Números Complejos

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica
Departamento de Electrónica, Computación y Control

Variable Compleja y Cálculo Operacional

Marzo, 2013

Contenido

Números Complejos **3**

Definición 3

Operaciones Algebraicas 6

Representación Geométrica 9

Valor Absoluto y Conjugado 10

Propiedades 12

Coordenadas Polares 14

Fórmula de Euler 18

Potencias y Raíces 19

Regiones en el Plano Complejo 21

Números Complejos

En este tema se introducen algunas propiedades del conjunto de los números complejos. Tal conjunto de números es ampliamente utilizado en el desarrollo de las ideas teóricas de la Ingeniería, en especial, de Ingeniería Eléctrica.

Definición

Se dice que z es un ***número complejo*** si se expresa como

$$z = x + i\,y$$

o, de manera equivalente,

$$z = x + y\,i,$$

donde $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

- Se conoce a i como la ***unidad imaginaria***, además, $i^2 = -1$.
- Se denotará con

$$x = \operatorname{Re} z$$

la parte real del número complejo z, y con

$$y = \operatorname{Im} z$$

la parte imaginaria del número complejo z.

- Los número complejos de la forma $x + i\,0$ se denominan reales puros o, simplemente, reales.
- Los número complejos de la forma $0 + i\,y$ se denominan imaginarios puros.
- El cero de los números complejos, denotado 0, es $0 = 0 + i\,0$.
- El uno de los números complejos, denotado 1, es $1 = 1 + i\,0$.

- Se dice que dos números son iguales si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales. En otras palabras, si

$$z = x + i\,y \qquad \text{y} \qquad w = u + i\,v,$$

entonces $z = w$ si y sólo si

$$x = u \qquad \text{e} \qquad y = v.$$

En particular,

$$z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0.$$

- Denotaremos con $\mathbb{C}$ al conjunto de los números complejos.

Observación:

- No existe relación de orden en los números complejos. En los números reales, por ejemplo, se tiene que $5 > 3$, pero no tiene sentido afirmar, por ejemplo, que $1 + i < 2 + i\,3$.

Operaciones Algebraicas

Seguidamente se mostrarán las definiciones de las operaciones algebraicas: ***suma***, ***resta***, ***multiplicación*** y ***división***, de números complejos.

Definición 1 (Suma)**.** *La suma de los números complejos* $z_1 = x_1 + i\,y_1$*, y* $z_2 = x_2 + i\,y_2$ *se define como*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2).$$

Definición 2 (Resta)**.** *La resta de los números complejos* $z_1 = x_1 + i\,y_1$*, y* $z_2 = x_2 + i\,y_2$ *se define como*

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i\,(y_1 - y_2).$$

Definición 3 (Multiplicación). *La multiplicación de los números complejos* $z_1 = x_1 + i\,y_1$, *y* $z_2 = x_2 + i\,y_2$ *se define como*

$$z_1 \cdot z_2 = z_1\, z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i\,(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Definición 4 (División). *La división de los números complejos* $z_1 = x_1 + i\,y_1$, *y* $z_2 = x_2 + i\,y_2 \neq 0$ *se define como*

$$z_1 \div z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) + i\left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right).$$

Propiedades

Para todo $z, w, s \in \mathbb{C}$ se cumplen las siguientes propiedades:

1. *Conmutativa*

   - $z + w = w + z$
   - $zw = wz$

2. *Asociativa*

   - $z + (w + s) = (z + w) + s$
   - $z(ws) = (zw)s$

3. *Elemento Neutro*

   - $z + 0 = z$
   - $1 \cdot z = z$

4. *Elemento Inverso*

   - Para todo $z \in \mathbb{C}$, existe $-z \in \mathbb{C}$ tal que $z + (-z) = 0$.
   - Para todo $z \neq 0$, existe $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $zz^{-1} = 1$.

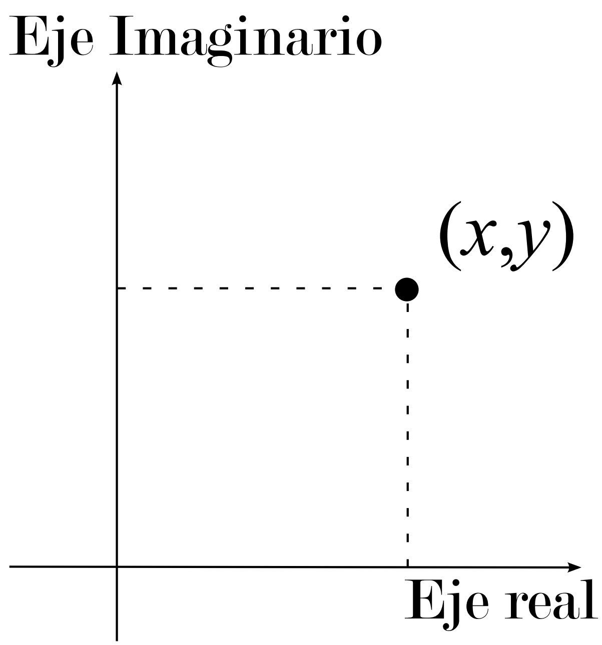
5. *Distributiva*

   - $z(w + s) = zw + zs$.

Proposición 1. *Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Si $w \neq 0$, entonces $\dfrac{z}{w} = zw^{-1}$.*

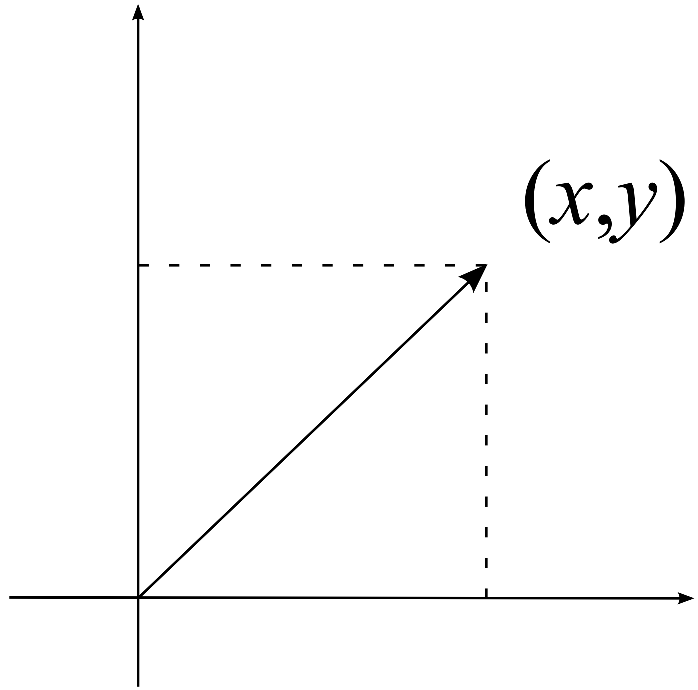
Representación Geométrica

Cada número complejo $z = x + i\,y$ se le puede asignar un y sólo un par ordenado (x, y). De esta forma, el número complejo z se puede representar geométricamente como un punto en el plano cartesiano.



Plano Z

Un número complejo $z = x + i\,y$ también se puede representar como un vector, que comienza en el origen y termina en el punto (x, y).



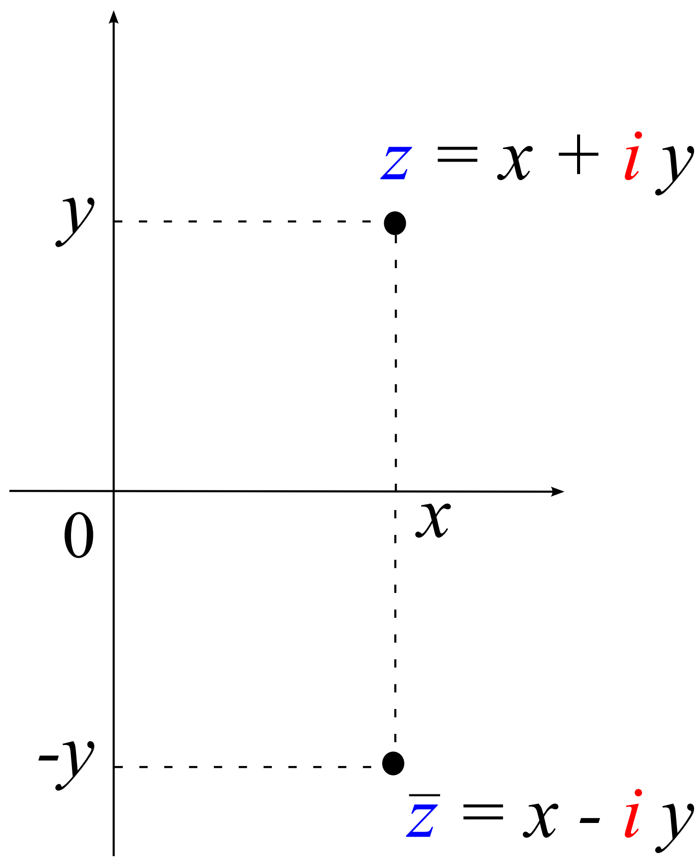
Valor Absoluto y Conjugado

Definición 5 (Valor absoluto)**.** *El* ***valor absoluto*** *del número complejo $z = x + i\,y$, denotado por $|z|$, se define como*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Definición 6 (Conjugado). *El **conjugado** del número complejo* $z = x + i\, y$*, denotado por* $\overline{z}$*, se define como*

$$\overline{z} = x + i\,(-y).$$



Propiedades

Sean z_1 y z_2, números complejos. Las siguientes propiedades se cumplen:

1. $\overline{\overline{z_1}} = z_1$.

2. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$.

3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

4. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$.

5. $|\overline{z_1}| = |z_1|$.

6. $z_1\,\overline{z_1} = |z_1|^2$.

7. $z_1{}^{-1} = \dfrac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}$, $z_1 \neq 0$.

8. $|z_1| \geq |\mathrm{Re}\, z_1| \geq \mathrm{Re}\, z_1$.

9. $|z_1| \geq |\mathrm{Im}\, z_1| \geq \mathrm{Im}\, z_1$.

10. $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

11. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$.

Proposición 2 (Desigualdad Triangular). *Sean z_1 y z_2 números complejos. Entonces, la siguiente desigualdad se cumple*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

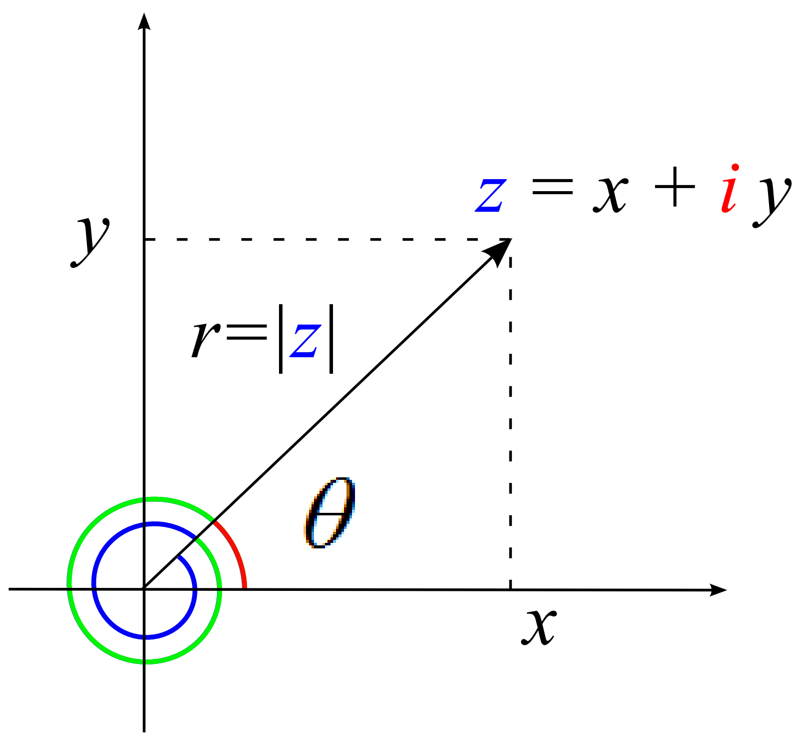
Proposición 3 (Desigualdad Triangular Generalizada). *Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ números complejos. Entonces, la siguiente desigualdad se cumple*

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

Coordenadas Polares

De la representación gráfica del número complejo $z = x + i\,y$ como vector, se deriva la representación en coordenadas polares (r, θ) de z, donde $r = |z|$ y θ es el argumento de z.

Definición 7 (Argumento de z). *El argumento del número complejo $z \neq 0$, denotado por $\arg z$, es cualquiera de los ángulos orientados formados por el vector $z \in \mathbb{C}$ con la parte positiva del eje real.*



Observaciones:

- r y $\theta = \arg z$ definen de manera única a z.
- z caracteriza de manera única a r, pero no $\theta = \arg z$.
- Se tiene que $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$. Así pues,

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

  es la ***forma polar*** de z.
- Los valores de $\theta = \arg z$ se pueden encontrar a partir de la ecuación

$$\tan\theta = \frac{y}{x}.$$

- Para que el valor de θ sea único, se debe tomar una determinación, es decir, escoger un intervalo de longitud 2π, por ejemplo, $\theta \in [0, 2\pi)$, ó $\theta \in [-\pi, \pi)$, etc.

Ejemplo

Para el número complejo $z = 1$, se tiene que

$$\theta \in \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots\}.$$

Definición 8 (Argumento principal). *El argumento principal de* $z \neq 0$ *o valor principal de* $\arg z$*, denotado por* $\operatorname{Arg} z$*, se define como el único valor de* $\arg z$ *tal que*

$$-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi.$$

Proposición 4. *Si* z_1 *y* z_2 *son números complejos distintos de cero, entonces se satisfacen las siguientes identidades:*

1. $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$.
2. $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$.

Ejemplo

Utilizando el argumento principal, represente en forma polar los siguientes números complejos.

a) $z_1 = 1 + i$

b) $z_2 = -1 + i$

c) $z_3 = -1 - i$

d) $z_4 = 1 - i$

Solución.

a) $z_1 = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \operatorname{sen}(\pi/4))$

b) $z_2 = \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i \operatorname{sen}(3\pi/4))$

c) $z_3 = \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) - i \operatorname{sen}(3\pi/4))$

d) $z_4 = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) - i \operatorname{sen}(\pi/4))$

Fórmula de Euler

Sea $z = x + i\,y$ un número complejo con módulo $r = 1$ y $\theta = \arg z$.

Escribiendo

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\ \operatorname{sen}\theta$$

se tiene que

$$z = e^{i\theta}$$

que se conoce como ***fórmula de Euler***.

Ahora, para cualquier número complejo $z = r(\cos\theta + i\ \operatorname{sen}\theta)$, con $r > 0$, se puede utilizar la fórmula de Euler para reescribir a z como:

$$z = re^{i\theta}.$$

Para los números complejos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, se satisfacen las siguientes identidades:

1. $z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.
2. $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{r_1}\, e^{i(-\theta_1)} = \dfrac{1}{r_1}\, e^{-i\theta}$.
3. $\dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right) e^{i(\theta_1-\theta_2)}$.

Potencias y Raíces

Definición 9 (Potencia n-ésima)**.** *Sean $z = r\, e^{i\theta}$, y n un entero. La potencia n-ésima de z, denotada por z^n, se define como*

$$z^n = r^n\, e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

Definición 10 (Raíces n-ésimas). *Sean $z = r\, e^{i\theta}$, y n un entero. Las raíces n-ésimas de z, denotadas por $z^{1/n}$, se definen como*

$$\begin{aligned} z^{1/n} &= \sqrt[n]{r}\, e^{i\,\frac{\theta+2k\pi}{n}} \\ &= \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right), \end{aligned}$$

para $k = 0, 1, \ldots, n-1$, donde $\sqrt[n]{r}$ denota la raíz n-ésima positiva del número real r.

Observación:

El valor de θ de las Definiciones 9 y 10 es cualquiera, no es necesariamente el argumento principal de z.

Ejemplo

Sea $z = 1 + i$. Calcular z^3 y $z^{1/5}$.

Solución.

$$z^3 = \sqrt[2]{2^3}\, e^{i\,\frac{3\pi}{4}}$$

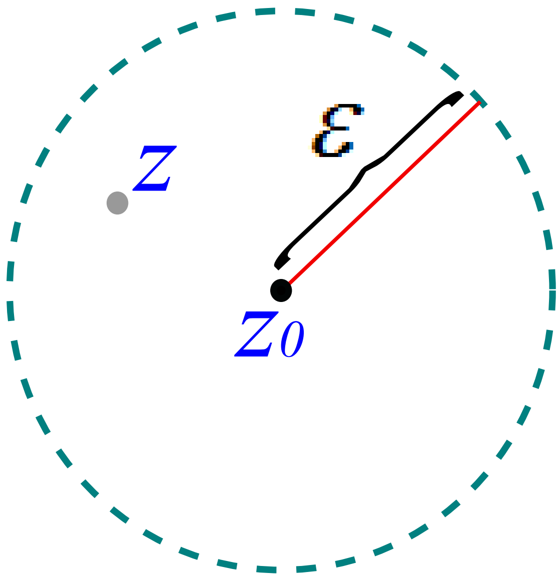
$$z^{1/5} = \sqrt[10]{2}\, e^{i\,\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}}, \quad k = 0, 1, \ldots, 4.$$

Regiones en el Plano Complejo

Definición 11 (Vecindad)**.**
El conjunto de puntos

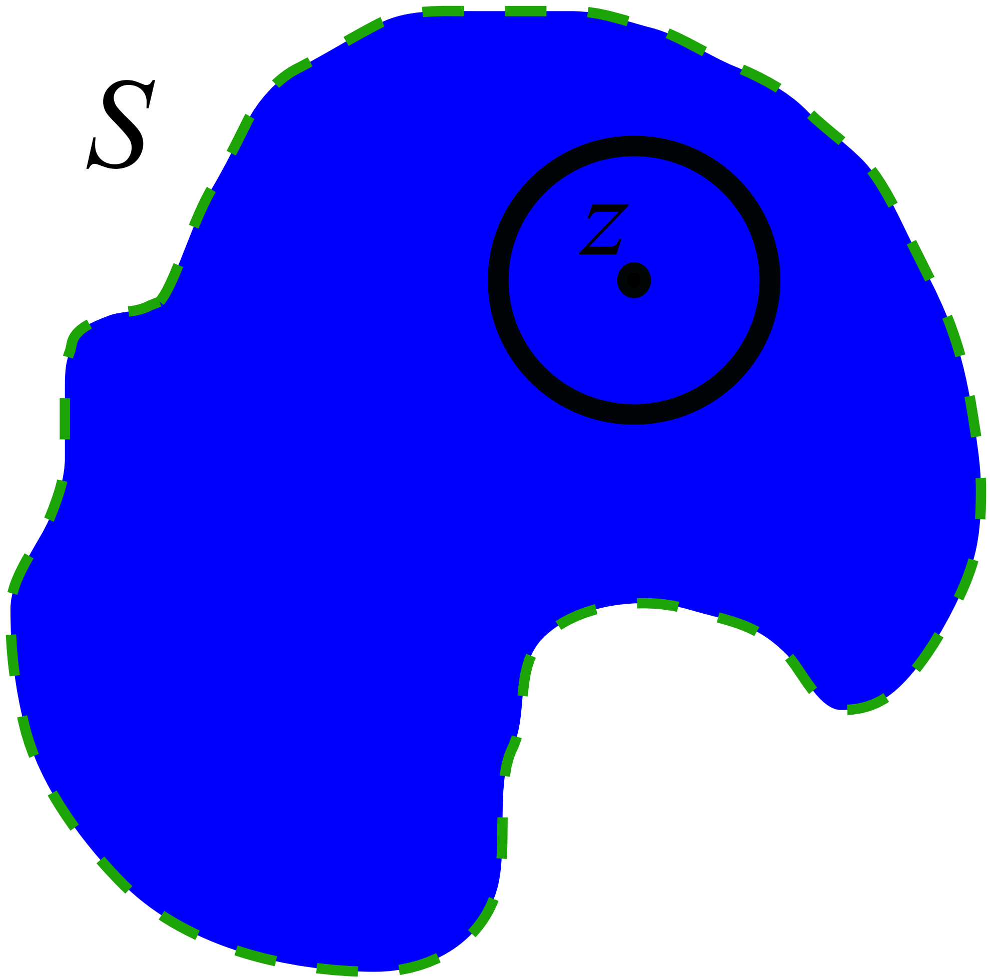
$$B(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

para cada $z_0 \in \mathbb{C}$ *y cada* $\varepsilon > 0$*, se denomina* ***vecindad*** *de* z_0.

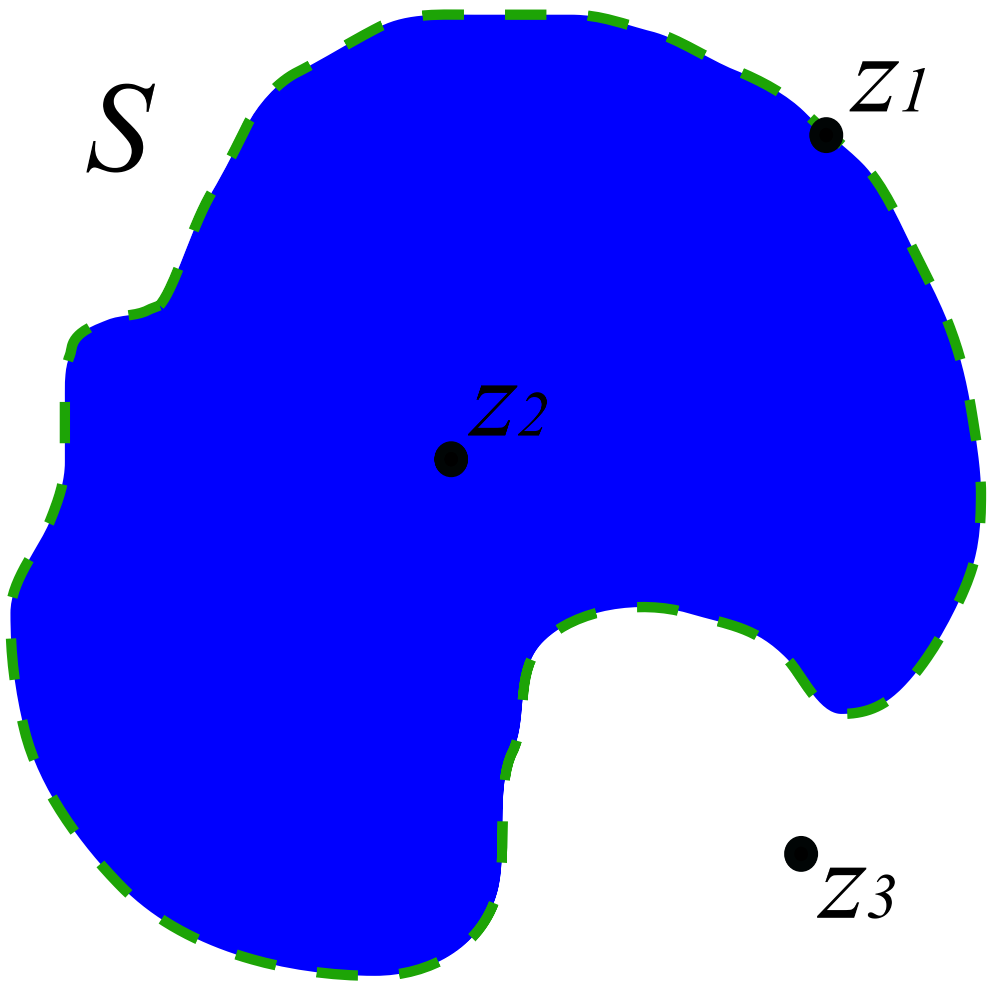


Definición 12 (Conjunto abierto)**.**

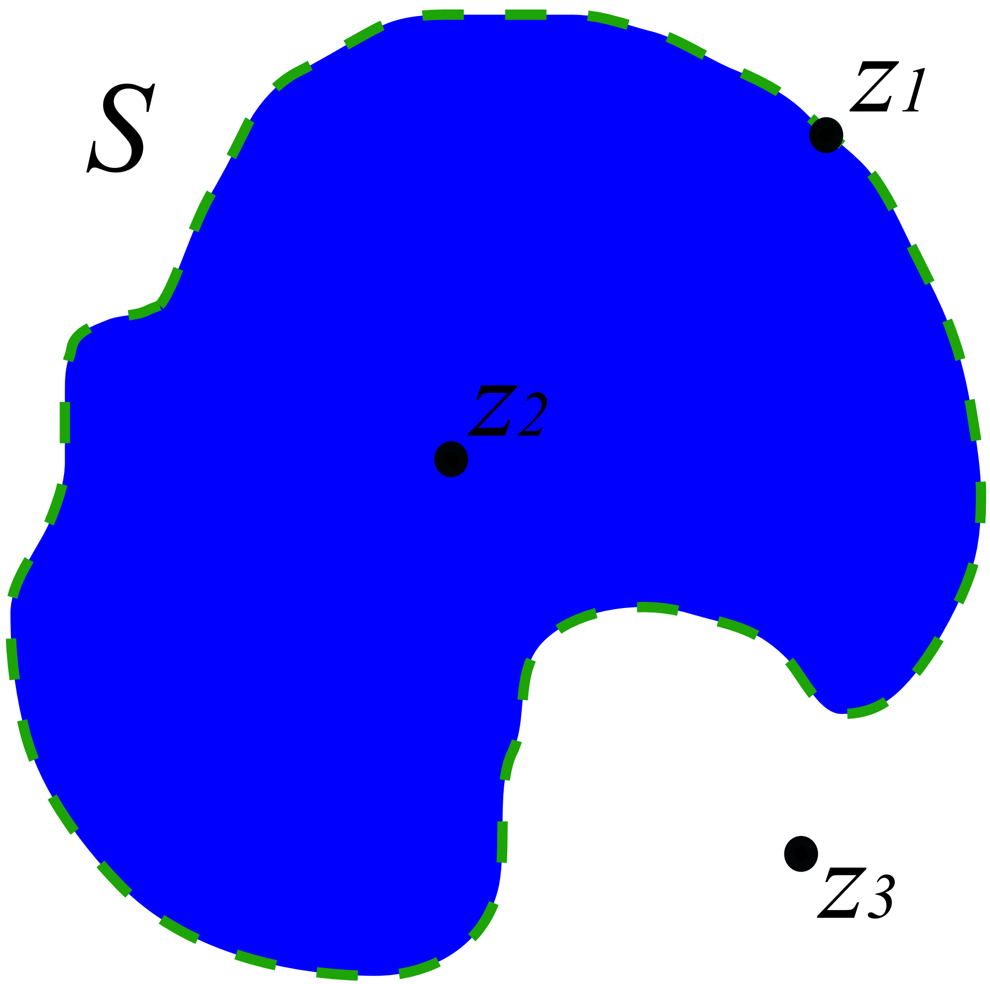
Se dice que un conjunto de números complejos S es ***abierto****, si para cada $z \in S$ existe existe una vecindad de z, $B(z, \varepsilon)$, tal que $B(z, \varepsilon) \subset S$.*



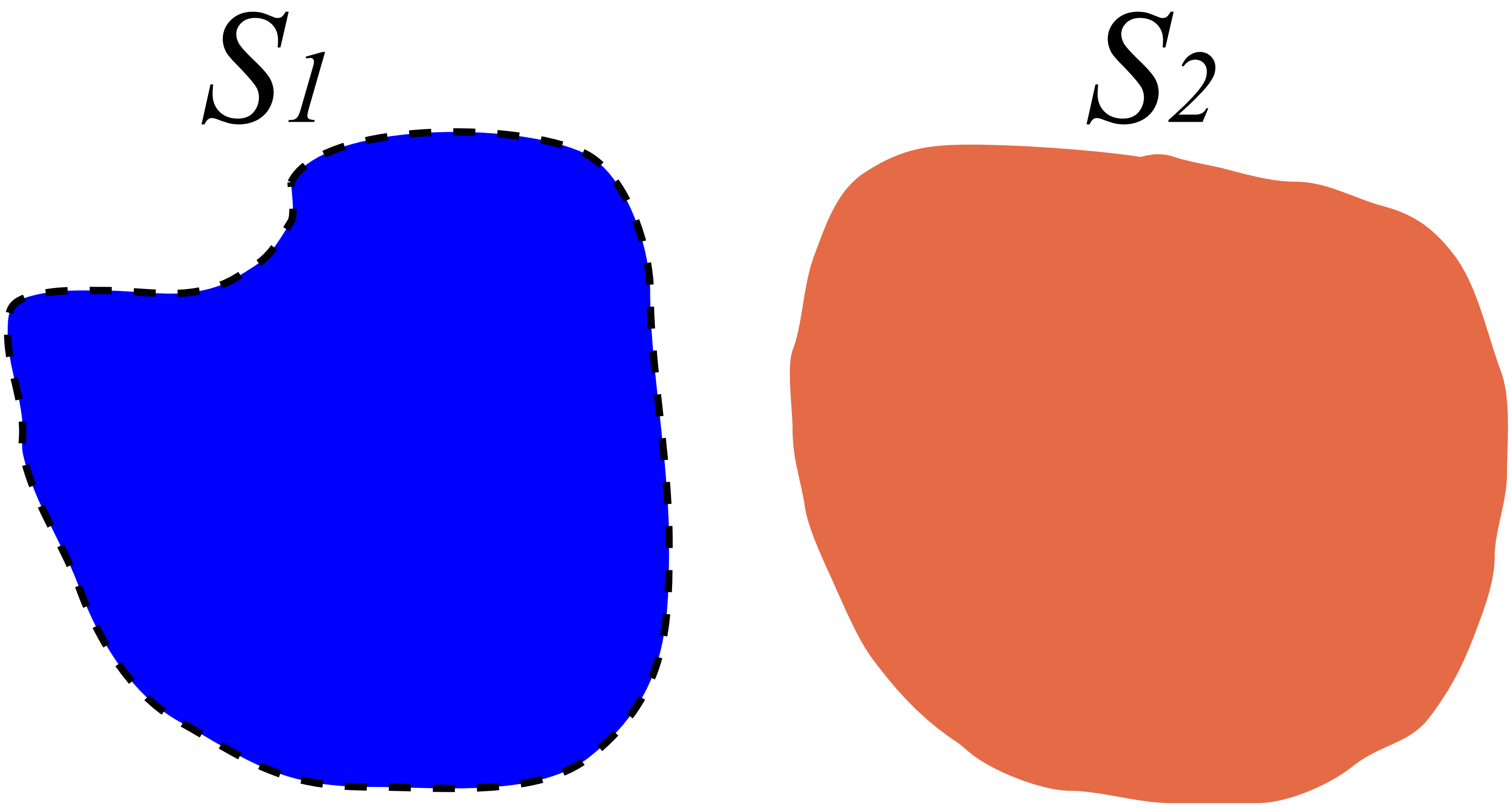
Definición 13 (Frontera de un conjunto)**.**
*Sea S un conjunto de números complejos. La **frontera** de S es el conjunto formado por los puntos z tales que todas las vecindades de z contienen puntos de S y puntos que no están en S.*



