCIÓN DE UN PLAN: Es la parte fundamental del proceso de resolución de problemas. Una vez comprendida la situación planteada y teniendo clara cuál es la meta a la que se quiere llegar, es el momento de planificar las acciones que llevarán a ella. Es necesario abordar cuestiones como para qué sirven los datos que aparecen en el enunciado, qué puede calcularse a partir de ellos, qué operaciones utilizar y en qué orden se debe proceder.

- EJECUCIÓN DEL PLAN: Consiste en la puesta en práctica de cada uno de los pasos diseñados en la planificación. Es necesaria una comunicación y una justificación de las acciones seguidas: *primero cálculo*…, *después*…, *por último*… hasta llegar a la solución. Esta fase concluye con una expresión clara y contextualizada de la respuesta obtenida.

- VISIÓN RETROSPECTIVA: Un problema no termina cuando se ha hallado la solución. La finalidad de la resolución de problemas es aprender durante el desarrollo del proceso, y este termina cuando el resolutor siente que ya no puede aprender más de esa situación. Es conveniente realizar una revisión del proceso seguido, para analizar si es o no correcto el modo como se ha llevado a cabo la resolución.

Estos cuatro pasos, que se conciben como una estructura metodológica, podrían aplicarse también a problemas incluso no matemáticos de la vida diaria. Al poner en práctica este método en educación media, es necesario tener en cuenta que su aplicación y la importancia concedida a cada una de las fases debe adecuarse a las edades y desarrollo intelectual de los alumnos con los que se trabaje. (Echenique, 2006).

Bases Teóricas Matemáticas

Un Poco de Historia.

La primera prueba indiscutible del conocimiento de los números primos se remonta a alrededor del año 300 A.C. y se encuentra en los Elementos de Euclides (tomos VII a IX). Euclides define los números primos, demuestra que hay infinitos de ellos, define el máximo común divisor (MCD), el mínimo común múltiplo (mcm) y proporciona un método para determinarlos que hoy en día se conoce como el algoritmo de Euclides. Los Elementos contienen asimismo el teorema fundamental de la aritmética y la manera de construir un número perfecto a partir de un número primo de Mersenne. La criba de Eratóstenes, atribuida a Eratóstenes de Cirene, es un método sencillo que permite encontrar números primos. (Babini, 1986).

Después de la matemática griega, hubo pocos avances en el estudio de los números primos hasta el siglo XVII. En 1640 Pierre de Fermat estableció (aunque sin demostración) el pequeño teorema de Fermat, posteriormente demostrado por Leibniz y Euler. Es posible que mucho antes se conociera un caso especial de dicho teorema en China. (Babini, 1986).

Fermat conjeturó que todos los números de la forma $2^{2n}+1$ eran primos (debido a lo cual se los conoce como números de Fermat) y verificó esta propiedad hasta $n = 4$ (es decir, $2^{16} + 1$). Sin embargo, el siguiente número de Fermat $2^{32} + 1$ es compuesto (uno de sus factores primos es 641), como demostró Euler. De hecho, hasta nuestros días no se conoce ningún número de Fermat que sea primo aparte de los que ya conocía el propio Fermat. El monje francés Marin Mersenne investigó los números primos de la forma $2^p - 1$, con p primo. En su honor, se los conoce como números de Mersenne. (Babini, 1986)

Algoritmo de la División.

La división es una operación matemática, específicamente de aritmética elemental, inversa de la multiplicación y puede considerarse también como una resta repetida. Consiste en averiguar cuántas veces un número (el divisor) está contenido en otro número (el dividendo). Al resultado entero de la división se denomina cociente y si la división no es exacta, es decir, el divisor no está contenido un número exacto de veces en el dividendo, la operación tendrá un resto o residuo. Según su resto, las divisiones se clasifican como exactas si su resto es cero ó inexactas cuando no lo es.

Ejemplo:

Dividendo → 190 | 5 ← **Divisor**

40 38 ← **Cociente**

0 ← **Resto**

Que también puede expresarse:

Dividendo = Divisor · Cociente + Resto

Los Números Primos.

Un número es primo si sus únicos factores son 1 y él mismo. Se conoce como factor a cada una de las cantidades o expresiones que pueden multiplicarse para formar un producto. También se le dice factor al submúltiplo.

Algunos números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,…

El único número par primo es el 2. Todos los demás números primos son impares, aunque no todos los números impares son primos. Por ejemplo 9, 15, 21, 25, 45, 63,... no son números primos.

Los números compuestos tienen más de dos divisores, son divisibles por sí mismos, por el 1, y además por otros factores.

Múltiplo y Divisores.

El múltiplo de un número resulta de multiplicar dicho número con cada uno de los naturales. Ejemplo: son múltiplos del número 2 el 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 y muchos más, los múltiplos son infinitos como son infinitos los números naturales.

Un número entero *a* es submúltiplo de otro entero *b* cuando existe un tercer entero que divide *b* y da como resultado el número *a*. En general, *a* es submúltiplo de *b* si y sólo si *b* es múltiplo de *a.* Por ejemplo: a = 7, b = 21 y a = b / 3

En este caso, 3 es el número entero que cumple con la condición anteriormente descrita y se dice que 7 es submúltiplo de 21.

Los divisores de un número son los que dividen a éste en forma exacta. El uno es divisor de todos los números. Todo número es divisor de sí mismo. Para determinar los divisores de un número, se buscan todos los números que lo dividen en forma exacta, es decir, el residuo debe ser cero.

Mínimo Común Múltiplo y Máximo Común Divisor.

Para desarrollar estos conceptos se tiene que tomar en cuenta la forma tradicional en la cual éstos se determinan, estableciéndose así:

Mínimo Común Múltiplo (mcm).

El mínimo común múltiplo de dos o más números naturales, es el menor de sus múltiplos comunes. El mínimo común múltiplo de varios números, a, b, c, se designa abreviadamente así: mcm (a, b, c).

Para obtener el mínimo común múltiplo de dos o más números se puede recurrir a su descomposición factorial tomando cada uno de los factores primos que intervengan en las descomposiciones de los distintos números elevados a la máxima potencia con que aparezca.

Por ejemplo, para hallara M = mcm (500, 420, 880) se procede como se explica a continuación.

Se empieza descomponiendo los tres números en factores primos:

500	2	420	2	880	2
250	2	210	2	440	2
125	5	105	3	220	2
25	5	35	5	110	2
5	5	7	7	55	5
1		1		11	11
				1	

$500 = 2^2 \cdot 5^3 \qquad 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \qquad 880 = 2^4 \cdot 5 \cdot 11$

Ahora, para hallar M se toman todos los factores primos que intervienen, 2, 5, 3, 7 y 11, elevados a la máxima potencia con la que aparecen y se multiplican:

$$M = \text{mcm}\ (500, 420, 880) = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 = 462.000$$

Por lo tanto, el menor de los múltiplos comunes a 500, 420 y 880 es 462.000.

Los pasos de manera resumida para calcular el mcm son:

1. Descomponer los números en factores primos.
2. Elegir entre toda la descomposición, los factores comunes y los no comunes con sus mayores exponentes.
3. Multiplicar todos los factores elegidos.

Máximo Común Divisor (MCD).

El máximo común divisor de dos o más números naturales es el mayor de sus divisores comunes. El máximo común divisor de varios números a, b, c, se designa abreviadamente así: MCD (a, b, c).

Para obtener el máximo común divisor de dos o más números se puede recurrir a su descomposición factorial tomando cada uno de los factores primos comunes a todas las descomposiciones de los distintos números elevados a la mínima potencia con que aparezca. Por ejemplo, para hallar D = MCD (1980, 600, 5040) se procede como se indica a continuación.

Se empieza descomponiendo en factores primos los tres números:

1980	2	600	2	5040	2
990	2	300	2	2520	2
495	3	150	2	1260	2
165	3	75	3	630	2
55	5	25	5	315	3
11	11	5	5	105	3
1		1		35	5
				7	7
				1	

$1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \qquad 600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \qquad 5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Ahora para hallar D se toman los factores primos comunes a las tres descomposiciones, elevados a la mínima potencia con que aparecen y se multiplican:

$$D = \text{MCD}(1980, 600, 5040) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$$

Por lo tanto, el mayor de los divisores comunes a 1980, 600 y 5040 es 60.

Los pasos de manera resumida para calcular el MCD son:

1. Descomponer los números en factores primos.
2. Elegir entre toda la descomposición, el factor común con su mínimo exponente.
3. Multiplicar todos los factores elegidos.

Otro procedimiento es el que conocemos como Algoritmo de Euclides, el cual es un método antiguo y eficaz para calcular el máximo común divisor (MCD) entre dos números enteros. Fue originalmente descrito por Euclides en la proposición 2 del libro VII de su obra Elementos. Tiene numerosas aplicaciones en teoría de números y ciencias de la computación.

Al dividir a entre b (números enteros), se obtiene un cociente q y un residuo r. Es posible demostrar que el máximo común divisor de a y b es el mismo que el de b y r, este es el fundamento principal del algoritmo.

De acuerdo con este fundamento, para calcular el máximo común divisor de a y b tan sólo es necesario calcular el máximo común divisor de b y r. Como b y r son números más pequeños, el número de operaciones se reduce. Además, para calcular el máximo común divisor de b y r se puede aplicar la misma regla recurrentemente. Por ejemplo, para calcular el máximo común divisor de 2366 y 273 se podría utilizar la siguiente secuencia de operaciones:

2366 entre 273 es 8 y sobran 182
273 entre 182 es 1 y sobran 91
182 entre 91 es 2 y sobran 0

Esta secuencia de operaciones se puede interpretar con el siguiente significado:

MCD (2366, 237) = MCD (273, 182)
MCD (273, 182) = MCD (182, 91)
MCD (182, 91) = MCD (91, 0)

De esta manera se concluye que el máximo común divisor de 2366 y 273 es 91.

La expresión “a entre b es q y sobra r” se puede expresar matemáticamente como la siguiente ecuación:

$$a = bq + r \qquad 0 \leq r < b$$

Ambas expresiones son completamente equivalentes. Con base en esto, el algoritmo funciona para cualesquiera números enteros a y b mediante la sucesión de divisiones:

$$\begin{array}{ll} a = bq + r_1 & 0 \leq r_1 < b \\ b = r_1q_1 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 = r_2q_2 + r_3 & 0 \leq r_3 < r_2 \\ \ldots & \ldots \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n & 0 < r_n < r_{n-1} \\ r_{n-1} = r_nq_n + 0 & \end{array}$$

El máximo común divisor de a y b es r_n, es decir, el último residuo distinto de 0. Esto siempre es cierto dado que en realidad solo se está haciendo la siguiente secuencia de afirmaciones:

$$\begin{aligned} MCD\ (a, b) &= MCD\ (b, r_1) \\ &= MCD\ (r_1, r_2) \\ &= MCD\ (r_2, r_3) \\ &\ldots \\ &= M.C.D\ (r_{n-1}, r_n) \\ &= M.C.D\ (r_n, 0) \\ &= r_n \end{aligned}$$

De esta manera, el algoritmo puede enunciarse como sigue Flores (2002): “para calcular el máximo común divisor de dos números naturales a y b, verifique si b es cero; si es así, entonces a es el máximo común divisor de a y b. En otro caso, repita el proceso usando respectivamente b, y el resto de dividir a entre b”.

Este algoritmo puede ser usado en cualquier contexto donde la división con residuo sea posible. Esto incluye a los polinomios, los enteros y en general cualquier dominio euclideo.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO.

El marco metodológico es el conjunto de acciones destinadas a describir y analizar a fondo el problema planteado, a través de procedimientos específicos, que incluyen las técnicas de observación y recolección de datos, determinando el cómo se realizará el estudio. Esta tarea consiste en hacer operativos los conceptos y elementos del problema que estudiamos, al respecto Sabino (1986) nos dice: “En cuanto a los elementos que es necesario operacionalizar pueden dividirse en dos grandes campos que requieren un tratamiento diferenciado por su propia naturaleza: el universo y las variables”.

El marco metodológico es la instancia referida a los métodos, las diversas reglas, registros, técnicas, y protocolos con los cuales una teoría y su método calculan las magnitudes de lo real. De allí que se deberán plantear el conjunto de operaciones técnicas que se incorporarán en el despliegue de la investigación y en el proceso de obtención de los datos. El fin esencial del marco metodológico, es situar dentro del lenguaje de investigación, los métodos e instrumentos empleados, tales como, el tipo de estudio, el diseño, el universo o población, su muestra, los instrumentos de recolección de la información y la presentación de los datos.

Tipo de Investigación.

Se considera el tipo de investigación de campo, según Balestrini (2002), la cual se trata de la investigación aplicada para comprender y resolver alguna situación, necesidad o problema en un contexto determinado.

La Universidad Pedagógica Experimental Libertador, en el documento titulado “Manual de Trabajos de Grado de Maestría y Tesis Doctorales" (UPEL, 2005) manifiesta en relación a la investigación de campo que "consiste en el análisis sistemático de problemas en la realidad, con el propósito bien sea de describirlos, interpretarlos, entender su naturaleza y factores constituyentes, explicar sus causas y efectos, o predecir su ocurrencia, haciendo uso de métodos característicos de cualquiera de los paradigmas o enfoques de investigación conocidos o en desarrollo ".

Diseño de la Investigación.

El diseño de la investigación según Balestrini (2002) expresa, “… se define como el plan global de investigación que integra de modo coherente y adecuadamente correctas técnicas de recolección de datos a utilizar, análisis previstos y objetivos (…) el diseño de una investigación intenta dar de manera clara y no ambigua, respuestas a la preguntas planteadas en la misma…”.

La investigación se centró en cuatro fases que se indican:

Fase 1: Revisión de la bibliografía y recolección de la información (diagnóstico).

En esta fase se realizó la revisión de textos de matemática en educación media, (Brett y Suárez, 2002; Mendiola, 2002; Suárez y Durán, 2002) aprobados por el Ministerio de Educación, entre los textos revisados se incluyeron distintas editoriales, así como diferentes autores y otras fuentes (revistas especializadas, internet, etc.). Esto con la finalidad de establecer un marco de referencia para el mcm y MCD, basado en tres criterios: contenido, técnica y utilidad.

Técnica e Instrumento de Recolección de la Información.

Para la recolección de la información relevante para el proyecto, se empleo la técnica del cuestionario, que es una de técnica de investigación social muy difundida.

Esta se basa en afirmaciones y opiniones de tipo escrito, que son tomadas de una muestra de población bajo estudio, esto con el fin de recabar información pertinente en aspectos objetivos (hechos, características) y subjetivos (opiniones y actitudes de los docentes) relevantes a la investigación.

La elaboración del diagnóstico requirió diseñar un cuestionario que consistió en la formulación de doce preguntas escritas, dirigidas a abarcar diversos aspectos referentes al conocimiento, habilidades y destrezas sobre el mcm y MCD, estas fueron entregadas a los encuestados. (Ver Apéndice A). Los juicios entregados resultaron de valioso interés en la formalización del diseño y su posterior aplicación en sesiones reales de clase.

Fase 2: Diseñar la propuesta didáctica y producir un material educativo basado en el modelo de Reigeluth y Moore (Reigeluth, 2000), y en las modificaciones de Manterola (2002).

Una vez determinado el tipo de proyecto a diseñar se procedió a dar sustento teórico a la propuesta para lo cual fue necesario apoyarla en alguna de las teorías y modelos de enseñanza los cuales son lineamientos educativos estructurados que se emplean en el diseño de materiales didácticos, en su evaluación y en la orientación del proceso de enseñanza-aprendizaje. Siguiendo esta afirmación el presente diseño didáctico se fundamentó en los trabajos de Reigeluth y Moore (Reigeluth, 2000), modificado por Manterola (2002).

Establecidos los aportes de las corrientes educativas base de este proyecto y de las consideraciones necesarias para el diseño del material didáctico, se elaboró la propuesta didáctica para la enseñanza del mínimo común múltiplo y el máximo común divisor, dirigida a docentes del área de matemática en educación media general, para facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje en esta área.

Esta propuesta fue diseñada de manera que permita a los estudiantes experimentar con problemas aplicados y relacionados con los contenidos teóricos de esta disciplina, ubicándolos de esta forma en contextos donde puedan desarrollar conocimientos, habilidades y destrezas útiles en su vida diaria. Con este fin, se eligió el tema del mínimo común múltiplo (mcm) y el máximo común divisor (MCD), por considerar que él mismo, es un contenido que sirve de base y sustento a otros contenidos en este nivel y puede ser aplicado en la resolución de problemas de la vida cotidiana.

