Dilatación unitaria de semigrupos locales de contracciones con parámetro en los racionales diádicos

Autor: MSc. Angel Padilla

Cumaná, Marzo 2012

A continuación se fija algo de la notación que se utilizará en el desarrollo de éste trabajo.

Como es usual $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+, \mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{C}$ representan el conjunto de los números naturales, enteros, racionales, racionales positivos, reales, reales positivos y complejos, respectivamente.

En lo que sigue:

$\mathcal{H}$ será un espacio de Hilbert (salvo que se indique lo contrario supondremos que $\mathcal{H}$ es complejo) con producto interno $\langle , \rangle_{\mathcal{H}}$ y norma $\| \|_{\mathcal{H}}$.

$L(\mathcal{H}) = \{T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que T es un operador lineal continuo $\}$.

Δ denotará un subgrupo de los números reales y

$$\Delta_+ = \Delta \cap \mathbb{R}_+$$

1. Semigrupos de operadores.

Definición. Un *semigrupo de operadores* con parámetro en Δ_+, es una familia de operadores $(U_\omega)_{\omega\in\Delta_+} \subset L(\mathcal{H})$ que satisface:

(a) $U_{\omega_1+\omega_2} = U_{\omega_1}U_{\omega_2}$ para todo $\omega_1, \omega_2 \in \Delta_+$.

(b) $U_0 = I_{\mathcal{H}}$.

Se dice que el semigrupo de operadores es de *contracción* si U_ω es una contracción para todo $\omega \in \Delta_+$.

Definición. Un *grupo de operadores* con parámetro en Δ, es una familia de operadores $(U_\omega)_{\omega\in\Delta} \subset L(\mathcal{H})$ que satisface:

(a) $U_{\omega_1+\omega_2} = U_{\omega_1}U_{\omega_2}$ para todo $\omega_1, \omega_2 \in \Delta$

(b) $U_0 = I_{\mathcal{H}}$.

Se dice que el grupo de operadores es *unitario* si U_ω es un operador unitario para todo $\omega \in \Delta$. En este caso,

$$U_\omega^* = U_{-\omega} \text{ para todo } \omega \in \Delta.$$

Definición. Sea $(U_\omega)_{\omega\in\Delta} \subset L(\mathcal{H})$ un grupo de operadores. Se dice que $(U_\omega)_{\omega\in\Delta}$ es:

(a) *Fuertemente continuo* si, para cada $h \in \mathcal{H}$, la aplicación $\omega \longmapsto U_\omega h$ de Δ en $\mathcal{H}$ es continua.

(b) *Débilmente continuo* si, para cada $h, h' \in \mathcal{H}$, la aplicación $\omega \longmapsto \langle U_\omega h, h' \rangle_{\mathcal{H}}$ de Δ en $\mathbb{C}$ es continua.

(c) *Uniformemente fuertemente continuo* si, para cada $h \in \mathcal{H}$, la aplicación $\omega \longmapsto U_\omega h$ de Δ en $\mathcal{H}$ uniformemente continua.

Si el grupo de operadores es unitario, las condiciones anteriores son equivalentes.

2. Dilatación unitaria de un semigrupo de contracciones.

Definición. Sean $\mathcal{H}, \mathfrak{F}$ dos espacios de Hilbert tales que $\mathfrak{F}$ contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado. Sean $(T_\omega)_{\omega\in\Delta_+} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo de operadores y $(U_\omega)_{\omega\in\Delta} \subset L(\mathfrak{F})$ un grupo de operadores. Se dice que $(U_\omega)_{\omega\in\Delta}$ es una *dilatación* de $(T_\omega)_{\omega\in\Delta_+}$ si

$$T_\omega = P^{\mathfrak{F}}_{\mathcal{H}} U_\omega, \text{ para todo } \omega \in \Delta_+.$$

donde $P^{\mathfrak{F}}_{\mathcal{H}}$ es la proyección ortogonal de $\mathfrak{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

La versión continua del teorema de dilatación de Sz.-Nagy establece que todo semigrupo de contracciones en un espacio de Hilbert, con parámetro en $\mathbb{R}_+$, tiene una única dilatación unitaria minimal. En detalle

Teorema (Sz.-Nagy)**.** *Sea $(T_\omega)_{\omega\in\mathbb{R}_+} \subset L(\mathcal{H})$ un semigrupo fuertemente continuo de contracciones, entonces existe un espacio de Hilbert $\mathfrak{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un grupo fuertemente continuo $(U_\omega)_{\omega\in\mathbb{R}} \subset L(\mathfrak{F})$, de operadores unitarios tales que*

$$T_\omega = P^{\mathfrak{F}}_{\mathcal{H}} U_\omega|_{\mathcal{H}}, \text{ para todo } \omega \in \mathbb{R}_+.$$

