

UNA HEURÍSTICA PARA EL PROBLEMA DE INTERDICCIÓN DETERMINÍSTICA

Ing. Sara L. Hernández M.

**Trabajo de Grado presentado ante la ilustre
Universidad Central de Venezuela
para optar al título de Magister Scientiarum
en Investigación de Operaciones**

Caracas, Noviembre de 2008

VEREDICTO

DEDICATORIA

***A mi madre Luisa**, por haberme alentado a dar un paso más en el camino de la academia y por haberme acompañado al recorrerlo. Además, por haberme enseñado que nada está perdido hasta que efectivamente lo está.*

***A mi tío Nereo**, por creer en mí. Mi profunda admiración hacia él me impulsó a hacer mi mejor esfuerzo.*

***A mi padre Rafael**, quien ha decidido formalizar su status intelectual y prontamente estará viviendo su propia experiencia de tesis.*

***A mi esposo José Federico** - a quien conocí por circunstancias fortuitas de la vida, cursando una de las materias de este postgrado - por haberse ilusionado tanto como yo con el tema de interdicción y por haber sido mi cómplice voluntario en la creación del INTERDICTOR. Su inquebrantable fe en mí ha sido y sigue siendo un gran estímulo para salir adelante.*

***A nuestra Liebe Mo...** viele danke.*

***A mi amigo Luis Alfredo**, por haber estado allí escuchándome y apoyándome día a día.*

AGRADECIMIENTOS

A mi tutor, el profesor Claudio Rocco, por darme la oportunidad de trabajar junto a él en un tema tan novedoso como el de la interdicción; por darme la oportunidad de demostrarle que hay quienes, lejos de abandonar, luchamos continuamente por cumplir nuestras metas; y por no dejar espacio para bajar la guardia durante la elaboración de la tesis, al ser siempre oportuno y asertivo en emitir sus observaciones sobre los avances del trabajo.

A mi supervisor en el ámbito laboral, Elías Harraka, por haber mostrado su disposición de permitirme dedicarme al postgrado cuando más lo necesité.

A los profesores de las distintas asignaturas que cursé en este postgrado, por compartir conocimientos que han servido y servirán como punto de referencia constante en el desempeño de mis actividades profesionales.

Al Consejo de Desarrollo Humanístico y Científico (CDCH) de la UCV, por el financiamiento del proyecto PI 08-00-7090-2008.

RESUMEN

Título del Trabajo de Grado: Una heurística para el problema de interdicción determinística.

Título por el que se opta: *Magíster Scientiarum en Investigación de Operaciones.*

Autor: Ing. Sara L. Hernández. M.

Tutor: Prof. Claudio M. Rocco S.

El presente trabajo tuvo como propósito desarrollar una heurística para resolver el problema de interdicción determinística, en el cual se busca minimizar el flujo máximo que puede atravesar una red cuando existen limitaciones en la disponibilidad de recursos que pueden destinarse a la inhabilitación de uno o más arcos de dicha red. La capacidad nominal de cada arco y su costo de interdicción pueden variar entre cada arco. Para el desarrollo de la heurística se tomó como base una heurística pre-existente, denominada Probabilistic Solution Discovery Algorithm (PSDA), propuesta por Ramírez-Márquez y Rocco (2008), la cual fue diseñada originalmente para abordar el problema de confiabilidad all-terminal en redes. Un estudio detallado de la misma condujo a identificar las modificaciones necesarias para adaptar dicha heurística al problema de interdicción determinística. La versión modificada, PSDA-INT, fue aplicada a tres tipos de redes: a) problemas de redes ilustrativas, b) problemas de redes con solución óptima conocida y c) problemas de redes con solución óptima desconocida. Los resultados obtenidos se compararon con los reportados en la literatura para las redes que han sido estudiadas desde la óptica de la interdicción. Esta comparación se efectuó en términos de calidad de la solución (valores extremos y promedio) y eficiencia en el espacio de búsqueda. El estudio permitió concluir que el PSDA-INT demostró buena capacidad de búsqueda en los distintos experimentos realizados. Desde el punto de vista de esfuerzo computacional, el PSDA-INT demostró eficiencia debido a que produjo las soluciones a partir de espacios de búsqueda significativamente reducidos con respecto a los que resultarían de la enumeración explícita de las posibles configuraciones de las redes. Esta investigación proporcionará una herramienta para orientar la búsqueda de estrategias destinadas a atenuar las actividades de un adversario que esté operando en un sistema modelable a través de una red.

Descriptores: heurística, interdicción determinística, redes, algoritmo, espacio de búsqueda, óptimo, flujo máximo

INDICE GENERAL

	Pág.
VEREDICTO.....	ii
DEDICATORIA.....	iii
AGRADECIMIENTOS.....	iv
RESUMEN.....	v
INDICE GENERAL.....	vi
INDICE DE TABLAS.....	viii
INDICE DE FIGURAS.....	ix
CAPÍTULO I EL PROBLEMA	1
1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	1
1.2 OBJETIVOS.....	5
<i>Objetivo General</i>	5
<i>Objetivos Específicos</i>	5
1.3 APORTE AL CONOCIMIENTO.....	6
1.4 ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO	6
CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO	8
2.1 FLUJO EN REDES.....	9
2.2 EL PROBLEMA DE FLUJO MÁXIMO	12
2.2.1 <i>Algoritmo de Incremento de Flujo</i>	14
2.2.2 <i>Algoritmos de flujo máximo basados en el principio de incremento de flujo</i>	15
2.3 EL PROBLEMA DE INTERDICCIÓN DETERMINÍSTICA.....	16
2.4 LA HEURÍSTICA PROBABILISTIC SOLUTION DISCOVERY (PSDA).....	21

CAPÍTULO III	ADAPTACIÓN DEL PROBABILISTIC SOLUTION DISCOVERY AL PROBLEMA DE INTERDICCIÓN DETERMINÍSTICA	25
3.1	DIFERENCIAS ENTRE EL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DE CONFIABILIDAD ALL-TERMINAL EN REDES Y EL PROBLEMA DE INTERDICCIÓN DE REDES	26
3.2	PROPUESTA DE ADAPTACIÓN DE LA HEURÍSTICA PROBABILISTIC SOLUTION DISCOVERY A LA RESOLUCIÓN DE MODELOS DE INTERDICCIÓN EN REDES (PSDA-INT).....	27
	<i>Notación empleada en la formulación de la heurística PSDA-INT.....</i>	<i>27</i>
	<i>Parámetros requeridos por la heurística PSDA-INT.....</i>	<i>29</i>
	<i>Formulación de la heurística PSDA-INT.....</i>	<i>30</i>
CAPÍTULO IV	ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA APLICACIÓN DEL PSDA-INT.	39
4.1	PROBLEMAS DE REDES ILUSTRATIVAS.....	40
4.2	PROBLEMAS DE REDES CON SOLUCIÓN ÓPTIMA CONOCIDA	51
4.3	PROBLEMAS DE REDES CON SOLUCIÓN ÓPTIMA DESCONOCIDA.....	64
	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	68
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	71
APÉNDICES	73	
	APÉNDICE 1	74
	APÉNDICE 2	76

INDICE DE TABLAS

	Pág.
Tabla III.1: Datos de la red dirigida de 6 nodos y 9 enlaces	34
Tabla III.2: Evolución del vector de probabilidades de aparición de los arcos en la red dirigida de 6 nodos y 9 enlaces	37
Tabla III.3: Las cinco mejores soluciones obtenidas por PSDA-INT para la red dirigida de 6 nodos y 9 enlaces	37
Tabla IV.1: Datos de la red dirigida de 7 nodos y 12 enlaces (Adaptación de [HLL])..	42
Tabla IV.2: Evolución del vector de probabilidades de aparición de los arcos en la red dirigida de 7 nodos y 12 enlaces	45
Tabla IV.3: Las cinco mejores soluciones obtenidas por PSDA-INT en los 4 ciclos para la red dirigida de 7 nodos y 12 enlaces	45
Tabla IV.4: Datos de la red dirigida de 11 nodos y 21 enlaces [YOO]	48
Tabla IV.5: Estrategias de interdicción obtenidas por PSDA-INT para la red dirigida de 11 nodos y 21 enlaces	49
Tabla IV.6: Datos de la red dirigida de 20 nodos y 30 enlaces [DAI]	52
Tabla IV.7: Evolución del vector de probabilidades de aparición de los arcos en la red dirigida de 20 nodos y 30 enlaces	53
Tabla IV.8: Las cinco mejores soluciones obtenidas por PSDA-INT en los 5 primeros ciclos para la red dirigida de 20 nodos y 30 enlaces	54
Tabla IV.9: Datos de la red dirigida de 14 nodos y 25 enlaces [WOO]	58
Tabla IV.10: Datos adicionados a la red original de [WOO] para su conversión de no	

dirigida en dirigida.....	59
Tabla IV.11: Datos adicionados a la red original de [WOO] relativos a la superfuente y al supersumidero.....	59
Tabla IV.12: Evolución del vector de probabilidades de aparición de los arcos en la red dirigida de 16 nodos y 57 enlaces.....	61
Tabla IV.13: Las cinco mejores soluciones obtenidas por PSDA-INT en los 5 primeros ciclos para la red dirigida de 16 nodos y 57 enlaces.....	62
Tabla IV.14: Datos de la red dirigida de 36 nodos y 60 enlaces [GEB].....	65

INDICE DE FIGURAS

	Pág.
Figura I.1: Diferencias entre los métodos exactos y heurísticos para resolución de modelos (Adaptación de [EVN]).....	4
Figura II.1: Representación gráfica de una red dirigida de 7 nodos y 12 enlaces	11
Figura II.2: Diferencias entre los modelos determinísticos y estocásticos (Adaptación de [PAN])	16
Figura II.3: Red de túneles que conducen del interior de una prisión al exterior	19
Figura III.1: Pseudo-código de la heurística PSDA-INT	33
Figura III.2: Red dirigida de 6 nodos y 9 enlaces.....	34
Figura IV.1: Red dirigida de 7 nodos y 12 enlaces [HLL]	41
Figura IV.2: Pestaña RED del INTERDICTOR con los datos de la red dirigida de 7 nodos y 12 enlaces	43
Figura IV.3: Pestaña PARÁMETROS del INTERDICTOR con los datos de la red dirigida de 7 nodos y 12 enlaces	44
Figura IV.4: Pestaña RESULTADOS del INTERDICTOR con los datos de la red dirigida de 7 nodos y 12 enlaces	46
Figura IV.5: Red dirigida de 11 nodos y 21 enlaces [YOO]	47
Figura IV.6: Red dirigida de 20 nodos y 30 enlaces [DAI]	51
Figura IV.7: Análisis de sensibilidad sobre la cantidad de recursos disponibles para interdicción en la red dirigida de 20 nodos y 30 enlaces.....	56

Figura IV.8: Red no dirigida de 14 nodos y 25 enlaces [WOO] 57

Figura IV.9: Red dirigida de 16 nodos y 57 enlaces (Adaptación de [WOO])..... 60

Figura IV.10: Distribución de frecuencia del flujo máximo en la red dirigida de 16 nodos y 57 enlaces 64

Figura IV.11: Análisis de sensibilidad sobre la cantidad de recursos disponibles para interdicción en la red dirigida de 36 nodos y 60 enlaces..... 66

Red dirigida y capacitada de 7 nodos y 12 enlaces..... 76

· ·

CAPÍTULO I EL PROBLEMA

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El actual proceso de globalización ha agudizado la ocurrencia de fenómenos sociales, tales como el terrorismo, la delincuencia organizada transnacional, el problema mundial de las drogas, la corrupción, el lavado de activos, el tráfico ilícito de armas y las conexiones entre ellos, que afectan la estabilidad y democracia, erosionan la cohesión social y vulneran la seguridad de los Estados. Éstos constituyen factores de consecuencias dañinas, por lo que en la Declaración de Seguridad de las Américas (2003), la OEA adoptó un nuevo concepto de seguridad hemisférica, según el cual “las amenazas, preocupaciones y otros desafíos a la seguridad en el Hemisferio son de naturaleza diversa y alcance multidimensional, por lo que el concepto y los enfoques tradicionales deben ampliarse para abarcar amenazas nuevas y no tradicionales, que incluyen aspectos políticos, económicos, sociales, de salud y ambientales” [CHL].

En tal sentido, los investigadores se han dado a la tarea de proponer modelos orientados a establecer relaciones funcionales matemáticas entre eventos, para predecir el comportamiento de los sistemas y proponer alternativas de solución. Entre éstas, figura la interdicción de redes, la cual según [PAN] es el acto de confrontar y detener una actividad. De acuerdo con este autor, los modelos matemáticos que representan la interdicción de redes pueden proporcionar tácticas y estrategias para atenuar las actividades de un adversario que esté operando en un sistema modelado a través de una red, con nodos y arcos.

Las estrategias de interdicción de redes se refieren a la interrupción total o parcial de sus arcos, para así detener o atenuar el logro de las metas propuestas por el adversario. Esta interrupción acarrea la asignación de recursos por parte del ente que propone la interdicción o interventor, por lo cual éste debe decidir selectivamente cuál arco debe ser intervenido.

El estudio de los modelos de interdicción de redes en Investigación de Operaciones comenzó en la década de los 70s, durante la guerra de Vietnam. En 1970, McMasters y Mustin y Ghare; y en 1971, Montgomery y Turner, todos referidos por [PAN], desarrollaron programas matemáticos determinísticos para interrumpir el flujo de materiales y tropas enemigas. A partir de allí, se derivó una gama de nuevos modelos que no sólo ha permitido ampliar su espectro de aplicabilidad, sino que, de acuerdo con [EVN], también ha planteado el reto de diseñar métodos efectivos para su resolución.

A tal efecto, [WOO] formuló el problema de la interdicción en redes, mediante la programación entera, incorporándole variantes y generalizaciones (ver apéndice 1); [ISR] enfocaron el problema desde la óptica de la programación entera mixta; y [DAI] propusieron una heurística basada en un algoritmo genético computacional, para analizar el problema de la interdicción en redes.

El modelo de interdicción de redes, abordado por [PAN] desde el punto de vista estocástico, se desarrolla esencialmente a partir de un modelo en el cual un traficante se propone atravesar una red de un origen a un destino, sin ser detectado. El carácter estocástico de este enfoque obedece a dos razones fundamentales: a) El origen y el destino del traficante son conocidos a través de una distribución de probabilidad, y b) Al hecho de que el traficante pueda atravesar cada arco de la red sin ser descubierto se le asignan probabilidades de éxito. Asimismo se considera que existe la alternativa de instalar detectores en ciertos arcos y que como consecuencia de ello, se logran disminuir dichas probabilidades.

Sobre la base de lo anteriormente referido, el problema de decisión consiste en seleccionar los arcos en los que se deben instalar los detectores, y cumplir con limitaciones presupuestarias y con restricciones sobre dónde pueden ubicarse los detectores en la red. La meta propuesta es minimizar la probabilidad de que el traficante logre pasar inadvertido.

De acuerdo con [TAH] y [HLL], los métodos que se han desarrollado para resolver los modelos matemáticos se clasifican en exactos y heurísticos.

Métodos de solución	
Exactos	Heurísticos
Siempre permiten hallar la solución óptima, si ésta existe.	Permiten hallar una solución factible de cierto nivel de calidad, pero no garantizan encontrar la solución óptima.
Son adecuados para redes pequeñas. Su aplicación en redes que modelen situaciones de la vida real puede resultar impráctica desde el punto de vista computacional.	Permiten abordar problemas de optimización más grandes. Generalmente son rápidos y eficientes.

Figura I.1: Diferencias entre los métodos exactos y heurísticos para resolución de modelos (Adaptación de [EVN])

Según se indica en la Figura I.1, los enfoques de resolución enumerativos resultan adecuados para redes pequeñas, pero presentan la desventaja de que no son aplicables en redes que modelen situaciones de la vida real, debido al tamaño de los espacios de búsqueda asociados a ellos. Los enfoques heurísticos, por su parte, ofrecen la posibilidad de resolver problemas más grandes y de encontrar cierto nivel de calidad en la solución hallada, pero sacrifican la garantía de encontrar una solución óptima.

En concordancia con lo antes expuesto, el presente Trabajo de Grado se propone usar como base la heurística *Probabilistic Solution Discovery* (PSDA) para resolver el problema de interdicción determinística, en el cual se supone que se tiene conocimiento preciso sobre cuáles son los nodos origen y destino en la red y sobre las capacidades de los arcos. Esta decisión se sustenta en el hecho de que esta heurística ha sido usada exitosamente en [RAM] para resolver problemas combinatorios, tales como el que se analiza en este Trabajo. Asimismo, esta técnica resulta atractiva debido a que su adaptación al problema de interdicción es intuitiva.

La interdicción es una temática que por su actualidad y pertinencia social, fue

incluida por la OEA, en el Proyecto Final de la Comisión Interamericana para el Control del Abuso de Drogas (CICAD), durante su trigésimo sexto período ordinario de sesiones, dentro de la recomendación número 7, en los siguientes términos: “Elaborar un manual modelo de procedimientos operativos para las operaciones conjuntas y combinadas de interdicción bilaterales o regionales para los Estados miembros, cuyas leyes y reglamentos les permitan efectuar tales operaciones, teniendo en cuenta los límites jurisdiccionales y los sistemas legales nacionales de las partes involucradas, cuando se concierten acuerdos o arreglos bilaterales o regionales para tales operaciones” (OEA).

1.2 OBJETIVOS

Objetivo General

Resolver el problema de interdicción determinística en redes mediante el uso de una heurística.

Objetivos Específicos

1. Estudiar en detalle la heurística *Probabilistic Solution Discovery* y adaptarla al problema de interdicción determinística.
2. Aplicar la heurística antes descrita a problemas que típicamente se utilizan con propósitos ilustrativos.
3. Aplicar la heurística antes descrita a problemas de redes cuyo óptimo se conoce y que han sido resueltos previamente en la literatura desde la óptica de interdicción.
4. Aplicar la heurística antes descrita a problemas de redes con espacios de solución grandes, para los cuales hasta ahora sólo se han encontrado soluciones buenas.
5. Comparar los resultados obtenidos mediante la aplicación de la heurística PSDA-INT con los reportados en la literatura para las redes que han sido

estudiadas desde la óptica de la interdicción. Tal comparación se efectúa en términos de calidad de la solución (valores extremos y promedio) y eficiencia en el espacio de búsqueda.

1.3 APOORTE AL CONOCIMIENTO

Las nuevas realidades socio-políticas y éticas que vive la humanidad, demandan un nuevo modelo de universidad y la realización de investigación con pertinencia social. Por tal razón, ésta amerita trascender el plano teórico y llegar al práctico, para así ofrecer soluciones concretas a problemas específicos.

La presente investigación está orientada a profundizar en el conocimiento de una heurística aplicable a la interdicción de redes, para la atenuación de los efectos perjudiciales que los fenómenos sociales citados en el párrafo introductorio de este trabajo, están causando a las distintas naciones. De esta manera, la comunidad académica genera respuestas a una crisis que no conoce fronteras. Este aporte constituye una respuesta proveniente del área de Investigación de Operaciones.

1.4 ORGANIZACIÓN DEL TRABAJO

El contenido del presente Trabajo Especial de Grado se encuentra estructurado en cuatro capítulos.

El Capítulo I contiene el planteamiento del problema y el objetivo general y los específicos que determinan los fines de la investigación. Asimismo, hace referencia al aporte al conocimiento que se propone alcanzar en el despliegue de la investigación.

El Capítulo II comprende los fundamentos teóricos relacionados con el tema a desarrollar, los cuales permitirán orientar el sentido del estudio. Este marco teórico incluye un compendio de la terminología usada para describir las redes y sus componentes, además de hacer alusión al problema de flujo máximo y a su método

de resolución. Asimismo, describe la versión del problema de interdicción que se busca resolver a través de la heurística *Probabilistic Solution Discovery* (PSDA) modificado. Del mismo modo, expone la heurística PSDA original con la exhaustividad requerida para definir las modificaciones que es menester efectuar para hacerla aplicable al problema de interdicción de redes.

El Capítulo III está orientado a exponer las diferencias fundamentales entre el problema de optimización de confiabilidad all-terminal en redes (abordado en la heurística PSDA original) y el problema de interdicción de redes. Por otra parte, formaliza la propuesta de adaptación del PSDA para lograr su aplicabilidad al problema de interdicción de redes.

El Capítulo IV se refiere al análisis e interpretación de los resultados de la aplicación del PSDA modificado a problemas de interdicción determinística.

Seguidamente, se presentan las conclusiones y recomendaciones derivadas del estudio y como aspecto final se hace un listado de las referencias bibliográficas usadas como fuentes de información durante el proceso de elaboración del trabajo.

· ·

CAPÍTULO II MARCO TEÓRICO

Este capítulo tiene como objetivo proporcionar un marco de referencia teórico que permita orientar la búsqueda y ofrezca una conceptualización adecuada de los términos que se van a utilizar.

El marco teórico desarrollado en este capítulo se inicia con una sinopsis de la terminología usada para describir las redes y sus componentes, para luego referir en detalle el problema de flujo máximo y a su algoritmo de resolución genérico: Algoritmo basado en el principio de incremento de flujo.

Posteriormente, se describe la versión del problema de interdicción determinística que se busca resolver a través de la heurística *Probabilistic Solution Discovery* (PSDA) modificada.

En último término, se aborda la heurística PSDA original con la exhaustividad requerida para definir las modificaciones que se deben efectuar para hacerla aplicable al problema de interdicción de redes.

2.1 FLUJO EN REDES

Las ideas incluidas en esta sección son un compendio extraído de las nociones planteadas por los autores [HLL] y [TAH] en la literatura académica. Sin embargo, no se hará distinción sobre la autoría de cada contenido en particular.

