Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias
Postgrado en Matemática

“DESIGUALDADES DE TIPO MARKOV-NIKOLSKII EN ESPACIOS DE SOBOLEV CON PESO”

Autora: Msc. Dilcia J. Pérez
Tutora: Dra. Yamilet Quintana

Tesis Doctoral
Presentada ante la Ilustre
Universidad Central de Venezuela
Para optar al título de
Doctora en Ciencias
Mención Matemática

Caracas, 27 /05 /2011

"En la pugna entre el arroyo y la roca, siempre triunfa el arroyo... no porque sea muy fuerte, sino porque persevera"

H. Jackson Brown

A la memoria de Joseito, mi papá:
por todo aquello que no nos dijimos...

A mis hijas, Patricia y Pierina...
mis dos princesas,
quienes con sus sonrisas y ese "tu puedes mamá",
me demuestran que vale la pena todo el esfuerzo
para seguir adelante.

A ti, a quien Dios me permitió
encontrar en el momento justo,
haciendo de este camino,
algo más llevadero...

Índice general

Agradecimientos

Doy gracias a mi Dios por todo lo vivido, tanto alegrias como tristezas. En cada situación me mostró la salida e hizo que surgiera de muy dentro de mi, la fuerza para continuar. Colocó en mi camino ángeles que tendiendo su mano, me ayudaron a seguir adelante. A pesar de las dificultades, la meta fue alcanzada.

Expreso mi más sincero agradecimiento a la Dra. Yamilet Quintana por su apoyo incondicional, su enorme paciencia y la confianza depositada en mi, para el logro de esta tesis. Más que mi tutora ha sido mi compañera, la que me guiaba cada vez que otros pensamientos me alejaban del camino. Siempre estaba allí con su conocimiento y gran tesón, ayudándome a tomar el rumbo que nos llevó a buen término.

Agradezco al Fonacit el apoyo financiero que me brindó en mis primeros años de estudio, al ortorgarme una beca de la Misión Ciencias. Llegó en el momento justo y fue de mucha ayuda para mi.

Al Dr. Neptali Romero, por todo el apoyo que siempre me ha brindado. Por creer siempre en mi... a pesar de mí misma.

A mis compañeros del Seminario de Análisis Matemático e Implicaciones Educativas (SAMIE), por su apoyo y solidaridad en nuestros encuentros en Caracas y en Barraquilla.

A mis profesores y compañeros de estudios del doctorado, por todas las enseñanzas compartidas y más alla de lo académico, por todos los momentos que disfrutamos, llenos de amistad y solidaridad.

Un agradecimiento especial a mi Alma Mater, Universidad Centroocidental Lisandro Alvarado, en las personas de Nelly Velásquez, Yenny Salazar, Malón Mendoza, Javier Hernández y Maribel Perdomo, quienes tanto desde el punto de vista humano como el de autoridades, en sus respectivos tiempos, me apoyaron tanto moral como profesionalmente en el logro de esta meta.

A mis compañeros del Decanato de Ciencias y Tecnología de la Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, considerando a cada uno de los que hacemos vida en este decanato al cual orgullosamente pertenezco. A todo aquel que me alentó a seguir, ya sea con una bonita discusión matemática o me auxilió con algunas clases o me regaló ya sea un buen consejo, una sonrisa o simplemente una flor... No caeré en la tentación de colocar nombres aqui, porque no quiero incurrir en el error de omitir a alguien. Solo sé que el apoyo de mis amigos y compañeros fue, es y será de gran valor para mi. Si alguien duda de si está incluido, definitivamente la respuesta es sí.

A mis hijas, Pierina y Patricia, por permitirme robarles un tiempo que era sólo de ustedes, para poder alcanzar esta meta, que aunque lleva mi nombre, el de ustedes va con el mio.

A mi familia que siempre me ha apoyado con mucho cariño. A mis hermanas Gladys Andueza, Onesima Arroyo y Jóvita Barrios y a mi querida sobrina, Maria Alexandra de Hernández, quienes siempre me han tendido su mano de manera incondicional. Auxilio en mis emergencias cuando debía ausentarme y tomando a mis hijas como suyas, me las cuidaban. Mi eterno agradecimiento y amor.

He tenido la suerte de contar con buenos amigos y vecinos, que han estado pendiente de mis logros, a todos ellos mi profunda gratitud.

De manera especial he contado con mi amigo, mi primito del alma, el que se desveló, preocupado por mis transitares en otros lugares y pidió a Dios por mi, para que en cada salida, en cada examen, en cada ponencia y en cada riesgo que tomaba, saliera airosa. Tienes toda mi gratitud y estás siempre en mi pensamiento y en mi corazón.

A mis cuñados, Antonio, Teresa y Alexis, que a pesar de las adversidades oraron y desearon lo mejor para mi. En especial a mi pana Antonio, siempre preocupado por mis hijas y por mi. Gracias por tus mensajes que me alentaron a seguir adelante cada día .

A mi papá, porque a pesar de la distancia que existía entre nosotros, sé que estabas orgulloso de mi y cada vez que me veías me regalabas un “*eche pa’lante mija*”. Lamentablemente, no podré compartir contigo estos momentos. *Lo siento papá*.

Dilcia J. Pérez

“ Y si tuviese profecía, y entendiese los misterios y Toda Ciencia, y si tuviese toda la fe, de tal manera que trasladase los montes, y no tengo amor, Nada Soy ”

1 Co 13:2

Resumen

En este trabajo, estudiamos problemas asociados a desigualdades de tipo Markov-Bernstein con normas Sobolev con peso sobre el espacio de los polinomios con coeficientes complejos y variable real. Para cualquier operador lineal definido sobre subespacios finito-dimensionales de dicho espacio, hallamos una expresión explícita de la constante óptima involucrada en tal desigualdad y estimaciones asociadas a ella. También presentamos algunos ejemplos asociados a operadores diferenciación, donde las medidas consideradas son de ortogonalización clásica.

Introducción

Las desigualdades de tipo Markov-Bernstein son estimaciones de las normas de derivadas de un polinomio de grado dado, por la norma del mismo polinomio; ya sea considerando como noción de tamaño en cada estimación, la misma norma o normas diferentes. Estas desigualdades son interesantes en sí mismas y fundamentales para las demostraciones de muchos de los llamados teoremas inversos en Teoría de Aproximación (ver [11], [19], [18], [31] [36], [38],[56], [59],[70], [71]) y están estrechamente relacionadas con problemas extremales denominados de tipo Markov-Bernstein.

Sea $\mathbb{P}$ el espacio de los polinomios algebraicos, $\mathbb{P}_n$ el subespacio de los polinomios de grado a lo sumo n y $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas definidas sobre $\mathbb{P}$. Un problema de tipo Markov-Bernstein consiste en determinar la expresión explícita de la constante óptima γ_n tal que:

$$\|P^{(k)}\|_2 \leq \gamma_n \|P\|_1, \tag{1}$$

para cada $P \in \mathbb{P}_n$ y $0 \leq k \leq n$.

En este trabajo, enfocaremos el problema extremal planteado en (1), no sólo para derivadas sino para operadores lineales en general y sobre el espacio de los polinomios con coeficientes complejos $\mathbb{P}(\mathbb{C})$, de la siguiente manera:

Sea $T : (\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|_1) \to (\mathbb{P}(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ *un operador lineal, donde* $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|_2$ *son normas definidas en* $\mathbb{P}(\mathbb{C})$. *Determinar una fórmula explícita para la mejor constante* ${}_n(T)$ *tal que*

$$\| TP \|_2 \leq {}_n(T) \, \| P \|_1, \tag{2}$$

para cada $P \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

El problema es equivalente a encontrar una expresión explícita de

$${}_n(T) = \sup_{\| P \|_1 = 1} \| TP \|_2.$$

En 1889, André Andreyevich Markov al considerar en (2) el operador $T = \dfrac{d}{dx}$ y la norma uniforme en $[-1, 1]$, halló que ${}_n(T) = n^2$. La desigualdad relacionada se denomina *desigualdad clásica* *de Markov* y está dada por:

$$||P'||_\infty \leq n^2||P||_\infty, \quad \forall P \in \mathbb{P}_n.$$

En 1892, su hermano Vladimir Andreevich Markov generalizó el problema a la derivada de orden superior y probó que ${}_n\left(\dfrac{d^k}{dx^k}\right) = T_n^k(1),\ 1 \leq k \leq n,$ donde T_n es el $n-$ésimo polinomio de Chebyshev de primer tipo. Mientras que, en 1912, Sergei Natanovich Bernstein consideró la norma uniforme en el disco unitario y demostró que ${}_n\left(\dfrac{d}{dz}\right) = n.$

En 1982, al tomar a $\|\cdot\|_1$ como la norma uniforme en $[-1,1]$, y $\|f\|_2 = \|f\|_{L^q([-1,1])}$, con $q \in [1,+\infty]$, B. D. Bojanov probó que ${}_n\left(\dfrac{d}{dx}\right) = \|T_n'\|_{L^q([-1,1])}$.

Al considerar la norma en L^2 junto con una función integrable $\omega : (a,b) \to (0,+\infty)$, donde $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, tal que todos los momentos $m_n := \int_a^b x^n\omega(x)dx$ son finitos, E. Schmidt (1944), probó que ${}_n\left(\dfrac{d}{dx}\right) = \sqrt{2n}$; cuando $(a,b) = (-\infty,+\infty)$ y $\omega(x) = e^{-x^2}$. En 1960, para $(a,b) = (0,+\infty)$ y $\omega(x) = e^{-x}$, P. Turán demostró que ${}_n\left(\dfrac{d}{dx}\right) = \left(2sen\dfrac{\pi}{4n+2}\right)^{-1}$.

En 1983, L. Mirsky consideró el caso particular de la norma L^2 y mostró que ${}_n\left(\dfrac{d}{dx}\right) \leq \sum_{k=1}^{n} k\ \|\pi_k'\|_{L^2(a,b)}$, donde $\{\pi_k\}$ es un sistema de polinomios ortonormales con respecto a ω.

En 1987, P. Dörfler extendió el estudio de L. Mirsky y sugirió una forma para hallar la constante ${}_n\left(\dfrac{d^k}{dx^k}\right)$, $1 \leq k \leq n$. En 1994, A. Guessab and G. V. Milovanović hallaron esta constante, en el caso de que ω sea un peso para polinomios ortogonales clásicos.

En 1999, K. H. Kwon y D. W. Lee, probaron que las desigualdades de tipo Markov-Bernstein asociadas a (2), en espacios L^2 con peso, no sólo son válidas para las derivadas, sino también para cualquier operador lineal definido sobre $\mathbb{P}$, siempre y cuando la medida $w(x)dx$ sea reemplazada por cualquier medida de Borel $d\mu(x)$. También proporcionaron un método mucho más fácil de aplicar que el de P. Dörfler, para encontrar la expresión explícita de la constante óptima involucrada.

Al considerar el espacio $\mathcal{T}_n$, de los polinomios trigonométricos no idénticamente nulos y de grado a lo sumo n, A. Zygmund, probó en 1977, la versión en L^q, $q \geq 1$, de la desigualdad de Bernstein encontrando que ${}_n\left(\dfrac{d}{d\theta}\right) = n$. Para $0 < q < 1$, primero G. Klein (1951) y luego P. Osval'd (1976), utilizando distintos métodos, probaron que ${}_n\left(\dfrac{d}{d\theta}\right) = c(q)n$, donde $c(q)$ es una constante multiplicativa que depende de q. El análogo para la desigualdad de Markov en $\mathbb{P}_n$ es $\int_{-1}^1 |p'(x)|^q dx \leq c^{q+1}n^{2q}\int_{-1}^1 |p(x)|^q dx$, donde c es una constante absoluta. Sigue siendo un problema abierto hallar la mejor constante posible para $q = 1$ o $q = 2$.

En este trabajo, siguiendo las ideas de K. H. Kwon y D. W. Lee, ver [28], encontramos una fórmula explícita para la constante óptima ${}_n(T)$, cuando T es un operador lineal en $P_n(\mathbb{C})$ y la norma es la inducida por el producto interno de Sobolev

$$\langle f, g\rangle_S := \int_{\Delta_0} f(x)\overline{g(x)}d\mu_0(x) + \int_{\Delta_1} f'(x)\overline{g'(x)}d\mu_1(x).$$

donde (μ_0, μ_1), es un vector de medidas no negativas sobre la recta real tal que: μ_0 es no nula, los soportes de las medidas, Δ_0 y Δ_1, siendo compactos o no, satisfacen que al menos uno de ellos contiene una cantidad infinita de puntos y $\left|\int_{\Delta_j} x^n \, d\mu_j\right| < \infty$, para $n = 0, 1, 2, \cdots$ y $j = 0, 1$.