Definición 14 (Punto de acumulación)**.**
Sea S un conjunto de números complejos. Se dice que z_0 es un ***punto de acumulación*** *si toda vecindad de z_0 contiene por lo menos un punto de S diferente de z_0.*

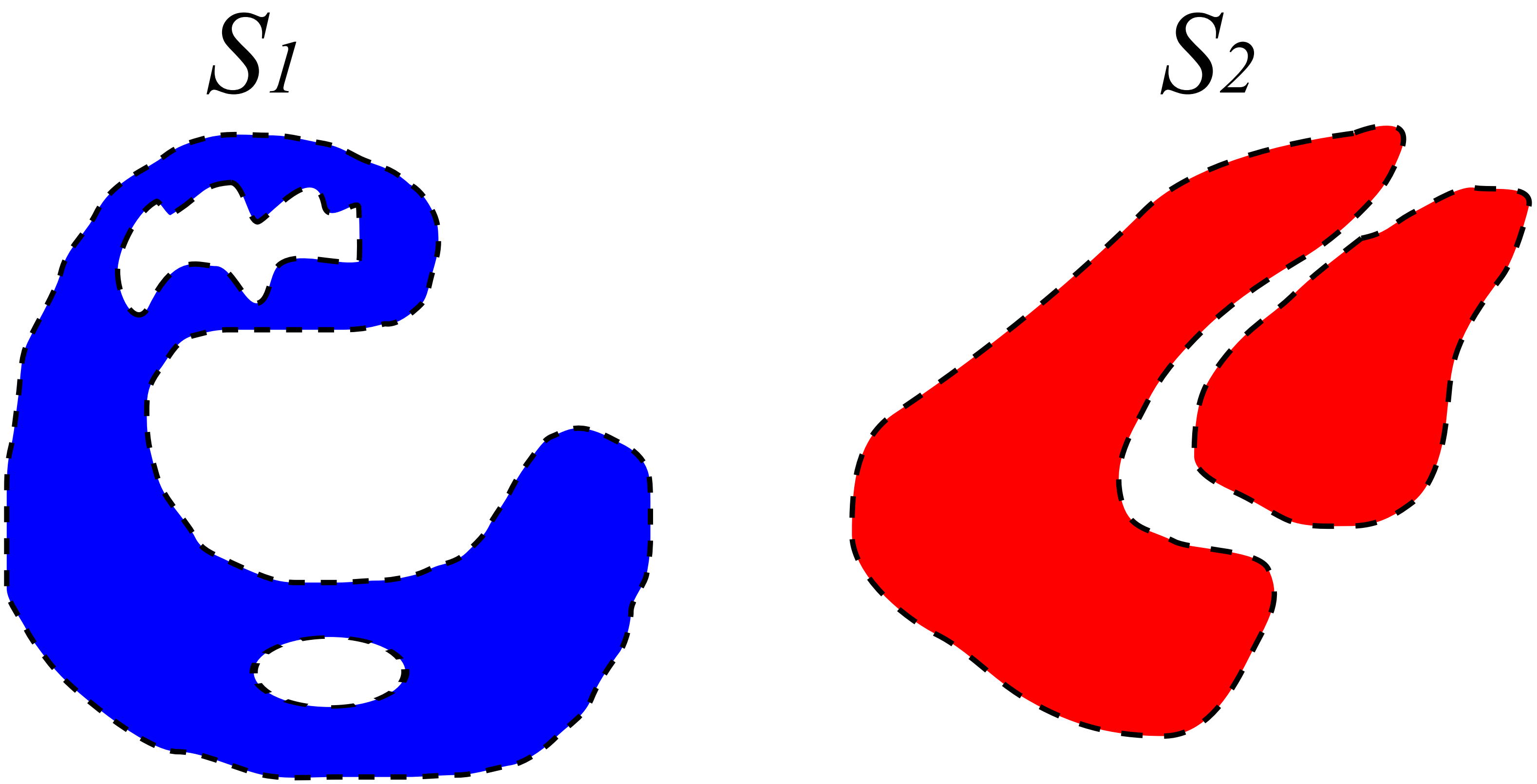


Definición 15 (Conjunto cerrado)**.**
Se dice que un conjunto de números complejos S es ***cerrado****, si todos sus puntos de acumulación pertenecen a él. De forma equivalente, S es cerrado si contiene a su frontera.*



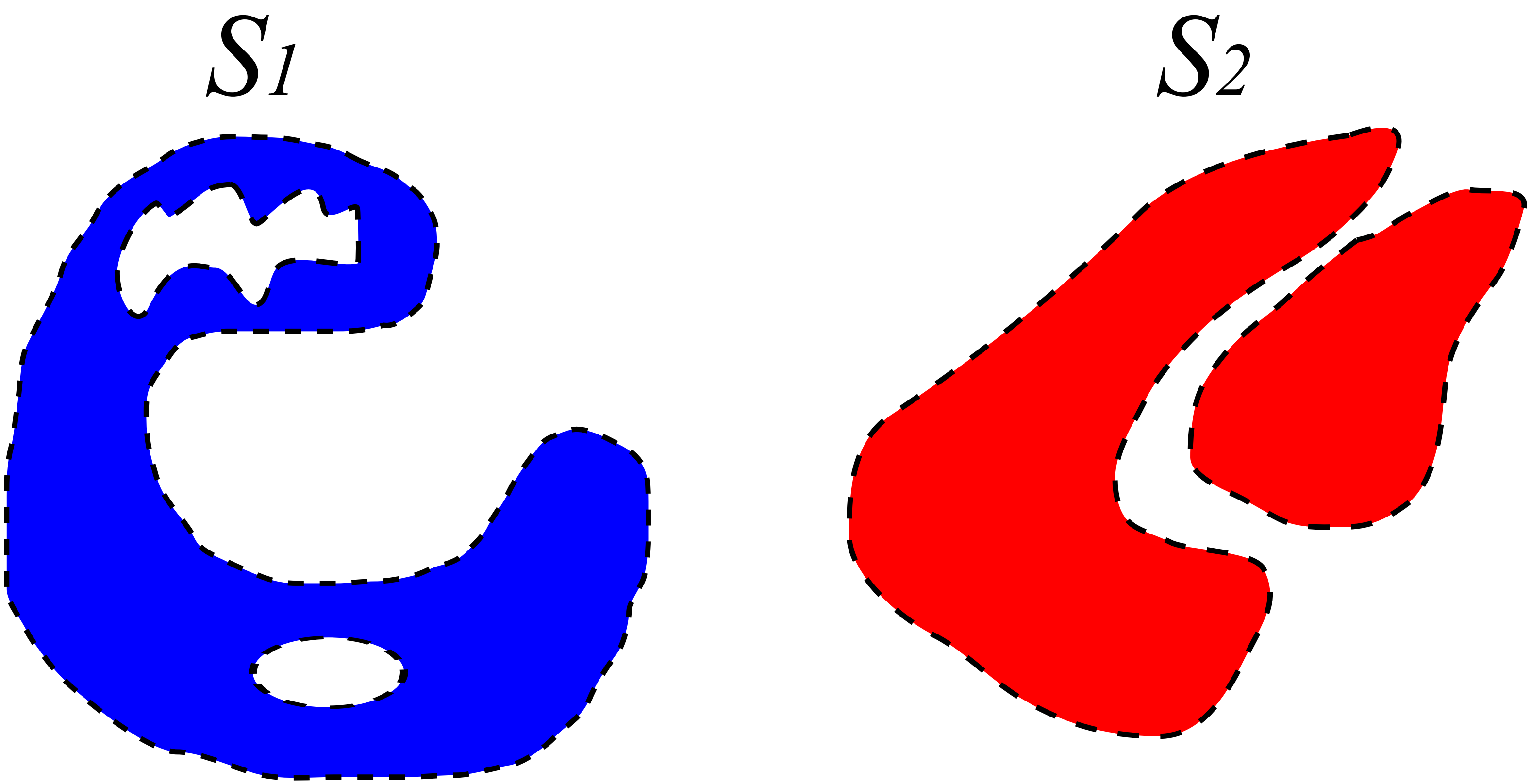
Definición 16 (Conjunto conexo)**.**

Se dice que un conjunto de números complejos S es ***conexo****, si dados puntos cualesquiera de S, existe una trayectoria formada por segmentos de recta que los une y cuyos puntos pertenecen todos a S.*

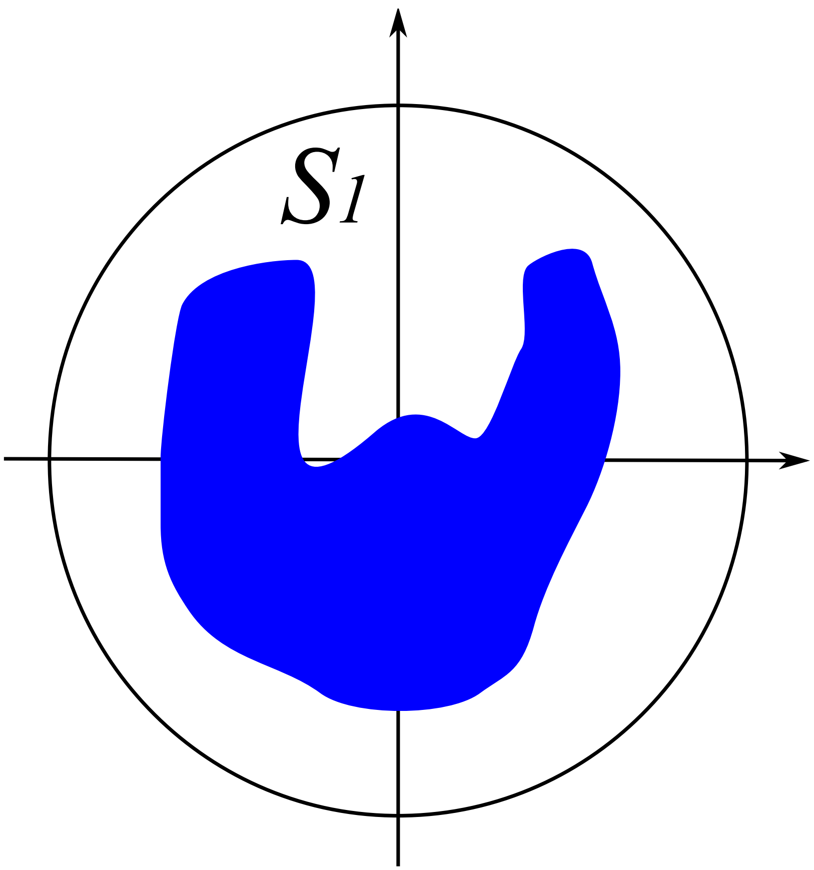


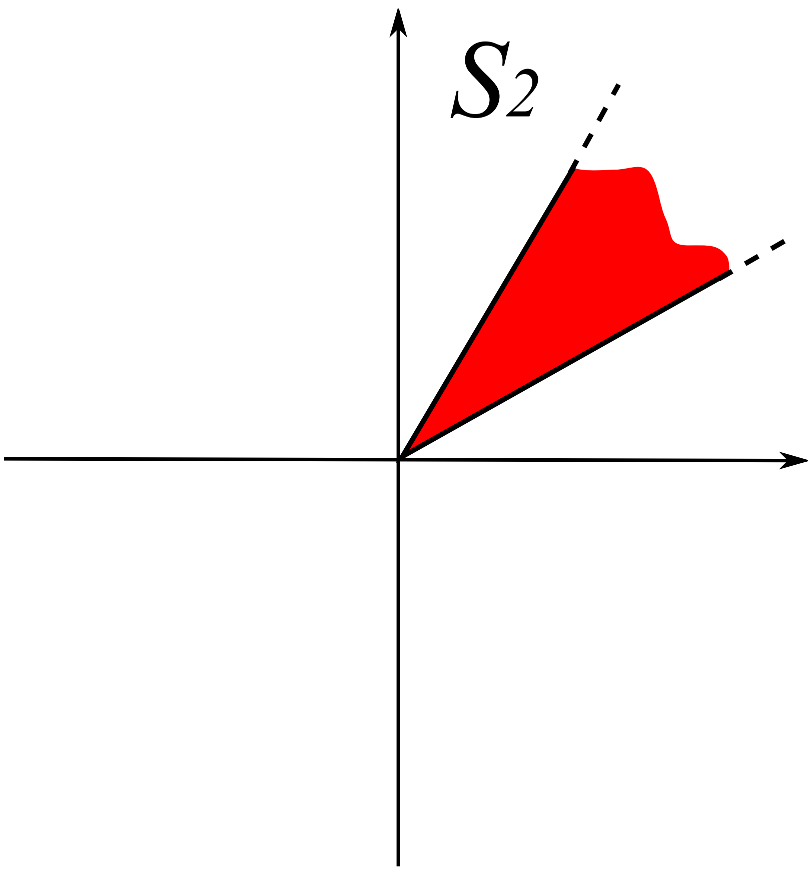
Definición 17 (Dominio)**.**

*Se dice que un conjunto de números complejos S es un **dominio**, si S es abierto y conexo.*



Definición 18 (Conjuntos acotado y no acotado)**.**
Se dice que un conjunto de números complejos S es ***acotado****, si existe un número real $R > 0$ tal que todo punto de S queda dentro de la circunferencia $|z| = R$. Por el contrario, $|z| > R$ para todo $R > 0$ y algún $z \in S$, se dice que S es* ***no acotado****.*





Funciones de Variable Compleja
(Continuidad, Diferenciación y Funciones Elementales)

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
Departamento de Electrónica, Computación y Control
Variable Compleja y Cálculo Operacional

Marzo, 2013

Contenido

Funciones de Variable Compleja **3**

Definición 3

Funciones Componentes 7

Límite y Continuidad 8

Diferenciación 12

Funciones Analíticas y Armónicas 16

Funciones Elementales **22**

Función Exponencial 22

Funciones Trigonométricas 24

Funciones Hiperbólicas 27

Función Logaritmo 29

Función Exponente Complejo 35

Funciones Trigonométricas Inversas 37

Funciones Hiperbólicas Inversas 40

Funciones de Variable Compleja

Las funciones de variable compleja poseen muchas aplicaciones en distintas áreas de la Ingeniería, por ejemplo, en la teoría de corrientes alternas, el movimiento de fluidos o el procesamiento de señales. Este tema está dedicado al desarrollo y a la compresión de los fundamentos matemáticos de las funciones de variable compleja.

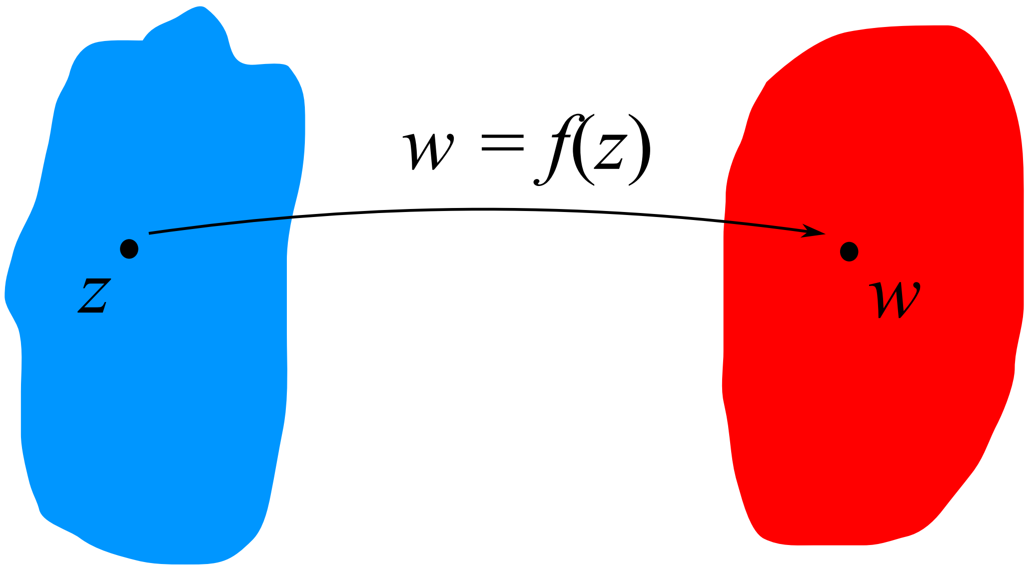
Definición

Una ***función*** f ***de variable compleja*** es una regla de asignación que le hace corresponder a un número complejo $z = x + i\,y$ uno o varios números complejos $w = u + i\,v$. El número w se llama valor o imagen de f en z y se designa por $f(z)$; es decir,

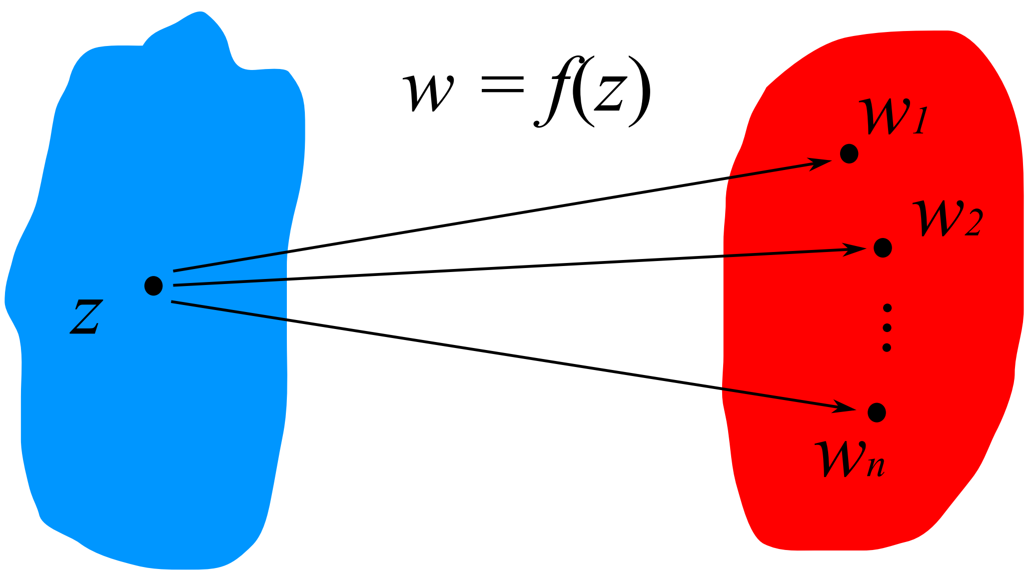
$$w = f(z)$$

o, equivalentemente,

$$u + i\,v = f(x + i\,y).$$



Funciones monovaluadas



Funciones multivaluadas

Definición 1 (Dominio y Rango)**.** *El conjunto de números complejos* z *donde la función* f *está bien definida se denomina* ***dominio*** *de* f*.*
El conjunto de todas las imágenes $w = f(z)$ *es llamado* ***rango*** *de* f*.*

Definición 2 (Polinomio complejo)**.** *Sean* $n \geq 0$ *un entero. Sean* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *constantes complejas. La función*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \qquad (a_n \neq 0)$$

se denomina ***polinomio complejo*** *o, simplemente,* ***polinomio de grado*** n*.*

¿Cuál es el dominio y el rango de un polinomio complejo?

Definición 3 (Función racional)**.** *Sean $p(z)$ y $q(z)$ polinomios. La función $r(z)$ definida por*

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

*se denomina **función racional** y está definida en todo número complejo z, excepto donde $q(z) = 0$.*

¿Cómo se determinan el dominio y el rango de una función racional?

Ejemplo

El dominio y rango de la función

$$r(z) = \frac{z+1}{z-i}.$$

están dados respectivamente por

$$\{z \in \mathbb{C} : z \neq i\}, \qquad \{w \in \mathbb{C} : w \neq 1\}.$$

Funciones Componentes

Sea $f(z)$ una función de variable compleja. Entonces, existen funciones $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, denominadas ***funciones componentes***, tales que $f(z)$ se puede expresar como

$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y),$$

donde $z = x + i\,y$.

Ejemplo

Encuentre las funciones componentes de $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

Solución. Las funciones componentes de $f(z)$ son

$$u(x, y) = \frac{x(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 + y^2}, \qquad v(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2}$$

Límite y Continuidad

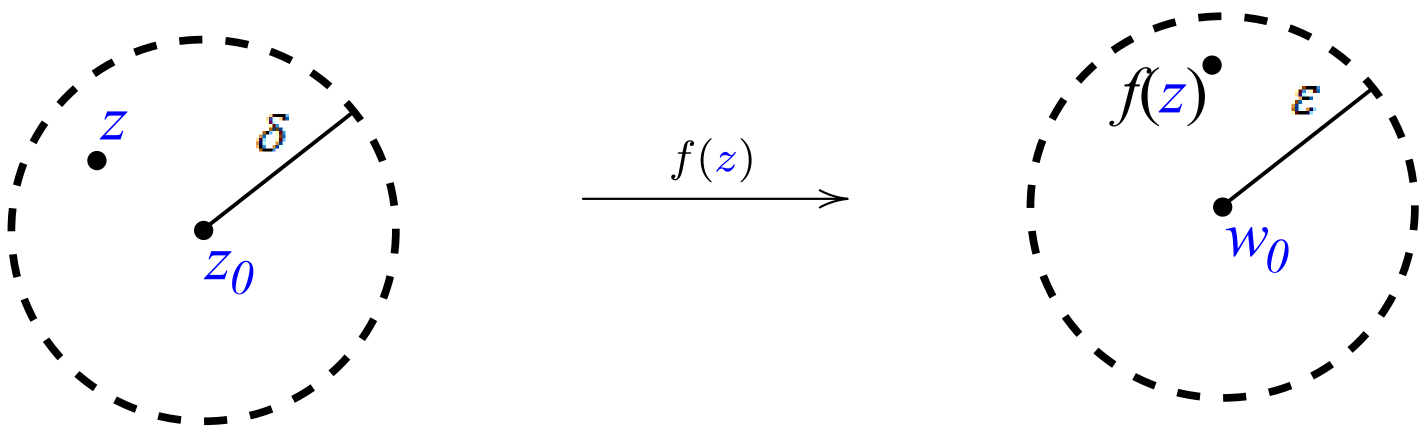
Definición 4 (Límite)**.**
Sea f una función definida en todos los puntos de cierta vecindad de z_0, excepto, posiblemente en el mismo z_0. Se dice que w_0 es un límite de $f(z)$, si para cada número positivo ε, existe un número positivo δ tal que

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \textit{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Se denota con

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

cuando w_0 es un límite de $f(z)$ cuando z tiende a z_0.



Teorema 1. *Supongamos que* $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ *y* $\lim_{z \to z_0} g(z) = W_0$.

Entonces:

1. $\lim_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = w_0 + W_0$;
2. $\lim_{z \to z_0} [f(z) \cdot g(z)] = w_0\, W_0$;
3. $\lim_{z \to z_0} \left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right] = \dfrac{w_0}{W_0}$, $W_0 \neq 0$.

Teorema 2. *Supongamos que* $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$, $z_0 = x_0 + i\, y_0$, *y* $w_0 = u_0 + i\, v_0$. *Entonces,*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

si, y sólo si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \qquad y \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0.$$

Definición 5 (Continuidad)**.** *Se dice que una función $f(z)$ es continua en z_0, si satisface las dos condiciones siguientes:*

(i) $f(z_0)$ *está definido;*

(ii) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ *existe, y*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Se dice que $f(z)$ es continua en un dominio D, si es continua en todo $z \in D$.

Ejemplo

Estudie la continuidad de la función

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2-1}{z-1}, & z \neq 1, \\ 1, & z = 1. \end{cases}$$

Teorema 3. *Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones definidas en un dominio $D \subset \mathbb{C}$. Entonces:*

1. *la función $f(z) + g(z)$ es continua en D;*
2. *la función $f(z)\,g(z)$ es continua en D;*
3. *la función $f(z)/g(z)$ es continua en $D \setminus \{z : g(z) = 0\}$.*

Teorema 4. *Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones definidas respectivamente en los dominios $D \subset \mathbb{C}$ y $E \subset \mathbb{C}$, tales que $f(D) \subseteq E$.*
Si f es continua en $z_0 \in D$ y g es continua en $f(z_0) \in E$, entonces la función $h(z) = g(f(z))$ es continua en z_0.

Teorema 5. *Sea $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$. Entonces, f es continua en $z_0 = x_0 + i\,y_0$ si, y sólo si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son continuas en el punto (x_0, y_0).*

Ejemplo

Estudie la continuidad de la función

$$f(z) = 2x + i\,y + \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Diferenciación

Definición 6 (Derivada). *Sea $f(z)$ una función definida en un dominio $D \subset \mathbb{C}$. Sea z_0 un punto de acumulación de D.*
La derivada de f en z_0, denotada por $f'(z_0)$, se define como

$$f'(z_0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(z_0 + s) - f(z_0)}{s},$$

donde s es un número complejo.

Fórmulas o Reglas de Diferenciación

Sean $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$ funciones derivables en z. Entonces:

1. Si $f(z) = c$, entonces $f'(z) = 0$, donde $c \in \mathbb{C}$.

2. Si $h(z) = c\, f(z)$, entonces $h'(z) = c\, f'(z)$, donde $c \in \mathbb{C}$.

3. Si $f(z) = z$, entonces $f'(z) = 1$.

4. $[f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z)]' = f_1'(z) + f_2'(z) + \cdots + f_n'(z)$.

5. $[f_1(z) f_2(z)]' = f_1'(z) f_2(z) + f_2'(z) f_1(z)$.

6. $[(f(z))^m]' = m\,(f(z))^{m-1}\, f'(z)$, donde m es un entero.

7. Si $f(z) = z^m$, entonces $f'(z) = m\, z^{m-1}$, donde m es un entero.

8. Si $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_m z^m$, entonces

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots + m\, a_m z^{m-1}.$$

9. $\left[\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}\right]' = \dfrac{f_1'(z)f_2(z) - f_2'(z)f_1(z)}{(f_2(z))^2}$, siempre y cuando $f_2(z) \neq 0$.

10. ***Regla de la Cadena.*** Sean $f(z)$ derivable en z_0 y $g(w)$ derivable en $f(z_0)$. Entonces la función $h(z) = g(f(z))$ es derivable en z_0, y

$$h'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0).$$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Teorema 6. *Sea $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ una función derivable en $z_0 = x_0 + i\, y_0$. Entonces, $u(x, y)$ y $v(x, y)$ satisfacen las* ***Ecuaciones de Cauchy-Riemann*** *en el punto (x_0, y_0), esto es:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) & = & \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) & = & -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{array}\right.$$

Ejemplo

Las funciones componentes de $f(z) = e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Condiciones Necesarias y Suficientes para la Existencia de la Derivada

Teorema 7. *Sean* $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ *y* $z_0 = x_0 + i\, y_0$.
Si $u(x, y)$ *y* $v(x, y)$ *tienen primeras derivadas parciales continuas, en* (x_0, y_0), *y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en* (x_0, y_0), *entonces* $f'(z_0)$ *existe y está dada por*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\, \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

ó

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\, \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

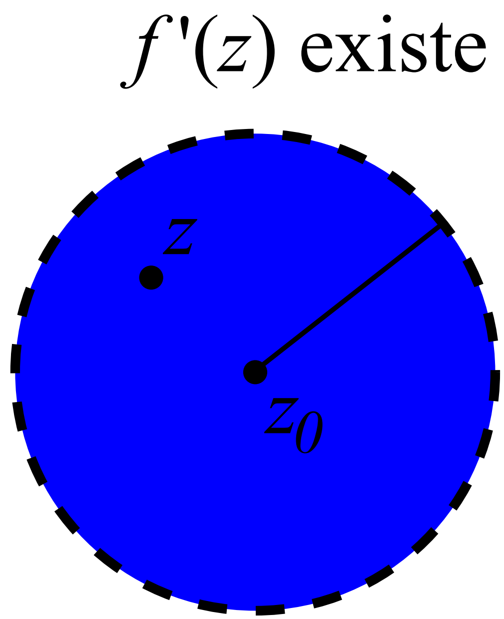
Ejemplo

Determine la derivada de $f(z) = e^x \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y$ en todo $z \in \mathbb{C}$.

Funciones Analíticas y Armónicas

Funciones Analíticas

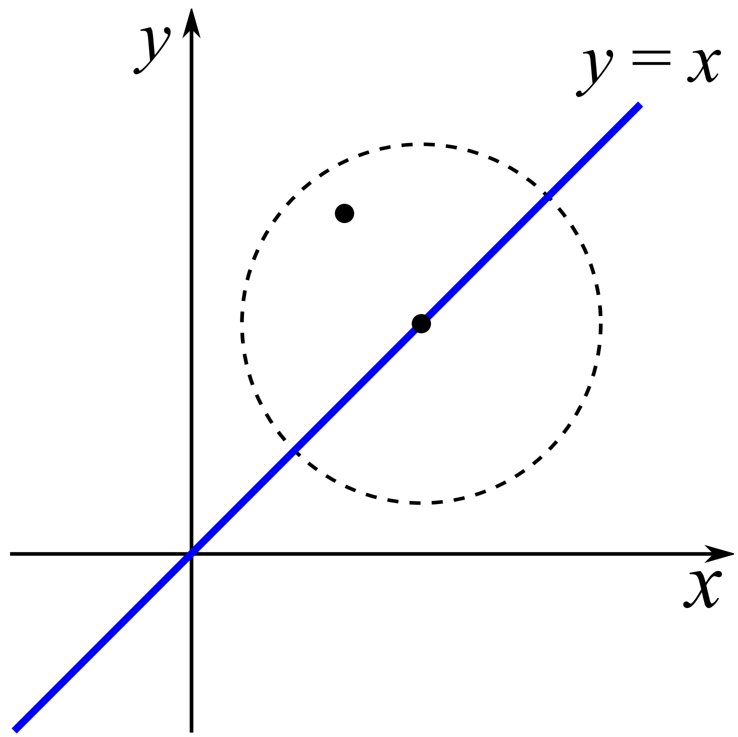
Se dice que una función $f(z)$ es ***analítica*** en z_0, si $f'(z)$ existe en z_0 y en todo punto z de alguna vecindad de z_0.



Ejemplo

Determine los puntos $z = x + i\,y$ donde la función $f(z) = x^2 + i\,y^2$ es analítica.

Solución. La función $f(z) = x^2 + i\,y^2$ solamente es derivable en todo z que pertenece a la recta $y = x$, como se muestra en la siguiente figura.



Por tanto, en ningún $z \in \mathbb{C}$, la función $f(z)$ es analítica.

Ejemplo

Determine los puntos $z = x + i\,y$ donde la función

$$f(z) = \frac{x(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 + y^2} + i\,\frac{y(x^2 + y^2 - 1)}{x^2 + y^2}$$

es analítica.

Solución. La función $f(z)$ es analítica en todo $\mathbb{C}$ excepto en $z = 0$.