Si se pide la condición de minimalidad

$$\mathfrak{F} = \bigvee_{\omega \in \mathbb{R}} U_\omega(\mathcal{H})$$

entonces, $(U_\omega)_{\omega \in \mathbb{R}}$ *es único salvo isomorfismos.*

3. Funciones definidas positivas a valores operadores.

Definición. Sea $F : \Delta \longrightarrow L(\mathcal{H})$ una función. Se dice que F es *definida positiva* si

$$\sum_{x,y \in \Delta} \langle\, F(x-y)h(x), h(y) \rangle \geq 0,$$

para toda función $h : \Delta \longrightarrow \mathcal{H}$ de soporte finito.

Proposición (1)**.** *Sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$ dos espacios de Hilbert tales que $\mathcal{G}$ contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado. Si $(U_\omega)_{\omega \in \Delta} \subset L(\mathcal{G})$ es un grupo de operadores unitarios, entonces la función $F : \Delta \longrightarrow L(\mathcal{H})$, definida por*

$$F(\omega) = P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}} U_\omega|_{\mathcal{H}}$$

es definida positiva.

El Teorema de Naimark establece que toda función definida positiva en Δ a valores operadores es de la forma anterior. En detalle,

Teorema (Naimark). *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $F : \Delta \longrightarrow L(\mathcal{H})$ una función definida positiva tal que $F(0) = I_{\mathcal{H}}$. Entonces*

(a) *Existen un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un grupo unitario $(U_\omega)_{\omega\in\Delta} \subset L(\mathcal{G})$ tal que*

$$F(\omega) = P^{\mathcal{G}}_{\mathcal{H}} U_\omega|_{\mathcal{H}} \quad \textit{para todo } \omega \in \Delta.$$

(b) *Si adicionalmente se supone que*

$$\mathcal{G} = \bigvee_{\omega\in\Delta} U_\omega(\mathcal{H}),$$

entonces el grupo unitario $(U_\omega)_{\omega\in\Delta}$ es único salvo isomorfismos. (En este caso se dice que $(U_\omega)_{\omega\in\Delta}$ es la dilatación unitaria minimal de F).

(c) *Si Δ es un espacio topológico y F es débilmente continua, entonces su dilatación unitaria minimal es fuertemente continua..*

Lema (1). *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ una contracción. Entonces la función $F : \mathbb{Z} \longrightarrow L(\mathcal{H})$, definida por*

$$F(n) = \begin{cases} T^n & si \;\; n \geq 0 \\ T^{*-n} & si \;\; n < 0 \end{cases}$$

es definida positiva.

Observación. Combinando el lema anterior con el Teorema de Naimark se puede probar la existencia de la dilatación unitaria de una contracción.

4. Dilatación unitaria de semigrupos locales de contracciones.

En lo que sigue $\mathcal{D}$ representará el conjunto de los racionales diádicos, es decir

$$\mathcal{D} = \left\{ \frac{k}{2^n} \ : \ k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ sea

$$\mathcal{D}_m = \left\{ \frac{k}{2^m} \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

y sean $\mathcal{D}^+ = \{s \in \mathcal{D} \ : \ s \geq 0\}$ y $\mathcal{D}_m^+ = \{s \in \mathcal{D}_m \ : \ s \geq 0\}$.

En lo que sigue Ω denotará $\mathbb{R}$ ó $\mathcal{D}$.

Dado $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, sea $\Sigma = [0, a) \cap \Omega$.

La siguiente definición generaliza la definición de semigrupo de contracciones.

Definición. Un *semigrupo local de contracciones* en $\mathcal{H}$ es una familia $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in\Sigma}$ tal que:

(a) Para cada $t \in \Sigma$ se tiene que $\mathcal{H}_t$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$.

(b) Para cada $t \in \Sigma$ se tiene que $T_t : \mathcal{H}_t \to \mathcal{H}$ es una contracción lineal y $T_0 = I_{\mathcal{H}}$.

(c) Si $x, y \in \Sigma$ y $x < y$ entonces $\mathcal{H}_y \subset \mathcal{H}_x$.

(d) Si $x, y \in \Sigma$ y $x + y \in \Sigma$ entonces $T_y\mathcal{H}_{x+y} \subset \mathcal{H}_x$ y $T_{x+y}h = T_xT_yh$ para todo $h \in \mathcal{H}_{x+y}$.

