

TRABAJO ESPECIAL

**ANÁLISIS NUMÉRICO DEL FLUJO LAMINAR EN
DESARROLLO CON ALTOS NÚMEROS DE PRANDTL ENTRE
DOS CILINDROS CONCÉNTRICOS**

**PRESENTADO ANTE LA ILUSTRE
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
POR LOS BACHILLERES**

López P., Estefanía

Ponce M., Marco A.

**PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO MECÁNICO**

CARACAS, 2004

TRABAJO ESPECIAL

**ANÁLISIS NUMÉRICO DEL FLUJO LAMINAR EN
DESARROLLO CON ALTOS NÚMEROS DE PRANDTL ENTRE
DOS CILINDROS CONCÉNTRICOS**

**PRESENTADO ANTE LA ILUSTRE
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
POR LOS BACHILLERES
López P., Estefanía
Ponce M., Marco A.
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO MECÁNICO**

**TUTOR ACADÉMICO:
Julio Segura**

CARACAS, 2004

Caracas, junio de 2004

Los abajo firmantes, miembros del Jurado designado por el consejo de Escuela de Ingeniería Mecánica, para evaluar el Trabajo Especial de Grado presentado por los Bachilleres, López P., Estefanía y Ponce M., Marco A., titulado:

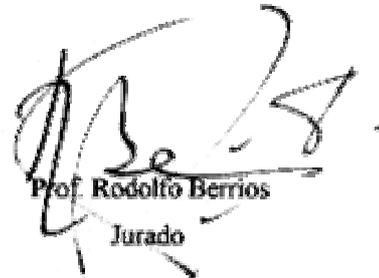
"ANÁLISIS NUMÉRICO DEL FLUJO LAMINAR EN DESARROLLO CON ALTOS NÚMEROS DE PRANDTL ENTRE DOS CILINDROS CONCÉNTRICOS".

Consideran que el mismo cumple con los requisitos exigidos por el plan de estudios conducente al Título de Ingeniero Mecánico.



Prof. Francisco Garcia

Jurado



Prof. Rodolfo Berrios

Jurado



Prof. Julio Segura

Tutor Académico



RESUMEN

LÓPEZ POZA, Estefanía y PONCE MARTÍNEZ, Marco Antonio

**“ANÁLISIS NUMÉRICO DEL FLUJO LAMINAR EN DESARROLLO CON
ALTOS NÚMEROS DE PRANDTL ENTRE DOS CILINDROS
CONCÉNTRICOS”**

**Tutor Académico: SEGURA, Julio. Tesis Ing. Mecánico. Caracas. U.C.V.
Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería Mecánica, 2004. 140p.**

**Palabras Clave: Dinámica de Fluidos y Transferencia de Calor Computacionales
/ Flujo Laminar Interno en Desarrollo/ Método de Volúmenes Finitos.**

En éste trabajo se estudiaron las regiones de entrada dinámica y térmica para convección forzada permanente, bidimensional incompresible y laminar, entre dos cilindros concéntricos con temperatura superficial prescrita y/o flujo de calor prescrito, para fluidos con altos números de Prandtl y con propiedades termofísicas dependientes de la temperatura, mediante la aplicación del método de volúmenes finitos con esquema híbrido de diferenciación. Para obtener la solución de las ecuaciones discretas en coordenadas cilíndricas, se desarrolló un algoritmo (SIMPLERT), en el cual se toma en cuenta las variaciones de temperatura en la determinación del campo de presión, muy útil para problemas de convección forzada donde se considere la variación de las propiedades termofísicas con la temperatura, de este modo, se acoplaron las tres ecuaciones (continuidad, momentum y energía), y por medio de la aplicación del algoritmo de la matriz tridiagonal, se resolvió el sistema de ecuaciones algebraicas resultantes. Se implementó el algoritmo de solución numérica en un código computacional, desarrollado en FORTRAN, el cual permite obtener los campos de presión, velocidad y temperatura. Los resultados obtenidos a partir del código computacional fueron validados con los resultados que se obtienen de la solución analítica para convección forzada laminar en conductos anulares concéntricos para flujo dinámica y térmicamente desarrollado.

DEDICATORIA

A mis Padres

Manuela y José Antonio

A mi Hermano

Antonio José

Estefanía

A mis Padres

Haidée y Luis

A mis Hermanos

Alejandro, Luis y Claudia.

Marco

AGRADECIMIENTOS

Por su asesoría, apoyo y dedicación para la realización de este trabajo especial, queremos agradecer a los profesores:

Julio Segura

Reinaldo García

Mauro Nalesso

Nelson Fernández

José Luis Perera

Y a las demás personas, familiares y amigos que colaboraron de manera desinteresada para la culminación de este trabajo.

ABREVIATURAS Y SÍMBOLOS

A	área (m ²)	F	términos advectivos en las ecuaciones discretas
a	matriz de coeficientes seleccionada según el esquema de discretización	Gz	número de Graetz
A_{Cp}	coeficiente de la ecuación de calor específico	k	conductividad térmica (W/m.K)
A_k	coeficiente de la ecuación de conductividad térmica	Led_{lam}	longitud de entrada dinámica laminar (m)
A_v	coeficiente de la ecuación de viscosidad cinemática	Let_{lam}	longitud de entrada térmica laminar (m)
A_ρ	coeficiente de la ecuación de densidad	L_r	espaciamiento entre cilindros (m)
b	matriz de coeficientes en la ecuación de presión, es igual a la ecuación de continuidad	L_z	longitud de los cilindros (m)
B_{Cp}	coeficiente de la ecuación de calor específico	Nr	número de volúmenes de control en la dirección z
B_k	coeficiente de la ecuación de conductividad térmica	Nu	número de Nusselt
B_v	coeficiente de la ecuación de viscosidad cinemática	Nz	número de volúmenes de control en la dirección r
B_ρ	coeficiente de la ecuación de densidad	P	presión (Pa)
Cp	calor específico (J/kg.K)	P^*	valor de la presión en el iterado inicial (Pa)
d	matriz de coeficientes presente en las ecuaciones de presión y de corrección de velocidad	Pe	número de Peclet
D	términos difusivos en las ecuaciones discretas	Pr	número de Prandtl
		r	dirección radial (m)
		r^*	relación de diámetros en la solución analítica
		RD	relación de diámetros
		Re	número de Reynolds
		r_i	radio del cilindro interno (m)
		r_o	radio del cilindro externo (m)

T	temperatura (K)	B	nodo inferior (bottom) al nodo de cálculo del volumen de control (P)
T_i	temperatura en la sección de entrada (K)	e	superficie derecha (east) del volumen de control
u_r	componente radial de la velocidad (m/s)	E	nodo derecho (east) al nodo de cálculo del volumen de control (P)
u_θ	componente tangencial de la velocidad (m/s)	I, i	denota la posición de los elementos de las matrices en la dirección z
u_z	componente axial de la velocidad (m/s)	J, j	denotan la posición de los elementos de las matrices en la dirección r
z	dirección axial (m)	nb	denota la sumatoria de los nodos vecinos al nodo de cálculo del volumen de control
z_i	longitud en la sección de entrada ($z_i=0$) (m)	P	nodo de cálculo del volumen de control
z_o	longitud en la sección de salida ($z_o=L_z$) (m)	t	superficie superior (top) del volumen de control
Letras griegas		T	nodo superior (top) al nodo de cálculo del volumen de control (P)
α	difusividad térmica (m ² /s)	w	superficie izquierda (west) del volumen de control
θ	dirección tangencial	W	nodo izquierdo (west) al nodo de cálculo del volumen de control (P)
μ	viscosidad dinámica (Pa.s)		
ν	viscosidad cinemática (m ² /s)		
ρ	densidad (kg/m ³)		
Φ	función de disipación viscosa		
φ	variable de interés		
Subíndices			
b	superficie inferior (bottom) del volumen de control		

TABLA DE CONTENIDOS

DEDICATORIA	III
AGRADECIMIENTOS	IV
ABREVIATURAS Y SÍMBOLOS	V
TABLA DE CONTENIDOS	VII
INDICE DE TABLAS	IX
INDICE DE FIGURAS	X
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 1: FUNDAMENTOS TEÓRICOS	7
1.1- EL PROBLEMA DE GRAETZ	7
1.2- REGIONES DE ENTRADA	9
1.2.1- Longitud Dinámica de Entrada	9
1.2.2- Longitud Térmica de Entrada	10
1.3- INFLUENCIA DE LA TEMPERATURA SOBRE LAS PROPIEDADES DEL FLUÍDO	11
CAPÍTULO 2: MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS	13
2.1- CAMPO DE FLUJO	13
2.2- MALLA DE CÁLCULO	15
2.3- ALGORITMO DE SOLUCIÓN	19
CAPÍTULO 3: MODELO MATEMÁTICO	22
3.1- SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES	23
3.2- CONDICIONES DE CONTORNO	24
3.3- SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA FLUJO DESARROLLADO	26
CAPÍTULO 4: APLICACIÓN DEL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS AL MODELO MATEMÁTICO	29

4.1- DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO DE CÁLCULO	29
4.2- DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD	32
4.3- DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE MOMENTUM	32
4.3.1- Componente en "r" vertical	32
4.3.2- Componente en "z" horizontal	33
4.3- DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE ENERGÍA	35
4.4- ECUACIÓN PARA EL CÁLCULO DE LA SEUDO-VELOCIDAD	35
4.5- ECUACIÓN PARA EL CÁLCULO DE PRESIÓN	37
4.6- ECUACIÓN DE ENERGÍA	39
4.7- ECUACIÓN DE MOMENTUM EN DIRECCIÓN RADIAL (r)	40
4.8- ECUACIÓN DE MOMENTUM EN DIRECCIÓN AXIAL (z)	40
4.9- CORRECCIÓN DE LA VELOCIDAD	41
4.10- IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO	42
4.10.1- Condiciones de Contorno Fluido-Dinámicas	42
4.10.2- Condiciones de Contorno Térmicas	46
4.11- SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS	47
4.12- DESARROLLO DEL ALGORITMO DE SOLUCIÓN	48
 CAPÍTULO 5: RESULTADOS Y DISCUSIÓN	 51
5.1-VALIDACIÓN DE RESULTADOS	52
5.2- OBTENCIÓN DE RESULTADOS PARA FLUIDOS CON ALTOS NÚMEROS DE Pr	57
5.3- DISCUSIÓN DE RESULTADOS	68
 CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	 69
 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	 72
 ANEXO 1: CÓDIGO FUENTE	 75
ANEXO 2: PROPIEDADES TERMOFÍSICAS	132
ANEXO 3: ALGORITMO DE THOMAS (TDMA)	137

INDICE DE TABLAS

Tabla 3-1: Ecuaciones para las propiedades termofísicas de los aceites	23
Tabla 3-2: Condiciones en las paredes	25
Tabla 3-3: Flujo de calor en las paredes	25
Tabla A2-2: Ecuaciones para las propiedades termofísicas del agua	135
Tabla A2-3: Coeficientes de las ecuaciones para las propiedades termofísicas de los aceites	136

ÍNDICE DE FIGURAS

Fig. 2-1: Campo en "zig-zag"	16
Fig. 2-2: Volumen de control, caso bidimensional	17
Fig. 2-3: Malla desplazada	18
Fig. 2-4: Algoritmo SIMPLERT	21
Fig. 3-1: Vistas de la configuración geométrica	22
Fig. 3-2: Evaluación del flujo de calor en las superficies de los cilindros	22
Fig. 3-3: Nomenclatura para el flujo en un conducto de sección anular	22
Fig. 4-1: Sección longitudinal del dominio de cálculo discretizado (perspectiva)	30
Fig. 4-2: Sección longitudinal del dominio de cálculo discretizado (elevación)	31
Fig. 4-3: Sección longitudinal del volumen de control para el cálculo de la velocidad radial " u_r "	36
Fig. 4-4: Sección longitudinal del volumen de control para el cálculo de la velocidad axial " u_z "	37
Fig. 4-5: Sección longitudinal del volumen de control para el cálculo de presión y temperatura	38
Fig. 4-6: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la velocidad " u_r " sección de entrada	42
Fig. 4-7: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la velocidad " u_z " sección de entrada	43
Fig. 4-8: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la velocidad " u_r " sección de salida	43
Fig. 4-9: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la velocidad " u_z " sección de salida	44
Fig. 4-10: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la velocidad " u_r " pared del cilindro interior	44
Fig. 4-11: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la velocidad " u_z " pared del cilindro interior	45

Fig. 4-12: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la velocidad “ u_r ” pared del cilindro exterior	45
Fig. 4-13: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la velocidad “ u_z ” pared del cilindro exterior	45
Fig. 4-14: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la temperatura “T” sección de entrada	46
Fig. 4-15: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la temperatura “T” sección de salida	46
Fig. 4-16: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la temperatura “T” pared del cilindro interior	47
Fig. 4-17: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la temperatura “T” pared del cilindro exterior	47
 Fig. A2-1: Variación de la densidad (ρ) de los diferentes aceites en función de la temperatura	 132
Fig. A2-2: Variación de la viscosidad cinemática (ν) de los diferentes aceites en función de la temperatura	133
Fig. A2-3: Variación de la conductividad térmica (k) de los diferentes aceites en función de la temperatura	133
Fig. A2-4: Variación del calor específico (C_p) de los diferentes aceites en función de la temperatura	134
Fig. A3-1: Línea donde es aplicado el método TDMA en un problema 2D	134

INTRODUCCIÓN

En numerosos problemas de Ingeniería se presenta el caso del flujo de un fluido en un conducto cuya sección transversal es anular. Si el tramo del conducto que interesa considerar está ubicado a continuación de la sección de entrada, el flujo estará en una condición que se denomina en desarrollo. Adicionalmente, si el número de Reynolds ($Re_D \equiv U_m D_h / \nu$), parámetro que caracteriza el flujo desde el punto de vista dinámico, es menor que el valor crítico de transición, el flujo será laminar. Finalmente, si una de las condiciones que establece que el número de Reynolds es bajo para el caso en consideración, es que la viscosidad cinemática del fluido es alta, el número de Prandtl ($Pr \equiv \nu / \alpha$) del fluido será alto también, pudiéndose interpretar esto como que la difusión de la cantidad de movimiento lineal en el fluido será mayor que la de la energía en forma de calor.

Un ejemplo de aplicación lo constituye el caso del flujo de crudo pesado y extrapesado en un pozo vertical o tramo vertical de un pozo horizontal cuando el levantamiento del petróleo del fondo del pozo al cabezal es por bombeo mecánico (bomba accionada por un balancín) o con bomba de cavidades progresivas. En este caso hay dos complicaciones adicionales; la primera es que la sarta de cabillas que acciona la bomba y que constituye el cilindro interno del conducto anular, está en movimiento, y la segunda es que, para presiones en el interior del conducto inferiores al punto de burbujeo del crudo (presión a la cual aparece la primera burbuja de gas natural disuelto en el crudo en un proceso cuasi-equilibrio a temperatura constante), el flujo es bifásico.

En la Unidad Docente y de Investigación de Transferencia de Calor se desarrollan modelos de simulación numérica para ser utilizados en convección de calor en sistemas bifásicos mediante la aplicación del método de volúmenes finitos desarrollado por Patankar (1980). En este método, se integran las ecuaciones que rigen el fenómeno en estudio sobre cada uno de los volúmenes de control en que halla sido subdividido el dominio de solución. Esta integración, distingue este método de las otras técnicas de

dinámica computacional de fluidos y el resultado es que se garantizan los principios de conservación en todo el dominio y en cada sub-dominio. Esta clara relación entre el algoritmo numérico y los principios de conservación son el aspecto más fuerte del método de volúmenes finitos (Versteeg y Malalasekera, 1995).

Este Trabajo Especial es la continuación de una serie iniciada con el de Gil (1998), en los que se emplea el método de volúmenes finitos para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales parciales que constituyen el modelo matemático (Heinbockel, 1996), implementando un algoritmo de solución mediante un código computacional. En el mismo se determinará el campo de velocidad y el de temperatura de varios casos de flujo laminar en desarrollo de un fluido con alto número de Prandtl en un conducto de sección transversal anular concéntrica. Los resultados de este trabajo, fueron validados con los obtenidos de la solución analítica para flujo desarrollado de un fluido con número de Prandtl próximo a la unidad, (Kays y Perkins, 1985). Además, los resultados fueron comparados con los obtenidos mediante la correlación empírica para flujo en desarrollo (Whitaker, 1972).

La Transferencia de Calor por convección en conductos anulares concéntricos ha sido ampliamente estudiada por Kays y Perkins (1985) y Shah y Bhatti (1987). Estos autores estudiaron el flujo laminar desarrollado, tanto dinámica como térmicamente, de fluidos con $Pr \approx 1$, para el caso en el que una superficie está aislada térmicamente y en la otra está prescrita la temperatura, y para el caso en el que ambas superficies tienen prescrito el flujo de calor.

Incropera y DeWitt (1996) afirman que los “problemas de longitud de entrada combinada” (aquellos en los que las capas límite dinámica y térmica se desarrollan a partir de la sección de entrada al conducto) dependen del número de Prandtl. El flujo laminar en conductos anulares en desarrollo dinámico y térmico de fluidos con número de Prandtl próximo a la unidad ha sido poco estudiado, habiendo realizado Feldman *et al.* (1982a y 1982b) trabajos para conductos anulares excéntricos.

Feldman et al. (1982a) y Shah y Bhatti (1987), entre otros, definen la longitud dinámica de entrada Le_d con el criterio de que la velocidad máxima del fluido sea el 99 % de la velocidad máxima para la condición de flujo dinámicamente desarrollado. No obstante, otros autores definen la longitud dinámica de entrada como la distancia axial, medida desde la sección de entrada, requerida para que el coeficiente de fricción local (para

fluido newtoniano: $(C_{f=} = \frac{-2\nu \frac{\partial U}{\partial r}|_{r=R}}{U_m^2})$ disminuya hasta 1.05 veces el correspondiente

valor para la condición de flujo dinámicamente desarrollado. La longitud dinámica de entrada para flujo laminar (Le_{dlam}) queda determinada con: $Le_{dlam} \approx 0.05 Re_D D_h$.

El desarrollo de la capa límite térmica para flujo interno en un conducto anular, es análogo al de la capa límite dinámica, y Shah y Bhatti (1987) definen la longitud térmica de entrada Le_t como la distancia longitudinal, medida desde la sección donde comienza a transferirse calor hacia o desde el fluido, que se requiere para que el número de

Nusselt local ($Nu_D \equiv \frac{D_h \frac{\partial T}{\partial r}|_{r=R}}{T_s - T_m}$) disminuya a 1.05 veces el valor que corresponde a la

condición de flujo térmicamente desarrollado, criterio que no se corresponde con el que utilizan estos autores para definir Le_d . Si el calor se transfiere a partir de la sección de entrada, la longitud térmica de entrada para flujo laminar ($Le_{t,lam}$) es: $Le_{t,lam} \approx 0.05 Re_D Pr D_h$, mientras que si el calor comienza a transferirse hacia o desde el fluido, estando ya el flujo dinámicamente desarrollado, Mills (1994) propone: $Le_{t,lam} = 0.017 Re_D Pr D_h$.

Sin embargo, Feldman et al. (1982b) afirman tomar “arbitrariamente” como longitud térmica de entrada aquella en la que se cumple que la temperatura adimensional promedio (cociente de diferencias de temperaturas en las que el sustraendo es la temperatura del fluido en la sección de entrada) sea el 99 % de la temperatura adimensional promedio para la condición de flujo térmicamente desarrollado, lo que es consistente con el criterio que utilizan estos otros autores para definir la longitud dinámica de entrada.

Para flujo laminar, Whitaker (1972) recomienda que se tomen en cuenta los efectos de entrada si se cumple: $(Gz_D |_{x=L})^{1/3} (\mu / \mu_s)^{0.14} \geq 2$, donde Gz_D es el número de Graetz: $Gz_D \equiv Re_D Pr D_h / x$, evaluado en $x = L$: longitud del segmento de conducto “medida desde la sección en la que comienza a transferirse calor hacia o desde el fluido”.

En la revisión bibliográfica realizada por Segura et al. (2004) no se encontraron trabajos en los que hallan sido estudiadas las regiones de entrada dinámica y térmica para flujo laminar de líquidos con altos números de Prandtl en conductos anulares.

El flujo interno de líquidos con valor alto de viscosidad cinemática ($\nu \geq 10^{-5} \text{ m}^2 / \text{s}$) y valor bajo a moderado del producto de la velocidad media del fluido por el diámetro hidráulico de la sección transversal al flujo ($U_m D_h \leq 0.005 \text{ m}^2 / \text{s}$), se caracteriza dinámicamente por tener un valor bajo del número de Reynolds ($Re_D \leq 500$) menor que el valor crítico de transición a flujo turbulento para flujo interno ($Re_{D \text{ crítico}} \approx 2300$), por lo que el flujo es laminar. Adicionalmente, un valor alto de la viscosidad cinemática ν implica que, para líquidos con valor bajo a moderado de difusividad térmica ($\alpha \leq 10^{-7} \text{ m}^2 / \text{s}$), el número de Prandtl es alto ($Pr \geq 100$), lo que ocasiona que el desarrollo térmico se alcance a longitudes de entrada mucho mayores que el desarrollo dinámico.

El problema que se abordará en este trabajo consiste en estudiar, con el método de volúmenes finitos, las regiones de entrada dinámica y térmica para flujo bidimensional y permanente laminar en desarrollo de fluidos con alto número de Prandtl en conductos anulares concéntricos.