Durante el diseño de la propuesta se tuvieron en cuenta los componentes desarrollados por Manterola, el aspecto más importante fue la dirección de la enseñanza por lo cual se buscó superar la fragmentación del currículo tradicional, relacionando los problemas propuestos y sus soluciones con otras disciplinas. Por este motivo, se consideró pertinente incluir actividades de relevancia en la vida cotidiana, en los que pueda construir y avanzar en la búsqueda de alternativas para su resolución, es decir problemas dinamizadores del aprendizaje. También para la presentación del tema se consideró conveniente dividir el contenido de la propuesta didáctica en varias actividades presentando en cada una, desde los aspectos más particulares a los más generales y destacando siempre la relación existente entre la solución práctica y la teoría matemática relacionada.

En segundo lugar de importancia estuvo una variable didáctica fundamental, el nivel de exigencia, se utilizó la clasificación de Reigeluth y Moore para ubicar los contenidos y las actividades en un máximo nivel posible. Después de analizar el sentido y la exigencia del trabajo, en tercer lugar para Manterola y en quinto para Reigeluth está la interacción didáctica, el material didáctico presentó en algunos de sus apartados ilustraciones relacionadas con el tema que seguidamente se abordaría de manera innovadora que despertara y motivara visualmente la curiosidad y el interés de grupo.

Seguimos el esquema de Reigeluth al tomar en cuenta el apoyo cognoscitivo y el apoyo emocional por lo mismo las actividades propuestas fueron diseñadas empleando un lenguaje escrito que resultara amigable y fue alternado con el lenguaje formal propio de esta ciencia, de manera que, el lector no se distanciara con la lectura de una pesada notación.

La planificación, diseño y elaboración de la propuesta didáctica se desarrollo ante la necesidad de reorientar la enseñanza de la matemática en nuestro país hacia una formación del estudiante que incluya los avances propuestos por importantes corrientes educativas. Se espera que esta propuesta, de igual forma contribuya a la labor docente que aspire orientar sus prácticas educativas en el área de matemática bajo estas corrientes.

Fase 3: Validación de la propuesta por un grupo de expertos en el área.

Para esta fase de la propuesta didáctica, se consideró aplicar la técnica de juicio de expertos, con este fin, se contó con la colaboración de un grupo de docentes de matemática de reconocida experiencia en el área pedagógica a nivel de educación media. A estos se les entregó un ejemplar de la propuesta y los instrumentos de validación.

La intención de la validación, fue detectar si existían algunas debilidades presentes en el diseño-borrador de la propuesta didáctica, el nivel pedagógico en que se enmarcaba y si el mismo se apoyaba en el desarrollo de aplicaciones prácticas. Para el caso de presentarse observaciones, someter dichas actividades a un proceso de revisión y mejoras eficientes que permitieran lograr los objetivos planteados en la elaboración de la misma.

Las preguntas del cuestionario trataron de servir de guía y como indicadores de opinión, juicio y criterio de los docentes encuestados con relación a la efectividad del diseño y los posibles resultados de la propuesta didáctica.

En este proceso intervinieron cinco especialistas en el área objeto de estudio, a quienes se les entregaron tres formatos. El primer formato consistió en la validez del instrumento de diagnóstico, este contiene los criterios a considerar: claridad, pertinencia y coherencia, y los juicios: eliminar, modificar y aceptar, con los números correspondientes a cada ítem del cuestionario (ver Apéndice B). El segundo formato para determinar la validez de la propuesta y la coherencia entre el objetivo general y los objetivos específicos de cada actividad del material educativo, contiene los siguientes juicios: eliminar, modificar y aceptar (ver Apéndice C). El tercer formato que consiste en la validez de la evaluación del material contiene los criterios a considerar: claridad, pertinencia y coherencia, y los juicios: eliminar, modificar y aceptar, con los números correspondientes a cada ítem de la evaluación (ver Apéndice D).

Fase 4: Aplicación de la propuesta didáctica y evaluación.

Una vez finalizada la etapa de revisión, diseño y validación de la propuesta didáctica se llevo a cabo el proceso de aplicación. El instrumento final consistió en un material educativo dirigido a los docentes, siguiendo el modelo de Reigeluth y Moore, modificado por Manterola. En el mismo se encuentran ejercicios con explicaciones y procedimientos para que los docentes y estudiantes puedan desarrollar procesos básicos de pensamiento, establecer relaciones entre los contenidos y la aplicabilidad del mcm y MCD. Asimismo, se les mostró como los contenidos básicos están asociados con los temas de mayor dificultad.

La población que intervino estuvo conformada por los docentes del Programa “Samuel Robinson” de la UCV. De dicha población se seleccionó una muestra, tomando en cuenta el carácter creativo y espontáneo de las soluciones encontradas por el sujeto. La propuesta se llevo a cabo en un ambiente de taller, el grupo de docentes fue convocado para recibir 4 horas semanales, durante un periodo de un mes. Las sesiones fueron dirigidas con apoyo del docente a cargo del grupo.

Al inicio de la sesión se les entrego la guía didáctica a cada participante, seguidamente se procedió la apertura del programa, las actividades se podían llevar a cabo de manera individual o en grupo. Se procuró finalizar las sesiones con discusiones o debates sobre el tema tratado, así como un ciclo de preguntas y clarificación de dudas planteadas por el docente.

La etapa final de la aplicación fue la evaluación de la propuesta (ver Apéndice E), la cual estaba dirigida a recabar información referente a la opinión de cada docente participante del taller, en cuanto a su nivel de conexión con la guía didáctica, de cual actividad le gustó más de acuerdo a su criterio, de si le gustaría agregar u omitir algo al diseño, y si consideraba que algunas de las actividades propuestas permitían al estudiante resolver problemas de su entorno.

La técnica de la evaluación es la más eficiente y práctica, porque permite recopilar información, opiniones, posturas, conductas y características de las personas claves en la investigación. Se utilizó esta técnica sobre un grupo seleccionado de docentes que cumplieron con condiciones de espontaneidad dentro de la población a la cual se le aplicó la propuesta, esta sirvió para determinar los efectos productivos o contraproducentes del material educativo.

Con este fin se procedió a la entrega del instrumento evaluativo, una hoja de preguntas con rubricás y preguntas del tipo de respuestas abiertas, las cuales estaban dirigidas a recabar información referente a la opinión de cada docente participante de la actividad, en cuanto a su nivel de conexión con la propuesta didáctica, si este consideraba que algunas de las actividades propuestas le permitían resolver algunos problemas de su entorno y finalmente indagar si, el docente conoce o ha trabajado con textos que presenten la enseñanza de la matemática enfocada hacia las aplicaciones.

Al finalizar el taller se les entregó a los docentes participantes un certificado de asistencia (ver Apéndice F).

CAPÍTULO IV

LA PROPUESTA.

Esta propuesta educativa responde a una problemática real y significativa de la educación, promover el desarrollo de la enseñanza, adaptada a las condiciones y necesidades cambiantes del mundo de hoy. El objetivo de la misma es entonces, desarrollar técnicas y estrategias didácticas para la comprensión del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor contribuyendo de esta manera a la enseñanza de la matemática. Esta se encuentra adaptada a los requerimientos del programa de matemática de educación media.

El propósito principal de este material educativo es aportar ideas que ayuden al docente, para que el estudiante expanda sus habilidades y adquiera destrezas en la ejercitación y en la resolución de problemas aplicables a la vida real utilizando el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor.

El material está dividido en siete actividades, en cada una de éstas se plantea un objetivo por unidad y se desarrollan los aspectos necesarios para dar cumplimiento a ese objetivo. Se encuentra escrito en un lenguaje de fácil comprensión, accesible para estudiantes de educación media y docentes relacionados directamente con el área de matemática. También se han incluido problemas, ejercicios de distinto grado de complejidad y se han planteado diversas maneras de realizarlos, la utilización del material permitirá a los docentes de educación media, relacionar las bases teóricas matemáticas con la práctica y su utilidad en la vida real.

Se espera con la aplicación del material establecer formas interesantes de percepción, ahorro de tiempo y esfuerzo en la enseñanza del tema por parte del docente y motivación por parte del estudiante al percibir la matemática a través del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor como parte de su realidad tangible.

Matemática

Educación Media

Chacón Marjorie

Mínimo Común Múltiplo y Máximo Común Divisor

Propuesta Didáctica del Mínimo Común Múltiplo y Máximo Común Divisor

"Una Herramienta para la Enseñanza"

Autora: Marjorie Chacón Chacón

Tutor: Juan Manuel Guevara Jordán

UCV 2012

Índice de Contenido.

Introducción.

La matemática ha tenido históricamente, y quizás hoy en día todavía sigue teniendo, al menos en el imaginario popular, el papel de “asignatura hueso”, difícil de “digerir” y aprobar. Ello puede ser debido, entre otras razones, a la dificultad de comprensión de las mismas. Para las personas en general, la matemática es una disciplina estática basada en fórmulas aprendidas en las áreas de aritmética, geometría, algebra y cálculo.

Afortunadamente, la matemática continúa creciendo fuera de esta perspectiva con rapidez, haciendo incursiones en nuevos campos y generando nuevas aplicaciones. La matemática actual, de lo que trata es de rechazar el cálculo rutinario sin comprensión de la realidad y aceptar el tratamiento de problemas realmente prácticos. La sociedad actual necesita más matemática, una matemática diferente, es absurdo pensar que con los mismos contenidos se puede preparar a las personas que viven en épocas distintas. En definitiva, la matemática básica actual ha de ser funcional y lúdica. Una persona deberá tener un dominio rápido de los números y de las formas, pero será muy importante no dejar de lado el hecho de que la matemática sirve para pensar, para jugar pensando.

La matemática es una actividad de resolución de problemas socialmente compartidos. Problemas que pueden tener relación con el mundo natural, social o ser problemas internos de la propia disciplina. Además es un lenguaje simbólico característico y constituye un sistema de signos propios en el que se expresan los objetos matemáticos, los problemas y las soluciones encontradas. Como todo lenguaje tiene funciones básicas y reglas de funcionamiento.

El presente material partiendo de las dificultades anteriormente expuestas, plantea una propuesta diferente, a través de la utilización de juegos didácticos, diseñados pensando en despertar el interés entre los estudiantes en el ámbito de resolución de problemas, aplicados a la vida diaria, donde se puedan sentir identificados y por lo tanto motivados.

También desea enmarcar deficiencias en los tradicionales métodos de enseñanza dentro de alternativas aportadas por el sistema constructivista, partiendo de las opiniones y valores de medición de docentes del área de matemática, quienes por su experiencia conocerán la importancia en el aprovechamiento de los aportes de estas técnicas actualizadas más eficaces a la hora de despejar dudas en el ya mencionado obscuro lenguaje matemático.

Las actividades que contiene la propuesta han sido seleccionadas y diseñadas previamente por la autora para ser utilizadas en el salón de clase y en un ambiente de taller. Antes de cada ejercicio se suministraran cortas definiciones y conceptos teóricos de los temas a tratar, organizados sistemáticamente para de manera eficaz entender lo necesario y relacionado a la enseñanza del mínimo común múltiplo (mcm) y del máximo común divisor (MCD).

Objetivo General:

Reforzar en un ambiente de resolución de problemas la enseñanza del mínimo común múltiplo (mcm) y del máximo común divisor (MCD) de dos o más números naturales, en la etapa de educación media general.

Descripción:

Este material dirigido a docentes del área de matemática y que laboren en distintas instituciones educativas, en las etapas de media general. Tendrá una duración de cuatro horas a la semana, por un período de un mes.

Programa.

Actividades		**Duración**
1 era Sesión	Palabras de bienvenida.	4 horas semanales
	Presentación de la facilitadora.	
	Presentación de los participantes.	
	Reflexionando sobre la matemática. Un poco de historia.	
	Actividad 1: Divisores de un número.	
2 da Sesión	Actividad 2: Múltiplos y divisores.	4 horas semanales
	Actividad 3: Los números primos.	
3 era Sesión	Actividad 4: Descomposición de un número en factores primos.	4 horas semanales
	Actividad 5: Divisores y múltiplos de una descomposición.	
4ta Sesión	Actividad 6: Mínimo común múltiplo y Máximo común divisor.	4 horas semanales
	Actividad 7: Resolución de problemas.	
	Total:	16 horas al mes

Reflexionando sobre la Matemática.

Desde siempre se ha escuchado que la matemática es un lenguaje universal, que se caracteriza por tener un alto nivel de abstracción, lo que nos lleva a decir que es muy sólido, formal, pero también algo difícil de dominar y entender por completo. En el nivel de educación media la tarea principal del docente, en el área de la matemática, es el de optimizar el aprendizaje y la comprensión de los conceptos matemáticos, lo cual por lo general se ve afectado y limitado por un conjunto de creencias y mitos que se generan alrededor de dicha área del conocimiento. En general, un estudiante promedio de educación media lleva consigo un concepto de la matemática bastante obscuro, lo cual dificulta en gran escala el proceso de la enseñanza.

Dentro del Currículo Básico Nacional (CBN), se desea que los contenidos y procedimientos tengan unas características de accesibilidad que permitan adquirir a todos un nivel mínimo de conocimiento matemático; los cuales puedan ser útiles al individuo tanto para el resto de la formación educativa básica como para su vida ciudadana. Dar, recibir o aprender cada uno según sus capacidades no puede convertirse en una fase de memorización vacía, sino en un horizonte de conocimientos matemáticos con aplicaciones a la vida diaria. Diversos autores llevan años planteando que el núcleo de este conjunto de conocimientos matemáticos básicos y comunes para todos, podría ser la resolución de problemas en la vida diaria, y el objetivo a cubrir es el conseguir que los estudiantes lleguen a ser más capaces de resolver problemas.

Es importante destacar que en los últimos años se han desarrollado métodos en los cuales se involucran mejoras por parte de los estudiantes en el proceso de resolución de problemas matemáticos. Se recuerda así, el método de las cuatro fases propuestos por el matemático George Polya:

- Comprender el problema, estableciendo cuál es la meta, los datos y condiciones de partida.

- Idear un plan de actuación que permita llegar a la solución, conectando los datos con la meta.
- Llevar a cabo el plan ideado previamente.
- Mirar atrás para comprobar el resultado y revisar el procedimiento utilizado.

Se ha observado en múltiples ocasiones que la resolución de un problema no se realiza porque el estudiante no comprende aquello que se le solicita, aunque lo que se le solicite no presente ninguna dificultad insalvable para el estudiante. Además, se puede ver que si se le facilita una lectura correcta del problema desaparecen los obstáculos que impedían resolverlo.

Cada vez con más insistencia se piensa que, por las causas que sean, a lo largo de la educación, desde hace muchos años, estos estudiantes aún no han tenido la oportunidad de enfrentarse al problema por sí mismos. Siempre habrá alguien a su lado que le impone la memorización, que le facilitará la fórmula, siendo una tarea que debería solucionar por él mismo con un mínimo de dedicación y un poco de esfuerzo mental.

Esta propuesta le ayudará en el proceso de comprensión de la matemática, se introduce una pequeña dosis de ejercicios con ayuda de tablas, de trabajo práctico con resolución de problemas de la vida diaria, con el fin de darle la oportunidad al estudiante de poderse enfrentar solo a los problemas, ayudado con las herramientas facilitadas.

La Autora

Un Poco de Historia

Sabias que….

Hacia el siglo III antes de Cristo (A.C), los matemáticos de la Grecia antigua eran muy estudiosos de las propiedades de los números, especialmente de lo que tenía que ver con los números primos. De donde partió ***Eratóstenes*** matemático griego (Cirene 276 A.C.- Alejandría 94 A.C.), se le atribuye la Criba, es un método rápido para hallar todos los números primos menores que un numero natural dado.

Eratóstenes
276 A.C - 94 A.C

Blaise Pascal
1623 - 1662

Además los griegos y egipcios establecieron la clasificación de los números en pares o impares. Los hindúes, por ejemplo, llegaron a conocer la divisibilidad por tres, nueve y siete. El genial matemático francés ***Blaise Pascal*** (1623- 1662), propuso las reglas para determinar la divisibilidad por cualquier número.

Euclides fue un matemático griego que nació el año 365 A.C. en Alejandría, Egipto, y murió alrededor del 300 A.C.