En el capítulo 1, se dan algunos comentarios sobre las pruebas de las desigualdades clásicas de Markov, Bernsntein y Nikolskii y se muestran algunos datos biográficos de éstos y otros matemáticos. En el capítulo 2, presentamos el estudio de algunos problemas extremales de tipo Markov-Bernsntein, mediante el enfoque de G. V. Milovanović, las desigualdades de tipo Markov- Bernstein para pesos de tipo Freud y Erdös, siguiendo métodos presentados por P. Borwein, T. Erdélyi y D. Lubinsky. También presentamos los resultados de K. H. Kwon y D. W. Lee. El capítulo 3 es el centro de este trabajo y en él se dan expresiones explícitas para la constante óptima en la desigualdad de Markov-Bernstein asociada a la norma Sobolev considerada y se presentan algunos ejemplos cuando T es un operador diferenciación y (μ_0, μ_1) es un vector de medidas de ortogonalización para polinomios ortogonales clásicos. Los principales resultados presentados en este capítulo aparecen en [63]. Por último, en el capítulo 4 se exponen las conclusiones y se plantean problemas que pueden conducir a futuras líneas de investigación. La tesis se completa con una bibliografía sobre teoría de aproximación, espacios de Sobolev, y desigualdades en espacios de funciones, basada en artículos y textos clásicos y contemporáneos de indudable interés. Los capítulos están dividos en secciones. La numeración de cada definición, observación, ejemplos y resultados están de acuerdo a la sección en donde se encuentran ubicados en el texto. Así, por ejemplo, el lema 2.3.1 indica que es el primer resultado de la sección 3 del segundo capítulo.

Capítulo 1

Desigualdades clásicas de Markov, Bernstein y Nikolskii

En este capítulo haremos una breve revisión sobre las desigualdades de Markov, Bernstein y Nikolskii, sus generalizaciones y análogos en distintos contextos. En las primeras dos secciones presentaremos las desigualdades de Markov y Bernstein y algunas de sus generalizaciones. La tercera sección está dedicada a mostrar algunas desigualdades de tipo Nikolskii y finalmente, la cuarta sección contiene algunos datos biográficos sobre los hermanos Markov, Bernstein, Nikolskii y el químico Mendeleev.

1.1. Desigualdades de Markov y de Bernstein

Para $n \geq 1$, sean $P_n(\mathbb{C})$ y $P(\mathbb{C})$ el espacio de los polinomios con coeficientes complejos y grado a lo sumo n y el espacio de polinomios con coeficientes complejos, respectivamente, dotados con las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en cada caso. Consideremos $T : (P_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|_1) \to (P(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ un operador lineal. Observe que para todo $P \in P_n(\mathbb{C})$, existe una constante $\gamma_n(T) \geq 0$ tal que:

$$\|TP\|_2 \leq \gamma_n(T)\|P\|_1. \tag{1.1}$$

Es claro que la mejor constante que satisfaga la desigualdad anterior, es decir, la solución del problema extremal asociado a (1,1), tendrá que ser la norma del operador T:

$$_n(T) := \|T\| = \sup\left\{\frac{\|TP\|_2}{\|P\|_1} : \quad P \in P_n(\mathbb{C}), P \neq 0\right\}.$$

Lo que no siempre es claro, es que se puedan encontrar fórmulas explícitas para la constante óptima $_n(T)$.

Llamaremos a una desigualdad de la forma (1,1) desigualdad de tipo Markov-Bernstein-Nikolskii, donde las combinaciones de los nombres de estos tres matemáticos variarán según el operador y las normas involucradas en (1,1).

El primer resultado relativo a desigualdades tipo Markov, es decir, cuando $\mathbb{P}_n$ y $\mathbb{P}$ son el espacio de polinomios con coeficientes reales y grado a lo sumo n y el espacio de polinomios con coeficientes reales, respectivamente, $T = \dfrac{d}{dx}$ y $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_\infty$ en el intervalo $[-1,1]$, está vinculado a investigaciones hechas en 1887, por el químico ruso Dmitrii Ivanovich Mendeleev en su "*Estudio de las disoluciones acuosas según el peso específico*". En un punto determinado de su investigación, Mendeleev se percató que era necesario para su trabajo tener una estimación precisa de lo grande que puede hacerse la derivada de un polinomio de grado 2, definido en un cierto intervalo $[a,b]$. Al plantear el problema en el intervalo $[-1,1]$, Mendeleev encontró que $|P'(x)| \leq 4$ y refirió este resultado a Andrei Andreyevich Markov quien en 1889, publicó su investigación del problema para polinomios de grado n en su trabajo titulado " *On a question by D.I. Mendeleev* ". El resultado de Markov lo expresamos a continuación:

Teorema 1.1.1 *(Desigualdad clásica de A. A. Markov) En la norma*

$$\|P\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |P(x)|$$

tenemos la siguiente desigualdad:

$$\|P'\|_\infty \leq n^2 \|P\|_\infty, \tag{1.2}$$

para cada $P \in \mathbb{P}_n$. La igualdad se satisface sólo cuando $P(x) = CT_n(x)$, donde C es un constante cualquiera, T_n es el polinomio n-ésimo de Chebyshev de primer tipo y únicamente para $x = \pm 1$.

En otras palabras, el teorema 1,1,1 asegura que la constante óptima viene expresada explícitamente por: ${}_n\left(\dfrac{d}{dx}\right) = n^2$.

A. A. Markov al demostrar (1,2), utilizó un método constructivo y siguió los mismos argumentos que aún se utilizan para probar el teorema de alternabilidad de signos. En su demostración, resuelve dos problemas de aproximación. En el primero, dado un x fijo, determina la cantidad

$$\max_{P\in\mathbb{P}_{n,L}} |P'(x)|,$$

con

$$\mathbb{P}_{n,L} := \{P \in \mathbb{P}_n \mid \|P\|_\infty = L\}.$$

En el segundo, proporciona una cota superior para la norma de la derivada de un polinomio en función de la norma del mismo polinomio. El lector interesado puede consultar [72], en donde el autor emplea una notación más sencilla que la utilizada por A. A. Markov en su trabajo original.

Otra manera de demostrar la desigualdad (1,2) es a través de la fórmula de interpolación para $P_n'(x)$ con nodos en los ceros del $n-$ésimo polinomio de Chebyshev correspondiente al intervalo $[-1,1]$.

Utilizando una desigualdad análoga a la de Markov para el disco unitario en el plano complejo, podemos obtener una demostración más sencilla de la desigualdad clásica de Markov. Dicha desigualdad fue formulada en 1912, por Sergei Natanovich Bernstein en su artículo: *"Sur l'ordre de la meilleure approximation des fouctions continues par des polynômes de degré donné,"* aproximadamente 20 años después del resultado de Markov. En su trabajo, Bernstein formula y resuelve el siguiente problema:

Sean Π *el espacio de los polinomios con coeficientes complejos y variable compleja y* D *el disco unitario en* $\mathbb{C}$. *Para* $P \in \Pi$, *tal que* $|P(z)| \leq 1$ *en* D, *determinar cuán grande puede ser* $|P'(z)|$ *para* $z \in D$.

En otras palabras, si definimos

$$\|P\|_D = \max_{|z|\leq 1} |P(z)|, \tag{1.3}$$

este problema se reduce a encontrar una expresión explícita para la constante óptima ${}_n(\frac{d}{dz}) = \max_{\|P\|_D=1} \|P'\|_D$.

Al llegar a este punto notemos que bajo este supuesto, los resultados obtenidos por A. Markov y S. Bernstein son diferentes.

Teorema 1.1.2 *(S. N. Bernstein) Sea* Π_n *el espacio de los polinomios con coeficientes complejos, variable compleja y grado a lo sumo* n. *Para* $P \in \Pi_n$, *se cumple que*

$$\|P'\|_D \leq n\|P\|_D.$$

La igualdad se cumple para $P(z) = Cz^n$, *donde* C *es una constante cualquiera.*

El teorema 1,1,2 nos indica que ${}_n\left(\frac{d}{dz}\right) = n$. Bernstein probó esta desigualdad con $2n$ en lugar de n. La desigualdad óptima aparece por primera vez en un artículo de M. Fekete en 1916, quien atribuye la prueba a L. Fejér, cuestión ésta que no está clara, pues Bernstein por su parte la atribuye a Landau.

También podemos destacar que el teorema de Bernstein puede ser establecido de varias formas. Debido a que un polinomio $P \in \Pi$ es una función entera, éste toma su valor máximo para $|z| \leq 1$ sobre la circunferencia $|z| = 1$. Luego, podemos considerar solamente los valores de z tales que $z = e^{i\theta}$ para $-\pi < \theta \leq \pi$ y por tanto

$$\|P\|_D = \max_{|z|=1} |P(z)| = \max_{-\pi<\theta\leq\pi} |P(e^{i\theta})|. \tag{1.4}$$

De esta manera, podemos establecer una relación entre los elementos de Π_n con elementos en $\mathcal{T}_n$, el espacio de los polinomios trigonómetricos de grado n, ya que al considerar un polinomio algebraico $P(z)$ de grado n, y tomar z en la circunferencia unitaria, $P(z)$ se convierte en un polinomio trigonométrico, $P(\theta)$ de grado n con coeficientes complejos . Así, Bernstein proporciona otra forma para el teorema 1.1.2.

Teorema 1.1.3 *(Teorema de Bernstein para polinomios trigonométricos) Si* $P \in \mathcal{T}_n$ *y* $|P(\theta)| \leq M$, *entonces*

$$|P'(\theta)| \leq nM, \quad -\pi < \theta \leq \pi. \tag{1.5}$$

La igualdad se cumple para $P(\theta) = \gamma sen(n\theta - \beta)$, *donde* $|\gamma| = 1$ *y algún* $\beta \in \mathbb{R}$.

Bernstein demuestra el anterior resultado basándose en un método variacional. Pruebas más simples fueron dadas por M. Riesz, F. Riesz y De la Vallee Poussin. A continuación presentamos un esquema de la prueba de De la Vallee Poussin. En primera instancia, se demuestra el teorema para el caso en que el polinomio trigonómetrico sea real y luego se generaliza a polinomios trigonómetricos con coeficientes complejos.

Demostración (Teorema 1.1.3)

Utilizando la norma $\|\cdot\|_D$ dada por (1,4), la desigualdad (1,5) puede ser expresada en la forma

$$\|P'\|_D \leq n\|P\|_D. \tag{1.6}$$

Caso 1:

Sea P un polinomio trigonométrico de valor real, el cual cumple lo opuesto de (1,6). Es decir,

$$\|P'\|_D = \max_{-\pi\leq\theta\leq\pi} |P'(\theta)| = nL,$$

donde $L > \|P\|_D$. Luego, existe $\beta \in [-\pi, \pi]$ tal que $|P'(\beta)| = nL$. Sin pérdida de generalidad, tomemos $P'(\beta) = nL$, y en consecuencia $P''(\beta) = 0$.

Consideremos el siguiente polinomio trigonométrico auxiliar de grado n

$$S(\theta) = L sen\, n(\theta - \beta) - P(\theta)$$

y los $2n + 1$ puntos extremales

$$\theta_k = \beta + (2k - 1)\pi/2n,$$

para los que la función $sen\, n(\theta - \beta)$ toma los valores ± 1. k toma todos los valores para los cuales $\theta_k \in [-\pi, \pi]$. Los puntos $z_k = e^{i\theta_k}$ están distribuidos de manera equidistante en la circunferencia $|z| = 1$.

Debido a que $|P(\theta)| < L$ y $S(\theta_k) = (-1)^{k-1} L - P(\theta_k)$, podemos concluir que el polinomio S toma valores de signos alternos; por lo tanto, S tiene $2n$ raíces en $[-\pi, \pi]$. Por otra parte, como S es diferenciable en cada subintervalo de $[-\pi, \pi]$, generado por las $2n$ raíces, podemos aplicar el teorema de Rolle en cada subintervalo cuyos extremos sean raíces y hallaremos $2n - 1$ ceros de S' entre los ceros de S y por la periodicidad de la funciones trigonométricas hallaríamos la otra raíz en el primer o último subintervalo de $[-\pi, \pi]$. Por tanto,

$$S'(\theta) = n\,L \cos[n(\theta - \beta)] - P'(\theta)$$

también tiene $2n$ raíces distintas. Una de estas raíces es β ya que

$$S'(\beta) = nL - P'(\beta) = nL - nL = 0.$$

Similarmente, podemos concluir que $S''(\theta)$ tiene $2n$ ceros entre los ceros de $S'(\theta)$. Ahora, como $S''(\theta) = -n^2 L \text{ sen}[n(\theta - \beta)] - P''(\theta)$ y $P''(\beta) = 0$ también tenemos que $S''(\beta) = 0$. Así $S''(\theta)$ tiene al menos $2n + 1$ raíces, lo cual es posible sólo si $S'' \equiv 0$; es decir, si S' es constante en $[-\pi, \pi]$. Esto es una contradicción ya que $S(\theta)$ cambia de signo en dicho intervalo. Por lo tanto, tenemos que

$$|P'(\theta)| \leq nM,$$

para cada $\theta \in [-\pi, \pi]$ y $P \in \mathcal{T}_n$.

Caso 2:

Supongamos que $P(\theta)$ es un polinomio trigonométrico con coeficientes complejos. Sean λ y α números reales tales que $||P'||_\infty = e^{i\lambda}P'(\alpha)$. Entonces $R(\theta) = Re\{e^{i\lambda}P(\theta)\}$ es un polinomio con coeficientes reales para el cual

$$||R'||_D \leq n\,||R||_D.$$

Además, $||R||_D \leq ||P||_D$ y $R'(\theta) = Re\{\, e^{i\lambda}P'(\theta)\,\}$. Por lo que,

$$||P'||_D = e^{i\lambda}P'(\alpha) = R'(\alpha) \leq n||R||_D \leq n||P||_D.$$

La igualdad se alcanza cuando $P(\theta) = \gamma senn(\theta - \beta)$ donde $|\gamma| = 1$. En efecto, consideremos $\theta = \theta_1 = \dfrac{k_1\pi}{2n} + \beta$, para algún $k_1 \in \mathbb{Z}$, entonces $|P(\theta_1)| = |\gamma| = 1$.