Definición 7 (Punto singular)**.** *Se dice que $z_0 \in \mathbb{C}$ es un **punto singular** de una función $f(z)$, si $f(z)$ es analítica en al menos un punto z de toda vecindad de z_0 excepto en el mismo z_0.*

Definición 8 (Función entera)**.** *Una función $f(z)$ que es analítica en todo punto z del plano complejo se denomina **entera**.*

Proposición 1. *Sean $f(z)$ y $g(z)$ funciones analíticas en un dominio $D \subset \mathbb{C}$. Entonces:*

1. *$f(z) \pm g(z)$ es analítica en D;*
2. *$f(z)\, g(z)$ es analítica en D;*
3. *$f(z)/g(z)$ es analítica en $D \setminus \{z : g(z) = 0\}$.*

Ejemplo

Determine los puntos $z \in \mathbb{C}$ donde la función

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z}$$

es analítica.

Solución. La función $f(z)$ es analítica en todo $\mathbb{C}$ excepto en $z = 0$.

Funciones Armónicas Conjugadas

Definición 9 (Función armónica)**.** *Se dice que una función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es* ***armónica*** *en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$, si en todo punto $(x, y) \in D$ tiene derivadas parciales, primera y segunda, continuas y satisface la ecuación en derivadas parciales*

$$\nabla^2 h(x, y) = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = 0,$$

conocida como ecuación de Laplace.

Ejemplo

La función

$$h(x, y) = x^2 - y^2$$

es armónica en todo $\mathbb{R}^2$.

Definición 10 (Armónica Conjugada). *Si dos funciones dadas $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son armónicas en un dominio $D \subset \mathbb{R}^2$ y sus primeras derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann para todo punto $(x, y) \in D$, se dice que v es* ***armónica conjugada*** *de u.*

Teorema 8. *Una función $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ es analítica en un dominio D si, y sólo si v es armónica conjugada de u.*

Ejemplo

Determine la función armónica conjugada de $\quad u(x, y) = x + y.$

Solución. La función armónica conjugada de $u(x, y) = x + y$ es

$$v(x, y) = y - x + c,$$

donde c es una constante real.

Funciones Elementales

Función Exponencial

Para cada $z = x + i\,y$, la función ***exponencial*** se define como

$$e^{z} = e^{x}\cos y + i\,e^{x}\operatorname{sen} y$$

Propiedades

- *La función exponencial es entera*, además,

$$(e^{z})' = e^{z}.$$

- *El rango de la función exponencial es todo el plano complejo excepto* $z = 0$.

- *La función exponencial es periódica con un periodo imaginario de* $2\pi i$.

- *Propiedades algebraicas.* Sean $z_1 = x_1 + i\,y_1$ y $z_2 = x_2 + i\,y_2$. Las siguientes identidades son ciertas:

   i) $e^{z_1}\,e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

   ii) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$

   iii) $e^0 = 1$

   iv) $\dfrac{1}{e^{z_1}} = e^{-z_1}$

   v) $(e^{z_1})^n = e^{nz_1}$, para $n = 1, 2, \ldots$.

Ejemplo

Resuelva la ecuación $e^z = i$.

Solución. El conjunto de números complejos que resuelven la ecuación $e^z = i$ es

$$\left\{ z = x + i\,y : x = 0,\ y = (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots \right\}$$

Funciones Trigonométricas

Para cada $z = x + i\,y$, la función ***seno*** se define como

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

y la función ***coseno*** como

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Propiedades

- *Las funciones* $\operatorname{sen} z$ *y* $\cos z$ *son enteras*, además,

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen} z)' &= \cos z, \\ (\cos z)' &= -\operatorname{sen} z. \end{aligned}$$

- *Se satisfacen las identidades trigonométricas*, por ejemplo,

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1.$$

- *Las funciones* $\operatorname{sen} z$ *y* $\cos z$ *son periódicas con un periodo de* 2π.

- *Las funciones* $\operatorname{sen} z$ *y* $\cos z$ *se pueden expresar equivalentemente como:*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y, \\ \cos z &= \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y. \end{aligned}$$

- *Los ceros de* $\operatorname{sen} z$ *y* $\cos z$ *son:*

$$\begin{array}{rclcl} \operatorname{sen} z &=& 0 & \text{si, y sólo si} & z = n\pi, \\ \cos z &=& 0 & \text{si, y sólo si} & z = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}, \end{array}$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Otras funciones trigonométricas

Las demás funciones trigonométricas se definen como:

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z},$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \qquad \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}.$$

Para los valores de z donde no se anule el denominador de las funciones anteriores, su derivada existe y es, respectivamente,

$$(\tan z)' = \sec^2 z, \qquad (\cot z)' = -\csc^2 z,$$

$$(\sec z)' = \tan z \sec z, \qquad (\csc z)' = -\cot z \csc z.$$

Funciones Hiperbólicas

Para cada $z = x + i\,y$, la función ***seno hiperbólico*** se define como

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

y la función ***coseno hiperbólico*** como

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

Propiedades

- *Las funciones* $\operatorname{senh} z$ *y* $\cosh z$ *son enteras*, además,

$$\begin{aligned} (\operatorname{senh} z)' &= \cosh z, \\ (\cosh z)' &= \operatorname{senh} z. \end{aligned}$$

- *Se satisfacen las identidades hiperbólicas*, por ejemplo,

$$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1.$$

- *Las funciones* $\operatorname{senh} z$ *y* $\cosh z$ *también se pueden expresar como:*

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} z &= \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y, \\ \cosh z &= \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

- *Las funciones* $\operatorname{senh} z$ *y* $\cosh z$ *son periódicas con un periodo de* $2\pi i$.
- *Los ceros de* $\operatorname{senh} z$ *y* $\cosh z$ *son:*

$$\begin{array}{lclll} \operatorname{senh} z &=& 0 & \text{si, y sólo si} & z = n\pi i, \\ \cosh z &=& 0 & \text{si, y sólo si} & z = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}\, i, \end{array}$$

para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Otras funciones hiperbólicas

Las demás funciones trigonométricas se definen como:

$$\tanh z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}, \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z},$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \qquad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\operatorname{senh} z}.$$

Para los valores de z donde no se anule el denominador de las funciones anteriores, su derivada existe y es, respectivamente,

$$(\tanh z)' = \operatorname{sech}^2 z, \qquad (\coth z)' = -\operatorname{csch}^2 z,$$

$$(\operatorname{sech} z)' = -\tanh z \operatorname{sech} z, \qquad (\operatorname{csch} z)' = -\coth z \operatorname{csch} z.$$

Función Logaritmo

Para todo $z \neq 0$, la función ***logaritmo*** se define como

$$\log z = \ln |z| + i \arg z, \tag{1}$$

donde $\ln \cdot$ denota el logaritmo natural.

- La función logaritmo es multivaluada.
- El ***valor principal del logaritmo***, denotado por $\operatorname{Log} z$, es el valor de $\log z$ que se obtiene cuando se utiliza el argumento principal de z en (1), esto es

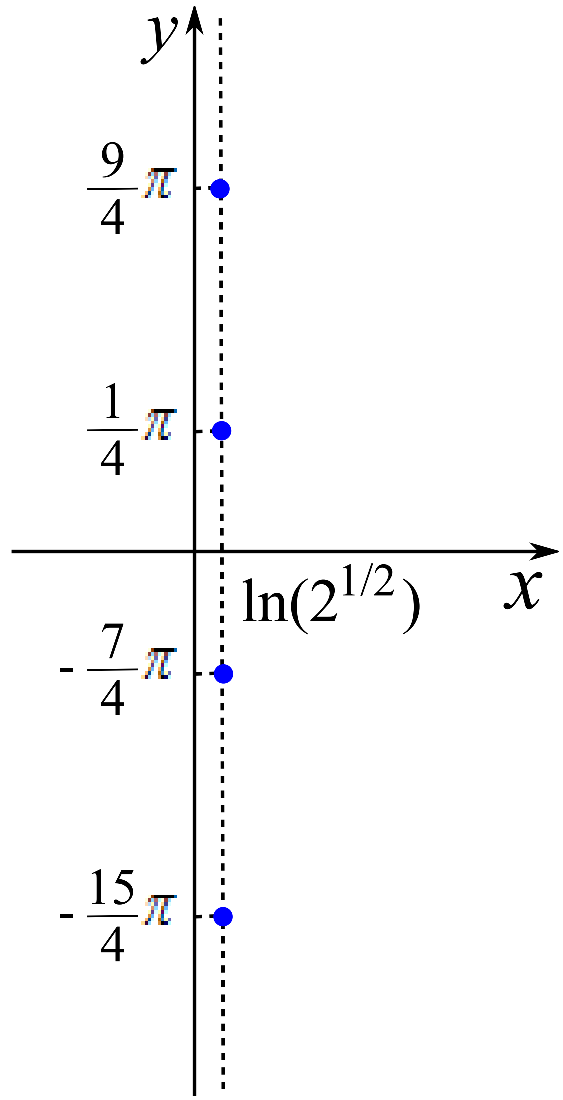
$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z, \qquad (|z| > 0,\ -\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi)$$

Ejemplo

Calcular los valores de $\log(1 + i)$.

Solución. Los valores de $\log(1+i)$ vienen dado por

$$\log(1+i) = \ln(\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$



- El valor principal del logaritmo, $\operatorname{Log} z$, es una función analítica en el dominio

$$(|z| > 0,\ -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi)$$

Ramas del Logaritmo

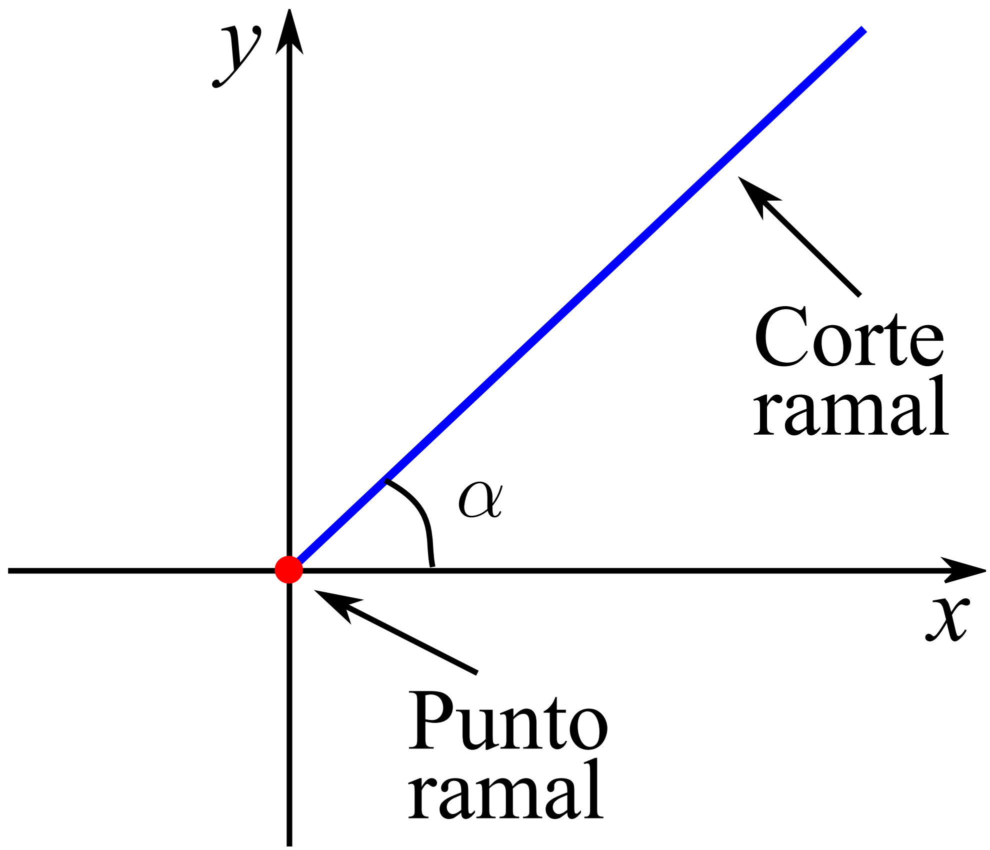
Definición 11 (Rama de una función multivaluada). *Una* ***rama*** *de una función multivaluada f es una función monovaluada F que es analítica en cierto dominio D y que coincide con f en D, es decir, $F(z) = f(z)$ para todo $z \in D$.*

Definición 12 (Corte ramal y punto ramal). *Un* ***corte ramal*** *es una línea o curva de puntos singulares que se introducen al definir una rama de una función multivaluada.*
El punto común a todos los cortes ramales de una función multivaluada se denomina ***punto ramal****.*

Definición 13 (Rama del logaritmo). *Una* ***rama del logaritmo*** *es una función logaritmo monovaluada definida como*

$$\log z = \ln|z| + i \arg z \qquad (|z| > 0,\ \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi),$$

donde α *es un número real fijo.*



Ejemplo

Dada la rama del logaritmo

$$\log z = \ln|z| + i \arg z \qquad (|z| > 0,\ -\pi/4 < \arg z < 7\pi/4),$$

calcule $\log(-i)$. Además, calcule $\operatorname{Log}(-i)$.

Solución. Se tiene que

$$\log(-i) = \frac{3\pi}{2}\, i, \qquad \operatorname{Log}(-i) = -\frac{\pi}{2}\, i$$

Función Exponente Complejo

Para cada $z \in \mathbb{C}$ diferente de cero, se define la función ***exponente complejo*** como

$$z^c = e^{c \log z},$$

donde c es una constante compleja.

Observaciones:

- *En general, la función exponente complejo es multivaluada.*

  Ejemplo

  Dada $f(z) = z^i$. Entonces, el valor de $f(i)$ está dado por

  $$i^i = e^{-(4n+1)\pi/2}, \qquad \text{para } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

  Por el contrario, si $f(z) = z^2$, entonces el valor de $f(i)$ es

  $$i^2 = -1.$$

- *Las ramas de la función exponente complejo se definen según la rama del logaritmo que se esté utilizando.*

- *La derivada de cada rama de la función exponente está dada por*

$$(z^c)' = c\, z^{c-1}$$

Función Exponencial de base c

Para $z \in \mathbb{C}$, la ***función exponencial de base*** $c \in \mathbb{C}$, se define como

$$c^z = e^{z \log c}$$

Observaciones:

- *Las ramas de la función exponencial de base c se definen según la rama del logaritmo que se esté utilizando.*

- *La derivada de la exponencial de base c está dada por*

$$(c^z)' = c^z \, \log c$$

Funciones Trigonométricas Inversas

Las funciones inversas de $\operatorname{sen} z$, $\cos z$ y $\tan z$, se definen, respectivamente, como

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^{-1} z &= -i \log\left(iz + (1-z^2)^{1/2}\right), \\
\cos^{-1} z &= -i \log\left(z + i(1-z^2)^{1/2}\right), \\
\tan^{-1} z &= \frac{i}{2} \log\left(\frac{i+z}{i-z}\right).
\end{aligned}$$

Ejercicio

Deducir las expresiones de las funciones $\cot^{-1} z$ y $\csc^{-1} z$.

Observaciones:

- *Las funciones trigonométricas inversas son multivaluadas.*
- *Las ramas de las funciones trigonométricas inversas se definen según la rama del logaritmo y el valor de la raíz cuadra que se estén utilizando.*
- *La derivada de cada rama de las funciones trigonométricas inversas* $\operatorname{sen}^{-1} z$, $\cos^{-1} z$ *y* $\tan^{-1} z$ *está dada, respectivamente, por*

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen}^{-1} z)' &= \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}, \\ (\cos^{-1} z)' &= \frac{-1}{(1-z^2)^{1/2}}, \\ (\tan^{-1} z)' &= \frac{1}{1+z^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo

Resuelva la ecuación

$$\operatorname{sen}^2 z + 2i \operatorname{sen} z - 1 = 0.$$

Solución. El conjunto solución, S, de la ecuación dada está definido por

$$S = S_1 \cup S_2,$$

donde

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{z \in \mathbb{C} : z = 2k\pi - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) i,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\} \\ S_2 &= \left\{z \in \mathbb{C} : z = (2n+1)\pi - \ln\left|1-\sqrt{2}\right| i,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\} \end{aligned}$$

Funciones Hiperbólicas Inversas

Las funciones inversas de $\operatorname{senh} z$, $\cosh z$ y $\tanh z$, se definen, respectivamente, como

$$\begin{aligned}
\operatorname{senh}^{-1} z &= \log\left(z + (z^2+1)^{1/2}\right), \\
\cosh^{-1} z &= \log\left(z + (z^2-1)^{1/2}\right), \\
\tanh^{-1} z &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right).
\end{aligned}$$

Ejercicio

Deducir las expresiones de las funciones $\coth^{-1} z$ y $\operatorname{csch}^{-1} z$.

Observaciones:

- *Las funciones hiperbólicas inversas son multivaluadas.*
- *Las ramas de las funciones hiperbólicas inversas se definen según la rama del logaritmo y el valor de la raíz cuadra que se estén utilizando.*
- *La derivada de cada rama de las funciones hiperbólicas inversas* $\operatorname{senh}^{-1} z$, $\cosh^{-1} z$ *y* $\tanh^{-1} z$ *está dada, respectivamente, por*

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{senh}^{-1} z)' &= \frac{1}{(z^2+1)^{1/2}}, \\
(\cosh^{-1} z)' &= \frac{-1}{(z^2-1)^{1/2}}, \\
(\tanh^{-1} z)' &= \frac{1}{1-z^2}.
\end{aligned}
$$

Mapeos

(Lineales, Inversión y Bilineal)

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
Departamento de Electrónica, Computación y Control
Variable Compleja y Cálculo Operacional

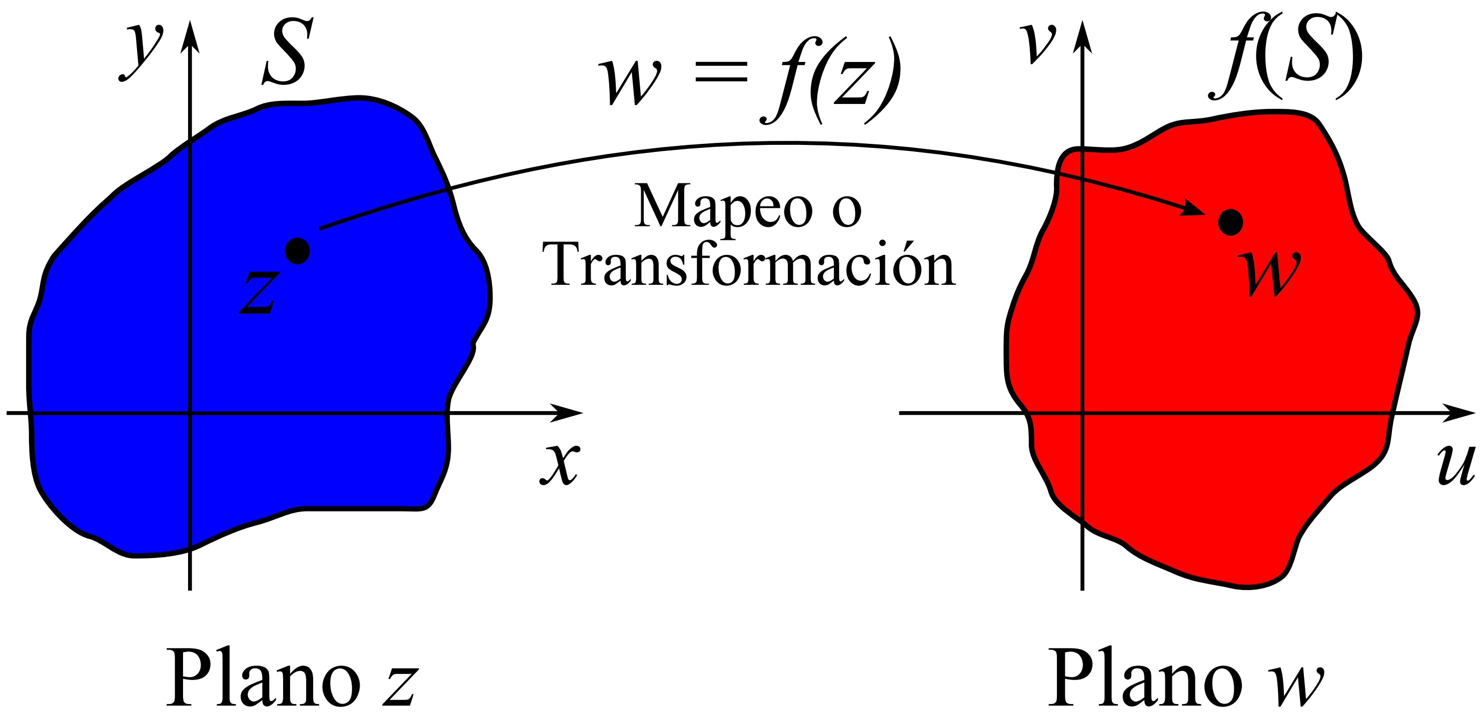
Marzo, 2013

Contenido

Mapeos **3**
Mapeos Lineales 4
Mapeo $w = z + c$ 4
Mapeo $w = bz$ 8
Mapeo $w = bz + c$ 12
Inversión 16
Transformación de rectas y circunferencias 18
Mapeos Bilineales 22

Mapeos

En esta parte a una función $f(z)$ de variable compleja la denominaremos ***mapeo*** o ***transformación***. Denotaremos con $w = f(z)$ la imagen de z bajo f, donde $z = x + i\,y$, y $w = u + i\,v$.



Definición 1 (Mapeo inyectivo)**.** *Sean* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Se dice que el mapeo* $w = f(z)$ *es inyectivo, si* $z_1 \neq z_2$ *implica que* $f(z_1) \neq f(z_2)$.

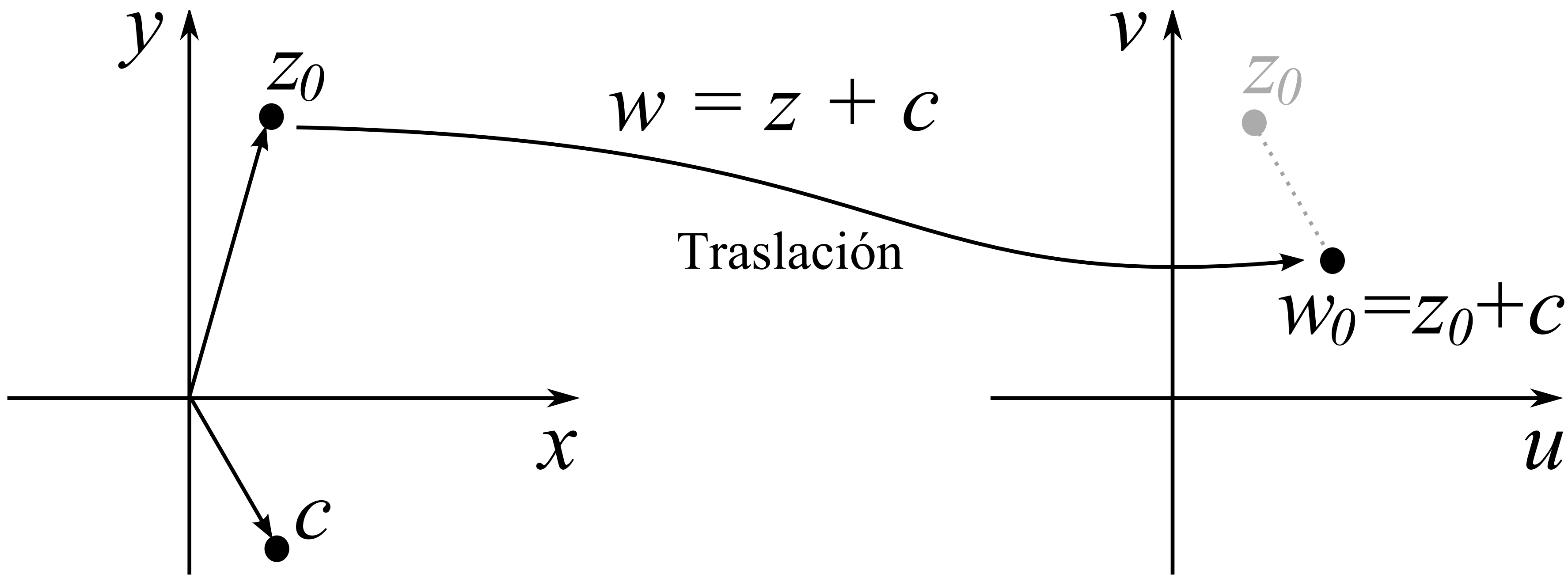
Mapeos Lineales

Mapeo $w = z + c$

Consideremos el mapeo del plano z en el plano w definido por la ecuación

$$w = z + c, \tag{1}$$

donde c es una constante compleja.



Observaciones:

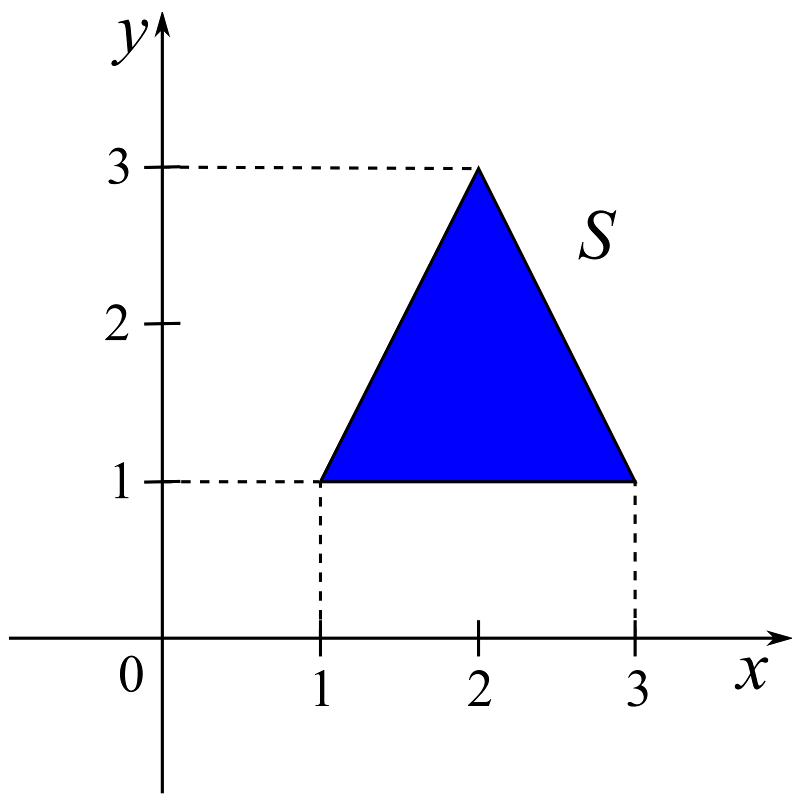
- El mapeo (1) es una ***traslación*** en la dirección del vector c.
- El mapeo (1) es inyectivo; por tanto, posee ***mapeo inverso*** definido como
$$f^{-1}(w) = w - c.$$
- El mapeo (1) transforma rectas en el plano z a rectas en el plano w.
- El mapeo (1) transforma circunferencias en el plano z a circunferencias en el plano w.

Ejercicio

Demuestre que el mapeo $w = z + c$ transforma rectas a rectas y circunferencias a circunferencias.

Ejemplo

Sea S el conjunto de números complejos que se muestra en la siguiente figura.



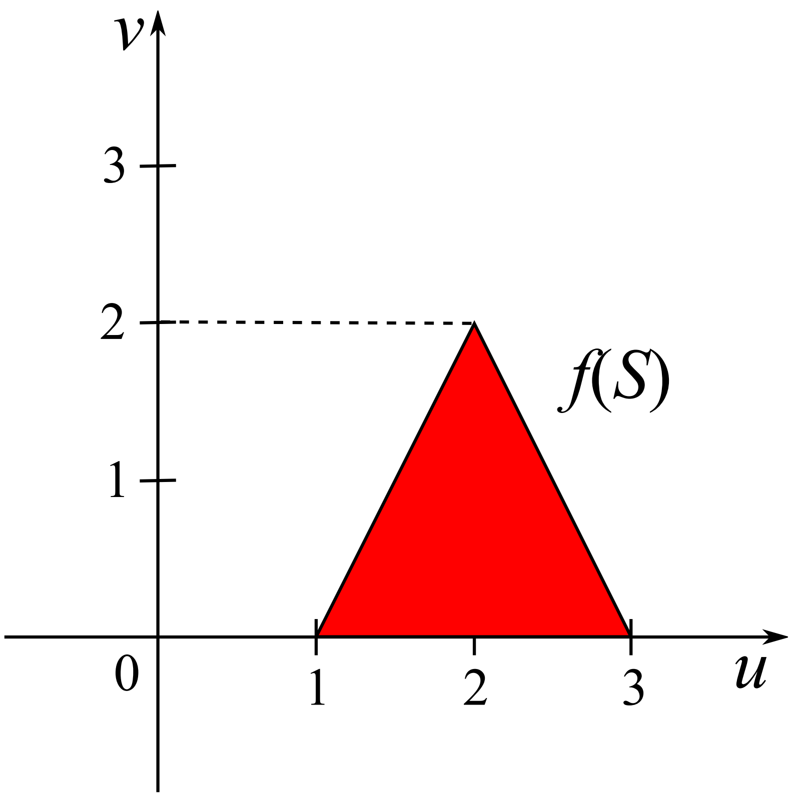
Determine el transformado del conjunto S bajo el mapeo

$$w = z - i.$$

Solución. El transformado de S bajo el mapeo $w = z - i$ se expresa analíticamente como

$$\begin{cases} 2u - v & \leq & 2 \\ 2u + v & \leq & 6 \\ v & \geq & 0 \end{cases}$$

y su gráfica es



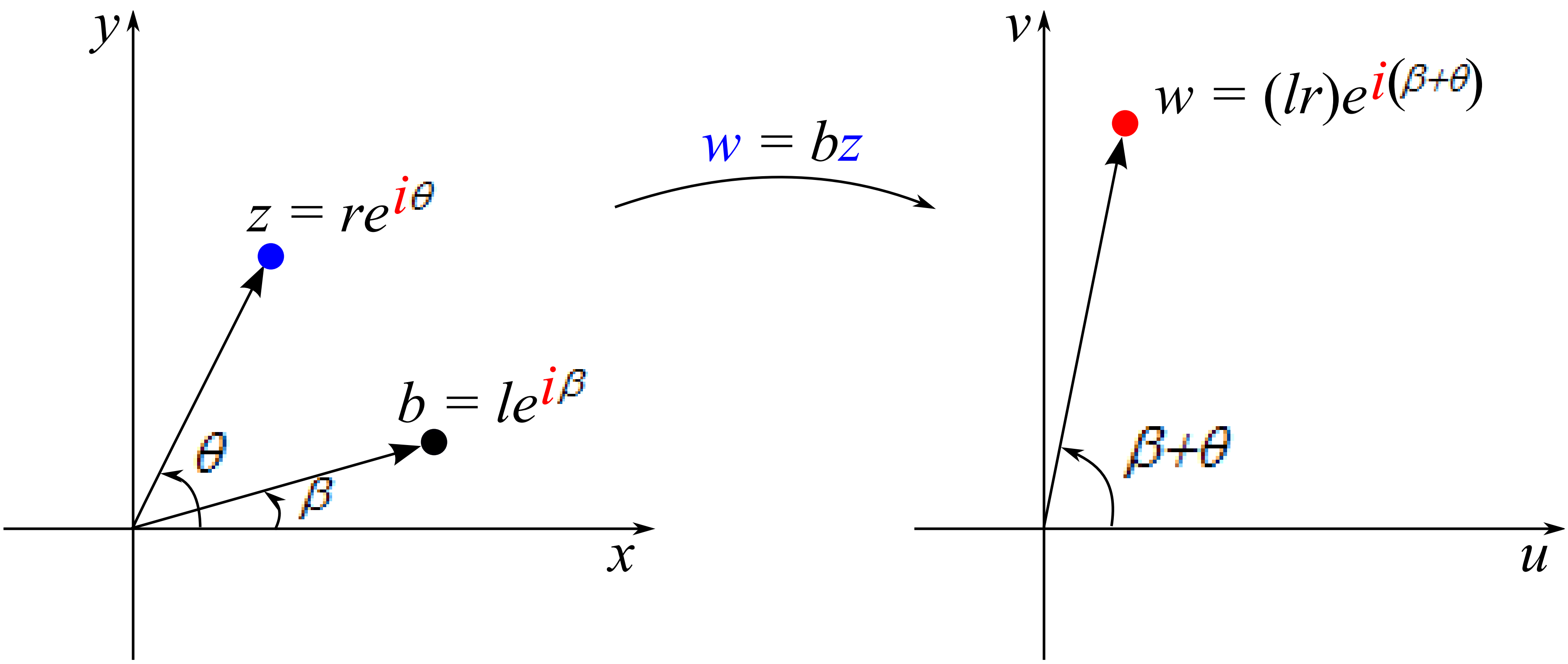
Mapeo $w = bz$

Consideremos el mapeo del plano z en el plano w definido por la ecuación

$$w = bz, \tag{2}$$

donde b es un número complejo distinto de cero.