Una **red** consiste en un conjunto de puntos y líneas que unen esos puntos. Los puntos son llamados **nodos** o **vértices** y las líneas son llamadas **arcos** o **enlaces**. El concepto de red ha sido ampliamente difundido en el ámbito de la investigación de operaciones, debido a la diversidad de situaciones que se pueden modelar y resolver como redes. El principio que hace esto posible es el hecho de poder modelar relaciones entre componentes de un sistema, al representarlos en la red como nodos y conectarlos mediante arcos cuando están relacionados entre sí. Así, las redes pueden emplearse para modelar sistemas de transporte, sistemas de

comunicaciones, planificación de producción, sistemas eléctricos, ecosistemas, entre otros.

Los arcos se etiquetan identificando los nodos en cada uno de sus extremos. Por lo general, a los arcos se les asocia un número cuya magnitud puede representar parámetros relevantes tales como distancias, costos, tiempos o confiabilidades. De igual forma, los arcos pueden tener **flujo** de algún tipo que pase por ellos (flujo de hidrocarburos a través de ductos, flujo de vehículos en autopistas, flujo de información en líneas de comunicación, entre otros) y dicho flujo estar limitado por la **capacidad de sus arcos**, la cual puede ser finita o infinita. La ecuación fundamental que gobierna el flujo en redes se conoce como **conservación del flujo**:

$$\text{Flujo de Salida} - \text{Flujo de Entrada} = 0$$

Entre los nodos se pueden distinguir el **nodo fuente** s , el **nodo sumidero** t y los **nodos de transbordo**. El nodo fuente, también conocido como nodo origen o nodo de oferta, es aquel en el que se generan las unidades de flujo en la red. El nodo sumidero o nodo destino es aquel que tiene asociada una demanda que representa el número de unidades que deben enviarse hacia él. En los nodos de transbordo, el flujo total que entra es igual al que sale.

Se dice que un **arco** es **dirigido** si permite un flujo positivo en una dirección y flujo cero en la dirección opuesta. Una red dirigida tiene todos sus arcos dirigidos. Por otro lado, un **arco** es **no dirigido** si el flujo a través de él se permite en ambas direcciones. La etiqueta de los arcos debe considerar primero el nodo *de donde viene* y después el nodo *hacia donde va*.

Sobre la base de lo anterior, una red que contiene arcos dirigidos únicamente es una **red dirigida**, pero si en cambio, todos sus arcos son no dirigidos, se trata de una **red no dirigida**. Si la red contiene tanto arcos dirigidos como no dirigidos, puede convertirse en una red dirigida al sustituir cada arco no dirigido por un par de arcos

dirigidos en direcciones opuestas.

Un **corte** mínimo define a un conjunto de arcos que, cuando se eliminan de la red, causan una interrupción total del flujo entre los nodos fuente y sumidero. Se dice que un corte es de primer orden si está conformado por un solo arco, que es de segundo orden si está conformado por dos arcos, y así sucesivamente.

La notación para describir una red es $G=(N,A)$, siendo N el conjunto de nodos y A el conjunto de arcos.

Con el fin de ilustrar las definiciones anteriormente referidas, la Figura II.1 muestra una red dirigida. Ésta consta de 7 nodos y 12 enlaces. En ella, por ejemplo, el arco entre los nodos B y E es (B,E), debido a que el arco sale de B y va hacia E. Hay un sólo nodo fuente representado con la letra s y un sólo nodo sumidero representado por la letra t . Los demás nodos (A, B, C, D y E) son nodos de transbordo. Siguiendo la notación descrita, el conjunto de nodos es $N=\{s,A,B,C,D,E,t\}$ y el conjunto de arcos es $A=\{(s,A), (s,B), (s,C), (A,B), (A,D), (B,C), (C,E), (B,E), (B,D), (D,t), (E,D), (E,t)\}$.

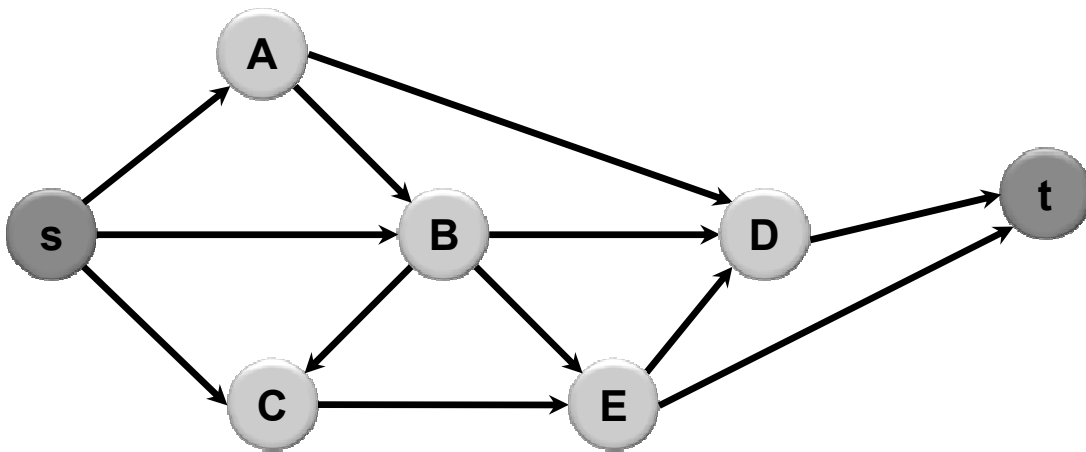


Figura II.1: Representación gráfica de una red dirigida de 7 nodos y 12 enlaces

2.2 EL PROBLEMA DE FLUJO MÁXIMO

Entre la multitud de situaciones que pueden abordarse desde la perspectiva de redes se encuentra aquella en la que el objetivo que se persigue es maximizar el flujo que debe transportarse desde la fuente hasta el destino. Dicha situación es conocida en el ámbito de la investigación de operaciones como el problema de flujo máximo [HLL]. En éste, la fuente produce material que fluye a través de la red hacia el destino, en donde se consume. La capacidad de los arcos de la red constituye el factor limitante para el flujo del material. A continuación se enumeran ejemplos de problemas en los que interesa maximizar el flujo:

- Transporte de petróleo crudo desde los pozos de producción hasta los centros de almacenamiento, a través de un sistema de oleoductos.
- Envío de mercancía desde una fábrica hasta sus consumidores.
- Distribución de agua a través de un sistema de acueductos.

La formulación del modelo matemático asociado al problema de flujo máximo de una red $G=(N,A)$ se basa en:

- La adición de un arco de retorno ficticio en la red que vaya de t a s . Así, es posible definir como objetivo del modelo maximizar el flujo que circula a través de dicho arco (F_{ts}). Como consecuencia del requisito de conservación del flujo en los nodos de transbordo, el flujo de salida de la fuente será igual al flujo de entrada del sumidero, y a su vez, igual al flujo F_{ts} .
- Las restricciones que afectan el flujo a través de la red: balance de conservación de flujo en cada nodo, capacidad máxima de flujo que permite cada arco.
- La condición de no negatividad.

El modelo matemático para resolver este problema es el siguiente:

$$\max F_{ts} \quad \text{Ec.II.1}$$

s.a.,

$$\sum_j F_{sj} - \sum_j F_{js} - F_{ts} = 0 \quad \text{Ec.II.2}$$

$$\sum_j F_{ij} - \sum_j F_{ji} = 0 \quad \forall i \in N - \{s, t\} \quad \text{Ec.II.3}$$

$$\sum_j F_{tj} - \sum_j F_{jt} + F_{ts} = 0 \quad \text{Ec.II.4}$$

$$0 \leq F_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \quad \text{Ec.II.5}$$

$$F_{ts} \geq 0 \quad \text{Ec.II.6}$$

donde F_{ij} es el flujo del nodo i al nodo j , y u_{ij} es la capacidad del arco (i, j) .

La solución de este tipo de problemas se logra con algoritmos de optimización de redes, aunque también pueden formularse y resolverse como modelos lineales explícitos, siendo los algoritmos basados en redes más eficientes que el método símplex [TAH].

Los procedimientos más difundidos para resolver el problema de flujo máximo se basan en la búsqueda de **caminos de incremento de flujo** [EVN]. Estos, son caminos que conectan la fuente y el sumidero y que tienen capacidad disponible en todos sus arcos, o equivalentemente, son caminos entre el origen y el destino conformados únicamente por arcos a los que se puede asignar flujo adicional, sin violar las restricciones de capacidad máxima [HLL].

Con el propósito de plantear el algoritmo que permite hallar los caminos de incremento de flujo (Algoritmo de Incremento de Flujo) previamente es necesario definir dos conceptos: flujo factible y red residual. Un **flujo factible** es aquel que cumple la conservación del flujo en todos los nodos y que satisface las restricciones de capacidad en cada arco. Una **red residual** es aquella que muestra las capacidades

remanentes de los arcos luego de la asignación de flujos a dichos arcos [HLL]. Así, para un arco (x,y) , su capacidad remanente viene dada por $r_{xy} = u_{xy} - F_{xy}$, siendo u_{xy} la capacidad del arco (x,y) y F_{xy} el flujo del nodo x al nodo y .

Asimismo, se introduce la notación de las etiquetas $a(x)$ para indicar la cantidad máxima de flujo adicional que puede enviarse de s a x , y $p(x)$ para señalar el nodo predecesor de x .

En la próxima sección se puntualizarán los pasos que comprende el Algoritmo de Incremento de Flujo.

2.2.1 Algoritmo de Incremento de Flujo [EVN]

Paso 1: Construir la red residual correspondiente al flujo factible actual. Etiquetar el nodo s con $a(s) = \infty$ y $p(s) = 0$. Inicialmente, todos los nodos están sin etiquetar y todos los arcos sin marcar.

Paso 2: Seleccionar un nodo etiquetado x que no haya sido aún considerado. Si no existe ninguno, detenerse, ya que no existe un camino de incremento de flujo de s a t .

Paso 3: Si un arco (x,y) sale del nodo x , etiquetar el nodo y con: $a(y) = \min\{a(x), r_{xy}\}$ y $p(y) = x$, si y no está etiquetado todavía. Marcar el arco (x,y) . Si se etiqueta el nodo t , detenerse. Se consiguió un camino de incremento de flujo. Caso contrario, ir al *Paso 2*.

Sobre la base del Algoritmo de Incremento de Flujo se establece el Algoritmo de Flujo Máximo presentado en la siguiente sección.

2.2.2 Algoritmos de flujo máximo basados en el principio de incremento de flujo [EVN]

El principio común de los procedimientos para resolver el problema de flujo máximo es, en esencia, el siguiente: Buscar un camino de incremento de flujo y enviar la mayor cantidad posible de flujo a través de él. Luego, continuar buscando caminos de incremento de flujo y asignarles flujo, y detenerse cuando ya no pueda encontrarse uno [EVN].

Entre estos procedimientos, destaca particularmente el método desarrollado por Ford y Fulkerson en 1962 [TAH], descrito a continuación:

Paso 1: Hacer el nodo fuente igual a s y el nodo sumidero igual a t . Seleccionar cualquier flujo factible. De no ser posible, ajustar un flujo $F_{xy} = 0$ para todo (x, y) .

Paso 2: Construir la red residual relativa al flujo actual.

Paso 3: Aplicar el Algoritmo de Incremento de Flujo (presentado en la sección anterior). Si no se consigue un camino de incremento de flujo, detenerse y asignar el flujo actual al flujo máximo. De lo contrario, implementar el aumento de flujo hallado al aplicar el algoritmo.

Paso 4: Volver al Paso 2.

En el apéndice 2 se muestra un ejemplo de aplicación de este Algoritmo de flujo máximo basado en el principio de incremento de flujo.

En el año 1962, Ford y Fulkerson también encontraron que si las capacidades de los arcos no son números enteros, el procedimiento no garantiza la obtención de la solución en un número finito de pasos. Debido a ello, Edmonds y Karp (1972) idearon modificaciones a este procedimiento [EVN].

La modificación propuesta por Edmonds y Karp sugiere que para acotar el número de pasos requeridos para hallar el flujo máximo se debe escoger el camino de incremento de flujo que contenga la mínima cantidad de arcos. Esto se logra siguiendo el algoritmo de búsqueda profunda (“*Breath-Search First (BSF)*”) para decidir el orden de exploración de los nodos cuando se está aplicando el Algoritmo de Incremento de Flujo. En esencia, esta búsqueda sistemática explora todos los nodos adyacentes al nodo que se está analizando, para luego seleccionar el primero de ellos y a su vez explorar todos los nodos adyacentes a este último.

2.3 EL PROBLEMA DE INTERDICCIÓN DETERMINÍSTICA

En el presente estudio se plantea una situación modelada a través de una red dirigida, en la cual un adversario pretende trasladar mercancía desde el nodo origen de dicha red hasta su nodo destino. Los nodos en la red están interconectados mediante arcos, cada uno de los cuales permite el paso de cierta cantidad de unidades de mercancía. Asimismo, existe un interdicator que debe asignar unidades de recursos para romper cada arco y al mismo tiempo, desea minimizar la cantidad máxima de flujo que el adversario puede hacer pasar por la red, a través de los arcos que no haya interrumpido el interdicator. Se supone que el flujo es de tipo divisible y que la interdicción en los arcos es infalible.

La capacidad de transporte del adversario está limitada por las restricciones físicas de capacidad de los arcos, mientras que el interdicator está condicionado al uso de las unidades de recurso de las cuales dispone.

Tipos de modelos	
<p>Determinísticos</p> <p>Se supone que se conocen de forma precisa los datos del problema.</p>	<p>Estocásticos</p> <p>Se asignan distribuciones de probabilidad a los datos del problema que tienen asociado un grado de incertidumbre.</p>

Figura II.2: Diferencias entre los modelos determinísticos y estocásticos (Adaptación de [PAN])

Sobre la base de la información resumida en la Figura II.2, puede afirmarse que el enfoque adoptado para el problema de interdicción descrito anteriormente corresponde a un modelo determinístico, ya que supone que se tiene conocimiento de todos los parámetros con certeza: origen y destino de la mercancía, capacidades de los arcos, recursos requeridos por el interdicator para inhabilitar cada arco, entre otros.

Asimismo, resalta el hecho de que, a diferencia del enfoque estocástico planteado por Pan para el problema de interdicción [PAN], en este enfoque determinístico el paso de la mercancía a través de un arco que no haya sido inhabilitado por el interdicator siempre es exitoso.

Desde el punto de vista matemático, según [DAI], esta situación puede plantearse de la siguiente manera:

Sea $G=(N,A)$ una red dirigida con una sola fuente s y un solo destino t , en donde N es un conjunto de nodos y A es un conjunto de arcos dirigidos tales que $(i,j) \in A$, si y sólo si hay un arco dirigido desde el nodo i al nodo j .

Cada arco (i,j) tiene una capacidad de u_{ij} unidades de mercancía y requiere de c_{ij} unidades de recurso para ser destruido. Además, sea F_{ij} el flujo del nodo i al nodo j y C la cantidad total de recursos de las que dispone el interdicator.

Se define la variable de decisión $x_{ij}=0$ si el arco (i,j) es inutilizado por el interdicator y $x_{ij}=1$ en el caso contrario. El problema matemático se formula entonces como:

$$\min_{x \in X} \max_F F_{ts} \quad \text{Ec.II.7}$$

s.a.,

$$\sum_j F_{sj} - \sum_j F_{js} - F_{ts} = 0 \quad \text{Ec.II.8}$$

$$\sum_j F_{ij} - \sum_j F_{ji} = 0 \quad \forall i \in N - \{s, t\} \quad \text{Ec.II.9}$$

$$\sum_j F_{tj} - \sum_j F_{jt} + F_{ts} = 0 \quad \text{Ec.II.10}$$

$$0 \leq F_{ij} \leq x_{ij} \cdot u_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \quad \text{Ec.II.11}$$

$$X = \left\{ x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in A \mid x_{ts} = 1, \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \cdot (1 - x_{ij}) \leq C \right\} \quad \text{Ec.II.12}$$

La función objetivo (Ec.II.7) minimiza el flujo máximo que atraviesa la red. Las restricciones Ec.II.8, Ec.II.9 y Ec.II.10 son los balances de conservación de flujo en el nodo origen, en los nodos de transbordo y en el nodo destino, respectivamente. La restricción Ec.II.11, por su parte, restringe el flujo a través de cada arco a su capacidad máxima, si el interventor no lo interrumpe. Caso contrario, esta restricción restringirá el flujo a cero. Finalmente, la restricción Ec.II.12 limita el uso de recursos a la máxima cantidad disponible.

Para ilustrar el problema de interdicción se propone la siguiente situación ficticia. El director de una prisión descubre que un grupo de reclusos está planificando escapar a través de un túnel que excavaron. Luego de efectuar ciertas averiguaciones, el Cuerpo de Seguridad de dicha prisión determina que dicho túnel tiene caminos interconectados que conducen al exterior de la cárcel, según se indica en la Figura II.3.

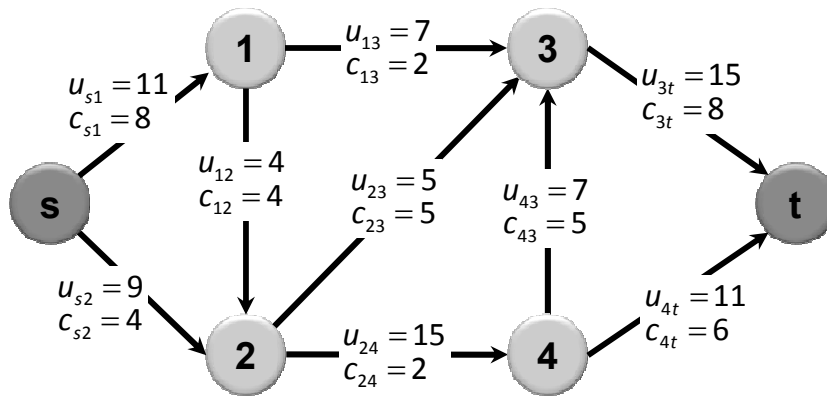


Figura II.3: Red de túneles que conducen del interior de una prisión al exterior

En dicha red, el tamaño del túnel en cada sección o arco permite el paso de máximo u_{ij} reos a la vez. El Cuerpo de Seguridad también determinó que para bloquear el paso de los reos a través de un arco (i,j) , se requiere la asignación de c_{ij} recursos y que la cárcel sólo dispone de un total de 9. Por tanto, el reto para ellos es seleccionar cuáles arcos bloquearán, para impedir (en la medida en que los recursos disponibles se lo permitan) el escape de los reos. El modelo particular que se genera en este caso es el siguiente:

$$\min_{x \in X} \max_F F_{ts} \tag{Ec.II.13}$$

s.a.,

$$F_{s1} + F_{s2} - F_{ts} = 0 \tag{Ec.II.14}$$

$$F_{12} + F_{13} - F_{s1} = 0 \tag{Ec.II.15}$$

$$F_{23} + F_{24} - F_{s2} - F_{12} = 0 \tag{Ec.II.16}$$

$$F_{3t} - F_{13} - F_{23} - F_{43} = 0 \tag{Ec.II.17}$$

$$F_{43} + F_{4t} - F_{24} = 0 \tag{Ec.II.18}$$

$$-F_{3t} - F_{4t} + F_{ts} = 0 \tag{Ec.II.19}$$

$$0 \leq F_{s1} \leq x_{s1} \cdot u_{s1} \quad \text{Ec.II.20}$$

$$0 \leq F_{s2} \leq x_{s2} \cdot u_{s2} \quad \text{Ec.II.21}$$

$$0 \leq F_{12} \leq x_{12} \cdot u_{12} \quad \text{Ec.II.22}$$

$$0 \leq F_{13} \leq x_{13} \cdot u_{13} \quad \text{Ec.II.23}$$

$$0 \leq F_{23} \leq x_{23} \cdot u_{23} \quad \text{Ec.II.24}$$

$$0 \leq F_{24} \leq x_{24} \cdot u_{24} \quad \text{Ec.II.25}$$

$$0 \leq F_{43} \leq x_{43} \cdot u_{43} \quad \text{Ec.II.26}$$

$$0 \leq F_{4t} \leq x_{4t} \cdot u_{4t} \quad \text{Ec.II.27}$$

$$0 \leq F_{3t} \leq x_{3t} \cdot u_{3t} \quad \text{Ec.II.28}$$

$$X = \{x_{s1}, x_{s2}, x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{3t}, x_{43}, x_{4t} \in \{0,1\} \mid x_{ts} = 1\}$$

$$\left[\begin{array}{l} c_{s1} \cdot (1 - x_{s1}) + c_{s2} \cdot (1 - x_{s2}) + c_{12} \cdot (1 - x_{12}) \\ + c_{13} \cdot (1 - x_{13}) + c_{23} \cdot (1 - x_{23}) \\ + c_{24} \cdot (1 - x_{24}) + c_{3t} \cdot (1 - x_{3t}) \\ + c_{43} \cdot (1 - x_{43}) + c_{4t} \cdot (1 - x_{4t}) \end{array} \right] \leq C \quad \text{Ec.II.29}$$

La solución de este problema de interdicción de redes corresponde a la interrupción del paso en los arcos (1,3), (2,3) y (2,4), con lo que lograrían cortar todos los caminos que conducen al exterior de la cárcel y así, evitar que se produzca la fuga de ningún preso. La implementación de esta estrategia requeriría la asignación de los 9 recursos disponibles. Cualquier otra decisión factible traería como consecuencia la fuga de convictos.