En el siglo IV A.C., Euclides logró reunir los principales conocimientos matemáticos de su época, todo lo relacionado con la aritmética, lo expuso en los libros VII, VIII, IX y X de sus "*Elementos*", demostró en ellos los teoremas básicos de la divisibilidad de los números enteros. Entre los curiosos datos aritméticos que se encuentran en esa portentosa obra, aparece el método de resolución del máximo común divisor (MCD), que hoy llamamos *Algoritmo de Euclides*.

Euclides
365 A.C – 300 A.C

No se olvidó Euclides en sus “Elementos”, de ofrecer un método para la obtención del mínimo común múltiplo (mcm) de dos números. Para calcular el (mcm), Euclides propuso la siguiente regla:

“El producto de dos números dividido entre el máximo común divisor (MCD) de ambos números, da el mínimo común múltiplo”.

Como se ve este procedimiento resultaba más laborioso que el utilizado en la actualidad.

De acuerdo a una leyenda, alguien le preguntó al gran sabio **Pitágoras**:

"¿Qué es un amigo?".

Pitágoras respondió: "Aquello que es mi otro ser".

Ante la extrañeza de su interlocutor, agregó: "aquello que es mi otro ser, como lo es 220 a 284". Se refería Pitágoras a la pareja más pequeña de números amigos, que comparten el fuerte nexo relativo a sus divisores.

Los divisores de 220 son:

1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110.

Si se suman estos divisores, se obtiene 284.

Por otra parte, los divisores de 284 son:

1, 2, 4, 71, 142.

La suma de todos estos números es igual a 220.

Pitágoras
582 A.C – 507 A.C

Pierre Fermat
1601 – 1665

Al descubrir Euclides la infinitud de la serie de los números primos, alcanzó su máximo desarrollo la teoría de los números entre los griegos. No se volvieron a hacer progresos en este campo, hasta que ***Pierre Fermat*** (1601-1665), propuso su teorema sobre los exponentes primos.

Actividad N° 1: Divisores de un Número.

Objetivo: Resolver divisiones con divisor de dos cifras.

Desde hace mucho tiempo, el hombre se ha visto ante la necesidad de tener que repartir cantidades de cosas entre personas, dándole a cada una el mismo número de unidades.

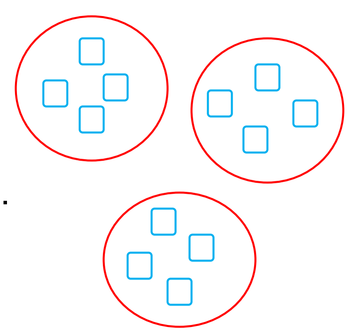
A través de la práctica el hombre descubrió que este problema a veces sí tenía solución y a veces no. Este hecho hizo que se estudiase que relación se encontraba entre los números en los que este problema sí tenía solución y los números en los que no. De esta forma comenzó a estudiarse la divisibilidad.

Definición.

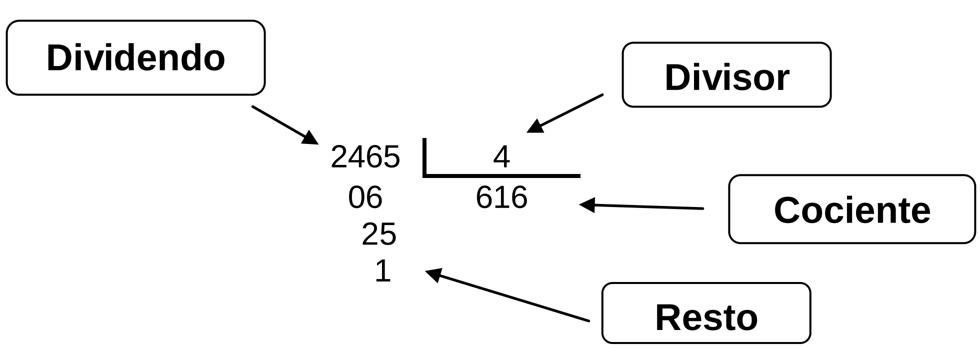
Un número *a* se puede dividir por otro número *b* (o también, a es divisible por b), cuando con el número de unidades que indique el número a se puedan hacer tantos números como indique el número b, teniendo todos estos grupos el mismo número de unidades.

Ejemplo.

En el dibujo diríamos que 12 se puede dividir por 3.



Dividendo = Divisor · Cociente + Resto



Ejemplo.

Dividendo	**Divisor**	**Cociente**	**Residuo**
2465	4	616	1
140	12	11	8
632	6	105	2

1. Realice la división y responda la tabla con los resultados.

Dividendo	Divisor	Cociente	Residuo
1381	15		
17	3		
	12	110	2
	6	53	7
1060	20		

Dividendo	Divisor	Cociente	Residuo
47	5		
290	29		
	38	4	0
	42	1	18
497	71		

Definición.

Un número *n* es **Divisible** entre un número *q*, si el resto de la división de *n* entre *q*, es cero.

```
2465 |__4___
 06    616
  25
   1
```

"2465 **NO es divisible** entre 4 porque el residuo de la división de 2465 entre 4 es 1".

```
2464 |__4___
 06    616
  24
   0
```

4 es divisor de 2464

"2464 es **divisible** entre 4 porque el residuo de la división de 2464 entre 4 es igual a 0".

Ejemplo.

Número	Es divisible entre 2	Es divisible entre 3	Es divisible entre 5
231	NO	SI	NO
7	NO	NO	NO
650	SI	NO	SI
32	SI	NO	NO

1. Conteste SÍ o NO, después de realizar la división.

Número	Es divisible entre 2	Es divisible entre 3	Es divisible entre 5
160			
88			
5			
313			

2. Encuentre un número que sea simultáneamente divisible entre 2, 3, y 11. ___________________.

Reglas de Divisibilidad.

Criterio de divisibilidad por 2:

Los números divisibles entre dos son aquellos cuyo último dígito es par o termine en cero.

(Es decir 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, etc.).

Ejemplo.

62 es divisible entre 2 porque su último dígito es 2 que es par.

1. Complete la tabla.

Número	último dígito	Divisible entre 2
62	2	SI
70		
97		
45		
54		
103		

Criterio de divisibilidad por 3:

Los números divisibles entre tres son aquellos cuya suma de dígitos es también divisible entre tres. (Es decir 3, 6, 9, 12, 15, 18, etc.)

Ejemplo.

60 es divisible entre 3 porque la suma de sus dígitos (6 + 0) es divisible entre 3.

2. Complete la tabla.

Número	Suma de los dígitos	Divisible entre 3
60	6 + 0 = 6	SI
45		
90		
61		
14		
29		

Criterio de divisibilidad por 5:

Los números divisibles entre cinco son aquellos cuyo último dígito es cero o cinco. (Es decir 5, 10, 15, 20, 25, etc.)

Ejemplo.

50 es divisible entre 5 porque su último dígito es 0.

3. Complete la tabla.

Número	último dígito	Divisible entre 5
50	0	SI
63		
20		
1005		
326		
490		

Ejercicios:

1. Realice la división y responda la tabla con los resultados.

Dividendo	Divisor	Cociente	Residuo
963	3		
84	12		
	23	7	2
	69	2	7
54	7		

2. ¿Cuál es el resto de dividir 1342 entre 2? _______________.

3. Conteste SÍ o NO, después de realizar la división.

Número	Es divisible entre 2	Es divisible entre 3	Es divisible entre 5
330			
77			
450			
36			

4. La suma de los dos dígitos es doce y el número no es par (no es divisible entre 2). El número es mayor que 40. El número es uno entre los que siguen: 12, 49, 39, 85,22, 88, 46, 75, 48. ¿Quién es el número? ___________.

5. Agregar el último dígito (en el cuadrito) para que el número sea divisible entre…

Número	Divisible entre
62 ☐	3
62 ☐	2
62 ☐	5
62 ☐	10

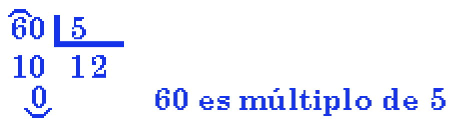
Número	Divisible entre
551 ☐	3 Y 5
10 ☐	2 Y 3
291 ☐	5 Y 2
526 ☐	10

Actividad N° 2: Múltiplos y Divisores.

Objetivo: Identificar y encontrar múltiplos y divisores de un conjunto de números.

Definición.

Un número *a* es múltiplo de otro número *b*, cuando existe un entero *c* tal que $a = b \cdot c$, en otras palabras, cuando la división de *a* entre *b* es exacta.

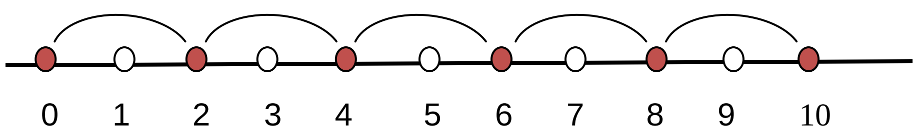


Los múltiplos de un número se obtienen de multiplicar dicho número con cada uno de los números naturales, 0, 1, 2, 3, 4, 5,….

Son múltiplos del dos el 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 y muchos más; los múltiplos son infinitos, como son infinitos los números naturales.

Ejemplo.

“Brinque” de dos en dos, saliendo del cero, y rodee con un circulo los números donde “cae”.



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

El conjunto de los que quedaron rodeados por un círculo forma parte de los números pares, también llamados los **Múltiplos de dos.**

1. Marque los múltiplos de dos.

40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59

a) ¿Existe algún número múltiplo de 2 cuyo último dígito sea siete? __________.

b) ¿Existe algún número múltiplo de 2 cuyo último dígito sea seis? ___________.

c) ¿El último dígito de un múltiplo de dos es siempre un número par? _________.

d) ¿El último dígito de un múltiplo de dos nunca es un número impar? _________.

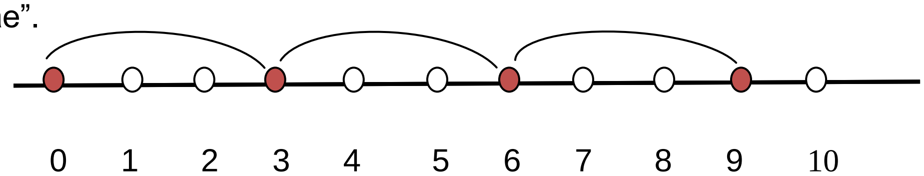
2. Dé un número múltiplo de dos que sea mayor que mil ______________.

3. Si usted sale de cero y da diez brincos de dos en dos ¿A qué número llega? ____

Si divide el número al que llego entre dos. ¿Qué cociente obtiene? ________.

¿Qué resto obtiene? __________.

“Brinque” de tres en tres, saliendo del cero, y rodee con un circulo los números donde “cae”.



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

El conjunto de los que quedaron rodeados por un círculo forma parte de los llamados **Múltiplos de tres.**

4. Marque los múltiplos de tres.

30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59

a) ¿Existe un múltiplo de tres que sea divisible entre dos? ___________.

b) ¿Existe un múltiplo de tres que sea divisible entre cinco? ___________.

c) ¿Cualquier múltiplo de tres es divisible entre tres? ___________.

d) ¿Cualquier múltiplo de tres es divisible entre cinco? ___________.

5. Dé un número múltiplo de tres que sea mayor que dos mil _______________.

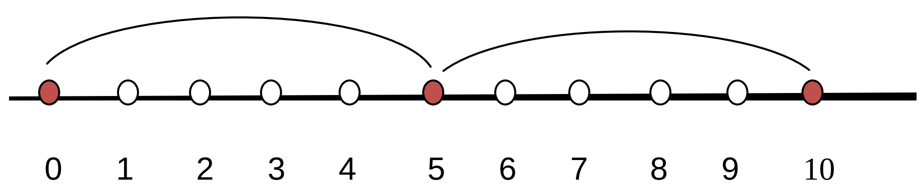
6. Si usted sale de cero y da diez brincos de tres en tres.

¿A qué número llega? _______.

Si divide el número al que llegó entre tres. ¿Qué cociente obtiene? _________.

¿Qué resto obtiene? ___________.

“Brinque” de cinco en cinco, saliendo del cero, y rodee con un circulo los números donde “cae”.



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

El conjunto de los que quedaron rodeados por un círculo forma parte de los llamados **Múltiplos de cinco.**

7. Marque los múltiplos de cinco.

60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89

e) ¿Existe algún múltiplo de cinco que no sea divisible entre cinco? __________.

f) ¿Existe algún número que sea divisible entre cinco que no sea múltiplo de cinco? __________.

g) ¿Cualquier múltiplo de cinco es divisible entre cinco? __________.

h) ¿Existe algún múltiplo de cinco que es divisible entre tres? __________.

8. Dé un número múltiplo de cinco que sea mayor que tres mil ______________.

9. Si usted sale de cero y da quince brincos de cinco en cinco.
¿A qué número llega? ______.
Si divide el número al que llegó entre cinco. ¿Qué cociente obtiene? ________.
¿Qué resto obtiene? __________.

10. Escriba un número mayor que treinta que no sea múltiplo de cinco ________.
Si divide el número al que llego entre cinco ¿Qué cociente obtiene? _________.
¿Qué resto obtiene? _________ ¿El resto es cero?_______.

Definición.

Un número *a* es divisor de otro número *b*, cuando la división de *b* entre *a* es exacta.

Conjunto de divisores de un número.

$$\begin{array}{l|l} 15 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 15 \end{array}$$

Al dividir un número cualquiera entre el número uno el resto es cero.

$$\begin{array}{l|l} 15 & 15 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array}$$

Al dividir un número cualquiera entre él mismo, el resto es cero.

Un número cualquiera es siempre divisible entre el 1 y el mismo. Aparte de estos dos números puede ser divisible por otros.
Los números que dividen un número *n*, se suelen llamar divisores de *n*.

Ejemplo.

Número	**Divisores**
15	1, 3, 5, 15
35	1, 5, 7, 35

1. Realice la división y responda la tabla con los resultados.

Número	Divisores
15	1, 3, 5, 15
23	
12	
49	
66	

Número	Divisores
39	
41	
31	
84	
32	

Ejercicios:

1. Escoja un número múltiplo de tres que sea mayor que cincuenta y uno ______.
   ¿Cuál es el resto al dividir entre tres? _____________.

2. Escriba un número mayor que ochenta que *no sea* múltiplo de tres ________.
   Si divide el número al que llego entre tres ¿Qué cociente obtiene? _________.
   ¿Qué resto obtiene? __________ ¿El resto es cero? __________.

3. Realice la división y responda la tabla con los resultados

Número	Divisores
22	
17	
25	
29	
30	

Número	Divisores
40	
86	
64	
87	
45	

4. ¿220 es múltiplo de 22? _________.
   ¿220 y 110 son múltiplos de 22? ____ ¿220 y 110 son múltiplos de 10? ____.
   ¿Hay un número menor que 110 que sea múltiplo de 22 y de 10? __________.

5. Dé un número mayor que 80 que sea múltiplo de 2 y 3. _________.
   ¿Es múltiplo de 6? _________.

6. M es múltiplo de 10 y N es múltiplo de 3. ¿Será M·N múltiplo de 30? _______.

Actividad N° 3: Los Números Primos.

Objetivo: Reconocer los números primos y los números compuestos de un conjunto de números.

Definición.

Los números primos son aquellos números naturales mayores que 1, cuyo conjunto de divisores está formado solo por el 1 y él mismo.
Ejemplo. El 11 es primo porque el conjunto de divisores está formado por el 1 y el 11.

Algunos números primos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,….
El único número par primo es el 2. Todos los demás números primos son impares, aunque no todos los números impares son primos.
Ejemplo. 9, 15, 21, 25, 45, 63,... no son números primos.

Definición.

Los números compuestos son aquellos divisibles por el 1 y él mismo, además lo es por otro factor. Tienen más de dos divisores.

Euclides propuso en su obra *Los Elementos* una propiedad muy importante, “Todo número compuesto puede ser expresado como el producto de números primos en exactamente una forma, sin importar el orden de los factores”.

El número 1 no es primo y tampoco es compuesto.

Eratóstenes
276 A.C - 94 A.C

Dos o más números son primos entre sí o coprimos, si son divisibles solamente por la unidad (es decir el único factor común es 1), aunque pueden ser divisibles por otros números diferentes de uno.

Para encontrar una lista de los números primos se puede utilizar el método de la **Criba de Eratóstenes**.