El objetivo general del Trabajo Especial que aquí se presenta es: analizar por vía numérica (mediante el método de volúmenes finitos) la Transferencia de Calor por convección para flujo bidimensional laminar ($Re_D \leq 500$) en desarrollo (dinámico y térmico) y régimen permanente de fluidos con alto número de Prandtl ($Pr \geq 100$) en

conductos de sección transversal anular concéntrica ($0 \leq D_i / D_o \leq 1$), partiendo del código computacional desarrollado en FORTRAN por Gil (1998).

Lo anterior se logró con la consecución de los siguientes objetivos específicos:

- ✦ Actualizar y profundizar la revisión bibliográfica sobre los tópicos involucrados en el tema a estudiar.
- ✦ Modificar el código computacional desarrollado por Gil (1998) para que incluya el sistema de coordenadas cilíndricas, tomando en consideración la singularidad que se presenta en $r = 0$.
- ✦ Incluir en el código computacional una rutina que sirva para aplicar el criterio de discernimiento entre flujo en desarrollo y flujo desarrollado, en base a la velocidad máxima y la diferencia de temperatura adimensional máxima y en base al coeficiente de fricción local y el número de Nusselt local.
- ✦ Incluir en el código computacional una rutina que permita imponer las condiciones de frontera de flujo de calor prescrito en la superficie del cilindro interno, en la del externo o en ambas.
- ✦ Validar el código computacional comparando los resultados que se obtengan con el código computacional y los obtenidos de la solución analítica de Kays y Crawford (1980) y de la correlación empírica de Whitaker (1972), Considerando los casos límite en los que el conducto anular degenera en un conducto circular ($D_i \rightarrow 0$) y en un conducto conformado por dos placas paralelas y semi-infinitas ($D_i \rightarrow D_o$).
- ✦ Simular con el código computacional al menos 64 casos diferentes, correspondientes a cuatro valores de Re_D x cuatro valores de Pr x cuatro valores de D_i / D_o .
- ✦ Analizar los resultados, concluir y recomendar con miras a trabajos futuros, a la luz de visualizaciones en 3D (dos variables geométricas independientes: r y z , y una variable dependiente: velocidad o temperatura, al estilo de Bejan, 1993).

El código computacional fue elaborado en lenguaje de programación FORTRAN 90-95 y las visualizaciones fueron realizadas con Tecplot 9.0. Los casos a considerar en el estudio del flujo bidimensional en desarrollo dinámico y térmico en régimen permanente, objeto del Trabajo Especial que se propone son: a lo sumo 125 casos diferentes, correspondientes a cinco valores del número de Reynolds ($Re_D \leq 500$) x cinco valores del número de Prandtl ($Pr \geq 100$) x cinco valores de la relación de diámetros ($0 < D_i / D_o < 1$), además de dos casos límite en los que el conducto anular degenera en un conducto circular ($D_i \rightarrow 0$) y en un conducto conformado por dos placas paralelas y semi-infinitas ($D_i \rightarrow D_o$).

CAPÍTULO 1

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El modo de transferencia de calor por convección se compone de dos mecanismos.

Además de la transferencia de energía debida al movimiento microscópico aleatorio (*difusión*), la energía también se transfiere mediante el movimiento global o macroscópico del fluido.

El movimiento del fluido se asocia con el hecho de que, en cualquier instante, grandes números de partículas se mueven en forma colectiva o como agregados. Tal movimiento, en presencia de un gradiente de temperatura, contribuye a la transferencia de calor.

Como a nivel microscópico se mantiene el movimiento aleatorio, la transferencia total de calor se debe entonces a una superposición de transporte de energía por dicho movimiento aleatorio y por el movimiento global del fluido. Se acostumbra a utilizar el término *convección* cuando se hace referencia a este transporte acumulado y el término *advección* cuando se habla del transporte debido al movimiento volumétrico del fluido.

1.1- EL PROBLEMA DE GRAETZ

El problema de determinar las características térmicas de un fluido que entra en una sección calentada a lo largo de un conducto recto se ha estudiado por varios autores para el caso particular de flujo laminar Newtoniano. Cuando el número de Prandtl característico de las propiedades físicas del fluido es más grande que la unidad, uno puede asumir que las condiciones fluidodinámicas a la entrada están completamente desarrolladas y entonces es posible derivar las expresiones analíticas para el desarrollo del número de Nusselt y la distribución de temperatura en la sección

transversal como en la entrada del fluido en la región calentada. Este problema ha sido conocido como el “el problema de Graetz” desde Graetz lo resolvió en 1883 y 1885 para fluidos Newtonianos; después, en 1910, Nusselt independientemente analizó el mismo problema en tal gran detalle como que algunos textos se refieren a él como “el problema de Graetz-Nusselt”.

El número de Graetz es un término adimensional que viene dado por:

$$Gz = \frac{\pi Pe}{4 L/D} = \frac{\pi}{4} \frac{Re Pr}{L/D} = \frac{\pi D^2 V \rho Cp}{4 k L} = \frac{\pi D^2 V}{4 \alpha L} \quad (1.1)$$

Donde:

$$Pr = \frac{Cp \mu}{k} \quad (1.2)$$

$$Re = \frac{DV\rho}{\mu} = \frac{DV}{\nu} = \frac{DG}{\mu} = \frac{4 \dot{m}}{\pi \mu D} \quad (1.3)$$

$$Pe = Re \times Pr = \frac{DV\rho Cp}{k} = \frac{DV}{\alpha} \quad (1.4)$$

Pr: Número de Prandtl

Re: Número de Reynolds

Pe: Número de Peclet

V: Velocidad de flujo

ρ : Densidad

μ : Viscosidad dinámica

ν : Viscosidad cinemática

α : Difusividad térmica;

$$\alpha = \frac{k}{\rho Cp}$$

D: diámetro equivalente

Cp: Calor específico

G: Caudal másico superficial; $G = V\rho = \frac{4 \dot{m}}{\pi D^2} = \frac{4 Q \rho}{\pi D^2}$

\dot{m} : Caudal másico

1.2- REGIONES DE ENTRADA

1.2.1- Longitud Dinámica de Entrada

Algunos autores (Feldman *et al.*, 1982a; Shah y Bhatti, 1987) definen la longitud dinámica de entrada con el criterio de que la velocidad máxima sea el 99 % de la velocidad máxima para la condición de flujo monofásico fluidodinámicamente desarrollado. Por otra parte, se puede definir la longitud dinámica de entrada como la distancia axial, medida desde la sección de entrada, requerida para que el factor de fricción local disminuya hasta 1.05 veces su valor para la condición de flujo monofásico fluidodinámicamente desarrollado. La longitud dinámica de entrada para flujo monofásico laminar (Lef_{lam}) queda determinada con:

$$Lef_{lam} \approx 0.05 Re D_h \quad (1.5)$$

Donde Re es el número de Reynolds que viene dado por:

$$Re = \frac{V_m D_h}{\nu} = \frac{\rho V_m D_h}{\mu} \quad (1.6)$$

Siendo V_m la velocidad media del fluido en la sección transversal del conducto anular y ν , ρ y μ , respectivamente, la viscosidad cinemática, la densidad y la viscosidad dinámica del fluido evaluadas a \bar{T}_m).

1.2.2- Longitud Térmica de Entrada

El desarrollo de la capa límite térmica para flujo interno en un conducto, es análogo al de la capa límite fluidodinámica, y se puede definir la longitud térmica de entrada Le_t como la distancia longitudinal, medida desde la sección donde comienza a transferirse calor hacia o desde el fluido, que se requiere para que el número de Nusselt local Nu_z disminuya a 1.05 veces del valor correspondiente para la condición de flujo monofásico térmicamente desarrollado (Shah y Bhatti, 1987). Si el calor se transfiere a partir de la sección de entrada, la longitud térmica de entrada para flujo monofásico laminar (Let_{lam}) es:

$$Let_{lam} \approx 0.05 Re Pr D_h \quad (1.7)$$

Donde Pr es el número de Prandtl, que viene dado por:

$$Pr = \frac{v}{\alpha} = \frac{c_p \mu}{k} \quad (1.8)$$

Siendo α y c_p la difusividad térmica y el calor específico a presión constante del fluido evaluados a \bar{T}_m).

Mientras que si el calor comienza a transferirse hacia o desde el fluido, estando ya el flujo monofásico fluidodinámicamente desarrollado, entonces (Mills, 1994):

$$Let_{lam} = 0.017 Re Pr D_h \quad (1.9)$$

Sin embargo, Feldman *et al.* (1982b) afirman tomar “arbitrariamente” como longitud de entrada térmica aquella en la que se cumple que la temperatura adimensional promedio (cociente de diferencias de temperaturas en las que el sustraendo es la temperatura del fluido en la sección de entrada) sea el 99 % de la temperatura

adimensional promedio para la condición de flujo monofásico térmicamente desarrollado.

Se denomina región térmica de entrada al tramo de conducto correspondiente a la longitud térmica de entrada. En esta región se manifiestan los denominados efectos térmicos de entrada que son debidos a la condición del flujo en desarrollo térmico. Si la longitud de la región térmica de entrada es significativa frente a la del segmento de conducto en consideración, despreciar tales efectos resultaría en una mala aproximación. Para flujo monofásico laminar, Whitaker (1972) recomienda que se tomen en cuenta los efectos térmicos de entrada si se cumple:

$$\left(\text{RePr} \frac{D_h}{L} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14} \geq 2 \quad (1.10)$$

Donde: L es la longitud del segmento de conducto “medida desde la sección en la que comienza a transferirse calor hacia o desde el fluido”, y μ_s es la viscosidad dinámica del fluido evaluada a T_s . (Segura *et al.* 2003)

1.3- INFLUENCIA DE LA TEMPERATURA SOBRE LAS PROPIEDADES DEL FLUÍDO

En numerosas aplicaciones se presentan casos de flujo en conductos en los que el tramo de interés está ubicado justamente a continuación de la sección de entrada, por lo que el perfil de velocidad del fluido varía con la distancia axial medida desde dicha sección. A esta condición se le conoce como flujo no desarrollado o en desarrollo. Por otra parte, si el fluido en consideración es petróleo (crudo) o aceite mineral, la viscosidad cinemática (ν) será alta, y por consiguiente el número de Prandtl ($\text{Pr} \equiv \nu / \alpha$) será alto también, pudiéndose interpretar esta cualidad del fluido como que la difusión de cantidad de movimiento lineal (momentum) es mayor que la de

energía en forma de calor. Adicionalmente, dado que el valor de ν es alto en los casos de interés de este trabajo, el número de Reynolds ($Re_D \equiv U_m D_h / \nu$) que caracteriza el flujo desde el punto de vista dinámico es bajo y menor que el valor crítico de transición, por lo que el flujo es laminar.

Mills (1994) clasifica a los fluidos, de acuerdo a su número de Prandtl, en: metales líquidos ($Pr \ll 1$), gases (y líquidos diferentes a los de las otras dos categorías) ($Pr \sim 1$) y aceites (incluidos los diferentes tipos de crudo) ($Pr \gg 1$). Este trabajo se enfoca en estos últimos, que para el intervalo de temperatura de interés, la variación de las propiedades termofísicas es la siguiente: -5% para la densidad (ρ) y la conductividad térmica (k), $\pm 15\%$ para el calor específico a presión constante (Cp) y la difusividad térmica [$\alpha \equiv k / (\rho Cp)$] [las cuatro propiedades anteriores tienen comportamientos cuasi-lineales con la temperatura (T)] y -99% para ν , la viscosidad dinámica ($\mu \equiv \nu \rho$) y Pr [estas otras tres propiedades son no-lineales (en alto grado) con T] (Ávila y Martínez, 1998).

Con relación a su comportamiento reológico, los hidrocarburos de interés en este trabajo pueden considerarse fluidos newtonianos que se caracterizan porque su viscosidad cinemática es alta y varía significativamente con la temperatura. Según la ec. de Wright (ASTM, 2000), la función de ν con la temperatura es:

$$\nu = a_1 10^{10^{(b_1 - c_1 \log T_{abs})}} - d_1 \quad (1.11)$$

donde a_1 , b_1 , c_1 y d_1 son constantes positivas que dependen del sistema de unidades utilizado y del hidrocarburo que se esté considerando. Dado que $Pr \equiv \nu / \alpha$, lo dicho anteriormente para ν también se aplica a Pr , es decir, desde el punto de vista de su comportamiento térmico, los hidrocarburos en consideración se caracterizan porque su número de Prandtl es alto y varía significativamente con la temperatura.

CAPÍTULO 2

MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS

El método de volúmenes finitos consiste en dividir el dominio de cálculo en un número finito de volúmenes de control, de modo que cada nodo de la malla conformada pertenezca a un volumen de control. Las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento del flujo son integradas sobre cada uno de los volúmenes de control, utilizando para ello algún perfil seleccionado que exprese la variación de una función ϕ , entre dos nodos consecutivos que son utilizados para evaluar la integral requerida. El resultado de este proceso es la ecuación discreta que contiene los valores de ϕ para un grupo de nodos.

Por sus características, éste método no requiere un alto número de iteraciones para obtener la convergencia deseada, ya que en su proceso de solución satisface los principios de conservación sobre cualquier grupo de volúmenes de control, y sobre todo el dominio de cálculo (Versteeg y Malalasekera, 1995). Es por ello que presenta una gran ventaja ante los demás métodos numéricos de su especie. Los pasos a seguir para la aplicación de éste método comienzan por la generación de la malla, luego la discretización de las ecuaciones y finalmente la resolución de las mismas.

2.1- CAMPO DE FLUJO

La convección de una variable ϕ depende de la magnitud dirección y sentido del campo de velocidad. Para el desarrollo del método de volúmenes finitos en la mayoría de los casos prácticos casi nunca el campo de velocidad es conocido. Es por ello que se hace necesario el incluir la descripción de las técnicas existentes para el cálculo del campo de flujo. La ecuación general de difusión-advención o de transporte de ϕ en su forma diferencial puede ser escrita como:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\bar{V}) - \text{div}(\Gamma \text{grad}(\phi)) = S_\phi \quad (2.1)$$

Las ecuaciones de difusión-advención para cada componente de la velocidad (ecuaciones de momentum) se pueden obtener con la sustitución de ϕ en la ecuación general de transporte (2.1), por u_r , u_θ y u_z según sea el caso. Considerando también la ecuación de continuidad y la de energía, quedan las siguientes ecuaciones en coordenadas cilíndricas, las que describen el comportamiento fluido dinámico y térmico de la convección forzada en el flujo laminar:

Ecuación de Continuidad:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(u_z) = 0 \quad (2.2)$$

Ecuaciones de Momentum:

$$\text{En } r: \quad \frac{Du_r}{Dt} - \frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + g_r \quad (2.3)$$

$$\text{En } \theta: \quad \frac{Du_\theta}{Dt} + \frac{u_r u_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left(\nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2} \right) + g_\theta \quad (2.4)$$

$$\text{En } z: \quad \frac{Du_z}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 u_z + g_z \quad (2.5)$$

$$\text{Donde,} \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.6)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.7)$$

Ecuación de Energía:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = k\nabla^2 T + \Phi \quad (2.8)$$

La solución de este sistema de ecuaciones, presenta algunos inconvenientes a saber: los términos advectivos de las ecuaciones son no lineales y las primeras tres ecuaciones están intrínsecamente acopladas, debido a que cada componente de la velocidad aparece en la respectiva ecuación de momentum y en la de continuidad, y estas tres a su vez están acopladas con la ecuación de energía puesto que se esta considerando que las propiedades del fluido (ρ, μ, \dots) varían con la temperatura.

Pero la verdadera dificultad para el cálculo del campo de velocidad se encuentra en desconocer previamente la distribución de presión y en no poder contar con una ecuación que permita determinarla. El gradiente de presión forma parte del término fuente de las ecuaciones de momentum.

El procedimiento de solución para la ecuación de transporte para una propiedad ϕ , utilizando el método de volúmenes finitos, será usado para la solución de las ecuaciones de momentum. Pero los inconvenientes descritos, como la relación entre la velocidad y la presión, requieren que se le de un tratamiento especial a la solución de estas ecuaciones.

2.2- MALLA DE CÁLCULO

El método de volúmenes finitos comienza con la discretización del dominio del flujo y de las demás ecuaciones de transporte. Primero, se requiere decidir donde evaluar las componentes de la velocidad. Parece lógico decidirse por colocarlas en la misma posición de otras variables escalares como la presión y la temperatura. Sin embargo, evaluar la velocidad y la presión para un mismo volumen de control, da como resultado que una distribución de presión altamente no uniforme, podría actuar similar a una uniforme en las ecuaciones de momentum discretizadas. Esto se puede

observar con una distribución de presiones alternada (zig-zag). La cual no puede ser considerada como real.

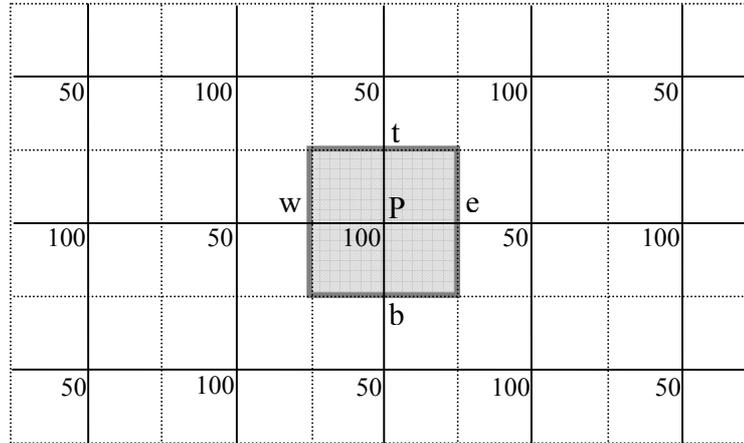


Fig. 2.1: Campo en "zig-zag"

El término de gradiente de presión en la ecuación de momentum en r , puede ser discretizado como sigue:

$$\frac{\partial(P)}{\partial r} = \frac{P_e - P_w}{\delta r} = \frac{\frac{P_E - P_P}{2} - \frac{P_W - P_P}{2}}{\delta r} = \frac{P_E - P_W}{\delta r} \quad (2.9)$$

de igual manera el gradiente de presión en la ecuación de cantidad de movimiento en z , se evalúa como:

$$\frac{\partial(P)}{\partial z} = \frac{P_t - P_b}{\delta z} \quad (2.10)$$

Eso significa que la ecuación de momentum tendrá la diferencia de presiones entre nodos adyacentes, lo cual disminuye la precisión de la solución. Si se sustituyen los valores de la malla mostrada en la Fig. (2.1), se verifica que los gradientes de presión de este campo en particular no tendrían ningún efecto sobre la ecuación de cantidad de movimiento.

Situación similar se presenta cuando se trata de discretizar la ecuación de continuidad. La ecuación de continuidad bidimensional permanente y con densidad constante puede escribirse como $du_r/dr + du_z/dz + u_r/r = 0$, si se integra sobre el volumen de control de la Fig. 2.2, se obtiene que: $u_{r,e} - u_{r,w} = 0$ y $u_{r,t} - u_{r,b} = 0$. Si una vez más se supone un perfil lineal para u_r se tiene:

$$\left(\frac{u_{rE} + u_{rP}}{2}\right) - \left(\frac{u_{rP} + u_{rW}}{2}\right) = 0 \Rightarrow u_{rE} - u_{rW} = 0 \quad (2.11)$$

$$\left(\frac{u_{rT} + u_{rP}}{2}\right) - \left(\frac{u_{rP} + u_{rB}}{2}\right) = 0 \Rightarrow u_{rT} - u_{rB} = 0 \quad (2.12)$$

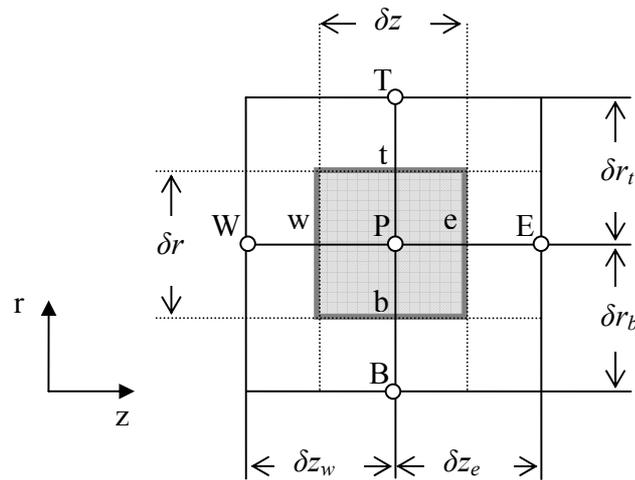


Fig. 2-2: Volumen de control, caso bidimensional

Esta discretización demanda la igualdad de las velocidades en los nodos alternos, y no en los adyacentes. Esta dificultad puede resolverse cambiando la malla para cada variable dependiente. En esta malla desplazada, las componentes de la velocidad son calculadas para los puntos que yacen en las caras o superficies de los volúmenes de control, tal como se muestra en la Fig. 2.3

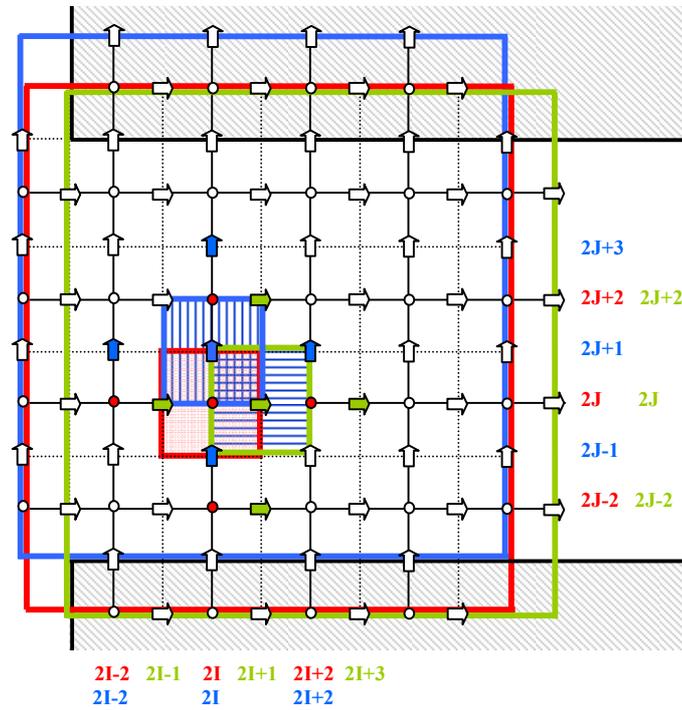


Fig. 2-3: Malla desplazada

Si la distribución de presión es conocida, la solución de las ecuaciones de momentum se realiza de manera similar a cualquier otra variable escalar. Desde la generación de la malla desplazada (Fig.2.3), se requiere de una nueva notación. En esta notación los nodos donde se evalúa la velocidad (u_r) en la dirección r , son los de la forma (i,J) , para la velocidad (u_z) los de la forma (I,j) , y la presión y demás variables escalares son evaluados en las intersecciones (I,J) . En base a esta nueva notación, las ecuaciones de momentum (2.3, 2.4, 2.5), luego de discretizarlas quedan como sigue:

$$a_{i,J}u_{r,i,J} = \sum a_{nb}u_{r,nb} - (P_{I-1,J} - P_{I,J})A_{i,J} + b_{i,J} \tag{2.13}$$

donde $A_{i,J}$ es el área de la cara oeste o este del volumen de control para la velocidad u_r , bajo esta nueva notación los nodos E , W , T , y B están dentro de la sumatoria de $a_{nb}u_{r,nb}$.