2.4 LA HEURÍSTICA PROBABILISTIC SOLUTION DISCOVERY (PSDA)

La heurística *Probabilistic Solution Discovery* (PSDA) fue propuesta por [RAM] para resolver el problema de optimización de confiabilidad all-terminal en redes. Este tipo de evaluación de confiabilidad se refiere a la probabilidad de que todos los nodos en una red se comuniquen entre sí.

En esta clase de problema, además de cumplir con un requerimiento de confiabilidad mínima preestablecida, también se busca minimizar el costo incurrido en alcanzarla. En otras palabras, se procura racionalizar las inversiones requeridas para lograr el nivel de confiabilidad deseado.

Con el fin de describir apropiadamente el modelo matemático que busca optimizar el PSDA y el algoritmo de resolución en sí, se define la siguiente notación:

- \mathbf{x} Vector de diseño que denota una configuración de red. Sus componentes indican la presencia o ausencia de los arcos en la red (valen 1 para los arcos que están presentes en la configuración de red referida en el vector y 0 para los que estén ausentes en ella).
- $C(\mathbf{x})$ Costo en que se incurre al implementar la red, según lo indicado por el vector de diseño.
- γ Vector que indica la probabilidad de existencia de cada arco de la red en la solución
- $R(\mathbf{x})$ Confiabilidad obtenida a través de la evaluación del vector de diseño
- R_0 Requerimiento de confiabilidad mínima preestablecida

En el contexto de esta simbología general, a continuación se presenta el modelo matemático que optimiza el PSDA:

$$\min C(x) \quad \text{Ec.II.8}$$

s.a.,

$$R(x) \geq R_0 \quad \text{Ec.II.9}$$

$$x_{ij} \in (0,1) \quad \text{Ec.II.10}$$

La heurística PSDA se basa en un proceso que comprende tres pasos:

Paso 1: Desarrollo del Diseño

Se genera un número determinado de configuraciones diseño, que son las configuraciones consideradas como potenciales soluciones al problema de optimización a resolver. Para cada elemento del sistema se determina si éste pertenece o no a una configuración. Para esto se genera un número uniformemente distribuido en $[0,1]$ y se compara con la probabilidad inicial de existencia de dicho arco en la red (inicialmente esta probabilidad se fija en 0.5, como se explica más adelante, en la sección 3.2). Si el número aleatorio es mayor o igual que la probabilidad inicial de existencia del arco, se indica que éste pertenece a la configuración diseño. Caso contrario, el arco no está incluido en esta configuración.

Asimismo, en este paso se incluyen las reglas de parada del algoritmo:

- 1) Las probabilidades de aparición de los arcos en la red convergieron a 0 ó 1, o;
- 2) Se alcanza el número máximo de ciclos (actualizaciones del vector γ) indicado por el usuario.

Paso 2: Análisis de la confiabilidad del Diseño

Se obtiene la confiabilidad de cada configuración generada en el Paso 2 a través de una simulación de Monte Carlo. En ella, para cada arco se genera un número aleatorio uniformemente distribuido entre 0 y 1 y se compara con su probabilidad de falla. De aquí, se determina si el elemento está operando o en falla y se conforma un vector de estado que representa el estado de todos los arcos de la

red. Si este vector de estado forma al menos un árbol expandido, se considera que el estado evaluado corresponde a un estado de éxito. Se repite la generación y evaluación de un cierto número de vectores de estado (RUNS). Finalmente, se estima la confiabilidad all-terminal mediante el cociente entre el número de estados de éxito entre RUNS.

Paso 3: Búsqueda exploratoria de soluciones

Se penaliza la confiabilidad de cada configuración de acuerdo con su desviación (bien sea por exceso o por defecto) con respecto a la restricción de confiabilidad mínima. La penalización se efectúa a través del parámetro α , el cual permite explorar las vecindades del espacio de solución, con la expectativa de obtener en ellas soluciones cuasi-óptimas.

Luego, se jerarquizan las configuraciones en función del costo penalizado, de la más alta a la más baja. De todas las soluciones, se considera sólo el conjunto de mejores soluciones (TOP) para actualizar las probabilidades de existencia de cada arco (elementos del vector γ): se promedian las apariciones de cada arco en el conjunto de mejores soluciones. Con este nuevo vector, se reinicia el ciclo de pasos 1-2-3 hasta que se cumpla una de las dos condiciones establecidas por las reglas de parada. Cuando esto ocurra, se procede a identificar la mejor solución, para lo cual se analiza el conjunto de soluciones y de ellas, se selecciona como solución óptima aquella que incurra en el menor costo y que cumpla con la restricción de confiabilidad.

Si ninguna de las mejores soluciones obtenidas cumple con el criterio de confiabilidad mínima, se incrementa el número de simulaciones, ésta vez partiendo de la solución con menor costo de ese grupo, hasta hallar una solución que alcance el valor de confiabilidad preestablecido.

Del análisis anterior sobre la heurística *Probabilistic Solution Discovery*

(PSDA), se desprenden los elementos fundamentales que permiten su adaptación al problema de interdicción de redes. En el siguiente capítulo se formaliza la propuesta de adaptación del PSDA.

**CAPÍTULO III ADAPTACIÓN DEL
PROBABILISTIC SOLUTION
DISCOVERY AL PROBLEMA
DE INTERDICCIÓN
DETERMINÍSTICA**

Este capítulo tiene como propósito plasmar el proceso cognitivo que conllevó a la adaptación de la heurística *Probabilistic Solution Discovery* al problema de interdicción de redes.

En primer término, se puntualizan las diferencias encontradas entre el problema de optimización de confiabilidad all-terminal en redes y el problema de interdicción de redes. En segundo término, se formaliza la propuesta de adaptación del PSDA para lograr su aplicabilidad al problema de interdicción de redes.

3.1 DIFERENCIAS ENTRE EL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN DE CONFIABILIDAD ALL-TERMINAL EN REDES Y EL PROBLEMA DE INTERDICCIÓN DE REDES

Sobre la base de lo expuesto en el capítulo anterior, puede afirmarse que el problema de optimización de confiabilidad all-terminal en redes y el problema de interdicción de redes comparten una similitud fundamental: los dos problemas involucran el hecho de hallar una configuración de red que cumpla con cierta propiedad.

En el problema de optimización de confiabilidad en redes all-terminal, el criterio de calidad contra el que se compara una posible solución es precisamente el nivel de confiabilidad alcanzada por cada configuración de red propuesta, ya que ésta debe cumplir con un requerimiento de confiabilidad mínima preestablecida. En este sentido, se enfoca la atención en el cálculo de la probabilidad de que todos los nodos en la red estén conectados entre sí. Es por ello, que en el Paso 2 del PSDA se incluye la condición de verificación de que la configuración referida en el vector de estado forme al menos un árbol expandido.

En cambio, en la versión del problema de interdicción de redes descrito en la sección 2.3 no interviene la confiabilidad. Más bien, la restricción radica en el costo incurrido en el bloqueo de los arcos que permite minimizar el flujo máximo de

unidades que atraviesa la red. Dicho costo no debe sobrepasarse de la máxima cantidad de recursos disponible.

De esta comparación se deriva que la adaptación procedente estriba en reemplazar los Pasos 2 y 3 del PSDA original, por un procedimiento que calcule el flujo máximo que atraviesa la red para cada configuración potencial y penalice dicho flujo, si para lograrlo fuera necesario incurrir en un costo de interdicción superior a la máxima cantidad de recursos disponible.

En la sección siguiente se detalla la propuesta de adaptación.

3.2 PROPUESTA DE ADAPTACIÓN DE LA HEURÍSTICA PROBABILISTIC SOLUTION DISCOVERY A LA RESOLUCIÓN DE MODELOS DE INTERDICCIÓN EN REDES (PSDA-INT)

A continuación se presenta el lenguaje simbólico del cual se sirve la propuesta de adaptación del PSDA al problema de interdicción (en lo sucesivo, PSDA-INT), cuyo planteamiento se formaliza en esta sección.

Notación empleada en la formulación de la heurística PSDA-INT

- Parámetros conocidos derivados de las características de la red en estudio y del problema en sí:

n	Número de nodos
l	Número de arcos
c_{ij}	Unidades de recurso (costo) requeridas para inhabilitar el arco entre los nodos i y j
C	Total de recursos que dispone el interdicator

- Parámetros auxiliares:

u	Contador que identifica un ciclo en la secuencia de cálculos del algoritmo
h	Contador que identifica una estrategia de interdicción generada en un ciclo dado

- K Conjunto donde se almacenan las mejores soluciones generadas en cada ciclo
- Parámetros requeridos por la heurística:
 - γ_1 Vector inicial de probabilidades de existencia de cada arco en la red (ciclo 1)
 - α Factor de penalización
 - SAMPLE Número de estrategias de interdicción construidas en cada ciclo
 - S Número de mejores soluciones extraídas del conjunto de estrategias de interdicción construidas en cada ciclo (TOP)
 - U Número máximo de ciclos (actualizaciones del vector γ_u)
 - Variables de decisión:
 - x_{ij} Variable de decisión binaria que indica si el arco entre los nodos i y j está habilitado ($x_{ij} = 1$) o inhabilitado ($x_{ij} = 0$) en la configuración de red
 - x Vector de configuración de red asociada a una estrategia de interdicción, $x = (x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{23}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{ij}, x_{n-1n})$
 - x_u^h Vector de configuración de red h-ésimo asociado a una estrategia de interdicción potencial, $x_u^h = (x_{12u}^h, \dots, x_{1nu}^h, x_{23u}^h, \dots, x_{2nu}^h, \dots, x_{iju}^h, x_{n-1nu}^h)$
 - Otras variables calculadas:
 - $C(x)$ Costo en que se incurre al implementar estrategia de interdicción según lo indicado por el vector de configuración de red
 - $C(x_u^h)$ Costo en que se incurre al implementar la h-ésima estrategia de interdicción potencial
 - $F(I)$ Flujo máximo antes de interdicción. El argumento de F es el vector $x = 1$, esto es, todos los enlaces no interdictados.
 - $F(x_u^h)$ Flujo máximo bajo la estrategia de interdicción h-ésima del ciclo u
 - $F'(x_u^h)$ Flujo máximo penalizado

γ_u	Vector de probabilidades de existencia de cada arco en la red en el ciclo u $\gamma_u = (\gamma_{12u}, \dots, \gamma_{1nu}, \gamma_{23u}, \dots, \gamma_{2nu}, \dots, \gamma_{iju}, \dots, \gamma_{n-1nu})$
γ_{iju}	Se define como $P(x_{ij} = 1)$, en el ciclo u
x^*	Vector de configuración de red asociada a la estrategia de interdicción óptima
\vee	Operador lógico "OR"

Parámetros requeridos por la heurística PSDA-INT

Antes de proceder con la formulación de la heurística PSDA-INT conviene ahondar en el conocimiento de los parámetros requeridos por ella.

- Vector inicial de probabilidades de existencia de cada arco en la red (γ_1): Este parámetro se construye sobre la base de que la probabilidad de existencia de cada arco en la red es un valor que puede variar en el rango [0,1]. Si bien es cierto que hasta tanto se resuelva el problema de interdicción, no se tendrá conocimiento sobre cuáles de los arcos conformarán la configuración de red óptima, [RAM] proponen trasladar el principio de Indiferencia o el principio de la razón insuficiente de Laplace a esta situación, y fijar en 0.5 cada elemento de γ_{ij1} . La escogencia de este valor permite que la existencia o no de cada arco en la configuración final sea igualmente probable.
- Factor de penalización (α): El factor de penalización α permite reflejar en el valor del flujo máximo de una configuración de red infactible, el empleo de una cantidad de recursos mayor a la total disponible.
- Número de estrategias de interdicción construidas en cada ciclo (SAMPLE): Dado que la estrategia de búsqueda de soluciones empleada por la heurística está basada en la generación aleatoria de muestras, resulta necesario indicar a través de SAMPLE el número de soluciones que se generarán por ciclo.
- Número de mejores soluciones extraídas del conjunto de estrategias de interdicción construidas en cada ciclo (S): Este parámetro se emplea para el

cálculo de las probabilidades indicadas en el vector γ_u . Se sugiere emplear un cociente $SAMPLE/S \approx 7$ [RAM].

- Número máximo de ciclos (U) o actualizaciones del vector γ_u . Se fija para definir una condición de parada para el algoritmo.

Es importante tener presente que para que la heurística PSDA-INT resulte atractiva con respecto a otros métodos de solución, la escogencia del valor de $SAMPLE$ debe permitir reducir significativamente el espacio de búsqueda. Es decir, el conjunto total de soluciones a explorar ($U \times SAMPLE$) debe ser menor al número máximo de combinaciones que pudiesen derivarse de la red (2^l).

Formulación de la heurística PSDA-INT

Sobre la base de la notación anterior, a continuación se describen los pasos secuenciales que usa la heurística PSDA-INT para resolver el problema de interdicción descrito en la sección 2.3.

Paso 1: Desarrollo de la estrategia de interdicción

Se genera un número determinado ($SAMPLE$) de estrategias de interdicción, que son las configuraciones de red que reflejan cuáles arcos rompe el interdicator y cuáles deja intactos. Cada una de estas estrategias es considerada como solución potencial al problema de optimización a resolver. La manera de obtener las estrategias de interdicción es generando un número uniformemente distribuido en $[0,1]$ para cada arco y comparándolo con la probabilidad de existencia de dicho arco en la red, según γ_u . Si el número aleatorio es mayor o igual que la probabilidad de existencia del arco, se indica que éste pertenece a la estrategia de interdicción. Caso contrario, el arco no está incluido en dicha estrategia.

Asimismo, en este paso se incluyen las reglas de parada del algoritmo:

- 1) Las probabilidades de aparición de los arcos en la red convergieron a 0 ó 1, o;
- 2) Se alcanza el número máximo de ciclos (actualizaciones del vector γ_u) indicado

por el usuario.

Paso 2: Análisis de la estrategia de interdicción

- Determinación del flujo máximo:

Se determina el flujo máximo de la red $G(N,A)$ entre los nodos s y t para cada una de las estrategias generadas previamente. Para ello, puede emplearse el Método de Ford-Fulkerson (descrito en el Capítulo II) por ser éste uno de los procedimientos genéricos más divulgados para resolver el problema de flujo máximo. Sin embargo, es válido usar cualquier otro método que maximice flujo en redes, o cualquier técnica que permita modelar el flujo en una red, por ejemplo en un sistema hidráulico o en un sistema eléctrico. En todo caso, lo relevante aquí es reconocer la pertinencia de este paso.

Recapitulando, el procedimiento para hallar el flujo máximo a través del Método de Ford-Fulkerson es el siguiente: 1) Seleccionar cualquier camino inicial de s a t , 2) Construir la red residual y, 3) Aplicar el algoritmo de incremento de flujo. Repetir los pasos 2 y 3 hasta que no pueda hallarse ningún camino de flujo incrementado.

- Cálculo del costo asociado a la estrategia de interdicción:

La contabilización de los recursos requeridos para implementar una estrategia de interdicción se realiza a través de $C(x_u^h) = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} \cdot (1 - x_{iju}^h)$

- Penalización del flujo máximo:

La penalización del flujo asociado a cada estrategia de interdicción se realiza cuando ésta involucra el uso de mayor cantidad de recursos que el total del que dispone el interdicator, C . Siguiendo la expresión usada en [RAM] se plantea la siguiente forma de calcular el flujo penalizado:

$$F'(x_u^h) = \begin{cases} [F(l) + F(x_u^h)] \cdot \left(\frac{C(x_u^h)}{C}\right)^\alpha & \text{si } C(x_u^h) > C \\ F(x_u^h) & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- Jerarquización del flujo máximo penalizado:

Se jerarquizan las soluciones en orden de magnitud decreciente con respecto al flujo penalizado, $F'(x_u^h)$.

Paso 3: Búsqueda exploratoria de soluciones

De todas las soluciones construidas en el Paso 2, se considera sólo el conjunto de mejores soluciones (TOP) para actualizar las probabilidades de existencia de cada arco (elementos del vector γ_u). Esto se logra promediando las apariciones de cada arco en el conjunto de mejores soluciones. Los conjuntos de mejores soluciones (TOP) obtenidos en cada ciclo se van almacenando en un conjunto K, ya que de él se seleccionará la mejor solución.

Con el nuevo vector γ_u , se reinicia el ciclo de pasos 1-2-3 hasta que se cumpla una de las dos condiciones establecidas por las reglas de parada. Cuando esto ocurra, se procede a identificar la mejor solución, para lo cual se analiza el conjunto de soluciones almacenadas en K y de ellas, se selecciona como solución óptima x^* aquella que minimice el flujo máximo y que cumpla con la restricción de disponibilidad de recursos.

Es importante enfatizar que el proceso de selección que define el conjunto de mejores soluciones es por ranking del flujo penalizado, de las cuales se eligen las mejores del grupo sin imponer condiciones al costo de interdicción asociado a la configuración de red.

La Figura III.1 presenta un pseudo-código que ilustra el procedimiento propuesto.

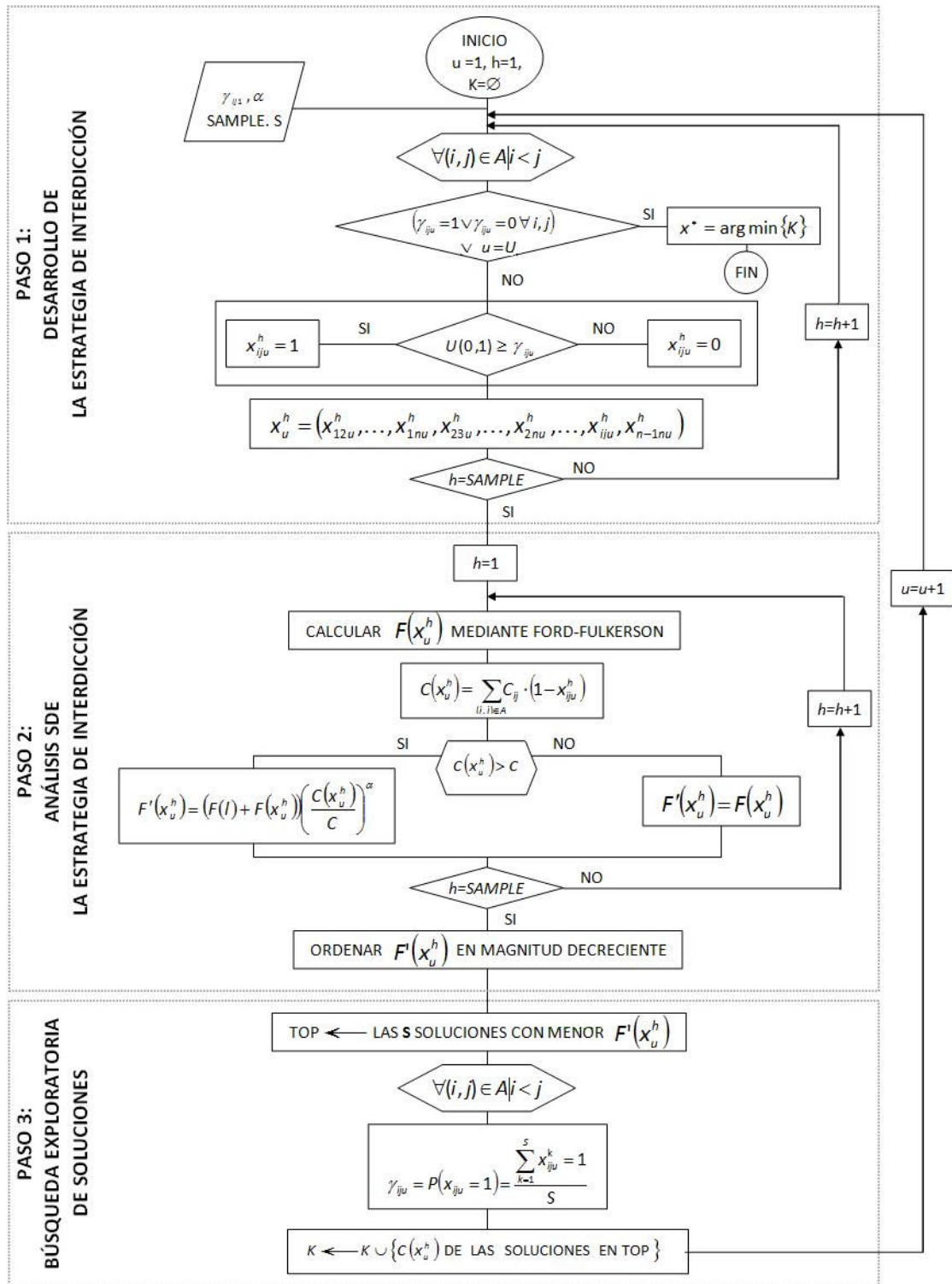


Figura III.1: Pseudo-código de la heurística PSDA-INT

Con el fin de ilustrar el algoritmo mostrado en la Figura III.1, a continuación

se presenta su aplicación al problema de red que se obtiene de la situación ficticia descrita en la sección 2.3 del Capítulo 2 (“Dilema sobre escape en una prisión”). Las capacidades máximas u_{ij} y costos de interdicción c_{ij} correspondientes a cada arco (i,j) de la red en cuestión se muestran en la Figura III.2. Esta misma información se tabula en la Tabla III.1.