Tomando $b = le^{i\beta}$ y $z = re^{i\theta}$, entonces $w = (lr)e^{i(\beta+\theta)}$.



Observaciones:

- El mapeo (2) es una ***rotación*** en el ángulo β y una ***expansión*** ó ***contracción*** según sea el valor de l.

- El mapeo (2) es inyectivo; por tanto, posee ***mapeo inverso*** definido como

$$f^{-1}(w) = \frac{w}{b}, \qquad b \neq 0.$$

- El mapeo (2) transforma rectas en el plano z a rectas en el plano w.

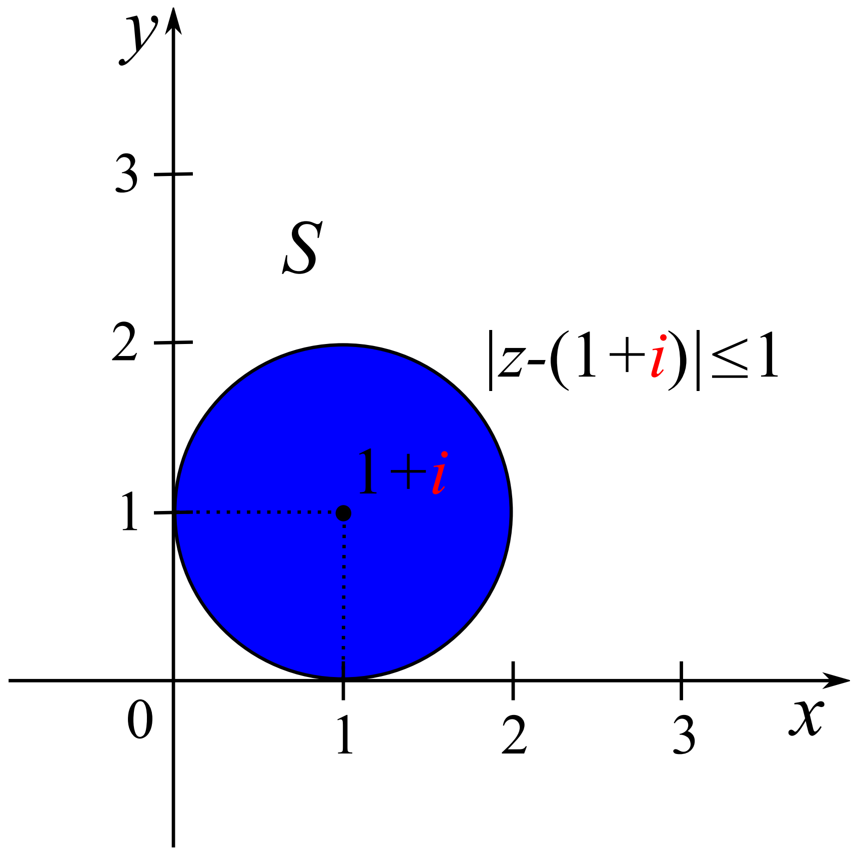
- El mapeo (2) transforma circunferencias en el plano z a circunferencias en el plano w.

Ejercicio

Demuestre que el mapeo $w = bz$ transforma rectas a rectas y circunferencias a circunferencias.

Ejemplo

Sea S el conjunto de números complejos que se muestra en la siguiente figura.



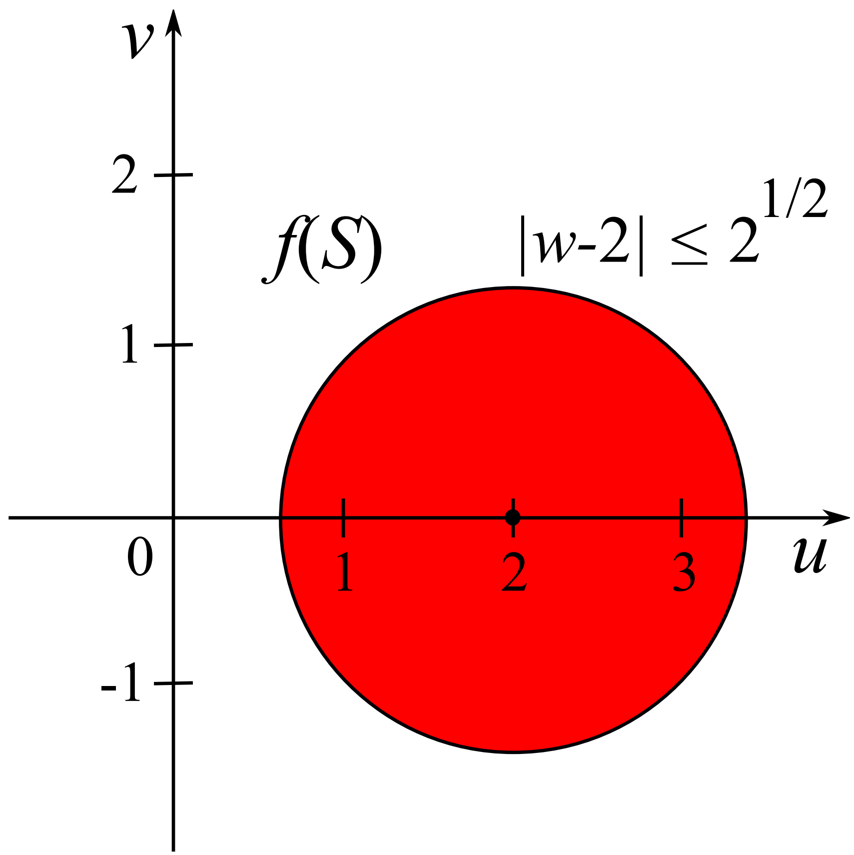
Determine el transformado del conjunto S bajo el mapeo

$$w = (1 - i)z.$$

Solución. El transformado de S bajo el mapeo $w = z - i$ se expresa analíticamente como

$$|w - 2| \leq \sqrt{2},$$

y su gráfica es



Mapeo $w = bz + c$

Consideremos el mapeo del plano z en el plano w definido por la ecuación

$$w = bz + c, \tag{3}$$

donde b y c son números complejos.

Observaciones:

- El mapeo (3) es una ***rotación*** y una ***expansión*** ó ***contracción***, seguida con una ***traslación***. En efecto, el mapeo (3) se puede expresar como la siguiente sucesión de mapeos:

$$z \xrightarrow[\substack{\text{Rotación y}\\ \text{Expansión ó}\\ \text{Contracción}}]{} Z = bz \xrightarrow[\text{Traslación}]{} w = Z + c$$

- El mapeo (3) es inyectivo; por tanto, posee ***mapeo inverso*** definido como

$$f^{-1}(w) = \frac{w - c}{b}, \qquad b \neq 0.$$

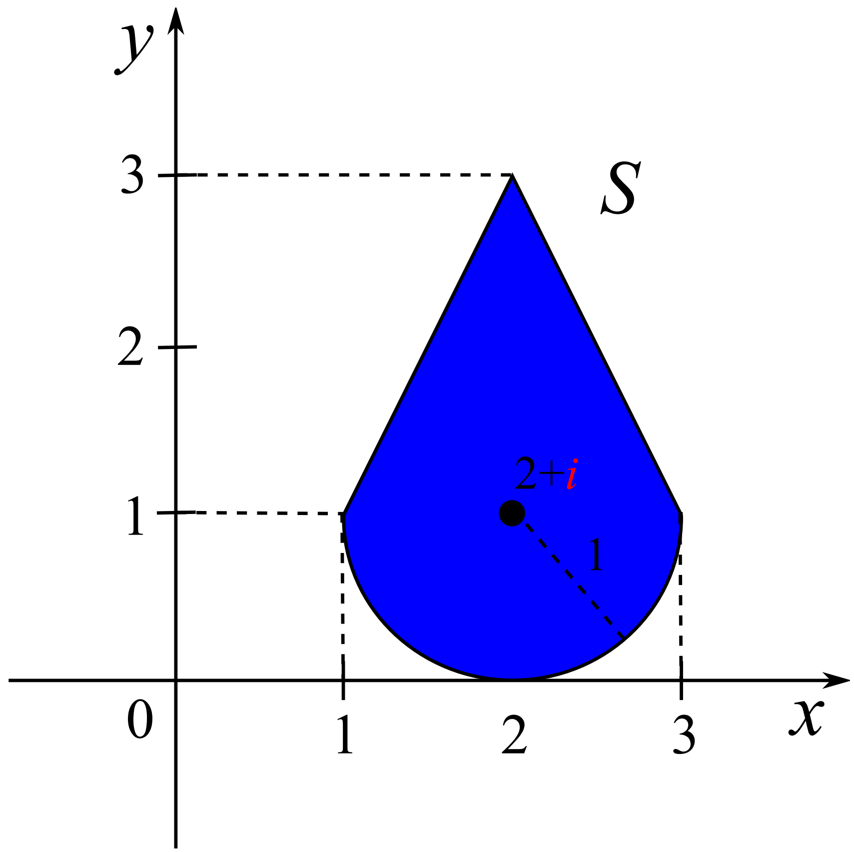
- El mapeo (3) transforma rectas en el plano z a rectas en el plano w.
- El mapeo (3) transforma circunferencias en el plano z a circunferencias en el plano w.

Ejercicio

Demuestre que el mapeo $w = bz + c$ transforma rectas a rectas y circunferencias a circunferencias.

Ejemplo

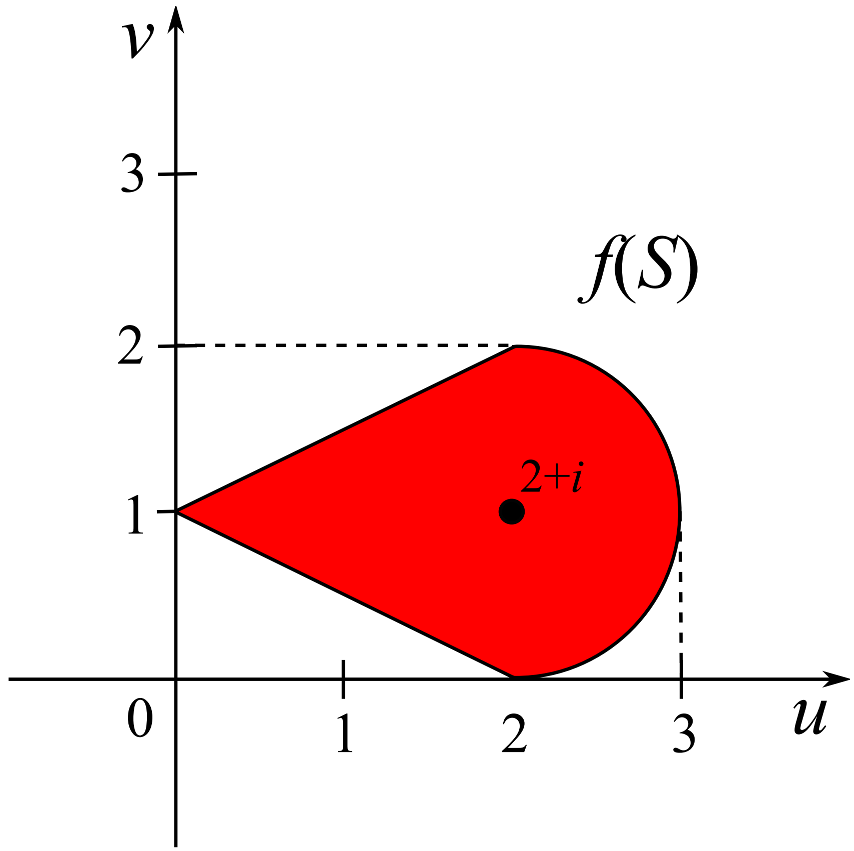
Sea S el conjunto de números complejos que se muestra en la siguiente figura.



Determine el transformado del conjunto S bajo el mapeo

$$w = iz + 3 - i.$$

Solución. El transformado de S bajo el mapeo $w = iz + 3 - i$ se expresa gráficamente como



Ejercicio

Determine la expresión analítica de $f(S)$.

Inversión

Consideremos el mapeo del plano z en el plano w definido por la ecuación

$$w = \frac{1}{z}, \quad \text{para todo } z \neq 0, \tag{4}$$

denominado ***inversión***.

Como (4) se puede escribir equivalentemente como

$$w = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

entonces, el mapeo (4) se puede expresar como la siguiente sucesión de mapeos:

$$z \longrightarrow Z = \frac{1}{|z|^2}\, z \longrightarrow w = \overline{Z}$$

Observaciones:

- Para todo $z \neq 0$, el mapeo (4) es inyectivo; por tanto, posee ***mapeo inverso*** definido como
$$f^{-1}(w) = \frac{1}{w}, \qquad w \neq 0.$$

- $$|z| = 1 \xrightarrow[w=1/z]{} |w| = 1$$

- $$|z| < 1 \xrightarrow[w=1/z]{} |w| > 1$$

- $$|z| > 1 \xrightarrow[w=1/z]{} |w| < 1$$

Transformación de rectas y circunferencias

Para $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, la ecuación

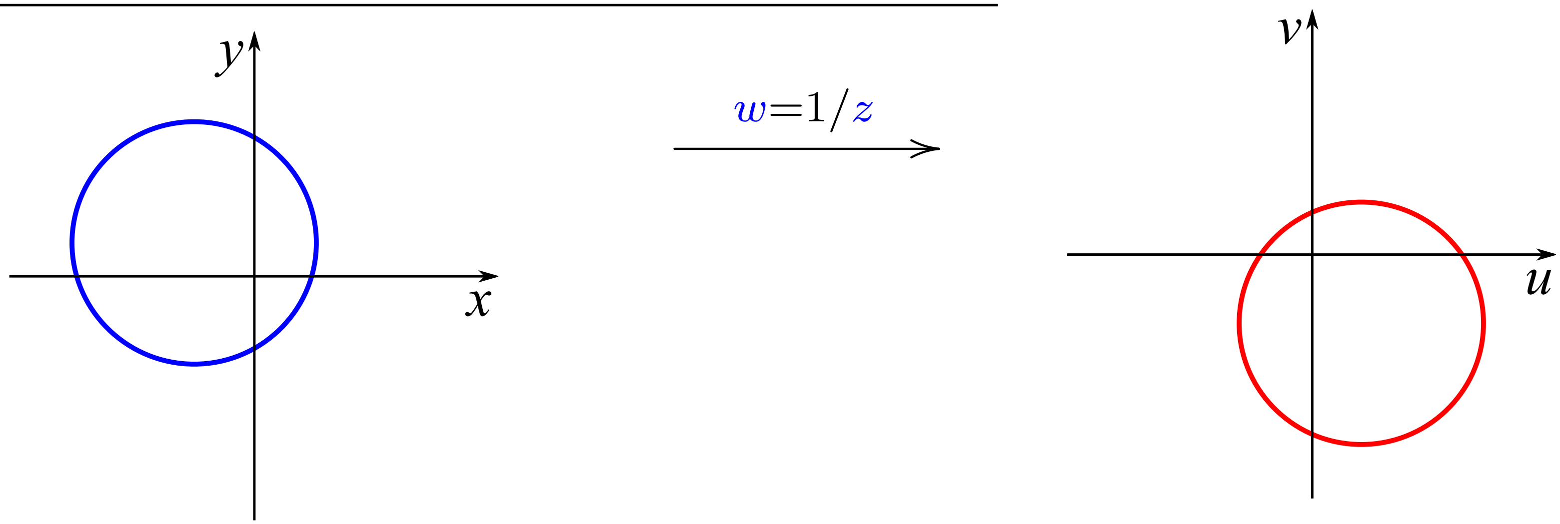
$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0 \tag{5}$$

determina una recta o una circunferencia en el plano z.

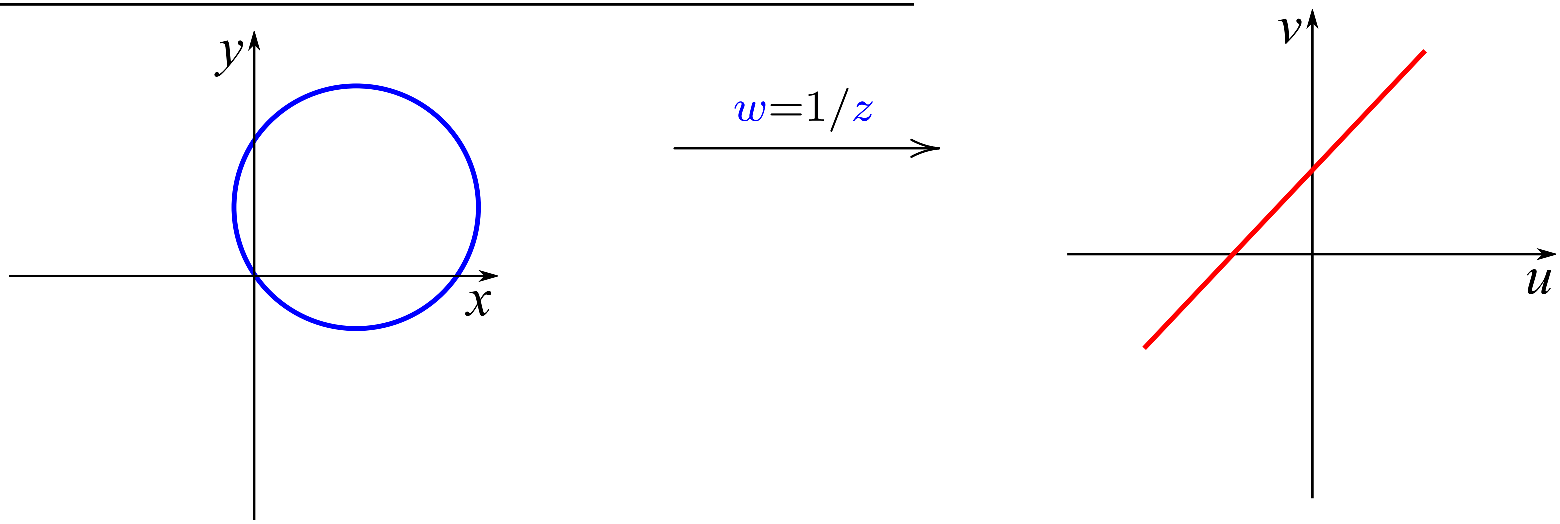
Si $z = x + i\,y$ satisface (5), entonces $w = u + i\,v = \dfrac{1}{z}$ satisface

$$\delta(u^2 + v^2) + \beta u - \gamma v + \alpha = 0. \tag{6}$$

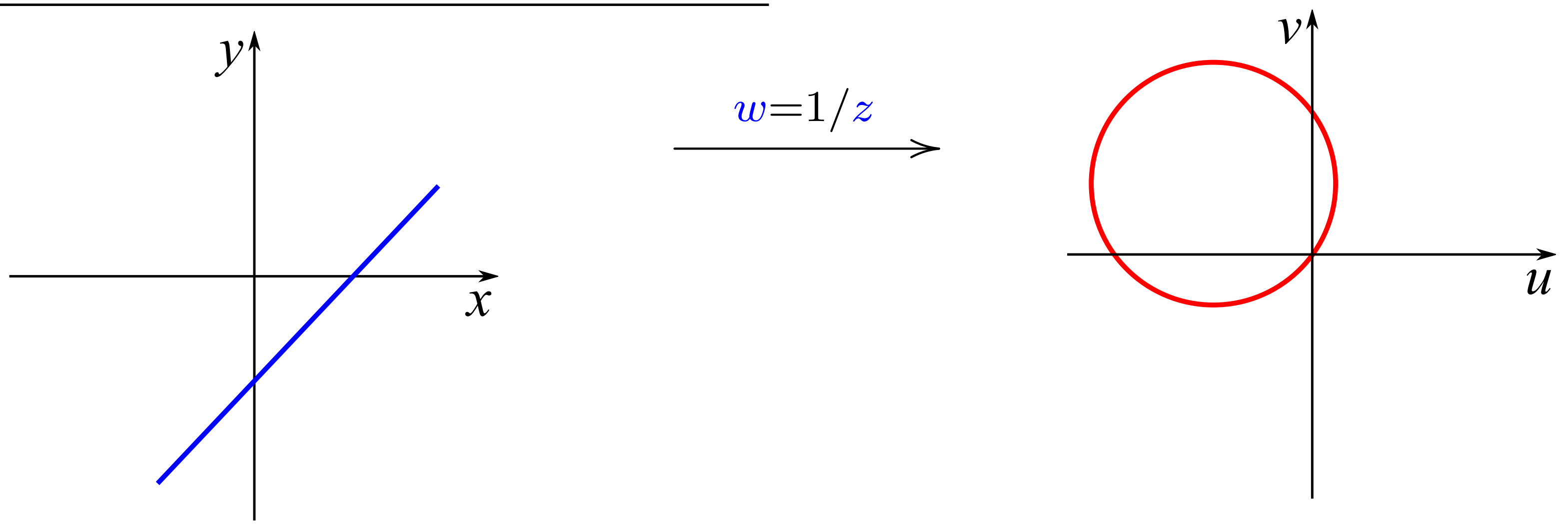
- Circunferencia que no pasa por el origen ($\alpha \neq 0$ y $\delta \neq 0$)



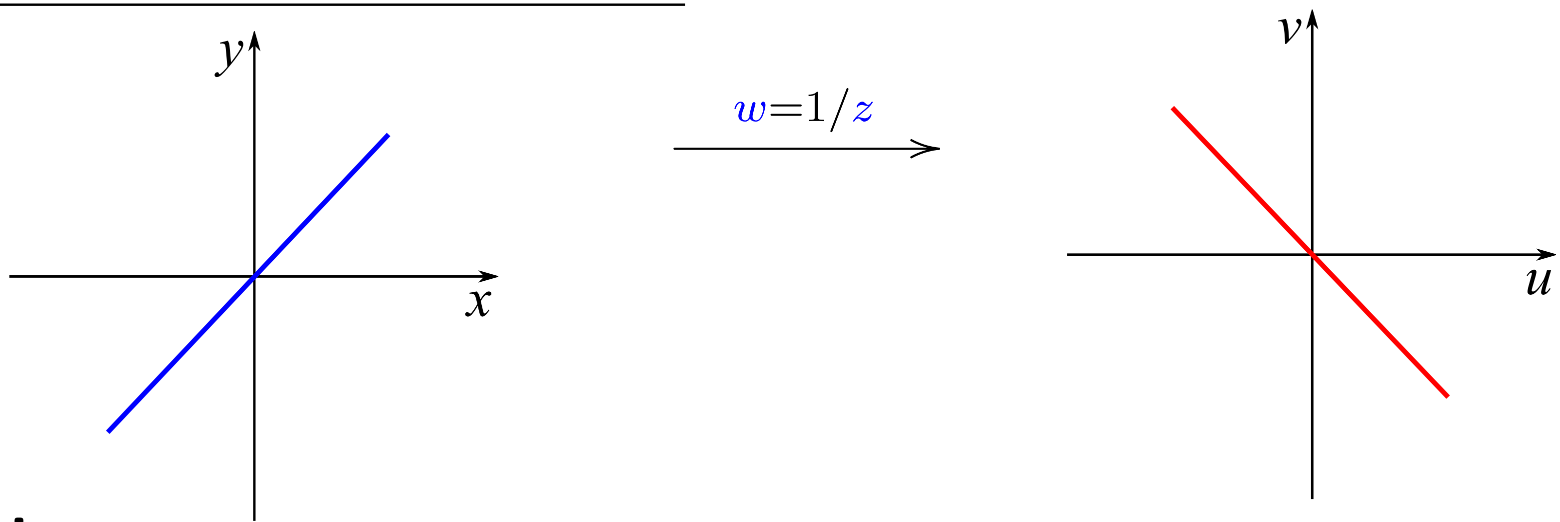
- <u>Circunferencia que pasa por el origen</u> ($\alpha \neq 0$ y $\delta = 0$)



- <u>Recta que no pasa por el origen</u> ($\alpha = 0$ y $\delta \neq 0$)

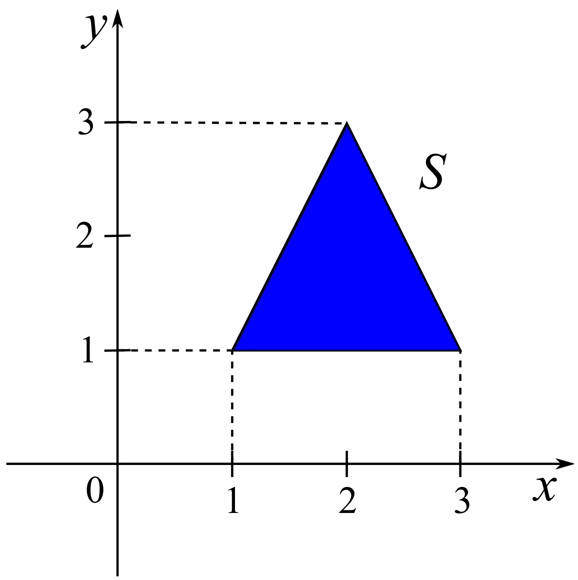


- Recta que pasa por el origen ($\alpha = 0$ y $\delta = 0$)

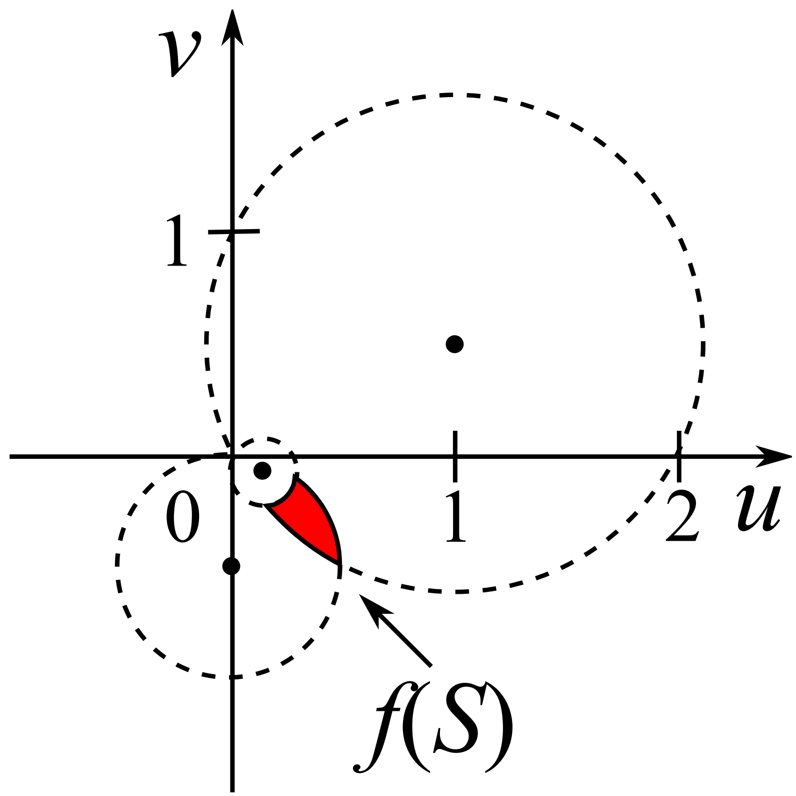


Ejemplo

Determine el transformado, bajo el mapeo $w = 1/z$, del conjunto S que se muestra en la siguiente figura.



Solución. El transformado de S bajo el mapeo $w = 1/z$ se expresa gráficamente como



Ejercicio

Determine la expresión analítica de $f(S)$.

Mapeos Bilineales

El mapeo del plano z en el plano w definido por la ecuación

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{7}$$

donde a, b, c y d son números complejos, se denomina ***mapeo bilineal*** o ***transformación de Möbius***.

Observaciones:

- El mapeo (7) es inyectivo para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $cz + d \neq 0$; por tanto, en ese conjunto de puntos posee ***mapeo inverso*** definido como

$$f^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}.$$

- Cuando $c = 0$, el mapeo (7) adquiere la forma

$$w = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d},$$

lo cual indica que el mapeo (7) es lineal.

- Cuando $c \neq 0$, el mapeo (7) se puede escribir como

$$w = \frac{a}{c} + \left(\frac{bc - ad}{c} \right) \frac{1}{cz + d},$$

donde el número $ad - bc$ se ***denomina determinante del mapeo***.

Por lo tanto, el mapeo (7) se puede expresar como la siguiente sucesión de mapeos:

$$z \xrightarrow[\substack{\text{Rotación con}\\ \text{Expansión ó}\\ \text{Contracción, y}\\ \text{Traslación}}]{} Z = cz + d \xrightarrow[\text{Inversión}]{} W = \frac{1}{Z} \xrightarrow[\substack{\text{Rotación con}\\ \text{Expansión ó}\\ \text{Contracción, y}\\ \text{Traslación}}]{} w = \frac{a}{c} + \left(\frac{bc-ad}{c}\right) W$$

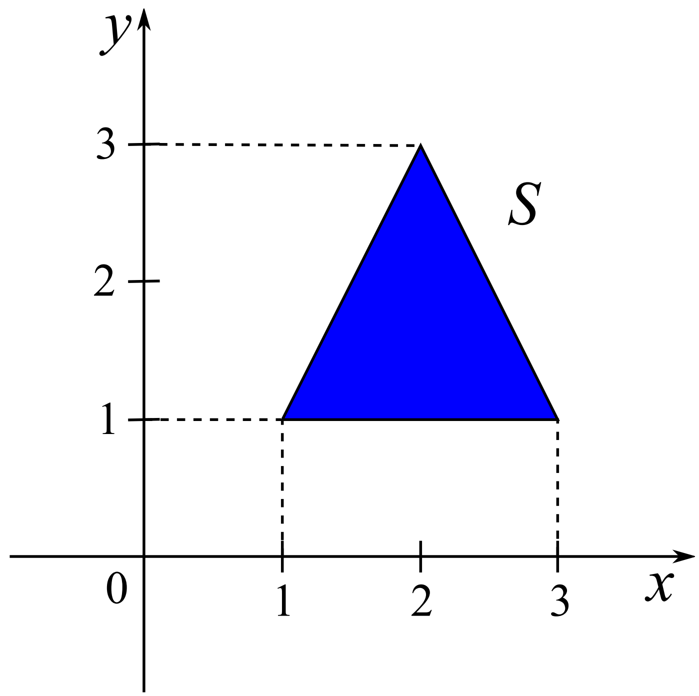
- El mapeo (7) transforma circunferencias o rectas en el plano z a circunferencias o rectas en el plano w.