De manera similar r se obtiene la ecuación discreta para la velocidad u_z

$$a_{I,j}u_{zI,j} = \sum a_{nb}u_{znb} - (P_{I,J-1} - P_{I,J})A_{I,j} + b_{I,j} \quad (2.14)$$

Los coeficientes de estas ecuaciones se calculan según el esquema seleccionado (diferencias centradas, corriente arriba (upwind), híbrido, ley de potencia (power law)),

Para la solución de estas ecuaciones se requiere conocer la distribución de presión, es por ello que se hace necesaria la aplicación de algún método que permita el cálculo de la presión.

2.3- ALGORITMO DE SOLUCIÓN

Uno de los métodos más utilizados en dinámica de fluidos computacional para la resolución de dinámica de fluidos es el método SIMPLE desarrollado por Patankar (1979) logra acoplar de forma “semi-implícita” las ecuaciones de continuidad y de momentum para poder resolverlas por medio de un procedimiento iterativo de una forma alternada.

Luego, se presentaron ciertas variaciones en este método, dando origen al método SIMPLER también desarrollado por Patankar en 1980, en el cual la ecuación de continuidad discretizada sustituye a la ecuación de corrección de presión para obtener la ecuación discreta para el campo de presión. Sin embargo este método continúa usando correcciones para la velocidad.

Estos métodos se basan en el hecho de corregir la velocidad a partir de la corrección de presión obtenida en cada iteración, y son empleados para los casos en los que los campos de velocidad solo dependen de la presión.

Sin embargo, existen casos en los cuales el campo de velocidad también depende de la temperatura, tal es el caso de los problemas de convección libre, y de los problemas en los cuales por la naturaleza del fluido la temperatura afecta notoriamente las propiedades del mismo. Para fluidos con $Pr \gg 1$ (como es el caso de los aceites) la variación de la temperatura produce un cambio significativo en la viscosidad cinemática (ν), por lo que el campo de velocidad no solo depende del campo de presión sino también del campo de temperatura..

Para reflejar este fenómeno físico es necesario resolver las ecuaciones de continuidad, momentum y energía en un mismo sistema. Con éste propósito es que Sheng *et al* (1998) acoplan dichas ecuaciones e introducen el método SIMPLET (el cual es una modificación del método SIMPLE), que toma en cuenta las variaciones de temperatura para calcular la presión y de éste modo poder corregir el campo de velocidad.

Con la finalidad de acoplar la ecuación discreta de energía en nuestro algoritmo de solución y a la vez tener mejoras en la convergencia de la solución, además de desarrollar unas ecuaciones efectivas para la solución de los campos de presión y temperatura es que se decide implementar un método que agrupa las dos variantes en cuestión del método SIMPLE: una combinación entre los métodos SIMPLER y SIMPLET, el cual denominamos como algoritmo SIMPLERT.

El esquema del algoritmo se muestra a continuación en la Fig. 2-4:

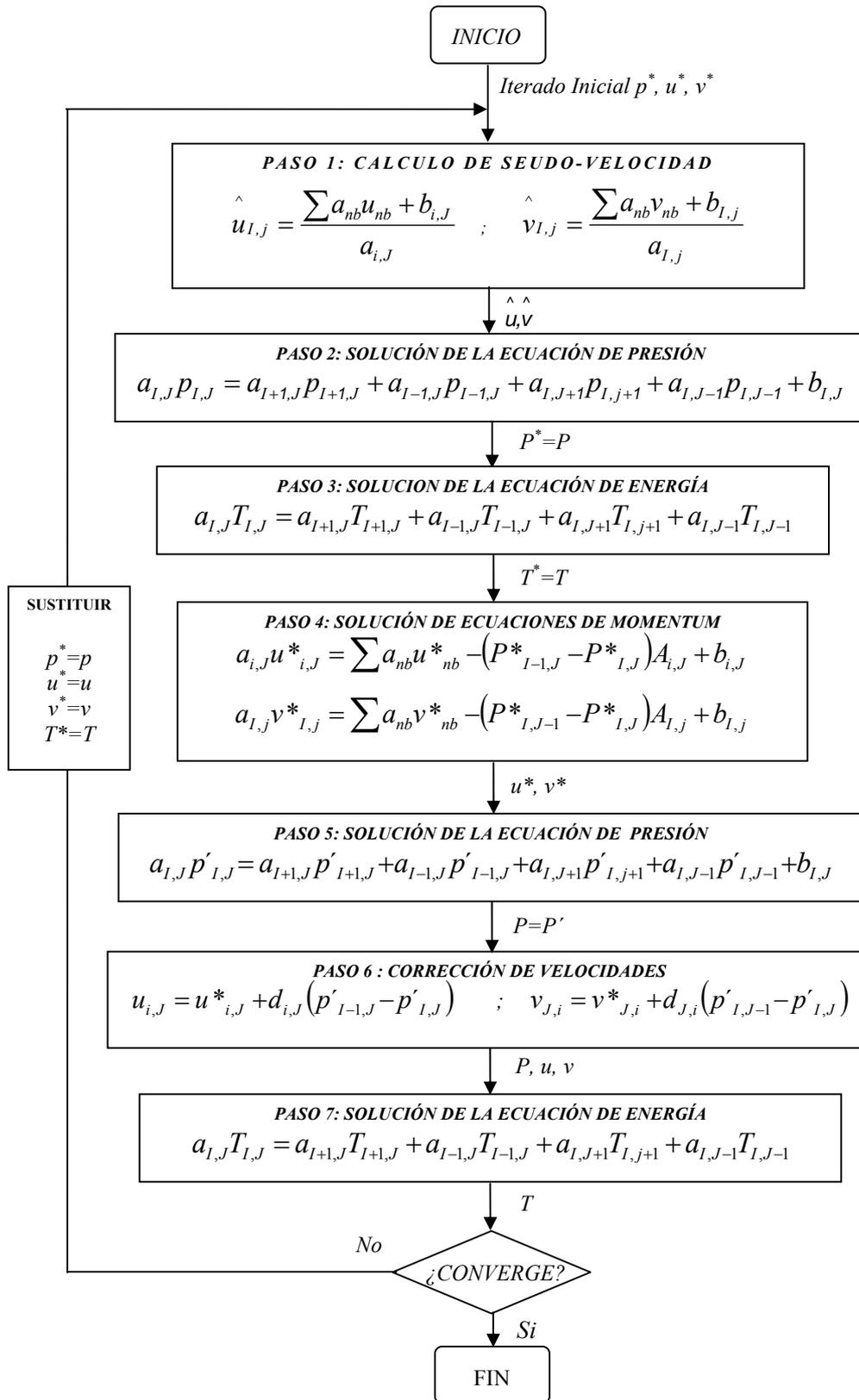


Fig. 2-4: Algoritmo SIMPLERT

CAPÍTULO 3

MODELO MATEMÁTICO

Aplicando los principios de conservación de la masa, de la cantidad de movimiento lineal y de la energía, y las ecuaciones constitutivas del fenómeno físico de la convección se obtiene el modelo matemático, para el caso particular de flujo laminar entre dos cilindros concéntricos horizontales.

La configuración geométrica y el sistema coordinado a utilizar para el desarrollo del modelo matemático para convección laminar entre cilindros concéntricos horizontales se muestran en la Fig. (3.1). En éste caso, se tiene que el flujo es axisimétrico, es por ello que todos los términos $\partial/\partial\theta$ son nulos, por lo que la descripción del fenómeno se puede realizar de forma bidimensional.

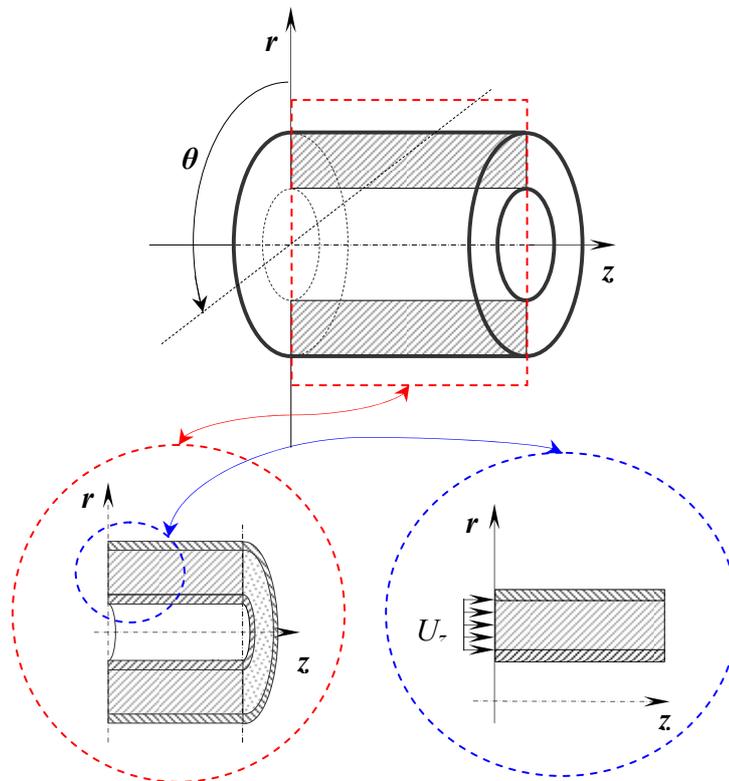


Fig. 3-1: Vistas de la configuración geométrica

La orientación del conducto será completamente vertical, este tendrá una longitud (L_z) y una separación entre cilindros de ($R_o - R_i$).

3.1- SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

El modelo matemático se desarrolla en coordenadas cilíndricas y bajo las siguientes consideraciones:

- 1) Flujo permanente ($\partial/\partial t = 0$), incompresible y laminar bidimensional, ($\partial/\partial \theta = 0$)
- 2) Fluido Newtoniano con propiedades dependientes de la temperatura ($\rho, \mu, k, C_p, \text{etc.}$)
- 3) No se toman en cuenta las fuerzas de campo (Gravitacional) ($g_r = 0, g_z = 0$)
- 4) Se desprecia la disipación viscosa de calor frente a otras tasas de flujo de calor ($\Phi = 0$)

Las ecuaciones de las Propiedades dependientes de la temperatura: ($\rho, \mu, k, C_p \dots$) son obtenidas mediante las siguientes funciones:

Tabla 3-1: Ecuaciones para las propiedades termofísicas de los aceites

Propiedad	Función Aproximada
Densidad (ρ) (kg/m ³)	$\rho = A_\rho + B_\rho T$
Viscosidad Cinemática (ν) (m ² /s)	$\nu = (10^{10^{A_\nu + B_\nu T}} - 0.7) \cdot 10^{-6}$
Conductividad Térmica (k) (W/m.K)	$k = A_k + B_k T$
Calor Específico (C_p) (J/kg.K)	$C_p = A_{C_p} + B_{C_p} T$
Viscosidad Dinámica (μ) (Pa.s)	$\mu = \nu \rho$
Difusividad Térmica (α) (m ² /s)	$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$

En el Anexo 2 podemos encontrar los valores de los coeficientes para los diferentes aceites a utilizar (ver Tabla A2-1).

Por lo que las ecuaciones de los principios de conservación antes mencionados (ec.2.2-2.8) se pueden escribir como:

Ecuación de Continuidad:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

Ecuación de Momentum en r:

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) \quad (3.2)$$

Ecuación de Momentum en z:

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \quad (3.3)$$

Ecuación de la Energía:

$$\rho \cdot C_p \left(u_r \frac{\partial T}{\partial r} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (3.4)$$

3.2- CONDICIONES DE CONTORNO

Para las superficies de los dos cilindros se supone la condición de que el flujo ocurre sin deslizamiento, y con temperatura superficial prescrita:

Tabla 3-2: Condiciones en las paredes

$r = r_i$	$r = r_o$
$u_r(r_i, z) = 0$	$u_r(r_o, z) = 0$
$u_z(r_i, z) = 0$	$u_z(r_o, z) = 0$
$T(r_i, z) = T_{si}$	$T(r_o, z) = T_{so}$

En el caso en que las temperaturas superficiales queden determinadas por el flujo de calor a través de las superficies, T_{si} y T_{so} serán obtenidas mediante la aplicación de la ley de Fourier, esto es:

$$q_s'' = -k \frac{\partial T}{\partial r} \tag{3.5}$$

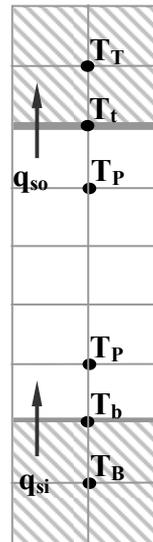


Fig. 3-2: Evaluación del flujo de calor en las superficies de los cilindros

Tabla 3-3: Flujo de calor en las paredes

Para la superficie del cilindro interno:	Para la superficie del cilindro externo:
$q_{si} = k_w \cdot A_w \cdot \frac{T_w - T_P}{\delta r}$	$q_{so} = -k_e \cdot A_e \cdot \frac{T_E - T_P}{\delta r}$

Para la sección de entrada, se supone un perfil de velocidad uniforme y perpendicular al plano z . Para la temperatura, también se supone un perfil de temperatura uniforme para toda la sección de entrada, quedando:

Tabla 3-4: Condiciones en la sección de entrada

$z=0$	$u_z(r,0)=u_{zi}$	$u_r(r,0)=0$	$T(r,0)=T_i$
-------	-------------------	--------------	--------------

Para la sección de salida, se supone flujo dinámica y térmicamente desarrollado

Tabla 3-5: Condiciones en la sección de salida

$z=L_z$	$\partial u/\partial z=0$	$u_r(r,L_z)=0$	$\partial T/\partial z=0$
---------	---------------------------	----------------	---------------------------

Esto lo que quiere decir es que el fluido debe recorrer una distancia mínima L_z tal que permita su desarrollo, tanto fluido dinámico como térmico. La magnitud de esta longitud mínima dependerá de la configuración geométrica de la sección del conducto, de las propiedades termo-físicas del fluido y de las propias condiciones de contorno.

3.3- SOLUCIÓN ANALÍTICA PARA FLUJO DESARROLLADO

La transferencia de calor de un fluido que pasa a través de un conducto de sección anular es un problema de particular interés y de considerable importancia técnica, puesto que ambas superficies pueden ser calentadas independientemente. El conducto anular concéntrico es usado en numerosos mecanismos de dinámica de fluidos y transferencia de calor que involucra a dos fluidos. Uno de los fluidos pasa a través del tubo interno, mientras que el otro fluye entre los dos tubos que conforman el conducto anular. Un caso limitante del conducto anular ($r^*=1$) es el conducto plano, mientras que el otro ($r^*=0$) es un conducto circular con un núcleo infinitesimal en su centro. No obstante la presencia del núcleo infinitesimal en el centro, la mayoría de los resultados de flujos de fluidos y transferencia de calor para $r^*=0$ llegan a ser idénticos que aquellos para un conducto circular sin el núcleo infinitesimal.

El sistema anular y la nomenclatura a ser empleada son mostrados en la Fig. 3.3

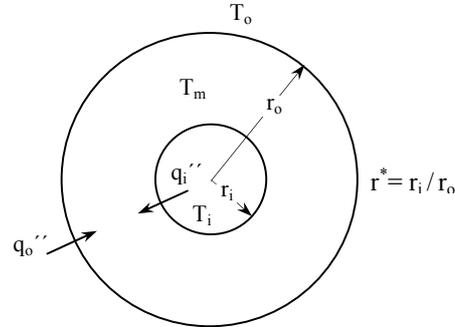


Fig. 3-3: Nomenclatura para el flujo en un conducto de sección anular

Consideraciones Fluido-Dinámicas. Distribución de velocidad

El perfil de velocidad completamente desarrollado en conductos anulares concéntricos viene dado por (Kays y Crawford, 1980):

$$u = -\frac{1}{4\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) r_o^2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_o} \right)^2 + 2r_m^{*2} \ln \left(\frac{r}{r_o} \right) \right] \quad (3.6)$$

$$u_m = -\frac{1}{8\mu} \left(\frac{dp}{dx} \right) r_o^2 (1 + r^{*2} - 2r_m^{*2}) \quad (3.7)$$

$$\frac{u_{\max}}{u_m} = \frac{2(1 - r_m^{*2} + 2r_m^{*2} \ln r_m^*)}{1 + r^{*2} - 2r_m^{*2}} \quad (3.8)$$

Aquí r_m designa el radio en el cual ocurre la velocidad máxima ($\partial u / \partial r = 0$). Viene dado por:

$$r_m^* = \frac{r_m}{r_o} = \left(\frac{1 - r^{*2}}{2 \ln(1/r^*)} \right)^{1/2} \quad (3.9)$$

Lundgren *et al.* (Kays y Perkins, 1985) calculó la velocidad completamente desarrollada para el caso anular como:

$$\frac{u}{\bar{V}} = 2 \left[\frac{r_o^2 - r^2 - 2r_m^2 \ln(r_o/r)}{r_o^2 + r_i^2 - 2r_m^2} \right]; \quad r_m^2 = \frac{r_o^2 - r_i^2}{2 \ln(r_o/r_i)} \quad (3.10)$$

En donde r_i y r_o son respectivamente, los radios interno y externo del conducto anular y r es la coordenada radial. La posición de máxima velocidad es denotada por r_m .

CAPÍTULO 4

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS AL MODELO MATEMÁTICO

Una vez formulado el modelo matemático que describe el fenómeno físico de flujo laminar entre cilindros concéntricos se procede a la implantación del modelo numérico de solución. El modelo numérico se desarrolla empleando el método de volúmenes finitos debido a la garantía que este ofrece para el cumplimiento de los principios de conservación tanto para todo el dominio de cálculo como para cada subdominio (Versteeg y Malalasekera, 1995).

Para la discretización mediante el método de los volúmenes finitos se utiliza el esquema híbrido. Este esquema es ampliamente usado para el computo de dinámica de fluidos, debido a que garantiza el cumplimiento de los principios de conservación, posee las ventajas del esquema de diferencias centradas cuando la difusión es elevada y las del esquema corriente arriba (upwind) cuando la advección prevalece sobre la difusión, por lo que los resultados que se obtienen son físicamente realistas (Versteeg y Malalasekera, 1995).

Como algoritmo para la obtención del campo de flujo se utiliza el algoritmo SIMPLERT, con el cual se hace más estable desde el punto de vista computacional, la obtención del campo de flujo y disminuye el tiempo de convergencia de la solución.

4.1- DISCRETIZACIÓN DEL DOMINIO DE CÁLCULO

Como primer paso en el desarrollo del modelo numérico (para la aplicación del método) se requiere la discretización del dominio de cálculo. Esta discretización se hace según el esquema de la malla desplazada (Fig.2.3) con la cual se puede obtener de manera adecuada el campo de flujo. La discretización utilizada se muestra en las

Figuras 4.1 y 4.2, en las cuales se muestran los sistemas tridimensional y bidimensional representados por la sección longitudinal de dos cilindros concéntricos.