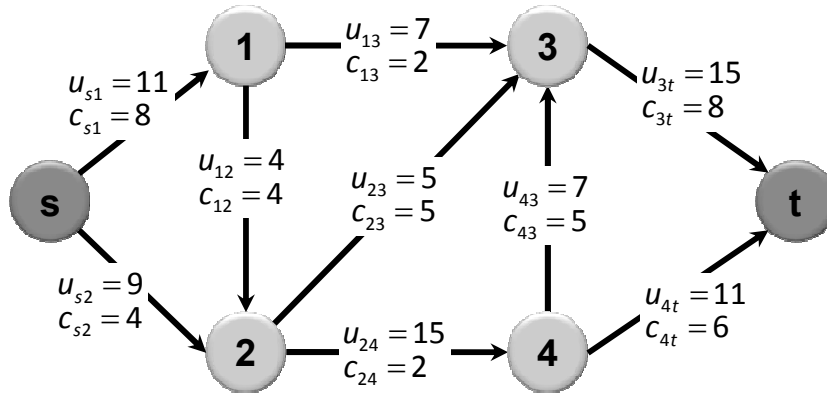


Figura III.2: Red dirigida de 6 nodos y 9 enlaces

Tabla III.1: Datos de la red dirigida de 6 nodos y 9 enlaces

	Arco	Capacidad	Costo de interdicción
1	(s,1)	11	8
2	(s,2)	9	4
3	(1,2)	4	4
4	(1,3)	7	2
5	(2,3)	5	5
6	(2,4)	15	2
7	(3,t)	15	8
8	(4,3)	7	5
9	(4,t)	11	6

Seguidamente se detalla la aplicación, paso a paso, del PSDA-INT al problema del “Dilema sobre escape en una prisión”:

PASO 1: DESARROLLO DE LA ESTRATEGIA DE INTERDICCIÓN

INICIO:

$u = 1, h = 1, K = \emptyset$

Parámetros requeridos por el algoritmo:

- Vector inicial de probabilidades de existencia de cada arco en la red: $\gamma_{ij1} = 0.5 \Rightarrow \gamma_1 = (0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5)$. Como se indicó previamente, los valores iniciales de probabilidad 0.5 permiten asignar a cada arco la misma probabilidad de existencia en la configuración final, o equivalentemente, la misma probabilidad de ser intervenido o no.
- Factor de penalización: $\alpha = 1$
- Número de estrategias de interdicción construidas en cada ciclo: $SAMPLE = 700$
- Número de mejores soluciones extraídas del conjunto de estrategias de interdicción construidas en cada ciclo (TOP): $S = 40$
- Número máximo de ciclos: $U = 10$

Generación de soluciones potenciales:

Supóngase que la generación de nueve números aleatorios uniformemente distribuidos entre 0 y 1 arroja 0.12, 0.07, 0.44, 0.31, 0.98, 0.20, 0.19, 0.76 y 0.93. Así, al evaluar la condición $U(0,1) \stackrel{?}{\geq} \gamma_{ij1}$ para cada número se obtiene la solución potencial: $x_1^1 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1)$. En ella, los arcos (2,3), (4,3) y (4,t) permanecen habilitados, mientras que el resto de los arcos son interdictados. que Luego, este proceso se repite hasta generar $SAMPLE$ estrategias de interdicción (hasta que $h = SAMPLE$).

PASO 2: ANÁLISIS DE LA ESTRATEGIA DE INTERDICCIÓN

A través de la aplicación del método de Ford-Fulkerson se obtiene que el flujo máximo de la red original (antes de interdicción) es 20, es decir, 20 reos lograrían escapar al exterior si no se intercepta ningún tramo de la red de túneles. De igual manera, el método de Ford-Fulkerson permite hallar el flujo máximo para cualquier configuración de red asociada a una estrategia de interdicción. Por ejemplo, para la primera solución potencial x_1^1 , el flujo máximo es $F(x_1^1) = 0$.

Por otro lado, se tiene que el costo de interdicción para la configuración de red x_1^1 , calculado como $C(x_1^1) = \sum_{(i,j) \in A} C_{ij} \cdot (1 - x_{ij1}^1)$, es $C(x_1^1) = 8 + 4 + 4 + 2 + 2 + 8 = 28$ unidades de recurso. Dado que esta cantidad excede el número de recursos disponibles (que son 9), el flujo penalizado viene dado por $F'(x_1^1) = (F(l) + F(x_1^1)) \left(\frac{C(x_1^1)}{C} \right)^\alpha = (20 + 0) \left(\frac{28}{9} \right)^1 = 62.22$.

Este proceso se repite hasta analizar todas las estrategias de interdicción generadas en el paso 1, luego de lo cual se ordenan en magnitud decreciente según su flujo penalizado $F'(x_1^h)$.

PASO 3: BÚSQUEDA EXPLORATORIA DE SOLUCIONES

De todas las soluciones analizadas en el paso 2, se toman las S con menor flujo penalizado $F'(x_1^h)$, y a partir de ellas se calcula la nueva probabilidad de existencia de cada arco en las estrategias de interdicción a generar en el próximo ciclo. Para tal fin, se usa la expresión siguiente:

$$\gamma_{ij2} = P(x_{ij1} = 1) = \frac{\sum_{k=1}^S x_{ij1}^k}{S} = 1$$

Por ejemplo, si de las 40 soluciones con menor flujo penalizado, el arco $(s,2)$ estuvo presente en 32, su probabilidad de existencia en la configuración de red a analizar en el segundo ciclo del algoritmo es $\gamma_{s22} = \frac{32}{40} = 0.8$. Estas probabilidades se calculan para todos los arcos de la red.

Con el nuevo vector γ_2 , se reinicia el ciclo de pasos 1-2-3 hasta que se cumpla una de las dos condiciones establecidas por las reglas de parada. Para este problema, las probabilidades de aparición de los arcos en la red γ_u evolucionan de 0.5 a 0 ó 1, en 4 ciclos (ver Tabla III.2).

Tabla III.2: Evolución del vector de probabilidades de aparición de los arcos en la red dirigida de 6 nodos y 9 enlaces

ciclo	Arco								
	(s,1)	(s,2)	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(3,t)	(4,3)	(4,t)
1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
2	1	0.8	0.825	0.55	0.75	0.525	0.925	0.825	0.875
3	1	0.475	1	0	0.525	0.2	1	1	1
4	1	1	1	0	0	0	1	1	1

La Tabla III.3 presenta las cinco mejores soluciones de cada ciclo en la corrida completa del algoritmo PSDA-INT cuando es aplicado al problema del “Dilema sobre escape en una prisión”.

Tabla III.3: Las cinco mejores soluciones obtenidas por PSDA-INT para la red dirigida de 6 nodos y 9 enlaces

	Solución	Estrategia de interdicción	Flujo máximo	Costo de interdicción	Flujo máximo penalizado
ciclo 1	1	(1,3), (2,3) y (2,4)	0	9	0
	2	(s,2) y(1,3)	4	6	4
	3	(1,3), (2,4) y (4,3)	5	9	5
	4	(1,3) y (2,4)	5	4	5
	5	(1,2), (1,3) y (2,4)	5	8	5
ciclo 2	1	(1,3), (2,3) y (2,4)	0	9	0
	2	(1,3), (2,3) y (2,4)	0	9	0
	3	(1,3), (2,3) y (2,4)	0	9	0
	4	(1,3), (2,3) y (2,4)	0	9	0
	5	(1,3), (2,3) y (2,4)	0	9	0
ciclo 3	1	(1,3), (2,3) y (2,4)	0	9	0
	2	(1,3), (2,3) y (2,4)	0	9	0
	3	(1,3), (2,3) y (2,4)	0	9	0
	4	(1,3), (2,3) y (2,4)	0	9	0
	5	(1,3), (2,3) y (2,4)	0	9	0

Finalmente, se procede a identificar la mejor solución, para lo cual se analiza el conjunto de mejores soluciones obtenidas en cada ciclo. De ellas, se selecciona

como solución óptima x^* aquella que minimice el flujo máximo y que cumpla con la restricción de disponibilidad de recursos. En este caso, la mejor solución del primer ciclo, correspondiente a $x^*=(1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1)$, es la óptima, ya que representa la estrategia de interdicción de menor costo y con mayor reducción en el flujo a través de la red. Según la solución x^* (interrumpir los arcos (1-3), (2-3) y (2,4)), lograría anular el flujo en la red, es decir, evitaría completamente la fuga de presos.

Luego de haber formulado e ilustrado la adaptación de la heurística PSDA al problema de interdicción de redes, PSDA-INT, es menester ponerla a prueba en problemas estudiados previamente por otros autores, lo cual se hará en el siguiente capítulo.

**CAPÍTULO IV ANÁLISIS DE LOS
RESULTADOS DE LA
APLICACIÓN DEL PSDA-INT**

En este capítulo se describen y analizan los resultados de la aplicación de la heurística PSDA-INT (descrita en el Capítulo III) a redes analizadas previamente por otros autores. Los problemas a abordar se clasifican en tres tipos: a) redes ilustrativas, b) redes con solución óptima conocida y c) redes con solución óptima desconocida. En el caso de las redes que han sido estudiadas desde la óptica de la interdicción (redes con solución óptima conocida), se efectúa una comparación de sus resultados con los obtenidos mediante la aplicación de la heurística PSDA-INT. Tal comparación se efectúa en términos de calidad de la solución (valores extremos y promedio) y eficiencia en el espacio de búsqueda.

Con el propósito de sistematizar la aplicación de la heurística PSDA-INT a los distintos problemas de redes, dicho algoritmo fue implementado computacionalmente en una aplicación ejecutable en PC. Esta se usó como interfaz para manipulación de parámetros, corrida del algoritmo y visualización de los resultados obtenidos. En adelante, cuando se haga referencia a esta aplicación se llamará INTERDICTOR. A modo de referencia se debe puntualizar que todos los problemas se resolvieron en una laptop Centrino Duo de 2 GHz y 2 GB de RAM.

4.1 PROBLEMAS DE REDES ILUSTRATIVAS

El primer problema de red ilustrativa seleccionado es el ejemplo prototipo planteado por [HLL] para explicar el problema de flujo máximo. Aunque la situación descrita originalmente por los autores no aborda de manera explícita el fenómeno de interdicción, se consideró que puede ser adaptada para ilustrar el proceso de interdicción y los resultados que produce el INTERDICTOR.

En este ejemplo, los autores presentan una situación acontecida en un parque de paseos y campamentos en el que existe un sistema de caminos angostos y sinuosos que conecta la entrada al parque con un mirador a un hermoso paisaje. En la Figura IV.1 se muestra este sistema de caminos, en donde **s** es la entrada del parque; las letras **A**, **B**, **C**, **D** y **E** representan la localización de las casetas

intermedias; y **t** simboliza el mirador.

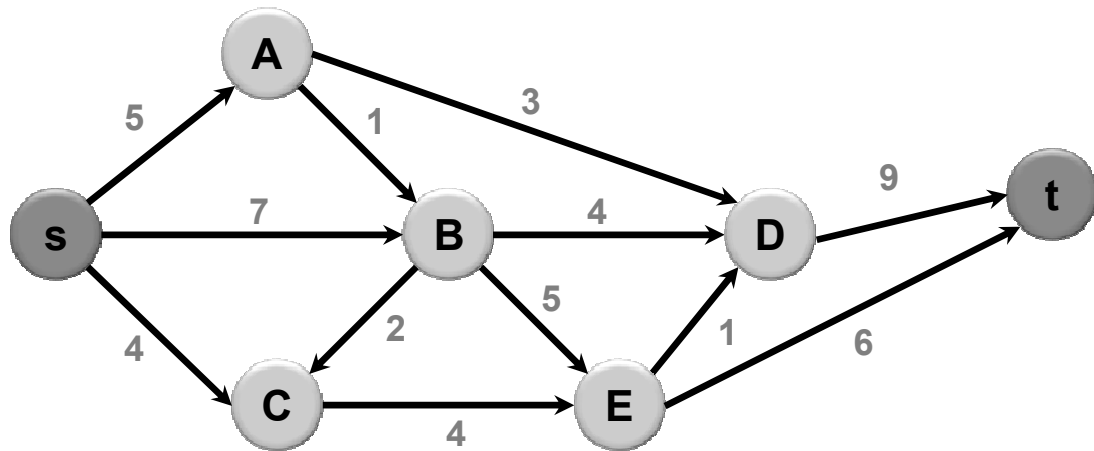


Figura IV.1: Red dirigida de 7 nodos y 12 enlaces [HLL]

El parque cuenta con varias unidades tranvías para el traslado de los visitantes desde la entrada del parque hasta el mirador. Sin embargo, para evitar perturbaciones a la ecología y a la vida silvestre existen limitaciones sobre el número de viajes de salida permitidos hacia el mirador para cada camino individual. Los números que aparecen en la Figura IV.1 indican los límites superiores de cada camino en la dirección de salida de cada estación.

Durante la temporada pico, cuando hay más personas que quieren tomar el tranvía hacia la estación **t** que aquellas a las que se les puede dar servicio, interesa seguir varias rutas para los distintos viajes, de manera que se maximice el número total de viajes que se pueden hacer al día, sin violar los límites impuestos sobre cada camino.

Con el fin de considerar la ocurrencia del fenómeno de interdicción en la situación arriba descrita, se supone que bajo ciertas circunstancias se recibe una llamada que denuncia la supuesta existencia de una bomba en el área del mirador. Dado que la política de seguridad del parque obliga a salvaguardar la vida de los visitantes, se emite la instrucción de efectuar llamadas de emergencia a los tranvías que operan en cada camino para advertirles que deben detenerse. Sin embargo, por

problemas técnicos no es posible efectuar sino una única llamada a alguno de los tramos. Además, se conoce que en los tramos (s-B) y (D-t) hay ciertos problemas de comunicación que obligan a que deba realizarse más de una llamada (2 y 3 llamadas, respectivamente) para lograr conectarla.

El problema se transforma ahora en decidir cuál llamada efectuar a algún tramo para impedir en la medida de lo posible el avance de visitantes hacia la zona del mirador.

En la Tabla IV.1 se tabulan los datos de la red que surge de la situación anteriormente descrita. En la columna *Arco* se listan los posibles tramos que contiene el sistema de caminos, mientras que en la columna *Capacidad* se indica el máximo número de viajes de salida permitidos hacia el mirador para cada camino individual. Finalmente, en la última columna se muestra el costo de interdicción, el cual representa el número de intentos que deben acometerse para lograr comunicarse con un tramo dado.

**Tabla IV.1: Datos de la red dirigida de 7 nodos y 12 enlaces
(Adaptación de [HLL])**

	<i>Arco</i>	<i>Capacidad</i>	<i>Costo de interdicción</i>		<i>Arco</i>	<i>Capacidad</i>	<i>Costo de interdicción</i>
1	(s,A)	5	1	7	(B,D)	4	1
2	(s,B)	7	2	8	(B,E)	5	1
3	(s,C)	4	1	9	(C,E)	4	1
4	(A,B)	1	1	10	(D,t)	9	3
5	(A,D)	3	1	11	(E,D)	1	1
6	(B,C)	2	1	12	(E,t)	6	1

En la Figura IV.2 se presenta la primera pestaña del INTERDICTOR con los datos correspondientes al problema en cuestión. En ella, se cargan los datos relacionados con la red.

	nododesde	nodo hasta	confiabilidad	capacidad	costo
▶	6	1	1	5	1
	6	2	1	7	2
	6	3	1	4	1
	1	2	1	1	1
	1	4	1	3	1
	2	3	1	2	1
	2	4	1	4	1
	2	5	1	5	1
	3	5	1	4	1
	4	7	1	9	3
	5	4	1	1	1
	5	7	1	6	1
*					

Figura IV.2: Pestaña RED del INTERDICTOR con los datos de la red dirigida de 7 nodos y 12 enlaces

Para esta red, el flujo máximo obtenido a través de la aplicación del método de Ford-Fulkerson es 14 (ver apéndice 2). Esto indica que el número máximo de tranvías que hubiese logrado llegar al mirador si no se hubiese efectuado la llamada para dar el alerta sobre la existencia de la bomba sería 14. La interrogante que se plantea es: ¿A cuánto pudiese reducirse esta cifra si se efectúa la llamada de alerta a alguno de los tramos del camino hacia el mirador?

Con el propósito de conocer su respuesta procede aplicar el PSDA-INT a la red. Pero antes, deben definirse completamente los parámetros requeridos por el algoritmo.

De las 2^{12} (4096) soluciones potenciales que podrían originarse de esta red, se analizaron sólo 2500 soluciones distribuidas en un máximo de 5 ciclos, es decir, se fijó $SAMPLE=500$ y $U=5$. Esta combinación de parámetros permite reducir el espacio de búsqueda un 38.96%. Asimismo, de las 500 redes generadas en cada ciclo, se emplearon 70 para actualizar el vector de probabilidades de aparición de los arcos en la red ($S=70$), en correspondencia con el cociente sugerido de $SAMPLE/S \approx 7$.

La semilla empleada para generar los números uniformemente distribuidos en $[0,1]$ que permiten obtener las distintas estrategias de interdicción se fijó en un valor arbitrario de 87654. Por su parte, el factor de penalización se fijó originalmente en 1.

En la Figura IV.3 se presenta la segunda pestaña del INTERDICTOR con los datos correspondientes al problema en cuestión. En ella, se cargan los parámetros mencionados arriba, los cuales son requeridos por el PSDA-INT.

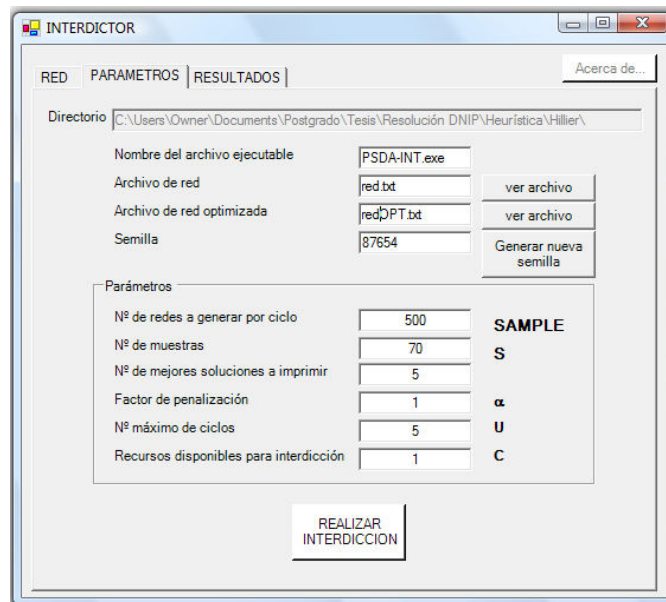


Figura IV.3: Pestaña PARÁMETROS del INTERDICTOR con los datos de la red dirigida de 7 nodos y 12 enlaces

De la aplicación del PSDA-INT a esta red se obtiene la evolución del vector de probabilidades de aparición de los arcos que se muestra en la Tabla IV.2. En ella, puede apreciarse que en el ciclo 5 se alcanzaron las dos condiciones de parada contempladas en el algoritmo. Por una parte, todas las probabilidades de aparición de los arcos convergieron a 0 ó 1, y por la otra, se alcanzó el máximo número de ciclos establecido originalmente (cinco). El último vector de probabilidades apunta a que la configuración final de la red luego de la interdicción tiene el arco (E,t) inhabilitado.

Tabla IV.2: Evolución del vector de probabilidades de aparición de los arcos en la red dirigida de 7 nodos y 12 enlaces

ciclo	Arco											
	(s,A)	(s,B)	(s,C)	(A,B)	(A,D)	(B,C)	(B,D)	(B,E)	(C,E)	(D,t)	(E,D)	(E,t)
1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
2	0.66	0.7	0.686	0.729	0.586	0.743	0.471	0.757	0.729	0.914	0.771	0.6
3	0.83	1	0.857	0.957	0.829	0.929	0.586	0.886	0.914	1	0.943	0.7
4	1	1	1	1	1	1	0.5	1	1	1	1	0.5
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

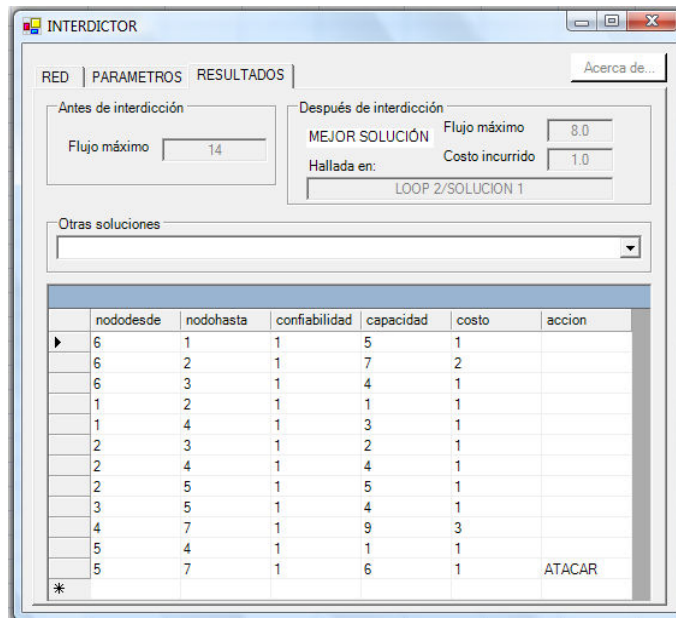
La Tabla IV.3 muestra las 5 mejores soluciones para cada ciclo del PSDA-INT.