Por otra parte, para algún $k_2 \in \mathbb{Z}$, al considerar $\theta = \theta_2 = \dfrac{2k_2\pi}{n} + \beta$ se satisface que

$$|P'(\theta_2)| = |\gamma|n = n,$$

probándose la afirmación. ■

El teorema 1.1.3 puede ser utilizado para establecer una versión de (1,5) para polinomios algebraicos:

Dado $P \in \mathbb{P}_n$ con $|P(x)| \leq M$ para $-1 \leq x \leq 1$ y $x = \cos\theta$ con $\theta \in (-\pi, \pi]$, por el teorema 1.1.3, tenemos que:

$$|P'(x)|\sqrt{1 - x^2} \leq ||P'||_D \leq n||P||_D \leq nM.$$

Consecuentemente,

Teorema 1.1.4 *(Forma estándar del teorema de Bernstein) Sea* $P \in \mathbb{P}_n$ *y* $|P(x)| \leq M$ $(-1 \leq x \leq 1)$, *entonces para* $-1 < x < 1$ *se tiene:*

$$|P'(x)| \leq \frac{n\,M}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{1.7}$$

La igualdad es obtenida en el punto $x = x_\nu = \cos\dfrac{(2\nu - 1)\pi}{2n}$, $1 \leq \nu \leq n$, *si y solamente si* $P(x) = \gamma\, T_n(x)$, *donde* $|\gamma| = 1$ *y* T_n *es el polinomio n-ésimo de Chebyshev de primer tipo.*

Notemos que el lado derecho de la desigualdad (1,7) tiene un buen comportamiento en puntos distantes a los extremos de $[-1,1]$, no así para valores muy cercanos a $x = \pm 1$. En este caso, resulta más útil la desigualdad clásica de Markov. Ahora, tomando en consideración los teoremas 1.1.1 y 1.1.4, podemos establecer lo siguiente:

Teorema 1.1.5 *Sea $P \in \mathbb{P}_n$ y $x \in (-1,1)$ entonces*

$$|P'(x)| \;\leq\; \text{mín}\left\{n^2\,,\ \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\right\}\|P\|_\infty,$$

donde la norma uniforme es tomada en el intervalo $[-1,1]$.

La desigualdad clásica de Markov (1,2), puede ser deducida siguiendo un método sencillo de prueba debido a G. Pólya y G. Szegő (1928). En este método, además de la desigualdad de Bernstein, utlizaremos el siguiente resultado:

Lema 1.1.1 *(Desigualdad de Schur) Para cualquier $P \in \mathbb{P}_{n-1}$,*

$$\|P\|_\infty \;\leq\; \underset{-1\leq x\leq 1}{\text{máx}} |n\sqrt{1-x^2}\,P(x)|. \tag{1.8}$$

Demostración (Lema 1.1.1) Ver [11].
Demostración (Teorema 1.1.1)

Sean $P \in \mathbb{P}_n$, $M > 0$ tal que $|P(x)| \leq M$ para $-1 \leq x \leq 1$. Si $x = \cos\theta$ con $\theta \in (-\pi,\pi]$, entonces tenemos que $P(\cos\theta)$ es un polinomio trigonométrico y por el teorema 1.1.3, se tiene que para cada $x \in (-1,1)$:

$$|P'(x)|\,\sqrt{1-x^2} \;\leq\; nM.$$

Debido a que $P' \in \mathbb{P}_{n-1}$, aplicando la desigualdad de Schur (1,8), y la forma estándar del teorema de Bernstein, se tiene que

$$\|P'\|_\infty \;\leq\; \underset{-1\leq x\leq 1}{\text{máx}}\; n\;|P'(x)|\sqrt{1-x^2} \;\leq\; n^2M.$$

En particular, tenemos la desigualdad (1,2).

■

1.2. Algunas extensiones de las desigualdades de Markov y de Bernstein

Dos preguntas que surgen de manera natural son: ¿Cómo conseguir una desigualdad análoga a la clásica de A. A. Markov para la $k-$ésima derivada de un polinomio P en $\mathbb{P}_n$? y ¿cuál es la expresión explícita de la constante óptima?

Una manera de responder a estas interrogantes podría ser iterando la desigualdad (1,2). Este procedimiento nos conduce a la siguiente desigualdad:

$$||P^{(k)}||_\infty \leq (n(n-1)\cdots(n-k+1))^2 \; ||P||_\infty.$$

Sin embargo, esta estimación no es óptima, como ciertamente probó en 1892, *Vladimir Andreevich Markov* al presentar el siguiente resultado, el cual fue publicado en 1916:

Teorema 1.2.1 *(V. A. Markov) Para cada $P \in \mathbb{P}_n$ se satisface que:*

$$||P^{(k)}||_\infty \leq \frac{1}{(2k-1)!!} \prod_{i=0}^{k-1} (n^2 - i^2) \, ||P||_\infty, \tag{1.9}$$

donde $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)$ y $k = 1, \cdots, n$. La igualdad se satisface para el polinomio n-ésimo de Chebyshev de primer tipo, T_n, y

$$_n\left(\frac{d^k}{dx^k}\right) = T_n^{(k)}(1).$$

De esta manera, V. Markov extendió la desigualdad de su hermano A. Markov. La prueba original de V. Markov suele calificarse como extremadamente complicada, de hecho 45 años después, Bernstein paralelamente a Schaeffer junto a Duffin, presentaron demostraciones más sencillas. Bernstein, en su intento de probar la desigualdad (1,9) utilizó un método basado en la fórmula de interpolación de Lagrange para un polinomio P y considerando en $x_i = cos\frac{i\pi}{n}$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$, los $n+1$ nodos que particionan de manera regular al intervalo $[-1, 1]$, encontró la siguiente desigualdad,

$$||P^{(k)}||_\infty \leq 2^k \frac{1}{(2k-1)!!} \prod_{i=0}^{k-1} (n^2 - i^2) \, ||P||_\infty.$$

Iterando la desigualdad (1,6), podemos obtener para el caso de los polinomios trigonómetricos, la correspondiente desigualdad para la $k-$ésima derivada:

Teorema 1.2.2 *Para cada $P \in \mathcal{T}_n$ se satisface que:*

$$||P^{(k)}||_D \leq n^k \, ||P||_D.$$

Con igualdad sólo si $P(\theta) = a \cos(n\theta) + b \operatorname{sen}(n\theta)$, donde a y b son constantes.

Numerosas extensiones de las desigualdades de Markov y de Bernstein se han dado a través de la historia. Por ejemplo, si consideramos en $\mathcal{T}_n$ la siguiente norma

$$||P||_E = \sup_{z \in E} |P(z)|,$$

donde $E \subset \mathbb{C}$ es un conjunto compacto y conexo; en 1959, Ch. Pommerenke llegó a la siguiente desigualdad:

$$||P'||_E \leq \frac{e}{2} \frac{n^2}{k} ||P||_E,$$

donde k es la capacidad logarítmica de E. Considerando este hecho y con la finalidad de que la desigualdad clásica de Markov fuese un caso especial de la desigualdad anterior, P. Erdös sugirió a Pommerenke que la constante $e/2$ en su desigualdad, podía ser reemplazada por $\frac{1}{2}(1 + o(1))$.

Existen muchas monografías y artículos sobre desigualdades de tipo Markov y de tipo Bernstein y sus correspondientes generalizaciones en varias normas. Un amplio estudio de tales tópicos, aproximadamente hasta 1994, puede ser encontrado en [56]. Algunas de estas desigualdades serán consideradas en las siguientes secciones .

1.2.1. Generalizaciones en la Norma L^q

Otros trabajos interesantes han surgido al estudiar desigualdades de tipo Markov-Bernstein en otros espacios de funciones. Por ejemplo, en los espacios L^q, con la norma:

$$\|P\|_{L^q[(a,b)]} = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b |P(x)|^q \right)^{1/q}, \qquad 1 \leq q < \infty.$$

En 1932, A. Zygmund resolvió el problema extremal (1,1) para el espacio $\mathcal{T}_n$ (ver [56]), utilizando una fórmula de interpolación de M. Riez para una función P en $\mathcal{T}_n$ de período 2π y considerando argumentos de análisis convexo.

Teorema 1.2.3 *(A. Zygmund) Para $1 \leq q < \infty$, $(a,b) = (0, 2\pi)$ y $P \in \mathcal{T}_n$ se cumple que:*

$$\|P'\|_{L^q[(0,2\pi)]} \leq n \|P\|_{L^q[(0,2\pi)]}$$

El resultado anterior puede ser reformulado de la siguiente manera:

Teorema 1.2.4 *Si $P \in \mathcal{T}_n$, entonces para $0 \leq q \leq \infty$*

$$\|P'\|_{L^q[(0,2\pi)]} \leq n \|P\|_{L^q[(0,2\pi)]}. \tag{1.10}$$

Observemos que en el caso $q = \infty$, la desigualdad (1,10) se reduce a la desigualdad clásica de Bernstein. Para $0 < q < 1$, la desigualdad (1,10) es debida a P. Nevai. En 1980, una desigualdad similar pero con el factor extra $(4e)^{1/q}$ en el lado derecho, fue mostrado por A. Máté junto a P. Nevai. En 1981, V. V. Arestov probó (1,10), utilizando funciones subarmónicas y la fórmula de Jensen. Una prueba más simple fue dada por M. V. Golitschek y G. G. Lorentz, en 1989. Resultados y referencias a estos trabajos pueden hallarse en [56].

Una generalización importante de la desigualdad de Markov para polinomios algebraicos en la norma

$$\|P\|_{L^q[(-1,1)} = \left(\int_{-1}^1 |P(x)|^q dx \right)^{1/q},$$

fue dada en 1937, por E. Hille, G. Szegő y J. D. Tamarkin (ver [11], [23] y [56], entre otros):

Teorema 1.2.5 *Sean* $q > 1$ *y* $P \in \mathbb{P}_n$. *Entonces*

$$\|P'\|_{L^q[(-1,1)]} \quad \leq \quad Cn^2 \, \|P\|_{L^q[(-1,1)]},$$

donde la constante $C = C(n, q)$ *está dada por*

$$C(n,q) \quad = \quad \begin{cases} 2(q-1)^{1/q-1} \left(q + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{q}{nq-q+1}\right)^{n-1+1/q} & si \quad q > 1, \\ \\ 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} & si \quad q = 1. \end{cases}$$

La constante $C(n, q)$ en el teorema anterior no es la óptima. Hallar la mejor constante posible en los casos $q = 1$ y $q = 2$ todavía es un problema abierto.

1.3. Desigualdades de tipo Nikolskii

En la sección anterior, consideramos desigualdades que presentan la siguiente forma:

$$\|P^{(k)}\|_{L^q([a,b])} \leq {}_n\left(\frac{d^k}{dx^k}\right)_{q,p} \|P\|_{L^p([a,b])}, \qquad P \in \mathbb{P}_n, \qquad p, q \in [0, +\infty], \tag{1.11}$$

con ${}_n\left(\dfrac{d^k}{dx^k}\right)_{q,p}$ la mejor constante que depende de $n,\ k,\ p$ y $q,$ y en donde

$$\begin{aligned} \|P\|_{L^q([a,b])} \quad &= \quad \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b |P(x)|^q\right)^{1/q}, \qquad q \in (0, +\infty) \qquad (1.12) \\ \|P\|_\infty \quad &= \quad \max_{x \in [a,b]} |P(x)|, \\ \|P\|_{L^0([a,b])} \quad &= \quad \exp\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln |P(x)| \, dx\right) \end{aligned}$$

Si $p = q = \infty,$ las desigualdades del tipo $(1{,}11)$ son las desigualdades clásicas establecidas por los hermanos Markov.

Cuando $q \neq p$ y $k = 0,$ en $(1{,}11)$ obtenemos las llamadas *desigualdades de Nikolskii*. En general, las desigualdades de Nikolskii son desigualdades entre métricas diferentes de una misma función. Como en este caso, $k = 0,$ consideremos el operador lineal identidad, el cual denotaremos por I y la desigualdad $(1{,}11)$ se puede expresar como sigue:

$$\|P\|_{L^q([a,b])} \leq {}_n(I)_{q,p} \, \|P\|_{L^p([a,b])}, \qquad P \in \mathbb{P}_n, \qquad p, q \in [0, +\infty],$$

con ${}_n(I)q, p$ la constante óptima.

Existe una gran variedad de ejemplos de estas desigualdades. Si consideramos la norma

$$\|P\|_{L^p([-1,1])} = \left(\int_{-1}^1 |P(t)|^p dt\right)^{1/p} \qquad (1 \leq p \leq +\infty),$$

con $1 \le q \le p \le +\infty$, I. I. Ibragimov en 1960, obtuvo el siguiente resultado (ver [56]):

$$\|P\|_{L^p([-1,1])} \le \begin{cases} \left(\dfrac{2n^2}{q+2}\right)^{1/p-1/q} \|P\|_{L^q([-1,1])}\,(1+o(1)), & \text{si } 1 \le q \le 2, \\[2ex] \left(\dfrac{2}{3}\,q^2 n^2\right)^{1/q-1/p} \|P\|_{L^q([-1,1])}\,(1+o(1)), & \text{si } q > 2. \end{cases}$$

Por su parte, en 1976, H. T. Kau halló una mejor aproximación a la constante óptima, al demostrar que:

$$\|P\|_{L^p([-1,1])} \le \left(\frac{np_1+2}{2\sqrt{2}}\right)^{2\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \|P\|_{L^q([-1,1])} \qquad (1 \le q \le p \le +\infty).$$

donde p_1 es el entero par más pequeño tal que $p_1 \ge q$.