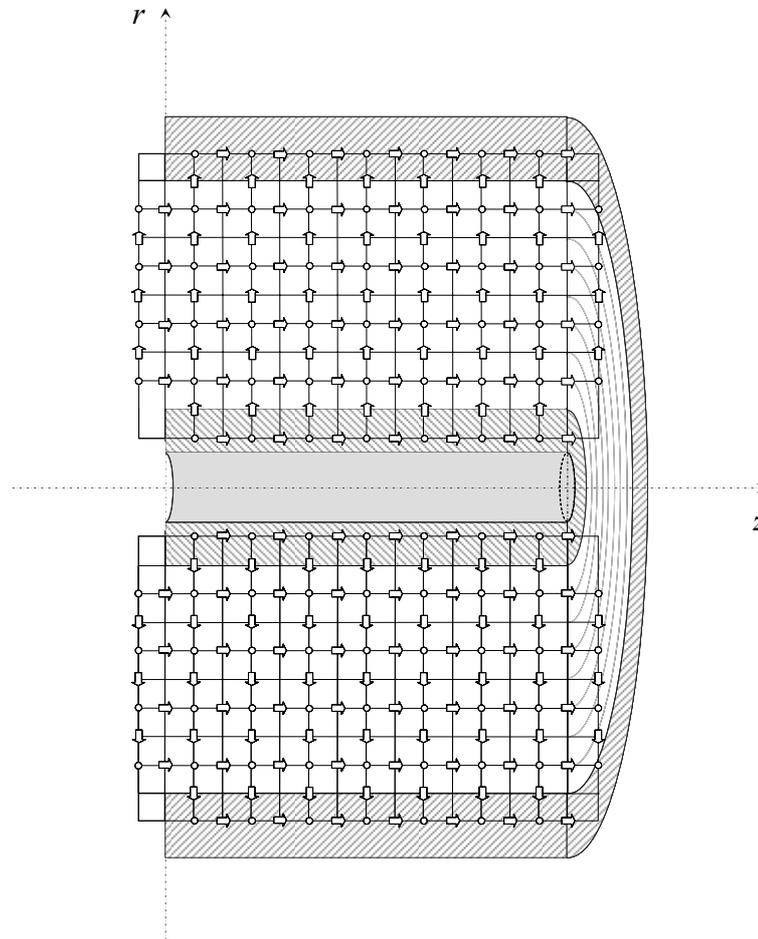


Fig. 4-1: Sección longitudinal del dominio de cálculo discretizado (perspectiva)

Las partes sombreadas de la malla en la Figura 4.2 representan las paredes de los cilindros y el número de nodos viene dado por la expresión $(2N_z+2) \times (2N_r+2)$. En esta discretización los valores de presión y temperatura se evalúan en los nodos representados por un círculo con ubicación $(2i, 2j)$, la componente de la velocidad en dirección radial "r" en los nodos cuya representación es una flecha vertical ubicada en $(2i+1, 2j)$, y la componente de la velocidad en la dirección axial "z" en los nodos representados por una flecha horizontal ubicada en $(2i, 2j+1)$. Se dispuso la malla de manera tal que para las secciones de entrada y de salida coincidan con las interfaces

de los nodos de cálculo para la presión. De este modo se pueden aplicar las condiciones de contorno de velocidades normales conocidas para los nodos de entrada de la presión.

Para los nodos en los cuales se requiera el valor de una propiedad que no se encuentre definida, simplemente se toma como valor de dicha propiedad un promedio entre los nodos vecinos al nodo a evaluar.

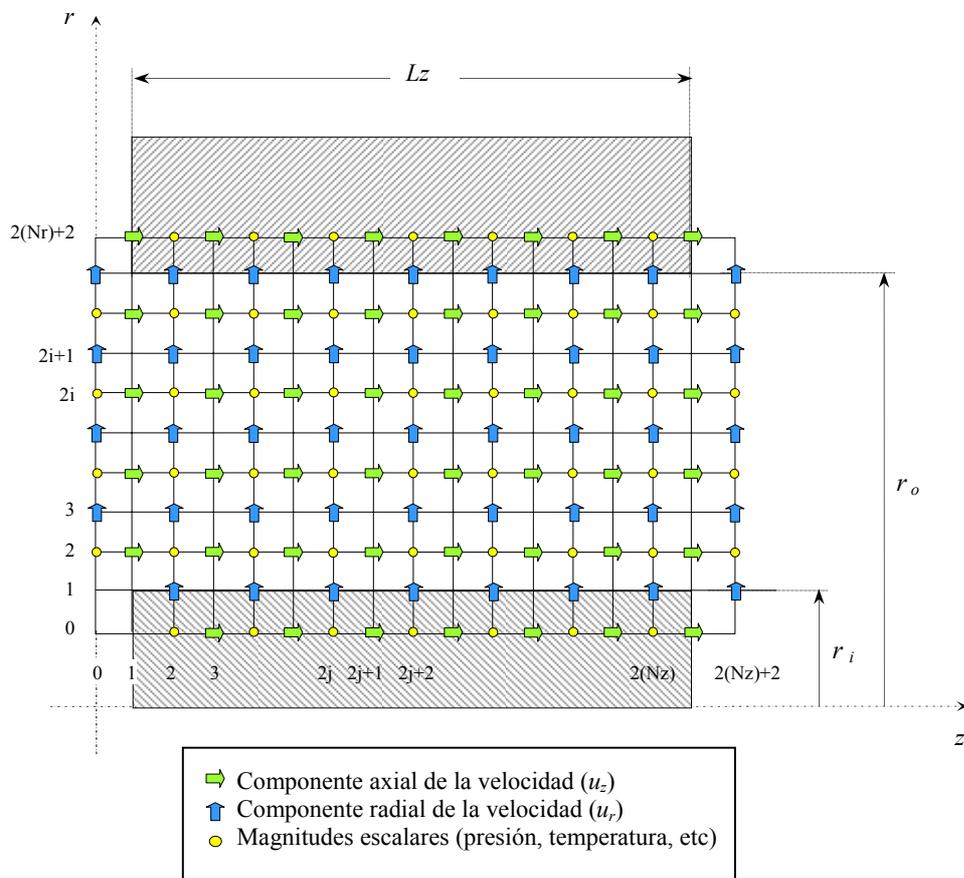


Fig. 4-2: Sección longitudinal del dominio de cálculo discretizado (elevación)

Una vez definida la malla de cálculo se procede a la integración de las ecuaciones de continuidad, momentum y energía para obtener las ecuaciones discretizadas definidas en el algoritmo SIMPLERT para su aplicación en la solución del modelo matemático.

4.2- DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Partiendo de la ecuación diferencial de continuidad:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} (\rho u_r r) \right) + r \left(\frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) \right) = 0 \quad (4.1)$$

Integrando sobre el volumen de control ($dVol = dr d_{theta} dz$: de "b" a "t", de 0 a 2π y de "w" a "e"):

$$\int_w^e \int_0^{2\pi} \int_b^t \frac{\partial}{\partial r} (\rho r u_r (r, P)) dr d\theta dz + \int_b^t \int_0^{2\pi} \int_w^e r \rho \left(\frac{\partial}{\partial z} u_z (P, z) \right) dz d\theta dr \quad (4.2)$$

Resolviendo la integral:

$$2 \rho t u_r(t, P) \pi (e - w) - 2 \rho b u_r(b, P) \pi (e - w) + \frac{1}{2} (2 \rho u_z(P, e) \pi - 2 \rho u_z(P, w) \pi) (t^2 - b^2) = 0 \quad (4.3)$$

$$\text{Donde:} \quad t^2 - b^2 = 2 P \Delta r \quad (4.4)$$

Se obtiene finalmente la ecuación discretizada, la cual queda de la forma:

$$\left((\rho r u_r)_t - (\rho r u_r)_b \right) \Delta z + \left((\rho u_z)_e - (\rho u_z)_w \right) r \Delta r = 0 \quad (4.5)$$

4.3- DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE MOMENTUM

4.3.1- Componente en "r" vertical

Partiendo de la ecuación diferencial de momentum para la componente radial:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} (\rho u_r^2) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z u_r) \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu \left(\frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right)}{r} \right) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \right) \right) \quad (4.6)$$

Integrando sobre el volumen de control ($dVol = d_r d_{theta} dz$: de "b" a "t", de 0 a 2π y de "w" a "e"):

$$\begin{aligned}
& \int_w^e \int_0^{2\pi} \int_b^t 2 \rho u_r(r, P) \left(\frac{\partial}{\partial r} u_r(r, P) \right) dr d\theta dz + \int_b^t \int_0^{2\pi} \int_w^e \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z(P, z) u_r(P, z)) dz d\theta dr = \\
& - \int_w^e \int_0^{2\pi} \int_b^t \frac{\partial}{\partial r} p(r, P) dr d\theta dz + \int_w^e \int_0^{2\pi} \int_b^t \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu \left(\frac{\partial}{\partial r} (r u_r(r, P)) \right)}{r} \right) dr d\theta dz \\
& + \int_b^t \int_0^{2\pi} \int_w^e \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial}{\partial z} (u_r(P, z)) \right) \right) dz d\theta dr
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Resolviendo la integral:

$$\begin{aligned}
& 2 \rho u_r(t, P)^2 \pi (e - w) - 2 \rho u_r(b, P)^2 \pi (e - w) + 2 \rho u_z(P, e) u_r(P, e) \pi (t - b) \\
& - 2 \rho u_z(P, w) u_r(P, w) \pi (t - b) = -2 p(t, P) \pi (e - w) + 2 p(b, P) \pi (e - w) \\
& \frac{2 \mu \left(- \left(\frac{\partial}{\partial t} (t u_r(t, P)) \right) b + \left(\frac{\partial}{\partial b} (b u_r(b, P)) \right) t \right) \pi (e - w)}{ew} \\
& + 2 \mu \left(\frac{\partial}{\partial e} u_r(P, e) \right) \pi (t - b) - 2 \mu \left(\frac{\partial}{\partial w} u_r(P, w) \right) \pi (t - b)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Se obtiene finalmente la ecuación discretizada, la cual queda de la forma:

$$\begin{aligned}
& \left((\rho u_r^2)_t - (\rho u_r^2)_b \right) \Delta z + \left((\rho u_z u_r)_e - (\rho u_z u_r)_w \right) \Delta r = -(p_t - p_b) \Delta z \\
& + \left(\left(\frac{\mu \left((r u_r)_T - (r u_r)_P \right)}{r \delta r} \right)_t - \left(\frac{\mu \left((r u_r)_P - (r u_r)_B \right)}{r \delta r} \right)_b \right) \Delta z \\
& + \left(\left(\frac{\mu (u_{rE} - u_{rP})}{\delta z} \right)_e - \left(\frac{\mu (u_{rP} - u_{rW})}{\delta z} \right)_w \right) \Delta r
\end{aligned} \tag{4.9}$$

4.3.2- Componente en "z" horizontal

Partiendo de la ecuación diferencial de momentum para la componente radial:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}(\rho u_z u_r)\right) + \left(\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z^2)\right) = -\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) + \frac{\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r \left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right)}{r} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right)\right) \quad (4.10)$$

Multiplicando por "r"

$$r\left(\frac{\partial}{\partial r}(\rho u_z u_r)\right) + r\left(\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z^2)\right) = -r\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r \left(\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right) + r\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right)\right) \quad (4.11)$$

Integrando sobre el volumen de control. ($dVol = dr d_{theta} dz$: de "b" a "t", de 0 a 2π y de "w" a "e"):

$$\begin{aligned} & \int_w^e \int_0^{2\pi} \int_b^t \frac{\partial}{\partial r}(\rho r u_r(r, P) u_z(r, P)) dr d\theta dz - \int_w^e \int_0^{2\pi} \int_b^t \rho u_r(P, P) u_z(P, P) dr d\theta dz \\ & + \int_b^t \int_0^{2\pi} \int_w^e r \left(\frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z(P, z)^2)\right) dz d\theta dr = - \int_b^t \int_0^{2\pi} \int_w^e r \left(\frac{\partial}{\partial z} p(P, z)\right) dz d\theta dr \\ & + \int_w^e \int_0^{2\pi} \int_b^t \frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r \left(\frac{\partial}{\partial r} u_z(r, P)\right)\right) dr d\theta dz + \int_b^t \int_0^{2\pi} \int_w^e r \left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \left(\frac{\partial}{\partial z} u_z(P, z)\right)\right)\right) dz d\theta dr \end{aligned} \quad (4.12)$$

Resolviendo la integral:

$$\begin{aligned} & 2\rho t u_r(t, P) u_z(t, P) \pi(e-w) - 2\rho b u_r(b, P) u_z(b, P) \pi(e-w) \\ & - 2\rho u_r(P, P) u_z(P, P) (t-b) \pi(e-w) + \frac{1}{2} \left(2\rho u_z(P, e)^2 \pi - 2\rho u_z(P, w)^2 \pi\right) (t^2 - b^2) = \\ & - \frac{1}{2} \left(2p(P, e)\pi - 2p(P, w)\pi\right) (t^2 - b^2) + 2\mu t \left(\frac{\partial}{\partial r} u_z(t, P)\right) \pi(e-w) \\ & - 2\mu b \left(\frac{\partial}{\partial b} u_z(b, P)\right) \pi(e-w) \\ & + \frac{1}{2} \left(2\mu \left(\frac{\partial}{\partial e} u_z(P, e)\right) \pi - 2\mu \left(\frac{\partial}{\partial w} u_z(P, w)\right) \pi\right) (t^2 - b^2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Se obtiene finalmente la ecuación discretizada, la cual queda de la forma:

$$\begin{aligned}
& \left((\rho r u_r u_z)_t - (\rho r u_r u_z)_b \right) \Delta z - \rho u_r u_z \Delta r \Delta z + \left((\rho u_z^2)_e - (\rho u_z^2)_w \right) r \Delta r = \\
& -(p_e - p_w) r \Delta r + \left(\left(\frac{\mu r (u_{zT} - u_{zP})}{\delta r} \right)_t - \left(\frac{\mu r (u_{zP} - u_{zB})}{\delta r} \right)_b \right) \Delta z \\
& + \left(\left(\frac{\mu (u_{zE} - u_{zP})}{\delta z} \right)_e - \left(\frac{\mu (u_{zP} - u_{zW})}{\delta z} \right)_w \right) r \Delta r
\end{aligned} \tag{4.14}$$

4.3- DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE ENERGÍA

La discretización de la ecuación de energía se realiza de manera análoga a la de la ecuación de momentum en z, no aparece el término de la gravedad y los términos de velocidad son sustituidos por la temperatura, así como también aparece el calor específico (C_p) multiplicando a la densidad (ρ) y en lugar de la viscosidad dinámica (μ) aparece la conductividad térmica (k).

4.4- ECUACIÓN PARA EL CÁLCULO DE LA SEUDO-VELOCIDAD

La pseudo-velocidad definida en el algoritmo SIMPLERT (Fig. 2-4) se puede escribir como:

✦ **Seudo-Velocidad** \hat{u}_r

$$\hat{u}_{r \ 2i;2j+1} = \frac{a_T u_{rT} + a_B u_{rB} + a_E u_{rE} + a_W u_{rW}}{a_p} \tag{4.15}$$

donde:

$$a_p = a_T + a_B + a_E + a_W$$

a_T , a_B , a_E y a_W vienen dados por el esquema híbrido:

$$\begin{aligned}
 a_W &= \left\| F_w; \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right); 0 \right\| & a_E &= \left\| -F_e; \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right); 0 \right\| \\
 a_T &= \left\| -F_t; \left(D_t - \frac{F_t}{2} \right); 0 \right\| & a_B &= \left\| F_b; \left(D_b + \frac{F_b}{2} \right); 0 \right\|
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

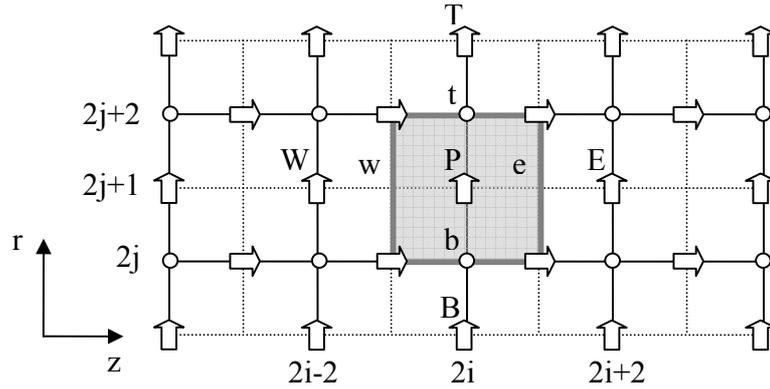


Fig. 4-3: Sección longitudinal del volumen de control para el cálculo de la velocidad radial “ u_r ”

Donde los valores de los flujos advectivos (F) y difusivos (D) vienen dados por:

$$\begin{aligned}
 F_e &= \rho_e (u_{ze}) A_e & F_w &= \rho_w (u_{zw}) A_w & F_t &= \rho_t (u_{rt}) A_t & F_b &= \rho_b (u_{rb}) A_b \\
 D_e &= \mu_e \frac{\delta z}{\delta r} & D_w &= \mu_w \frac{\delta z}{\delta r} & D_t &= \mu_t \frac{\delta r}{\delta z} & D_b &= \mu_b \frac{\delta r}{\delta z}
 \end{aligned}$$

✦ **Seudo-Velocidad \hat{u}_z**

$$\hat{u}_{z \ 2i+1;2j} = \frac{a_T u_{zT} + a_B u_{zB} + a_E u_{zE} + a_W u_{zW}}{a_p} \tag{4.17}$$

donde:

$$a_p = a_T + a_B + a_E + a_W$$

a_T , a_B , a_E y a_W vienen dados por el esquema híbrido (ver ecuaciones 4.16)

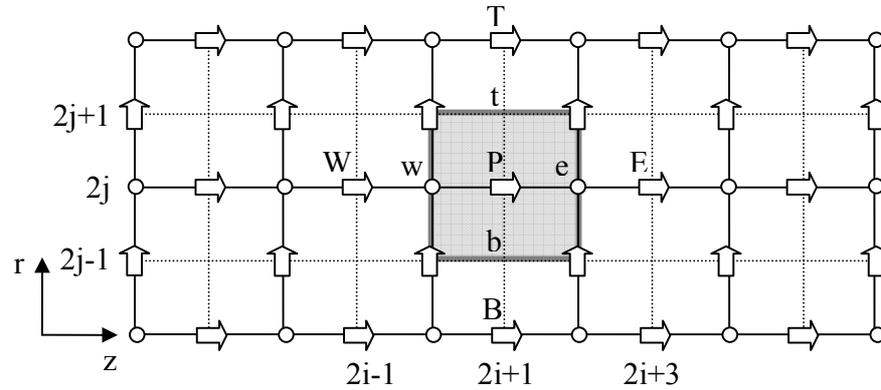


Fig. 4-4: Sección longitudinal del volumen de control para el cálculo de la velocidad axial “ u_z ”

Donde los valores de los flujos advectivos (F) y las conductancias difusivas (D) vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
 F_e &= \rho_e (u_{ze}) A_e & F_w &= \rho_w (u_{zw}) A_w & F_t &= \rho_t (u_{rt}) A_t & F_b &= \rho_b (u_{rb}) A_b \\
 D_e &= \mu_e \frac{\delta z}{\delta r} & D_w &= \mu_w \frac{\delta z}{\delta r} & D_t &= \mu_t \frac{\delta r}{\delta z} & D_b &= \mu_b \frac{\delta r}{\delta z}
 \end{aligned}$$

4.5- ECUACIÓN PARA EL CÁLCULO DE PRESIÓN

La ecuación de presión y de corrección de presión definida en algoritmo SIMPLERT (Fig. 2-4), se puede escribir como:

$$a_{2i,2j} p_{2i,2j} = a_{2i+2,2j} p_{2i+2,2j} + a_{2i-2,2j} p_{2i-2,2j} + a_{2i,2j+2} p_{2i,2j+2} + a_{2i,2j-2} p_{2i,2j-2} + b_{2i,2j} \quad (4.18)$$

Donde:

$$a_{2i,2j} = a_{2i+2,2j} + a_{2i-2,2j} + a_{2i,2j+2} + a_{2i,2j-2}$$

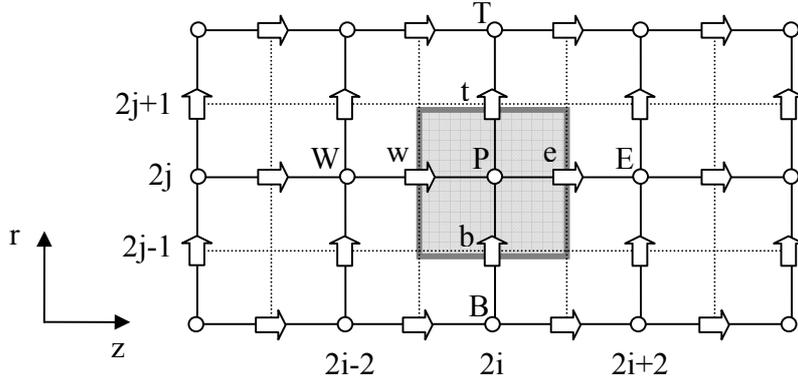


Fig. 4-5: Sección longitudinal del volumen de control para el cálculo de presión y temperatura