(e) Si $x \in \Sigma$ entonces $\bigcup_{t\in\Sigma\cap(x,a)} \mathcal{H}_t$ es denso en $\mathcal{H}_x$.

Se dice que el semigrupo local de contracciones $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in\Sigma}$ es *fuertemente continuo* si para $t_0 \in \Sigma$ y $h \in \mathcal{H}_{t_0}$ la función $t \mapsto T_th$ de $\Sigma \cap [0, t_0]$ en $\mathcal{H}$ es continua.

Definición. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in\Sigma}$ un semigrupo local de contracciones en $\mathcal{H}$. Sean $\mathfrak{F}$ un espacio de Hilbert y $(U_t)_{t\in\Omega} \subset L(\mathfrak{F})$ un grupo de operadores unitarios. Se dice que $(U_t)_{t\in\Omega}$ es una *dilatación unitaria* del semigrupo $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in\Sigma}$ si $\mathfrak{F}$ contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y

$$T_t = P_{\mathcal{H}}^{\mathfrak{F}} U_t|_{\mathcal{H}_t} \quad \text{para todo } \ t \in \Sigma,$$

donde $P_{\mathcal{H}}^{\mathfrak{F}}$ es la proyección ortogonal de $\mathfrak{F}$ sobre $\mathcal{H}$.

De ahora en adelante se considerará $a = 1$. Es importante destacar que suponer $a = 1$ no es ninguna restricción. Veremos más adelante que con un simple cambio de variable se puede pasar del caso $a = 1$ al caso general $a > 0$.

Sean $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert y $(T_s, \mathcal{H}_s)_{s\in\mathcal{D}^+\cap[0,1)}$ un semigrupo local de contracciones en $\mathcal{H}$.

Para $s \in \mathcal{D}^+ \cap [0, 1)$ se define $V_s : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ por

$$V_s = T_s P_{\mathcal{H}_s}^{\mathcal{H}}.$$

Lema (2)**.** *Si $m, k \in \mathbb{N}$ y $k < 2^m$ entonces*

$$\left(V_{\frac{1}{2^m}}\right)^k \Big|_{\mathcal{H}_{\frac{k}{2^m}}} = T_{\frac{k}{2^m}}.$$

Demostración.

Se procederá por inducción. Para $k = 2$.

Sea $h \in \mathcal{H}_{\frac{2}{2^m}}$. Entonces $h \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2^m}}$, y como $\mathcal{H}_{\frac{2}{2^m}} = \mathcal{H}_{\frac{1}{2^m}+\frac{1}{2^m}}$ entonces $T_{\frac{1}{2^m}} h \in \mathcal{H}_{\frac{1}{2^m}}$, por lo tanto $P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}_{\frac{1}{2^m}}} h = h$ y $P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}_{\frac{1}{2^m}}} T_{\frac{1}{2^m}} h = T_{\frac{1}{2^m}} h$, luego

$$\begin{aligned}\left(V_{\frac{1}{2^m}}\right)^2 h &= \left(T_{\frac{1}{2^m}} P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}_{\frac{1}{2^m}}}\right)\left(T_{\frac{1}{2^m}} P^{\mathcal{H}}_{\mathcal{H}_{\frac{1}{2^m}}}\right) h \\ &= T_{\frac{1}{2^m}} T_{\frac{1}{2^m}} h = T_{\frac{2}{2^m}} h.\end{aligned}$$

□

Para $m \in \mathbb{N}$ se define $V^{(m)} = \left(V^{(m)}_s\right)_{s \in \mathcal{D}^+_m}$ por

$$V^{(m)}_{\frac{k}{2^m}} = \left(V_{\frac{1}{2^m}}\right)^k.$$

Se tiene que $\left(V_s^{(m)}\right)_{s\in\mathcal{D}_m^+}$ es un semigrupo de contracciones.

Proposición (2)**.** *La función* $F^{(m)} : \mathcal{D}_m \to L(\mathcal{H})$ *definida por*

$$F^{(m)}(s) = \begin{cases} V_s^{(m)} & \text{si s} \geq 0, \\ \left(V_{-s}^{(m)}\right)^* & \text{si s} < 0, \end{cases}$$

es definida positiva.

Demostración.

Considerando el isomorfismo natural entre el grupo $\mathcal{D}_m$ y el grupo de los enteros $\mathbb{Z}$ el resultado se obtiene a partir del Lema (1).