Ya en 1933, D. Jackson obtuvo una desigualdad que relaciona la norma uniforme en $[0,2\pi]$ con la norma L^q, $q > 0$ (ver [56]):

$$\|T\|_\infty \le 2n^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{2\pi} |T(\theta)|^q\right)^{1/q} \qquad q > 0 \quad \text{y} \quad T \in \mathcal{T}_n.$$

Al utilizar la desigualdad de Hölder, es posible hallar otra desigualdad simple, la cual compara diferentes normas L^q de un polinomio trigonométrico dado:

$$\left(\int_0^{2\pi} |T(\theta)|^q\right)^{1/q} \le (2\pi)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_0^{2\pi} |T(\theta)|^p\right)^{1/p} \qquad T \in \mathcal{T}_n \quad \text{y} \quad 1 \le q \le p \le \infty. \tag{1.13}$$

En 1951, S. M. Nikolskii probó una desigualdad la cual es, en cierto sentido, inversa a (1,13)

$$\left(\int_0^{2\pi} |T(\theta)|^p\right)^{1/p} \le 2n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_0^{2\pi} |T(\theta)|^q\right)^{1/q}$$

para cualquier $T \in \mathcal{T}_n$ y $1 \le q \le p \le +\infty$.

Un resultado similar se cumple para $0 < q \le p \le +\infty$ (ver [56]):

$$\left(\int_0^{2\pi} |T(\theta)|^p\right)^{1/p} \le 2^{1-\frac{q}{p}}\, n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(\int_0^{2\pi} |T(\theta)|^q\right)^{1/q}.$$

En 1954, N.K. Bari probó que:

$$\left(\int_a^b |T(\theta)|^p\right)^{1/p} \le C(a,b)\; n^{2\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_0^{2\pi} |T(\theta)|^q\right)^{1/q}$$

donde $0 < q \le p \le +\infty$ y $C(a,b)$ es una constante positiva la cual sólo depende de a y b (ver [56]).

Una expresión explícita para la constante óptima, ${}_n(I)_{q,p}$, involucrada en (1,11), puede ser una tarea difícil y es obtenida sólo en algunos casos. Por ejemplo, en 1965 (ver [56]), para $p = +\infty$ y $r = 1$, L. V. Taikov demostró que:

$$ {}_n(I)_{+\infty,1} \;=\; 2cn \;+\; O(1), $$

donde $c \in (0.539, 0.58)$.

Considerando la norma $\|T\|^2_{L^2(0,2\pi)} \;=\; \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |T(\theta)|^2 d\theta$, tenemos que una expresión explícita para la constante óptima es:

$$ {}_n(I)_{+\infty,2} \;=\; \sqrt{2n+1}, $$

y la desigualdad de Nikolskii es:

$$ \|T\|_\infty \;\leq\; \sqrt{2n+1}\; \|T\|_{L^2(0,2\pi)}. \tag{1.14} $$

El polinomio extremal para (1,14), viene dado por la expresión

$$ T(\theta) \;=\; C\, D_n(\theta), $$

con C una constante no nula cualquiera y D_n es el núcleo de Dirichlet

$$ D_n(\theta) \;=\; \frac{1}{2} + \cos\theta + \cdots + \cos(n\theta). $$

En 1984, H. N. Mhaskar y E. B. Saff considerando los pesos exponenciales, $\omega_\alpha(x) \;=\; \exp(-|x|^\alpha)$ para $\alpha > 0$, y la norma en $L^q(\mathbb{R})$

$$ \|f\|_q \;=\; \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^q\right)^{1/q}, $$

proporcionaron la siguiente generalización de las desigualdades de Nikolskii, para el caso en que $0 < q < p \leq +\infty$, $n > 2$ y $P \in \mathbb{P}_n$:

$$ \|\omega_\alpha P\|_p \;\leq\; C_1 \left(n^\rho (\ln n)^\delta\right)^{1/q-1/p} \|\omega_\alpha P\|_q, $$

donde

$$ \rho = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad 0 < \alpha < 1, \\ 1 - 1/\alpha, & \text{si} \quad \alpha \geq 1, \end{cases} $$

y

$$ \delta = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{o} \quad \alpha \geq 2, \\ 1 - 1/\alpha, & \text{si} \quad 1 \leq \alpha < 2, \end{cases} $$

y en la dirección contraria,

$$ \|\omega_\alpha P\|_q \;\leq\; C_2 \left(n^{1/\alpha}\right)^{1/q-1/p} \|\omega_\alpha P\|_p. $$

En 1987, P. Nevai y V. Totik proporcionaron la desigualdad óptima para estos pesos exponenciales (ver [56]):

Teorema 1.3.1 *Sea* $0 < \alpha < +\infty$ *y* $0 < p, q \leq +\infty$. *Entonces para cada* $P \in \mathbb{P}_n$ *tenemos*

$$\|\omega_\alpha P\|_p \leq C\, K_n(\alpha, p, q)\, \|\omega_\alpha P\|_q, \tag{1.15}$$

donde la constante $C = C(\alpha, p, q) > 0$, *es independiente de* n *y* P, *y*

$$K_n(\alpha, p, q) = \begin{cases} \left(n^{1/\alpha}\right)^{1/p-1/q}, & si \quad p \leq q, \\ \left(n^{1-1/\alpha}\right)^{1/q-1/p}, & si \quad p > q \quad y \quad \alpha > 1, \\ (\ln(n+1))^{1/q-1/p}, & si \quad p > q \quad y \quad \alpha = 1, \\ 1, & si \quad p > q \quad y \quad 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Además, la desigualdad (1,15) *es la mejor posible en el sentido de que, dados* $\alpha > 0$ *y* $p, q > 0$, *existe una constante positiva* C^* *y una sucesión de polinomios* $\{P_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *tal que*

$$\|\omega_\alpha P_n\|_p \geq C^*\, K_n(\alpha, p, q)\, \|\omega_\alpha P_n\|_q,$$

para $n = 1, 2, \ldots$

Existe una gran cantidad de desigualdades de tipo Nikolskii para pesos Freud y pesos Erdös, y para familias de pesos exponenciales más generales que los antes mencionados, el lector interesado puede consultar [38] y ver las referencias allí sugeridas.

1.4. Algunos datos biográficos sobre D. Mendeleev, hermanos Markov y S. Bernstein

1.4.1. Dmitrii Ivanovich Mendeleev

Dmitri Ivanovich Mendeleev nació en Tobolsk (Siberia) el 8 de febrero de 1834. Sus padres Iván Pavlovich Mendeleev y María Dmitrievna Mendeleev formaron una familia, de la cual era el menor de diecisiete hermanos. Desde joven se destacó en Ciencias. Su formación la hizo en el Instituto Pedagógico de San Petersburgo. Se graduó en 1855 como el primero de su clase y luego presentó la tesis *Sobre volúmenes específicos* para conseguir la plaza de maestro de escuela y más tarde la tesis *Sobre la estructura de las combinaciones silíceas* para alcanzar la plaza de cátedra de química en la Universidad de San Petersburgo.

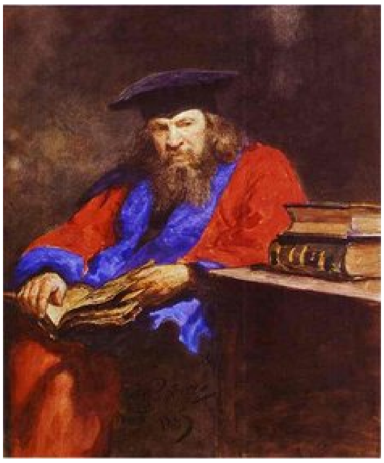

Figura 1.1: Dmitrii Ivanovich Mendeleev

A los 23 años ya estaba a cargo de un curso de dicha universidad. En 1861, escribió el primer libro para la época, sobre Química Orgánica.

En 1862 se casó con Feozva Nikítichna Lescheva con quien tuvo tres hijos y en 1882 contrajo segundas nupcias con Ana Ivanovna Popova y de esta unión nacieron cuatro hijos.

En 1864 fue nombrado profesor de tecnología y química del Instituto Técnico de San Petersburgo. En 1867 ocupó la cátedra de química en la Universidad de San Petersburgo donde permaneció hasta 1890, cuando terminó su estancia en la universidad por razones políticas.

En 1865 puso en práctica en su propia granja, métodos científicos para la mejora de cultivos y obtuvo un rendimiento muy por encima de lo que comúnmente se producía.

En 1869 publicó la mayor de sus obras, Principios de Química, donde formuló su famosa tabla periódica, traducida a multitud de lenguas y que fue libro texto durante muchos años. La tabla definitiva la publicó a comienzos de 1871 y para lograr que algunos elementos encajaran en el grupo correspondiente, “alteró” el valor de su peso atómico considerado correcto hasta entonces. Así dejó posiciones vacantes en su tabla y predijo que éstas correspondían a elementos que todavía no habían sido descubiertos en aquel tiempo. Estas predicciones fueron corroboradas con bastante exactitud por los descubrimientos sucesivos del galio (1874), escandio (1879) y germanio (1885).

En 1876, fue enviado a Estados Unidos, para informarse sobre la extracción del petróleo y ponerla luego en práctica en el Cáucaso. Este estudio lo llevó a investigar el fenómeno de la atracción de las moléculas de cuerpos homogéneos o diferentes, materia que estudió hasta el día de su muerte.

En 1887 emprendió un viaje en globo en solitario para estudiar un eclipse solar y publicó su *Estudio de las disoluciones acuosas según el peso específico*. En este estudio, realizó una investigación sobre la gravedad específica de una solución como una función del porcentaje de la sustancia diluida. Esta función tiene alguna importancia en las pruebas para medir el contenido de alcohol de cerveza y vino. También se utiliza para estudiar la concentración de anticongelante en las pruebas del sistema de refrigeración de un automóvil. Aunque los químicos y físicos de hoy en día no les resulta tan interesante este método de Mendeleev, su estudio ha conducido a problemas matemáticos de gran interés, algunos de los cuales aún hoy estimulan la investigación en Matemáticas.

De manera más precisa, Mendeleev abrió el camino que condujo a la famosa *Desigualdad de Markov*, al plantear el siguiente problema extremal:
Si $Q : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *es un polinomio cuadrático tal que* $|Q(x)| \leq 1$ *para cada* $x \in [-1, 1]$, *¿cuán grande puede ser el valor de* $|Q'(x)|$ *sobre* $[-1, 1]$ *?*

El propio Mendeleev fue capaz de resolver este problema matemático y probó que $|Q'(x)| \leq 4$ sobre $[-1, 1]$. Así, se dió comienzo a un interesante estudio de desigualdades que han sido la base para las demostraciones de importantes resultados en el área de teoría de aproximación desde aquellos años de Mendeleev hasta nuestros días. Sobre dicho tópico volveremos más adelante en este trabajo.

En 1889 fue nombrado miembro honorario del Consejo de Comercio y Manufacturas.

En 1890, por un encargo del ministerio de Guerra y Marina, preparó una pólvora sin humo al pirocolodión.

En 1892 fue designado conservador científico de la Oficina de Pesas y Medidas en compensación de lo ocurrido en la universidad. Después de un año, tras haberlo reorganizado, asume el cargo de director, lo que le compromete a realizar diversos viajes, entre los que se encuentra el realizado a

Londres donde recibe los doctorados honoris causa de las universidades de Cambridge y Oxford.

En 1902, viajó a París y observó el experimento de la fosforescencia del sulfuro de zinc debida a los rayos X, en el laboratorio del matrimonio Curie.

Falleció el 2 de febrero de 1907. Mendeleiev fue reconocido como uno de los más importantes científicos de la época pero en Rusia nunca se le reconoció debido a sus ideas liberales, por lo que nunca fue admitido en la Academia Rusa de las Ciencias. Un merecido homenaje y reconocimiento a la trayectoria de este ilustre científico ruso, es el nombre de mendelevio (Md) al elemento químico de número atómico 101.

1.4.2. André Andreyevich Markov

André Andreevich Markov nació en Ryazan, Rusia, el 14 de junio de 1856. Su padre Andrey Grigorevich Markov ejercía un cargo en la administración pública en Ryazan y su madre, la primera esposa de Andrey Grigorevich Markov, Nadezhda Petrovna Markova. En 1866 Andrey ingresó a una escuela de enseñanza de lenguas clásicas de San Petersburgo, quinta en prestigio y en donde se impartían el griego antiguo, el inglés y otras lenguas europeas, así como ciencias naturales, matemáticas, historia y geografía. Desde su tiempo escolar se involucró intensamente en las matemáticas a nivel superior. Alrededor de los 17 años de edad comunicó a Bunyakovski, a Korkin y a Zolotarev un nuevo método para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.

Figura 1.2: André Andreyevich Markov

Por fin en 1874 terminó la escuela y comenzó sus estudios en la Facultad de Física-Matemática de la Universidad de San Petersburgo. Entre sus profesores figuraron: Sochocki (cálculo diferencial, álgebra superior), Posee (geometría analítica), Zolotarev (cálculo integral), Chebyshev (teoría numérica y probabilidades), Korkin (ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales), Okatov (mecánica teórica), Somov (mecánica) y Budaev (geometría descriptiva y geometría superior).