Y los coeficientes se obtienen de:

$$b_{2i,2j} = ((\rho \cdot r \cdot \hat{u}_r)_e - (\rho \cdot r \cdot \hat{u}_r)_w) \cdot \delta z + ((\rho \cdot \hat{u}_z)_t - (\rho \cdot \hat{u}_z)_b) \cdot r_p \cdot \delta r$$

$$b_{2i,2j} = \left(\frac{1}{2} (\rho_{2i+2,2j} + \rho_{2i,2j}) \cdot r_{2i+1,2j} \cdot u_{r,2i+1,2j} - \frac{1}{2} (\rho_{2i,2j} + \rho_{2i-2,2j}) \cdot r_{2i-1,2j} \cdot u_{r,2i-1,2j} \right) \cdot \delta z +$$

$$\left(\frac{1}{2} (\rho_{2i,2j+2} + \rho_{2i,2j}) \cdot u_{z,2i,2j+1} - \frac{1}{2} (\rho_{2i,2j} + \rho_{2i,2j-2}) \cdot u_{z,2i,2j-1} \right) \cdot r_{2i,2j} \cdot \delta r$$

$$a_{2i+2,2j} = (\rho dA)_{2i+1,2j} = \frac{1}{2} (\rho_{2i+2,2j} + \rho_{2i,2j}) \cdot \delta z \cdot d_{2i+1,2j}$$

$$a_{2i-2,2j} = (\rho dA)_{2i-1,2j} = \frac{1}{2} (\rho_{2i,2j} + \rho_{2i-2,2j}) \cdot \delta z \cdot d_{2i-1,2j}$$

$$a_{2i,2j+2} = (\rho dA)_{2i,2j+1} = \frac{1}{2} (\rho_{2i,2j+2} + \rho_{2i,2j}) \cdot \delta r \cdot d_{2i,2j+1}$$

$$a_{2i,2j-2} = (\rho dA)_{2i,2j-1} = \frac{1}{2} (\rho_{2i,2j} + \rho_{2i,2j-2}) \cdot \delta r \cdot d_{2i,2j-1}$$

siendo:

$$d_{2i+1,2j} = \frac{A_{2i+1,2j}}{(a_p)_{2i+1,2j}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{2i+1,2j} \cdot \delta z}{(a_p)_{2i+1,2j}}$$

$$d_{2i-1;2j} = \frac{A_{2i-1;2j}}{(a_p)_{2i-1;2j}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{2i-1;2j} \cdot \delta z}{(a_p)_{2i-1;2j}}$$

$$d_{2i;2j+1} = \frac{A_{2i;2j+1}}{(a_p)_{2i;2j+1}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{2i;2j+1} \cdot \delta r}{(a_p)_{2i;2j+1}}$$

$$d_{2i;2j-1} = \frac{A_{2i;2j-1}}{(a_p)_{2i;2j-1}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{2i;2j-1} \cdot \delta r}{(a_p)_{2i;2j-1}}$$

4.6- ECUACIÓN DE ENERGÍA

La forma discreta de la ecuación de energía (ec. 3.4) se puede escribir según el método de volúmenes finitos con esquema híbrido como:

$$a_p T_{2i;2j} = a_T T_T + a_B T_B + a_E T_E + a_W T_W \quad (4.19)$$

donde:

$$a_p = a_T + a_B + a_E + a_W$$

a_T , a_B , a_E y a_W vienen dados por el esquema híbrido (ver ecuaciones 4.16)

Ver Fig. 4-5

El flujo advectivo y las conductancias difusivas las podemos escribir como:

$$\begin{aligned} F_e &= (\hat{u}_{ze}) A_e & F_w &= (\hat{u}_{zw}) A_w & F_t &= (\hat{u}_{rt}) A_t & F_b &= (\hat{u}_{rb}) A_b \\ D_e &= \alpha_e \frac{\delta z}{\delta r} & D_w &= \alpha_w \frac{\delta z}{\delta r} & D_t &= \alpha_t \frac{\delta r}{\delta z} & D_b &= \alpha_b \frac{\delta r}{\delta z} \end{aligned}$$

donde α es el valor de la difusividad térmica del fluido.

4.7- ECUACIÓN DE MOMENTUM EN DIRECCIÓN RADIAL (r)

La ecuación de cantidad de movimiento en dirección “r” (ec. 3.2) discretizada según el método de los volúmenes de control esquema híbrido es de la forma.

$$a_p u_r^*_{2i;2j+1} = a_T u_{rT} + a_B u_{rB} + a_E u_{rE} + a_W u_{rW} + \delta z (p_{2i;2j} - p_{2i;2j+2}) \quad (4.20)$$

donde:

$$a_p = a_T + a_B + a_E + a_W$$

a_T , a_B , a_E y a_W vienen dados por el esquema híbrido (ver ecuaciones 4.16)

Ver Fig. 4-3

Donde los valores de los flujos advectivos (F) y difusivos (D) vienen dados por:

$$\begin{aligned} F_e &= \rho_e (u_{ze}) A_e & F_w &= \rho_w (u_{zw}) A_w & F_t &= \rho_t (u_{rt}) A_t & F_b &= \rho_b (u_{rb}) A_b \\ D_e &= \mu_e \frac{\delta z}{\delta r} & D_w &= \mu_w \frac{\delta z}{\delta r} & D_t &= \mu_t \frac{\delta r}{\delta z} & D_b &= \mu_b \frac{\delta r}{\delta z} \end{aligned}$$

4.8- ECUACIÓN DE MOMENTUM EN DIRECCIÓN AXIAL (z)

La ecuación de cantidad de movimiento en dirección “z” (ec. 3.3) discretizada según el método de los volúmenes de control esquema híbrido es de la forma:

$$a_p u_z^*_{2i+1;2j} = a_T u_{zT} + a_B u_{zB} + a_E u_{zE} + a_W u_{zW} + \delta r (p_{2i;2j} - p_{2i+2;2j}) \quad (4.21)$$

donde:

$$a_p = a_T + a_B + a_E + a_W$$

a_T , a_B , a_E y a_W vienen dados por el esquema híbrido (ver ecuaciones 4.16)

Ver Fig. 4-4

Donde los valores de los flujos advectivos (F) y difusivos (D) vienen dados por:

$$\begin{aligned} F_e &= \rho_e (u_{ze}) A_e & F_w &= \rho_w (u_{zw}) A_w & F_t &= \rho_t (u_{rt}) A_t & F_b &= \rho_b (u_{rb}) A_b \\ D_e &= \mu_e \frac{\delta z}{\delta r} & D_w &= \mu_w \frac{\delta z}{\delta r} & D_t &= \mu_t \frac{\delta r}{\delta z} & D_b &= \mu_b \frac{\delta r}{\delta z} \end{aligned}$$

4.9- CORRECCIÓN DE LA VELOCIDAD

Si se tiene un campo de corrección de presiones distinto a cero, quiere decir que el campo de velocidades calculado por medio de las ecuaciones discretas no es el correcto. Por lo cual se debe corregir por medio de las ecuaciones del algoritmo SIMPLERT. Las cuales se pueden escribir como:

$$u_{r2i;2j+1} = u_r^*_{2i;2j+1} + d_{2i;2j+1} (p'_{2i-2;2j} - p'_{2i;2j}) \quad (4.22)$$

$$u_{z2i+1;2j} = u_z^*_{2i+1;2j} + d_{2i+1;2j} (p'_{2i;2j-2} - p'_{2i;2j}) \quad (4.23)$$

donde:

$$d_{2i+1;2j} = \frac{A_{2i+1;2j}}{(a_p)_{2i+1;2j}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{2i+1;2j} \cdot \delta z}{(a_p)_{2i+1;2j}}$$

$$d_{2i;2j+1} = \frac{A_{2i;2j+1}}{(a_p)_{2i;2j+1}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{2i;2j+1} \cdot \delta r}{(a_p)_{2i;2j+1}}$$

4.10- IMPOSICIÓN DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO

Para la resolución de las ecuaciones discretas para la presión, velocidades y temperatura se requiere la imposición de las condiciones de contorno descritas en el modelo matemático.

La malla de cálculo se extiende fuera de la frontera teniéndose que los valores de entrada serán impuestos entre los nodos de las filas 0 y 1 (Fig.4-2) y los de salida entre los nodos de las filas $2(Nz)+1$ y $2(Nz)+2$ según la variable estudiada.

4.10.1- Condiciones de Contorno Fluido-Dinámicas

A continuación se muestran las celdas de cálculo para establecer las condiciones de contorno dinámicas en las secciones de entrada, de salida y en las superficies de los cilindros que están en contacto con el fluido. En ellas se muestran las celdas vecinas “activas” las cuales actúan en las ecuaciones discretas.

Para la sección de entrada ($z = z_i$), que corresponde con los nodos de la fila 1 , la velocidad radial “ u_r ” es igual a cero, ya que justamente es a partir de ese nodo en que se comienza a presentar dicha componente del campo de velocidad.

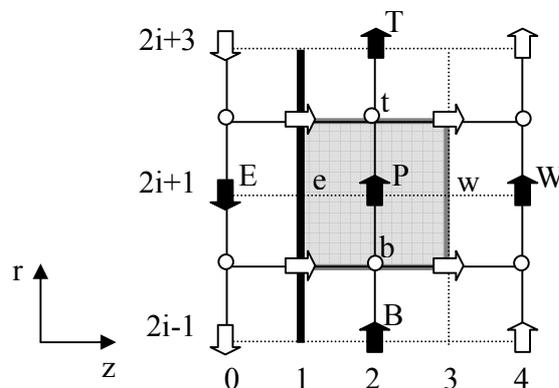


Fig. 4-6: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la velocidad “ u_r ” sección de entrada

El valor de la velocidad axial " u_z " en la sección de entrada viene dado por un valor que puede ser prescrito (V_i) o calculado en función del número de Reynolds del fluido a la entrada del conducto (Re_i).

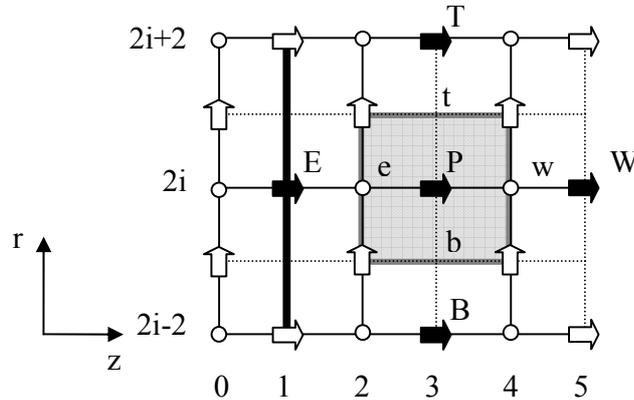


Fig. 4-7: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la velocidad " u_z " sección de entrada

Para la sección de salida ($z = z_o$), que corresponde con los nodos de la fila $2(Nz)+1$, la velocidad radial " u_r " es igual a cero, ya que a partir de ese nodo el campo de velocidad solo tiene como componente la dirección axial (u_z).

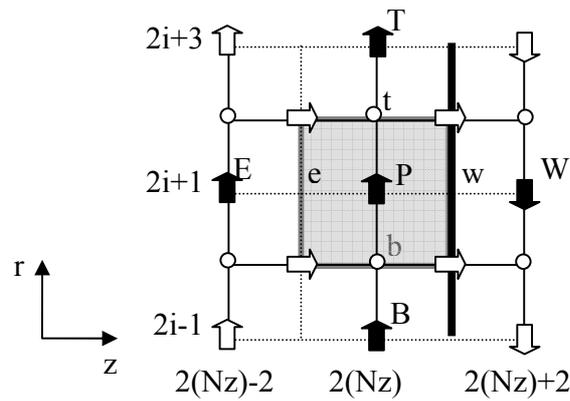


Fig. 4-8: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la velocidad " u_r " sección de salida

Para el valor de la velocidad axial " u_z " en la sección de salida se considerará un perfil de velocidad uniforme haciendo que los últimos tres nodos consecutivos tengan el mismo valor de u_z .

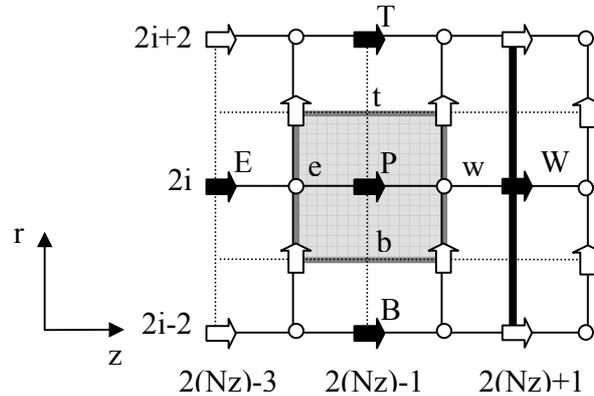


Fig. 4-9: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la velocidad " u_z " sección de salida

Para la pared del cilindro interno ($r = r_i$), que corresponde con los nodos de la columna 1, la velocidad radial " u_r " es igual a cero, al igual que la velocidad axial " u_z " que también es cero.

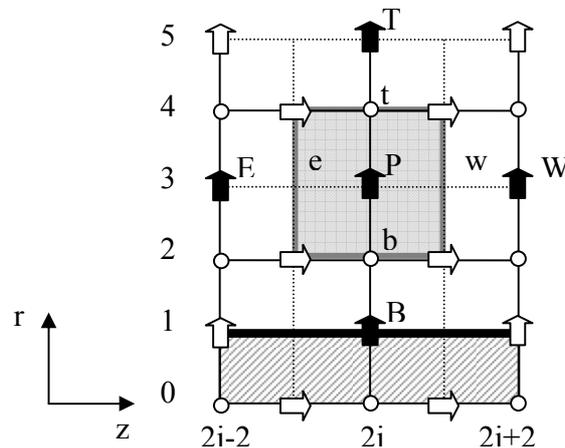


Fig. 4-10: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la velocidad " u_r " pared del cilindro interior

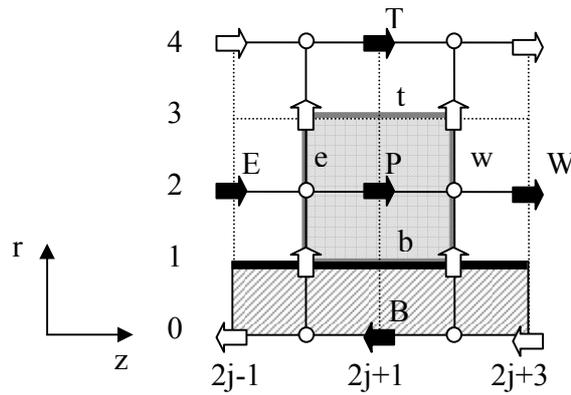


Fig. 4-11: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la velocidad “ u_z ” pared del cilindro interior

Para la pared del cilindro externo ($r = r_o$), que corresponde con los nodos de la columna $2(Nr)+1$, la velocidad radial “ u_r ” es igual a cero, al igual que la velocidad axial “ u_z ” que también es cero.

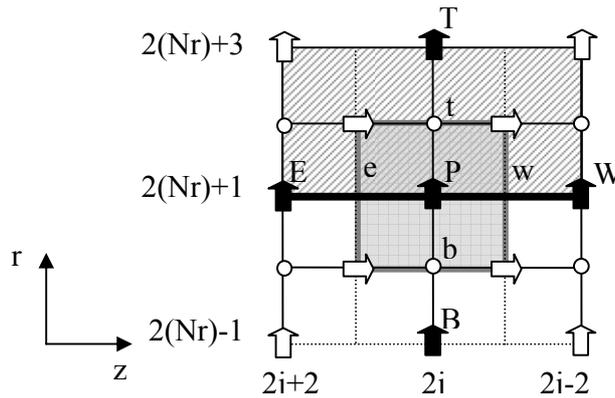


Fig. 4-12: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la velocidad “ u_r ” pared del cilindro exterior

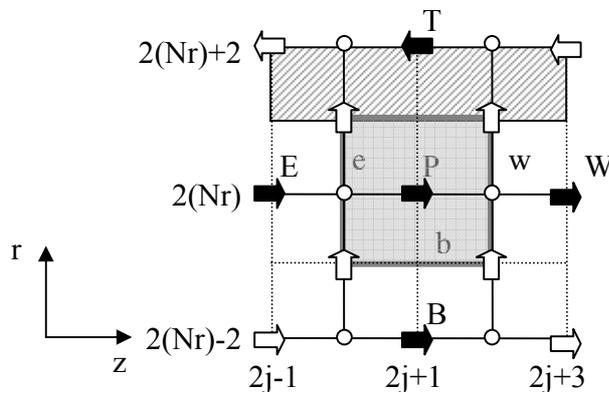


Fig. 4-13: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la velocidad “ u_z ” pared del cilindro exterior

4.10.2- Condiciones de Contorno Térmicas

A continuación se muestran los volúmenes de control de cálculo para establecer las condiciones de contorno térmicas en las secciones de entrada, de salida y en las superficies de los cilindros que están en contacto con el fluido. En ellas se muestran las celdas vecinas “activas” las cuales actúan en las ecuaciones discretas.

Para la sección de entrada ($z = z_i$), que corresponde con los nodos de la fila I , la temperatura de entrada es la denominada como T_i , la cual tendrá un valor prescrito.

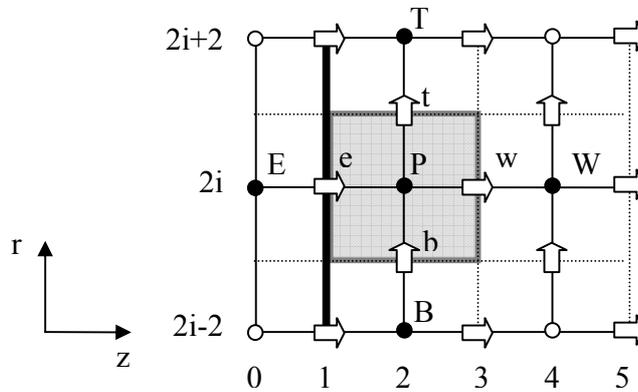


Fig. 4-14: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la temperatura “T” sección de entrada

Para la sección de salida ($z = z_o$), que corresponde con los nodos de la fila $2(Nz)+I$, la temperatura de salida es la denominada como T_o , la cual tendrá un valor constante.

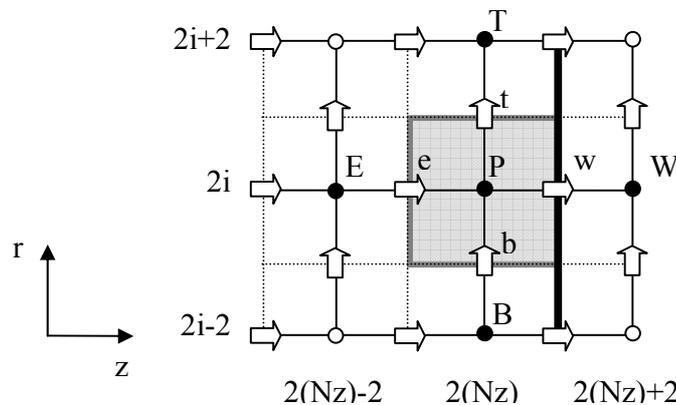


Fig. 4-15: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la temperatura “T” sección de salida

Para la pared del cilindro interno ($r = r_i$), que corresponde con los nodos de la columna l , se tendrá una temperatura " T_{si} " o un flujo de calor " q_{si} " prescrito.

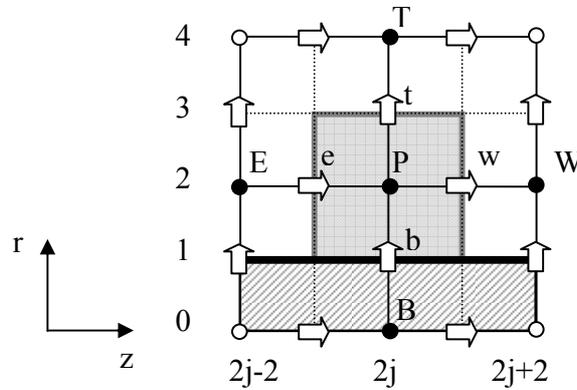


Fig. 4-16: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la temperatura "T" pared del cilindro interior

Para la pared del cilindro externo ($r = r_o$), que corresponde con los nodos de la columna $2(Nr)+l$, se tendrá una temperatura " T_{so} " o un flujo de calor " q_{so} " prescrito.

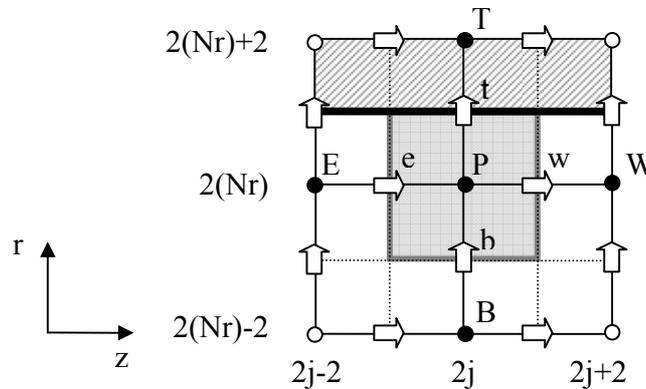


Fig. 4-17: Sección longitudinal de la celda de cálculo para la temperatura "T" pared del cilindro exterior

4.11- SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS

De la aplicación de las ecuaciones discretas de momentum, presión y energía, para todos los nodos del dominio de cálculo discreto, resultan sistemas de ecuaciones bidimensionales los cuales deben ser resueltos. Para la solución de estos sistemas de

ecuaciones se utiliza el algoritmo de Thomas aplicado a sistemas bidimensionales. Realizándose dos barridos alternados, uno en dirección abajo-arriba y otro en dirección oeste-este, en los cuales se suponen conocidos de la iteración anterior las variables Este-Oeste y Arriba-Abajo; respectivamente. De cada barrido se obtiene entonces un sistema de ecuaciones tridiagonal el cual se puede resolver aplicando el algoritmo de Thomas.