$\square$

Proposición (3). *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(\mathcal{H})$ una sucesión de operadores uniformemente acotada. Sea $\{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ denso. Si $\{T_n h_k\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente para todo k, entonces $\{T_n h\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente para todo $h \in \mathcal{H}$.*

Proposición (4). *Sean Γ un espacio topológico y Λ un conjunto numerable de índices. Sea $\{X_\alpha(n)\}_{n=1}^{\infty}, \alpha \in \Lambda$ una familia de sucesiones en Γ tal que para cada $\alpha \in \Lambda$ toda subsucesión de $\{X_\alpha(n)\}_{n=1}^{\infty}$ contiene una subsucesión convergente. Entonces existe una sucesión creciente $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ tal que la sucesión $\{X_\alpha(b(n))\}_{n=1}^{\infty}$ converge para todo $\alpha \in \Lambda$.*

Combinando la Proposición (3) y (4) obtenemos el siguiente resultado, para $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable.

Lema (3)**.** *Existe una sucesión creciente de números naturales* $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ *tal que para todo* $k, m \in \mathbb{N}$, *la sucesión*

$$\left\{ V_{\frac{k}{2^m}}^{(n_j)} h \right\}_{j=1}^{\infty}$$

converge débilmente para todo $h \in \mathcal{H}$.

Teorema (1)**.** *Sean* $\mathcal{H}$ *un espacio de Hilbert separable y* $(T_s, \mathcal{H}_s)_{s \in \mathcal{D}^+ \cap [0,1)}$ *un semigrupo local de contracciones en* $\mathcal{H}$, *entonces existe un espacio de Hilbert* $\mathcal{G}$ *que contiene a* $\mathcal{H}$ *como subespacio cerrado y un grupo de operadores unitarios* $(W_s)_{s \in \mathcal{D}} \subset L(\mathcal{G})$ *tal que*

$$T_s = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} W_s|_{\mathcal{H}_s}, \ \textit{para todo } s \in \mathcal{D}^+ \cap [0, 1).$$

Demostración.

Para $s \in \mathcal{D}_+$ y $h \in \mathcal{H}$ se define $V_s^{(o)}h$ como el límite débil de la sucesión $\left\{V_s^{(n_j)}h\right\}_{j=1}^{\infty}$ dada en el lema anterior. Por lo tanto

$$\left\langle V_s^{(o)}\, h, g\right\rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{j\longrightarrow\infty} \left\langle V_s^{(n_j)} h, g\right\rangle_{\mathcal{H}}, \tag{1}$$

para todo $s \in \mathcal{D}_+$ y $h, g \in \mathcal{H}$.

Se tiene que $V_s^{(o)} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ es una contracción lineal para todo $s \in \mathcal{D}_+$.

Sea $F : \mathcal{D} \to L(\mathcal{H})$ definida por

$$F(s) = \begin{cases} V_s^{(o)} & \text{si s} \geq 0, \\ \left(V_{-s}^{(o)}\right)^* & \text{si s} < 0, \end{cases}$$

De la ecuación (1) se obtiene que

$$\langle\, F(s)h, g\rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{j\longrightarrow\infty} \left\langle\, F^{(n_j)}(s)h, g\right\rangle_{\mathcal{H}}$$

para todo $s \in \mathcal{D}$ y $h, g \in \mathcal{H}$, donde $F^{(n_j)}$ es la función definida en la Proposición (2), la cual es definida positiva.

Por lo tanto, F es una función definida positiva, ya que es límite débil de funciones definidas positivas.

Por el teorema de dilatación de Naimark se tiene que existe un espacio de Hilbert $\mathcal{G}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un grupo unitario $(W_s)_{s\in\mathcal{D}} \subset L(\mathcal{G})$ tal que

$$V_s^{(o)} = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} W_s|_{\mathcal{H}} \tag{2}$$

para todo $s \in \mathcal{D}^+$.

Además, del Lema (2) se deduce que

$$V_s^{(o)}|_{\mathcal{H}_s} = T_s \tag{3}$$

para todo $s \in \mathcal{D}^+ \cap [0, 1)$.

Luego, de la ecuaciones (2) y (3) se obtiene que

$$T_s = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{G}} W_s|_{\mathcal{H}_s}$$

para todo $s \in \mathcal{D}^+ \cap [0, 1)$.

$\square$

Observación. El resultado anterior es original. Es importante destacar que en el mismo no es necesario suponer la continuidad fuerte del semigrupo local de contracciones y que no fue necesario usar la condición (e) de densidad que aparece en la definición de semigrupo local de contracciones.