- Cuando el determinante del mapeo es cero, $ad - bc = 0$, el mapeo (7) adquiere la forma

$$w = \frac{a}{c}.$$

Ejemplo

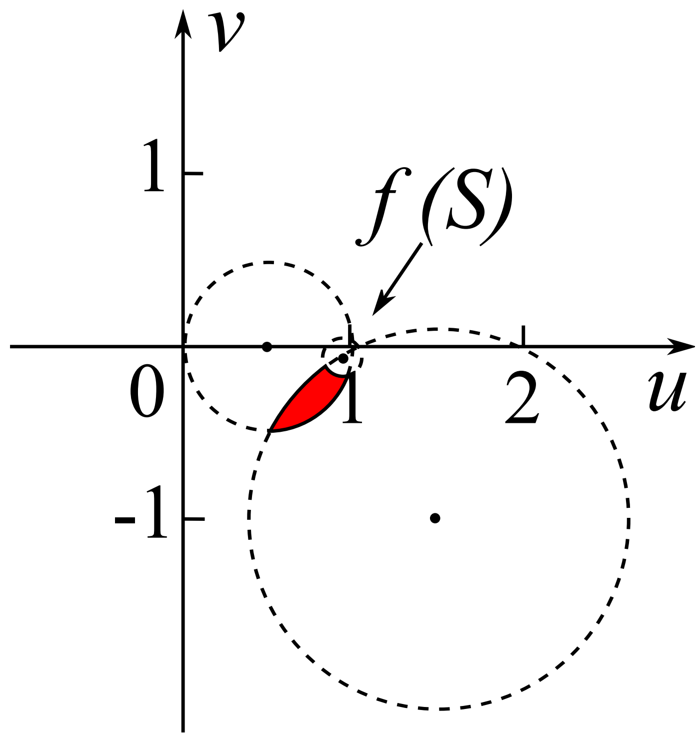
Sea S el conjunto de puntos que se muestra en la siguiente figura.



Determine el transformado de S bajo el mapeo bilineal

$$w = \frac{iz + 1 + i}{iz + i}$$

Solución. El transformado de S bajo el mapeo $w = \frac{iz+1+i}{iz+i}$ se expresa gráficamente como



Series de Potencias y Singularidades Aisladas

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica
Departamento de Electrónica, Computación y Control
Variable Compleja y Cálculo Operacional

Marzo, 2013

Contenido

Serie de Números Complejos 3

Serie de Potencias 7

Serie de Taylor 10

Serie de Laurent 13

Puntos Singulares Aislados 16

Polo de Orden m 18

Punto Singular Esencial 21

Punto Singular Removible 22

Serie de Números Complejos

Definición 1 (Sucesión de números complejos). *El conjunto de números* $\{z_0, z_1, z_3, \ldots\} \subset \mathbb{C}$, *se denomina* ***sucesión de números complejos***, *y se denota por* $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Definición 2 (Sucesión convergente). *La sucesión de números complejos* $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ *tiene* ***límite*** *o* ***converge*** *a un número complejo* z, *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un número entero positivo* N *tal que*

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \textit{siempre que} \quad n \geq N.$$

Cuando el límite de $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ *existe, se escribe*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Observación:

- Para cada sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$, existen sucesiones de números reales $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ tales que

$$z_n = x_n + i\, y_n, \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Teorema 1. *Sean $z_n = x_n + i\, y_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ con $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, y $z = x + i\, y$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

si, y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad y \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Ejemplo

Sea $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión definida por

$$z_n = \frac{1}{n} + i\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Entonces, el límite de $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ es

$$\lim_{n\to\infty} z_n = i.$$

Definición 3 (Serie de Números Complejos)**.** *La suma de los términos de una sucesión de números complejos* $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$*, se denomina* ***serie de números complejos****, esto es*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$$

Definición 4 (Serie Convergente). *Se dice que una serie* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ ***converge*** *a un número complejo* S, *si la sucesión*

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} z_n$$

de sumas parciales converge a S; *entonces se escribe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S.$$

Teorema 2. *Sean* $z_n = x_n + i\, y_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *con* $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, *y* $S = X + i\, Y$ *con* $X, Y \in \mathbb{R}$. *Entonces,* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$ *si, y sólo si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = X \qquad y \qquad \sum_{n=0}^{\infty} y_n = Y.$$

Serie de Potencias

Definición 5 (Serie de potencias). *Dada una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ de números complejos y $z_0 \in \mathbb{C}$, a la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{1}$$

se le llama ***serie de potencias****, donde $z \in \mathbb{C}$.*

Observaciones:

- Los números a_n se denominan coeficientes de la serie y z_0 se denomina centro de la serie.
- Para toda serie de potencias (1) convergente, existe un círculo, denominado ***círculo de convergencia***, con radio $R > 0$ llamado ***radio de convergencia***, tal que para todo z en el círculo $|z - z_0| < R$ la serie (1) converge.

Teorema 3 (Teorema de Cauchy-Hadamard). *Consideremos la serie de potencias* (1). *Sea* $\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Entonces:*

- *si* $\alpha = \infty$, *la serie es convergente en el único punto* $z = z_0$;
- *si* $0 < \alpha < \infty$, *la serie es absolutamente convergente en el círculo* $|z - z_0| < 1/\alpha$ *y es divergente en el exterior de este círculo;*
- *si* $\alpha = 0$, *la serie es absolutamente convergente en todo el plano.*

Ejemplo

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}} = e$, el círculo y el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$$

son

$$|z| < \frac{1}{e} \qquad \text{y} \qquad R = \frac{1}{e}.$$

Ejemplo

Determine el círculo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

También determine a qué converge esta serie.

Solución. El círculo de convergencia de la serie dada es

$$|z| < 1,$$

y la misma converge a $1/(1-z)$, es decir,

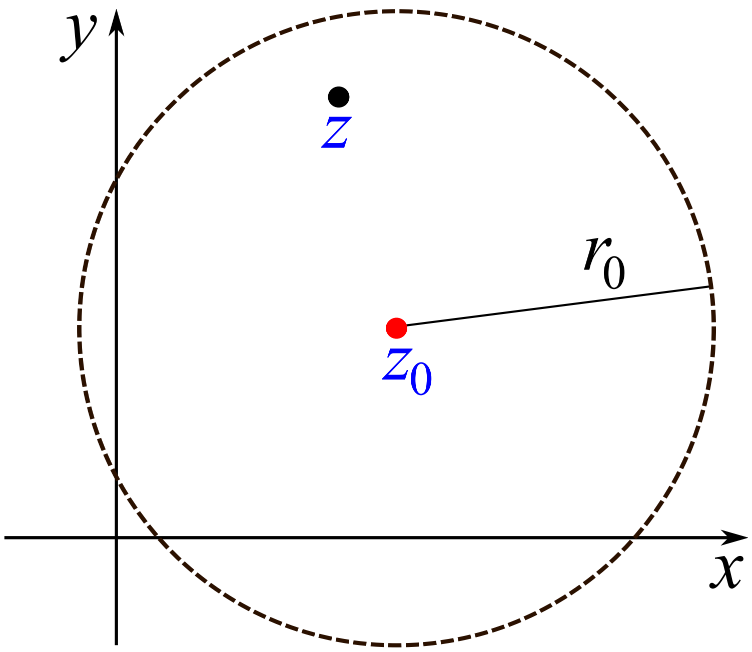
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \qquad |z| < 1.$$

Serie de Taylor

Teorema 4 (Teorema de Taylor)**.**
Si $f(z)$ es una función analítica en todo punto del disco $|z - z_0| < r_0$, entonces $f(z)$ se expresa como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

para todo $|z - z_0| < r_0$.



Observaciones:

- El Teorema de Taylor garantiza que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ converge a $f(z)$ para todo $|z - z_0| < r_0$.
- La serie de potencias del Teorema de Taylor se denomina ***desarrollo en serie de Taylor*** o, simplemente, ***desarrollo de Taylor*** de $f(z)$ centrado en el punto z_0.

- Si $z_0 = 0$, entonces el desarrollo de Taylor adquiere la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

y se denomina ***desarrollo de Maclaurin*** de $f(z)$.

Ejemplo

A continuación se muestran algunos desarrollos de Taylor.

- $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n, \qquad |z| < \infty.$

- $\operatorname{sen} z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \qquad |z| < \infty.$

- $\cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \qquad |z| < \infty.$

- $\operatorname{senh} z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \qquad |z| < \infty.$

- $\cosh z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}, \qquad |z| < \infty.$

- $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \qquad |z| < 1.$

- $\dfrac{1}{1+z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \qquad |z| < 1.$

- $\dfrac{1}{z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n, \qquad |z-1| < 1.$

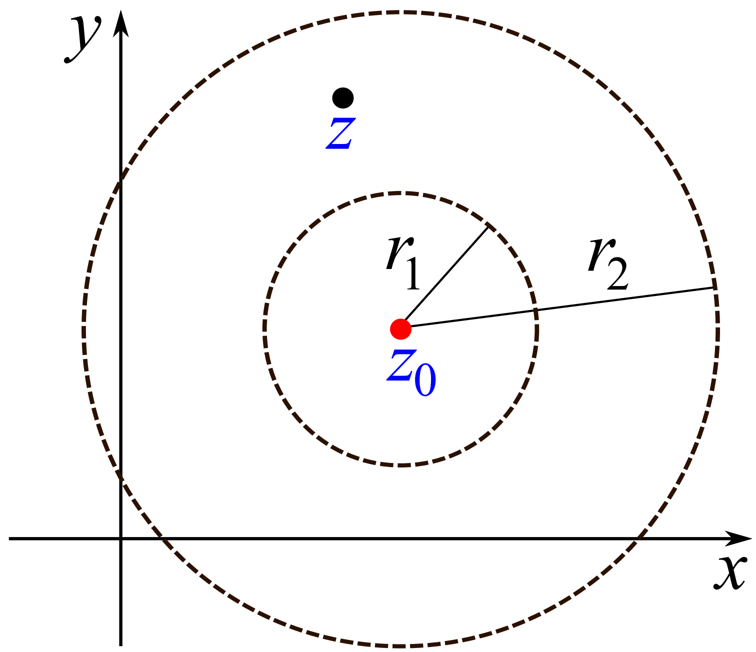
- $\dfrac{1}{z(3-z)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left[(-1)^n + 2^{-(n+1)}\right](z-1)^n, \qquad |z-1| < 1.$

Serie de Laurent

Teorema 5 (Teorema de Laurent)**.**
Si $f(z)$ es una función analítica en el anillo $r_1 < |z - z_0| < r_2$, centrado en z_0, entonces $f(z)$ se expresa como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n},$$

para todo $r_1 < |z - z_0| < r_2$.



Observaciones:

- El Teorema de Laurent garantiza que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$ converge a $f(z)$ para todo $r_1 < |z - z_0| < r_2$.

- La serie de potencias del Teorema de Laurent se denomina ***desarrollo de Laurent de*** $f(z)$ centrado en el punto z_0, válido en el anillo $r_1 < |z - z_0| < r_2$.

- Si $f(z)$ es analítica en todos los puntos del disco $|z - z_0| < r_2$, entonces el desarrollo de Laurent de $f(z)$ se convierte en el desarrollo de Taylor de $f(z)$ centrado en z_0.

- Si $f(z)$ es analítica en todos los puntos de la región $|z - z_0| < r_2$ excepto en el punto z_0, entonces el desarrollo de Laurent de $f(z)$ es válido en la región $0 < |z - z_0| < r_2$.

Ejemplo

El desarrollo de Laurent de $f(z) = e^{1/z}$ centrado en $z_0 = 0$ es

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}, \qquad 0 < |z| < \infty.$$

Ejemplo

La función

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

posee los siguientes desarrollos de Laurent centrados en $z_0 = i$.

- $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(1-i)^{-(n+1)} - (2-i)^{-(n+1)} \right] (z-i)^n, \qquad |z-i| < \sqrt{2}$$

- $$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} (1-i)^n (z-i)^{-(n+1)} - \sum_{n=0}^{\infty} (2-i)^{-(n+1)} (z-i)^n,$$
$$\sqrt{2} < |z-i| < \sqrt{5}$$

- $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(2-i)^n - (1-i)^n \right] (z-i)^{-(n+1)}, \qquad |z-i| > \sqrt{5}$$

Puntos Singulares Aislados

Definición 6 (Punto singular aislado). *Se dice que $z_0 \in \mathbb{C}$ es un* ***punto singular aislado*** *de una función $f(z)$, si z_0 es un punto singular de $f(z)$ y, además, existe una vecindad de z_0 en todo punto de la cual $f(z)$ es analítica excepto en z_0.*

Ejemplo

El punto z_0 indicado es un punto singular aislado de la función dada.

- $f(z) = \dfrac{1}{z}, \qquad z_0 = 0$
- $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-1)(z-i)}, \qquad z_0 = 1,\ z_1 = i$
- $f(z) = \cot z, \qquad z_n = n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Ejercicio

Compruebe que $z_0 = 0$ no es un punto singular aislado de la función

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(1/z)}.$$

Definición 7 (Parte principal). *Sea z_0 un punto singular aislado de $f(z)$. Sea el desarrollo de Laurent de $f(z)$ centrado en z_0,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}, \quad 0 < |z - z_0| < r_0. \qquad (2)$$

*Se denomina **parte principal** de $f(z)$ en z_0, a la parte del desarrollo de Laurent (2) que posee potencias negativas de $(z - z_0)$.*

Polo de Orden m

Sea z_0 un punto singular aislado de $f(z)$. Se dice que z_0 es un ***polo de orden*** m de $f(z)$, si la parte principal de $f(z)$ en z_0 tiene un número finito de términos, esto es, el desarrollo de Laurent centrado en z_0, válido en el anillo $0 < |z - z_0| < r_0$, tiene la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m},$$

donde $b_m \neq 0$ y $b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = 0$. Los polos de orden $m = 1$ se llaman ***polos simples***.

Ejemplo

La función

$$f(z) = \frac{\operatorname{senh} z}{z^4}$$

tiene un polo de orden $m = 3$ en $z_0 = 0$.

Teorema 6. *Si $f(z)$ tiene un polo en z_0, entonces*

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty.$$

Teorema 7. *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Sea $f(z)$ una función tal que se puede escribir como*

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

donde $p(z)$ y $q(z)$ son analíticas en z_0 y $p(z_0) \neq 0$. Entonces, z_0 es un polo de orden m de $f(z)$ si, y sólo si

$$q(z_0) = q'(z_0) = \cdots = q^{(m-1)}(z_0) = 0$$

y

$$q^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Ejemplo

Para las siguientes funciones se pueden utilizar los Teoremas 6 y 7, para verificar la existencia de polos.

1. La función $f(z) = \dfrac{1}{z(e^z - 1)}$ tiene un polo de orden $m = 2$ en $z_0 = 0$.

2. La función $f(z) = \dfrac{(z+1)}{(z^2+9)}$ tiene dos polos simples $z_0 = 3i$ y $z_1 = -3i$.

3. La función $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 3}{(z-2)}$ tiene un polo simple en $z_0 = 2$.

4. La función $f(z) = \dfrac{\operatorname{senh} z}{z^4}$ tiene un polo de orden $m = 3$ en $z_0 = 0$.

Punto Singular Esencial

Sea z_0 un punto singular aislado de $f(z)$. Se dice que z_0 es un ***punto singular esencial*** de $f(z)$, si la parte principal de $f(z)$ en z_0 tiene un número infinito de términos diferentes de cero.

Teorema 8. *Si z_0 es un punto singular esencial de $f(z)$, entonces el límite $\lim_{z\to z_0} f(z)$ no existe.*

Ejemplo

Las siguientes funciones poseen puntos singulares esenciales.

1. $f(z) = e^{1/z}, \qquad z_0 = 0.$

2. $f(z) = \operatorname{sen}(1/z), \qquad z_0 = 0.$

Punto Singular Removible

Sea z_0 un punto singular aislado de $f(z)$. Se dice que z_0 es un ***punto singular removible*** de $f(z)$, si todos los coeficientes de la parte principal de $f(z)$ en z_0 son cero.

Teorema 9. *Si z_0 es un punto singular removible de $f(z)$, entonces el límite $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe y es finito.*

Ejemplo

Las siguientes funciones poseen puntos singulares removibles.

1. $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}, \qquad z_0 = 0.$

2. $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}, \qquad z_0 = 0.$

Integración

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica
Departamento de Electrónica, Computación y Control
Variable Compleja y Cálculo Operacional

Marzo, 2013

Contenido

Integral Definida 3

Integración de Línea 6

Contornos 6

Integral de Línea 11

Teorema de Cauchy-Goursat 14

Integral Indefinida 18

Fórmula Integral de Cauchy 21

Residuo 23

Cálculo del Residuo 25

Teorema de los Residuos 28

Expansión en Fracciones Parciales 29

Integral Definida

Sea $F(t)$ una función de variable real con valores complejos definida como

$$F(t) = U(t) + i\,V(t),$$

donde $U : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $V : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas a trozos definidas en el intervalo acotado y cerrado $a \le t \le b$.

La ***integral definida*** de $F(t)$ en el intervalo $a \le t \le b$, se define como

$$\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b U(t)\,dt + i \int_a^b V(t)\,dt,$$

y se dice que $F(t)$ es ***integrable*** en $[a, b]$.

Ejemplo

El valor de la integral $\int_0^{\pi/4} e^{it}\,dt$ es

$$\int_0^{\pi/4} e^{it}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

Propiedades

Sean $F(t) = U(t) + i\,V(t)$, $F_1(t) = U_1(t) + i\,V_1(t)$ y $F_2(t) = U_2(t) + i\,V_2(t)$, integrables en $[a, b]$. Las siguientes propiedades son ciertas.

i) $\operatorname{Re}\left[\int_a^b F(t)\,dt\right] = \int_a^b \operatorname{Re}[F(t)]\,dt.$

ii) $\operatorname{Im}\left[\int_a^b F(t)\,dt\right] = \int_a^b \operatorname{Im}[F(t)]\,dt.$

iii) $\displaystyle\int_a^b c\,F(t)\,dt = c\int_a^b F(t)\,dt$, para todo $c \in \mathbb{C}$.

iv) $\displaystyle\int_a^b [F_1(t) + F_2(t)]\,dt = \int_a^b F_1(t)\,dt + \int_a^b F_2(t)\,dt.$

v) $\displaystyle\left|\int_a^b F(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |F(t)|\,dt.$

Ejercicio

Demostrar las Propiedades de la integral definida.

Integración de Línea

Contornos

Definición 1 (Curva). *Una **curva** C es un conjunto de puntos $z = x + i\,y$ en el plano complejo tales que*

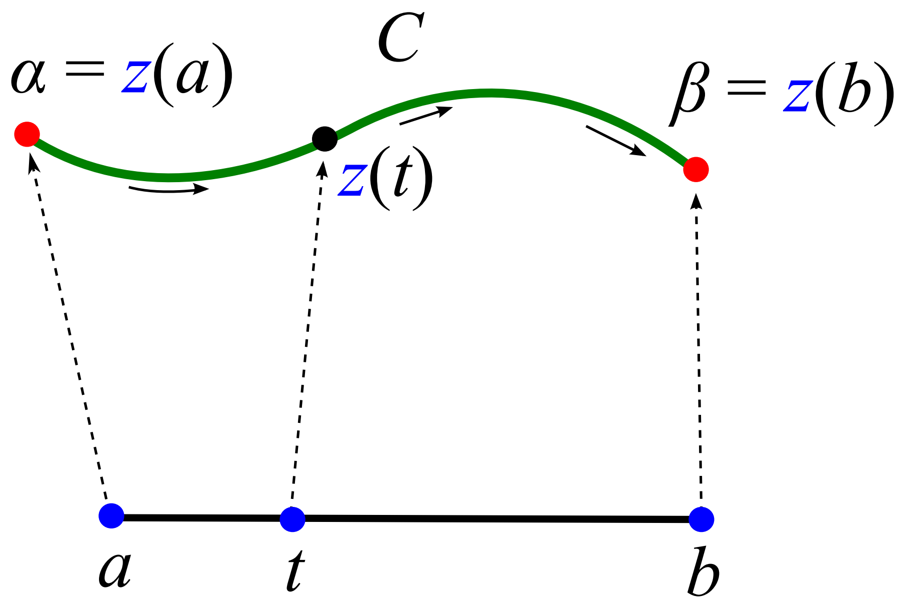
$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad (a \leq t \leq b),$$

donde $x(t)$ y $y(t)$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$.

Los puntos de C se pueden describir mediante la ecuación

$$z(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

y se dice que $z(t)$ es continua.

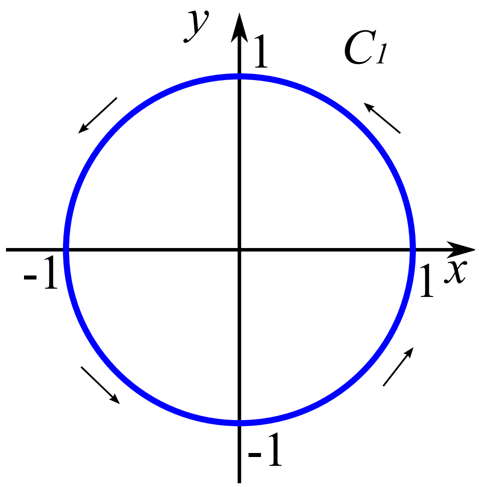


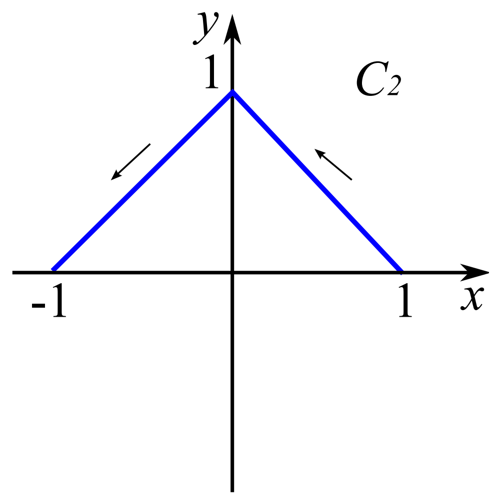
Observaciones

- La ecuación $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ se denomina ***parametrización*** de C.
- El valor $\alpha = z(a)$ se denomina ***extremo inicial*** de C y $\beta = z(b)$ ***extremo final*** de C.
- Si $x(t)$ y $y(t)$ son funciones diferenciables, entonces la función $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ es diferenciable y, además, su derivada es

$$z'(t) = x'(t) + i\,y'(t) \qquad (a \leq t \leq b).$$

Definición 2 (Curva suave)**.** *Una curva C se llama **curva suave**, si $z'(t)$ existe y es continua en el intervalo $a \leq t \leq b$ y si $z'(t)$ nunca se hace cero en tal intervalo.*

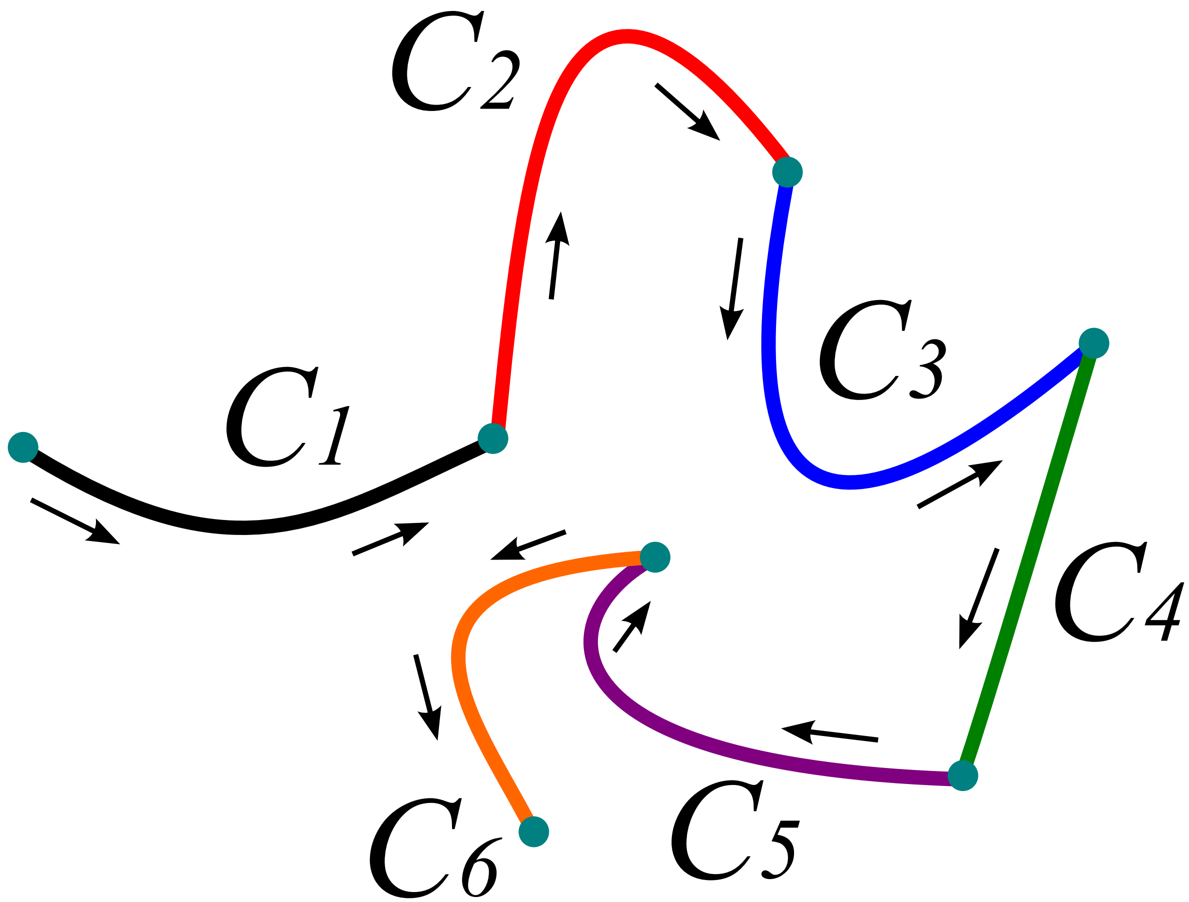




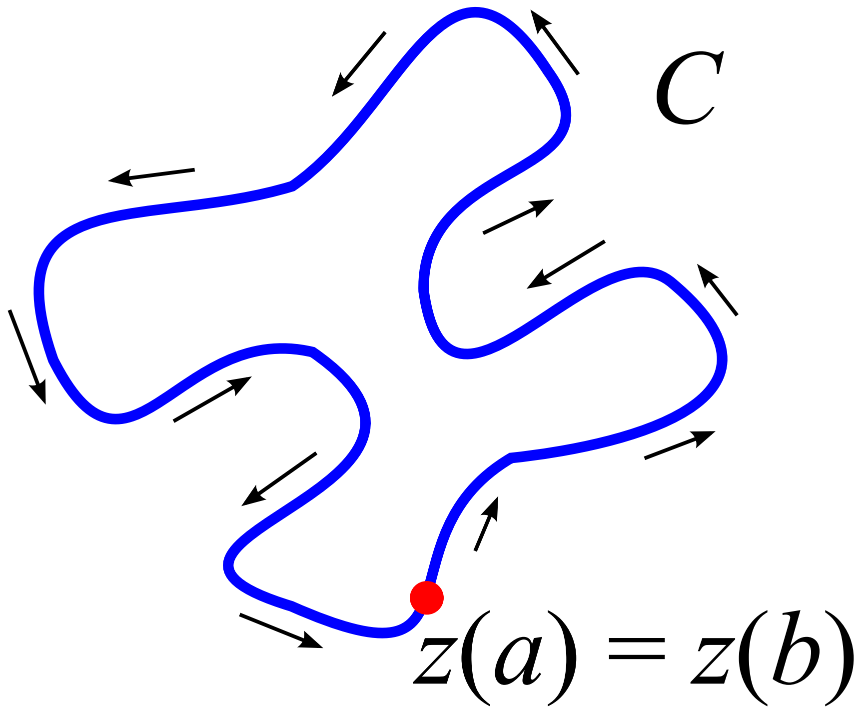
$$z_1(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

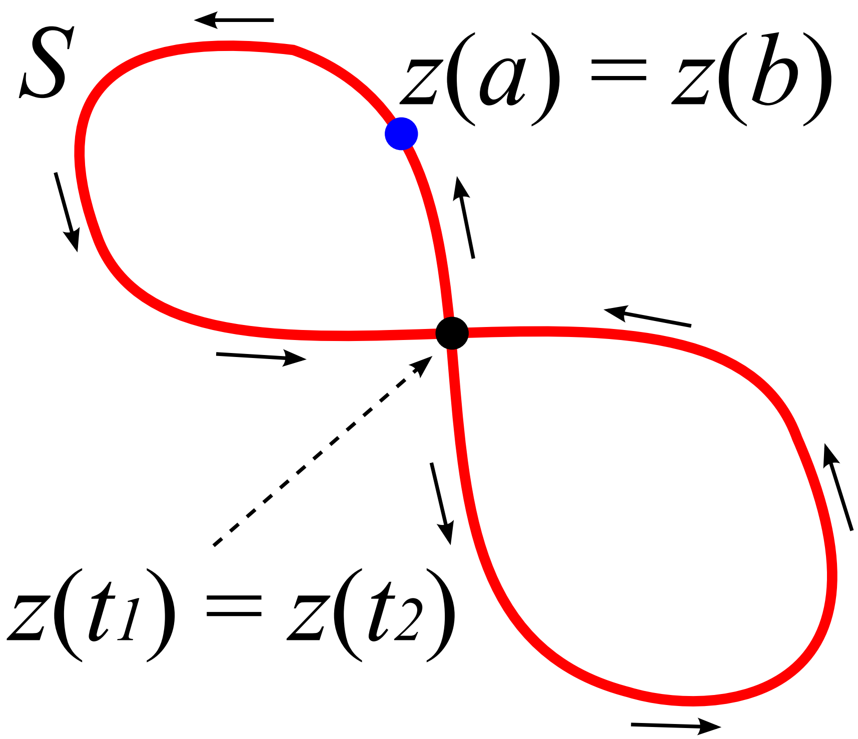
$$z_2(t) = \begin{cases} -t + i(1+t), & -1 \leq t \leq 0, \\ -t + i(1-t), & 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Definición 3 (Contorno)**.** *Un **contorno** o **curva suave a tramos**, es una curva que consta de un número finito de curvas suaves unidas por sus extremos.*



Definición 4 (Contorno cerrado simple)**.** *Se dice que una curva C es un* ***contorno cerrado simple****, si C es un contorno y $z(a) = z(b)$ y $z(t_1) \neq z(t_2)$ para todo $t_1 \neq t_2 \in (a, b)$.*





Integral de Línea

Sean $f(z)$ una función y C un contorno representado por la ecuación

$$z(t) = x(t) + i\,y(t) \qquad (a \leq t \leq b),$$

con extremo inicial $\alpha = z(a)$ y extremo final $\beta = z(b)$.