4.12- DESARROLLO DEL ALGORITMO DE SOLUCIÓN

Para el cálculo del campo de velocidad, presión y temperatura se sigue la secuencia del algoritmo SIMPLERT. A continuación se establece la secuencia de los procedimientos a realizar por medio de un código computacional (Programa CONVEC Anexo 1).

- 1- Suponer un campo de velocidades u_r^* y u_z^*
- 2- Calcular el campo de Seudo-Velocidad \hat{u}_r y \hat{u}_z . Utilizando las ecs. (4.1 y 4.2) y el campo de velocidad supuesto u_r^* y u_z^*
- 3- Calcular el campo de Presión p a partir del de seudo-velocidad \hat{u}_r y \hat{u}_z , aplicando la ec. (4.3)
- 4- Igualar $p^* = p$
- 5- Calcular el campo de Temperatura T a partir del de seudo-velocidad \hat{u}_r y \hat{u}_z , aplicando la ec. (4.3)
- 6- Igualar $T^* = T$
- 7- Calcular el campo de velocidad u_r^* y u_z^* , utilizando las ecs. (4.4 y 4.5) y el campo de presión p^* .

- 8- Calcular la corrección de presión p' , a partir del campo de velocidad u_r^* y u_z^* con la aplicación de la ec. (4.6)
- 9- Calcular el campo de velocidad u_r y u_z . Corrigiendo el campo de velocidad u_r^* y u_z^* , a partir de la corrección de presión p' .
- 10- Calcular el campo de temperatura T a partir del campo de velocidad u_r y u_z
- 11- Verificar la convergencia de los campos de presión y velocidad. Si la convergencia no se ha logrado, se repite el procedimiento desde el paso 2.

El cálculo del campo de temperatura se realiza dentro del ciclo iterativo del algoritmo SIMPLERT debido a que esta propiedad tiene influencia sobre el campo de flujo.

CAPÍTULO 5

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el siguiente capítulo se analizan los resultados obtenidos mediante la utilización del programa desarrollado, basado en la aplicación del método de volúmenes finitos, para el estudio de convección forzada laminar entre dos cilindros concéntricos. Para el estudio se evalúan las distribuciones de velocidad, presión y temperatura. Los resultados obtenidos se representan gráficamente para una mejor interpretación, utilizando el programa de visualización Tecplot 9.0, el cual permite generar un archivo gráfico mediante el uso de una subrutina ejecutada en Visual Fortran 6.6 (ver Anexo 1), facilitando de esta forma la exportación de la data necesaria para la realización de los perfiles o distribuciones antes mencionados.

Entre las mejoras del programa con respecto a trabajos utilizados como base, cabe destacar:

- ✦ El uso de matrices dimensionadas dinámicamente, función propia de FORTRAN 95, que permite mejorar el rendimiento del programa, ya que se utiliza el espacio de memoria necesario.
- ✦ El enfoque de programación modular, el cual facilita la incorporación de nuevas subrutinas.
- ✦ La implementación de una subrutina de propiedades que permite la evaluación local de propiedades termofísicas dependientes de la temperatura.

Tanto para la validación, como para las corridas a realizarse se estableció un valor único para las dimensiones de las mallas de cálculos (100 nodos en la dirección axial y 15 nodos en la dirección radial) con la intención de poder comparar los resultados.

Los valores reportados están redondeados a cinco cifras significativas, sin embargo los cálculos fueron realizados con doble precisión los datos se suministraron con 10 cifras significativas.

Para la realización de la validación y de las corridas, se utilizó un procesador Pentium III 800 Mhz, con 384 Mb de memoria Ram.

5.1-VALIDACIÓN DE RESULTADOS

Para la validación de los resultados se seleccionó como fluido de trabajo agua, con propiedades termofísicas variables con la temperatura.

Los resultados obtenidos mediante la aplicación del método de volúmenes finitos, se comparan con los que se obtienen de la solución analítica desarrollada en Kays y Crawford, 1980. La comparación es realizada en base a la velocidad media del fluido para distintas secciones transversales a lo largo del conducto anular. Para la obtención de los valores semi-analíticos de velocidades medias (u_m) se utiliza la ec. (3.8) y mediante la aplicación de una subrutina de cálculo incluida en el código fuente del programa se obtienen los valores de velocidades medias a partir de los valores discretos de la distribución de velocidades.

A continuación se presentarán tres casos diferentes para la realización de la validación, en los cuales los siguientes parámetros se mantienen constantes:

Max	Error V	Error P	Error T	Relax V	Error V	Error V
100000	10E-4	10E-4	10E-4	0.10000	0.10000	0.10000

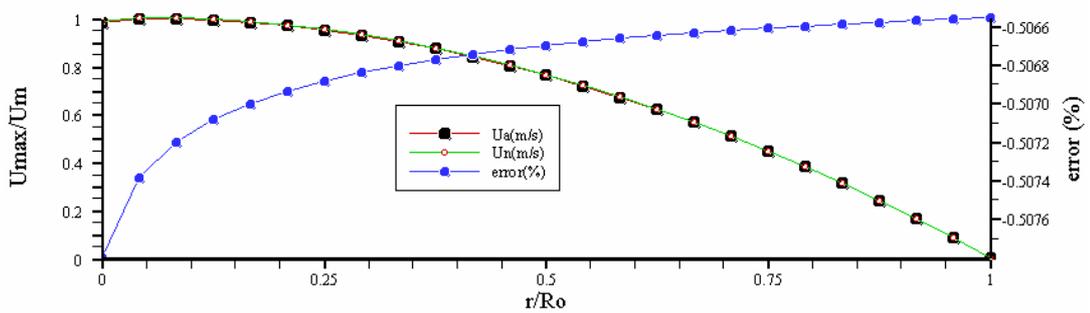
✦ **CASO 1:**

El caso uno corresponde a convección forzada en el cual las temperaturas T_{si} y T_{so} son constantes en toda la superficie de los cilindros, iguales entre sí y mayores a la

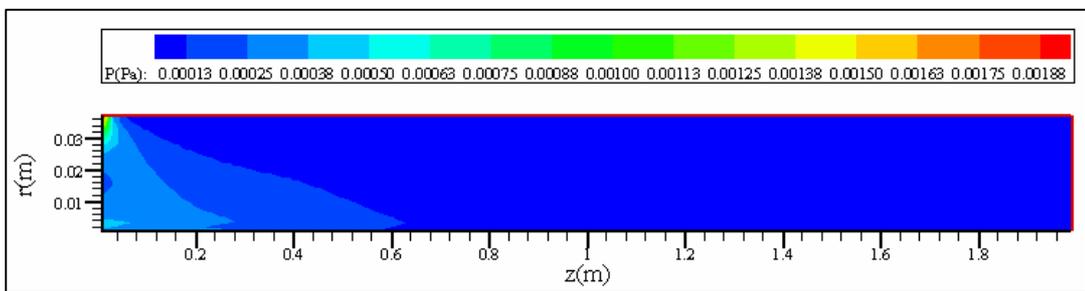
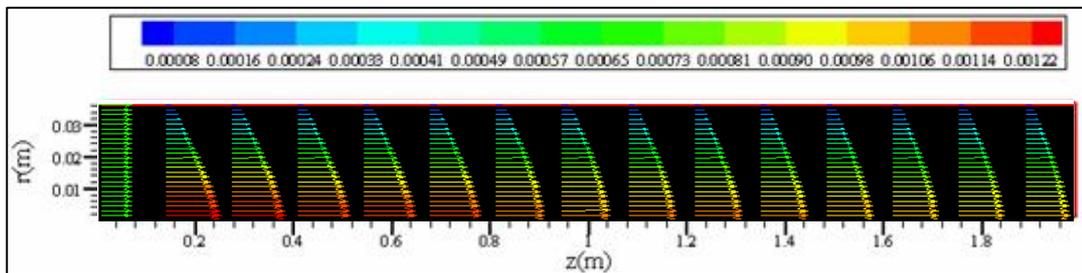
temperatura de entrada del fluido (T_i). No se toma en cuenta el campo gravitatorio, y se toma como relación de diámetros $RD=0$.

Do	Lz	Nz	Nr	Re _D	T _i	T _{si}	T _{so}	Fluido	RD
0.07620	2.0000	100	15	250.00	343.15	353.15	353.15	AGUA	0.00000

SOLUCIÓN NUMÉRICA vs: SOLUCIÓN ANALÍTICA

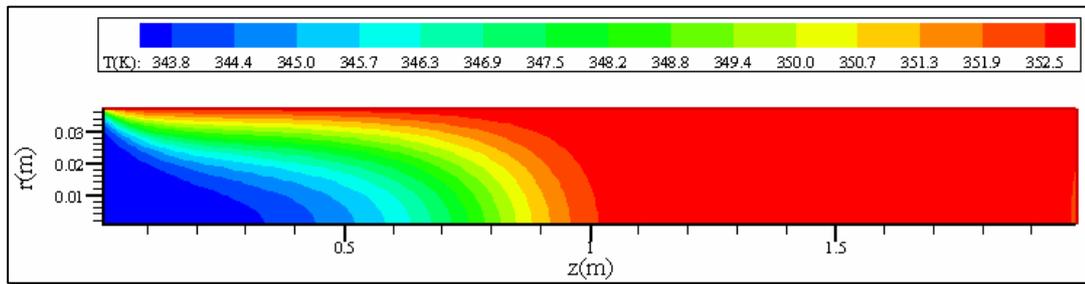


VELOCIDAD



PRESIÓN

TEMPERATURA

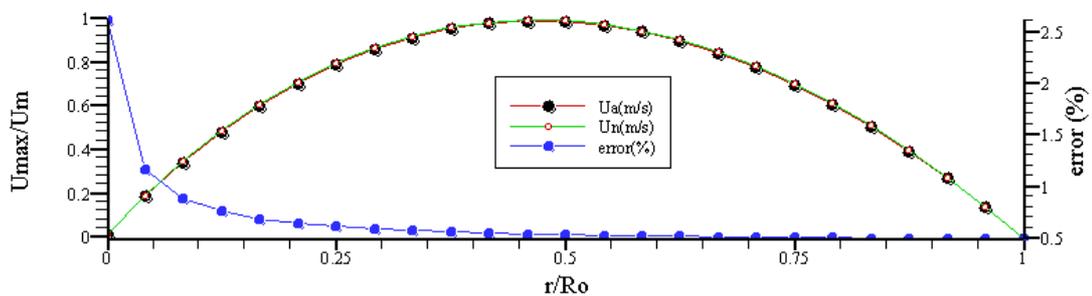


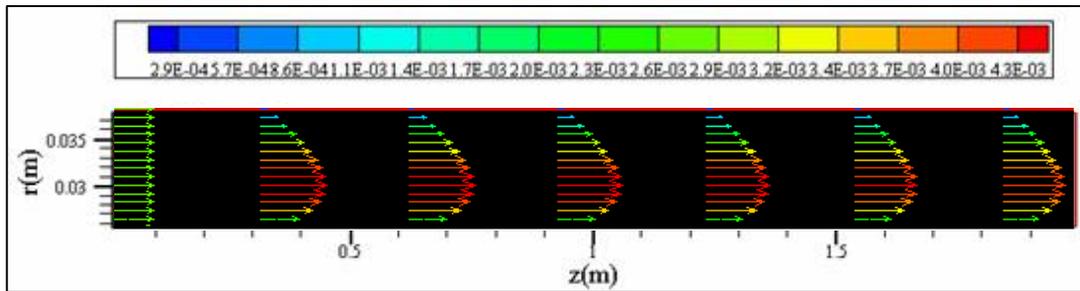
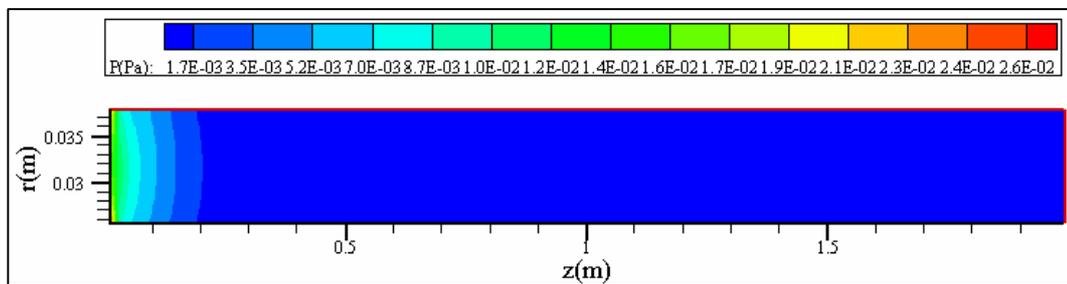
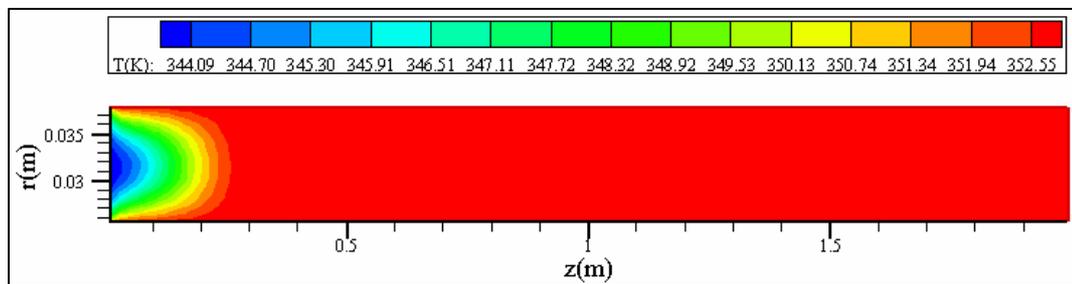
✦ **CASO 2:**

El caso dos corresponde a convección forzada en el cual las temperaturas T_{si} y T_{so} son constantes en toda la superficie de los cilindros, iguales entre sí y mayores a la temperatura de entrada del fluido (T_i). No se toma en cuenta el campo gravitatorio, y se toma como relación de diámetros $RD=1/6$.

D_o	L_z	N_z	N_r	Re_D	T_i	T_{si}	T_{so}	Fluido	RD
0.07620	2.0000	100.00	15	250.00	343.15	353.15	353.15	AGUA	0.16667

SOLUCIÓN NUMÉRICA vs: SOLUCIÓN ANALÍTICA

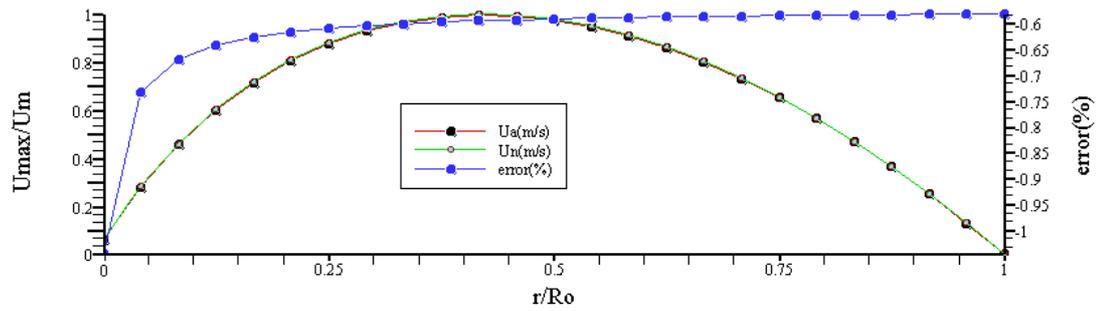


VELOCIDAD**PRESIÓN****TEMPERATURA**➔ **CASO 3:**

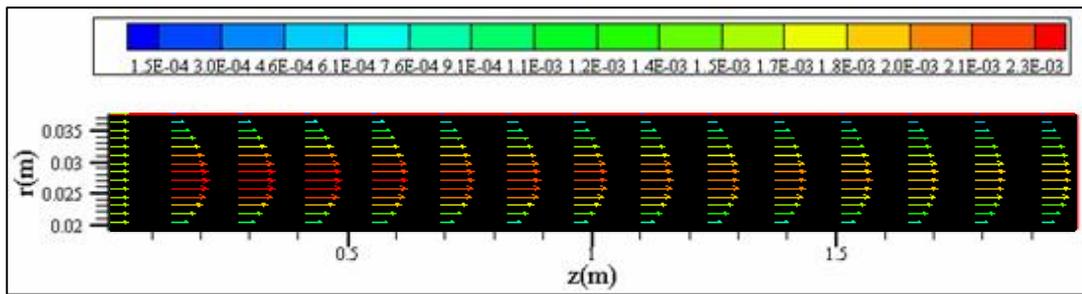
El caso tres corresponde a convección forzada en el cual las temperaturas T_{si} y T_{so} son constantes en toda la superficie de los cilindros, distintas entre sí y menores a la temperatura de entrada del fluido (T_i). No se toma en cuenta el campo gravitatorio, y se toma como relación de diámetros $RD=1/2$.

Do	Lz	Nz	Nr	Re _D	Ti	Tsi	Tso	Fluido	RD
0.07620	2.0000	100.00	15	250.00	353.15	333.15	343.15	AGUA	0.50000

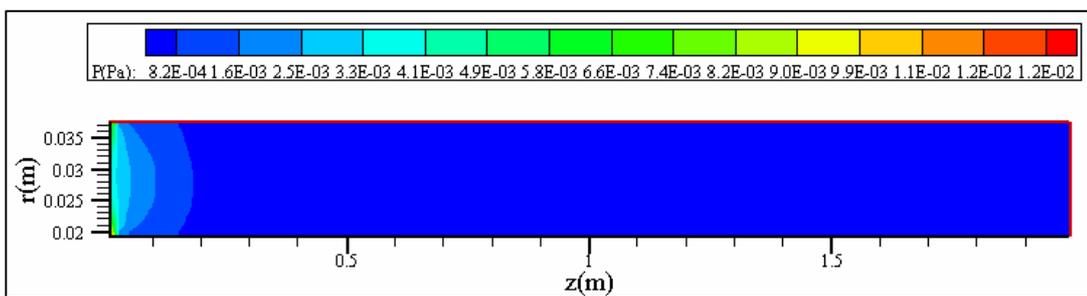
SOLUCIÓN NUMÉRICA vs: SOLUCIÓN ANALÍTICA



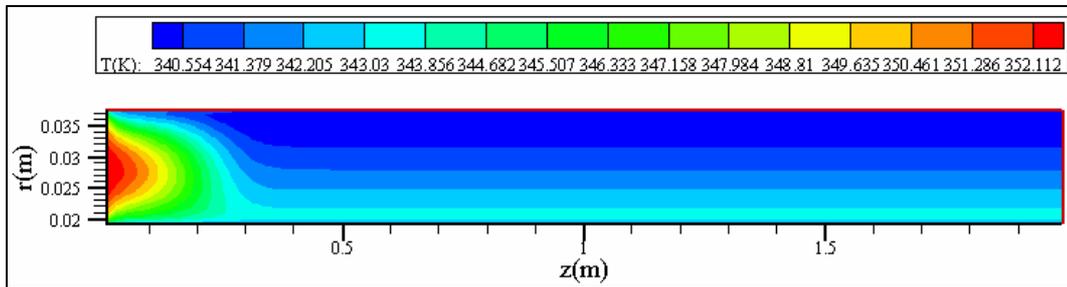
VELOCIDAD



PRESIÓN



TEMPERATURA



5.2- OBTENCIÓN DE RESULTADOS PARA FLUIDOS CON ALTOS NÚMEROS DE Pr

Se estudió el comportamiento de las regiones de entrada para distintas condiciones de simulación, correspondientes a la variación y a la combinación de tres parámetros de interés, los cuales se señalan a continuación:

- ✦ Número de Reynolds ($10 \leq Re_D \leq 500$)
- ✦ Número de Prandtl ($Pr \geq 100$)
- ✦ Relación de diámetros ($0 \leq RD \leq 1$)

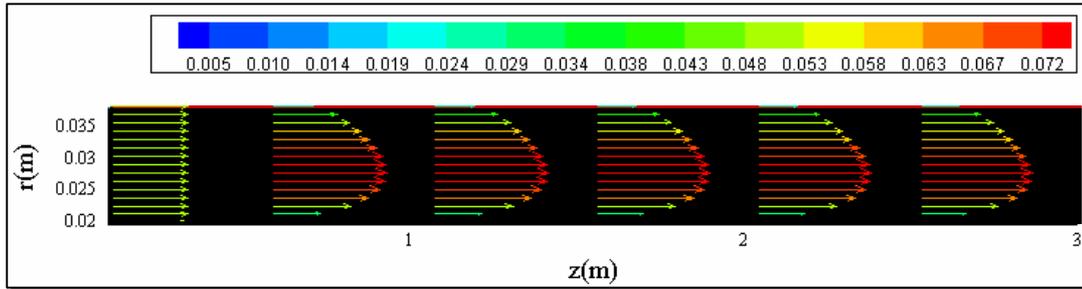
A continuación se presentan diez (10) casos (considerando los casos extremos en relación a los números de Prandtl estudiados). Para ello se tomaron las corridas realizadas con los fluidos de estudio aceite Purolub 22, que posee menor número de Pr y el aceite Purolub 320 con mayor número de Pr.; los valores de Reynolds de entrada 100 y 500, y las relaciones de diámetro $RD=1/2$ y $1/6$.