Siguiendo los pasos que a continuación se presentan:

1. Construya la criba de Eratóstenes, utilizando cartulina blanca para la tabla de números del 1 al 100 (20x20cm) y cartulinas de colores amarillo, rojo, vede y morado, para cuadrados que marcan los múltiplos (2x2cm), como muestra la figura a continuación.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

a) Marque los **Múltiplos de dos:** todos los números que son divisibles entre 2, utilizando los cuadrados color amarillo.

b) Marque los **Múltiplos de tres:** todos los números que son divisibles entre 3, utilizando los cuadrados color rojo.

c) Marque los **Múltiplos de cinco:** todos los números que son divisibles entre 5, utilizando los cuadrados color verde.

d) Marque los **Múltiplos de siete:** todos los números que son divisibles entre 7, utilizando los cuadrados color morado.

Los números naturales restantes son los **Números Primos menores que 100.**

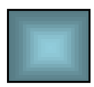
Ejercicios:

1. Construya 10 cuadrados de (4x4 cm) en cartulina del color de su preferencia, cada cuadrado representa una unidad, es decir, que el número uno se representará por un cuadrado, el dos por dos cuadrados, el tres por tres cuadrados, con base en lo anterior se define el número compuesto y el número primo de la siguiente manera:

Un número es compuesto si con los correspondientes cuadrados se puede armar un rectángulo que tenga dos o más filas y dos o más columnas, sin que sobren ni falten cuadrados. Si un número no es compuesto se dice que es un número primo.

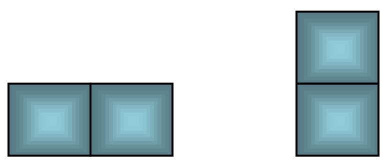
Ejemplo.

El número uno



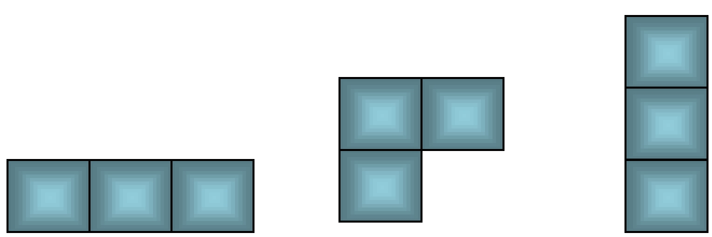
No cumple con la definición de número compuesto, ya que no es posible armar un rectángulo que tenga dos o más filas y dos o más columnas, de hecho con un solo cuadrado no se pueden armar nada.

El número dos

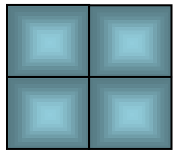


No cumple la definición de número compuesto, solamente se puede armar un rectángulo con dos columnas y una fila (si se colocan los dos cuadrados en sentido horizontal), o un rectángulo con dos filas y una columna (si se colocan los dos cuadrados en forma vertical). Entonces es un número primo.

El número tres



Es un número primo, ya que como puede observarse es posible solamente armar un rectángulo de 1x3 horizontal o vertical y no es posible armar más rectángulos, por lo tanto no cumple la definición de número compuesto.

El número 4. 

Es el primer número compuesto, ya que entre los rectángulos que se pueden armar hay uno que tiene dos filas y dos columnas (un cuadrado).
Así sucesivamente hasta el número diez.

a) verificar los números del 1 hasta 10 para determinar cuáles son compuestos y cuáles son primos, de acuerdo con la definición dada.

2. De acuerdo con el ejercicio anterior:
   Escriba los números menores de 10 que no son primos ________________.
   Escriba los números menores de 10 que son primos ________________.

3. Construya con ayuda del ejercicio 1 los números: 23, 15, 26, 19 y diga cuales son primos.

4. ¿El número 563 es un número primo?________.
   ¿Por qué? ____.

5. ¿El 2037 es compuesto?_______________. ¿El 2333 es primo?_____________.

6. Escriba los números primos menores de 50 ____________________________.

Actividad N° 4: Descomposición de un Número en Factores Primos.

Objetivo: Descomponer en factores primos un conjunto de números naturales.

Los números compuestos, se pueden expresar como potencias de números primos, a dicha expresión se le llama **Descomposición de un Número en Factores Primos**. La descomposición de un número es muy útil pues ayuda a calcular el mínimo común múltiplo (mcm) y el máximo común divisor (MCD) de varios números naturales.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

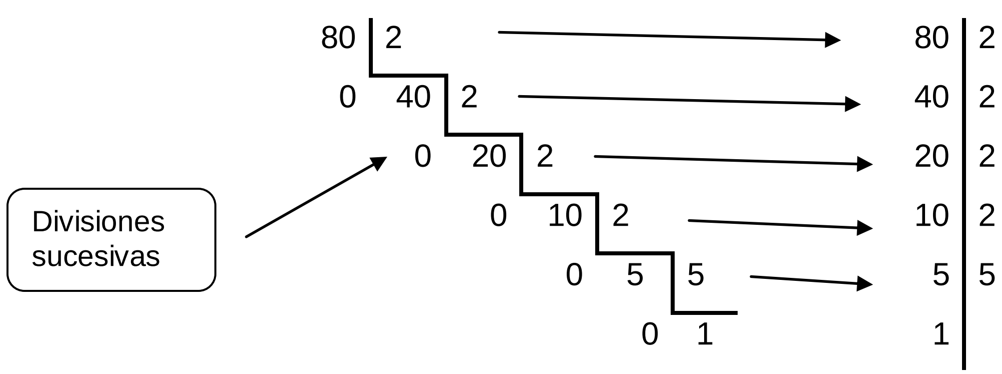
$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

La expresión **Factores Primos** significa que son números primos que se multiplican para formar un producto.

Como Descomponer un Número.

Dividir siempre entre primos que dividen al número y comenzar haciéndolo por los menores posibles. También, al descomponer puede considerarse como unas divisiones sucesivas.

Ejemplo.



	Descomposición desordenada	Descomposición ordenada	Número
$\begin{array}{r\|l} 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$	2·2·2·2·5	$2^4 \cdot 5$	80

Ejercicios.

1. Realice la descomposición y llene la tabla con la información solicitada.

		Descomposición desordenada	Descomposición ordenada	Número
				144

		Descomposición desordenada	Descomposición ordenada	Número
				64

		Descomposición desordenada	Descomposición ordenada	Número
				33

		Descomposición desordenada	Descomposición ordenada	Número
				1008

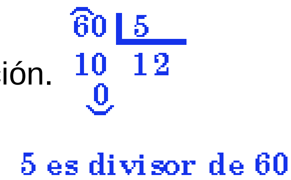
Después de finalizar los ejercicios anteriores, se verifica los resultados con ayuda de la tabla I (ver página 49).

Actividad N° 5: Divisores y Múltiplos de una Descomposición.

Objetivo: Identificar los conjuntos de divisores y múltiplos de una descomposición.

Conjunto de Divisores de una Descomposición.

Una parte de una descomposición es un divisor de esa descomposición.



Su complemento es el cociente que corresponde a la división del número entre el divisor.

El uno también es divisor de una descomposición, el cociente es también un divisor de la descomposición.

Ejemplo.

Número	**Descomposición**	**Conjunto de divisores**
12	$2^2 \cdot 3$	$1, 2^1, 2^2, 3^1, 2^1 \cdot 3^1, 2^2 \cdot 3^1$ $= 1, 2, 4, 3, 6, 12$ $= 1, 2, 3, 4, 6, 12$

1. Realice la descomposición y halle todos los divisores posibles, utilizando la tabla I

Número	Descomposición	Conjunto de divisores
	$3 \cdot 5^2$	

Número	Descomposición	Conjunto de divisores
	$2^3 \cdot 5$	

Número	Descomposición	Conjunto de divisores
81		

Teniendo la descomposición ordenada de un número es fácil reconocer por quién el número es divisible. También es fácil obtener el cociente al dividirlo por un divisor de él. Ejemplo.

Número	**Descomposición ordenada**	**Divisores**		**Cociente**
360	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	1	1	360
		2	2	180
		2^2	4	90
		2^3	8	$45 = 3^2 \cdot 5$
		3	3	120
		3^2	9	$40 = 2^3 \cdot 5$
		5	5	$72 = 2^3 \cdot 3^2$
		$2 \cdot 3 \cdot 5$	30	$12 = 2^2 \cdot 3$
		$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	60	6
		$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	120	3
		$2 \cdot 3$	6	$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
		$2^2 \cdot 3$	12	30
		$2^3 \cdot 3$	24	$15 = 3 \cdot 5$
		$2 \cdot 3^2 \cdot 5$	90	4
		$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$	180	2
		$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	360	1
		$2 \cdot 3^2$	18	20
		$2^2 \cdot 3^2$	36	10
		$2^3 \cdot 3^2$	72	5
		$2 \cdot 5$	10	36
		$2^2 \cdot 5$	20	$18 = 2 \cdot 3^2$
		$2^3 \cdot 5$	40	9
		$3 \cdot 5$	15	24
		$3^2 \cdot 5$	45	8

2. Halle todos los divisores y cocientes posibles, utilizando la tabla I.

Número	Descomposición ordenada	Divisores		Cociente
45				

Conjunto de Múltiplos de una Descomposición

Los múltiplos de un número se obtienen multiplicando dicho número por los números naturales 0, 1, 2, 3, 4, 5….
Por ejemplo: el 75 es múltiplo de 15. El cociente de 75 entre 15 es 5.

Ejemplo.

Número	**Descomposición**	**Algunos múltiplos**
12	$2^2 \cdot 3$	0, $2^2 \cdot 3$, $2^3 \cdot 3$, $2^3 \cdot 3^2$, $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, etc. = 0,12, 24, 72, 360, 504

1. Realice la descomposición y escriba algunos múltiplos.

Número	Descomposición	Algunos múltiplos
	2^3	

Número	Descomposición	Algunos múltiplos
	5^2	

Número	Descomposición	Algunos múltiplos
16		

Número	Descomposición	Algunos múltiplos
23		

Ejercicios.

1. Realice la descomposición y complete la tabla con la información solicitada, utilizando la tabla I.

Número	Descomposición ordenada	Divisores	Cociente
360	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	$8 = 2^3$	$45 = 3^2 \cdot 5$
40			
65			
57			
6			

Número	Descomposición ordenada	Divisores		Cociente
49				
36				
115				
81				
64				

Número	Descomposición ordenada	Divisores		Cociente
	$3^2 \cdot 5$			
	$2 \cdot 3 \cdot 5$			
	$2 \cdot 3^2$			
	$2^3 \cdot 11$			
	$5^2 \cdot 7$			

2. Halle todos los divisores y cocientes posibles, utilizando la tabla I.

<table>
<tr><th>Número</th><th>Descomposición ordenada</th><th colspan="2">Divisores</th><th>Cociente</th></tr>
<tr><td rowspan="5">63</td><td rowspan="5"></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Actividad N° 6: Mínimo Común Múltiplo y Máximo Común Divisor.

Objetivo: Encontrar el máximo común divisor (MCD) y el mínimo común múltiplo (mcm) de un conjunto de números naturales.

Mínimo Común Múltiplo (mcm).

¿Cómo hallar el mcm?

Entre dos o más números naturales:

1. Se halla la descomposición en factores primos de los números.
2. Se toman los factores comunes y no comunes con su mayor exponente, y se multiplican.

Ejemplo.

Números	**Descomposición Ordenada**	**Divisores primos**	**mcm: Producto de divisores primos, elevados al mayor exponente**
15	$3 \cdot 5$	2,3,5	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$
18	$2 \cdot 3^2$		
24	$2^3 \cdot 3$		

1. Calcule el mcm y complete la tabla, utilizando la tabla I.

Números	Descomposición Ordenada	Divisores primos	mcm
35			
49			

Propiedades.

El mínimo común múltiplo (mcm) de dos o más números es el menor de sus múltiplos comunes distinto de cero.

Ejemplo.

Números	**Múltiplos**	**mcm**
2	0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,…	12
4	0, 4, 8, 12, 16, 20,…	
6	0, 6, 12, 18, 24,…	

2. Calcule el mcm, utilizando la propiedad anterior.

Números	Múltiplos	mcm
5		
9		

Si a, b son números naturales y primos entre sí, se verifica que mcm (a, b) = a · b.

Ejemplo.

Números	**Divisores**	**Primo entre sí**	**mcm**
8	1, 2, 4, 8	SI	8·15 = 120
15	1, 3, 5, 15		

3. Calcule el mcm, utilizando la propiedad anterior.

Números	Divisores	Primo entre sí	mcm
11			
21			

Para hallar el mcm (a, b) podemos utilizar, además de los métodos ya vistos, la siguiente fórmula descrita por Euclides:

[MCD (a, b)] · [mcm (a, b)] = a · b de donde podemos despejar mcm (a, b) una vez conozcamos MCD (a, b).

Máximo Común Divisor (MCD).

¿Cómo hallar el MCD?

Entre dos o más números naturales:

1. Se halla la descomposición en factores primos de los números.
2. Se toman los factores comunes con el menor exponente, y se multiplican.

Ejemplo.

Números	**Descomposición ordenada**	**Factores Comunes**	**MCD**
15	$3 \cdot 5$	3	3
18	$2 \cdot 3^2$		
24	$2^3 \cdot 3$		

1. Calcule el MCD y complete la tabla, utilizando la tabla I.

Números	Descomposición ordenada	Factores Comunes	MCD
12			
29			

Propiedades.

El máximo común divisor de un conjunto debe dividir a todos los números del conjunto. Además, entre todos los divisores comunes es el mayor.

Ejemplo.

Números	**Divisores**	**Divisores comunes**	**MCD**
15	1, 3, 5, 15	1 y 3	3
18	1, 2, 3, 6, 9, 18		
24	1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24		

2. Calcule el MCD, utilizando la propiedad anterior.

Números	Divisores	Divisores comunes	MCD
21			
43			

Si MCD (a, b) = 1 se dice que los números a y b son primos entre sí.

Ejemplo.

Números	**Divisores**	**Primo entre sí**	**MCD**
12	1, 2, 3, 4, 6, 12	SI	1
25	1, 5, 25		

3. Calcule el MCD, utilizando la propiedad anterior.

Números	Divisores	Primo entre sí	MCD
14			
49			

Números	Divisores	Primo entre sí	MCD
3			
34			

Para hallar el MCD (a, b) podemos utilizar el método llamado *Algoritmo de Euclides* o de las divisiones sucesivas, este método se define así:

Dividiremos el mayor número entre el menor número.

Si el resto es cero, el MCD es el menor número.

Si el resto no es cero, se divide el menor número por dicho resto, a continuación este resto por el segundo, y así sucesivamente hasta llegar a una división exacta. El último divisor empleado es el MCD de a y b.

Ejercicio.

1. Realice la descomposición, calcule el mcm y complete la tabla.

Números	Descomposición ordenada	Divisores primos	mcm
77			
43			
36			

2. Realice la descomposición, calcule el MCD y complete la tabla.

Números	Divisores	Divisores comunes	MCD
22			
90			
33			

3. Se sabe que el mcm de tres números naturales *a*, *b* y *c* es 84. Por otro lado, se sabe que *a* es uno de los siguientes números: 15, 17, 5, 4, 10, 8.
   ¿Quién es *a*? ____________________.

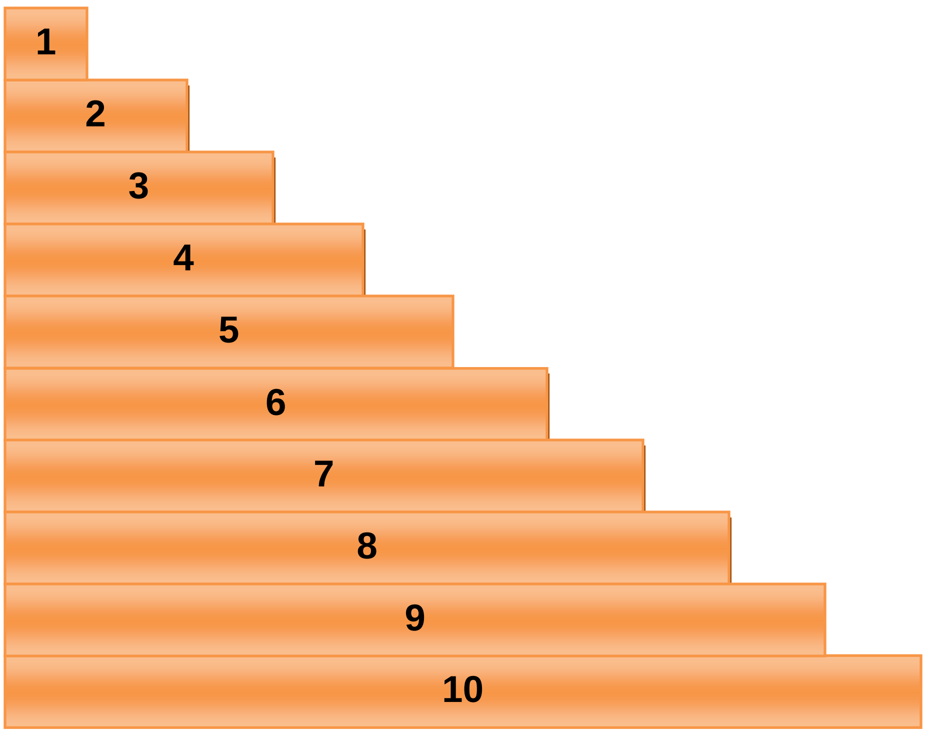
4. ¿Cuál es el mcm de 52 y 33? ______________.