En 1877 le concedieron la medalla de oro por su excepcional solución del problema "*Sobre la integración de ecuaciones diferenciales por fracciones continuas con una aplicación a la ecuación* $\frac{dy}{dx} = n(1+y^2)$". En el año siguiente pasó los exámenes de candidatura y permaneció en la universidad para prepararse para el trabajo de conferencista. En abril de 1880, André Markov defendió su tesis de maestría "Sobre formas cuadráticas binarias con determinante positivo". En enero de 1885, culminó su tesis doctoral "Sobre algunas aplicaciones algebraicas de fracciones continuas".

Su trabajo pedagógico comenzó después de la defensa de su tesis de maestría en otoño de 1880. Dió conferencias sobre cálculo diferencial e integral y más tarde sobre introducción al análisis y teoría de la probabilidad (sucediendo a Chebyshev quien había dejado la universidad en 1882) y sobre cálculo en diferencias. Un año después de la defensa de la tesis doctoral, fue designado profesor extraordinario, subordinado a otro profesor (1886) y en el mismo año fue el adjunto electo de la Academia de Ciencias y en el otoño de 1894 fue promovido a profesor ordinario de la Universidad de San Petersburgo. Finalmente en 1896 fue electo miembro ordinario de la Academia como el sucesor de Chebyshev. En 1905 fue nombrado profesor y obtuvo el derecho a la jubilación el cual ejerció de manera inmediata. Hasta 1910, sin embargo, continuó dando clases de cálculo en diferencias.

Markov protestó contra un decreto del ministerio de educación, lo cual contribuyó a su alejamiento de la enseñanza en la Universidad de San Petersburgo. En relación con los disturbios estudiantiles en 1908, los profesores y conferencistas de la Universidad de San Petersburgo recibieron la orden de mantener bajo observación a sus alumnos. En primer lugar Markov rechazó este decreto y luego escribió una explicación donde expresó su rechazo a ser "un agente del gobierno". Finalmente, no encontró otra salida que su retiro total de la universidad. En 1913 el consejo de San Petersburgo eligió como miembros honorarios a nueve científicos de la universidad. Markov fue uno de ellos, pero su elección fue la única no confirmada por el ministro de Educación y se hizo efectiva cuatro años más tarde, después de la revolución de febrero de 1917. En el año siguiente Markov reanudó sus actividades de enseñanza, hasta su muerte en 1922, sus conferencias fueron sobre teoría de probabilidades y cálculo en diferencias.

1.4.3. Vladimir Andreevich Markov

En 1892, Vladimir Andreevich Markov amplió la desigualdad de su hermano Andrei Andreyevich Markov, dada en 1889. Desafortunadamente, la colaboración matemática entre estos hermanos fue truncada por la desapación física de su hermano menor Vladimir...

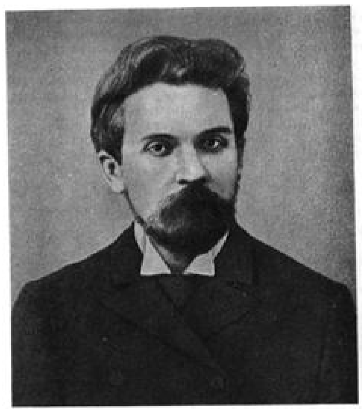

Figura 1.3: Vladimir Andreevich Markov

Vladimir Andreevich Markov nació en San Petersburgo el 8 de mayo de 1871, hijo menor de Andrey Grigorevich Markov y su segunda esposa, Anna Iosifovna Markova. Al igual que André estudió en la quinta escuela gramática de San Petersburgo y en 1888 entró en la Facultad Físico-Matemática de la Universidad de San Petersburgo. Durante su vida de estudiante, entre sus profesores figuraron: su hermano Andrei Markov (Introducción al análisis, diferencias finitas, teoría de la probabilidad), Posse (cálculo diferencial e integral), Sochocki (cálculo integral, álgebra superior, teoría de números), Korkin (Ecuaciones diferenciales, cálculo variacional), Budaev (geometría analítica y geometría superior), Ptashitski (geometría descriptiva, funciones elípticas), Selivanov (cursos especiales sobre álgebra superior y teoría de números) y Grave (aplicaciones geométricas del cálculo diferencial e integral). En 1892, como estudiante del cuarto año, publicó el artículo “Sobre funciones de menor desviación del cero en un intervalo dado” con el cual se le adjudicó un premio en la ocasión de celebrarse el primer congreso de científicos naturales y médicos.

Tras finalizar sus estudios, permaneció en la universidad para preparar su trabajo como conferencista y estimulado por Korkin, comenzó a escribir su tesis de maestría sobre formas cuadráticas positivas de tres variables, la cual defendió en 1896.

En el año académico 1895-1896 además de enseñar en la escuela quinta de San Petersburgo, se desempeñó como conferencista en el área de geometría analítica. En el año 1896 enferma de tuberculósis, imposibilitando su trabajo definitivamente y muere el 18 de enero de 1897 a la edad de 26 años. En 1897, André A. Markov publicó la tesis inconclusa de su hermano Vladimir A. Markov, donde éste último investigó acerca del problema extremal planteado en (1,1), para el caso en que Ψ es el operador diferenciación de orden k, con $k = 1, 2, \ldots$

1.4.4. Sergei Natanovich Bernstein

Alrededor de 1912, el matemático ruso Sergei Natanovich Bernstein investigó el análogo de la desigualdad de A. A. Markov para el disco unidad en el plano complejo, en lugar del intervalo $[-1, 1]$.

Figura 1.4: Sergei Natanovich Bernstein

Sergei Natanovich Bernstein nació el 5 de marzo de 1880 en Odessa en la familia del médico Natan Bernstein, quien también era profesor de la Universidad Novorossisk. En 1899 comenzó sus estudios de matemáticas, pero un año después se cambia a ingeniería en la Escuela de Electrónica en París, al finalizar estos estudios, retomó los de matemáticas bajo la supervisión de David Hilbert. En 1904 defendió en París, su tesis “Sobre la naturaleza analítica de las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden”, cuyos resultados se publicaron a la brevedad y por lo que se dió a conocer muy rápido. Esto no fue una ventaja para él en Rusia ya que los niveles académicos alcanzados en el extranjero no se reconocían allí. Luego, tuvo que presentar sus exámenes de maestría y su tesis doctoral fue considerada más o menos como una tesis de maestría. Aprobó los exámenes con dificultad ya que lo forzaron a solucionarlos por métodos clásicos. En 1907, pudo trabajar como profesor en el recién fundado colegio politécnico para mujeres. En 1908 defendió su tesis de maestría

"*Investigación y Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales Elípticas de Segundo Grado*". En 1913 defendió su tesis doctoral "Sobre La Mejor Aproximación De Funciones Continuas Mediante Polinomios De Grado Dado". En 1911 ya había sido galardonado con el premio de la Academia Belga de Ciencias por sus resultados en este tema. Hasta 1918 dió clases en la Universidad Politécnica para Mujeres y en 1920 fue nombrado profesor ordinario en la Universidad de Kharkiv.

En 1924, Bernstein fue electo miembro de la Academia rusa de Ciencias. En 1925, fue nombrado miembro ordinario de la Academia Ucraniana. En 1928 fue nombrado director del Instituto Matemático de Kharkiv y en el mismo año se convirtió en miembro de la Academia de Ciencias de París. En 1930, la época oscura para el "*Frente Matemático de Leningrado*" comenzó, provocada por un documento polémico en donde ciertos grupos comenzaron a purgar las matemáticas de "elementos idealistas", dando lugar a la llamada Sociedad Matemática de Leningrado.

En 1932, Bernstein dejó Kharkiv y se convirtió en jefe del departamento de la teoría de probabilidad y estadística matemática del Instituto de Matemáticas de la Academia de Ciencias que se encontraba en Leningrado en ese momento. A partir de 1934 también impartió clases en la Universidad de Leningrado. Bernstein dejó la Universidad de Kharkiv a tiempo, ya que un poco después de su permiso, la purga de la Universidad de Kharkiv comenzó. Muchos profesores y estudiantes fueron arrestados, algunos de ellos fueron fusilados.

En Leningrado, junto a Bernstein se encontraba trabajando G. G. Lorentz, el señor en la teoría de la aproximación moderna, quien también sufrió persecución y fue obligado a abandonar su país de origen. Las ideas de Bernstein se propagaron a los países occidentales, lo cual ayudó a superar el aislamiento de las matemáticas rusas en el tiempo de la Unión Soviética. En los años siguientes, Bernstein apenas podría ser intimidado. En 1936, cuando el punto culminante del enjuiciamiento por parte de Stalin contra el matemático Kolman Luzin, Bernstein decisivamente defendió la posición de Luzin. Esto era peligroso en ese momento. El 01 de enero 1939 Bernstein comenzó su trabajo de profesor en la Universidad de Moscú y se retiró de la jefatura del Instituto de Matemáticas, pero conservó su casa en Leningrado. En 1940 se convirtió en miembro honorario de la Sociedad Matemática de Moscú.

En los días de la Segunda Guerra Mundial, permaneció en la ciudad Kazakh de Borovoe. Su hijo alemán Sergeevich permaneció en Leningrado y murió cuando quiso abandonar la ciudad tras el bloqueo. La muerte de su hijo lo estimuló a dejar Leningrado para siempre, y también trasladó su lugar de residencia a Moscú. En 1947 fue despedido de la universidad y se ocupó de la jefatura del departamento de teoría de funciones, en el Instituto Steklov. Ocupó este cargo hasta 1957.

Su trabajo fue muy reconocido en el extranjero, especialmente en Francia. En 1944 la Universidad de Argel, le concede el título de Doctor Honoris Causa y en 1945, la Universidad de la Sorbona, hace lo propio. En 1955 Bernstein fue elegido miembro extranjero de la Academia Francesa de Ciencias. A pesar de su actitud crítica a los ideales del marixismo-leninismo, también fue condecorado por la Unión Soviética. Galardonado con la medalla de Lenin en dos ocasiones, algunas de sus contribuciones fueron galardonadas con el premio Stalin y un reconocimiento especial fue la edición en vida de toda su obra. Sergei Natanovich Bernstein murió el 26 de octubre de 1968, tras los efectos de una operación.

1.4.5. Sergey Mijáilovich Nikolskii

Sergey Mijáilovich Nikolskii nació en Talitsa (Rusia) el 30 de Abril de 1905. Graduado en el Instituto de Educación Pública Ekaterinoslav (ahora Universidad de Dnepropetrovsk) en 1929, también trabajó allí desde 1930 a 1940.

Figura 1.5: Sergey Mijáilovich Nikolskii

En 1940 comenzó a trabajar en el Instituto de Matemáticas V. A. Steklov de la Academia de Ciencias de la USSR (ahora Academia Rusa de Ciencias), y en 1947 comenzó su trabajo como profesor en el Instituto Politécnico de Moscú, en el Departamento de Teoría de Funciones.

Fue alumno doctoral de A. Kolmogorov y ha hecho contribuciones fundamentales al Análisis Funcional, Teoría de Aproximación de Funciones, Teoría de Imbedding de clases de funciones diferenciables en varias variables, métodos directos para el cálculo de variaciones y problemas de frontera para ecuaciones diferenciales parciales. Sus estudios sobre Teoría de Aproximación de Funciones son de gran importancia, por ejemplo, encontró estimaciones asintóticamente exactas para la aproximación de funciones por polinomios trigonométricos y por polinomios algebraicos. Desarrolló una Teoría de fórmulas de cuadratura óptimas y métodos de aproximación para funciones enteras de tipo exponencial, los cuales le permitieron obtener teoremas directos e inversos de imbedding para clases de funciones de Hölder generalizadas en varias variables.También postuló nuevas formulaciones para problemas de frontera asociados a ecuaciones eliptícas de orden superior con fuerte degenerancia en la frontera e investigó tales formulaciones por un método variacional.

Desde 1972 es miembro correspondiente de la Academia de Ciencias de la USSR y fue jefe del Departamento de Teoría de Funciones del Instituto de Matemáticas V. A. Steklov en los períodos de 1960 a 1988 y de 1988 a 1994. En 1972, por su monografía “Approximation of functions of many variables and embedding theorems”, recibió la Medalla Chebyshev de la Academia de Ciencias de la USSR. También recibió, entre otros, los siguientes reconocimientos: la Medalla de Estado (1952), la Medalla Vinogradov (1985), la Medalla de Estado de Ucrania (1994), la Medalla Kolmogorov (2000), la Medalla Ostrogradskii de la Academia Nacional de Ciencias de Ucrania (2000).

A la edad de 92 años el Profesor Nikolskii aún impartía conferencias en el Instituto de Física y Tecnología de Moscú (por sus siglas en inglés, MIPT). Para el momento de la redacción de este trabajo, el Profesor Nikolskii ha cumplido 106 años y desde que llegó al siglo de existencia en el 2005 sólo dicta charlas en congresos científicos, aunque aún continua trabajando en el MIPT.

Capítulo 2

Problemas extremales de tipo Markov-Bernstein-Nikolskii

En este capítulo presentaremos desigualdades de tipo Markov que pueden involucrar diferentes normas. Surgen de este modo, problemas extremales asociados a (1,1), los cuales podemos denominar de tipo Markov- Bernstein, Markov- Nikolskii o Markov-Bernstein-Nikolskii dependiendo del operador lineal involucrado y de si las normas a comparar son diferentes o no.