Se realizaron corridas preliminares en las cuales se lograron resultados satisfactorios con los siguientes parámetros, que fueron establecidos como un patrón fijo, con el fin de poder comparar los resultados:

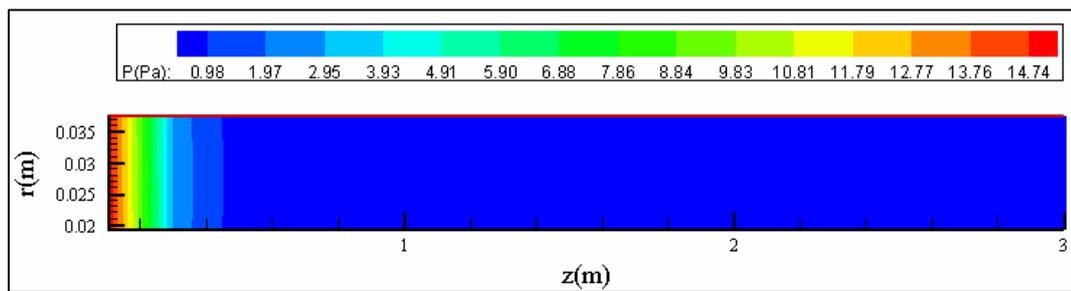
Lz	Nz	Nr	Max	Error V	Error P	Error T	Relax V	Relax P	Relax T
20.000	100	15	100000	10E-4	10E-4	10E-4	0.10000	0.10000	0.10000

CASO 1					
Re_{Di}	T_i	T_{si}	T_{so}	RD	FLUIDO
100.00	293.15	293.15	353.15	0.50000	P22

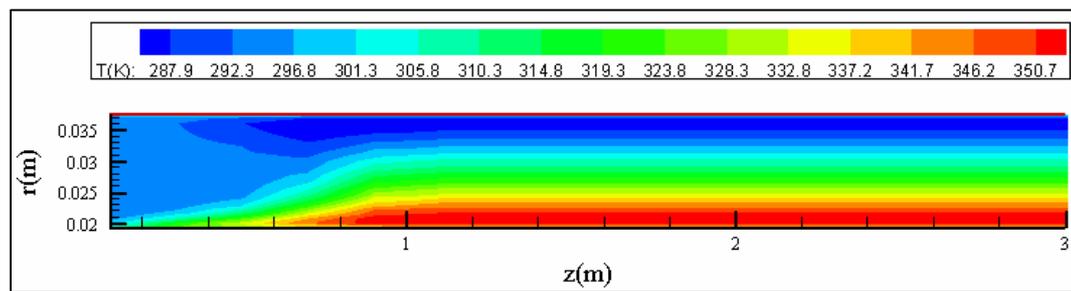
VELOCIDAD



PRESIÓN



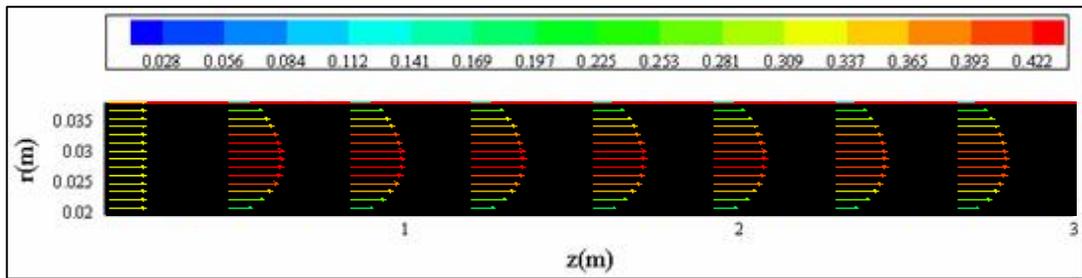
TEMPERATURA



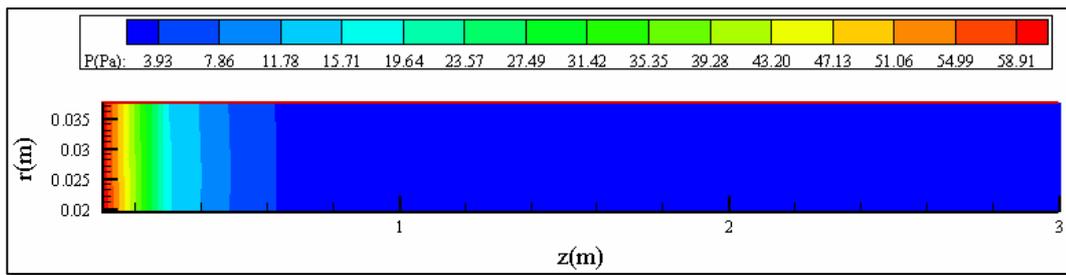
Número de iteraciones	Tiempo (s)
13168	3328,7058

CASO 2					
Re_{Di}	T_i	T_{si}	T_{so}	RD	FLUIDO
500.00	293.15	293.15	353.15	0.50000	P22

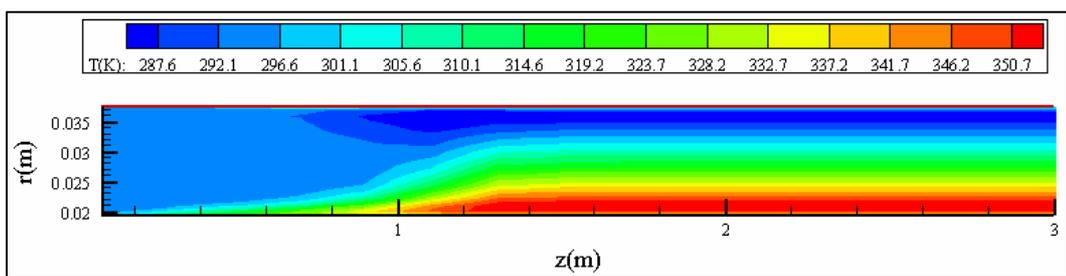
VELOCIDAD



PRESIÓN



TEMPERATURA

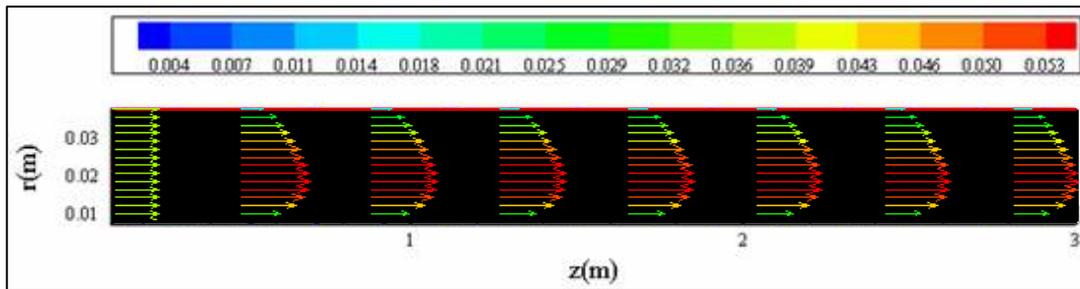


Número de iteraciones	Tiempo (s)
15216	3846,4

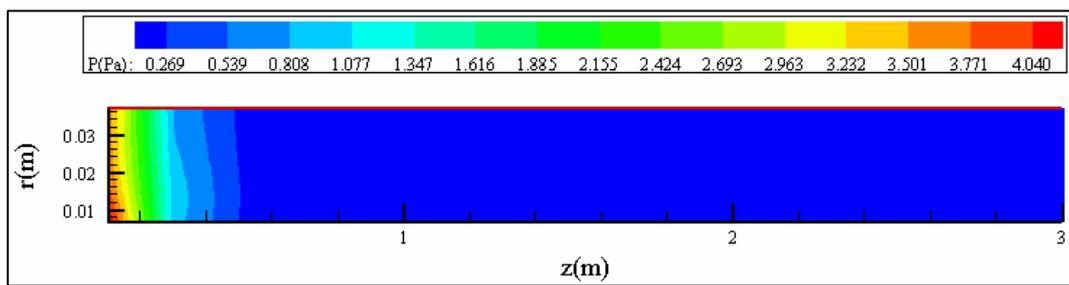
CASO 3

Re_{Di}	T_i	T_{si}	T_{so}	RD	FLUIDO
100.00	293.15	293.15	353.15	0.16667	P22

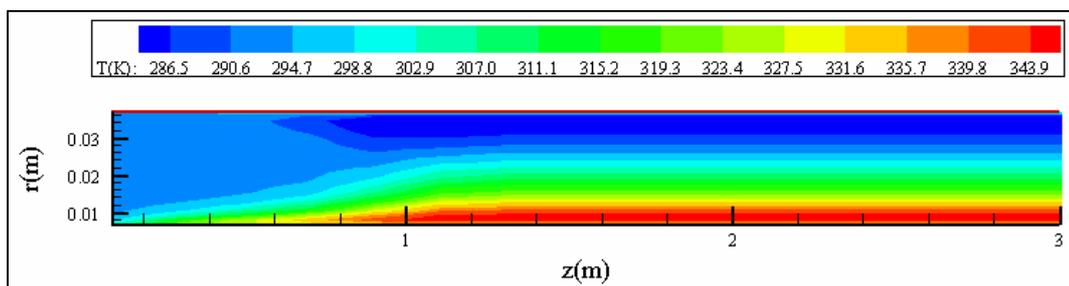
VELOCIDAD



PRESIÓN



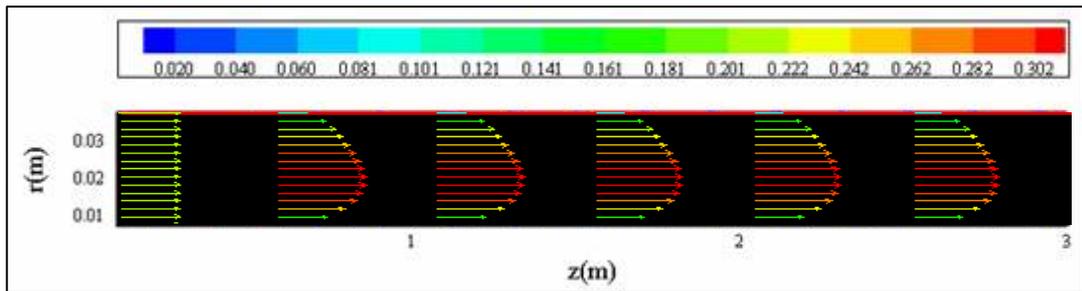
TEMPERATURA



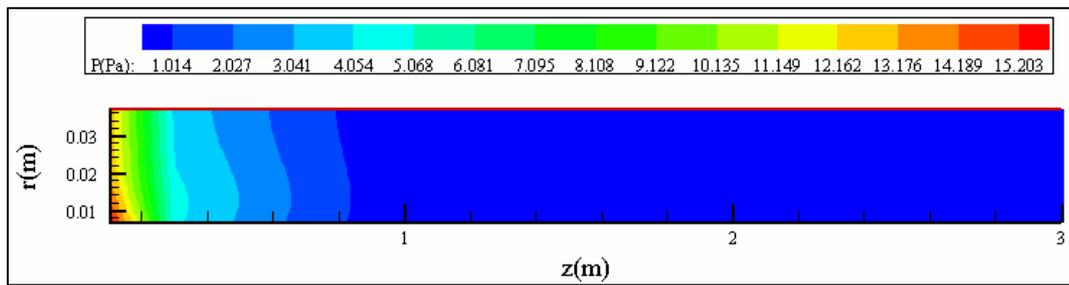
Número de iteraciones	Tiempo (s)
16960	4287,3

CASO 4					
Re_{Di}	T_i	T_{si}	T_{so}	RD	FLUIDO
500.00	293.15	293.15	353.15	0.16667	P22

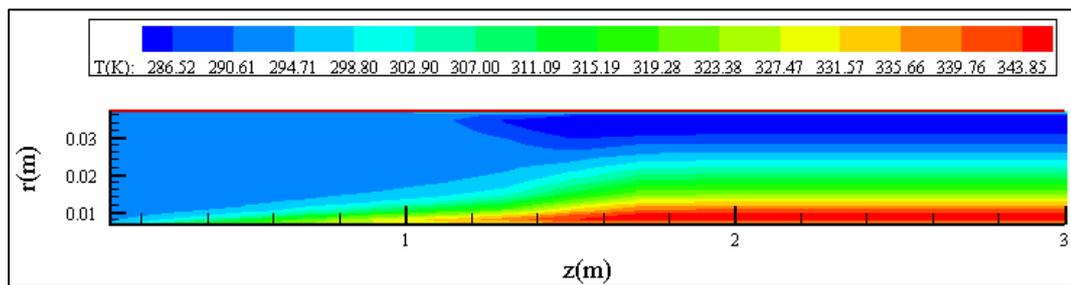
VELOCIDAD



PRESIÓN



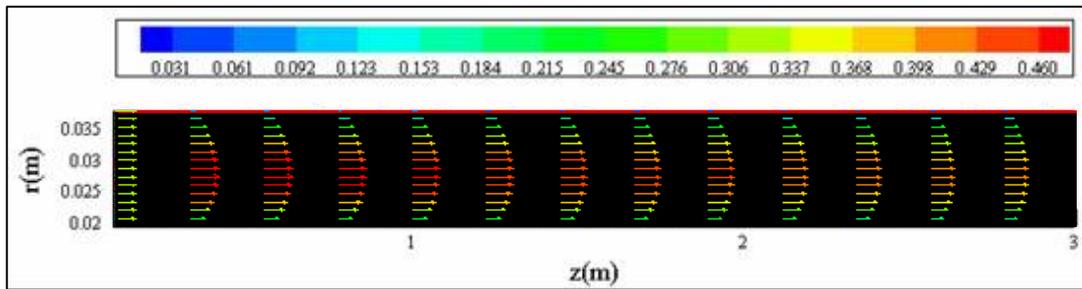
TEMPERATURA



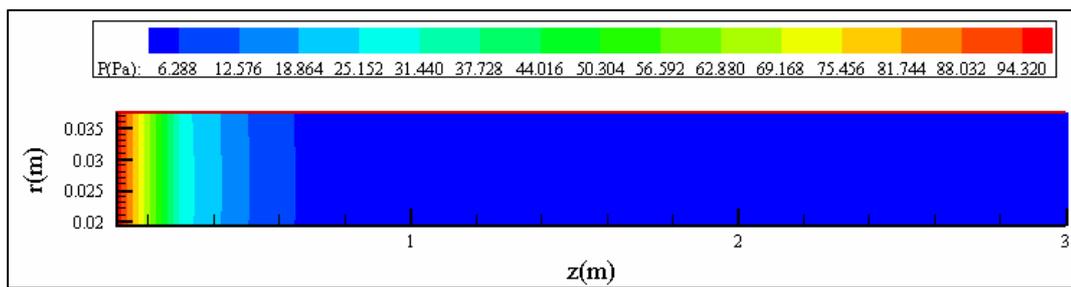
Número de iteraciones	Tiempo (s)
13808	3490,5

CASO 5					
Re_{Di}	T_i	T_{si}	T_{so}	RD	FLUIDO
500.00	293.15	308.15	308.15	0.50000	P22

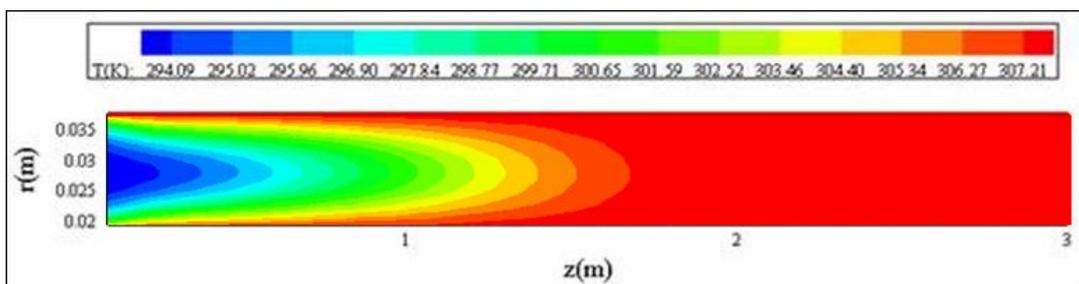
VELOCIDAD



PRESIÓN



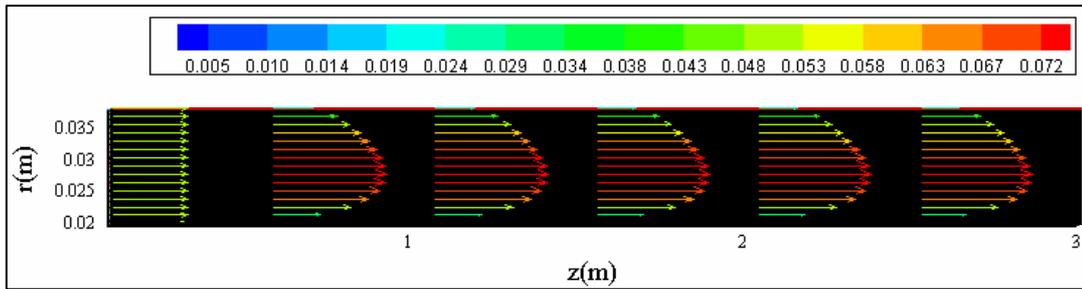
TEMPERATURA



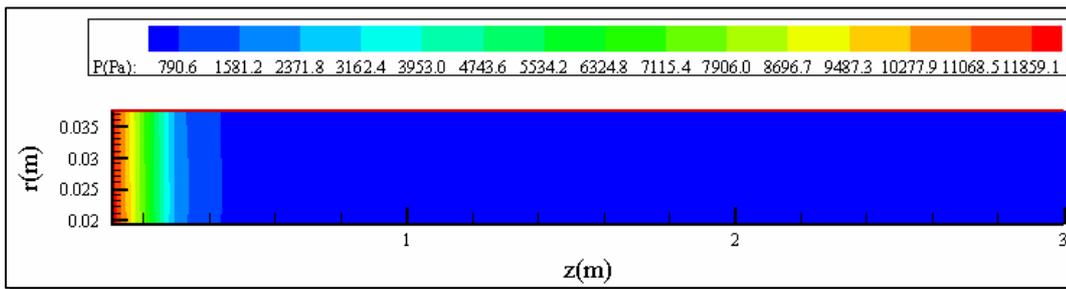
Número de iteraciones	Tiempo (s)
24304	6143,7

CASO 6					
Re_{Di}	T_i	T_{si}	T_{so}	RD	FLUIDO
100.00	293.15	293.15	353.15	0.50000	P320