5. El MCD de dos números naturales *a* y *b* es 15. Se sabe que *a* es uno de los números 35, 47, 75, 65, 55. ¿Quién es *a*? ______________.

6. ¿Cuál es el MCD de 27 y 15? ______________.

7. Construya una serie de rectángulos en cartulina del color de su preferencia, cada uno de los cuales tiene una altura fija y la longitud o base es proporcional al número que se quiera representar, así:

El número tres se representa por un rectángulo de 3 unidades de longitud, el número cuatro se representan por un rectángulo de 4 unidades de longitud y así sucesivamente. Vea la siguiente ilustración.

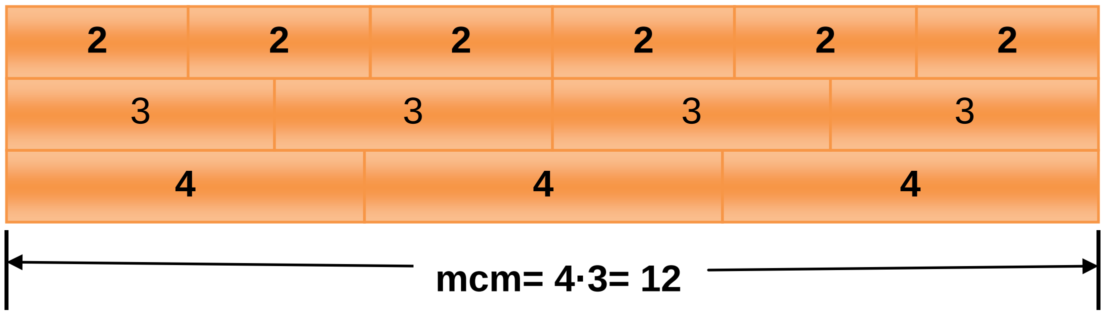


Con este material se puede realizar un proceso manual que conduce a la determinación del mínimo común múltiplo de varios números, el cual se ilustra con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Hallar el mínimo común múltiplo de 2, 3 y 4.

Solución.

Se debe tratar de armar un rectángulo, utilizando tantas veces los rectángulos correspondientes a cada número, como sea necesario. Ver la siguiente ilustración.

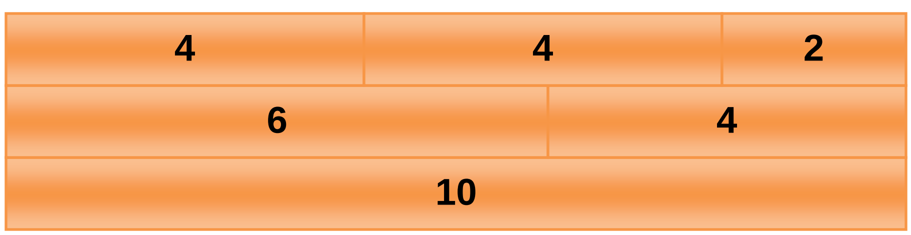


Una vez que se logre armar dicho rectángulo, el mínimo común múltiplo (mcm) de los números dados es igual a la longitud de la base del rectángulo armado, en este caso mcm (2, 3, 4) = 4·3 = 12

Ejemplo 2: Hallar el máximo común divisor de 4, 6 y 10

Solución

Se debe armar un rectángulo de base 10, como se muestra en la ilustración.



El MCD (4, 6, 10) = 2, que es el menor de los rectángulos utilizados.

a) Hallar el mcm de 2, 3, 9.

b) Hallar el mcm de 3, 5, 7.

8. Se tiene que el mcm de *a*, *b*, *c* es 90 y el MCD es 3. El número a es uno de los siguientes números: 5, 10, 27, 12, 6, 20. ¿Quién es *a*? _______________.

A continuación se explica con unos ejemplos como utilizar las tablas II y III (ver páginas 50 y 52), para verificar los resultados de los ejercicios anteriormente planteados y en adelante el uso de ella.

Ejemplo 1. ¿Cuál es el mcm de 12 y 9?

Solución.

Paso 1. Se descomponen los dos números naturales en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$12 = 2^2 \cdot 3 \qquad \qquad 9 = 3^2$$

Paso 2. Se aplica la definición del mínimo común múltiplo de dos números.

$$\text{mcm } (12, 9) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$$

Paso 3. Se verifica el resultado, ubicando los dos números en la tabla II. Como lo muestra la ilustración.

n/n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	2	6	4	10	6	14	8	18	10
3	3	6	3	12	15	6	21	24	9	30
4	4	4	12	4	20	12	28	8	36	20
5	5	10	15	20	5	30	35	40	45	10
6	6	6	6	12	30	6	42	24	18	30
7	7	14	21	28	35	42	7	56	63	70
8	8	8	24	8	40	24	56	8	72	40
9	9	18	9	36	45	18	63	72	9	90
10	10	10	30	20	10	30	70	40	90	10
11	11	22	33	44	55	66	77	88	[illegible]	110
12	12	12	12	12	60	12	84	24	36	60
13	13	26	39	52	65	78	91	104	[illegible]	130
14	14	14	42	28	70	42	14	56	126	70
15	15	30	15	60	15	30	105	120	45	30

Ejemplo 2. ¿Cuál es el MCD de 12 y 9?

Solución.

Paso 1. Se descomponen los dos números naturales en factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \\ 12= & 2^2\cdot 3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \\ 9= & 3^2 \end{array}$$

Paso 2. Se aplica la definición del máximo común divisor de dos números.

$$\text{MCD } (12, 9) = 3$$

Paso 3. Se verifica el resultado, ubicando los dos números en la tabla III. Como lo muestra la ilustración.

n/n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1
4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2
5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5
6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2
7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1
8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2
9	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1
10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10
11	1	1	1	1	1	1	1	1		1
12	1	2	3	4	1	6	1	4	3	2
13	1	1	1	1	1	1	1	1		1
14	1	2	1	2	1	2	7	2	1	2
15	1	1	3	1	5	3	1	1	3	5

Actividad N° 7: Resolución de Problemas.

Objetivo: Utilizar el mínimo común múltiplo (mcm) y el máximo común divisor (MCD) en la resolución de problemas.

En algunos problemas existen palabras claves que ayudarán a detectar si el problema a resolver es de mínimo común múltiplo (mcm) o de máximo común divisor (MCD).

Para el mcm son las siguientes: coincidir, encontrar, mínimo, transcurrirá, al mismo tiempo, menos, menor,… y para el MCD son: del mayor, lo mas grande,…

Ejemplos.

1. Un carpintero quiere cortar una plancha de madera de 45 cm de largo y 21 cm de ancho, en cuadrados iguales lo más grandes posible. ¿Cuál debe ser la longitud del lado de cada cuadrado? ¿Cuántos cuadrados se obtienen de la plancha de madera?

Solución:

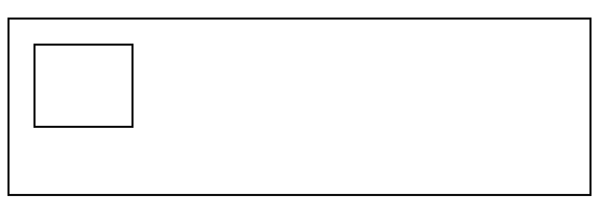
Paso 1. Comprender el problema.

Se lee el problema despacio, se trata de encontrar relación entre los datos y las incógnitas y si se puede se realiza un esquema o dibujo de la situación.

La plancha de madera tiene forma rectangular y de ella se quieren cortar cuadrados como se muestra en el dibujo.

45 cm

21 cm



Paso 2. Concebir un plan.

Se planifican las acciones que llevarán a la solución, tales como: plantearse para qué sirven los datos, que puede calcularse a partir de ellos y que operación utilizar.

La longitud del lado del cuadrado tiene que ser un divisor de 45 y de 21, además debe ser el mayor divisor común; hay que calcular el MCD (45, 21), luego se calculan las áreas de la plancha de madera y del cuadrado, y por último la división de ellas dará la cantidad de cuadrados de la plancha de madera.

Paso 3. Ejecutar el plan.

Al ejecutar el plan, se acompaña cada operación matemática de una explicación contando lo que se hace y para qué se hace.

Se descomponen en factores primos y se calcula el MCD, para obtener la longitud del lado del cuadrado.

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \\ & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \\ & \\ & \end{array}$$

$$45 = 3^2 \cdot 5 \qquad\qquad 36 = 3 \cdot 7$$

$$\text{MCD}\,(45{,}21) = 3$$

La longitud del lado del cuadrado es de 3 cm.

Se calcula el área de la plancha de madera que es igual al área del rectángulo, también se calcula el área del cuadrado, luego se dividen los resultados para obtener la cantidad de cuadrados.

$$\text{Área del rectángulo} = \text{base} \cdot \text{altura} = 45 \cdot 21 = 945\ \text{cm}^2$$

$$\text{Área del cuadrado} = 3 \cdot 3 = 9\ \text{cm}^2$$

$$945 / 3 = 315$$

De la plancha de madera se obtienen 315 cuadrados

Paso 4. Revisión del plan.

Se lee de nuevo el enunciado, se comprueba si que lo que se pedía es lo que se ha averiguado y se verifica el resultado en la tabla adecuada.

Se verifica el resultado, ubicando los dos números en la tabla III. Como lo muestra la ilustración.

n/n	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
34	1	2	1	2	17	2	1	2	1	2
35	1	7	5	1	1	1	1	2	7	2
36	1	2	3	4	1	18	1	1	3	1
37	1	1	1	1	1	1	1	4	1	2
38	1	2	1	2	1	2	19	1	1	5
39	13	1	3	1	1	3	1	2	3	2
40	1	2	5	8	1	2	1	20	1	1
41	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
42	1	14	3	2	1	6	1	2	21	2
43	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
44	1	2	1	4	1	2	1	1	[illegible]	22
45	1	1	15	1	1	9	1	5	3	1
46	1	2	1	2	1	2	1	1	[illegible]	2
47	1	1	1	1	1	1	1	2	1	1
48	1	2	3	16	1	6	1	1	3	2

2. Dos viajeros van a la isla de Margarita, uno cada 18 días y otro cada 15 días. Hoy día 10 de enero han coincidido en Margarita los dos viajeros.

¿Dentro de cuántos días como mínimo volverán a coincidir en Margarita?

Solución:

Paso 1. Comprender el problema.

Se lee el problema despacio, se trata de encontrar relación entre los datos y las incógnitas y si se puede se realiza un esquema o dibujo de la situación.

Los datos son 18 días para un viajero y 15 días para otro.

Paso 2. Concebir un plan.

Se planifican las acciones que llevarán a la solución, tales como: plantearse para qué sirven los datos, que puede calcularse a partir de ellos y que operación utilizar.

El número de días que han de transcurrir como mínimo para que los dos viajeros vuelvan a coincidir en Margarita tiene que ser un múltiplo de 18 y de 15, además tiene que ser el menor múltiplo común; luego hay que calcular el mcm (18,15) el cual dará los días en que volverán a coincidir.

Paso 3. Ejecutar el plan.

Al ejecutar el plan, se acompaña cada operación matemática de una explicación contando lo que se hace y para qué se hace.

Se descomponen en factores primos y se calcula el mcm, para obtener los días en que coincidan en Margarita.

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$18 = 2 \cdot 3^2 \qquad 15 = 3 \cdot 5$$

$$\text{mcm}\,(18,15) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90$$

Los dos viajeros volverán a coincidir en Margarita dentro de 90 días

Paso 4. Revisión del plan.

Se lee de nuevo el enunciado, se comprueba si que lo que se pedía es lo que se ha averiguado y se verifica el resultado en la tabla adecuada.

Se verifica el resultado, ubicando los dos números en la tabla II. Como lo muestra la ilustración.

n/n	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
7	7	56	63	70	77	84	91	14	105	112
8	56	2	6	4	10	6	14	8	120	10
9	63	6	3	12	15	6	21	24	45	30
10	70	4	12	4	20	12	28	8	30	20
11	77	10	15	20	5	30	35	40	165	10
12	84	6	6	12	30	6	42	24	60	30
13	91	14	21	28	35	42	7	56	195	70
14	14	8	24	8	40	24	56	8	210	40
15	105	18	9	36	45	18	63	72	15	90
16	112	10	30	20	10	30	70	40	240	10
17	119	22	33	44	55	66	77	88	[illegible]	110
18	126	72	18	90	198	36	234	126	90	144
19	133	26	39	52	65	78	91	104	[illegible]	130
20	140	14	42	28	70	42	14	56	60	70
21	21	30	15	60	15	30	105	120	105	30

.

Problemas.

1. En una fabrica existen tres turnos de entrada en el que suenan tres sirenas al mismo tiempo, luego de pasadas 3 horas suena una para indicar la salida del primer turno, la segunda suena a las 5 horas para indicar la salida del segundo turno y una última transcurridas 9 horas para indicar la salida del tercer turno. ¿Cuál es el menor número de horas que deban transcurrir para que vuelva a coincidir la entrada de los tres turnos?

R. 45 horas

2. Freddy está realizando un experimento de biología con ratones, según el diseño del mismo tiene tres grupos, al primero debe alimentarlo cada 3 horas al segundo cada 4 horas y al tercero cada 9 horas. El primer día que inicio el trabajo alimento a los tres grupos a la misma hora. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que alimente simultáneamente a los tres?

R. 36 horas

3. Una cocinera hizo entre 250 y 300 tequeños para una recepción, Si acomodándolos de a 4, 6 o 7 tequeños en cada plato, siempre le sobran 3 tequeños. ¿Cuántas tequeños hizo la cocinera?

R. 255 tequeños

4. Un coche necesita que le cambien el aceite cada 9.000 km, el filtro del aire cada 15.000 km y las bujías cada 30.000 km. ¿A qué número mínimo de kilómetros habrá que hacerle todos los cambios a la vez?

R. 90.000 Km

5. Un comerciante desea poner en cajas 12.028 manzanas y 12.772 naranjas de modo que cada caja contenga el mismo número de manzanas o de naranjas y además el mayor número posible de ellas. Hallar el número de naranjas y de manzanas de cada caja.

R. 124 naranjas y manzanas

6. Una cadena televisiva trasmitió un día lunes tres programas, un cómico, uno de opinión y una novela. El programa cómico se transmitirá cada 120 horas, el programa de opinión cada 24 horas y la novela cada 48 horas. ¿Cuántas horas pasaran hasta que coincida nuevamente la transmisión de los tres programas en un mismo día?

R. 240 horas

7. Lucía tiene una colección de sellos que puede agrupar de 4 en 4, de 3 en 3 y de 5 en 5; en ningún caso le sobra o le falta alguno. ¿Cuál es el menor número de sellos que tiene Lucía?

R. 60 sellos

8. Marjorie y Jacques tienen 25 bolas blancas, 15 bolas azules y 90 bolas rojas, quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna bola. ¿Cuántos collares iguales pueden hacer? ¿Qué número de bolas de cada color tendrá cada collar?

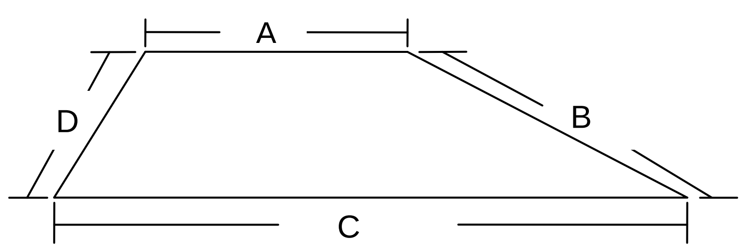
R. 5 collares y 5 blancas, 3 azules, 18 rojas

9. Mi abuela desea plantar 72 violetas, 24 margaritas, 36 girasoles y 48 rosas, en el patio de su casa en el menor número de macetas grandes que contengan el mismo número de plantas sin mezclarlas. ¿Cuántas plantas hay en cada maceta grande? y ¿Cuántas macetas grandes utiliza?