Supongamos que $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ es continua a trozos en C.

Se define la ***integral de línea*** de $f(z)$ a lo largo de C como

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt,$$

donde $z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$.

Propiedades

Sean $f(z)$ y $g(z)$ funciones continuas a trozos sobre un contorno C descrito por la ecuación $z(t) = x(t) + i\,y(t)$ $(a \le t \le b)$.

i) $\displaystyle\int_C k\,f(z)\,dz = k\int_C f(z)\,dz$, para $k \in \mathbb{C}$.

ii) $\displaystyle\int_C [f(z) + g(z)]\,dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz.$

iii) $\displaystyle\int_{-C} f(z)\,dz = \int_{-b}^{-a} f(z(-t))z'(-t)\,dt = -\int_C f(z)\,dz.$

iv) Si C consta de una curva C_1 desde α_1 hasta β_1 y de la curva C_2 desde α_2 hasta β_2, donde $\alpha_2 = \beta_1$, se cumple:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

v) $\displaystyle\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_a^b |f(z(t))\,z'(t)|\,dt.$

Ejemplo

Se tiene que

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i.$$

Ejemplo

Se tiene que

$$\int_C (z - i)\, dz = 2i,$$

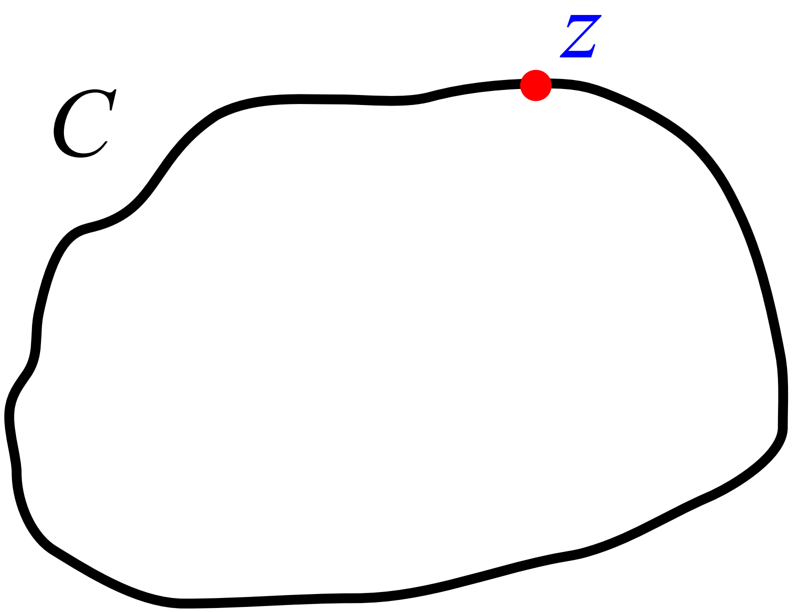
donde C es el contorno descrito por la ecuación

$$z(t) = \begin{cases} -t + i(1+t), & -1 \leq t \leq 0, \\ -t + i(1-t), & 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

Teorema de Cauchy-Goursat

Teorema 1 (Teorema de Cauchy-Goursat)**.**
Sea C un contorno cerrado simple. Sea $f(z)$ una función analítica sobre y en el interior de C. Entonces

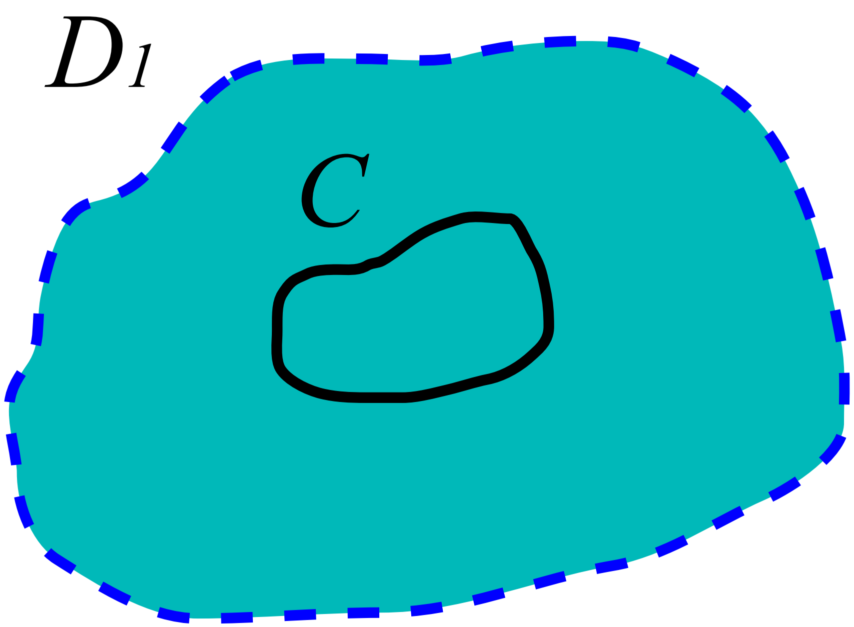
$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

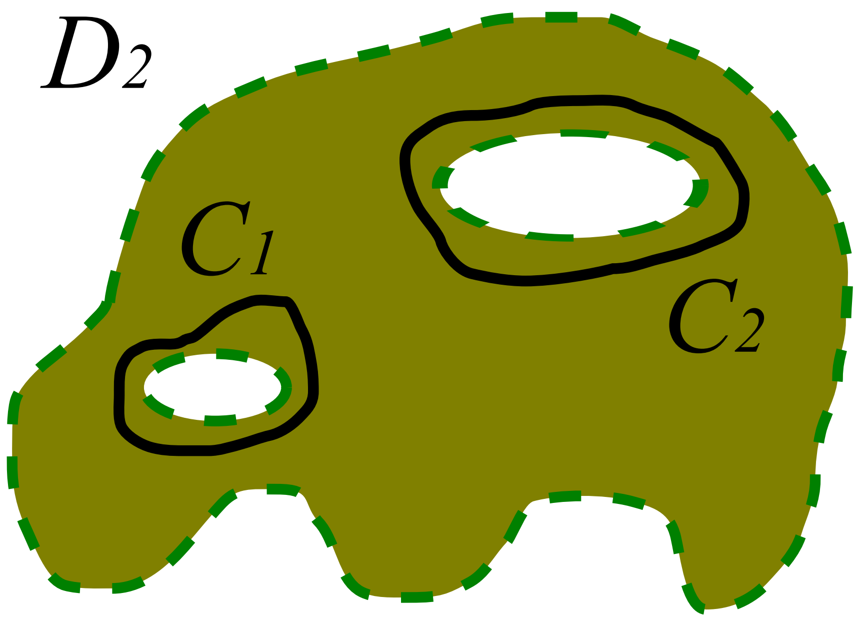


Extensión del Teorema de Cauchy-Goursat

Definición 5 (Dominio simplemente conexo). *Un dominio D se dice* ***simplemente conexo*** *si todo contorno cerrado simple dentro del mismo encierra sólo puntos de D.*

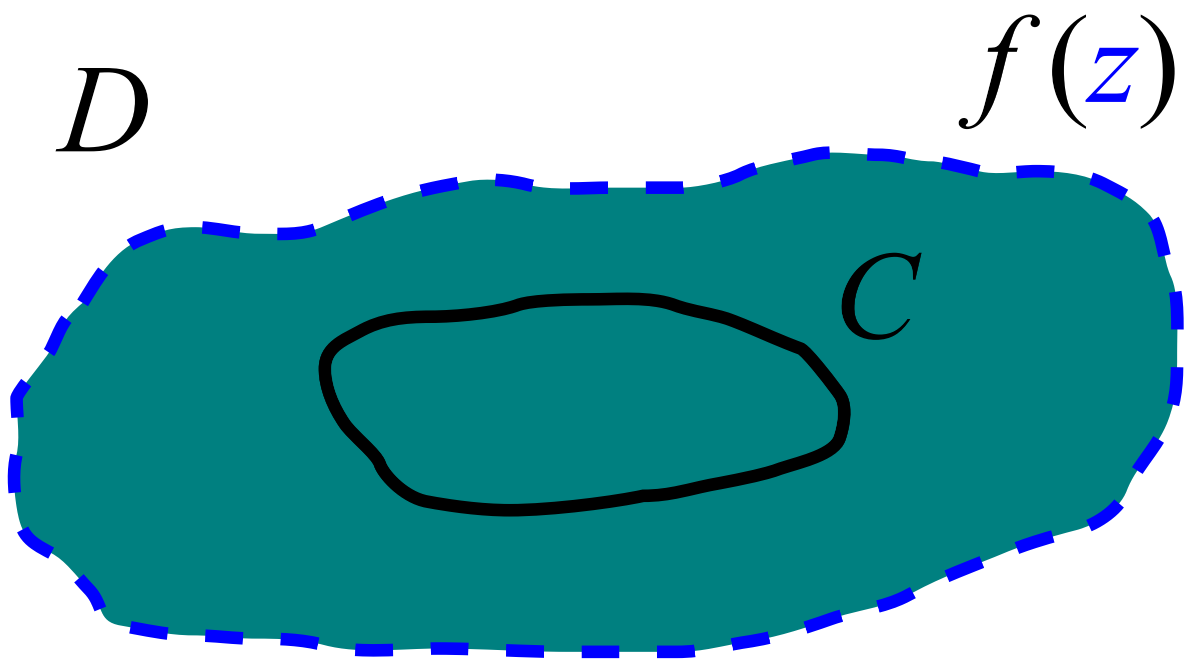
Definición 6 (Dominio multiplemente conexo). *Un dominio D se dice multiplemente conexo si no es simplemente conexo.*





Teorema 2 (Extensión del Teorema de Cauchy-Goursat)**.**
Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo D, entonces para todo contorno cerrado simple C, dentro de D, se cumple

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$



Ejemplo

Pruebe que

$$\int_C z^n\, dz = 0,$$

donde n es un entero positivo y C es la circunferencia $|z| = r$, con $r > 0$.

Ejemplo

Pruebe que

$$\int_B \frac{dz}{z^2(z^2-1)} = 0,$$

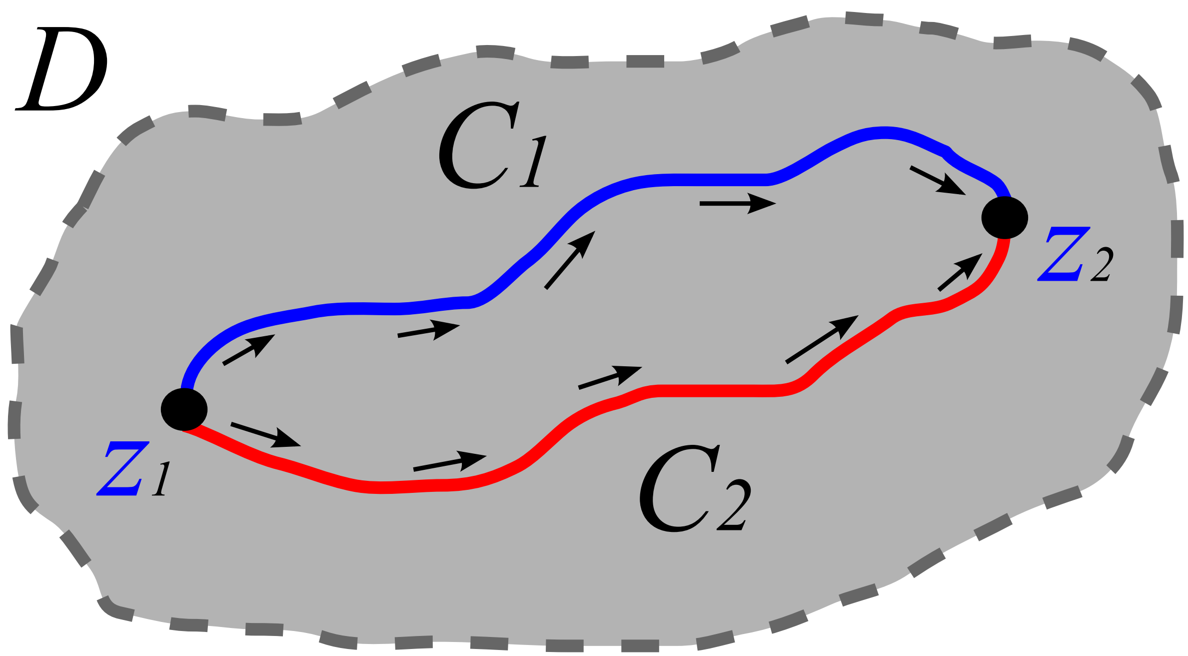
donde B consta de la circunferencia $|z| = 2$ descrita en la dirección positiva, y de las circunferencias $|z+1| = 1/2$, $|z| = 1/2$ y $|z-1| = 1/2$, descritas en la dirección negativa.

Integral Indefinida

Teorema 3 (Principio de independencia de la trayectoria)**.**
Sea $f(z)$ analítica en un dominio simplemente conexo D y sean $z_1, z_2 \in D$. Entonces, el valor de la integral

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz$$

no depende del contorno, dentro de D, utilizado para ir de z_1 a z_2.



Definición 7 (Integral indefinida). *Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo D. Sea $z_0 \in D$. La función $F(z)$ definida en D por*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\, ds + c,$$

*donde $c \in \mathbb{C}$, se denomina **integral indefinida** o **primitiva** de $f(z)$.*

Observaciones

- Se usa el símbolo $\int f(z)\, dz$ para indicar todas las primitivas de $f(z)$, además, tales primitivas difieren en valores constantes.
- Cada primitiva $F(z)$ es una función analítica en D.
- La derivada de $F(z)$ es
$$F'(z) = f(z).$$
- El valor de la integral $\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\, dz$ está dado por
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)\, dz = F(\beta) - F(\alpha).$$

Ejemplo

a) Encuentre las primitivas de $f(z) = z \operatorname{sen} z$.

b) Encuentre la primitiva necesaria para calcular la integral $\int_{\pi}^{\pi/2} z \operatorname{sen} z \, dz$ y halle el valor de la integral.

Solución.

a) $\displaystyle\int s \operatorname{sen} s \, ds = -z \cos z + \operatorname{sen} z + c, \qquad c \in \mathbb{C}.$

b) $\displaystyle\int_{\pi}^{z} s \operatorname{sen} s \, ds = -z \cos z + \operatorname{sen} z - \pi$, y

$$\int_{\pi}^{\pi/2} z \operatorname{sen} z \, dz = 1 - \pi.$$

Fórmula Integral de Cauchy

Teorema 4 (Fórmula integral de Cauchy).
Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo D. Sea C un contorno cerrado simple C dentro de D. Sea $z_0 \in D$ interior a C. Entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)}\, dz.$$

Ejemplo

Utilizando la fórmula integral de Cauchy se puede verificar que

$$\int_{|z-i|=2} \frac{1}{z^2+4}\, dz = \frac{\pi}{2}.$$

Extensión de la Fórmula Integral de Cauchy

Teorema 5 (Extensión de la fórmula integral de Cauchy)**.**
Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio simplemente conexo D. Sea C un contorno cerrado simple C dentro de D. Sea $z_0 \in D$ interior a C. Entonces $f(z)$ es infinitamente diferenciable en D y

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz.$$

Además, $f^{(n)}(z)$ es analítica en D para cada n.

Ejemplo

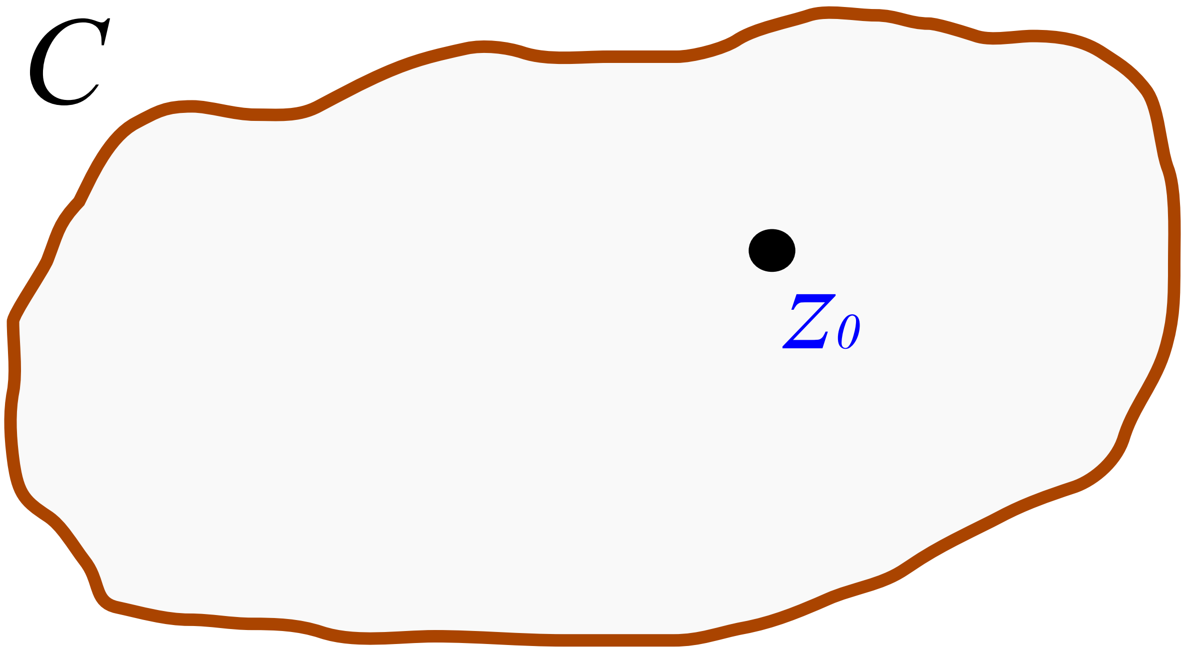
Utilizando la extensión de la fórmula integral de Cauchy se puede verificar que

$$\int\limits_{|z-i|=2} \frac{1}{(z^2+4)^2}\, dz = \frac{\pi}{16}.$$

Residuo

Sea $f(z)$ una función analítica sobre un contorno cerrado simple C y en todo punto interior a C, salvo en z_0. El ***residuo*** de $f(z)$ en z_0, se define como

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}[f(z)] = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz.$$



Teorema 6. *Sea z_0 un punto singular aislado de una función $f(z)$. Entonces, el residuo de $f(z)$ en z_0 es igual al coeficiente de $(z - z_0)^{-1}$ en la serie de Laurent que representa a $f(z)$ en el anillo*

$$0 < |z - z_0| < r,$$

para cierto número real $r > 0$.

Ejemplo

- $\operatorname*{Res}_{z=0}\left[e^{1/z}\right] = 1$

- $\operatorname*{Res}_{z=i}\left[\dfrac{1}{(z-i)^2}\right] = 0$

- $\operatorname*{Res}_{z=0}\left[z^4 \operatorname{sen}(1/z)\right] = \dfrac{1}{5!}$

Cálculo del Residuo

- Si z_0 es un punto singular removible de $f(z)$, entonces

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}[f(z)] = 0.$$

- Si z_0 es un punto singular esencial de $f(z)$, entonces la única manera de calcular el residuo de $f(z)$ en z_0 es obtener el desarrollo de Laurent centrado en z_0 y válido en el anillo $0 < |z - z_0| < r$, y luego tomar

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}[f(z)] = b_1.$$

Ejemplo

- $\displaystyle \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{\operatorname{sen}(z)}{z}\right] = 0$

- $\displaystyle \operatorname*{Res}_{z=2i}\left[\exp\left(\frac{z^2 - 2iz + 1}{z - 2i}\right)\right] = e^{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,(n+1)!}$

Cálculo del Residuo en un Polo

Teorema 7. *Sea z_0 un punto singular aislado de una función $f(z)$. Si para cierto entero positivo m, la función*

$$\phi(z) = (z - z_0)^m f(z)$$

se puede definir en z_0 de modo que sea analítica ahí y $\phi(z_0) \neq 0$, entonces $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 y, además,

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}[f(z)] = \begin{cases} \phi(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z), & m = 1; \\ \dfrac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}, & m > 1. \end{cases}$$

Ejemplo

Utilizando el Teorema 7 se pueden obtener los siguientes residuos.

- $\displaystyle \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{e^z}{z^2(z^2+1)}\right] = 1$

- $\displaystyle \operatorname*{Res}_{z=2}\left[\frac{z^{1/2}}{z(z-2)^2}\right] = \frac{-1}{4\sqrt{2}}$ (Utilizando la rama principal de $z^{1/2}$)

- $\displaystyle \operatorname*{Res}_{z=1}\left[\frac{\operatorname{Log} z}{z^4(z-1)^2}\right] = ?$

- $\displaystyle \operatorname*{Res}_{z=n\pi i}\left[\frac{\operatorname{sen} z - z}{z \operatorname{senh} z}\right] = ?,$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Teorema de los Residuos

Teorema 8 (Teorema de los residuos).
Sea C un contorno cerrado simple, dentro y sobre el cual una función $f(z)$ es analítica excepto en un número finito de puntos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ interiores a C. Entonces,

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} [f(z)].$$

Ejemplo

Utilizando el Teorema de los Residuos se obtiene que

$$\int_C (1+z+z^2)(e^{1/z}+e^{1/(z-1)}+e^{1/(z-2)})\,dz = 32\,\pi i,$$

donde C es un contorno cerrado simple que contiene en su interior a los puntos 0, 1 y 2.

Expansión en Fracciones Parciales

Sea $f(z)$ una función racional propia dada por

$$f(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \cdots + b_M z^M}{a_0 + a_1 z + \cdots + z^N},$$

donde $M < N$. Sean p_k los polos de $f(z)$ y r_k sus multiplicidades respectivas, para $k = 1, 2, \ldots, T$, donde T es un entero positivo tal que $N = \sum_{k=1}^{T} r_k$. Entonces:

(i) Si todos los polos de $f(z)$ son simples, la expansión en fracciones parciales de $f(z)$ es:

$$f(z) = \frac{A_1}{(z - p_1)} + \frac{A_2}{(z - p_2)} + \cdots + \frac{A_N}{(z - p_N)},$$

donde los números complejos A_k, denominados coeficientes, se calculan como

$$A_k = \operatorname*{Res}_{z=p_k} [f(z)], \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots, N.$$

(ii) Si todos los polos de $f(z)$ son simples, excepto el polo p_ℓ que es de orden r_ℓ, la expansión en fracciones parciales de $f(z)$ es:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{A_1}{(z-p_1)} + \frac{A_2}{(z-p_2)} + \cdots + \frac{A_{\ell-1}}{(z-p_{\ell-1})} \\ &+ \frac{A_{\ell,1}}{(z-p_\ell)} + \frac{A_{\ell,2}}{(z-p_\ell)^2} + \cdots + \frac{A_{\ell,r_\ell}}{(z-p_\ell)^{r_\ell}} \\ &+ \frac{A_{\ell+1}}{(z-p_{\ell+1})} + \frac{A_{\ell+2}}{(z-p_{\ell+2})} + \cdots + \frac{A_T}{(z-p_T)}, \end{aligned}$$

donde

$$A_k = \operatorname*{Res}_{z=p_k} [f(z)], \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots, T, \text{ y } k \neq \ell;$$

y

$$A_{\ell,\jmath} = \frac{1}{(r-\jmath)!} \left[\frac{d^{(r-\jmath)}}{dz^{(r-\jmath)}} [(z-p_\ell)^{r_\ell} f(z)] \right] \Bigg|_{z=p_\ell},$$

para $\jmath = 1, 2, \ldots, r_\ell$.

Ejemplo

La expansión en fracciones parciales de la función

$$f(z) = \frac{144\,z^2 + 144\,z + 144}{(z-3)^2(z-2)^2(z+1)},$$

está dada por

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)} + \frac{800}{(z-2)} + \frac{336}{(z-2)^2} - \frac{801}{(z-3)} + \frac{468}{(z-3)^2}.$$

Introducción
al
Cálculo Operacional

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
Departamento de Electrónica, Computación y Control
Variable Compleja y Cálculo Operacional

Marzo, 2013

Contenido

Función Delta de Dirac 3

Propiedades 4

Derivada Generalizada 6

Funciones de Dominio Continuo 8

Funciones de Dominio Continuo de Uso Común 9

Relación entre $u(t)$ y $\delta(t)$ 12

Convolución en el Dominio Continuo 13

Funciones de Dominio Discreto 16

Funciones de Dominio Discreto de Uso Común 17

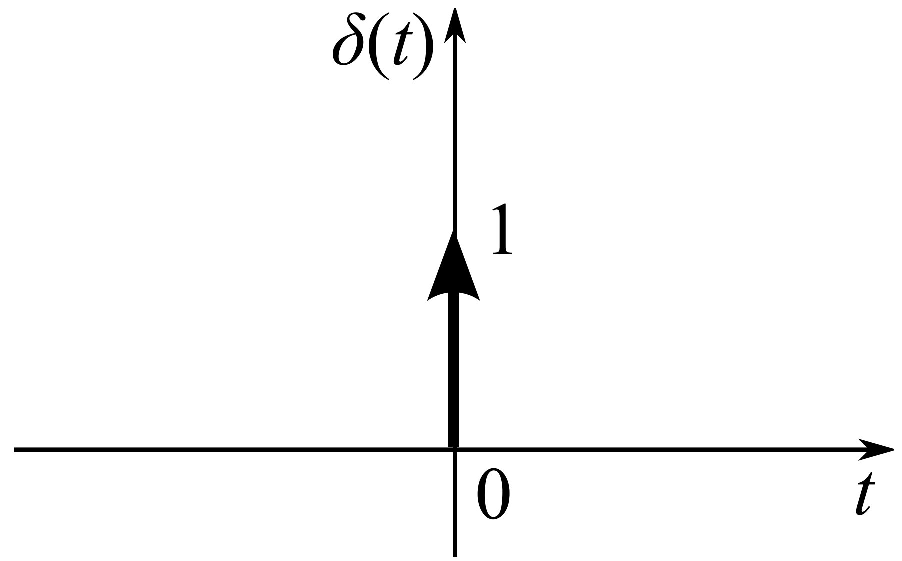
Relación entre $u(n)$ y $\delta(n)$ 18

Convolución en el Dominio Discreto 19

Función Delta de Dirac

Sea $C(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones continuas definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. La función ***Delta de Dirac*** o ***Impulso Unitario***, es una *función generalizada*, denotada con $\delta(t)$, que satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t)\,dt \;= \varphi(0)$$



Representación Gráfica de $\delta(t)$

Propiedades

- $\lim_{t \to 0} \delta(t) = \infty$ y $\delta(t) = 0$ para todo $t \neq 0$.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$.
- **Desplazamiento**. Si $\varphi(t)$ es continua en $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta(t - t_0)\, dt = \varphi(t_0).$$

- **Muestreo**. Si $\varphi(t)$ es continua en $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\varphi(t)\, \delta(t - t_0) = \varphi(t_0)\, \delta(t - t_0).$$

- **Escalado**. Para $a \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\, \delta(t).$$

- Para $a, t_0 \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\delta(at - t_0) = \frac{1}{|a|}\,\delta\left(t - \frac{t_0}{a}\right).$$

- **Derivada**. Si $\varphi(t)$ es continuamente diferenciable en $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces

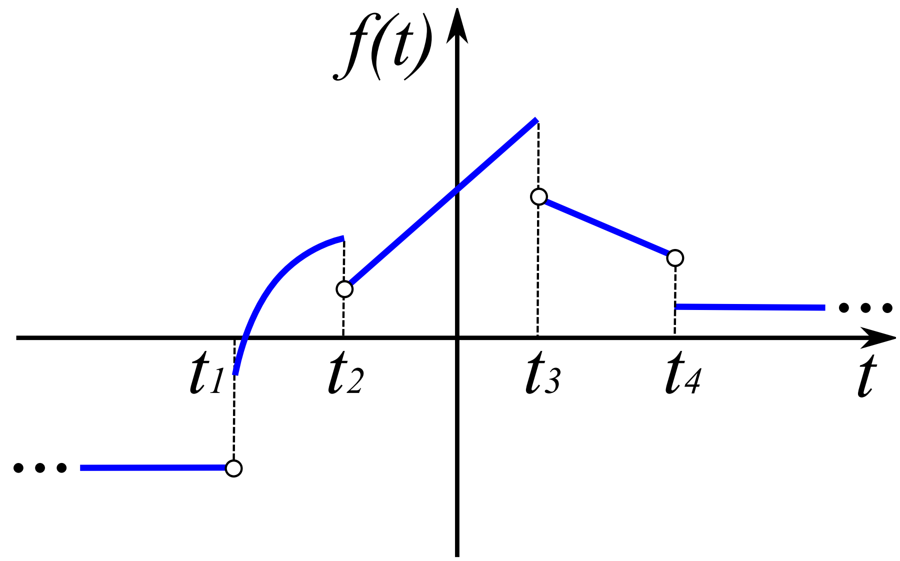
$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta'(t - t_0)\,dt = -\varphi'(t_0).$$

- **Derivada n-ésima**. Si $\varphi(t)$ es n veces continuamente diferenciable en $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\delta^{(n)}(t - t_0)\,dt = (-1)^n\,\varphi^{(n)}(t_0).$$

Derivada Generalizada

- Sea $f(t)$ una función que en los puntos $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ tiene saltos $h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{R}$, respectivamente.
- Supongamos que $f(t)$ es diferenciable en $\mathbb{R}$ excepto en cada t_k, para $k = 1, 2, \ldots, n$.