En la primera sección presentaremos problemas extremales en donde las desigualdades son análogas a las de Bernstein en las normas L^2 con pesos, mostraremos el enfoque de A. Guessab y G. V. Milovanovicć para pesos clásicos y algunos trabajos de ciertos autores entre los que tenemos a W. Milne, D. Lubinsky y P. Nevai, para pesos Freud. Finalizamos la sección con los resultados de K. H. Kwon y D. W. Lee en donde bajo ciertas condiciones impuestas a las normas involucradas, se resuelve el problema extremal (1,1) no sólo para derivadas si no también para cualquier operador definido en $\mathbb{P}(\mathbb{C})$. En la última sección mostramos algunos ejemplos de desigualdades relacionadas con problemas extremales del tipo Markov- Nikolskii o Bernstein-Nikolskii.

2.1. Problemas extremales de tipo Markov-Bernstein

En el espacio $L^2((a,b)\,,\,\omega\,)$ consideremos el siguiente producto interno

$$\langle P, Q\rangle_{L^2((a,b)\,,\,\omega\,)} \;=\; \int_a^b P(x)\,Q(x)\,\omega(x)dx,$$

donde ω es una función peso definida en $[a,b]$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, tal que todos los momentos

$$m_n \;=\; \int_a^b x^n\,\omega(x)dx$$

son finitos y con norma

$$\|P\|_{L^2((a,b)\,,\,\omega\,)} \;=\; \left(\int_a^b |P(x)|^2\,\omega(x)dx\right)^{1/2}. \tag{2.1}$$

Comenzaremos esta sección presentando algunos resultados relacionados con el problema extremal de tipo Markov-Bernstein, de hallar una expresión explícita para la constante óptima ${}_n(\Psi)$ para $\Psi = \dfrac{d}{dx}$.

Las desigualdades obtenidas en la norma L^2 con peso, son las denominadas desigualdades de tipo Markov-Bernstein. Comenzaremos con algunas de estas desigualdades para el caso de pesos clásicos. Por ejemplo, la mejor constante ${}_n\left(\dfrac{d}{dx}\right)$ para el peso $\omega(x) = e^{-x^2}$ en $(-\infty, +\infty)$ fue establecida en 1944 por E. Schmidt; mientras que para el caso $\omega(x) = e^{-x}$ en $(0, +\infty)$ fue hallada por P. Turán en 1960. Las expresiones de dichas constantes se establecen en el siguiente resultado (ver [56]):

Teorema 2.1.1 *(E. Schmidt - P. Turán) Para cada $P \in \mathbb{P}_n$,*

i) $$\|P'\|_{L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})} \leq \sqrt{2n}\ \|P\|_{L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2})}.$$

Un polinomio extremal es el Polinomio H_n de Hermite de grado n.

ii) $$\|P'\|_{L^2((0,+\infty), e^{-x})} \leq \left[2\, sen\left(\frac{\pi}{4n+2}\right)\right]^{-1} \|P\|_{L^2((0,+\infty), e^{-x})}.$$

El polinomio extremal viene dado por:

$$P(x) = \sum_{\nu=1}^{n} sen\left(\frac{\nu\pi}{2n+1}\right) L_\nu(x)$$

donde L_ν es el polinomio $\nu-$ésimo de Laguerre de orden $\alpha = 0$.

L. Mirsky en 1983, llegó a una estimación de la constante óptima ${}_n\left(\dfrac{d}{dx}\right)$, considerando la norma $(2{,}1)$ y ω un peso cualquiera (ver [56]). La desigualdad es la siguiente:

$${}_n\left(\frac{d}{dx}\right) \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} \nu\, \|\pi_\nu'\|^2_{L^2((a,b), \omega)}\right)^{1/2}, \tag{2.2}$$

donde $\{\pi_\nu\}_{\nu\geq 0}$ es un sistema de polinomios ortonormales con respecto a la función peso ω.

Así por ejemplo considerando el caso en que $\omega(x) = e^{-x^2}$, al aplicar $(2{,}2)$ con $\{\pi_\nu\}_{\nu\geq 0}$ el sistema ortonormal de Hermite, se cumple que:

$${}_n\left(\frac{d}{dx}\right) \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} 2\nu^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{\frac{1}{3}\, n(n+1)(2n+1)}. \tag{2.3}$$

Comparando con el resultado de Schmidt, vemos que el contraste con (2,3) es evidente y por lo tanto, (2,2), es un resultado de interés cualitativo.

En 1987, P. Dörfler consideró el problema análogo para derivadas de orden superior y calculó la constante óptima ${}_n\left(\dfrac{d^k}{dx^k}\right)$, para $k = 1, 2, \ldots$

Teorema 2.1.2 *(P. Dörfler) Sean* $\omega : (a,b) \to (0,+\infty)$ *con* $-\infty < a < b < +\infty$*, una función peso tal que todos los momentos asociados son finitos, entonces* $_n\left(\frac{d^k}{dx^k}\right)$ *es el máximo valor singular de la matriz*

$$A_n^{(k)} = \begin{pmatrix} e_{0,0}^{(k)} & \dots & e_{n,0}^{(k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{0,n-k}^{(k)} & \dots & e_{n,n-k}^{(k)} \end{pmatrix},$$

para $1 \leq k \leq n$ *y donde*

$$e_{\nu,j}^{(k)} = \int_a^b \pi_\nu^{(r)}(x)\pi_j(x)\omega(x)dx.$$

Además,

$$\max_{0\leq\nu\leq n} \|\pi_\nu^{(k)}\|_{L^2((a,b),\omega)} \leq {}_n(\frac{d^k}{dx^k}) \leq \left(\sum_{\nu=0}^{n} \|\pi_\nu^{(k)}\|^2_{L^2((a,b),\omega)}\right)^{1/2},$$

donde $\{\pi_\nu\}_{\nu\geq 0}$ *es una sucesión de polinomios ortonormales con respecto a la función peso* ω*.*

En el mismo año, G. V. Milovanović generalizó el resultado anterior, considerando $d\sigma(x)$ una medida no negativa definida en $\mathbb{R}$, con soporte compacto y conteniendo una cantidad infinita de puntos, tal que todos los momentos

$$m_\nu = \int_{\mathbb{R}} x^\nu d\sigma(x), \qquad \nu = 0, 1, \dots,$$

existen, son finitos y $m_0 > 0$. Al considerar en $\mathbb{P}_n$ el siguiente producto interno

$$\langle P, Q\rangle_\sigma = \int_{\mathbb{R}} P(x)Q(x)d\sigma(x), \tag{2.4}$$

es posible encontrar un único conjunto de polinomios ortonormales $\{\pi_\nu\}_{\nu\geq 0}$ definido mediante

$$\pi_\nu(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_0, \qquad a_\nu > 0.$$

Con la norma inducida por el producto interno (2,4), G. V. Milovanović mostró que la expresión explícita de $_n\left(\frac{d^k}{dx^k}\right)$, es el valor propio maximal de una matriz de tipo Gram, $B_{n,k}$.

Teorema 2.1.3 *(G. V. Milovanović)*

$$_n\left(\frac{d^k}{dx^k}\right) = (\lambda_{max}(B_{n,k}))^{1/2} \tag{2.5}$$

y un polinomio extremal es

$$P(x) = \sum_{\nu=k}^{n} c_\nu \pi_\nu(x),$$

donde $\lambda_{max}(B_{n,k})$ *es el máximo valor propio de la matriz*

$$B_{n,k} \;=\; [b^{(k)}_{i,j}]_{k\leq i,j\leq n},$$

cuyos elementos están dados por

$$b^{(k)}_{i,j} \;=\; \int_{\mathbb{R}} \pi^{(k)}_i(x)\pi^{(k)}_j(x)d\sigma(x), \qquad\qquad k \leq i, j \leq n,$$

y $[c_k, c_{k+1}, \ldots, c_n]^T$ *es un vector propio de la matriz* $B_{n,k}$ *correspondiente al valor propio* $\lambda_{max}(B_{n,k})$.

Demostración (Teorema 2.1.3)
Para $P \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, existen c_j con $j = 0, 1, \ldots, n$, únicamente determinados, tales que

$$P(t) \;=\; \sum_{j=0}^{n} c_j\,\pi_j\,(t).$$

Además, para $0 \leq k \leq n$ tenemos que

$$\frac{||P^{(k)}||^2_{L^2(\mathbb{R},\sigma)}}{||P||^2_{L^2(\mathbb{R},\sigma)}} \;\leq\; \frac{\sum\limits_{i,j=k}^{n} c_i\,\bar{c}_j\,b^{(k)}_{i,j}}{\sum\limits_{j=k}^{n} |\,c_j\,|^2}. \tag{2.6}$$

Considerando el producto interno estándar,

$$\langle x, y\rangle \;=\; \sum_{i=0}^{n} x_i\,\bar{y}_i,$$

se tiene que

$$\langle B_{n,k}\,c, c\rangle \;=\; \sum_{j=k}^{n}\left[\sum_{i=k}^{n} b^{(k)}_{j,i}c_i\right]\bar{c}_j \;=\; \sum_{i,j=k}^{n} b^{(k)}_{j,i}c_i\,\bar{c}_j \;=\; c^*\,B_{n,k}\,c, \tag{2.7}$$

donde c^* representa la traspuesta conjugada de c. De (2.6), (2.7) y por ser $B_{n,k}$ definida positiva,

$$\frac{||P^{(k)}||^2_{L^2(\mathbb{R},\sigma)}}{||P||^2_{L^2(\mathbb{R},\sigma)}} \;\leq\; \frac{\langle B_{n,k}\,c, c\rangle}{\langle c, c\rangle} \;=\; \lambda \;\leq\; \lambda_{\text{máx}}(\,B_{n,k}\,). \tag{2.8}$$

Notemos que ${}_n\left(\dfrac{d^k}{dx^k}\right)$ dada por (2.5) es la constante óptima, ya que (2.8) se reduce a una igualdad si consideramos

$$P(t) \;=\; P^*(t) \;=\; \sum_{j=k}^{n} c^*_j\pi_j\,(t),$$

donde $[c^*_k, c^*_{k+1}, \ldots, c^*_n]^T$ es un vector propio de la matriz $B_{n,k}$ correspondiente a $\lambda_{\text{máx}}(\,B_{n,k}\,)$. ■

Ahora introduciremos algunas desigualdades que involucran normas distintas, donde alguna o ambas normas dependen de una función peso dada y el operador lineal considerado en el problema extremal (1,1), puede ser la identidad.

Consideremos en $\mathbb{P}$ la norma uniforme y la norma (2,1), definidas en el intervalo $[-1, 1]$ y con ω una función peso dada.

Ejemplo 2.1.1 *En 1974, A. Lupaş para $P \in \mathbb{P}_n$, $k = 0, 1, \ldots,$ $\omega^{(\alpha,\beta)}$ el peso de Jacobi y $q = \max\{\alpha, \beta\} \geq -1/2$, halló la siguiente desigualdad óptima (ver [56]):*

$$\|P^{(k)}\|_\infty \leq \left(\frac{k!}{2^{2k+\alpha+\beta+1}} \sum_{\nu=k}^{n} C_{\nu,k}^{(\alpha,\beta)} \binom{\nu+q}{\nu-k} \right)^{1/2} \|P\|_{L^2([-1,1],\omega^{(\alpha,\beta)})}.$$

La igualdad se satisface para el polinomio expresado mediante:

$$Q(x) = D \sum_{\nu=k}^{n} C_{\nu,k}^{(\alpha,\beta)} P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)$$

donde

$$C_{\nu,k}^{(\alpha,\beta)} = \frac{\nu!\,(2\nu+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(\nu+\alpha+\beta+k+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)\,\Gamma(\nu+\beta+1)} \binom{\nu+\alpha+\beta+k}{k} \binom{\nu+q}{\nu-k},$$

D es una constante y $P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)$ es el polinomio ortogonal de Jacobi de grado ν.

El método empleado por A. Lupaş para la demostración del anterior resultado, puede ser resumido en los siguientes pasos

i) Dado un polinomio $P \in \mathbb{P}_n$, considerar la representación de Fourier de P con respecto a la base ortonormal asociada a $\{P_j^{(\alpha,\beta)}\}_{j=0}^n$, $\alpha, \beta > -1$, generada por el producto interno:

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\omega^{(\alpha,\beta)}(x)dx$$

ii) Utilizar tal representación de P y la desigualdad de Cauchy-Schwarz-Buniakowsky, para hallar una cota superior para $|P^{(k)}(x)|$ para $x \in [-1, 1]$ y $k = 0, 1, \ldots$

iii) Estimar $\left\| \frac{d^k}{dx^k} P_j^{(\alpha,\beta)} \right\|$ haciendo uso de las propiedades de las derivadas de los polinomios ortonormales de Jacobi, como veremos más adelante en la demostración del teorema 2.1.12.

La clave de este método consiste en determinar de manera explícita, el valor de $\left\| \frac{d^k}{dx^k} P_j^{(\alpha,\beta)} \right\|$ para $q = \max(\alpha, \beta) \geq -\frac{1}{2}$, en términos de una familia de polinomios de Jacobi de parámetros $(\alpha{+}k, \beta{+}k)$.