R. 12 plantas y 15 macetas

10. Se necesita cercar con alambre un terreno de forma trapezoidal, procurando que los postes se coloquen a igual distancia y que en cada esquina se encuentre uno. ¿Cuál es la máxima distancia en que pueden colocarse? ¿Cuántos postes se necesitan?

A = 104 m
B = 320 m
C = 396 m
D = 84 m



R. 4 metros y 230 postes

Bibliografía.

Alson, P. (2004). **Números naturales.** Caracas**.** Editorial ERRO**.**

Babini, J. y Rey Pastor, J. (1986). **Historia de la matemática: (I) De la antigüedad a la baja edad media. (II) Del renacimiento a la actualidad.** España. Editorial Gedisa**.**

Diccionario Word Reference. (2011). [Pagina Web en Línea]. Disponible: http://www.wordreference.com [Consulta: 2011, Marzo 23]

Echenique, I. (2006). **Resolución de problemas matemáticos en educación primaria.** Pamplona. Gobierno de Navarra.

Enciclopedia libre. (2011). [Pagina Web en Línea]. Disponible: http://es.wikipedia.org [Consulta: 2011, Marzo 23]

Flores, D. (2002). **Elementos de la matemática. Guía teórico**-**práctico**. Caracas. Ediciones Escuela de Matemática.

López Rodríguez, F. (Dir.). (2002). **La resolución de problemas en matemáticas. Teoría y experiencias.** Barcelona. Grao.

Polya, G. (1982). **Cómo plantear y resolver problemas**. México. Trillas.

Segarra, L. (1999). **Juegos y matemáticas**. Aula de Innovación Educativa. N.78, pp. 25-28.

Suárez, E. y Durán, D. (2002). **Matemática 7**. Caracas. Santillana.

Anexos.

Tabla I. Descomposición de los Números en Factores Primos.

Números	Factores	Primo	Números	Factores	Primo
1	1	NO	51	$3 \cdot 17$	NO
2	2	SI	52	$2^4 \cdot 13$	NO
3	3	SI	53	53	SI
4	2^2	NO	54	$2 \cdot 3^3$	NO
5	5	SI	55	$5 \cdot 11$	NO
6	$2 \cdot 3$	NO	56	$2^3 \cdot 7$	NO
7	7	SI	57	$3 \cdot 19$	NO
8	2^3	NO	58	$2 \cdot 29$	NO
9	3^2	NO	59	59	SI
10	$2 \cdot 5$	NO	60	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	NO
11	11	SI	61	61	SI
12	$2^2 \cdot 3$	NO	62	$2 \cdot 31$	NO
13	13	SI	63	$3^2 \cdot 7$	NO
14	$2 \cdot 7$	NO	64	2^6	NO
15	$3 \cdot 5$	NO	65	$5 \cdot 13$	NO
16	2^4	NO	66	$2 \cdot 3 \cdot 11$	NO
17	17	SI	67	67	SI
18	$2 \cdot 3^2$	NO	68	$2^2 \cdot 17$	NO
19	19	SI	69	$3 \cdot 23$	NO
20	$2^2 \cdot 5$	NO	70	$2 \cdot 5 \cdot 7$	NO
21	$3 \cdot 7$	NO	71	71	SI
22	$2 \cdot 11$	NO	72	$2^3 \cdot 3^2$	NO
23	23	SI	73	73	SI
24	$2^3 \cdot 3$	NO	74	$2 \cdot 37$	NO
25	5^2	NO	75	$3 \cdot 5^2$	NO
26	$2 \cdot 13$	NO	76	$2^2 \cdot 19$	NO
27	3^3	NO	77	$7 \cdot 11$	NO
28	$2^2 \cdot 7$	NO	78	$2 \cdot 3 \cdot 13$	NO
29	29	SI	79	79	SI
30	$2 \cdot 3 \cdot 5$	NO	80	$2^4 \cdot 5$	NO
31	31	SI	81	3^4	NO
32	2^5	NO	82	$2 \cdot 41$	NO
33	$3 \cdot 11$	NO	83	83	SI
34	$2 \cdot 17$	NO	84	$2^2 \cdot 3 \cdot 7$	NO
35	$5 \cdot 7$	NO	85	$5 \cdot 17$	NO
36	$2^2 \cdot 3^2$	NO	86	$2 \cdot 43$	NO
37	37	SI	87	$3 \cdot 29$	NO
38	$2 \cdot 19$	NO	88	$2^3 \cdot 11$	NO
39	$3 \cdot 13$	NO	89	89	SI
40	$2^3 \cdot 5$	NO	90	$2 \cdot 3^2 \cdot 5$	NO
41	41	SI	91	$7 \cdot 13$	NO
42	$2 \cdot 3 \cdot 7$	NO	92	$2^2 \cdot 23$	NO
43	43	SI	93	$3 \cdot 31$	NO
44	$2^2 \cdot 11$	NO	94	$2 \cdot 47$	NO
45	$3^2 \cdot 5$	NO	95	$5 \cdot 19$	NO
46	$2 \cdot 23$	NO	96	$2^5 \cdot 3$	NO
47	47	SI	97	97	SI
48	$2^4 \cdot 3$	NO	98	$2 \cdot 7^2$	NO
49	7^2	NO	99	$3^2 \cdot 11$	NO
50	$2 \cdot 5^2$	NO	100	$2^2 \cdot 5^2$	NO

Tabla II. Mínimo Común Múltiplos de dos Números Naturales (mcm).

n/n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
2	2	2	6	4	10	6	14	8	18	10	22	12	26	14	30	16	34	18	38	20	42	22	46	24	50
3	3	6	3	12	15	6	21	24	9	30	33	12	39	42	15	48	51	18	57	60	21	66	69	24	75
4	4	4	12	4	20	12	28	8	36	20	44	12	52	28	60	16	68	36	76	20	84	44	92	24	100
5	5	10	15	20	5	30	35	40	45	10	55	60	65	70	15	80	85	90	95	20	105	110	115	120	25
6	6	6	6	12	30	6	42	24	18	30	66	12	78	42	30	48	102	18	114	60	42	66	138	24	150
7	7	14	21	28	35	42	7	56	63	70	77	84	91	14	105	112	119	126	133	140	21	154	161	168	175
8	8	8	24	8	40	24	56	8	72	40	88	24	104	56	120	16	136	72	152	40	168	88	184	24	200
9	9	18	9	36	45	18	63	72	9	90	99	36	117	126	45	144	153	18	171	180	63	198	207	72	225
10	10	10	30	20	10	30	70	40	90	10	110	60	130	70	30	80	170	90	190	20	210	110	230	120	50
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	11	132	143	154	165	176	187	198	209	220	231	22	253	264	275
12	12	12	12	12	60	12	84	24	36	60	132	12	156	84	60	48	204	36	228	60	84	132	276	24	300
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	13	182	195	208	221	234	247	260	273	286	299	312	325
14	14	14	42	28	70	42	14	56	126	70	154	84	182	14	210	112	238	126	266	140	42	154	322	168	350
15	15	30	15	60	15	30	105	120	45	30	165	60	195	210	15	240	255	90	285	60	105	330	345	120	75
16	16	16	48	16	80	48	112	16	144	80	176	48	208	112	240	16	272	144	304	80	336	176	368	48	400
17	17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	17	306	323	340	357	374	391	408	425
18	18	18	18	36	90	18	126	72	18	90	198	36	234	126	90	144	306	18	342	180	126	198	414	72	450
19	19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	19	380	399	418	437	456	475
20	20	20	60	20	20	60	140	40	180	20	220	60	260	140	60	80	340	180	380	20	420	220	460	120	100
21	21	42	21	84	105	42	21	168	63	210	231	84	273	42	105	336	357	126	399	420	21	462	483	168	525
22	22	22	66	44	110	66	154	88	198	110	22	132	286	154	330	176	374	198	418	220	462	22	506	264	550
23	23	46	69	92	115	138	161	184	207	230	253	276	299	322	345	368	391	414	437	460	483	506	23	552	575
24	24	24	24	24	120	24	168	24	72	120	264	24	312	168	120	48	408	72	456	120	168	264	552	24	600
25	25	50	75	100	25	150	175	200	225	50	275	300	325	350	75	400	425	450	475	100	525	550	575	600	25
26	26	26	78	52	130	78	182	104	234	130	286	156	26	182	390	208	442	234	494	260	546	286	598	312	650
27	27	54	27	108	135	54	189	216	27	270	297	108	351	378	135	432	459	54	513	540	189	594	621	216	675
28	28	28	84	28	140	84	28	56	252	140	308	84	364	28	420	112	476	252	532	140	84	308	644	168	700
29	29	58	87	116	145	174	203	232	261	290	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580	609	638	667	696	725
30	30	30	30	60	30	30	210	120	90	30	330	60	390	210	30	240	510	90	570	60	210	330	690	120	150
31	31	62	93	124	155	186	217	248	279	310	341	372	403	434	465	496	527	558	589	620	651	682	713	744	775
32	32	32	96	32	160	96	224	32	288	160	352	96	416	224	480	32	544	288	608	160	672	352	736	96	800
33	33	66	33	132	165	66	231	264	99	330	33	132	429	462	165	528	561	198	627	660	231	66	759	264	825
34	34	34	102	68	170	102	238	136	306	170	374	204	442	238	510	272	34	306	646	340	714	374	782	408	850
35	35	70	105	140	35	210	35	280	315	70	385	420	455	70	105	560	595	630	665	140	105	770	805	840	175
36	36	36	36	36	180	36	252	72	36	180	396	36	468	252	180	144	612	36	684	180	252	396	828	72	900
37	37	74	111	148	185	222	259	296	333	370	407	444	481	518	555	592	629	666	703	740	777	814	851	888	925
38	38	38	114	76	190	114	266	152	342	190	418	228	494	266	570	304	646	342	38	380	798	418	874	456	950
39	39	78	39	156	195	78	273	312	117	390	429	156	39	546	195	624	663	234	741	780	273	858	897	312	975
40	40	40	120	40	40	120	280	40	360	40	440	120	520	280	120	80	680	360	760	40	840	440	920	120	200
41	41	82	123	164	205	246	287	328	369	410	451	492	533	574	615	656	697	738	779	820	861	902	943	984	1025
42	42	42	42	84	210	42	42	168	126	210	462	84	546	42	210	336	714	126	798	420	42	462	966	168	1050
43	43	86	129	172	215	258	301	344	387	430	473	516	559	602	645	688	731	774	817	860	903	946	989	1032	1075
44	44	44	132	44	220	132	308	88	396	220	44	132	572	308	660	176	748	396	836	220	924	44	1012	264	1100
45	45	90	45	180	45	90	315	360	45	90	495	180	585	630	45	720	765	90	855	180	315	990	1035	360	225
46	46	46	138	92	230	138	322	184	414	230	506	276	598	322	690	368	782	414	874	460	966	506	46	552	1150
47	47	94	141	188	235	282	329	376	423	470	517	564	611	658	705	752	799	846	893	940	987	1034	1081	1128	1175
48	48	48	48	48	240	48	336	48	144	240	528	48	624	336	240	48	816	144	912	240	336	528	1104	48	1200
49	49	98	147	196	245	294	49	392	441	490	539	588	637	98	735	784	833	882	931	980	147	1078	1127	1176	1225
50	50	50	150	100	50	150	350	200	450	50	550	300	650	350	150	400	850	450	950	100	1050	550	1150	600	50

Continuación.

n/n	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
2	26	54	28	58	30	62	32	66	34	70	36	74	38	78	40	82	42	86	44	90	46	94	48	98	50
3	78	27	84	87	30	93	96	33	102	105	36	111	114	39	120	123	42	129	132	45	138	141	48	147	150
4	52	108	28	116	60	124	32	132	68	140	36	148	76	156	40	164	84	172	44	180	92	188	48	196	100
5	130	135	140	145	30	155	160	165	170	35	180	185	190	195	40	205	210	215	220	45	230	235	240	245	50
6	78	54	84	174	30	186	96	66	102	210	36	222	114	78	120	246	42	258	132	90	138	282	48	294	150
7	182	189	28	203	210	217	224	231	238	35	252	259	266	273	280	287	42	301	308	315	322	329	336	49	350
8	104	216	56	232	120	248	32	264	136	280	72	296	152	312	40	328	168	344	88	360	184	376	48	392	200
9	234	27	252	261	90	279	288	99	306	315	36	333	342	117	360	369	126	387	396	45	414	423	144	441	450
10	130	270	140	290	30	310	160	330	170	70	180	370	190	390	40	410	210	430	220	90	230	470	240	490	50
11	286	297	308	319	330	341	352	33	374	385	396	407	418	429	440	451	462	473	44	495	506	517	528	539	550
12	156	108	84	348	60	372	96	132	204	420	36	444	228	156	120	492	84	516	132	180	276	564	48	588	300
13	26	351	364	377	390	403	416	429	442	455	468	481	494	39	520	533	546	559	572	585	598	611	624	637	650
14	182	378	28	406	210	434	224	462	238	70	252	518	266	546	280	574	42	602	308	630	322	658	336	98	350
15	390	135	420	435	30	465	480	165	510	105	180	555	570	195	120	615	210	645	660	45	690	705	240	735	150
16	208	432	112	464	240	496	32	528	272	560	144	592	304	624	80	656	336	688	176	720	368	752	48	784	400
17	442	459	476	493	510	527	544	561	34	595	612	629	646	663	680	697	714	731	748	765	782	799	816	833	850
18	234	54	252	522	90	558	288	198	306	630	36	666	342	234	360	738	126	774	396	90	414	846	144	882	450
19	494	513	532	551	570	589	608	627	646	665	684	703	38	741	760	779	798	817	836	855	874	893	912	931	950
20	260	540	140	580	60	620	160	660	340	140	180	740	380	780	40	820	420	860	220	180	460	940	240	980	100
21	546	189	84	609	210	651	672	231	714	105	252	777	798	273	840	861	42	903	924	315	966	987	336	147	1050
22	286	594	308	638	330	682	352	66	374	770	396	814	418	858	440	902	462	946	44	990	506	1034	528	1078	550
23	598	621	644	667	690	713	736	759	782	805	828	851	874	897	920	943	966	989	1012	1035	46	1081	1104	1127	1150
24	312	216	168	696	120	744	96	264	408	840	72	888	456	312	120	984	168	1032	264	360	552	1128	48	1176	600
25	650	675	700	725	150	775	800	825	850	175	900	925	950	975	200	1025	1050	1075	1100	225	1150	1175	1200	1225	50
26	26	702	364	754	390	806	416	858	442	910	468	962	494	78	520	1066	546	1118	572	1170	598	1222	624	1274	650
27	702	27	756	783	270	837	864	297	918	945	108	999	1026	351	1080	1107	378	1161	1188	135	1242	1269	432	1323	1350
28	364	756	28	812	420	868	224	924	476	140	252	1036	532	1092	280	1148	84	1204	308	1260	644	1316	336	196	700
29	754	783	812	29	870	899	928	957	986	1015	1044	1073	1102	1131	1160	1189	1218	1247	1276	1305	1334	1363	1392	1421	1450
30	390	270	420	870	30	930	480	330	510	210	180	1110	570	390	120	1230	210	1290	660	90	690	1410	240	1470	150
31	806	837	868	899	930	31	992	1023	1054	1085	1116	1147	1178	1209	1240	1271	1302	1333	1364	1395	1426	1457	1488	1519	1550
32	416	864	224	928	480	992	32	1056	544	1120	288	1184	608	1248	160	1312	672	1376	352	1440	736	1504	96	1568	800
33	858	297	924	957	330	1023	1056	33	1122	1155	396	1221	1254	429	1320	1353	462	1419	132	495	1518	1551	528	1617	1650
34	442	918	476	986	510	1054	544	1122	34	1190	612	1258	646	1326	680	1394	714	1462	748	1530	782	1598	816	1666	850
35	910	945	140	1015	210	1085	1120	1155	1190	35	1260	1295	1330	1365	280	1435	210	1505	1540	315	1610	1645	1680	245	350
36	468	108	252	1044	180	1116	288	396	612	1260	36	1332	684	468	360	1476	252	1548	396	180	828	1692	144	1764	900
37	962	999	1036	1073	1110	1147	1184	1221	1258	1295	1332	37	1406	1443	1480	1517	1554	1591	1628	1665	1702	1739	1776	1813	1850
38	494	1026	532	1102	570	1178	608	1254	646	1330	684	1406	38	1482	760	1558	798	1634	836	1710	874	1786	912	1862	950
39	78	351	1092	1131	390	1209	1248	429	1326	1365	468	1443	1482	39	1560	1599	546	1677	1716	585	1794	1833	624	1911	1950
40	520	1080	280	1160	120	1240	160	1320	680	280	360	1480	760	1560	40	1640	840	1720	440	360	920	1880	240	1960	200
41	1066	1107	1148	1189	1230	1271	1312	1353	1394	1435	1476	1517	1558	1599	1640	41	1722	1763	1804	1845	1886	1927	1968	2009	2050
42	546	378	84	1218	210	1302	672	462	714	210	252	1554	798	546	840	1722	42	1806	924	630	966	1974	336	294	1050
43	1118	1161	1204	1247	1290	1333	1376	1419	1462	1505	1548	1591	1634	1677	1720	1763	1806	43	1892	1935	1978	2021	2064	2107	2150
44	572	1188	308	1276	660	1364	352	132	748	1540	396	1628	836	1716	440	1804	924	1892	44	1980	1012	2068	528	2156	1100
45	1170	135	1260	1305	90	1395	1440	495	1530	315	180	1665	1710	585	360	1845	630	1935	1980	45	2070	2115	720	2205	450
46	598	1242	644	1334	690	1426	736	1518	782	1610	828	1702	874	1794	920	1886	966	1978	1012	2070	46	2162	1104	2254	1150
47	1222	1269	1316	1363	1410	1457	1504	1551	1598	1645	1692	1739	1786	1833	1880	1927	1974	2021	2068	2115	2162	47	2256	2303	2350
48	624	432	336	1392	240	1488	96	528	816	1680	144	1776	912	624	240	1968	336	2064	528	720	1104	2256	48	2352	1200
49	1274	1323	196	1421	1470	1519	1568	1617	1666	245	1764	1813	1862	1911	1960	2009	294	2107	2156	2205	2254	2303	2352	49	2450
50	650	1350	700	1450	150	1550	800	1650	850	350	900	1850	950	1950	200	2050	1050	2150	1100	450	1150	2350	1200	2450	50