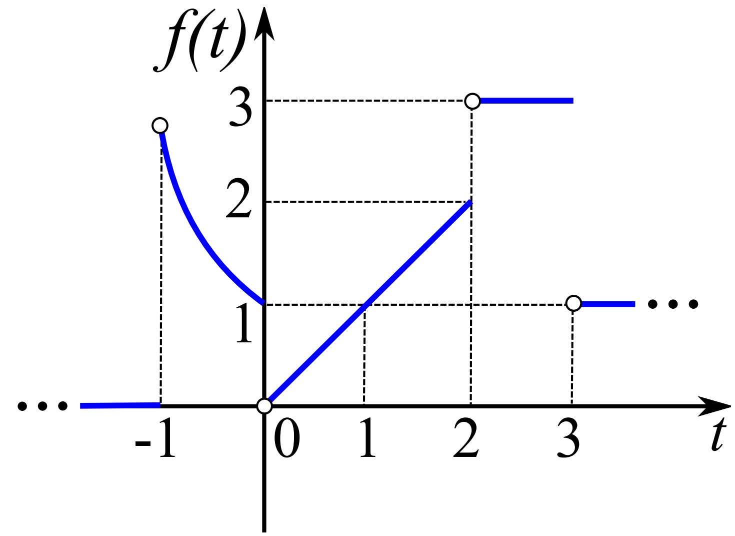
Entonces, la ***derivada generalizada*** de $f(t)$ se define como

$$f'(t) = \left.\frac{d}{dt} f(t)\right|_{t \neq t_k} + \sum_{k=1}^{n} h_k \, \delta(t - t_k).$$

Ejemplo

Sea $f(t)$ una función definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -1; \\ e^{-t}; & -1 < t \leq 0; \\ t, & 0 < t \leq 2; \\ 3, & 2 < t \leq 3; \\ 1, & t > 3. \end{cases}$$



Entonces, la derivada de $f(t)$ está dada por

$$f'(t) = g(t) + e\,\delta(t+1) - \delta(t) + \delta(t-2) - 2\delta(t-3),$$

donde

$$g(t) = \begin{cases} -e^{-t}, & -1 < t < 0; \\ 1, & 0 < t < 2; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Funciones de Dominio Continuo

Definición 1. *Una función que depende de una variable t se dice de* ***dominio continuo****, si la variable t toma valores en el conjunto de los números reales.*

Ejemplo

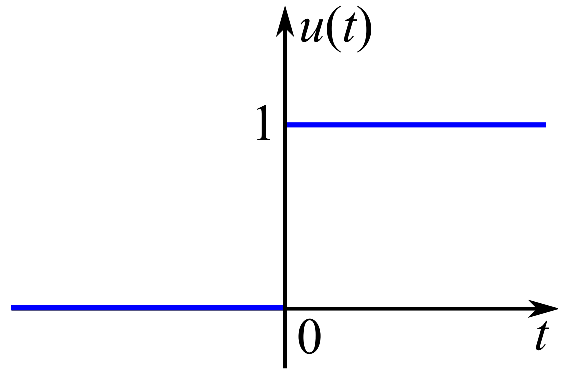
- $f(t) = e^t$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
- $f(t) = \delta(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
- $f(t) = \operatorname{sen}(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
- $f(t) = \cos(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
- $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases}$

Funciones de Dominio Continuo de Uso Común

Escalón unitario continuo

El escalón unitario, denotado por $u(t)$, se define como

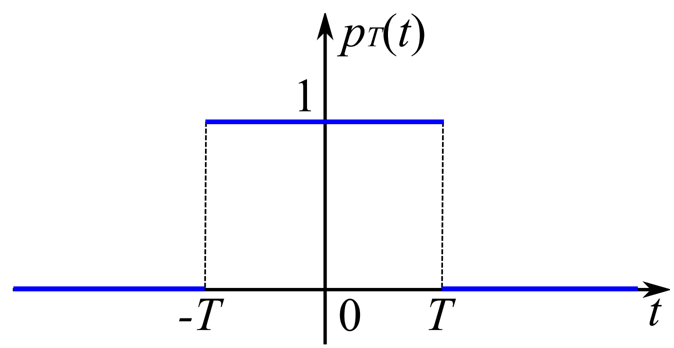
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$



Pulso rectangular

El pulso rectangular, denotado por $p_T(t)$, se define, para $T > 0$, como

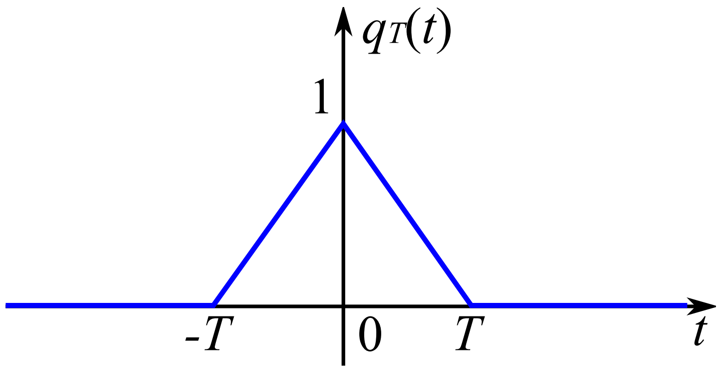
$$p_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T; \\ 0, & |t| > T. \end{cases}$$



Pulso triangular

El pulso triangular, denotado por $q_T(t)$, se define, para $T > 0$, como

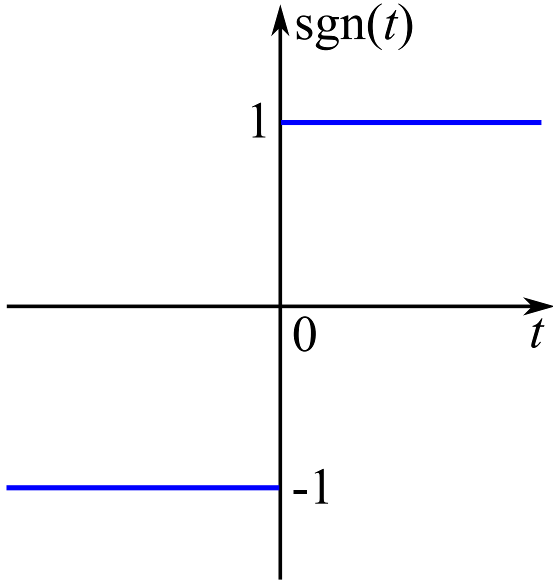
$$q_T(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|t|}{T}, & |t| \leq T; \\ 0, & |t| > T. \end{cases}$$



Función signo

La función signo, denotada por $\operatorname{sgn}(t)$, se define como

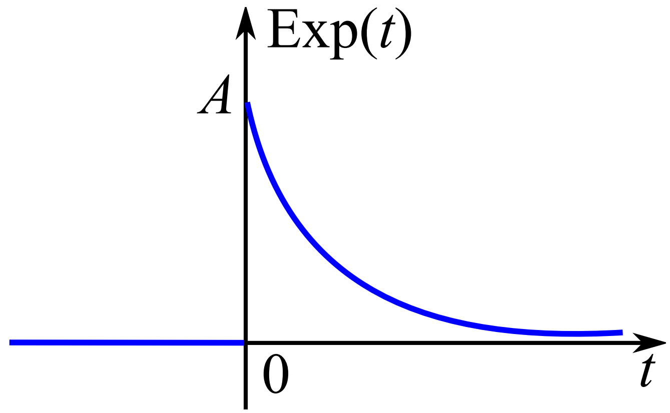
$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$



Pulso exponencial

El pulso exponencial, denotado por $\mathrm{Exp}(t)$, se define, para $A > 0$ y $\alpha > 0$, como

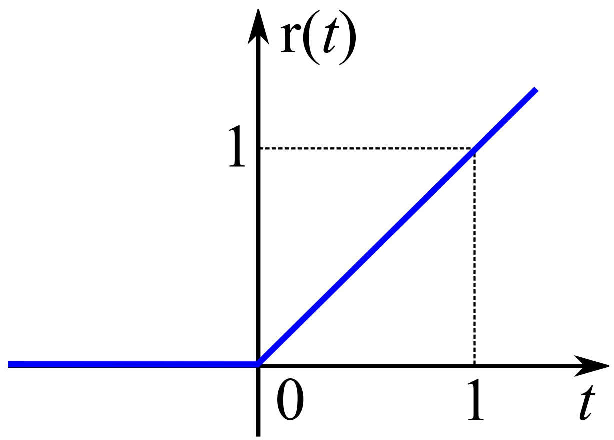
$$\mathrm{Exp}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ A\,e^{-\alpha t}, & t \geq 0. \end{cases}$$



Función rampa

La función rampa, denotada por $r(t)$, se define como

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ t, & t \geq 0. \end{cases}$$



Relación entre $u(t)$ y $\delta(t)$

De las definiciones de $u(t)$ y $\delta(t)$ se puede deducir que

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau, \qquad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

La última ecuación se puede expresar inversamente como

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}u(t) = u'(t), \qquad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

Igualmente, se puede deducir que

$$\delta(t-a) = \frac{d}{dt}u(t-a) = u'(t-a),$$

y

$$u(t-a) = \int_{-\infty}^{t-a} \delta(\tau)\, d\tau,$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Convolución en el Dominio Continuo

Definición 2. *Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones de dominio continuo. La* ***convolución*** *entre $f(t)$ y $g(t)$ es una función de dominio continuo definida como*

$$f * g\,(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau.$$

Propiedades

Para funciones f, g y h de dominio continuo se satisface:

1. **Conmutativa**

$$f * g\,(t) = g * f\,(t)$$

2. **Distributiva con respecto a la suma**

$$f * (g + h)\,(t) = f * g\,(t) + f * h\,(t)$$

Ejemplo

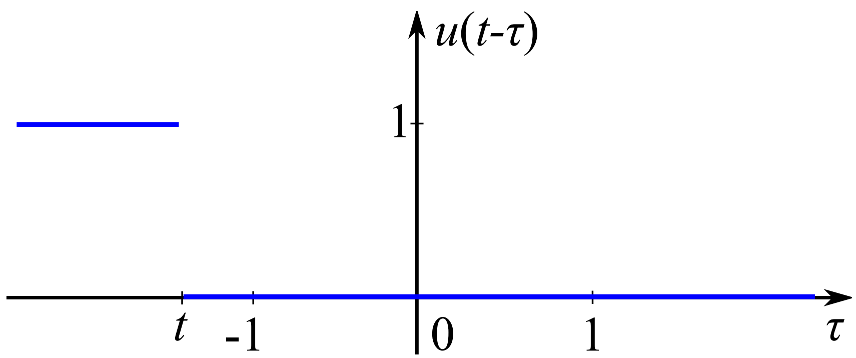
Determinar la convolución $f * g\,(t)$, donde $f(t) = p_1(t)$ y $g(t) = u(t)$.

Solución. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
h(t) = f * g\,(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau \\
&= \int_{-1^+}^{1^-} u(t-\tau)\, d\tau, \qquad \text{para cada } t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

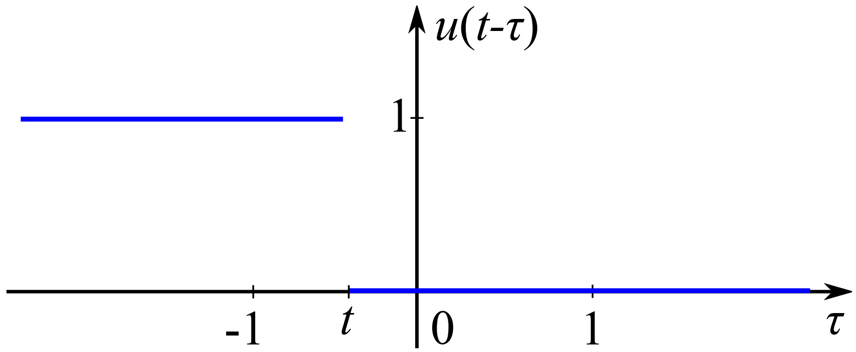
- Para $t \leq -1$,

$$h(t) = 0$$



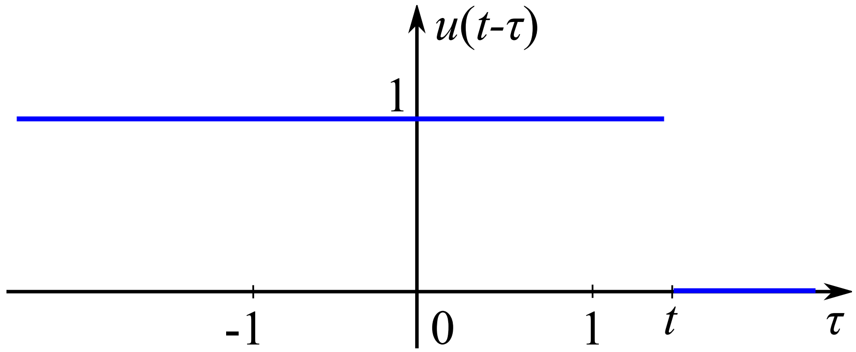
- Para $-1 < t < 1$,

$$h(t) = t + 1$$



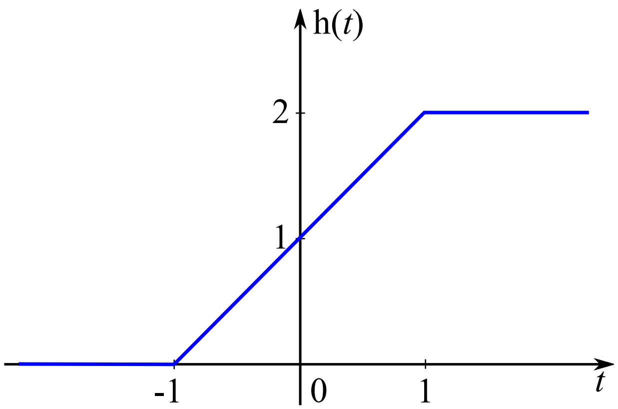
- Para $t \geq 1$,

$$h(t) = 2$$



Así,

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -1; \\ t+1, & -1 < t < 1 \\ 2, & t \geq 1. \end{cases}$$



Funciones de Dominio Discreto

Definición 3. *Una función que depende de una variable n se dice de* ***dominio discreto****, si la variable n toma valores en el conjunto de los números enteros.*

Ejemplo

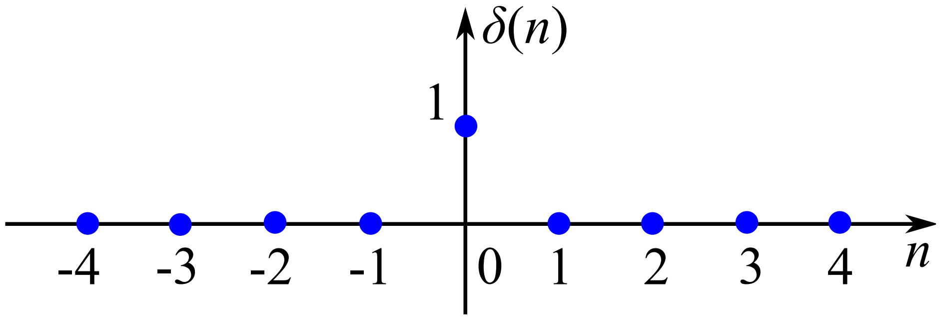
- $f(n) = e^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.
- $f(n) = \operatorname{sen}(n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.
- $f(n) = \cos(n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.
- $f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$
- $f(n) = \begin{cases} 0, & n < 0; \\ 1, & n \geq 0. \end{cases}$

Funciones de Dominio Discreto de Uso Común

Impulso unitario discreto

El impulso unitario discreto, denotado por $\delta(n)$, se define como

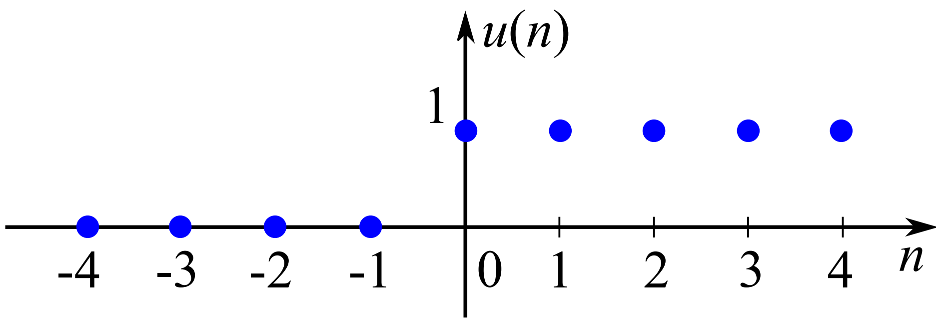
$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$



Escalón unitario discreto

El escalón unitario discreto, denotado por $u(n)$, se define como

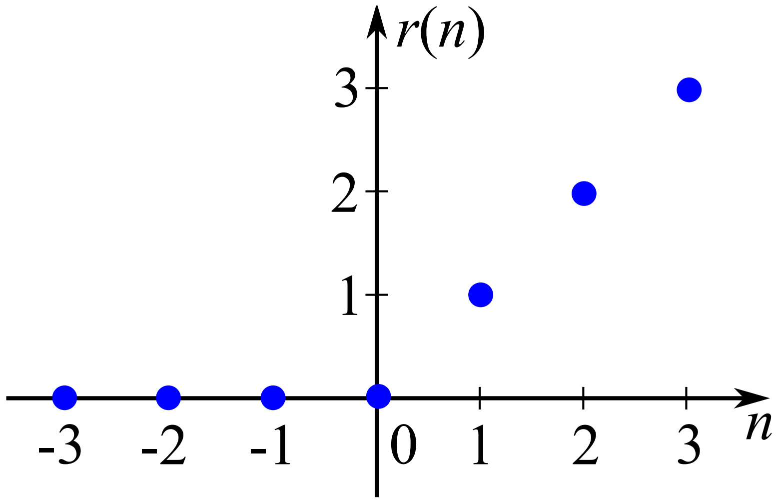
$$u(n) = \begin{cases} 0, & n < 0; \\ 1, & n \geq 0. \end{cases}$$



Función rampa discreta

La función rampa discreta, denotada por $r(n)$, se define como

$$r(n) = \begin{cases} 0, & n < 0; \\ n, & n \geq 0. \end{cases}$$



Relación entre $u(n)$ y $\delta(n)$

De las definiciones de $u(n)$ y $\delta(n)$ se puede deducir que

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k), \qquad \text{y} \qquad \delta(n) = u(n) - u(n-1),$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Convolución en el Dominio Discreto

Definición 4. *Sean $f(n)$ y $g(n)$ dos funciones de dominio discreto. La* ***convolución*** *entre $f(n)$ y $g(n)$ es una función de dominio discreto definida como*

$$f * g\,(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\,g(n-k).$$

Propiedades

Para funciones f, g y h de dominio discreto se satisface:

1. **Conmutativa**

$$f * g\,(n) = g * f\,(n)$$

2. **Distributiva con respecto a la suma**

$$f * (g + h)\,(n) = f * g\,(n) + f * h\,(n)$$

Ejemplo

Determinar la convolución $f * g\,(n)$, donde

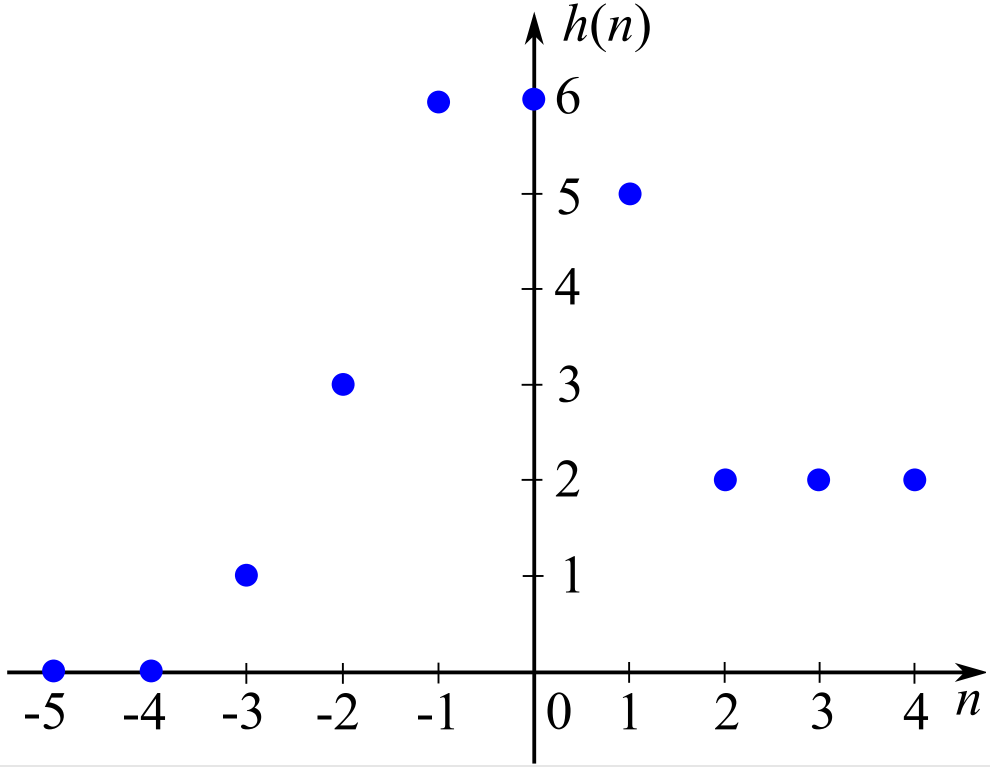
$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = -1, 0, 1; \\ 0, & |n| > 1, \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(n) = \begin{cases} 0, & n \leq -4; \\ n+3, & -3 \leq n \leq 0; \\ 1, & n \geq 1. \end{cases}$$

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} h(n) = f * g\,(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, g(n-k) \\ &= \sum_{k=-1}^{1} g(n-k) \\ &= g(n+1) + g(n) + g(n-1), \qquad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Así,

$$h(n) = \begin{cases} 0, & n \leq -4; \\ 1, & n = -3; \\ 3n+9, & n = -2, -1; \\ 6-n, & n = 0, 1; \\ 2, & n \geq 2. \end{cases}$$



Transformada de Fourier

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
Departamento de Electrónica, Computación y Control
Variable Compleja y Cálculo Operacional

Marzo, 2013

Contenido

Transformada Integral Lineal 3

Ejemplos de Transformadas Integrales Lineales 4

Propiedades 5

Transformada de Fourier 9

Definición 9

Propiedades 11

Transformada Inversa de Fourier 15

Magnitud y Fase de una Función 17

Transformada Integral Lineal

Sea $f(t)$ una función de dominio continuo. Se define la transformada integral lineal de $f(t)$ como

$$F(s) = \mathscr{T}[f(t)] = \int_a^b f(t)N(s,t)\,dt \qquad \forall s \in D,$$

donde:

- $D \subset \mathbb{C}$ es el dominio en el cual se garantiza la convergencia de la integral;
- $N(s,t)$ es el llamado ***núcleo*** de la transformada, que satisface las siguientes condiciones:
  - ⊛ $\dfrac{d^n}{dt^n}N(s,t) = s^n N(s,t).$
  - ⊛ $\dfrac{d^n}{ds^n}N(s,t) = t^n N(s,t).$

⊛ $N(s,t+\alpha) = N(s,t)\cdot N(s,\alpha) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

⊛ $N(s+z,t) = N(s,t)\cdot N(z,t) \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$

⊛ $N(s,t) = N(st).$

Ejemplos de Transformadas Integrales Lineales

a) *Transformada de Laplace*

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

b) *Transformada de Fourier*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

c) *Transformada de Mellin*

$$M(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, t^{s-1}\, dt$$

d) *Transformada Coseno de Fourier*

$$C(\lambda) = 2\int_0^\infty f(t)\cos(2\pi\lambda t)\,dt$$

Propiedades

Teorema 1 (Linealidad). *Sea $f_k(t)$ una función con transformada integral lineal dada por $F_k(s) = \mathscr{T}[f_k(t)]$, para todo $s \in D_k$, y $k = 1, 2, \ldots, n$, donde $D_k \subset \mathbb{C}$ es la región de convergencia de $F_k(s)$. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Entonces,*

$$\mathscr{T}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t)\right] = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathscr{T}[f_k(t)] = \sum_{k=1}^{n} a_k F_k(s),$$

para todo $s \in \bigcap_{k=1}^{n} D_k$.

Teorema 2 (**Traslación en** t)**.** *Sea* $f(t)$ *una función con transformada integral lineal dada por* $F(s) = \mathscr{T}[f(t)]$*, para todo* $s \in D \subset \mathbb{C}$*. Sea* $t_0 \in \mathbb{R}$*. Entonces,*

$$\mathscr{T}[f(t - t_0)] = N(s, t_0)\, F(s),$$

para todo $s \in D$*.*

Teorema 3 (**Cambio de escala**)**.** *Sea* $f(t)$ *una función con transformada integral lineal dada por* $F(s) = \mathscr{T}[f(t)]$*, para todo* $s \in D \subset \mathbb{C}$*. Sea* $a \in \mathbb{R}$*. Entonces,*

$$\mathscr{T}[f(at)] = \frac{1}{|a|}\, F(s/a),$$

para todo $(s/a) \in D$*.*

Teorema 4 (Traslación en s). *Sea $f(t)$ una función con transformada integral lineal dada por $F(s) = \mathscr{T}[f(t)]$, para todo $s \in D \subset \mathbb{C}$. Sea $z \in \mathbb{C}$. Entonces,*

$$\mathscr{T}[N(z,t)f(t)] = F(s+z),$$

para todo $(s+z) \in D$.

Teorema 5 (Convolución). *Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones con transformadas integrales lineales dadas respectivamente por $F(s) = \mathscr{T}[f(t)]$, para todo $s \in D_f \subset \mathbb{C}$, y $G(s) = \mathscr{T}[g(t)]$, para todo $s \in D_g \subset \mathbb{C}$. Entonces,*

$$\mathscr{T}[f * g\,(t)] = F(s)\,G(s),$$

para todo $s \in D_f \cap D_g$.

Teorema 6 (Diferenciación en t). *Sea $f(t)$ una función con transformada integral lineal dada por $F(s) = \mathscr{T}[f(t)]$, para todo $s \in D \subset \mathbb{C}$. Si $f(t)$ es derivable, entonces*

$$\mathscr{T}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = N(s,t)f(t)\big|_a^b - sF(s),$$

para todo $s \in D$.

Teorema 7 (Diferenciación en s). *Sea $f(t)$ una función con transformada integral lineal dada por $F(s) = \mathscr{T}[f(t)]$, para todo $s \in D \subset \mathbb{C}$. Entonces,*

$$\mathscr{T}[tf(t)] = \frac{d}{ds}F(s),$$

para todo $s \in D$.

Transformada de Fourier

Definición

Sea $f(t)$ una función de dominio continuo. La transformada de Fourier de $f(t)$ es una transformada integral lineal dada por

$$F(\omega) = \mathscr{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt,$$

para $\omega \in \mathbb{R}$.

Observaciones:

- La transformada de Fourier toma valores complejos, y si $f(t)$ es una función generalizada, entonces $F(\omega)$ se denomina transformada de Fourier generalizada.

- Para que la transformada de Fourier de una función $f(t)$ exista en forma ordinaria, $f(t)$ debe satisfacer las siguientes propiedades denominadas condiciones de Dirichlet:

– $f(t)$ es absolutamente integrable, esto es, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$;

– $f(t)$ posee un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo de longitud finita.

Ejemplo

Sea $f(t)$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1, \\ 2, & |t| > 1. \end{cases} = 2u(-t-1) + u(t+1) + u(t-1)$$

Entonces, la transformada de Fourier generalizada de $f(t)$ es

$$F(\omega) = 4\,\pi\,\delta(\omega) - \frac{e^{\omega\, j}\,\left(j\, e^{-2\,\omega\, j} - j\right)}{\omega},$$

pero no existe su transformada de Fourier ordinaria.

Propiedades

Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones de dominio continuo con transformada de Fourier $F(\omega)$ y $G(\omega)$, respectivamente. Las siguientes propiedades se cumplen:

- *Linealidad*

$$a\,f(t) + b\,g(t) \qquad \xrightarrow{\mathscr{F}} \qquad a\,F(\omega) + b\,G(\omega), \;\; \text{para } a, b \in \mathbb{R}.$$

- *Desplazamiento en tiempo*

$$f(t - t_0) \qquad \xrightarrow{\mathscr{F}} \qquad e^{-j\omega t_0}\,F(\omega), \;\; \text{para } t_0 \in \mathbb{R}.$$

- *Desplazamiento en frecuencia*

$$e^{j\omega_0 t}\,f(t) \qquad \xrightarrow{\mathscr{F}} \qquad F(\omega - \omega_0), \;\; \text{para } \omega_0 \in \mathbb{R}.$$

- *Escalamiento en tiempo*

$$f(at) \quad \xrightarrow{\mathscr{F}} \quad \frac{1}{|a|} F(\omega/a), \ \ \text{para } a \in \mathbb{R}.$$

- *Dualidad*

$$F(t) \quad \xrightarrow{\mathscr{F}} \quad 2\pi\, f(-\omega).$$

- *Conjugación*

$$\overline{f(t)} \quad \xrightarrow{\mathscr{F}} \quad \overline{F(-\omega)}.$$

- *Convolución*

$$f * g\,(t) \quad \xrightarrow{\mathscr{F}} \quad F(\omega)\, G(\omega).$$

- *Multiplicación*

$$f(t)\, g(t) \quad \xrightarrow{\mathscr{F}} \quad \frac{1}{2\pi} F * G\,(\omega).$$

- *Diferenciación en tiempo*

$$\frac{d}{dt} f(t) \qquad \xrightarrow{\mathscr{F}} \qquad j\omega\, F(\omega).$$

- *Diferenciación en frecuencia*

$$t\, f(t) \qquad \xrightarrow{\mathscr{F}} \qquad j\, \frac{d}{d\omega} F(\omega).$$

- *Integración*

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau \qquad \xrightarrow{\mathscr{F}} \qquad \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega).$$

- *Teorema de Parseval*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega.$$

Ejemplo

A continuación se muestran algunas funciones y la transformada de Fourier de las mismas.

1) $\delta(t) \quad \xrightarrow{\mathscr{F}} \quad 1$

2) $u(t) \quad \xrightarrow{\mathscr{F}} \quad \dfrac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

3) $\operatorname{sgn}(t) \quad \xrightarrow{\mathscr{F}} \quad \dfrac{2}{j\omega}$

4) $1 \quad \xrightarrow{\mathscr{F}} \quad 2\pi\,\delta(\omega)$

5) $e^{j\omega_0 t} \quad \xrightarrow{\mathscr{F}} \quad 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$

6) $e^{-\alpha t}u(t),\ \alpha > 0 \quad \xrightarrow{\mathscr{F}} \quad \dfrac{1}{\alpha + j\omega}$

7) $\operatorname{sen}\omega_0 t \quad \xrightarrow{\mathscr{F}} \quad \dfrac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right]$

8) $\cos\omega_0 t \quad \xrightarrow{\mathscr{F}} \quad \pi\left[\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right]$

Transformada Inversa de Fourier

Sea $f(t)$ una función de dominio continuo cuya transformada de Fourier es $F(\omega)$. La transformada inversa de Fourier es el proceso de obtener $f(t)$ a través de $F(\omega)$ y se define como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$$

Ejemplo

Determine la transformada inversa de Fourier de $F(\omega) = \delta(\omega)$.