El siguiente Teorema representa el resultado principal de este Trabajo. El mismo es una generalización del Teorema de Sz-Nagy.

En este trabajo se da una nueva demostración en la cual no se requiere pasar por la construcción del generador infinitesimal del semigrupo.

Teorema (2)**.** *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $(T_s, \mathcal{H}_s)_{s\in[0,1)}$ un semigrupo local de contracciones en $\mathcal{H}$ fuertemente continuo, entonces existe un espacio de Hilbert $\mathfrak{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios $(U_s)_{s\in\mathbb{R}} \subset L(\mathfrak{F})$ tal que*

$$T_s = P_{\mathcal{H}}^{\mathfrak{F}} U_s|_{\mathcal{H}_s}, \ \textit{para todo } s \in [0,1).$$

Demostración.

Sea $\mathcal{F}$ el subespacio cerrado generado por $\{W_s h \ : \ s \in \mathcal{D}, \ h \in \mathcal{H}\}$ y U_s la restricción de W_s a $\mathcal{F}$, entonces $(U_s)_{s\in\mathcal{D}}$ es una representación unitaria de $\mathcal{D}$ en $\mathcal{F}$ tal que

$$T_s = P^{\mathcal{F}}_{\mathcal{H}} U_s|_{\mathcal{H}_s} \tag{4}$$

para todo $s \in \mathcal{D}^+ \cap [0,1)$.

El conjunto

$$\left\{ U_s h \ : \ s \in \mathcal{D}, \ h \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_{\frac{1}{2^n}} \right\}$$

es denso en $\mathcal{G}$.

De este último hecho, de la continuidad fuerte de $(T_t, \mathcal{H}_t)_{t\in[0,a)}$ se deduce que $(U_s)_{s\in\mathcal{D}}$ es fuertemente continua en 0 y por lo tanto uniformemente fuertemente continua en todo $\mathbb{R}$.

De la condición de continuidad que satisface $(U_s)_{s\in\mathcal{D}}$ se deduce que (U_s) se puede extender a una representación unitaria fuertemente continua de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{F}$, que se denotará por $(U_s)_{s\in(-\infty,+\infty)}$.

De la continuidad del semigrupo local se deduce

$$T_t = P_{\mathcal{H}}^{\mathcal{F}} U_t|_{\mathcal{H}_t}$$

para $t \in [0, 1)$.

$\square$

Observación. Trabajar en el intervalo $[0, 1)$ no es ninguna restricción, ya que el caso general $[0, a)$, con $a > 0$, se obtiene haciendo un cambio de variable, como sigue:

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $(T_s, \mathcal{H}_s)_{s \in [0,a)}$ un semigrupo local de contracciones, fuertemente continuo en $\mathcal{H}$.

Para $t \in [0, 1)$, sean

$$R_t = T_{at} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{E}_t = \mathcal{H}_{at}.$$

Se tiene que $(R_t, \mathcal{E}_t)_{t \in [0,1)}$ es un semigrupo local de contracciones, fuertemente continuo en $\mathcal{H}$.

Por el Teorema (2) existe un espacio de Hilbert $\mathfrak{F}$ que contiene a $\mathcal{H}$ como subespacio cerrado y un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios $(U_t)_{t\in\mathbb{R}} \subset L(\mathfrak{F})$ tal que

$$R_t = P_{\mathcal{H}}^{\mathfrak{F}} U_t|_{\mathcal{E}_t}, \text{ para todo } t \in [0,1).$$

Sea $s \in [0,a)$. Si tomamos $t = \frac{s}{a}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} T_s &= R_t \\ &= P_{\mathcal{H}}^{\mathfrak{F}} U_t|_{\mathcal{E}_t} \\ &= P_{\mathcal{H}}^{\mathfrak{F}} U_{\frac{s}{a}}|_{\mathcal{E}_{\frac{s}{a}}} \\ &= P_{\mathcal{H}}^{\mathfrak{F}} U_{\frac{s}{a}}|_{\mathcal{H}_s}, \end{aligned}$$

donde $(U_{\frac{s}{a}})_{s\in\mathbb{R}} \subset L(\mathfrak{F})$ es un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios.

Referencias

[1] R. Bruzual, *Local semigroups of contrations and some applications to Fourier representation theorems.* Int. Eq. and Op. Theory, **10** (1987), 780-801.

[2] B. Sz.-Nagy and C. Foias. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space,* North Holland Publishing Co, 1970.