Tabla III. Máximo Común Divisor de dos Números Naturales (MCD).

n/n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1
4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1
5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5
6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6	1
7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1
8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	8	1
9	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1	1	3	1	1	3	1
10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10	1	2	1	2	5
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1	1	1
12	1	2	3	4	1	6	1	4	3	2	1	12	1	2	3	4	1	6	1	4	3	2	1	12	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	2	1	2	1	2	7	2	1	2	1	2	1	14	1	2	1	2	1	2	7	2	1	2	1
15	1	1	3	1	5	3	1	1	3	5	1	3	1	1	15	1	1	3	1	5	3	1	1	3	5
16	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16	1	2	1	4	1	2	1	8	1
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	17	1	1	1	1	1	1	1	1
18	1	2	3	2	1	6	1	2	9	2	1	6	1	2	3	2	1	18	1	2	3	2	1	6	1
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	19	1	1	1	1	1	1
20	1	2	1	4	5	2	1	4	1	10	1	4	1	2	5	4	1	2	1	20	1	2	1	4	5
21	1	1	3	1	1	3	7	1	3	1	1	3	1	7	3	1	1	3	1	1	21	1	1	3	1
22	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	11	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	22	1	2	1
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	23	1	1
24	1	2	3	4	1	6	1	8	3	2	1	12	1	2	3	8	1	6	1	4	3	2	1	24	1
25	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	25
26	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	13	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
27	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1	1	3	1	1	3	1
28	1	2	1	4	1	2	7	4	1	2	1	4	1	14	1	4	1	2	1	4	7	2	1	4	1
29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30	1	2	3	2	5	6	1	2	3	10	1	6	1	2	15	2	1	6	1	10	3	2	1	6	5
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
32	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16	1	2	1	4	1	2	1	8	1
33	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	11	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	11	1	3	1
34	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	17	2	1	2	1	2	1	2	1
35	1	1	1	1	5	1	7	1	1	5	1	1	1	7	5	1	1	1	1	5	7	1	1	1	5
36	1	2	3	4	1	6	1	4	9	2	1	12	1	2	3	4	1	18	1	4	3	2	1	12	1
37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
38	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	19	2	1	2	1	2	1
39	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	13	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1
40	1	2	1	4	5	2	1	8	1	10	1	4	1	2	5	8	1	2	1	20	1	2	1	8	5
41	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
42	1	2	3	2	1	6	7	2	3	2	1	6	1	14	3	2	1	6	1	2	21	2	1	6	1
43	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
44	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	11	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	22	1	4	1
45	1	1	3	1	5	3	1	1	9	5	1	3	1	1	15	1	1	9	1	5	3	1	1	3	5
46	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	23	2	1
47	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
48	1	2	3	4	1	6	1	8	3	2	1	12	1	2	3	16	1	6	1	4	3	2	1	24	1
49	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1
50	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10	1	2	1	2	25

Continuación.

n/n	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1
4	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2
5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5
6	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6	1	2
7	1	1	7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	7	1
8	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2
9	1	9	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1	1	3	1	1
10	2	1	2	1	10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10
11	1	1	1	1	1	1	1	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	1	1	1	1	1	1
12	2	3	4	1	6	1	4	3	2	1	12	1	2	3	4	1	6	1	4	3	2	1	12	1	2
13	13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	2	1	14	1	2	1	2	1	2	7	2	1	2	1	2	1	14	1	2	1	2	1	2	7	2
15	1	3	1	1	15	1	1	3	1	5	3	1	1	3	5	1	3	1	1	15	1	1	3	1	5
16	2	1	4	1	2	1	16	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16	1	2
17	1	1	1	1	1	1	1	1	17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	2	9	2	1	6	1	2	3	2	1	18	1	2	3	2	1	6	1	2	9	2	1	6	1	2
19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	19	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20	2	1	4	1	10	1	4	1	2	5	4	1	2	1	20	1	2	1	4	5	2	1	4	1	10
21	1	3	7	1	3	1	1	3	1	7	3	1	1	3	1	1	21	1	1	3	1	1	3	7	1
22	2	1	2	1	2	1	2	11	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	22	1	2	1	2	1	2
23	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	23	1	1	1	1
24	2	3	4	1	6	1	8	3	2	1	12	1	2	3	8	1	6	1	4	3	2	1	24	1	2
25	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	25
26	26	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	13	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
27	1	27	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1	1	3	1	1
28	2	1	28	1	2	1	4	1	2	7	4	1	2	1	4	1	14	1	4	1	2	1	4	7	2
29	1	1	1	29	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30	2	3	2	1	30	1	2	3	2	5	6	1	2	3	10	1	6	1	2	15	2	1	6	1	10
31	1	1	1	1	1	31	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
32	2	1	4	1	2	1	32	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16	1	2
33	1	3	1	1	3	1	1	33	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	11	3	1	1	3	1	1
34	2	1	2	1	2	1	2	1	34	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
35	1	1	7	1	5	1	1	1	1	35	1	1	1	1	5	1	7	1	1	5	1	1	1	7	5
36	2	9	4	1	6	1	4	3	2	1	36	1	2	3	4	1	6	1	4	9	2	1	12	1	2
37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	37	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
38	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	38	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
39	13	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	39	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1
40	2	1	4	1	10	1	8	1	2	5	4	1	2	1	40	1	2	1	4	5	2	1	8	1	10
41	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	41	1	1	1	1	1	1	1	1	1
42	2	3	14	1	6	1	2	3	2	7	6	1	2	3	2	1	42	1	2	3	2	1	6	7	2
43	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	43	1	1	1	1	1	1	1
44	2	1	4	1	2	1	4	11	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	44	1	2	1	4	1	2
45	1	9	1	1	15	1	1	3	1	5	9	1	1	3	5	1	3	1	1	45	1	1	3	1	5
46	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	46	1	2	1	2
47	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	47	1	1	1
48	2	3	4	1	6	1	16	3	2	1	12	1	2	3	8	1	6	1	4	3	2	1	48	1	2
49	1	1	7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	49	1
50	2	1	2	1	10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	50

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DE RESULTADOS.

En este capítulo se presenta el análisis e interpretación de los resultados obtenidos, de las poblaciones intervinientes, representadas por docentes facultados en la enseñanza de la matemática en educación media. Los instrumentos utilizados fueron: la prueba diagnóstica (cuestionario), la validación por expertos y la evaluación posterior a la aplicación del material educativo en cuestión.

Realizado el proceso de recolección de datos, se procedió a interpretar y analizar la información suministrada. Al respecto Balestrini (2002) afirma que: “El propósito del análisis es resumir las observaciones llevadas a cabo de forma tal que proporcione respuestas a las interrogantes de investigación…”.

Se analizaron los resultados por fases.

Fase 1: Revisión de la bibliografía y recolección de información (diagnóstico).

Para formular la propuesta se realizó la revisión bibliográfica de los programas de educación media, los libros de texto actualizados (Brett y Suárez, 2002; Mendiola, 2002; Suárez y Durán, 2002) y sus estrategias metodológicas sugeridas para la enseñanza del mcm y MCD. La revisión de estas obras permitió observar que un porcentaje mayoritario de los actuales libros de texto de matemática editados para el mercado nacional, poseen la misma estructura, esto es, dentro del enfoque tradicional de la enseñanza de la matemática. En estos se enuncian y presentan problemas aislados de la realidad social del estudiante y básicamente se centran en presentar los contenidos basados en nomenclatura algebraica y un listado de ejercicios.

Desde el punto de vista del diseño esto presenta poco apoyo visual, ya que el lenguaje empleado es riguroso y la breve explicación de la simbología se suma al nivel de dificultad que ya posee el contenido matemático. Algunas editoriales venezolanas o radicadas en el país, las cuales parecen seguir la lógica del mercado en la publicación de obras escolares, el interés central en el marco de esta lógica ha sido el monetario, dejando de lado la discusión de ideas pedagógicas que se consideran básicas.

En general, es muy pobre el número de actividades relacionadas con jugar, suele restársele valor por parte de profesores y estudiantes. Hay autores que piensan que un curso de matemáticas en el que se abran espacios para jugar tiene, de entrada, menos rigor matemático que otro en el que no se juegue aún cuando en ambos casos se formalicen las ideas y relaciones matemáticas. Éstos prefieren un texto que siga el esquema exposición del profesor y ejercicios de los alumnos.

A continuación se procedió a la aplicación del cuestionario, el cual sirvió para explorar información pertinente en cuanto a conocimiento, habilidades y destrezas de los temas relacionados con el mínimo común múltiplo (mcm) y máximo común divisor (MCD). Una vez realizado el diagnóstico, se determinó que estos temas se enseñan de forma tradicional (tal como se concluyo después de la revisión bibliográfica).

Las respuestas expresadas por los docentes en el instrumento diagnóstico arrojaron claramente la necesidad de buscar alternativas que ayuden a complementar la enseñanza de los conceptos que forman parte de la matemática de educación media.

Fase 2: Validación de la propuesta por un grupo de expertos en el área.

Una vez recogida la información relevante de la validación a través de juicio experto, ésta fue analizada e interpretada, logrando establecer las consideraciones, críticas y tendencias sobre algunos aspectos específicos de la propuesta didáctica, lo que permitió establecer aspectos relevantes en cuanto al diseño de la misma.

Los resultados acerca del diseño, estructura, contenido y otros aspectos de la propuesta didáctica se obtuvieron mediante los instrumentos aplicados a los docentes de educación media del área de matemática, con reconocida experiencia en la asignatura. De acuerdo con sus opiniones el material diseñado cuenta con una marcada fortaleza pedagógica que favorece la enseñanza del tema, ya que su diseño incluye entre otros aspectos: un esquema amigable y las actividades propuestas son ejemplificadas, además cuenta con un vocabulario ajustado al nivel intelectual de los jóvenes estudiantes condición ésta que los hace más atractivos desde el punto de vista pedagógico.

Los juicios, ideas, opiniones y criterios aportados por el grupo de docentes expertos en la materia fueron analizados y sirvieron de aporte en el diseño de la propuesta y en la ampliación de su carácter pedagógico. Además guiaron con respecto a la inclusión y exclusión de los contenidos a desarrollar en el material educativo.

Fase 3: Aplicación y evaluación de la propuesta.

Esta etapa se inició una vez que cada docente experto precisó a través de la información suministrada, cuáles eran los objetivos y expectativas que se esperaba lograr con la elaboración del material educativo. Una vez finalizada la etapa de diseño y validación se llevo a cabo el proceso de aplicación de la propuesta didáctica. Las actividades se llevaron a cabo con un grupo seleccionado de docentes.

Posterior a la aplicación del material educativo se realizó una evaluación enfocada en el contenido, estructura, y aceptación que tuvo el mismo en la población.

De acuerdo a sus respuestas se pudo comprobar que esta forma de presentar el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor les pareció muy interesante ya que les permitir tomar conciencia acerca de la importancia del aprendizaje de contenidos matemáticos debido a que estos les ayudan a resolver diversidad de situaciones y problemas.

Ante la pregunta: ¿Qué diferencias encontraron entre los textos de matemática que usualmente utilizan y la propuesta didáctica?, respondieron:

- La forma de explicar es agradable, los conceptos matemáticos que aparecen están bien explicados y no resultan tan pesados como en otros libros de matemática.
- Que hay juegos didácticos como la criba de Eratóstenes, la construcción de los números primos por cuadrados y el cálculo del mcm y el MCD por construcción de series de rectángulos.
- La utilización de las tablas es importante desde el punto de vista de transposición de saberes, además permite verificación y son de fácil empleo.

En cuanto a la pregunta: ¿Qué agregarías o eliminarías al diseño de la propuesta didáctica del mínimo común múltiplo y máximo común divisor? Los docentes, en su mayoría, respondieron que no le harían ningún tipo de cambio a la propuesta que les gustaba como se trabajaba en ella, mientras que otro grupo respondió que algunos problemas finales presentaban cierto grado de dificultad.

Con respecto a la pregunta: ¿Deseas expresar alguna otra opinión sobre el contenido de la guía?

- El grupo respondió que con este tipo de diseño las sesiones de clase resultaban más interesantes, informativas y dinámicas.
- Las verificaciones a través de las tablas nos ayudaron a sentir más seguridad en los problemas planteados.

Hay que destacar que aparte de los resultados arrojados por la evaluación se pudo observar que durante el proceso de aplicación de la propuesta fueron regulares las oportunidades en que se pudo ver el grado de receptividad y motivación por parte del grupo.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES.

Actualmente la época en que vivimos requiere nuevos métodos para optimizar el modo de enseñanza, lo que impulsa a la creación de formas alternas de obtener los mejores resultados. De acuerdo con la perspectiva educativa de la didáctica de las matemáticas el tipo de enseñanza al margen de estas corrientes dificulta la producción de aprendizajes significativos ya que conduce, en el mejor de los casos, a que el estudiante mecanice durante un corto periodo de tiempo algunas técnicas que le permitan la solución del problema, sin llegar a entenderlo en su totalidad. Igualmente recomienda un aprendizaje basado en el trabajo en equipo, la argumentación y el razonamiento, la deducción, la técnica de prueba y ensayo, así como otras estrategias, de modo que además se favorezcan la construcción de aptitudes, valores y normas de conducta responsables.

La propuesta didáctica busca satisfacer esta necesidad logrando que los estudiantes participen y se involucren en el aprendizaje de los contenidos referidos, presentados bajo un diseño sencillo, rodeado de ejemplos y ejercicios propios del entorno y basado en resolución de problemas. Respondiendo a estas siempre crecientes necesidades se plantea desarrollar una investigación educativa la cual tenga como principales expectativas motivar el interés de los estudiantes en la materia y más concretamente en el tema a tratar el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor aplicado a la resolución de problemas en la vida diaria.

Los resultados de este trabajo apoyan igualmente la presencia de un consenso a nivel docente (grupo encuestado) de las ventajas que se logran cuando nos alejamos de la perspectiva tradicional de enseñanza de la matemática y ésta se relaciona con hechos de conocimiento común de los alumnos de manera que las sesiones de clase resulten más motivadoras y enriquecedoras.