Para $P \in \mathbb{P}_n$, A. Lupaş también probó la siguiente desigualdad:

Ejemplo 2.1.2

$$\|P\|_\infty \;\leq\; \sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(r+1)\Gamma(n+r'+1)}\binom{n+r+1}{n}}\,\|P\|_{(L^2[-1,1]\,,\,\omega^{(\alpha,\beta)})}$$

donde $r = \max\{\alpha,\beta\} \geq -1/2$ *y* $r' = \min\{\alpha,\beta\}$.
La igualdad es válida para los polinomios

$$P^*(x) \;=\; \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2\nu+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\nu+r'+1)}\,P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x),$$

donde $P_\nu^{(\alpha,\beta)}$ *es el polinomio de Jacobi de grado* ν.

En sus trabajos de los años 1989 y 1993 (ver [56]), I. Z. Milovanovic y M. A. Kovacević presentaron otra desigualdad, donde una de las normas consideradas viene expresada por:

$$\|f\|_{L^q([-1,1]\,,\,\omega^{(\alpha,\beta)})} \;=\; \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^q\omega^{(\alpha,\beta)}(x)dx\right)^{1/q} \qquad q = 0,1,2,\ldots$$

Ejemplo 2.1.3 *Para* $P \in \mathbb{P}_n$ *un polinomio positivo en* $(-1,1)$, *se cumple que*

$$\|P\|_\infty \;\leq\; \sqrt[q]{\frac{\Gamma(qn+\alpha+\beta+2)}{2^{\alpha+\beta+1}\,\Gamma(r+1)\Gamma(qn+r'+1)}}\,\|P\|_{L^q([-1,1]\,,\,\omega^{(\alpha,\beta)})}, \tag{2.9}$$

donde $r = \max\{\alpha,\beta\} \geq -1/2$ *y* $r' = \min\{\alpha,\beta\}$.
La igualdad en (2,9) *es obtenida por*

$$P(x) \;=\; \begin{cases} C(1-x)^n, & si \quad r=\beta, \\ C(1+x)^n, & si \quad r=\alpha, \end{cases}$$

donde C *es una constante positiva arbitraria.*

Observemos que bajo las condiciones antes consideradas y para $q = 2$, (2,9) es la desigualdad óptima.

2.1.1. El enfoque de A. Guessab y G. V. Milovanović

Para los resultados presentados en esta sección, el lector puede consultar [2], [22] y [56] como referencias complementarias.

En 1994, A. Guessab y G. V. Milovanović consideraron un análogo a la forma estándar del teorema de Bernstein:

$$\|P'(x)\sqrt{1-x^2}\|_\infty \;\leq\; \|P\|_\infty$$

pero con normas en L^2 con pesos y establecieron el siguiente problema extremal:

Para la norma dada por (2,1) donde ω es un peso clásico, determinar la constante óptima $C_{n,k}(\omega)$, $1 \le k \le n$, tal que la desigualdad

$$\|A^{k/2}\, P^{(k)}\|_{L^2([-1,1]\,,\,\omega)} \;\le\; C_{n,k}(\omega)\, \|P\|_{L^2([-1,1]\,,\,\omega)}, \tag{2.10}$$

se cumpla para cada $P \in \mathbb{P}_n$ y donde

i) $A(x) = 1 - x^2$, si ω es la función peso de Jacobi, en el intervalo $(-1, 1)$,

ii) Si $\omega(x) = x^s e^{-x}$ con $s > -1$ y $x > 0$, entonces $A(x) = x$ y

iii) $A(x) = 1$ cuando $\omega = e^{-x^2}$ en $\mathbb{R}$.

El resultado de A. Guessab y G. V. Milovanović establece lo siguiente:

Teorema 2.1.4 *(Guessab-Milovanović) Para cada $P \in \mathbb{P}_n$, la desigualdad* (2,10) *se satisface, con la constante óptima*

$$C_{n,k}(\omega) \;=\; \sqrt{\lambda_{n,0}\lambda_{n,1}\cdots\lambda_{n,k-1}}$$

con $\lambda_{n,j} = -(n-j)\,[\frac{1}{2}(n+j+1)A''(0) + B'(0)]$, $j = 0, \ldots, k-1$ *y donde*

i) $B(x) = \beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x$, *si* ω *es la función peso de Jacobi, en el intervalo* $(-1, 1)$.

ii) Si $\omega(x) = x^s e^{-x}$ *con* $s > -1$ *y* $x > 0$, $B(x) = s + 1 - x$.

iii) $B(x) = -2x$ *cuando* $\omega = e^{-x^2}$ *en* $\mathbb{R}$.

La igualdad es obtenida en (2,10) *si y sólo si* P *es un múltiplo constante de los polinomios clásicos* $\{Q_n\}$, *ortogonales con respecto a la función peso* ω.

A continuación veremos algunos ejemplos relacionados con (2,10), para los casos especiales de los pesos de Jacobi, Laguerre y Hermite.

Ejemplo 2.1.4 *El caso más simple es el de Hermite con el peso* $\omega(x) = e^{-x^2}$ *sobre* $(-\infty, +\infty)$ *y la constante óptima es*

$$C_{n,k}(\omega) \;=\; 2^{k/2}\sqrt{\frac{n!}{(n-k)!}}.$$

Ejemplo 2.1.5 *Consideremos el peso generalizado de Laguerre dado por* $\omega(x) = x^s e^{-x}$ *donde* $s > -1$ *y* $x \in (0, +\infty)$. *Entonces obtenemos la siguiente desigualdad:*

$$\|x^{k/2}\, P^{(k)}\|_{L^2([-1,1]\,,\,\omega)} \;\le\; \sqrt{\frac{n!}{(n-k)!}}\, \|P\|_{L^2([-1,1]\,,\,\omega)}$$

con igualdad si y sólo si $P(x) = C L_n^{(s)}(x)$, *con* $L_n^{(s)}$ *el* $n-$*ésimo polinomio de Laguerre de orden* s, *con* $s > -1$ *y* $x \in (0, +\infty)$.

Ejemplo 2.1.6 *Sea el peso Jacobi dado por* $\omega^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ *con* $\alpha,\beta > -1$ *y* $x \in (-1,1)$. *Entonces para* $1 \leq k \leq n$, (2,10) *nos queda de la siguiente manera:*

$$||(1-x^2)^{k/2}\, P^{(k)}||_{L^2([-1,1]\,,\,\omega^{(\alpha,\beta)})} \;\leq\; \sqrt{\frac{n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+k+1)}{(n-k)!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}}\,||P||_{L^2([-1,1]\,,\,\omega^{(\alpha,\beta)})} \tag{2.11}$$

la igualdad se satisface si y sólo si $P(x) = CP_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, *donde* $P_n^{(\alpha,\beta)}$ *es el* $n-$*ésimo polinomio de Jacobi con* $\alpha,\beta > -1$ *en* $(-1,1)$.

Observemos que la desigualdad de tipo Markov-Bernstein (2.11) puede expresarse de la siguiente manera:

$$||P^{(k)}||_{L^2\left([-1,1],\omega^{(\alpha+k,\beta+k)}\right)} \;\leq\; \sqrt{\frac{n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+k+1)}{(n-k)!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}}\,||P||_{L^2\left([-1,1],\omega^{(\alpha,\beta)}\right)}$$

para $\alpha,\beta > -1$ y $1 \leq k \leq n$.

En 1972, I. K. Daugavet junto a S. Z. Rafal'son y S. V. Konjagin, seis años mas tarde, consideraron el problema extremal de la siguiente forma (ver [2] y [22]):

$$||P^{(k)}||_{L^p([-1,1]\,,\,\omega,\,\nu)} \;\leq\; A_{n,k}(q,\mu;p,\nu)\,||P||_{L^q([-1,1]\,,\,\omega,\,\mu)}$$

con $P \in \mathbb{P}_n$, y

$$||f||_{L^q([-1,1]\,,\,\omega,\mu)} \;=\; \begin{cases} \left(\int_{-1}^{1} |f(x)\;\omega^{\mu}\,|^q dx\right)^{1/q}, & \text{si } \; 0 \leq q < +\infty, \\ ess\,\sup\limits_{-1<x<1} |f(x)|\;\omega^{\mu}\,, & \text{si } \; q = +\infty. \end{cases}$$

donde la función peso esta dada por $\omega = 1 - x^2$, para $x \in [-1,1]$. El caso cuando $p = q \geq 1$, $\mu = \nu = 0$, y $k = 1$, fue considerado por E. Hille, G. Szegö y J. D. Tamarkin (ver [23]).

La constante $A_{n,k}(q,\mu;p,\nu)$, es conocida en pocos casos. Por ejemplo, $A_{n,1}(+\infty,0;1,0) = 2n$ y

$$A_{n,k}(2,\mu;2,\mu+k/2) \;=\; \sqrt{\frac{n!\,\Gamma(n+4\mu+k+1)}{(n-k)!\,\Gamma(n+4\mu+\beta)}}\,||P||_{L^2([-1,1]\,,\,\omega)}.$$

2.1.2. Desigualdades de tipo Markov-Benstein para pesos tipo Freud

En años recientes las desigualdades de tipo Markov-Bernstein han sido ingrediente esencial en la teoría de aproximación con pesos ω definidos en $\mathbb{R}$. Estas desigualdades relacionan el tamaño de $P'\omega$ con el de $P\omega$, para polinomios P. Típicamente, los pesos considerados han sido los *pesos Freud,* es decir, $\omega = \exp(-Q)$, donde Q es una función real de variable real, par y de crecimiento polinomial suave en el infinito. Un ejemplo por excelencia de los pesos Freud es:

$$\omega_\alpha \;=\; \exp(-|x|^{\alpha}),\;\; \alpha > 0. \tag{2.12}$$

En 1931, W. E. Milne, al considerar la función peso $\omega(x) = \exp(-x^2)$ definida en $\mathbb{R}$ y la norma uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, probó la primera desigualdad de tipo Markov (ver [56]):

$$\|(\omega P)'\|_\infty \leq C\ \sqrt{n}\,\|\omega P\|_\infty$$

donde C es una constante positiva independiente de n.

Consideremos ahora el caso en que $\omega(x) = \exp(-x^2/2)$ y la norma en L^q definida por

$$\|f\|_{q,I} = \begin{cases} \left(\int_I |f(x)|^q dx\right)^{1/q}, & \text{si } 0 < q < +\infty \\ \underset{x\in I}{esssup}\,|f(x)|, & \text{si } q = +\infty \end{cases} \tag{2.13}$$

donde I es cualquier intervalo de la recta real, $q > 0$, f una función Lebesgue medible en I, $\|f\|_{+\infty,I} = \|f\|_I$ y $\|f\|_{q,\mathbb{R}} = \|f\|_q$.

En 1971, G. Freud probó las siguientes desigualdades de tipo Markov-Bernstein en la norma L^q sobre $\mathbb{R}$ (ver [56]):

$$\|\omega P'\|_q \leq C\ \sqrt{n}\,\|\omega P\|_q \qquad \text{y} \qquad \|\,[\omega P]^{(k)}\|_q \leq D\,n^{k/2}\,\|\omega P\|_q,$$

donde $P \in \mathbb{P}_n$, $1 \leq q \leq +\infty$, $k > 0$ y para algunas constantes $C = C(q)$ y D independientes de n.

El análogo de la desigualdad de Markov para los pesos ω_α, dados por (2,12), viene expresada por:

$$\|\omega_\alpha P'\|_q \leq C\,A_n(\alpha)\,\|\omega_\alpha P\|_q, \tag{2.14}$$

donde

$$A_n(\alpha) = \begin{cases} n^{1-1/\alpha}, & \text{si} \quad \alpha > 1, \\ \log(n+1), & \text{si} \quad \alpha = 1, \\ 1, & \text{si} \quad \alpha < 1, \end{cases}$$

con $P \in \mathbb{P}_n$, $n \geq 1$ y $C = C(q,\alpha)$ una constante que depende de $q \in (0,+\infty]$ y α, pero no de n o P. Para $\alpha \geq 2$, esta desigualdad fue probada por G. Freud; para $1 < \alpha < 2$ por E. Levin y D. Lubinsky; y para $\alpha \leq 1$, por P. Nevai y V. Totik (ver [38]).