Tabla IV.3: Las cinco mejores soluciones obtenidas por PSDA-INT en los 4 ciclos para la red dirigida de 7 nodos y 12 enlaces

	Solución	Estrategia de interdicción	Flujo máximo	Costo de interdicción	Flujo máximo penalizado
ciclo 1	1	4	14	1	14
	2	5, 8	8	2	44
	3	5, 6	11	2	50
	4	3, 7, 12	4	3	54
	5	5, 7, 8, 9	0	4	56
ciclo 2	1	12	8	1	8
	2	7	10	1	10
	3	7	10	1	10
	4	7	10	1	10
	5	7	10	1	10
ciclo 3	1	12	8	1	8
	2	12	8	1	8
	3	12	8	1	8
	4	12	8	1	8
	5	12	8	1	8
ciclo 4	1	12	8	1	8
	2	12	8	1	8
	3	12	8	1	8
	4	12	8	1	8
	5	12	8	1	8

En la Tabla IV.3 se puede apreciar cómo PSDA-INT halló la mejor solución por primera vez en el segundo ciclo, luego del cual sólo se habían evaluado 10^3 redes (24.24% del espacio de soluciones completo). Esta solución se refiere a efectuar la llamada de alerta sobre la emergencia al arco 12 (tramo E-t), con lo cual podría lograrse una reducción en el flujo de tranvías hacia el mirador de 14 a 8. En esta tabla se observa también que sólo en el primer ciclo se produjo penalización del flujo máximo, puesto que del ciclo 2 en adelante el costo de las estrategias de interdicción evaluadas fue justamente la unidad de recurso disponible para tal fin.

En la Figura IV.4 se presenta la tercera pestaña del INTERDICTOR con los datos correspondientes a los resultados de la aplicación del PSDA-INT a la red estudiada. En ella, puede visualizarse el flujo máximo antes y después de interdicción y el costo incurrido en lograr la respectiva disminución de flujo. Asimismo, puede conocerse en qué ciclo fue evaluada por primera vez la mejor solución hallada por el algoritmo. En la última columna de la tabla, el INTERDICTOR detalla explícitamente la estrategia de interdicción asociada a la mejor solución obtenida.



Antes de interdicción	Después de interdicción
Flujo máximo: 14	MEJOR SOLUCIÓN: Flujo máximo 8.0
	Hallada en: Costo incurrido 1.0
	LOOP 2/SOLUCION 1

nododesde	nodohasta	confiabilidad	capacidad	costo	accion
6	1	1	5	1	
6	2	1	7	2	
6	3	1	4	1	
1	2	1	1	1	
1	4	1	3	1	
2	3	1	2	1	
2	4	1	4	1	
2	5	1	5	1	
3	5	1	4	1	
4	7	1	9	3	
5	4	1	1	1	
5	7	1	6	1	ATACAR
*					

Figura IV.4: Pestaña RESULTADOS del INTERDICTOR con los datos de la red dirigida de 7 nodos y 12 enlaces

Dado que el problema de red ilustrativa seleccionado es un ejemplo prototipo académico orientado al problema de flujo máximo, no existe óptimo reportado para esta red como problema de interdicción determinística.

Sin embargo, el óptimo fue hallado empleando el modelo analítico para resolver el problema de interdicción determinística desarrollado por Wood (1993) el cual se encuentra detallado en el apéndice 1. La solución óptima corresponde precisamente a intervenir el arco E-t (efectuar la llamada de alerta a ese tramo) para reducir el flujo máximo en la red de 14 a 8 tranvías.

El segundo problema de red ilustrativa seleccionado es la red propuesta por Yoo y Deo para analizar el tema de confiabilidad en redes [YOO] (ver Figura IV.5). Se trata de una red dirigida de 11 nodos y 21 arcos.

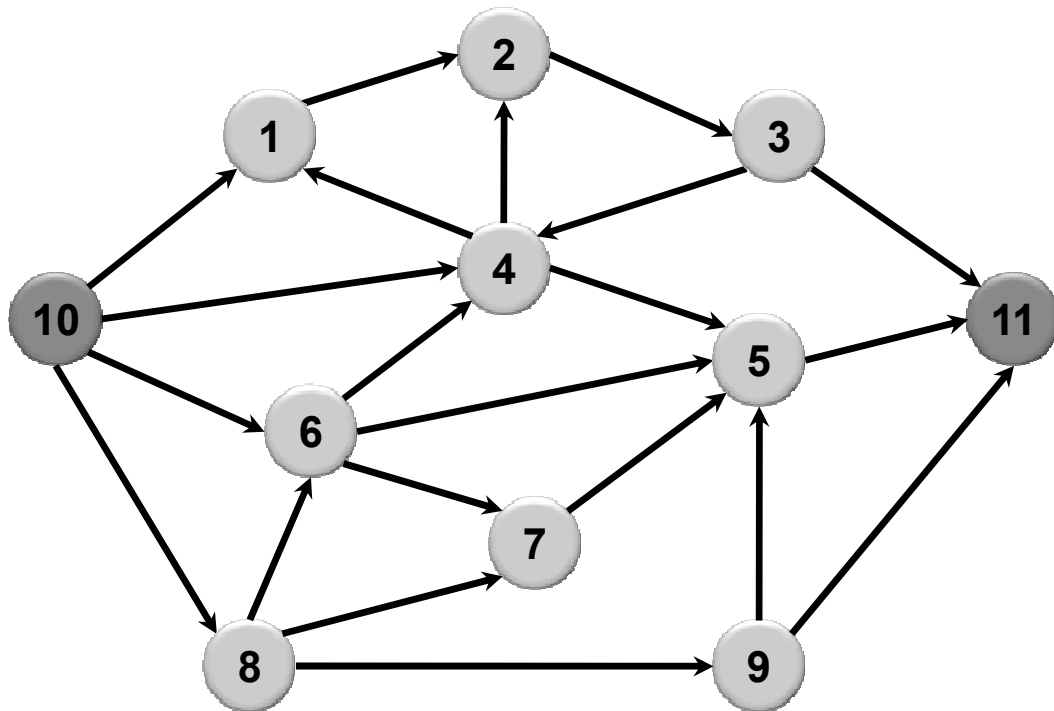


Figura IV.5: Red dirigida de 11 nodos y 21 enlaces [YOO]

La capacidad de todos los arcos que conforman la red es 100 unidades y se le fijó un valor unitario al costo de interdicción de cada uno de ellos (ver Tabla IV.4).

Tabla IV.4: Datos de la red dirigida de 11 nodos y 21 enlaces [YOO]

	<i>Arco</i>	<i>Capacidad</i>	<i>Costo de interdicción</i>		<i>Arco</i>	<i>Capacidad</i>	<i>Costo de interdicción</i>
1	(1,2)	100	1	12	(7,5)	100	1
2	(2,3)	100	1	13	(8,6)	100	1
3	(3,4)	100	1	14	(8,7)	100	1
4	(3,11)	100	1	15	(8,9)	100	1
5	(4,1)	100	1	16	(9,5)	100	1
6	(4,2)	100	1	17	(9,11)	100	1
7	(4,5)	100	1	18	(10,1)	100	1
8	(5,11)	100	1	19	(10,4)	100	1
9	(6,4)	100	1	20	(10,6)	100	1
10	(6,5)	100	1	21	(10,8)	100	1
11	(6,7)	100	1				

A pesar de que esta red también ha sido empleada por otros autores para evaluar métodos de resolución de problemas de confiabilidad en redes, hasta ahora no ha sido objeto de estudio desde el punto de vista de la interdicción de redes.

Sin embargo, si se hace una analogía entre el concepto de interdicción y el de corte, se encuentra que existe un común denominador: ambos pueden vincularse con la inhabilitación de arcos en una red. En el primer caso, un interdicator se propone usar recursos para inhabilitar arcos de la red operada por su adversario y así atenuar el flujo máximo entre la fuente y el sumidero. En el segundo caso, se buscan combinaciones de arcos que al quedar inhabilitados corten todos los caminos entre la fuente y el sumidero. Así, se trata de dos situaciones que pueden abordarse con un mismo enfoque si se considera el caso en que la interdicción tenga como propósito anular completamente el flujo máximo entre la fuente y el sumidero.

En línea con el planteamiento anterior, se efectuó un ejercicio en el que se empleó el PSDA-INT como instrumento de detección de cortes para esta red. Dicho ejercicio consistió en lo siguiente:

- Se inició considerando que se tenía 1 unidad de recurso disponible. Esta suposición busca determinar si existe un corte mínimo de primer orden, es decir, si existe algún arco en la red que cuando es inhabilitado de manera individual provoca que el flujo en ésta sea cero.
- Luego se hizo un barrido con incrementos unitarios hasta alcanzar la cantidad mínima requerida para anular el flujo a través de la red. En estos casos, se busca establecer si existen cortes mínimos de segundo orden, tercer orden, y así sucesivamente. En otras palabras, se trata de precisar si existen combinaciones de arcos en la red cuya inhabilitación simultánea provoca que el flujo en ésta sea cero.

En la Tabla IV.5 se muestra un extracto de los resultados derivados de la realización de este procedimiento. El flujo máximo antes de interdicción es 300. Se reportan tanto los recursos disponibles para interdicción como el costo de interdicción ya que, aunque en este problema coinciden, no siempre este es el caso (en la sección IV.2 se presentará un ejemplo de ello).

Tabla IV.5: Estrategias de interdicción obtenidas por PSDA-INT para la red dirigida de 11 nodos y 21 enlaces

Recursos disponibles para interdicción	Estrategia de interdicción	Costo de interdicción	Flujo máximo después de interdicción
1	(2,3) o (5,11) o (9,11) o (8,9), entre otros	1	200
2	(5,11) y (9,11) o (2,3) y (10,8) o (2,3) y (5,11), entre otros	2	100
3	(3,11), (5,11) y (9,11) o (2,3), (5,11) y (9,11) o (3,11), (5,11) y (10,8), entre otros	3	0

Dado que cuando sólo se disponen de 1 ó 2 recursos para interdicción el flujo máximo no se anula, puede afirmarse que PSDA-INT no detectó cortes de primer o segundo orden. En cambio, disponer de 3 unidades de recurso para interdicción

permitió que el flujo máximo se redujera a cero. Siendo así, puede afirmarse que en estos casos el PSDA-INT detectó cortes mínimos de tercer orden.

Otro aspecto relevante en este problema es que esta anulación del flujo $s-t$ puede lograrse mediante un conjunto de estrategias de interdicción equivalentes. De acuerdo con la Tabla IV.5, si se inhabilitan los arcos (3,11), (5,11) y (9,11) se reduce el flujo mínimo a cero. Lo mismo se lograría al inhabilitar los arcos (2,3), (5,11) y (9,11). Como puede notarse, si bien es cierto que el uso del INTERDICTOR no garantiza la determinación efectiva de todos los cortes, sí ilustra la capacidad que tiene para detectarlos.

Del análisis anterior se desprende que el aumento del presupuesto de interdicción constituye una manera artificial de determinar cortes de orden superior. Una forma de determinar todos los cortes es:

- Se determina, si existe, un corte de primer orden, fijando en 1 el recurso disponible. De existir, se asigna un valor alto al costo de interdicción de ese arco y se repite el procedimiento de interdicción. Si no se encuentra ninguna solución, significa que no hay más cortes de primer orden. El costo de interdicción alto puede fijarse en 1000 unidades de recurso, ya que este valor es comparativamente mucho mayor que 1.
- Luego se incrementa el recurso disponible a dos unidades y se repite el procedimiento de interdicción. Cada vez que se obtenga un corte de segundo orden, se asignan valores altos al costo de interdicción de los arcos que intervienen y se repite el procedimiento hasta no hallar más soluciones.
- El procedimiento se repite hasta que a todos los arcos de la red se les haya asignado un costo de interdicción alto.

Este procedimiento es largo y computacionalmente no eficiente, pero muestra cómo con la interdicción pueden hallarse los cortes mínimos de una red, a la vez que permite validar la heurística PSDA-INT.

4.2 PROBLEMAS DE REDES CON SOLUCIÓN ÓPTIMA CONOCIDA

En esta sección se muestran los resultados de la aplicación de la heurística PSDA-INT a dos problemas de interdicción de redes, cuya solución óptima se conoce y que han sido resueltos previamente en la literatura. En el contexto del problema en cuestión (y según se explicó en la sección 2.3 del Capítulo II), el óptimo se refiere al valor mínimo que puede tomar el flujo máximo que atraviesa la red, luego de la inhabilitación de uno o más de sus arcos.

La primera red considerada (ver Figura IV.6) fue empleada por [DAI] en 2002 para ilustrar la resolución del problema de interdicción determinística a través de un algoritmo genético. Se trata de una red dirigida de 20 nodos y 30 enlaces, con un sólo nodo fuente y un sólo nodo sumidero.

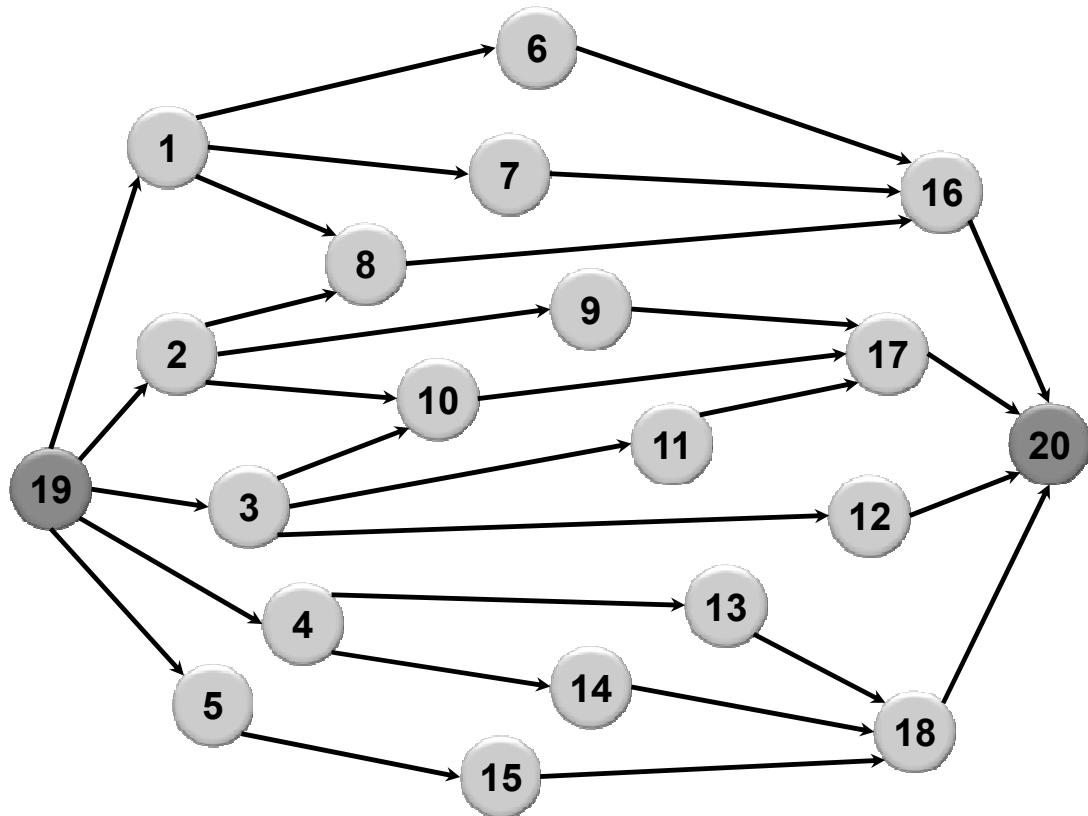


Figura IV.6: Red dirigida de 20 nodos y 30 enlaces [DAI]

Los datos de la red se muestran en la Tabla IV.6.

Tabla IV.6: Datos de la red dirigida de 20 nodos y 30 enlaces [DAI]

	<i>Arco</i>	<i>Capacidad</i>	<i>Costo de interdicción</i>		<i>Arco</i>	<i>Capacidad</i>	<i>Costo de interdicción</i>
1	(1,6)	8	4	16	(9,17)	10	3
2	(1,7)	4	4	17	(10,17)	11	3
3	(1,8)	9	3	18	(11,17)	13	2
4	(2,8)	13	5	19	(12,20)	13	6
5	(2,9)	7	4	20	(13,18)	13	3
6	(2,10)	6	5	21	(14,18)	4	4
7	(3,10)	5	5	22	(15,18)	9	4
8	(3,11)	12	5	23	(16,20)	15	8
9	(3,12)	7	5	24	(17,20)	11	6
10	(4,13)	8	3	25	(18,20)	14	7
11	(4,14)	15	2	26	(19,1)	11	8
12	(5,15)	8	6	27	(19,2)	8	9
13	(6,16)	10	3	28	(19,3)	11	7
14	(7,16)	4	4	29	(19,4)	13	10
15	(8,16)	7	2	30	(19,5)	6	12

El flujo máximo entre la fuente y el sumidero en esta red antes de la interdicción es 44 unidades. Los autores plantean entonces: ¿A cuánto puede reducirse esta cifra si se dispone de un total de 9 recursos para interdicción?.

De las 2^{30} soluciones potenciales que se derivan de esta red, se analizaron 10^4 soluciones distribuidas en un máximo de 10 ciclos, es decir, se fijó $SAMPLE=1000$ y $U=10$. Esta combinación de parámetros permite reducir el espacio de búsqueda un 99.999%. Asimismo, de las 1000 redes generadas en cada ciclo, se emplearon 140 para actualizar el vector de probabilidades de aparición de los arcos en la red $S=140$.

La Tabla IV.7 presenta la evolución del vector de probabilidades de aparición de los arcos a medida que avanzan los primeros 5 ciclos del PSDA-INT. Aunque no se muestra el ciclo 1, no debe perderse de vista que, según fue explicado en la sección 3.1 del Capítulo III, todas las probabilidades de existencia iniciales de cada arco en la red son 0.5.

Tabla IV.7: Evolución del vector de probabilidades de aparición de los arcos en la red dirigida de 20 nodos y 30 enlaces

ciclo 2	Arco	(1,6)	(1,7)	(1,8)	(2,8)	(2,9)	(2,10)	(3,10)	(3,11)	(3,12)	(4,13)
	Probabilidad	0.621	0.55	0.579	0.671	0.55	0.629	0.614	0.686	0.671	0.621
	Arco	(4,14)	(5,15)	(6,16)	(7,16)	(8,16)	(9,17)	(10,17)	(11,17)	(12,20)	(13,18)
	Probabilidad	0.486	0.686	0.507	0.557	0.521	0.5	0.571	0.6	0.6	0.607
	Arco	(14,18)	(15,18)	(16,20)	(17,20)	(18,20)	(19,1)	(19,2)	(19,3)	(19,4)	(19,5)
	Probabilidad	0.607	0.564	0.564	0.614	0.55	0.764	0.729	0.636	0.786	0.836
ciclo 3	Arco	(1,6)	(1,7)	(1,8)	(2,8)	(2,9)	(2,10)	(3,10)	(3,11)	(3,12)	(4,13)
	Probabilidad	0.7	0.657	0.721	0.85	0.671	0.736	0.714	0.836	0.779	0.664
	Arco	(4,14)	(5,15)	(6,16)	(7,16)	(8,16)	(9,17)	(10,17)	(11,17)	(12,20)	(13,18)
	Probabilidad	0.521	0.871	0.529	0.693	0.457	0.521	0.721	0.643	0.764	0.7
	Arco	(14,18)	(15,18)	(16,20)	(17,20)	(18,20)	(19,1)	(19,2)	(19,3)	(19,4)	(19,5)
	Probabilidad	0.757	0.629	0.757	0.7	0.607	0.929	0.921	0.736	0.964	0.986
ciclo 4	Arco	(1,6)	(1,7)	(1,8)	(2,8)	(2,9)	(2,10)	(3,10)	(3,11)	(3,12)	(4,13)
	Probabilidad	0.836	0.8	0.771	0.95	0.814	0.914	0.929	0.964	0.886	0.793
	Arco	(4,14)	(5,15)	(6,16)	(7,16)	(8,16)	(9,17)	(10,17)	(11,17)	(12,20)	(13,18)
	Probabilidad	0.6	0.964	0.657	0.814	0.45	0.686	0.836	0.686	0.921	0.779
	Arco	(14,18)	(15,18)	(16,20)	(17,20)	(18,20)	(19,1)	(19,2)	(19,3)	(19,4)	(19,5)
	Probabilidad	0.879	0.693	0.886	0.864	0.807	0.979	0.986	0.836	1	1
ciclo 5	Arco	(1,6)	(1,7)	(1,8)	(2,8)	(2,9)	(2,10)	(3,10)	(3,11)	(3,12)	(4,13)
	Probabilidad	0.943	0.964	0.9	1	0.964	0.971	0.993	1	0.971	0.821
	Arco	(4,14)	(5,15)	(6,16)	(7,16)	(8,16)	(9,17)	(10,17)	(11,17)	(12,20)	(13,18)
	Probabilidad	0.7	1	0.793	0.95	0.579	0.821	0.957	0.743	0.993	0.886
	Arco	(14,18)	(15,18)	(16,20)	(17,20)	(18,20)	(19,1)	(19,2)	(19,3)	(19,4)	(19,5)
	Probabilidad	0.95	0.886	0.979	0.971	0.964	1	0.993	0.971	1	1

La solución óptima de este problema es un flujo máximo después de interdicción de 29 [DAI]. En la Tabla IV.8 se muestra cómo el PSDA-INT consiguió dicha solución óptima en el cuarto ciclo, luego de evaluar menos de 4000 redes (0.0004% del espacio de soluciones completo). También puede apreciarse en los ciclos 1 y 2, cómo actúa la penalización sobre el flujo cuando el costo de interdicción excede la cantidad total de recursos disponibles.