Debe señalarse que ese tipo de diseño en el que el material educativo presenta una metodología adecuada para que el estudiante vaya paso a paso enlazando sus ideas a través de preguntas guiadas y le permita descubrir por sí mismo, el contenido que se desea que este asimile, resultó también de interés a los docentes encuestados debido al amplio espectro de posibilidades que se presentan en el diseño de sus sesiones de clase.

Teniendo en cuenta las respuestas aportadas por los encuestados se pudo comprobar que esta forma de presentar el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor les pareció muy interesante ya que les permitir tomar conciencia acerca de la importancia del aprendizaje de contenidos matemáticos debido a que estos les ayudan a resolver diversidad de situaciones y problemas. De acuerdo a estas opiniones, se puede afirmar que evidenciaron que la matemática vista desde otra perspectiva puede ser muy enriquecedora y puede dejar de ser vista como aburrida y tediosa. Así mismo se evidencia en los docentes consultados, que con la puesta en práctica del material educativo, así como otros similares dentro de la misma perspectiva, es posible despertar su interés y motivación en el estudio de esta materia.

Finalmente es importante señalar que el mundo actual está cambiando continua y aceleradamente y que muchos de sus cambios tienen una base científico matemática. La sociedad donde los actuales estudiantes actuarán como adultos será muy distinta a la presente en muy diversos aspectos. La preparación y el interés en las aéreas científicas son necesarias para comprender los cambios y, más allá, para poder influir sobre ellos en vez de aceptarlos pasivamente.

REFERENCIAS.

Alson, P. (2004). **Números naturales.** Caracas**.** Editorial ERRO**.**

Artigue, M. y Douady, R. (1998). **Ingeniería didáctica en educación matemática**. Bogotá. Editorial Iberoaméricana.

Babini, J y Rey Pastor, J. (1986). **Historia de la matemática: (I) De la antigüedad a la baja edad media. (II) Del renacimiento a la actualidad.** España. Editorial Gedisa**.**

Bachelard, G. (1985). **La formación del espíritu científico**. Barcelona. Planeta Agostini.

Balestrini, M. (2002). **Como se elabora el proyecto de investigación**. (6ta. Ed.). Caracas. Consultores Asociados Servicio Editorial.

Brett, E. y Suárez, W. (2002). **Matemática 7mo**. Caracas. Editorial Discolar.

Brousseau, G. (1986). **Fundamentos y métodos de la didáctica**. RDM Nº 9 (3). Córdoba. Versión en español publicada por Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad de Córdoba.

Chevallard, Y. (1991). **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. Buenos Aires. Aique

Echenique, I. (2006). **Resolución de problemas matemáticos en educación primaria.** Pamplona. Gobierno de Navarra.

Fletcher, T.J. (1971) **Didáctica de la matemática moderna en la enseñanza media**. (2da Ed.). Barcelona. Teide.

Flores, D. (2002). **Elementos de la matemática. Guía teórico-práctico**. Caracas. Ediciones Escuela de Matemática.

Galvis, J. (2008). **Didáctica para la enseñanza de la aritmética y el algebra.** Pereira Universidad Tecnológica de Pereira.

Gascón, J. (1997). **Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.** Barcelona. Universidad Autónoma de Barcelona.

Gimeno, J. (1985). **Teoría de la enseñanza y desarrollo del currículo**. Salamanca. Anaya

Lakatos, I. (1981). **Matemáticas, ciencias y epistemología**. Madrid. Alianza.

López Rodríguez, F. (Dir.). (2002). **La resolución de problemas en matemáticas. Teoría y experiencias.** Barcelona. Grao.

Manterola, C. (2002). **Un modelo didáctico para mejorar la escuela**. Educación integral. Reflexiones y experiencias, Año 4, N° 5, pp. 12-42.

Mendiola, E. (2002). **Matemática 7° grado**. Caracas. Editorial Biosfera.

Mendoza, O. (2009). **Currículo y matemática**. Maracay. Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Pérez, P y Pozo, J.I. (1994). **La solución de problemas**. Madrid. Santillana.

Polya, G. (1982). **Cómo plantear y resolver problemas**. México. Trillas.

Reigeluth, C. (2000). **Diseño de la instrucción. Teorías y modelos**. Vol. 1. Madrid. Santillana.

Rico, L. (Coord.). (2000). **La educación matemática en la enseñanza secundaria**. Barcelona. Horsori.

Sabino, C. (1986). **El proceso de investigación**. Caracas. Editorial Panapo.

Segarra, L. (1999). **Juegos y matemáticas**. Aula de Innovación Educativa, N.78, pp. 25-28.

Socas, M. y Camacho, M. (2003). **Conocimiento matemático y enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria. Algunas reflexiones.** Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, vol. X, N° 2, pp. 151-171.

Suárez, E. y Durán, D. (2002). **Matemática 7**. Caracas. Santillana.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador. (2005). **Manual de trabajos de grado de especialización y Maestrías y Tesis Doctorales**. Caracas. Fondo editorial de la UPEL.

Van Reeuwijk, M. (1997). **Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas.** Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, N° 12, pp. 9-16.

Vergnaud, G. (1990). **La théorie des champs conceptuels.** Récherches en Didactique des Mathématiques, 10 (23): pp. 133-170.

ANEXOS.

Apéndice A

Cuestionario (Prueba diagnóstica).

Cuestionario.

INSTRUCCIONES: A continuación se le presentan una serie de afirmaciones, marque cuidadosamente su posición de acuerdo a las siguientes escalas:

a) Estoy totalmente de acuerdo.
b) Estoy de acuerdo.
c) Estoy indeciso (ni de acuerdo ni en desacuerdo).
d) Estoy en desacuerdo.
e) Estoy totalmente en desacuerdo.

	a	b	c	d	e
1. Comprendo las nociones de mínimo común múltiplo y máximo común divisor de dos o más números.					
2. Utilizo el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor, en la resolución de problemas en la etapa de educación media general.					
3. Identifico la estrategia que necesito emplear en cada problema matemático vinculado con el mcm y MCD.					
4. Aplicá diferentes recursos para enseñar los conceptos de mínimo común múltiplo y máximo común divisor de dos o más números.					
5. Mis estudiantes reconocen por sí mismos, qué procedimiento necesitan utilizar en la resolución de problemas matemáticos relacionados con el mcm y MCD.					
6. Es necesario poseer conocimientos sobre cómo enseñar el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor.					
7. Cuando mis estudiantes se enfrentan a un problema de mcm o MCD tienen confianza en solucionarlo.					
8. El contenido que imparto relacionado con el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor es poco atractivo para los estudiantes.					
9. Empleo el pizarrón como recurso para dar las clases.					
10. Se puede hacer más eficaz la enseñanza del mínimo común múltiplo y del máximo común divisor, relacionándolos con juegos didácticos.					

Marque con una equis (x) la respuesta que corresponda.

11. ¿Ha participado en cursos referente a didáctica de la matemática?

SI_____ NO_____

12. ¿Ha participado en talleres de matemática?

SI____ NO_____

Apéndice B

Validez del cuestionario ítem por ítem.

Instrucciones: en el siguiente formato exprese su opinión marcando con una equis (x), en la casilla correspondiente a Si o NO, según lo considere.

Nº	Criterios						Juicios					
	Claridad		Pertinencia		Coherencia		Eliminar		Modificar		Aceptar	
	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												

Claridad*:* Se refiere a la precisión o exactitud que contiene la formulación del ítem.
Pertinencia*:* Se refiere a la conveniencia o correspondencia del ítem con respecto a los propósitos de la investigación.
Coherencia: Se refiere a la conexión, relación o unión de unas cosas con otras.

Observaciones: ____
____
____
____

Profesor: ______________________________
Cédula de Identidad: __________________

Firma: __________________

Apéndice C

Validez de la propuesta por actividades.

Ítems		Juicios			Observaciones
		Eliminar	Modificar	Aceptar	
Título					
Objetivo General					
Actividad 1	Objetivo Específico				
	Materiales				
	Tiempo				
Actividad 2	Objetivo Específico				
	Materiales				
	Tiempo				
Actividad 3	Objetivo Específico				
	Materiales				
	Tiempo				
Actividad 4	Objetivo Específico				
	Materiales				
	Tiempo				
Actividad 5	Objetivo Específico				
	Materiales				
	Tiempo				
Actividad 6	Objetivo Específico				
	Materiales				
	Tiempo				
Actividad 7	Objetivo Específico				
	Materiales				
	Tiempo				
Bibliografía					
Anexos					

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN

Yo, ________________________ titular de la cédula de identidad Nº________________ de profesión ____________________, en mi carácter de experto en el área de __________________ considero que el taller titulado “Propuesta Didáctica del Mínimo Común Múltiplo y del Máximo Común Divisor. Una Herramienta para la Enseñanza”, diseñado en el trabajo de grado titulado Propuesta Didáctica para la Enseñanza del Mínimo Común Múltiplo y del Máximo Común Divisor; cumple con la validez de contenidos por la claridad y congruencia de los ítems.

En la ciudad de Caracas a los ______ días del mes de ______ de 2011.

Firma: __________________

Apéndice D

Validez de la evaluación ítem por ítem.

Instrucciones: en el siguiente formato exprese su opinión marcando con una equis (x), en la casilla correspondiente a Si o NO, según lo considere.

Nº	Criterios						Juicios					
	Claridad		Pertinencia		Coherencia		Eliminar		Modificar		Aceptar	
	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												
12												
13												
14												
15												
16												
17												
18												
19												
20												
21												
22												

Claridad*:* Se refiere a la precisión o exactitud que contiene la formulación del ítem.
Pertinencia*:* Se refiere a la conveniencia o correspondencia del ítem con respecto a los propósitos de la investigación.
Coherencia: Se refiere a la conexión, relación o unión de unas cosas con otras.

Observaciones: ____

____

Profesor: ____________________________
Cédula de Identidad: _________________

Firma: _________________

Apéndice E

Evaluación realizada a los docentes sobre la propuesta.

Evaluación.

Diseño de la propuesta.

INSTRUCCIONES: Marque con una equis (x) en la escala que considere más pertinente.

CRITERIOS	EXCELENTE	MUY BUENO	BUENO	REGULAR	DEFICIENTE
1. La organización en actividades					
2. Las estrategias utilizadas como: ejercicios, problemas y tablas.					
3. La distribución del tiempo para aplicar la propuesta					
4. Los Contenidos conceptuales					
5. Los Contenidos procedimentales					
6. Los Contenidos actitudinales					
7. Coherencia de las actividades					
8. Materiales y Recursos					
9. Innovación que aporta					
10. Bibliografía consultada					
11. Claridad y pertinencia de los materiales utilizados.					
12. Los ejemplos suministrados facilitan el proceso de enseñanza.					

Desempeño de la Facilitadora

INSTRUCCIONES: Marque con una equis (x) en la escala que considere más pertinente.

CRITERIOS	EXCELENTE	MUY BUENO	BUENO	REGULAR	DEFICIENTE
13. Manejo conceptual					
14. Dominio de grupo					
15. Propicia la participación					
16. Claridad al hablar					
17. Disposición a aclarar dudas					
18. Manejo de las estrategias usadas					

19. ¿Consideras que las actividades trabajadas en la propuesta, te permitirán resolver algunos problemas que puedan presentarse en tu entorno?

20. ¿Qué agregarías o eliminarías al diseño de la propuesta didáctica del mínimo común múltiplo y máximo común divisor?

21. ¿Puedes nombrar algunas diferencias entre la propuesta didáctica y los libros de texto de matemática que usualmente utilizas?

22. ¿Deseas expresar alguna otra opinión sobre el contenido de la guía?

Apéndice F

Certificado otorgado a los docentes por asistir al taller.

CERTIFICADO

Que se otorga a:

Luis Maita

Por su asistencia a taller:

PROPUESTA DIDACTICA DEL MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO Y DEL MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Realizado en la Facultad de Educación-UCV

Caracas, mayo 2011

Prof. Adelfa Hernández
Universidad Central de Venezuela
Programa Samuel Robinson

Apéndice G

Instrumentos de los expertos.

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN

Yo, PEDRO ALSON titular de la cédula de identidad Nº 3575188 de profesión MATEMÁTICO, en mi carácter de experto en el área de MATEMÁTICAS considero que el taller titulado "Propuesta Didáctica del Mínimo Común Múltiplo y del Máximo Común Divisor. Una Herramienta para la Enseñanza", diseñado en el trabajo de grado titulado Propuesta Didáctica para la Enseñanza del Mínimo Común Múltiplo y del Máximo Común Divisor; cumple con la validez de contenidos por la claridad y congruencia de los ítems.

En la ciudad de Caracas a los 25 días del mes de MAYO de 2011.

Firma: ____________________

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN

Yo, Annkarys Gómez P. titular de la cédula de identidad Nº V-14.484.012 de profesión Lic. Matemáticas, en mi carácter de experto en el área de Matemáticas considero que el taller titulado "Propuesta Didáctica del Mínimo Común Múltiplo y del Máximo Común Divisor. Una Herramienta para la Enseñanza", diseñado en el trabajo de grado titulado Propuesta Didáctica para la Enseñanza del Mínimo Común Múltiplo y del Máximo Común Divisor; cumple con la validez de contenidos por la claridad y congruencia de los ítems.

En la ciudad de Caracas a los 23 días del mes de Mayo de 2011.

Firma: Annkarys Gómez P.

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN

Yo, Henry Martínez titular de la cédula de identidad Nº 6330608 de profesión docente, en mi carácter de experto en el área de Matemática considero que el taller titulado "Propuesta Didáctica del Mínimo Común Múltiplo y del Máximo Común Divisor. Una Herramienta para la Enseñanza", diseñado en el trabajo de grado titulado Propuesta Didáctica para la Enseñanza del Mínimo Común Múltiplo y del Máximo Común Divisor; cumple con la validez de contenidos por la claridad y congruencia de los ítems.

En la ciudad de Caracas a los 16 días del mes de Mayo de 2011.

Firma: ______

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN

Yo, Asdrúbal Olivares titular de la cédula de identidad Nº 8395225 de profesión Educador, en mi carácter de experto en el área de Currículo considero que el taller titulado "Propuesta Didáctica del Mínimo Común Múltiplo y del Máximo Común Divisor. Una Herramienta para la Enseñanza", diseñado en el trabajo de grado titulado Propuesta Didáctica para la Enseñanza del Mínimo Común Múltiplo y del Máximo Común Divisor; cumple con la validez de contenidos por la claridad y congruencia de los ítems.

En la ciudad de Caracas a los 23 días del mes de Mayo de 2011.

Firma: ______________

CONSTANCIA DE VALIDACIÓN

Yo, Rafael Sánchez Lamoneda titular de la cédula de identidad Nº 4351766 de profesión Matemático y Prof de Matemática, en mi carácter de experto en el área de Matemática (Algebra) y su enseñanza considero que el taller titulado "Propuesta Didáctica del Mínimo Común Múltiplo y del Máximo Común Divisor. Una Herramienta para la Enseñanza", diseñado en el trabajo de grado titulado Propuesta Didáctica para la Enseñanza del Mínimo Común Múltiplo y del Máximo Común Divisor; cumple con la validez de contenidos por la claridad y congruencia de los ítems.

En la ciudad de Caracas a los 23 días del mes de Mayo de 2011.

Firma: Rafael Sánchez

Apéndice H

Aplicación de la propuesta.

Hoja De Asistencia Al Taller

NOMBRE Y APELLIDO	C.I.	PROFESIÓN	LUGAR DE TRABAJO	FIRMA
Gisela Arguelo	5965789	Docente	Unefa	
Carmen Herrera	13423729	Profesora	U.E. "Estado Yaracuy"	
Tania Peña	6251398	Profesora	UEE "15 de Octubre"	
Wilmer Colmenarez	13288051	Profesor.	UBN "Gustavo H. Machado"	
Evelyn Campos	12783569	Profesora	U.B.N. "Gustavo H. Machado"	
Nelson García	10463120	Docente	UEN 17 de Dic	
Luis Mejía	12.077.775	Profesor	E.T.A. Santa Rita	
Marco Pérez	4.678.516	D/A	U.E.N. Luis Cárdenas Saavedra	
María Arguelo	6.043538	Docente	Liceo Carlos Soublette	
Luis Castillo	15132817	Profesor	U.E.M. Cecilio Acosta	