Solución. Por definición de la transformada inversa de Fourier podemos escribir:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} \, d\omega$$

Ahora, como $e^{j\omega t} = \cos\omega t + j \operatorname{sen}\omega t$, entonces se obtiene que

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)(\cos\omega t + j \operatorname{sen}\omega t)\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)\cos\omega t\, d\omega + j\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)\operatorname{sen}\omega t\, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}(\cos(0) + j\operatorname{sen}(0)) \\ &= \frac{1}{2\pi}. \end{aligned}$$

Observación

- En general, para el cálculo de la transformada inversa de Fourier se utiliza el procedimiento Inversión por Tablas, estudiado en el tema Transformada de Laplace.

Magnitud y Fase de una Función

Sea $f(t)$ una función de dominio continuo cuya transformada de Fourier es $F(\omega)$.

Como, para cada $\omega \in \mathbb{R}$, $F(\omega)$ es un número complejo, entonces podemos escribir:

$$F(\omega) = |F(\omega)|\, e^{j \arg(F(\omega))},$$

la cual es la representación en coordenadas polares de $F(\omega)$.

Definición 1 (Magnitud de una función)**.** *Sea $F(\omega)$ la transformada de Fourier de $f(t)$. La **magnitud** de $f(t)$ se define como el valor absoluto de su transformada de Fourier, esto es,*

$$A(\omega) = |F(\omega)|, \qquad \textit{para cada } \omega \in \mathbb{R}.$$

*La función $A(\omega)$ se denomina **espectro de magnitud** de $f(t)$.*

Definición 2 (Fase de una función). *Sea $F(\omega)$ la transformada de Fourier de $f(t)$. La **fase** de $f(t)$ se define como el argumento de su transformada de Fourier, esto es,*

$$\phi(\omega) = \arg(F(\omega)), \qquad \textit{para cada } \omega \in \mathbb{R}.$$

*La función $\phi(\omega)$ se denomina **espectro de fase** de $f(t)$.*

Proposición 1. *Si $f(t)$ es una función real, entonces el espectro de magnitud $A(\omega)$ es una función par, y el espectro de fase $\phi(\omega)$ es una función impar.*

Ejemplo

Determine los espectros de magnitud y fase de la función $f(t) = e^{-2t}u(t)$.

Solución. Se tiene que la transformada de Fourier de $f(t) = e^{-2t}u(t)$ está dada por

$$F(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}.$$

Luego,

$$A(\omega) = \frac{1}{|2 + j\omega|} = \frac{1}{\sqrt{4 + \omega^2}}$$

y

$$\phi(\omega) = \mathrm{Arg}\left(\frac{1}{2 + j\omega}\right) = \begin{cases} \arctan(\omega/2), & \omega < 0, \\ -\arctan(\omega/2), & \omega \geq 0. \end{cases}$$

Ejemplo

Determine los espectros de magnitud y fase de la función $f(t) = u(t)$.

Solución. Se tiene que la transformada de Fourier de $f(t) = u(t)$ está dada por

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega).$$

Así,

$$A(\omega) = \left|\frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)\right| = \frac{1}{|\omega|}, \qquad \text{para } \omega \neq 0$$

y

$$\phi(\omega) = \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\,\delta(\omega)\right) = \begin{cases} \pi/2, & \omega < 0, \\ -\pi/2, & \omega > 0. \end{cases}$$

Ejemplo

Determine los espectros de magnitud y fase de la función $f(t) = \operatorname{sgn}(t)$.

Solución. Se tiene que la transformada de Fourier de $f(t) = \operatorname{sgn}(t)$ está dada por

$$F(\omega) = \frac{2}{j\omega}.$$

Entonces,

$$A(\omega) = \left|\frac{2}{j\omega}\right| = \frac{2}{|\omega|}, \qquad \text{para } \omega \neq 0$$

y

$$\phi(\omega) = \operatorname{Arg}\left(\frac{2}{j\omega}\right) = \begin{cases} \pi/2, & \omega < 0, \\ -\pi/2, & \omega > 0. \end{cases}$$

Ejemplo

Determine los espectros de magnitud y fase de la función $f(t) = \delta(t)$.

Solución. Se tiene que la transformada de Fourier de $f(t) = \delta(t)$ está dada por

$$F(\omega) = 1.$$

Entonces,

$$A(\omega) = 1, \qquad \text{para } \omega \in \mathbb{R}.$$

y

$$\phi(\omega) = 0, \qquad \text{para } \omega \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio

Determine los espectros de magnitud y fase de la función

$$f(t) = e^{-|t|}$$

Transformada de Laplace

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica
Departamento de Electrónica, Computación y Control

Variable Compleja y Cálculo Operacional

Marzo, 2013

Contenido

Definición 3

Existencia 4

Propiedades 5

Transformada Inversa de Laplace 12

- Integración de Contornos 13
- Inversión por Tablas 17

Definición

Definición 1 (Transformada de Laplace Bilateral). *Se define la* ***transformada de Laplace bilateral*** *de una función $f(t)$ de dominio continuo como*

$$F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt,$$

para todo $s \in D \subset \mathbb{C}$, donde D se denomina región de convergencia.

Definición 2 (Transformada de Laplace Unilateral). *Se define la* ***transformada de Laplace unilateral*** *de una función $f(t)$ de dominio continuo como*

$$\mathscr{L}_U(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt,$$

para todo $s \in D \subset \mathbb{C}$.

Observaciones:

- La transformada de Laplace es una función analítica en todo $s \in \mathbb{C}$ perteneciente a su región de convergencia.
- En general, la expresión matemática de la transformada de Laplace se calcula utilizando la teoría de integración compleja.
- La región de convergencia de la transformada de Laplace de $f(t)$ es el conjunto de números complejos s donde $F(s)$ existe, en otras palabras, que se cumpla $|F(s)| < \infty$.

Existencia

Para que exista la transformada de Laplace de la función $f(t)$ se debe satisfacer

$$|F(s)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \right| < \infty, \tag{1}$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ perteneciente a la región de convergencia D.

Ahora, colocando $s = \sigma + j\omega$, entonces (1) adquiere la forma

$$|F(s)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-(\sigma+j\omega)}\, dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\; e^{-\sigma t}\, dt < \infty. \qquad (2)$$

Por lo tanto, los valores de $\sigma = \operatorname{Re} s$ que satisfacen la ecuación (2), determinan explícitamente la región de convergencia de $F(s)$.

Propiedades

Proposición 1 (Linealidad).
Sea $f_k(t)$ una función de dominio continuo con transformada de Laplace dada por $F_k(s) = \mathscr{L}[f_k(t)]$, para todo $s \in D_k \subset \mathbb{C}$, y $k = 1, 2, \ldots, n$. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\mathscr{L}\left[\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(t)\right] = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathscr{L}[f_k(t)] = \sum_{k=1}^{n} a_k F_k(s) \qquad \forall s \in \bigcap_{k=1}^{n} D_k.$$

Proposición 2 (Desplazamiento en tiempo).
Sea $f(t)$ una función de dominio continuo con transformada de Laplace dada por $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$, para todo $s \in D \subset \mathbb{C}$. Sea $t_0 \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\mathscr{L}\left[f(t-t_0)\right] = e^{-t_0 s} F(s) \qquad \forall s \in D.$$

Proposición 3 (Desplazamiento en el dominio de s).
Sea $f(t)$ una función de dominio continuo con transformada de Laplace dada por $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$, para todo $s \in D \subset \mathbb{C}$. Sea $s_0 \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\mathscr{L}\left[e^{s_0 t} f(t)\right] = F(s - s_0),$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $(s - s_0) \in D$.

Proposición 4 (Escalamiento en tiempo).
Sea $f(t)$ una función de dominio continuo con transformada de Laplace dada por $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$, para todo $s \in D \subset \mathbb{C}$. Sea $a \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\mathscr{L}\left[f(at)\right] = \frac{1}{|a|} F(s/a),$$

para todo $s \in \mathbb{C}$ tal que $(s/a) \in D$.

Proposición 5 (Conjugación).
Sea $f(t)$ una función de dominio continuo con transformada de Laplace dada por $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$, para todo $s \in D \subset \mathbb{C}$. Entonces,

$$\mathscr{L}\left[\overline{f(t)}\right] = \overline{F(\overline{s})} \qquad \forall s \in D.$$

Proposición 6 (Convolución).
Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones de dominio continuo con transformadas de Laplace dadas respectivamente por $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ para todo $s \in D_f \subset \mathbb{C}$, y $G(s) = \mathscr{L}[g(t)]$ para todo $s \in D_g \subset \mathbb{C}$. Entonces,

$$\mathscr{L}\left[f * g\,(t)\right] = F(s)\,G(s) \qquad \forall s \in D_f \cap D_g.$$

Proposición 7 (Diferenciación en el dominio del tiempo). *Sea $f(t)$ una función de dominio continuo con transformada de Laplace dada por $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$, para todo $s \in D \subset \mathbb{C}$. Si $f(t)$ es derivable, entonces*

$$\mathscr{L}\left[\frac{d}{dt}\,f(t)\right] = s\,F(s) \qquad \forall s \in D.$$

Proposición 8 (Diferenciación en el dominio de s). *Sea $f(t)$ una función de dominio continuo con transformada de Laplace dada por $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$, para todo $s \in D \subset \mathbb{C}$. Entonces,*

$$\mathscr{L}\left[t\, f(t)\right] = \frac{d}{ds} F(s) \qquad \forall s \in D.$$

Proposición 9 (Integración). *Sea $f(t)$ una función de dominio continuo con transformada de Laplace dada por $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$, para todo $s \in D \subset \mathbb{C}$. Entonces,*

$$\mathscr{L}\left[\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\, d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s) \qquad \forall s \in D.$$

Proposición 10 (**Teorema del Valor Inicial**). *Sea $f(t)$ una función de dominio continuo con transformada de Laplace dada por $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$, para todo $s \in D \subset \mathbb{C}$. Supongamos que $f(t) = 0$ para $t < 0$ y f(t) es continua a trozos para $t \geq 0$. Entonces,*

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s).$$

Proposición 11 (**Teorema del Valor Final**). *Sea $f(t)$ una función de dominio continuo con transformada de Laplace dada por $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$, para todo $s \in D \subset \mathbb{C}$. Supongamos que $f(t) = 0$ para $t < 0$ y f(t) es continua a trozos para $t \geq 0$. Entonces,*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s).$$

Ejemplo

A continuación se muestran algunas funciones y la transformada de Laplace de las mismas.

1) $f(t) = \delta(t) \quad \xrightarrow{\mathscr{L}} \quad F(s) = 1, \quad s \in \mathbb{C}.$

2) $f(t) = u(t) \quad \xrightarrow{\mathscr{L}} \quad F(s) = \dfrac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$

3) $f(t) = -u(-t) \quad \xrightarrow{\mathscr{L}} \quad F(s) = \dfrac{1}{s}, \quad \operatorname{Re} s < 0.$

4) $f(t) = e^{-\alpha t}u(t),\ \alpha \in \mathbb{C} \quad \xrightarrow{\mathscr{L}} \quad F(s) = \dfrac{1}{s+\alpha}, \quad \operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} \alpha.$

5) $f(t) = -t\,u(t) \quad \xrightarrow{\mathscr{L}} \quad F(s) = \dfrac{1}{s^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$

6) $f(t) = \operatorname{sen} t\, u(t) \quad \xrightarrow{\mathscr{L}} \quad F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$

7) $f(t) = \cos t\, u(t) \quad \xrightarrow{\mathscr{L}} \quad F(s) = \dfrac{s}{s^2+1}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$

Transformada Inversa de Laplace

Definición 3. *Sea $f(t)$ una función de dominio continuo con transformada de Laplace dada por $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$, para todo $s \in D \subset \mathbb{C}$. La transformada inversa de Laplace es el proceso de obtener $f(t)$ a través de $F(s)$ y se define como*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)e^{st}\, ds. \tag{3}$$

Observaciones:

- La integral de la Ecuación (3) se evalúa en la recta del plano complejo $\sigma + j\omega$ desde $\sigma - j\infty$ hasta $\sigma + j\infty$, siendo σ un número real fijo que cumpla que $\operatorname{Re} s = \sigma$ esté en el interior de D.
- Se utilizarán dos métodos para calcular la transformada inversa de Laplace: *Integración de Contornos*, e *Inversión por Tablas*.

Integración de Contornos

Expliquemos este método mediante un ejemplo.

Ejemplo

Determine la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{1}{s+2}, \qquad \mathrm{Re}\, s > -2.$$

Solución. Consideremos el contorno cerrado simple C formado por el contorno C_1, el arco de la circunferencia

$$z(t) = R\, e^{jt}, \qquad \pi/2 \leq t \leq 3\pi/2,$$

y el contorno C_2 dado por el segmento de recta

$$z(t) = j\, t, \qquad -R \leq t \leq R,$$

con $R > 0$.

Se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi j}\int_C e^{st}F(s)\,ds &= \frac{1}{2\pi j}\int_{C_1} e^{st}F(s)\,ds+\frac{1}{2\pi j}\int_{C_2} e^{st}F(s)\,ds\\ &= \frac{1}{2\pi j}\int_{C_1}\frac{e^{st}}{s+2}\,ds+\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-jR}^{\sigma+jR}\frac{e^{st}}{s+2}\,ds\end{aligned}$$

Se deja como ejercicio para el lector verificar que, para $t\geq 0$,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_1}\frac{e^{st}}{s+2}\,ds=0.$$

Ahora, tomando límite cuando $R\to\infty$, obtenemos

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\frac{e^{st}}{s+2}\,ds=\frac{1}{2\pi j}\int_{C}\frac{e^{st}}{s+2}\,ds=\operatorname*{Res}_{s=-2}\left[\frac{e^{st}}{s+2}\right]=e^{-2t}.$$

De esta forma,

$$f(t) = e^{-2t}, \qquad \text{para } t \geq 0.$$

Como un ejercicio interesante se deja al lector demostrar la siguiente proposición.

Proposición 12. *Sea $F(s)$ la transformada de Laplace de $f(t)$, con región de convergencia dada por $\operatorname{Re} s > -a$, donde $a > 0$. Si $|F(s)| < b|s|^{-m}$ para $b > 0$, un entero $m > 0$, y $R_0 > 0$ tal que $|s| > R_0$, entonces $f(t) = 0$, para $t < 0$.*

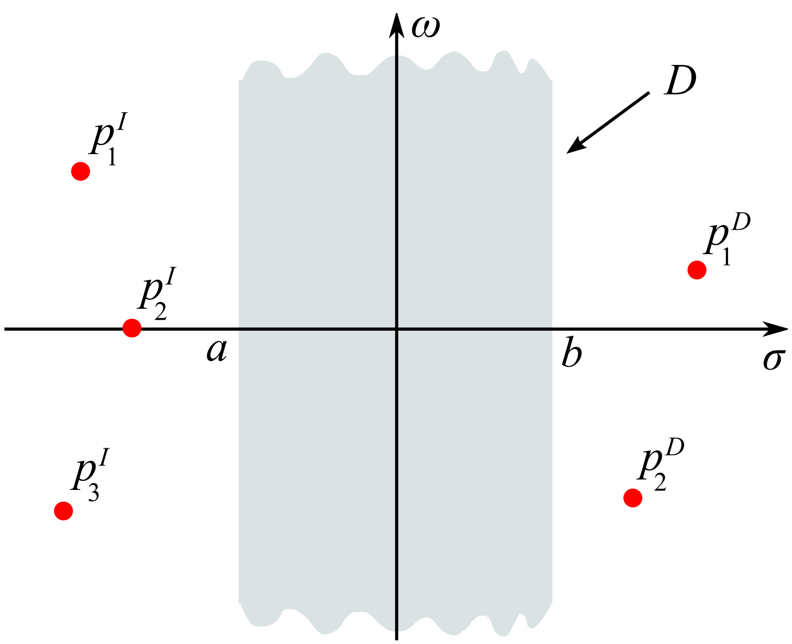
Ayuda: El razonamiento es similar al que usamos anteriormente. Utilice un contorno cerrado simple C apropiado y el hecho que $|F(s)| < 1/|s|$.

Como $|F(s)| = 1/|s+2| < |s|^{-1}$ para $|s| > 2$, entonces por la Proposición 12, la transformada inversa de Laplace de $F(s)$ es

$$f(t) = e^{-2t}u(t).$$

Proposición 13. *Sea $F(s)$ la transformada de Laplace de $f(t)$ con región de convergencia dada por $a < \operatorname{Re} s < b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Sean p_k^I los polos ubicados a la izquierda de la región de convergencia, para $k = 1, \ldots, n_I$, y sean p_k^D los polos ubicados a la derecha de la región de convergencia, para $k = 1, \ldots, n_D$. Entonces, la transformada inversa de Laplace está dada por*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n_I} \operatorname*{Res}_{s=p_k^I} \left[e^{st} F(s)\right] u(t) - \sum_{k=1}^{n_D} \operatorname*{Res}_{s=p_k^D} \left[e^{st} F(s)\right] u(-t).$$



Inversión por Tablas

Sea $F(s)$, para $s \in D \subset \mathbb{C}$, la transformada de Laplace de $f(t)$.

El método de ***inversión por tablas*** consiste en expresar a $F(s)$ como la suma

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_R(s), \tag{4}$$

donde $F_1(s), F_2(s), \ldots, F_R(s)$ son funciones tales que se les conoce su transformada inversa de Laplace $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_R(t)$.

Entonces, la transformada inversa de Laplace de $F(s)$ viene dada por

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \cdots + f_R(t).$$

Observación

- Con mucha frecuencia se consigue con transformadas de Laplace $F(s)$ racionales. A este tipo de transformadas le prestaremos una mayor atención.

Sea $F(s)$ una función racional propia, esto es,

$$F(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n}, \tag{5}$$

donde $a_n \neq 0$ y $m < n$.

Cuando $F(s)$ es racional, la expansión (4) se denomina *expansión en fracciones parciales*.

Ejemplo

Determine la transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{144s^2 + 144s + 144}{(s-3)^2(s-2)^2(s+1)}, \qquad 2 < \operatorname{Re} s < 3.$$

Solución. La expansión en fracciones parciales de $F(s)$ es de la forma

$$F(s) = \frac{A_1}{(s+1)} + \frac{A_{2,1}}{(s-2)} + \frac{A_{2,2}}{(s-2)^2} + \frac{A_{3,1}}{(s-3)} + \frac{A_{3,2}}{(s-3)^2},$$

donde

$$\begin{aligned} A_1 &= \operatorname*{Res}_{s=-1}[F(s)] = 1, \\ A_{2,2} &= \left[(s-2)^2 F(s)\right]_{s=2} = 336, \\ A_{2,1} &= \left[\frac{d}{ds}[(s-2)^2 F(s)]\right]_{s=2} = 800, \\ A_{3,2} &= \left[(s-3)^2 F(s)\right]_{s=3} = 468, \\ A_{3,1} &= \left[\frac{d}{ds}[(s-3)^2 F(s)]\right]_{s=3} = -801. \end{aligned}$$

Así,

$$f(t) = \left(e^{-t} + 800\, e^{2t} + 336\, te^{2t}\right)\, u(t) + \left(801\, e^{3t} - 468\, te^{3t}\right)\, u(-t).$$

La transformada inversa de Laplace de $F(s)$ también se puede obtener utilizando la expresión:

$$f(t) = \left(\operatorname*{Res}_{s=-1} \left[e^{st} F(s) \right] + \operatorname*{Res}_{s=2} \left[e^{st} F(s) \right] \right) u(t) - \left(\operatorname*{Res}_{s=3} \left[e^{st} F(s) \right] \right) u(-t),$$

donde

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{s=-1} \left[e^{st} F(s) \right] &= e^{-t}, \\ \operatorname*{Res}_{s=2} \left[e^{st} F(s) \right] &= e^{2t} (336\, t + 800), \\ \operatorname*{Res}_{s=3} \left[e^{st} F(s) \right] &= e^{3t} (468\, t - 801). \end{aligned}$$

Transformada $\mathscr{Z}$

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica
Departamento de Electrónica, Computación y Control
Variable Compleja y Cálculo Operacional

Marzo, 2013

Contenido

Definición 3

Propiedades 6

Transformada z Inversa 10

Integración Compleja 11

Expansión en Serie de Potencias 13

Inversión con Tablas 15

Definición

Definición 1 (Transformada z bilateral)**.** *Sea $f(n)$ una función de dominio discreto. La* ***transformada*** *z* ***bilateral*** *de $f(n)$ se define como*

$$F(z) = \mathscr{Z}[f(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n},$$

para $z \in D \subset \mathbb{C}$, donde D se denomina región de convergencia.

Definición 2 (Transformada z unilateral)**.** *Sea $f(n)$ una función de dominio discreto. La* ***transformada*** *z* ***unilateral*** *de $f(n)$ se define como*

$$F(z) = \mathscr{Z}_U[f(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n},$$

para $z \in D \subset \mathbb{C}$.

Observaciones

- La transformada z es analítica en su región de convergencia.

- La región de convergencia de la transformada z, $F(z)$, es el conjunto de todos los números complejos z para los que $F(z)$ es finita, esto es,

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |F(z)| < \infty\}.$$

- De la definición de la transformada z se infiere que $f(n)$ son los coeficientes del desarrollo en serie de Laurent de $F(z)$ centrado en $z_0 = 0$, válido en D. Además, $F(z)$ es la suma de la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n}$.

- La región de convergencia de la transformada z es un anillo centrado en el origen.

Ejemplo

Calcular las transformadas z bilateral y unilateral de la función

$$f(n) = a^n u(n+1), \qquad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Solución. La transformada z bilateral de $f(n)$ es

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n+1) z^{-n} \\ &= \frac{z^2}{a(z-a)}, \qquad |z| > |a|, \end{aligned}$$

y la transformada z unilateral es

$$\begin{aligned} \mathscr{Z}_U[f(n)](z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n u(n+1) z^{-n} \\ &= \frac{z}{z-a}, \qquad |z| > |a|. \end{aligned}$$

Propiedades

Sean $f(n)$ y $g(n)$ dos funciones de dominio discreto con transformada z $F(z)$ para $z \in D_f$ y $G(z)$ para $z \in D_g$, respectivamente. Las siguientes propiedades se cumplen:

- *Linealidad*

$$a\, f(n) + b\, g(n) \qquad \stackrel{\mathscr{Z}}{\longrightarrow} \qquad a\, F(z) + b\, G(z),\ z \in D_f \cap D_g$$

- *Desplazamiento en tiempo*

$$f(n - n_0) \qquad \stackrel{\mathscr{Z}}{\longrightarrow} \qquad z^{-n_0}\, F(z),\ z \in D_f$$

- *Inversión en el tiempo*

$$f(-n) \qquad \stackrel{\mathscr{Z}}{\longrightarrow} \qquad F(z^{-1}),\ \{z \in \mathbb{C} : z^{-1} \in D_f\}$$

- *Escalamiento en el dominio de z*

$$e^{j\omega_0 n} f(n) \xrightarrow{\mathscr{Z}} F\left(e^{-j\omega_0} z\right), \; z \in D_f$$

$$z_0^n f(n) \xrightarrow{\mathscr{Z}} F\left(z/z_0\right), \; \{z \in \mathbb{C} : z/z_0 \in D_f\}$$

$$a^n f(n) \xrightarrow{\mathscr{Z}} F\left(a^{-1} z\right), \; \{z \in \mathbb{C} : z/|a| \in D_f\}$$

- *Conjugación*

$$\overline{f(n)} \xrightarrow{\mathscr{Z}} \overline{F(\overline{z})}, \; z \in D_f$$

- *Convolución*

$$f * g\,(n) \xrightarrow{\mathscr{Z}} F(z)\,G(z), \; z \in D_f \cap D_g$$

- *Primera diferencia*

$$f(n) - f(n-1) \xrightarrow{\mathscr{Z}} \left(\frac{z-1}{z}\right) F(z), \; z \in D_f \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0\}$$

- *Acumulación*

$$\sum_{k=-\infty}^{n} f(k) \quad \xrightarrow{\mathscr{Z}} \quad \left(\frac{z}{z-1}\right) F(z),\ z \in D_f \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}.$$

- *Diferenciación en el dominio de z*

$$n\, f(n) \quad \xrightarrow{\mathscr{Z}} \quad -z\, \frac{d}{dz} F(z),\ z \in D_f$$

- *Teorema del valor inicial*

Si $f(n) = 0$, para $n < 0$, entonces

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

Ejemplo

A continuación se muestran algunas funciones y la transformada z de las mismas.

1) $\delta(n) \xrightarrow{\mathscr{Z}} 1,\ z \in \mathbb{C}$

2) $u(n) \xrightarrow{\mathscr{Z}} \dfrac{z}{z-1},\ |z| > 1$

3) $-u(-n-1) \xrightarrow{\mathscr{Z}} \dfrac{z}{z-1},\ |z| < 1$

4) $\alpha^n u(n) \xrightarrow{\mathscr{Z}} \dfrac{z}{z-\alpha},\ |z| > |\alpha|$

5) $-\alpha^n u(-n-1) \xrightarrow{\mathscr{Z}} \dfrac{z}{z-\alpha},\ |z| < |\alpha|$

6) $n\,\alpha^n u(n) \xrightarrow{\mathscr{Z}} \dfrac{\alpha\, z}{(z-\alpha)^2},\ |z| > |\alpha|$

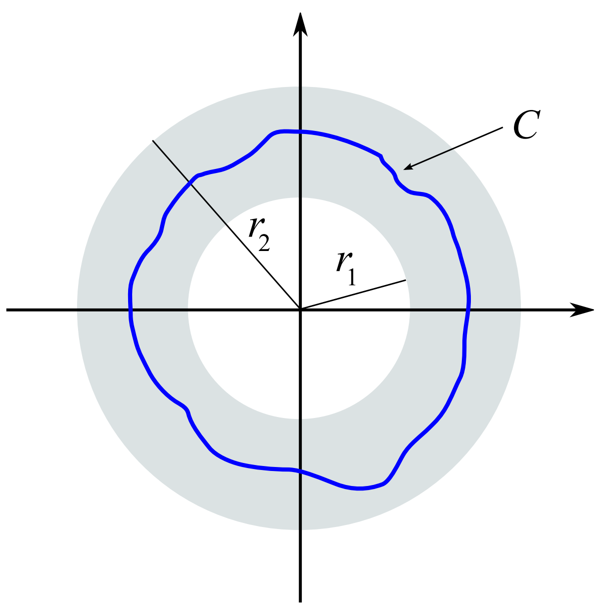
7) $-n\,\alpha^n u(-n-1) \xrightarrow{\mathscr{Z}} \dfrac{\alpha\, z}{(z-\alpha)^2},\ |z| < |\alpha|$

Transformada z Inversa

Sea $f(n)$ una función de dominio discreto cuya transformada z es $F(z)$ para $r_1 < |z| < r_2$. La transformada z inversa es el proceso de obtener $f(n)$ a través de $F(z)$ y se define como:

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_C F(z)\, z^{n-1}\, dz, \quad \text{para cada } n,$$

donde C es un contorno cerrado simple contenido en el anillo $r_1 < |z| < r_2$ y que confina la circunferencia $|z| = r_1$.



Nos centraremos en tres métodos alternativos para calcular la transformada z inversa: Integración Compleja, Inversión con Tablas y Expansión en Serie de Potencias.

Integración Compleja

Aquí se utiliza la definición de la transformada z inversa. Para ello se emplea la fórmula integral de Cauchy o el Teorema de los Residuos.

Ejemplo

Calcular la transformada z inversa de

$$F(z) = \frac{z}{z-a}, \qquad |z| > |a|.$$

Solución. Sea C la circunferencia $|z| = r > |a|$. Así,

$$f(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_C F(z)\, z^{n-1}\, dz = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{z^n}{z-a}\, dz$$

Supongamos que $n \geq 0$. Aplicando el Teorema de los Residuos obtenemos

$$f(n) = \operatorname*{Res}_{z=a}\left[\frac{z^n}{z-a}\right] = a^n.$$

Cuando $n < 0$, entonces aplicamos nuevamente el Teorema de los Residuos

$$f(n) = \operatorname*{Res}_{z=0}\left[\frac{z^n}{z-a}\right] + \operatorname*{Res}_{z=a}\left[\frac{z^n}{z-a}\right] = -a^n + a^n = 0.$$

Por lo tanto, la transformada z inversa de $F(z)$ es

$$f(n) = a^n u(n).$$

Expansión en Serie de Potencias

Sea $f(n)$ una función de dominio discreto cuya transformada z es $F(z)$, $a < |z| < b$. El procedimiento *expansión en serie de potencias* consiste en encontrar el desarrollo de Laurent de $F(z)$ centrado en $z_0 = 0$, luego definir a $f(n)$ como los coeficientes de esta serie de potencias.

Ejemplo

Determinar la transformada z inversa de

$$F(z) = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}, \qquad |z| > 1.$$

Solución. Escribiendo $F(z)$ en potencias positivas se obtiene

$$F(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}.$$

Luego,

$$F(z) = z\left[\frac{1}{4}\,\frac{1}{(z+1)} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{(z-1)} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(z-1)^2}\right], \qquad |z| > 1.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\frac{z}{z+1} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n u(n)\, z^{-n},\\
\frac{z}{z-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(n)\, z^{-n},\\
\frac{z}{(z-1)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} n\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\, u(n)\, z^{-n},
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la transformada z inversa de $F(z)$ es

$$f(n) = \frac{1}{4}\,(-1)^n u(n) + \frac{3}{4}\,u(n) + \frac{1}{2}\,n\,u(n).$$

Inversión con Tablas

Este método consiste en expresar a $F(z)$ como una suma de la forma

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) + \cdots + F_R(z), \tag{1}$$

donde $F_1(z), F_2(z), \ldots, F_R(z)$, son funciones tales que se les conoce su transformada z inversa $f_1(n), f_2(n), \ldots, f_R(n)$.

De esta forma, la transformada z inversa de $F(z)$ está dada por

$$f(n) = f_1(n) + f_2(n) + \cdots + f_R(n).$$

Observación

- Cuando $F(z)$ es una función racional se emplea la expansión en fracciones parciales para obtener la descomposición (1).

Ejemplo

Determinar la transformada z inversa de

$$F(z) = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}, \qquad |z| > 1.$$

Solución. Escribiendo $F(z)$ en potencias positivas se obtiene

$$F(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}.$$

Ahora, aplicando la expansión en fracciones parciales a

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$$

se tiene que

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{A_1}{(z+1)} + \frac{A_{2,1}}{(z-1)} + \frac{A_{2,2}}{(z-1)^2},$$

donde

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \left[(z+1)\,\frac{F(z)}{z}\right]\Big|_{z=-1} = \frac{1}{4}, \\
A_{2,1} &= \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\,\frac{F(z)}{z}\right]\Big|_{z=1} = \frac{3}{4}, \\
A_{2,2} &= \left[(z-1)^2\,\frac{F(z)}{z}\right]\Big|_{z=1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

De esta forma,

$$
F(z) = \frac{1}{4}\,\frac{z}{(z+1)} + \frac{3}{4}\,\frac{z}{(z-1)} + \frac{1}{2}\,\frac{z}{(z-1)^2}, \qquad |z| > 1.
$$

Por lo tanto, la transformada z inversa de $F(z)$ es

$$
f(n) = \frac{1}{4}\,(-1)^n u(n) + \frac{3}{4}\,u(n) + \frac{1}{2}\,n\,u(n).
$$