Tabla IV.8: Las cinco mejores soluciones obtenidas por PSDA-INT en los 5 primeros ciclos para la red dirigida de 20 nodos y 30 enlaces

	Solución	Estrategia de interdicción	Flujo máximo	Costo de interdicción	Flujo máximo penalizado
ciclo 1	1	3, 9, 11, 13, 14, 20, 22, 23	11	32	195.6
	2	1, 5, 10, 11, 13, 16, 17, 18, 28	17	31	210.11
	3	6, 13, 16, 18, 22, 23, 24, 25	7	38	215.3
	4	2, 3, 5, 8, 11, 15, 17, 23, 25	7	38	215.3
	5	3, 13, 15, 16, 17, 23, 29	17	32	216.9
ciclo 2	1	6, 11, 15, 19, 20	28	18	144
	2	1, 6, 10, 11, 14, 15	24	20	151,1
	3	3, 10, 11, 13, 15, 18, 22, 24	11	25	152,8
	4	1, 7, 11, 15, 18, 20, 22	19	22	154
	5	1, 5, 14, 16, 18	38	17	154,9
ciclo 3	1	10, 15, 18	39	7	39
	2	3, 16, 20	40	9	40
	3	14, 15, 18	40	8	40
	4	16, 18, 22	42	9	42
	5	3, 11, 15, 18	43	9	43
ciclo 4	1	15, 25	29	9	29
	2	15, 25	29	9	29
	3	10, 11, 22	30	9	30
	4	25	30	7	30
	5	1, 15, 20	32	9	32
ciclo 5	1	15, 25	29	9	29
	2	11, 20, 22	30	9	30
	3	25	30	7	30
	4	25	30	7	30
	5	11, 25	30	9	30

Asimismo, el extracto de resultados presentados en la Tabla IV.8 refleja la naturaleza de la búsqueda efectuada por el PSDA-INT, según la cual los ciclos no se detienen al encontrar la solución óptima. Esto debido a que el algoritmo realiza la escogencia de la mejor solución factible hallada (menor flujo máximo penalizado y costo

de interdicción menor al total de recursos disponible) luego de que se cumple una de las condiciones de parada del algoritmo (ver sección 3.2 del Capítulo III).

La aplicación del algoritmo genético (AG) desarrollado por [DAI] a este problema en 10 corridas independientes produjo un flujo máximo promedio después de interdicción de 30.3 unidades, con una varianza asociada de 2.2 unidades. En cambio, PSDA-INT produjo un flujo máximo promedio después de interdicción de 29.1 unidades, con una varianza asociada de 0.1 unidades. En otras palabras, el AG logró obtener la solución óptima en 40% de las corridas, mientras que PSDA-INT alcanzó dicha solución en el 90% de las corridas efectuadas.

Sin embargo, con el fin de poner a prueba la robustez de la heurística PSDA-INT, se realizaron 100 corridas adicionales, variando en cada oportunidad la semilla empleada para generar los números uniformemente distribuidos en [0,1] que permiten obtener las distintas estrategias de interdicción (ver Paso 1 de la formulación del algoritmo PSDA-INT). A partir de ellas, PSDA-INT produjo un flujo máximo promedio después de interdicción de 29.14 unidades, con una varianza asociada de 0.12 unidades. Esta estadística es consecuencia de que el PSDA-INT logró obtener la solución óptima en 86% de las corridas efectuadas.

Asimismo, este ejercicio permitió determinar que hay semillas a partir de las cuales el PSDA-INT produce soluciones distintas a la óptima. Tal es el caso de 67617, 99941, 36401, 27934 y 98609, con las que la solución encontrada reduce el flujo máximo a 30 unidades, a pesar de que tiene asociada un costo de interdicción de 9 recursos. Por otra parte, se encontró que con las semillas 86261 y 41276 la solución encontrada también reduce el flujo máximo a 30 unidades, pero en este caso incurre en un costo de interdicción de 7 recursos.

En concordancia con lo anterior, puede afirmarse que pese a que el PSDA-INT demostró buena capacidad de búsqueda en las 10 corridas originales, esto no necesariamente significa que este algoritmo garantice que pueda encontrar la solución óptima. No obstante, las 100 corridas de prueba realizadas en adición a las

anteriores revelan que las soluciones encontradas que resultaron distintas a la óptima constituyeron menos del 15% del total de pruebas. Más aun, el valor del flujo obtenido en estos casos estuvo muy cercano al valor óptimo.

Para completar el estudio de esta red se efectuó un análisis de sensibilidad sobre el parámetro C (cantidad total de recursos disponibles para interdicción), partiendo desde 1 unidad disponible y haciendo un barrido con incrementos unitarios hasta alcanzar la cantidad mínima requerida para anular el flujo a través de la red. Se efectuaron 10 corridas para la determinación de cada flujo máximo. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura IV.7. Para el flujo máximo se reportan los valores mínimos y máximos producidos por el PSDA-INT .

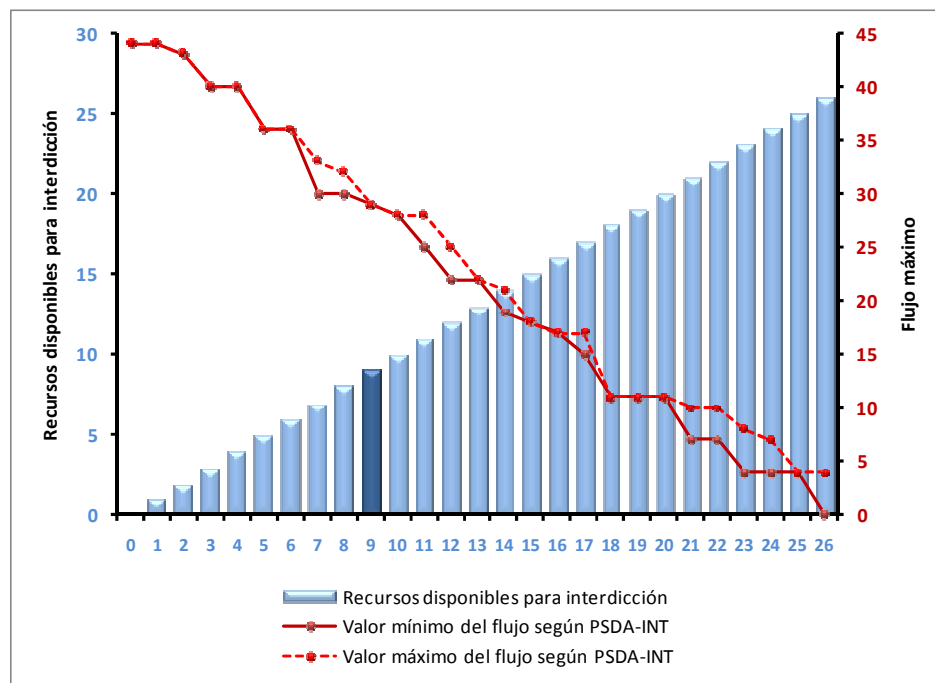


Figura IV.7: Análisis de sensibilidad sobre la cantidad de recursos disponibles para interdicción en la red dirigida de 20 nodos y 30 enlaces

De este análisis de sensibilidad se deriva un resultado elemental, que es que destinar un solo recurso para interdicción no reduce el flujo máximo. Esto resulta evidente debido a que no existe ningún arco en la red cuyo costo de interdicción sea 1. Otro resultado menos previsible es la solución hallada por PSDA-INT que indica que es posible anular el flujo en la red mediante la inhabilitación de los arcos (3,12), (16, 20),

(17, 20) y (18, 20), a un costo de interdicción de 26 unidades de recurso.

Más aún, la curva permite al interdictor visualizar claramente el impacto que tiene la variación en la cantidad de recursos disponibles para la interdicción de la red sobre la reducción efectiva del flujo que puede lograrse. Se habla de reducción efectiva debido a que para ciertos incrementos de recursos destinados a interdicción, no se observa disminución alguna del flujo máximo. Este es el caso que se presenta cuando se disponen 19 ó 20 recursos para intervenir la red, con lo cual el flujo que la atraviesa se reduce a 11 unidades, lo cual ya se lograba al destinar sólo 18 unidades de recurso.

Puede notarse entonces cómo la información derivada del análisis de sensibilidad constituye un conjunto de elementos críticos de decisión para el interdictor ya que lo orienta en la selección de las estrategias que permiten atenuar al adversario que opera en esta red. Adicionalmente, este análisis de sensibilidad permite la obtención de una curva de Flujo máximo vs Costo que pudiera interpretarse como una aproximación a la frontera de Pareto, típica de los problemas multiobjetivo, obtenida en este caso mediante la ejecución repetida del INTERDICTOR.

La tercera red considerada (ver Figura IV.8) fue empleada por Wood como ejemplo numérico para ilustrar la aplicación de un modelo propuesto por él en el año 1993 para resolver el problema de interdicción determinística.

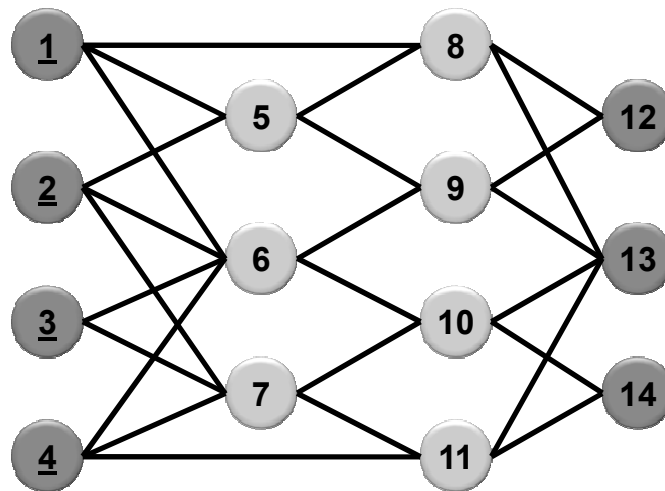


Figura IV.8: Red no dirigida de 14 nodos y 25 enlaces [WOO]

Los datos de la red se muestran en la Tabla IV.9.

Tabla IV.9: Datos de la red dirigida de 14 nodos y 25 enlaces [WOO]

	<i>Arco</i>	<i>Capacidad</i>	<i>Costo de interdicción</i>		<i>Arco</i>	<i>Capacidad</i>	<i>Costo de interdicción</i>
1	(1,5)	60	5	14	(6,9)	120	4
2	(1,8)	70	4	15	(6,10)	150	6
3	(1,6)	60	5	16	(7,10)	120	6
4	(2,5)	50	3	17	(7,11)	80	4
5	(2,6)	50	3	18	(8,12)	80	4
6	(2,7)	60	5	19	(8,13)	50	5
7	(3,6)	100	3	20	(9,12)	100	5
8	(3,7)	80	5	21	(9,13)	80	4
9	(4,6)	50	5	22	(10,13)	180	6
10	(4,7)	100	5	23	(10,14)	100	4
11	(4,11)	80	4	24	(11,13)	80	5
12	(5,8)	60	4	25	(11,14)	100	6
13	(5,9)	60	7				

El flujo máximo entre la fuente y el sumidero antes de interdicción es 720 unidades [WOO]. La disponibilidad de recursos para interdicción considerada por Wood fue de 15 unidades.

La relevancia de estudiar esta red reside en el hecho de que tiene dos características que la diferencian de las anteriormente analizadas en este Trabajo de Grado: 1) Es no dirigida y 2) Tiene múltiples nodos fuente y múltiples nodos sumidero.

La primera condición se aborda sustituyendo cada arco no dirigido por un par de arcos dirigidos en direcciones opuestas. Este reemplazo se haría para los arcos que conectan los nodos 5 y 8, 5 y 9, 6 y 9, 6 y 10, 7 y 10 y 7 y 11. La Tabla IV.10 muestra los datos adicionados a la red original de [WOO] para su conversión de red no dirigida en dirigida.

Tabla IV.10: Datos adicionados a la red original de [WOO] para su conversión de no dirigida en dirigida

	<i>Arco</i>	<i>Capacidad</i>	<i>Costo de interdicción</i>		<i>Arco</i>	<i>Capacidad</i>	<i>Costo de interdicción</i>
26	(5,1)	60	5	39	(9,6)	120	4
27	(8,1)	70	4	40	(10,6)	150	6
28	(6,1)	60	5	41	(10,7)	120	6
29	(5,2)	50	3	42	(11,7)	80	4
30	(6,2)	50	3	43	(12,8)	80	4
31	(7,2)	60	5	44	(13,8)	50	5
32	(6,3)	100	3	45	(12,9)	100	5
33	(7,3)	80	5	46	(13,9)	80	4
34	(6,4)	50	5	47	(13,10)	180	6
35	(7,4)	100	5	48	(14,10)	100	4
36	(11,4)	80	4	49	(13,11)	80	5
37	(8,5)	60	4	50	(14,11)	100	6
38	(9,5)	60	7				

Con respecto a la segunda condición, se requiere convertir la red en una que tenga una sola fuente y un solo sumidero. Para ello, se agrega una superfuente que alimente a todas las fuentes de la red original mediante arcos unidireccionales artificiales de capacidad infinita. Luego se efectúa un procedimiento análogo agregando un supersumidero. Los datos adicionados a la red original de [WOO] relativos a la superfuente y al supersumidero se encuentran en la Tabla IV.11.

Tabla IV.11: Datos adicionados a la red original de [WOO] relativos a la superfuente y al supersumidero

	<i>Arco</i>	<i>Capacidad</i>	<i>Costo de interdicción</i>		<i>Arco</i>	<i>Capacidad</i>	<i>Costo de interdicción</i>
51	(15,1)	1000	1000	55	(12,16)	1000	1000
52	(15,2)	1000	1000	56	(13,16)	1000	1000
53	(15,3)	1000	1000	57	(14,16)	1000	1000
54	(15,4)	1000	1000				

Con estas transformaciones, la red pasa de tener 14 nodos y 25 enlaces a

tener 16 nodos y 57 enlaces, según puede apreciarse en la Figura V.9.

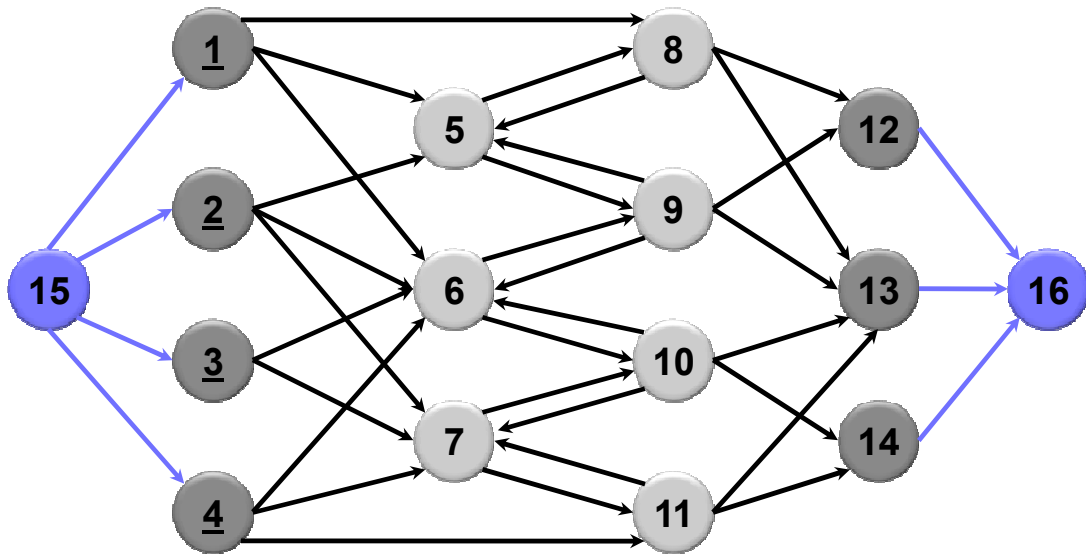


Figura IV.9: Red dirigida de 16 nodos y 57 enlaces (Adaptación de [WOO])

De las 2^{25} soluciones que resultarían de la enumeración explícita de las posibles configuraciones de red, se analizaron 10^4 soluciones distribuidas en un máximo de 10 ciclos. Se tomó la misma combinación de parámetros empleada en la red de [DAI] ($SAMPLE=1000$ y $U=10$), para reducir el espacio de búsqueda un 99.9991%. El tamaño de la muestra escogido para actualizar el vector de probabilidades de aparición de los arcos en la red en cada ciclo fue de 140 ($S=140$).

Al aplicar el PSDA-INT a la red de la Figura IV.9 se obtiene la evolución del vector de probabilidades de aparición de los arcos mostrada en la Tabla IV.12. Cabe acotar que en ella se reportan los valores de probabilidad γ de los arcos ij únicamente, dado que se supuso que $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$. Sin embargo, no necesariamente es este siempre el caso. Supóngase que el enlace no dirigido entre los nodos 5 y 8 de la red original, reemplazado por dos arcos dirigidos en direcciones opuestas (5,8) y (8,5), representa una carretera de dos canales que van en sentidos contrarios. En esta situación, la probabilidad de que la carretera sea inhabilitada en un sentido puede ser distinta a la del otro sentido.

Tabla IV.12: Evolución del vector de probabilidades de aparición de los arcos en la red dirigida de 16 nodos y 57 enlaces

ciclo 2	Arco	(1,5)	(1,8)	(1,6)	(2,5)	(2,6)	(2,7)	(3,6)	(3,7)	(4,6)	(4,7)	
	Probabilidad	0.493	0.479	0.471	0.464	0.536	0.543	0.443	0.464	0.571	0.514	
	Arco	(4,11)	(5,8)	(5,9)	(6,9)	(6,10)	(7,10)	(7,11)	(8,12)	(8,13)	(9,12)	
	Probabilidad	0.529	0.429	0.479	0.4	0.55	0.436	0.4	0.514	0.486	0.421	
	Arco	(9,13)	(10,13)	(10,14)	(11,13)	(11,14)	(15,1)	(15,2)	(15,3)	(15,4)	(12,16)	
	Probabilidad	0.45	0.4	0.486	0.479	0.507	0.736	0.814	0.821	0.764	0.836	
	Arco	(13,16)	(14,16)									
	Probabilidad	0.764	0.743									
ciclo 3	Arco	(1,5)	(1,8)	(1,6)	(2,5)	(2,6)	(2,7)	(3,6)	(3,7)	(4,6)	(4,7)	
	Probabilidad	0.429	0.457	0.429	0.536	0.579	0.607	0.45	0.529	0.579	0.429	
	Arco	(4,11)	(5,8)	(5,9)	(6,9)	(6,10)	(7,10)	(7,11)	(8,12)	(8,13)	(9,12)	
	Probabilidad	0.529	0.429	0.593	0.407	0.536	0.471	0.343	0.5	0.486	0.4	
	Arco	(9,13)	(10,13)	(10,14)	(11,13)	(11,14)	(15,1)	(15,2)	(15,3)	(15,4)	(12,16)	
	Probabilidad	0.4	0.329	0.486	0.529	0.614	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	
	Arco	(13,16)	(14,16)									
	Probabilidad	1.000	1.000									
ciclo 4	Arco	(1,5)	(1,8)	(1,6)	(2,5)	(2,6)	(2,7)	(3,6)	(3,7)	(4,6)	(4,7)	
	Probabilidad	0.464	0.464	0.521	0.593	0.621	0.65	0.514	0.586	0.771	0.493	
	Arco	(4,11)	(5,8)	(5,9)	(6,9)	(6,10)	(7,10)	(7,11)	(8,12)	(8,13)	(9,12)	
	Probabilidad	0.471	0.5	0.707	0.421	0.614	0.6	0.343	0.529	0.55	0.407	
	Arco	(9,13)	(10,13)	(10,14)	(11,13)	(11,14)	(15,1)	(15,2)	(15,3)	(15,4)	(12,16)	
	Probabilidad	0.371	0.314	0.436	0.586	0.586	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	
	Arco	(13,16)	(14,16)									
	Probabilidad	1.000	1.000									
ciclo 5	Arco	(1,5)	(1,8)	(1,6)	(2,5)	(2,6)	(2,7)	(3,6)	(3,7)	(4,6)	(4,7)	
	Probabilidad	0.536	0.471	0.686	0.643	0.671	0.814	0.586	0.714	0.821	0.564	
	Arco	(4,11)	(5,8)	(5,9)	(6,9)	(6,10)	(7,10)	(7,11)	(8,12)	(8,13)	(9,12)	
	Probabilidad	0.421	0.564	0.8	0.443	0.65	0.664	0.371	0.55	0.629	0.471	
	Arco	(9,13)	(10,13)	(10,14)	(11,13)	(11,14)	(15,1)	(15,2)	(15,3)	(15,4)	(12,16)	
	Probabilidad	0.364	0.229	0.336	0.629	0.721	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	
	Arco	(13,16)	(14,16)									
	Probabilidad	1.000	1.000									

La solución óptima del problema viene dada por la estrategia de interdicción 14, 22 y 23 (arcos (6,9), (10,13) y (10,14)), con la que se reduce el flujo máximo de la red de 720 a 340 unidades, incurriendo en un costo de interdicción de 14 unidades de recurso [WOO]. El PSDA-INT produjo esta solución en el ciclo 8, tras evaluar 8×10^3 redes (y haber explorado el 0.0238% del espacio de soluciones completo). En la Tabla IV.13 se muestran los primeros 5 ciclos de la corrida del PSDA-INT.