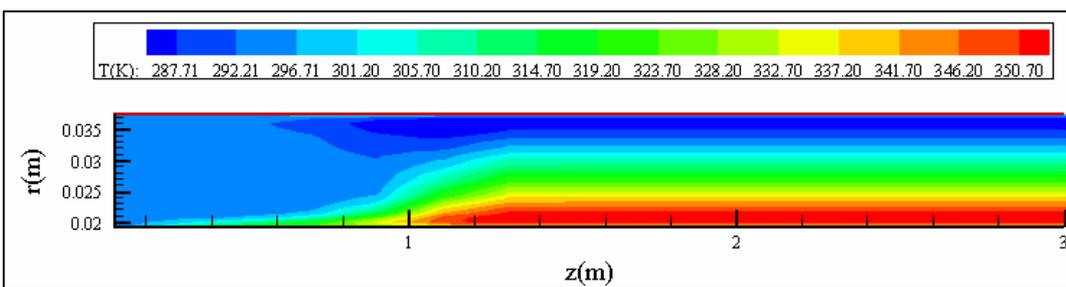
VELOCIDAD



PRESIÓN



TEMPERATURA

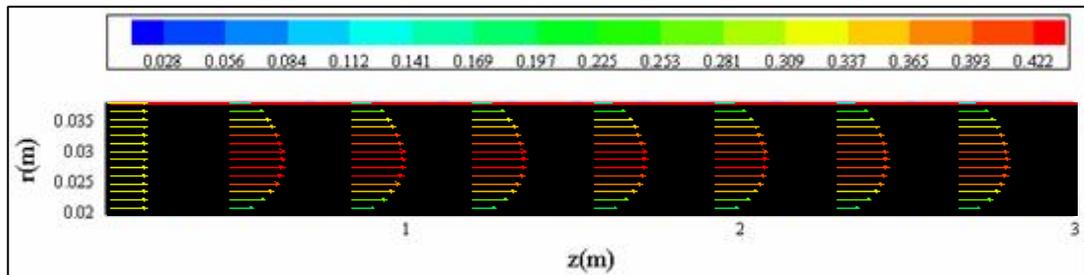


Número de iteraciones	Tiempo (s)
15184	3838,3

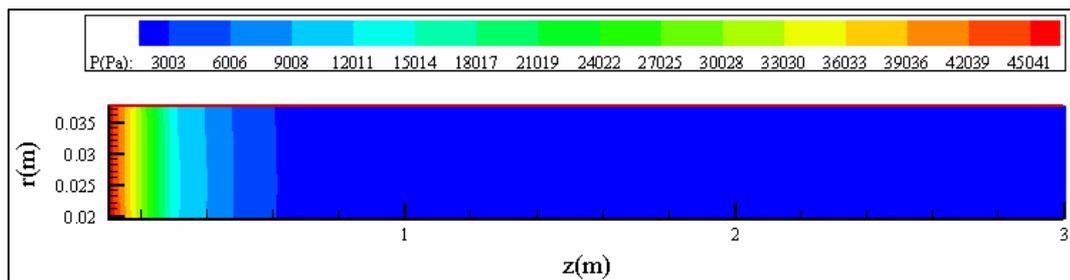
CASO 7

Re_{Di}	T_i	T_{si}	T_{so}	RD	FLUIDO
500.00	293.15	293.15	353.15	0.50000	P320

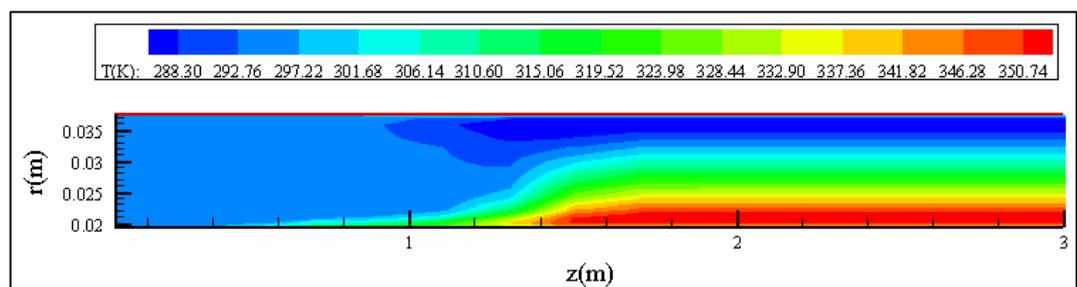
VELOCIDAD



PRESIÓN



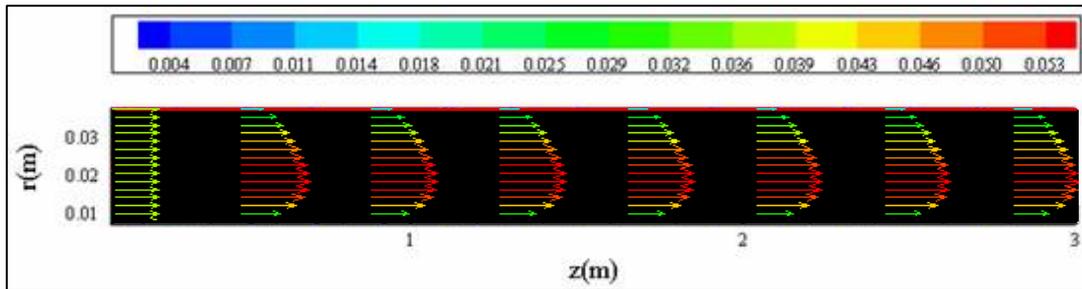
TEMPERATURA



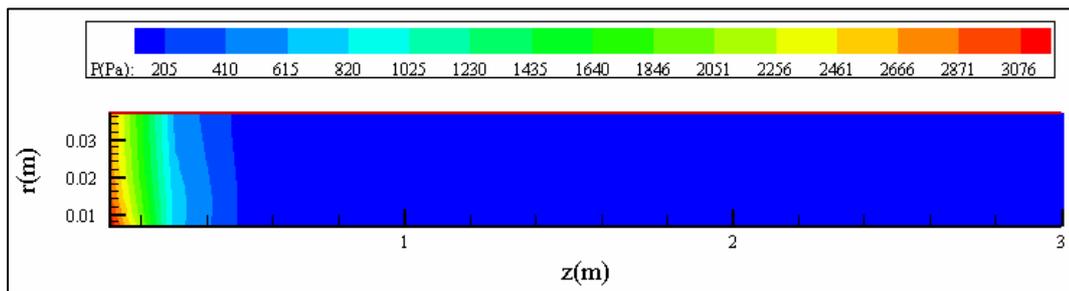
Número de iteraciones	Tiempo (s)
13552	3425,8

CASO 8					
Re_{Di}	T_i	T_{si}	T_{so}	RD	FLUIDO
100.00	293.15	293.15	353.15	0.16667	P320

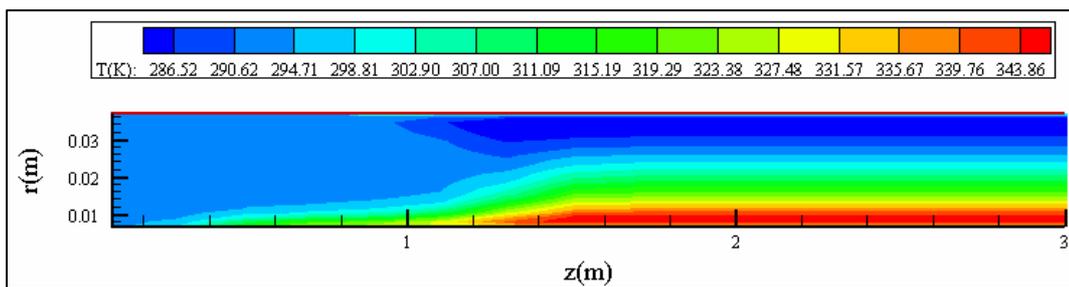
VELOCIDAD



PRESIÓN



TEMPERATURA

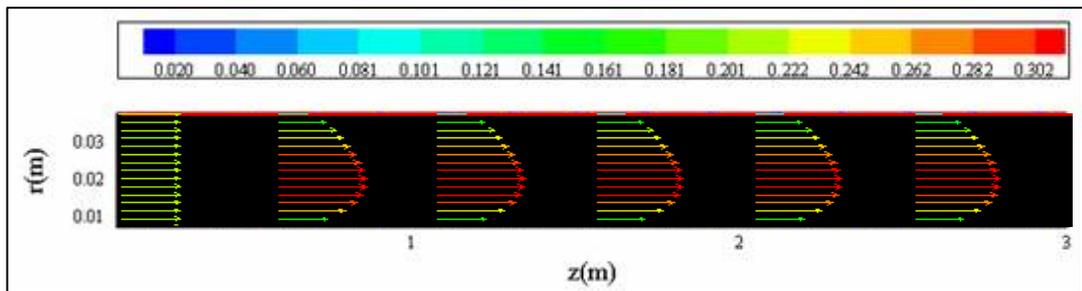


Número de iteraciones	Tiempo (s)
12496	3158,8

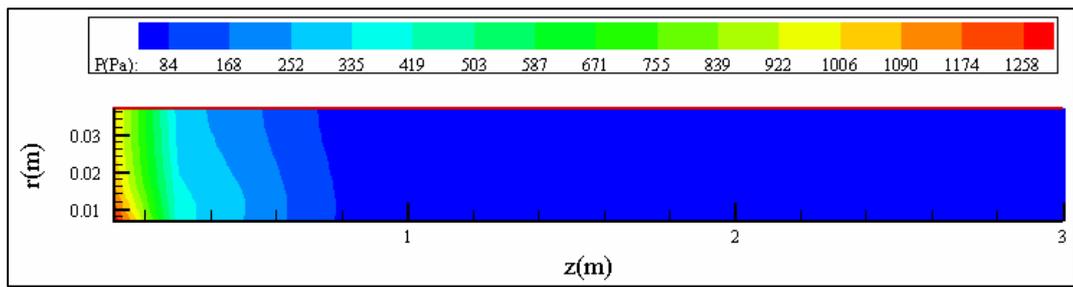
CASO 9

Re_{Di}	T_i	T_{si}	T_{so}	RD	FLUIDO
500.00	293.15	293.15	353.15	0.16667	P320

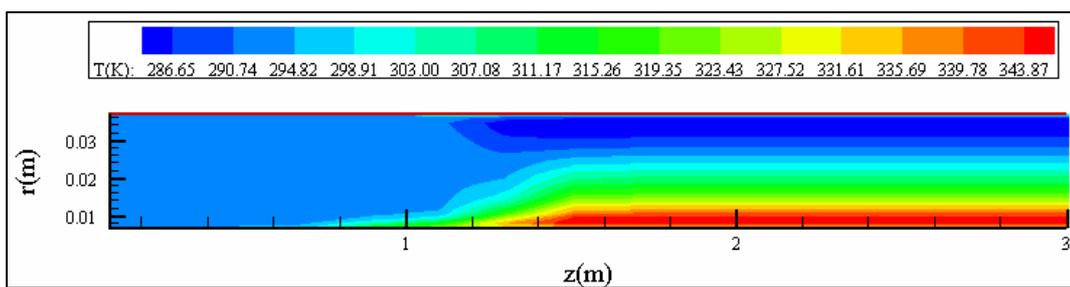
VELOCIDAD



PRESIÓN



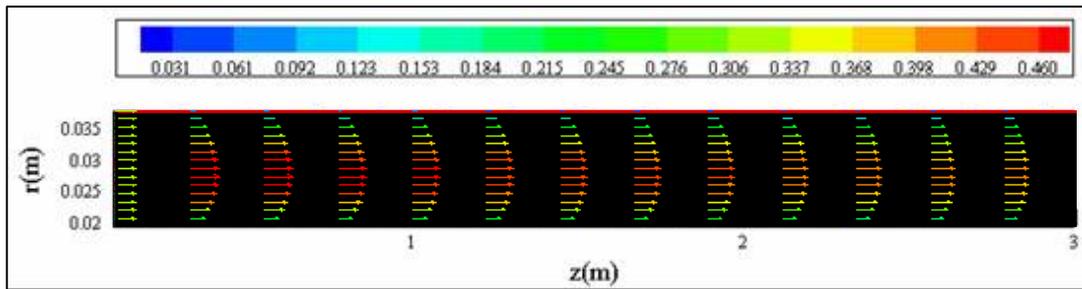
TEMPERATURA



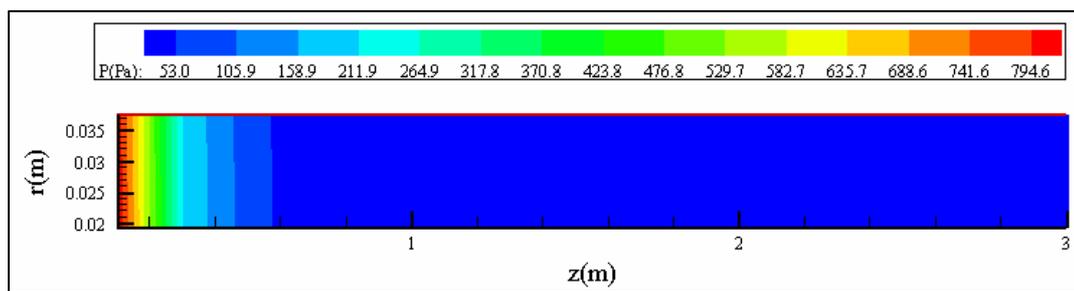
Número de iteraciones	Tiempo (s)
13568	3429,8

CASO 10					
Re_{Di}	T_i	T_{si}	T_{so}	RD	FLUIDO
500.00	293.15	308.15	308.15	0.50000	P320

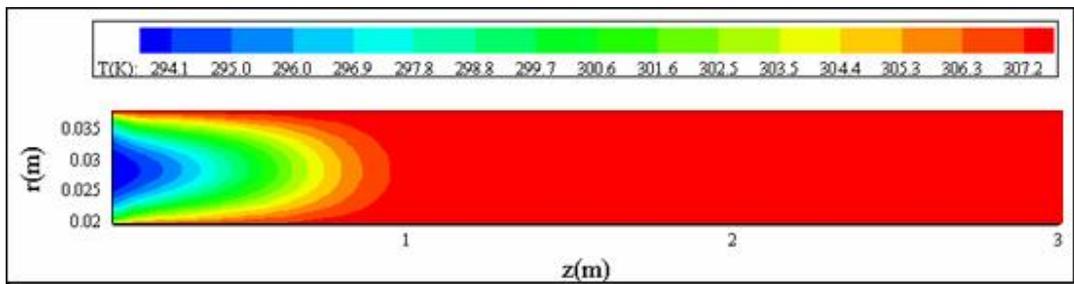
VELOCIDAD



PRESIÓN



TEMPERATURA



Número de iteraciones	Tiempo (s)
21936	5545,1

5.3- DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Como era de esperar, para todos los resultados obtenidos para fluidos con altos números de Pr se puede observar que la longitud de entrada térmica es mayor a la longitud de entrada fluidodinámica.

Los efectos dinámicos que se pueden observar en las gráficas donde se muestra la distribución de velocidad permiten establecer relaciones entre la longitud de entrada fluidodinámica (Le_f) y los parámetros Re, Pr, RD para cada uno de los casos, a saber:

- ✦ Para el caso del parámetro Re, al aumentar los valores de éste se observa un aumento en la longitud de entrada fluidodinámica.
- ✦ Para el caso del parámetro RD, al disminuir los valores de éste es decir, mientras mayor sea el espaciamiento entre los dos cilindros, se observa un aumento en la longitud de entrada fluidodinámica.
- ✦ Para el caso del parámetro Pr, al aumentar los valores de éste se observa un aumento en la longitud de entrada fluidodinámica.

Al igual que el aspecto fluidodinámico, los efectos térmicos mostrados en la distribución de temperatura permiten establecer relaciones entre la longitud de entrada térmica (Le_t) y los parámetros adimensionales citados.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El modelo de simulación desarrollado para convección forzada laminar entre dos cilindros concéntricos, mediante el uso del método numérico de volúmenes finitos con esquema híbrido de diferenciación y algoritmo de solución SIMPLERT, arrojó resultados que se ajustan a los obtenidos con la solución analítica disponible, por lo cual, puede afirmarse que los resultados son válidos.

Se desarrolló para la solución el algoritmo SIMPLERT, con el cual se pudo acoplar la ecuación de energía con las ecuaciones de momentum y de continuidad, lo cual resultó ser una buena solución para el caso en el cual las propiedades termofísicas del fluido varían significativamente con la temperatura. Este algoritmo puede ser empleado para futuros trabajos referentes a convección libre, en los cuales el campo de velocidad también depende de la temperatura.

Luego de analizar el método SIMPLERT, se observa que el método no permite altos valores de factores de relajación, esto se debe a una inconsistencia del procedimiento iterativo según la cual se resuelve la ecuación de energía con un campo de velocidad que no necesariamente satisface la ecuación de continuidad. En problemas altamente advectivos, esta inconsistencia produce errores en el cálculo de la temperatura que son amortiguados a través del uso de un valor muy bajo del factor de relajación para la temperatura. Por otra parte, en el caso particular de nuestro trabajo (propiedades termofísicas dependientes de la temperatura), tanto las ecuaciones de momentum como la de continuidad dependen directamente de la temperatura, para la obtención de los campos de velocidad y presión. Debido a esta inconsistencia y a la vinculación directa de todas las ecuaciones con la temperatura, es necesario utilizar factores de relajación muy bajos. En posibles desarrollos posteriores, que se utilicen como base de este trabajo, y con el fin de disminuir los tiempos computacionales, es recomendable incorporar al código una subrutina que permita aumentar

progresivamente los factores de relajación a medida que se va logrando una mayor estabilidad.

Para los casos en los cuales los dos cilindros se encuentran a la misma temperatura, la diferencia de temperaturas entre el fluido y las superficies de los cilindros se reduce al ir avanzando a lo largo del conducto hasta llegar a una sección donde los gradientes de temperatura son nulos y el fluido alcanza equilibrio térmico con las superficies de los cilindros.

Esto no ocurre para el caso en el que las dos superficies se encuentran a diferentes temperaturas, caso en el cual el gradiente de temperatura en la dirección radial se hace constante y se observa una distribución de temperatura estratificada, las cuales son una degradación entre las temperaturas del cilindro interno y externo.

Finalmente, si comparamos el desarrollo del perfil de temperatura con el perfil de velocidad se puede apreciar una clara tendencia del fluido a desarrollarse primero dinámicamente y después térmicamente. Esto obedece a la naturaleza de los fluidos en estudio, en los cuales términos difusivos en las ecuaciones de momentum son mayores que los de la ecuación de energía, lo cual nos dice que su número de Prandtl es mucho mayor a la unidad.

Para resolver problemas de geometría compleja el uso de bloques múltiples es una alternativa interesante, pues se puede utilizar toda la metodología numérica desarrollada para mallas estructuradas. Entretanto, en trabajos que se requiera la adaptación y el refinamiento en regiones específicas del dominio, se pueden utilizar mallas no estructuradas, las cuales ofrecen mayor versatilidad en la discretización de dominios de geometría compleja. Por otra parte, se incrementan en complejidad los algoritmos para la solución de las ecuaciones discretizadas, pues no existe una ley de formación para numeración de los volúmenes elementales (primarios) y el número de volúmenes vecinos puede variar de volumen en volumen. Inicialmente esos métodos fueron denominados Métodos de Elementos Finitos basados en Volúmenes de

Control, o del inglés, *Control Volume-based Finite Element Methods – CVFEM*. Esta denominación no es precisa, pues da a entender que se trata de un método de elementos finitos que usa volúmenes de control, es decir, un método de elementos finitos conservativo. Por lo tanto, el método lo define mejor Maliska (2004) como Método de Volúmenes Finitos basados en Elementos, o *Element-based Finite Volume Methods – EbFVM*.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASTM, 2000, "ASTM D341-93 (1998) Standard viscosity-temperature charts for liquid petroleum products". Annual Book of ASTM Standards, Vol. 05.01.

Ávila, A. y Martínez, Á., 1998, "Simulación numérica de procesos de transferencia de calor y caída de presión en bancos de tubos de calentadores de crudo de fuego indirecto". Tesis Ing. Mecánico, Tutor: García, F., Escuela de Ing. Mecánica, Universidad Central de Venezuela, Caracas.

Bejan, A., 1993, *Heat Transfer*. Wiley. New York.

Feldman, E., Hornbeck, R. And Osterle, J., 1982a, "A Numerical Solution of Laminar Developing Flow in Eccentric Annular Ducts". *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 25, pp. 231-241.

Feldman, E., Hornbeck, R. And Osterle, J., 1982b, "A Numerical Solution of Developing Temperature for Laminar Developing Flow in Eccentric Annular Ducts". *Int. J. Heat Mass Transfer*. Vol. 25, pp. 243-253.

Gil, A., 1998, "Modelo de simulación para convección forzada laminar entre placas paralelas". Tesis Ing. Mecánico, Tutores: García, F. y Segura, J., Escuela de Ing. Mecánica, Universidad Central de Venezuela, Caracas.

Gil, A., García, F. y Segura, J., 2001, "Modelo de simulación numérica para convección forzada laminar permanente entre placas paralelas". *Revista de la Facultad de Ingeniería de la U.C.V.*, Vol. 16, N° 2, pp. 45-51.

Heinbockel, J., 1996, *Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics*. Department of Mathematics and Statistic, Old Dominion University.

Incropera, F. and DeWitt, D. ,1996, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley & Sons, Inc., 4th Ed., New York.

Kays, W.M. and Crawford, M.E., 1980, *Convective Heat and Mass Transfer*. McGraw-Hill, New York.

Kays, W.M. and Perkins, H.C., 1985, “Forced Convection: Internal Flow in Ducts”, in *Handbook of Heat Transfer: Fundamentals*. Rohsenow, W.M., Hartnett, J.P. and Ganic, E.N. (Eds.). McGraw-Hill, New York.

Maliska, C. R., 2004, *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*, 2^a Edição, LTC Editora, Rio de Janeiro.

Mills, A., 1994, *Transferencia de Calor*, Addison-Wesley / Times Mirror, Madrid.

Molina, H., 2001, “Modelo de simulación para convección mixta laminar entre placas paralelas verticales”. Tesis Ing. Mecánico, Tutores: García, F. y Segura, J., Escuela de Ing. Mecánica, Universidad Central de Venezuela, Caracas.

Patankar, S., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere, Washington D.C.

Shah, R.K and Bhatti, M.S., 1987, “Laminar Convective Heat Transfer in Ducts”, in *Handbook of Single-Phase Convective Heat Transfer*. Kakaç, S., Shah, R.K., and Aung, W. (Eds.). Wiley-Interscience, New York.

Sheng, Y., Shoukri, M., Sheng, G., and Wood, P. A., 1998, “A modification to the SIMPLE method for buoyancy-driven flows”. *Numer Heat Transfer*, Part B,33, 65-78.

Segura, J., García, F., Morán, D. y García, R., 2004, “Transferencia de calor en flujo bifásico gas-líquido, parte II: tuberías y conductos anulares verticales”. *Revista de la Facultad de Ingeniería de la U.C.V.*, (aceptado para su publicación).

Torres, M. J., Escalante, H., Reyes, M., Rincón, J., 2002, “Implementación del método SIMPLET en un programa de elementos finitos basados en volúmenes de control”, en *Memorias del IV Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, Mérida, Octubre 2002, pp. 835-842

Versteeg, H. and Malalasekera, W., 1995, “*An Introduction to Computational Fluid Dynamics*”, Longman Scientific & Technical, London.

Whitaker, S., 1972, “Forced Convection Heat Transfer Correlations for Flow in Pipes, Past Flat Plates, Single Spheres and for Flow in Packed Beds and Tube Bundles”. *AIChE Journal*. Vol. 18, pp. 361-371.