Tabla IV.13: Las cinco mejores soluciones obtenidas por PSDA-INT en los 5 primeros ciclos para la red dirigida de 16 nodos y 57 enlaces

	Solu ción	Estrategia de interdicción	Flujo máximo	Costo de interdicción	Flujo máximo penalizado
ciclo 1	1	2,4,7,9,10,12,13,14,18,21,22,23,24,25,29,31,32,35,36,42,43,44,45,47 y 49	0	113	5424
	2	2,6,12,16,18,20,22,24,25,27,30,31,32,34,35,36,39,40,41,42 y 48	180	98	5880
	3	2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,28,36,37,38,39,40,41,42,44,45,46,47 y 49	0	147	7056
	4	1,3,5,8,9,10,11,13,19,21,25,30,31,32,33,35,37,38,40,41,43,48 y 49	240	111	7104
	5	4,8,9,10,12,15,17,18,21,22,24,28,29,34,36,37,38,40,41,43,44,46,48 y 50	290	114	7676
ciclo 2	1	1,5,15,18,20,21,22,24,31,40,43,44,45,46 y 49	250	72	4656
	2	2,5,6,7,8,10,11,12,13,14,16,17,22,23,27,33,35,36,38,41,44,46 y 47	0	110	5280
	3	4,7,10,12,13,14,17,19,21,22,24,26,27,28,29,32,42,43 y 47	250	84	5432
	4	3,4,7,9,10,11,13,15,17,19,28,29,30,33,37,39,44,46 y 49	250	85	5496.6665
	5	12,5,9,11,14,16,17,20,21,23,25,30,32,33,34,41,43,47 y 48	200	90	5520
ciclo 3	1	2,3,11,16,17,20,21,22,23,31,38,39,42,45,46 y 47	60	77	4004
	2	1,6,7,11,14,16,17,21,22,23,31,34,35,41,43,44 y 46	120	79	4424
	3	1,5,13,14,22,25,27,30,32,40,41,45,46 y 49	300	67	4556
	4	3,7,10,11,13,14,15,16,17,18,20,22,27,32,35,39,46,47 y 49	50	90	4620
	5	3,5,8,9,10,11,15,18,19,20,26,33,38,41,43,45 y 46	140	83	4758.6665
ciclo 4	1	2,3,8,14,18,21,22,24,28 y 43	310	46	3158.6665
	2	12,11,17,21,22,23,28,29,32,42,44 y 48	160	55	3226.6668
	3	1,8,12,15,16,17,20,21,22,24,27 y 32	150	57	3306
	4	12,4,14,15,18,23,32,37,42,46 y 50	280	51	3400
	5	9,12,17,19,20,21,23,27,39,40 y 44	330	50	3500
ciclo 5	1	1,14,18,22,23,43 y 48	270	31	2045.9999
	2	5,12,14,23,27,33 y 42	470	28	2221.3333
	3	2,11,15,22,23,29,39 y 46	310	35	2403.3333
	4	2,3,12,14,21,22,23,37 y 42	220	39	2444
	5	11,14,17,18,20,22,24,43 y 46	210	40	2480

Como puede apreciarse en la Tabla IV.13, el PSDA-INT produce en estos primeros ciclos soluciones que tienen asociados costos de interdicción muy superiores a la cantidad de recursos disponibles, que es 15. A propósito de esto, es fundamental recordar que en un ciclo dado de la corrida del PSDA, éste explora el espacio de búsqueda de manera aleatoria. Además, por definición, el PSDA-INT permite la supervivencia de soluciones infactibles de un ciclo a otro. Pero, estas soluciones son penalizadas de acuerdo con el grado de desviación que presenten con respecto al costo de interdicción objetivo. Esta forma de exploración de las vecindades del espacio de solución permite evitar que la búsqueda se oriente exclusivamente hacia las soluciones con costos de interdicción inferiores al presupuesto de interdicción.

Los resultados anteriores corresponden a una corrida individual del PSDA-INT. Pero para obtener resultados representativos de la aplicación de la heurística a esta red se realizaron 100 corridas independientes variando entre ellas la semilla que emplea el generador aleatorio en el Paso 1 del algoritmo (Desarrollo de la estrategia de interdicción). A partir de ellas, se generó un flujo máximo promedio después de interdicción de 344.10 unidades, con una varianza asociada de 76.96 unidades. Nótese que este orden de magnitud de la varianza es ampliamente mayor que el obtenido para la red de [DAI]. No obstante, esto se debe a la diferencia que existe entre las capacidades de los arcos entre una red y otra. Por ejemplo, al inhabilitar un arco a un costo de interdicción de 3 unidades de recurso en la red de [DAI] (el arco (13,18)), se puede obtener una reducción de flujo de 4 unidades. Mientras que la inhabilitación de un arco con el mismo costo de interdicción en la red de Wood (el arco (3,6)), se puede lograr disminuir el flujo máximo 100 unidades.

En la Figura IV.10 puede verse que el PSDA-INT produjo la solución óptima de 340 unidades en 81% de las corridas. La otra solución que halló el PSDA-INT fue 360 unidades, pero su frecuencia de ocurrencia fue 17% que es una cifra considerablemente menor.

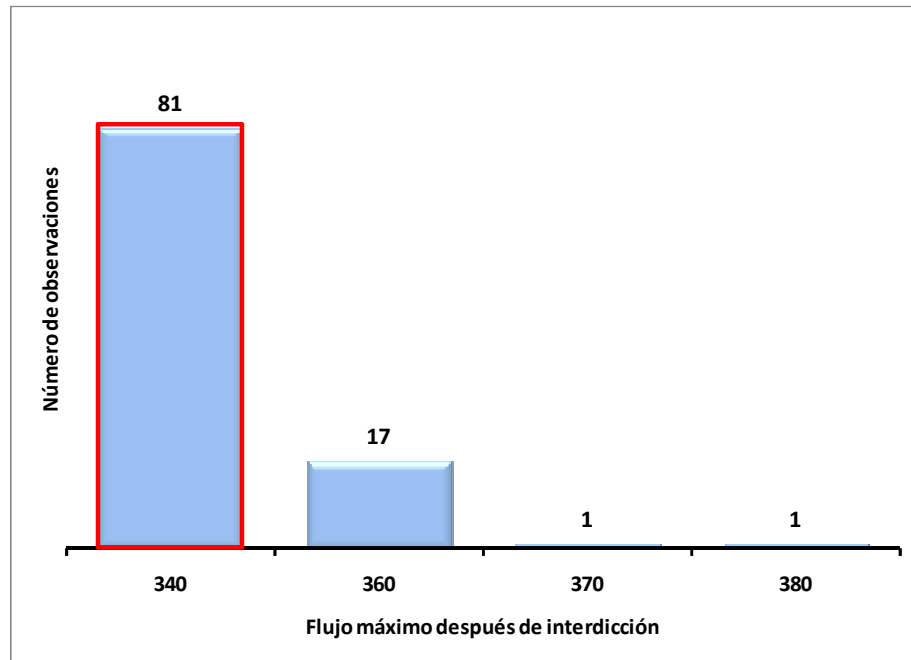


Figura IV.10: Distribución de frecuencia del flujo máximo en la red dirigida de 16 nodos y 57 enlaces

Nuevamente, es importante reiterar que pese a que el PSDA-INT demostró buena capacidad de búsqueda en las 100 corridas efectuadas, esto no necesariamente significa que este algoritmo garantice que pueda encontrar la solución óptima.

4.3 PROBLEMAS DE REDES CON SOLUCIÓN ÓPTIMA DESCONOCIDA

En esta sección se muestran los resultados de la aplicación de la heurística PSDA-INT a un problema de redes con espacio de solución grande que no ha sido resuelto desde la óptica de la interdicción determinística. Siendo así, no existe óptimo reportado para esta red como problema de este tipo.

La red considerada fue empleada por [GEB] para efectuar análisis de confiabilidad en redes. Se trata de una red dirigida de 36 nodos y 60 enlaces, con un sólo nodo fuente y un sólo nodo sumidero. Los datos de esta red se muestran en la Tabla IV.14.

Tabla IV.14: Datos de la red dirigida de 36 nodos y 60 enlaces [GEB]

	<i>Arco</i>	<i>Capacidad</i>	<i>Costo de interdicción</i>		<i>Arco</i>	<i>Capacidad</i>	<i>Costo de interdicción</i>
1	(1,2)	33	5	31	(17,18)	48	25
2	(1,7)	43	8	32	(17,23)	51	33
3	(2,3)	23	30	33	(18,24)	37	17
4	(2,8)	48	32	34	(19,20)	39	33
5	(3,4)	24	15	35	(19,25)	26	22
6	(3,9)	42	17	36	(20,21)	63	37
7	(4,5)	35	21	37	(20,26)	41	37
8	(4,10)	44	16	38	(21,22)	61	21
9	(5,6)	29	18	39	(21,27)	75	19
10	(5,11)	33	35	40	(22,23)	28	16
11	(6,12)	53	38	41	(22,28)	70	28
12	(7,8)	39	38	42	(23,24)	59	26
13	(7,13)	37	16	43	(23,29)	25	24
14	(8,9)	46	17	44	(24,30)	38	33
15	(8,14)	74	37	45	(25,26)	38	34
16	(9,10)	40	18	46	(25,31)	65	15
17	(9,15)	38	24	47	(26,27)	61	34
18	(10,11)	51	22	48	(26,32)	50	15
19	(10,16)	46	22	49	(27,28)	51	34
20	(11,12)	68	18	50	(27,33)	47	37
21	(11,17)	40	25	51	(28,29)	23	24
22	(12,18)	52	14	52	(28,34)	66	30
23	(13,14)	39	26	53	(29,30)	48	28
24	(13,19)	55	29	54	(29,35)	45	31
25	(14,15)	63	31	55	(30,36)	61	3
26	(14,20)	63	28	56	(31,32)	53	24
27	(15,16)	45	33	57	(32,33)	49	19
28	(15,21)	26	22	58	(33,34)	31	37
29	(16,17)	71	35	59	(34,35)	32	26
30	(16,22)	56	34	60	(35,36)	34	9

El flujo máximo entre la fuente y el sumidero de esta red antes de interdicción es 76 unidades. ¿A cuanto puede reducirse dicho flujo si se implementa una estrategia de interdicción sobre la red?

De las 2^{36} soluciones que resultarían de la enumeración explícita de las posibles configuraciones de red, se analizaron 10^4 soluciones distribuidas en un máximo de 10 ciclos. Se tomó la misma combinación de parámetros usada para las redes de la sección 4.2 ($SAMPLE=1000$ y $U=10$), para reducir el espacio de búsqueda un 99.99999%. Se escogió el mismo tamaño de la muestra seleccionado para actualizar el vector de probabilidades de aparición de los arcos en la red ($S=140$).

Dado que no existe una limitación específica de recursos disponibles para interdicción de la red, el análisis del problema puede enfocarse a través de un análisis de sensibilidad, como se hizo con la red dirigida de 20 nodos y 30 enlaces. Para ello, se varía la cantidad de recursos disponibles para interdicción, desde 1 unidad disponible hasta alcanzar la cantidad mínima requerida para anular el flujo a través de la red. Cada flujo máximo se obtuvo realizando 10 replicaciones independientes del algoritmo PSDA-INT, considerando semillas distintas para el generador aleatorio. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura IV.11.

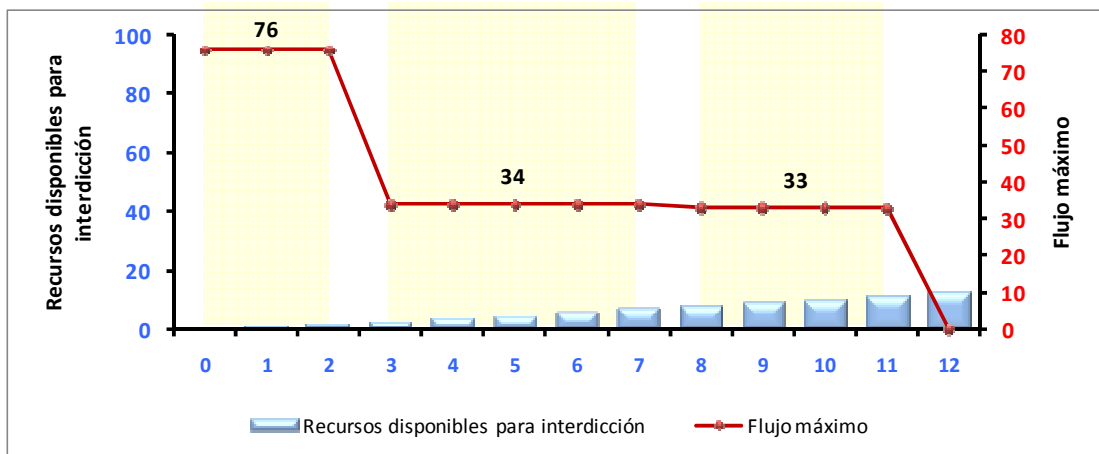


Figura IV.11: Análisis de sensibilidad sobre la cantidad de recursos disponibles para interdicción en la red dirigida de 36 nodos y 60 enlaces

En la Figura IV.11 puede apreciarse el impacto que tiene la variación en la cantidad de recursos disponibles para la interdicción de la red sobre el flujo máximo que atraviesa la red. El comportamiento del flujo puede resumirse de la siguiente manera:

- En primer lugar, dado que el mínimo costo de interdicción de cualquiera de los arcos de la red es 3 unidades, PSDA-INT produjo el flujo máximo 76 unidades para los casos en que el presupuesto de interdicción es inferior a esta cantidad.
- Luego, con 3 unidades de recursos disponibles para interdicción, el flujo pudo reducirse a 34 unidades a través de la inhabilitación del arco (30,36). El mismo flujo máximo se obtiene con 4, 5, 6 y 7 unidades de recurso.
- El incremento de disponibilidad de recursos de 7 a 8 unidades, permite disminuir el flujo a 33 unidades a través de un cambio de la estrategia de interdicción: dejar todos los arcos de la red intactos excepto el (1,7), cuya inhabilitación tiene un costo de 8 unidades de recurso. De la Figura IV.11 puede observarse que con una disponibilidad de recursos de 9, 10 y 11 unidades se mantiene el flujo máximo de 33 unidades.
- Finalmente, se alcanza la anulación del flujo máximo mediante la inhabilitación de los arcos (30,36) y (35,36), a un costo de interdicción de 12 unidades de recurso. De 12 en adelante, cualquier incremento en la disponibilidad de recursos para interdicción no se traducirá en una mejor estrategia de interdicción que la indicada por la solución producida por el PSDA-INT para el presupuesto de interdicción de 12 unidades de recurso.

Estos resultados son relevantes para ilustrar cómo, a pesar de no conocer la topología de la red, el PSDA-INT permite orientar la búsqueda de estrategias destinadas a atenuar las actividades de un adversario que esté operando en un sistema modelable a través de una red.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el presente trabajo se desarrolla una heurística para resolver el problema de interdicción determinística, en el cual se busca identificar la mejor estrategia para atenuar las actividades de un adversario que esté operando en un sistema modelable a través de una red.

El estudio detallado de la heurística PSDA original condujo a identificar las modificaciones necesarias para adaptarla al problema de interdicción determinística. La heurística modificada, PSDA-INT, requiere de pocos datos para su ejecución. Su aplicación a distintos tipos de redes permitió ilustrar el funcionamiento del algoritmo. Asimismo, los resultados obtenidos por el PSDA-INT permitieron concluir que:

- En el caso de las redes que han sido analizadas por otros autores desde el punto de vista de interdicción determinística, se pudo verificar que el PSDA-INT produjo soluciones de buena calidad debido a que los resultados obtenidos coincidieron con el valor óptimo en un alto porcentaje de las replicaciones efectuadas.
- Desde el punto de vista de esfuerzo computacional, el PSDA-INT demostró eficiencia debido a que produjo las soluciones a partir de espacios de búsqueda significativamente reducidos con respecto a los que resultarían de la enumeración explícita de las posibles configuraciones de las redes.
- Dada la analogía entre la interdicción y el concepto de corte mínimo, el algoritmo PSDA-INT puede emplearse para determinar cortes mínimos de una red.
- El análisis de sensibilidad en los recursos disponibles para interdicción permitió la obtención de una curva de Flujo vs Costo que pudiera interpretarse como una aproximación a la frontera de Pareto, típica de los problemas multiobjetivo, obtenida en este caso mediante la ejecución repetida del algoritmo. En este sentido, sería recomendable considerar en futuros desarrollos la extensión del

PSDA-INT al ambiente multiobjetivo.

Cabe acotar que el hecho de que se haya empleado un algoritmo de flujo máximo para determinar el flujo en la red obedece a que se supuso que este algoritmo modela adecuadamente el fenómeno que está ocurriendo en la red. Sin embargo, no debe perderse de vista que la heurística propuesta emplea el flujo máximo como una caja negra que pudiera ser sustituida por un modelo más real del fenómeno en estudio.

Finalmente, el problema de interdicción determinística fue abordado en este Trabajo suponiendo que la interdicción de los arcos es infalible. De allí, se desprende la siguiente incógnita: ¿Cómo afectaría el hecho de que exista una probabilidad de éxito en la interdicción de los arcos de la red? Se plantea entonces calcular la confiabilidad de la interdicción, esto es, determinar una estrategia de interdicción que permita minimizar el costo de interdicción y lograr que la probabilidad de reducir el flujo máximo a cierta cantidad, cumpla con una confiabilidad mínima especificada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [CHL] **Chillier, G. y Freeman, L.** (2005). "El nuevo concepto de seguridad hemisférica de la OEA: Una amenaza en potencia". Informe especial Programa WOLA.
- [DAI] **Dai, Y. y Poh, K.** (2002). "Solving the Network Interdiction Problem with Genetic Algorithms", *Proceedings on the Fourth Asia-Pacific Conference on Industrial Engineering and Management System*. Taipei, China.
- [EVN] **Evans, J. y Minieka, E.** (1992). "Optimization Algorithms for Networks and Graphs". Marcel Dekker.
- [GEB] **Gebre, B. y Ramírez-Marquez, J.** (2007) "Element Substitution Algorithm for General Two-Terminal Network Reliability Analyses", *IIE Transactions*, Vol. 39, No. 3, pp. 265-275.
- [HLL] **Hillier, F. y Lieberman, G.** (2006). *Introducción a la Investigación de Operaciones*. 8a edición. McGraw Hill.
- [ISR] **Israeli, E. y Wood, R.** (2002). "Shortest-path Network Interdiction", *NETWORKS*, vol. 40 (2), pp. 97-111.
- [OEA] **OEA** (2004). Proyecto de Informe Final. Trigésimo Séptimo Período Ordinario de Sesiones de la Comisión Interamericana para el Control del Abuso de Drogas.
- [PAN] **Pan, F.** (2005). "Stochastic Network Interdiction: Models and Methods". Austin, USA: University of Texas.
- [RAM] **Ramírez-Márquez, J. y Rocco, C.** (2008). "All-terminal network reliability optimization via probabilistic solution discovery", *Reliability Engineering*

and System Safety, Vol. 93, No. 11, pp. 1689-1697.

- [TAH] **Taha, H.** (2004). *Investigación de Operaciones*. 7a edición. Prentice Hall.
- [WOO] **Wood, R.** (1993). "Deterministic Network Interdiction", *Mathematical Computing Modeling*, vol. 17, No. 2, pp. 1-18.
- [YOO] **Yoo Y.B., Deo N.** (1988). "A Comparison of Algorithm for Terminal-Pair Reliability", *IEEE Transaction on Reliability*, Vol. 37, No. 2, pp. 216-221.

• •

APÉNDICES

APÉNDICE 1

A continuación se detalla una formulación propuesta por [WOO] para el problema de la interdicción en redes determinístico. Está basada en la programación entera, y permite trabajar con redes no dirigidas $G=(N,A)$ de N nodos y A arcos, y múltiples nodos fuente (N^S) y sumidero (N^T).

$$\min \sum_{(i,j) \in A_{ST}^d \cup \bar{A}'_{ST}} u_{ij} \cdot \beta_{ij} \quad \text{Ec.AI.1}$$

s.a.,

$$\alpha_i - \alpha_j + \beta_{ij} + \gamma_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A_{ST}^d \quad \text{Ec.AI.2}$$

$$\alpha_i - \alpha_j + \beta_{ij} + \gamma_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in \bar{A}'_{ST} \quad \text{Ec.AI.3}$$

$$\alpha_j - \alpha_i + \beta_{ij} + \gamma_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in \bar{A}'_{ST} \quad \text{Ec.AI.4}$$

$$\alpha_i \equiv 0 \quad \forall i \in N^S \quad \text{Ec.AI.5}$$

$$\alpha_i \equiv 1 \quad \forall i \in N^T \quad \text{Ec.AI.6}$$

$$\sum_{(i,j) \in A_{ST}^d \cup \bar{A}'_{ST}} c_{ij} \cdot \gamma_{ij} \leq C \quad \text{Ec.AI.7}$$

$$\alpha_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in N \quad \text{Ec.AI.8}$$

$$\beta_{ij}, \gamma_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A' \quad \text{Ec.AI.9}$$

donde

u_{ij} capacidad del arco (i,j)

β_{ij} variable binaria que vale 1 si el arco (i,j) atraviesa el corte de mínima

capacidad de la red y si no es intervenido por el interdicator, y cero en caso contrario.

γ_{ij} variable binaria que vale 1 si el arco (i,j) atraviesa el corte de mínima capacidad de la red y si es intervenido por el interdicator, y cero en caso contrario.

A_{ST}^d arcos dirigidos incidentes a los nodos fuente y a los nodos sumidero

\bar{A}'_{ST} arcos que no inciden sobre los nodos fuente o sobre los nodos sumidero tales que $i < j$

A' arcos dirigidos de la red tales que $i < j$

α_i variable binaria que vale cero si el nodo i pertenece al conjunto de nodos que contiene a s , luego de dividir la red en dos a través del corte de mínima capacidad, y que vale 1 si el nodo i pertenece al conjunto de nodos que contiene a t

c_{ij} cantidad de recursos requeridos para intervenir el arco (i,j)

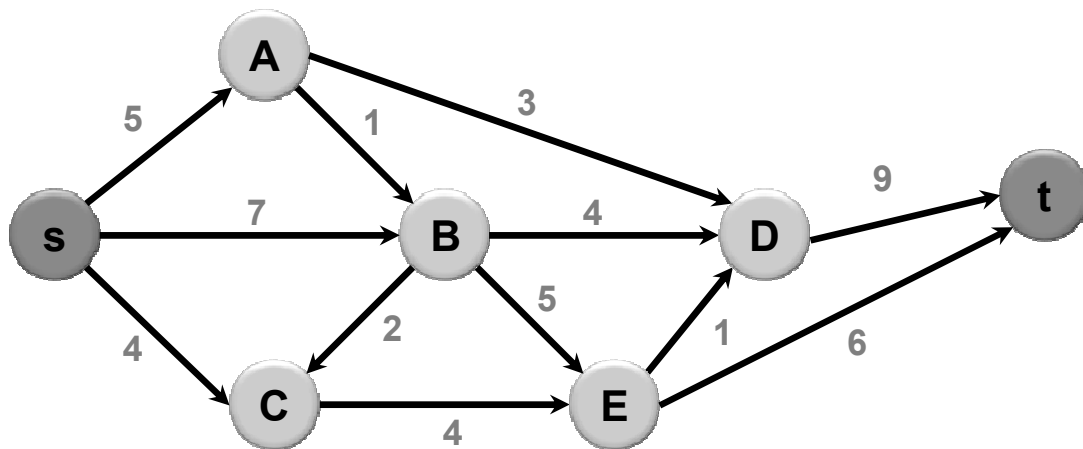
C Cantidad total de recursos disponibles para interdicción

Este modelo matemático analítico, formulado con una función objetivo de minimización y restricciones lineales, produce la solución óptima [WOO]. Sin embargo, su implementación puede ser engorrosa ya que se requiere verificar a cuales nodos y a cuales arcos aplica cada ecuación del modelo, según las características de la red analizada.

APÉNDICE 2

Ejemplo de aplicación del Algoritmo de Flujo Máximo:

Para ilustrar el procedimiento arriba descrito se aplicará el algoritmo de Flujo máximo a la red mostrada en la figura mostrada abajo, para así hallar el flujo máximo factible desde el nodo s hasta el nodo t . Los números que aparecen en los arcos son las capacidades de cada uno de ellos [HLL].



Red dirigida y capacitada de 7 nodos y 12 enlaces

Iteración 1:

Flujo factible inicial nulo: $F_{xy} = 0$ para todo (x, y) .

La red residual relativa al flujo actual es la misma red original.

- Aplicación del Algoritmo de Incremento de Flujo

$$a(s) = \infty \text{ y } p(s) = 0$$

$$x = s$$

$$\begin{cases} a(A) = \min\{a(s), r_{sA}\} = \min\{\infty, 5\} = 5, & p(A) = s \\ a(B) = \min\{a(s), r_{sB}\} = \min\{\infty, 7\} = 7, & p(B) = s \\ a(C) = \min\{a(s), r_{sC}\} = \min\{\infty, 4\} = 4, & p(C) = s \end{cases}$$

Se selecciona el nodo B porque proporciona el mayor flujo.

$$x = B$$

$$\begin{cases} a(C) = \min\{a(B), r_{BC}\} = \min\{7, 2\} = 2, & p(C) = B \\ a(E) = \min\{a(B), r_{BE}\} = \min\{7, 5\} = 5, & p(E) = B \\ a(D) = \min\{a(B), r_{BD}\} = \min\{7, 4\} = 4, & p(D) = B \end{cases}$$

Se selecciona el nodo E porque proporciona el mayor flujo.

$$x = E$$

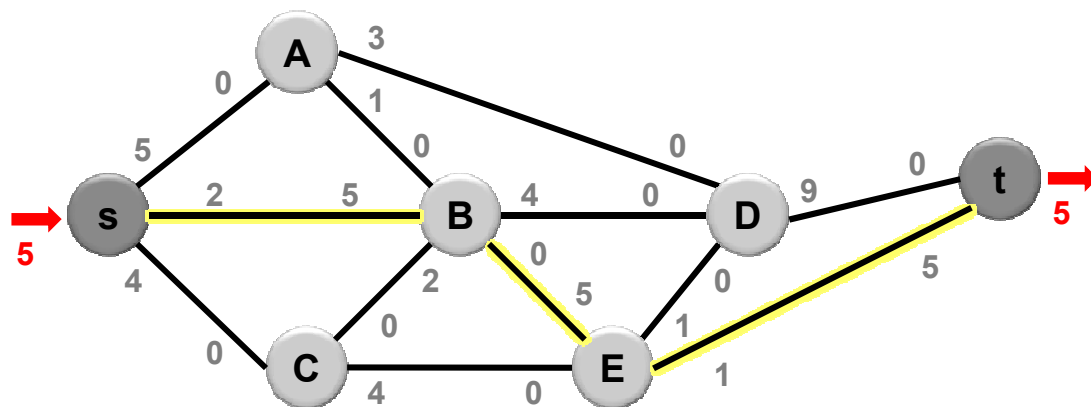
$$\begin{cases} a(D) = \min\{a(E), r_{ED}\} = \min\{5, 1\} = 1, & p(D) = E \\ a(t) = \min\{a(E), r_{Et}\} = \min\{5, 6\} = 5, & p(t) = E \end{cases}$$

Se etiqueta el nodo t . Se consiguió un camino de incremento de flujo: s - B - E - t .

- Se implementa el aumento de flujo en 5 unidades en ese camino.

Iteración 2:

La red residual relativa al flujo actual es la siguiente:



- Aplicación del Algoritmo de Incremento de Flujo

$$a(s) = \infty \text{ y } p(s) = 0$$

$$x = s$$

$$\begin{cases} a(A) = \min\{a(s), r_{sA}\} = \min\{\infty, 5\} = 5, & p(A) = s \\ a(B) = \min\{a(s), r_{sB}\} = \min\{\infty, 2\} = 2, & p(B) = s \\ a(C) = \min\{a(s), r_{sC}\} = \min\{\infty, 4\} = 4, & p(C) = s \end{cases}$$

Se selecciona el nodo A porque proporciona el mayor flujo.

$$x = A$$

$$\begin{cases} a(B) = \min\{a(A), r_{AB}\} = \min\{\infty, 1\} = 1, & p(B) = A \\ a(D) = \min\{a(A), r_{AD}\} = \min\{\infty, 3\} = 3, & p(D) = A \end{cases}$$

Se selecciona el nodo D porque proporciona el mayor flujo.

$$x = D$$

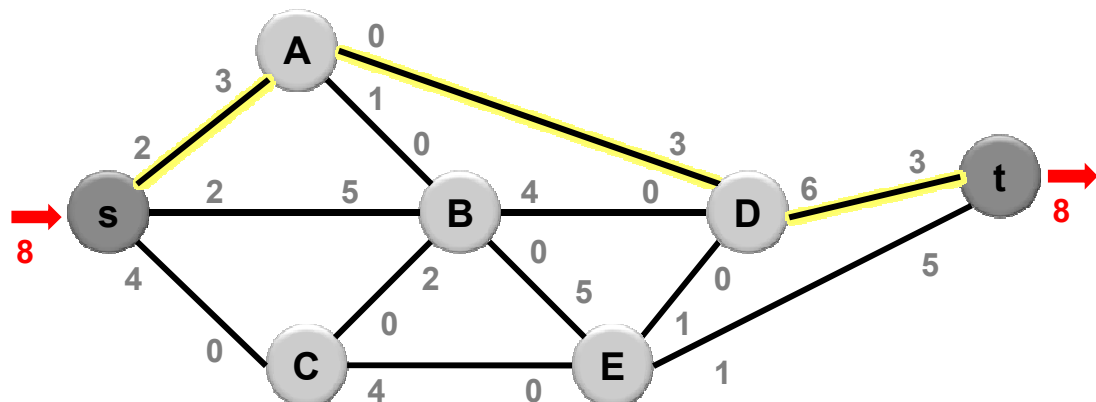
$$a(t) = \min\{a(D), r_{Dt}\} = \min\{3, 9\} = 3, \quad p(t) = D$$

Se etiqueta el nodo t . Se consiguió un camino de incremento de flujo: s -A-D- t .

- Se implementa el aumento de flujo en 3 unidades en ese camino.

Iteración 3:

La red residual relativa al flujo actual es la siguiente:



- Aplicación del Algoritmo de Incremento de Flujo

$$a(s) = \infty \text{ y } p(s) = 0$$

$$x = s$$

$$\begin{cases} a(A) = \min\{a(s), r_{sA}\} = \min\{\infty, 2\} = 2, & p(A) = s \\ a(B) = \min\{a(s), r_{sB}\} = \min\{\infty, 2\} = 2, & p(B) = s \\ a(C) = \min\{a(s), r_{sC}\} = \min\{\infty, 4\} = 4, & p(C) = s \end{cases}$$

Se selecciona el nodo C porque proporciona el mayor flujo.

$$x = C$$

$$\{a(E) = \min\{a(C), r_{CE}\} = \min\{4, 4\} = 4, \quad p(E) = C$$

$$x = E$$

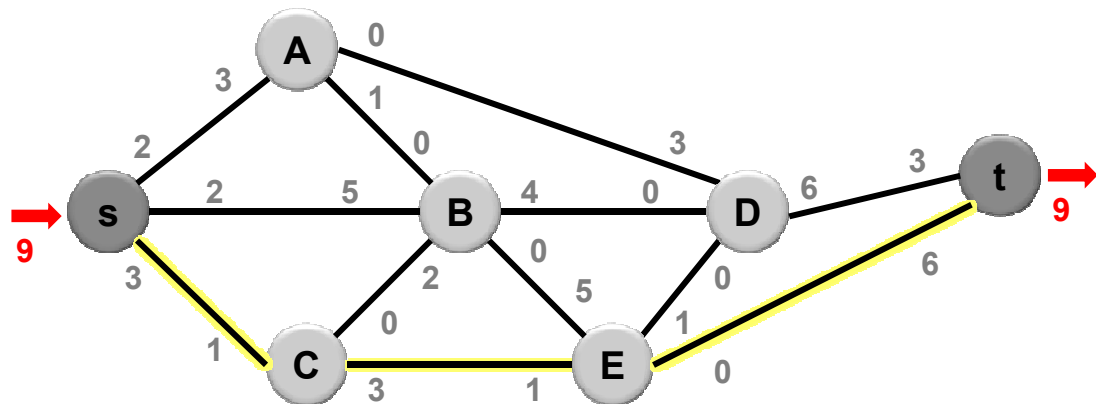
$$\begin{cases} a(D) = \min\{a(E), r_{ED}\} = \min\{4, 1\} = 1, & p(D) = E \\ a(t) = \min\{a(E), r_{Et}\} = \min\{4, 1\} = 1, & p(t) = E \end{cases}$$

Se etiqueta el nodo t . Se consiguió un camino de incremento de flujo: s - C - E - t .

- Se implementa el aumento de flujo en 1 unidad en ese camino.

Iteración 4:

La red residual relativa al flujo actual es la siguiente:



- Aplicación del Algoritmo de Incremento de Flujo

$$a(s) = \infty \text{ y } p(s) = 0$$

$$x = s$$

$$\begin{cases} a(A) = \min\{a(s), r_{sA}\} = \min\{\infty, 2\} = 2, & p(A) = s \\ a(B) = \min\{a(s), r_{sB}\} = \min\{\infty, 2\} = 2, & p(B) = s \\ a(C) = \min\{a(s), r_{sC}\} = \min\{\infty, 3\} = 3, & p(C) = s \end{cases}$$

Se selecciona el nodo C porque proporciona el mayor flujo.

$$x = C$$

$$\{a(E) = \min\{a(C), r_{CE}\} = \min\{3, 4\} = 3, \quad p(E) = C$$

$$x = E$$

$$\{a(D) = \min\{a(E), r_{ED}\} = \min\{3, 1\} = 1, \quad p(D) = E$$

$$x = D$$

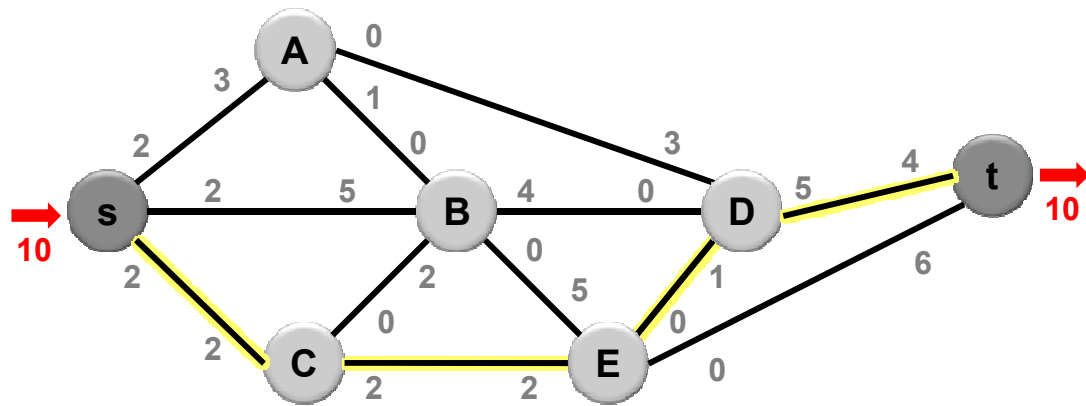
$$\{a(t) = \min\{a(D), r_{Dt}\} = \min\{1, 6\} = 1, \quad p(t) = D$$

Se etiqueta el nodo t . Se consiguió un camino de incremento de flujo: s-C-E-D-t.

- Se implementa el aumento de flujo en 1 unidad en ese camino.

Iteración 5:

La red residual relativa al flujo actual es la siguiente:



- Aplicación del Algoritmo de Incremento de Flujo

$$a(s) = \infty \text{ y } p(s) = 0$$

$$x = s$$

$$\begin{cases} a(A) = \min\{a(s), r_{sA}\} = \min\{\infty, 2\} = 2, & p(A) = s \\ a(B) = \min\{a(s), r_{sB}\} = \min\{\infty, 2\} = 2, & p(B) = s \\ a(C) = \min\{a(s), r_{sC}\} = \min\{\infty, 2\} = 2, & p(C) = s \end{cases}$$

Se selecciona el nodo B.

$$x = B$$

$$\begin{cases} a(C) = \min\{a(B), r_{BC}\} = \min\{2, 2\} = 2, & p(C) = B \\ a(D) = \min\{a(B), r_{BD}\} = \min\{2, 4\} = 2, & p(D) = B \end{cases}$$

Se selecciona el nodo D.

$$x = D$$

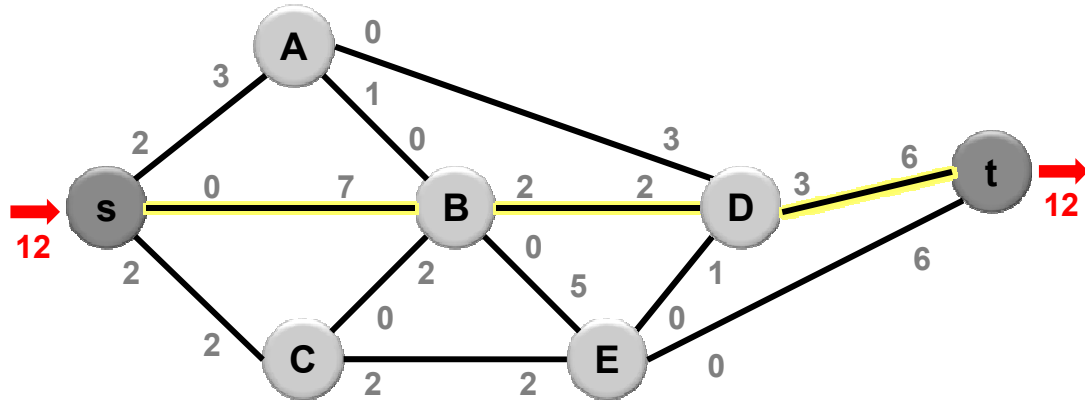
$$a(t) = \min\{a(D), r_{Dt}\} = \min\{2, 5\} = 2, \quad p(t) = D$$

Se etiqueta el nodo t . Se consiguió un camino de incremento de flujo: s - B - D - t .

- Se implementa el aumento de flujo en 2 unidades en ese camino.

Iteración 6:

La red residual relativa al flujo actual es la siguiente:



- Aplicación del Algoritmo de Incremento de Flujo

$$a(s) = \infty \text{ y } p(s) = 0$$

$$x = s$$

$$\begin{cases} a(A) = \min\{a(s), r_{sA}\} = \min\{\infty, 2\} = 2, & p(A) = s \\ a(C) = \min\{a(s), r_{sC}\} = \min\{\infty, 2\} = 2, & p(C) = s \end{cases}$$

Se selecciona el nodo A.

$$x = A$$

$$\{a(B) = \min\{a(A), r_{AB}\}\} = \min\{2, 1\} = 1, \quad p(B) = A$$

Se selecciona el nodo B.

$$x = B$$

$$\{a(D) = \min\{a(B), r_{BD}\}\} = \min\{1, 2\} = 1, \quad p(D) = B$$

Se selecciona el nodo D.

$$x = D$$

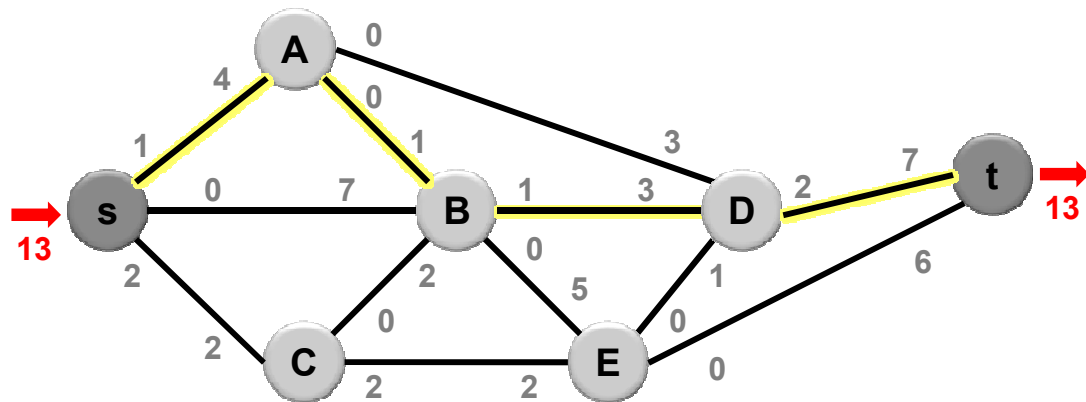
$$\{a(t) = \min\{a(D), r_{Dt}\} = \min\{1, 3\} = 1, \quad p(t) = D$$

Se etiqueta el nodo t . Se consiguió un camino de incremento de flujo: s -A-B-D- t .

- Se implementa el aumento de flujo en 1 unidad en ese camino.

Iteración 7:

La red residual relativa al flujo actual es la siguiente:



- Aplicación del Algoritmo de Incremento de Flujo

$$a(s) = \infty \text{ y } p(s) = 0$$

$$x = s$$

$$\begin{cases} a(A) = \min\{a(s), r_{sA}\} = \min\{\infty, 1\} = 1, & p(A) = s \\ a(C) = \min\{a(s), r_{sC}\} = \min\{\infty, 2\} = 2, & p(C) = s \end{cases}$$

Se selecciona el nodo C.

$$x = C$$

$$\{a(E) = \min\{a(C), r_{CE}\} = \min\{2, 2\} = 2, \quad p(E) = C$$

Se selecciona el nodo E.

$$x = E$$

$$\{a(B) = \min \{a(E), r_{EB}\} = \min \{2, 5\} = 2, \quad p(B) = E$$

Se selecciona el nodo B.

$$x = B$$

$$\{a(D) = \min \{a(B), r_{BD}\} = \min \{2, 1\} = 1, \quad p(D) = B$$

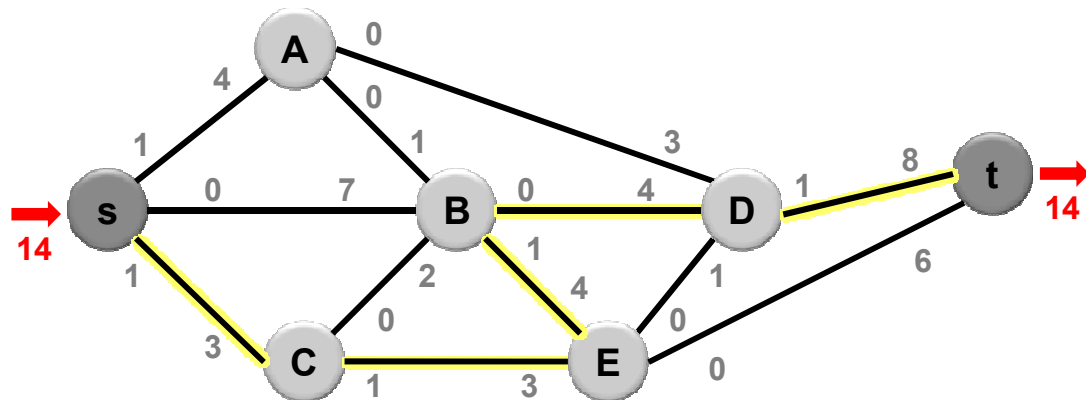
Se selecciona el nodo D.

$$x = D$$

$$\{a(t) = \min \{a(D), r_{Dt}\} = \min \{1, 2\} = 1, \quad p(t) = D$$

Se etiqueta el nodo t . Se consiguió un camino de incremento de flujo: s-C-E-B-D-t.

- Se implementa el aumento de flujo en 1 unidad en ese camino. La red residual que resulta es:



Finalmente, dado que no existen trayectorias de aumento, el patrón de flujo actual que resulta en un flujo máximo de 14 unidades es óptimo.