Recientemente, las desigualdades de Markov y Bernstein han sido establecidas para una gran cantidad de pesos Freud, $\omega(x) = \exp(-Q(x))$, (el lector interesado en el estudio de este tipo de pesos puede consultar [43]). Una generalización más reciente de (2,14) para pesos Freud, fue probada por Levin y Lubinsky en 1990 y es la siguiente (ver [38] y [56]):

Teorema 2.1.5 *(Levin-Lubinsky) Sea* $\omega = \exp(-Q(x))$ *donde* Q *es una función par y continua en* $\mathbb{R}$ *y creciente en* $(0,+\infty)$, $Q(0) = 0$, Q'' *continua en* $(0,+\infty)$ *y existen* C_1, C_2 *positivos tales que:*

$$C_1 \leq (xQ'(x))'/Q'(x) \leq C_2, \qquad x \in (0,+\infty).$$

Entonces existe $C_3 > 0$ *tal que para* $n = 1,2,3,\cdots$, *y* $P \in \mathbb{P}_n$,

$$\|P'\omega\|_\infty \leq \left\{\int_1^{C_3 n} ds/Q^{-1}(s)\right\} \|P\omega\|_\infty$$

donde Q^{-1} *es la función inversa de* Q, *que satisface*

$$Q^{-1}(Q(x)) = x, \qquad x \in (0, +\infty).$$

En 1986, Nevai y Totik consideraron pesos de crecimiento más lento que $|x|$ y llegaron al siguiente resultado (ver [38]):

Teorema 2.1.6 *(Nevai-Totik) Sea* $\omega(x) = \exp(-Q(x))$*, donde* $Q(x)$ *es par, creciente y cóncava en* $(0, \infty)$*, con*

$$\int_0^{+\infty} \frac{Q(x)}{1+x^2} dx < \infty.$$

Entonces para $n \geq 1$ *y* $P \in \mathbb{P}_n$,

$$\|P'\omega\|_\infty \leq C\,\|P\omega\|_\infty,$$

donde la norma uniforme es tomada en $\mathbb{R}$ *y la constante C, no depende ni de n ni de P. Si además,*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2Q(x) - Q(2x)}{\log x} = +\infty,$$

entonces, dado $q > 0$, *tenemos que*

$$\|P'\omega\|_q \leq C\,\|P\omega\|_q,$$

para cada $P \in \mathbb{P}_n$ *con* $n \geq 1$, *con C independiente de n y P.*

Las desigualdades de tipo Markov para *pesos Erdös*; es decir, pesos de la forma $\omega = \exp(-Q)$ donde Q es de mayor crecimiento polinomial en el infinito, son más complicadas que para el caso de pesos Freud. Para describir la siguiente desigualdad, necesitamos:

Definición 2.1.1 *Sea* $\omega = \exp(-Q(x))$*, donde* $Q(x)$ *es par y continua en* $\mathbb{R}$, $Q'(x)$ *existe en* $(0, \infty)$ *y* $xQ'(x)$ *es creciente en* $(0, \infty)$, *con límites* 0 *e* ∞ *en* 0 *e* ∞, *respectivamente. Para* $u > 0$, *definimos el número de Mhaskar-Rahmanov-Saff,* $a_u(\omega)$, *como la raiz positiva de la siguiente ecuación:*

$$u = \frac{2}{\pi} \int_0^1 a_u t Q'(a_u t)(1-t^2)^{-1/2} dt,$$

Para n un entero positivo, el número de Mhaskar-Rahmanov-Saff, a_n, satisface la identidad fundamental establecida por H. N. Mhaskar y E. B. Saff:

$$\|\,\omega\, P\,\|_{\mathbb{R}} = \|\,\omega\, P\,\|_{[-a_n, a_n]}. \tag{2.15}$$

para cada $n \geq 1$, $P \in \mathbb{P}_n$ y con normas definidas en (2,13). Además, Mhaskar y Saff mostraron que $[-a_n, a_n]$ es esencialmente el intervalo más pequeño para el cual se satisface (2,15) (ver [43]).

En el caso de los pesos exponenciales $\omega_\alpha = \exp(-|x|^\alpha)$, $\alpha > -1$, Freud, demostró que los monomios con peso $x^n\omega_\alpha(x)$ alcanzan su máximo módulo en la recta real en el número de Freud:

$$q_n = \left(\frac{n}{\alpha}\right)^{1/\alpha}.$$

Freud y Nevai probaron que existen constantes C_1 y C_2 tales para cada $P \in \mathbb{P}_n$,

$$\| P\,\omega_\alpha \|_q \;\leq\; C_2 \,\| P\,\omega_\alpha \|_{[-C_1\,n^{1/\alpha}, C_1\,n^{1/\alpha}]}. \tag{2.16}$$

Las constantes C_1 y C_2 pueden tomarse independientes de n, y $p \geq 1$. La desigualdad (2,16) se denomina *desigualdad de rango restricto*. Para pesos exponenciales generales, las desigualdades de rango restricto se han estudiado en [31].

Ahora presentamos la siguiente desigualdad, establecida en 1990 por D. Lubinsky, para pesos Erdös (ver [37]):

Teorema 2.1.7 *(D. Lubinsky) Sean* $\omega(x) = \exp(-Q(x))$*, donde* $Q(x)$ *is continua y par en* $\mathbb{R}$*,* $Q''(x)$ *es continua en* $(0,\infty)$*,* $Q'(x) > 0$ *en* $(0,\infty)$ *y la función definida por*

$$\chi(x) := \left(xQ'(x)\right)' / Q'(x),$$

para $x \in (0,\infty)$*, la cual es positiva y creciente en* $(0,+\infty)$ *con* $\chi(0+) \;>\; 0$*,*

$$\lim_{x\to+\infty} \chi(x) = \infty,$$

y

$$\chi(x) = O\left(Q'(x)^{1/2}\right), \qquad \textit{cuando} \quad x \to \infty.$$

Entonces existe C *tal que:*

$$\|P'\omega\|_{\mathbb{R}} \;\leq\; C\,Q'(a_n)\,\|P\omega\|_{\mathbb{R}},$$

para cada $P \in \mathbb{P}_n$*,* $n \geq 1$*, y donde* a_n *es el número de Mhaskar-Rahmanov-Saff para* ω*.*

Existen muchos resultados sobre desigualdades de tipo Markov-Bernstein para pesos Freud y Erdös en L^q con $(0 < q < +\infty)$. El lector interesado puede consultar un agradable estudio presentado por Nevai en [59] y otro más reciente dado por Lubinsky en [38].

Desigualdades de tipo Markov-Bernstein para pesos exponenciales: Algunos métodos de demostración

Hay una gran variedad de métodos utilizados para probar desigualdades de tipo Markov-Bernstein para pesos exponenciales. En lo que sigue daremos algunas ideas sobre algunos de estos métodos los cuales están reseñados por Lubinsky en [40].

Utilizaremos $\sim$ como en [58]. Escribiremos $c_n \sim d_n$ si existen $C_1, C_2 > 0$ tales que:

$$C_1 \;\leq\; \frac{c_n}{d_n} \;\leq\; C_2,$$

para n sufientemente grande.

De manera similar definimos $f(x) \sim g(x)$.

- **Método de Freud vía medias de De la Vallée Poussin**: Consideremos la función peso exponencial $\omega(x) = \exp(-Q(x))$ la cual satisface que:

i) Q'' existe y es positiva en $(0,+\infty)$.

ii) Q' es positiva en $(0,+\infty)$ con $\lim\limits_{x\to 0} Q'(x) = 0$.

iii) Existen $A, B > -1$, tales que $A-1 \leq \dfrac{xQ''(x)}{Q'(x)} \leq B-1$.

Para probar la siguiente desigualdad de Markov

$$||P'\omega||_\infty \leq C\frac{n}{a_n}||P\omega||_\infty, \tag{2.17}$$

donde $P \in \mathbb{P}_n$, la norma uniforme es tomada en $\mathbb{R}$, C no depende ni de n ni de P, y a_n es el n-ésimo número de Mhaskar-Rakhmanov-Saff para ω. En primer lugar, recordemos la definición del operador de De la Vallée Poussin:

Para f en el espacio $\mathcal{F}$ de las funciones medibles en $\mathbb{R}$ tales que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(f\omega)^2$$

es finita, podemos formar el desarrollo ortonormal

$$f \sim \sum_{j=0}^{\infty} c_j p_j, \tag{2.18}$$

donde

$$c_j = \int_{-\infty}^{+\infty} f p_j \omega^2, \qquad j \geq 0.$$

El término general de la sucesión de sumas parciales asociada al desarrollo (2,18) lo expresamos mediante:

$$S_n[f] = \sum_{j=0}^{n-1} c_j p_j.$$

Sobre $\mathcal{F}$ el operador de De la Vallée Poussin, $V_n[f]$, se define mediante:

$$V_n[f] = \frac{1}{n}\sum_{j=n+1}^{2n} S_j[f].$$

El método de Freud via medias de De la Vallée Poussin establece que (ver [40]):

- Si se prueba que
$$||V_n'[f]\omega||_\infty \leq C\frac{n}{a_n}||f\omega||_\infty. \tag{2.19}$$
- Y se usa el hecho de que $V_n[P] = P$, para $P \in \mathbb{P}_n$,
- Entonces (2,19) proporciona la desigualdad Markov-Bernstein (2,17).

- **Reemplazar el peso por un polinomio**: Aplicado sólo a una cantidad limitada de pesos. Supongamos que para algún $K > 0$, existen polinomios S_n, de grado menor o igual que Kn, con

$$C_1 \leq \frac{S_n}{\omega} \leq C_2 \quad \text{en} \quad [-2a_n, 2a_n]$$

y

$$\frac{|S'_n|}{\omega} \leq C_3 \frac{n}{a_n} \quad \text{en} \quad [-a_n, a_n].$$

Estos polinomios permiten reducir desigualdades de Bernstein con pesos a desigualdades clásicas de Bernstein sin pesos.

El método utiliza tanto las propiedades de la norma $\|\cdot\|_q$, con $q > 0$, como las de los polinomios S_n y S'_n. Además se consideran las desigualdades de rango restricto

$$\begin{aligned}\|P'\omega\|_q &\leq C\,\|P'\omega\|_{[-a_n,a_n]} \quad \leq \quad C\,C_1^{-1}\,\|P'S_n\|_{[-a_n,a_n]}\\ &\leq C\,C_1^{-1}\,[\|(PS_n)'\|_{[-a_n,a_n]} + \|PS'_n\|_{[-a_n,a_n]}]\\ &\leq C\,C_1^{-1}\left[\frac{2n}{a_n}\,\|(PS_n)'\|_{[-2a_n,2a_n]} + \frac{n}{a_n}\,\|PS'_n\|_{[-a_n,a_n]}\right]\end{aligned}$$

para probar la siguiente desigualdad:

$$\|P'\omega\|_q \quad \leq \quad C\,\|P\omega\|_q.$$

- **Método de P. Nevai y V. Totik**: Recomendado para desigualdades que involucren pesos de decrecimiento lento tales como los pesos exponenciales ω_α, con $\alpha \leq 1$.

  - Sea $\{t_j\}$ una sucesión de números positivos tal que

  $$T = \sum_j \frac{1}{t_j} < \infty.$$

  - Consideremos la función entera:

  $$B(z) = \prod_{j\geq 1} \frac{sen^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\left(\frac{z}{t_j}\right)}\right)}{1+\left(\frac{z}{t_j}\right)^2}.$$

  El producto puede ser finito o infinito.

  - Sea Q una función par, decreciente en $(0, +\infty)$, tal que

  $$\int_0^{+\infty} \frac{Q(x)}{1+x^2}dx < \infty, \tag{2.20}$$

  - Escojer la sucesión $\{t_j\}$ de tal manera que $T \leq \frac{1}{\pi}$ y

  $$|B(x)| \leq K\exp(-Q(x))$$

  para $x \in \mathbb{R}$ y algún $K > 0$.

- Como (2,20) se satisface, Nevai y Totik, utilizaron las sumas parciales de B, para construir polinomios $P_n \in \mathbb{P}_n$, con un máximo local en 0, y $P_n(0) = 1$ y para $x \in [-1,1]$, $|P_n(x)| \leq K\,exp(-Q(nx))$.
- Si definimos
$$\mathcal{S}_n(x) \;=\; P_{[a_n]}\left(\frac{x}{|a_n|}\right)$$
entonces $\mathcal{S}_n$ es un polinomio de grado menor o igual a $[a_n]$ y satisface que
  i) $\mathcal{S}_n(0) = 1$,
  ii) $\mathcal{S}'_n(0) = 0$, y
  iii) $|\mathcal{S}_n(x)| \leq K\,\exp(-Q(x))$ para $x \in [-a_n, a_n]$ y $n \geq 1$.
- Utilizando una versión de la desigualdad de Bernstein se llega a que (ver [40]):
$$|(P'\omega)(0)| \;\leq\; C\,\|P\omega\|_\infty$$
donde la noma uniforme es tomada en el intervalo $[-a_n, a_n]$.
- Para extender la desigualdad a $x > 0$, se utiliza la concavidad y paridad de la función Q.

▪ **Método de Dzrbasjan/ Kroó y Szabados**: Comienza expresando la derivada de un polinomio P de grado n, a través de la fórmula de estimación de Cauchy:
$$|P'(x)| \;=\; \left|\frac{1}{2\pi}\int_{|t-x|=\epsilon}\frac{P(t)}{(t-x)^2}dt\right| \;\leq\; \frac{1}{\epsilon}\;\sup\{|P(t)|\;:\;|t-x| = \epsilon\}.$$

El número $\frac{1}{\epsilon}$ siempre es elegido como la constante de la desigualdad de Markov-Bernstein. Para estimar $P(t)$ en términos de los valores de $P\omega$ sobre la recta real, se escribe $t = u + iv$ y se utiliza una desigualdad frecuentemente planteada en la teoría de funciones análiticas en el semiplano superior:
$$\begin{aligned}\log|P(u+iv)| \;&\leq\; \frac{|v|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log|P(s)|}{(s-u)^2+v^2}ds \;\leq\; \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log M + Q(s)}{(s-u)^2+v^2}ds\\ &=\; logM + \frac{|v|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Q(s)}{(s-u)^2+v^2}ds \qquad (2.21)\end{aligned}$$
donde las integrales involucradas deben ser convergentes, $M = \|P\omega\|_\infty$ con norma uniforme en $\mathbb{R}$, y la función Q satisface que:
$$\int_0^{+\infty}\frac{Q(t)}{1+t^2} \;<\; \infty$$
y para $s \geq 1$,
$$Q(s) \;\sim\; s\,Q'(s) \sim\; s^2\,Q''(s).$$

Con estas consideraciones se debe demostrar que:
$$\log|P'\omega|(x) \;\leq\; \log\frac{1}{\epsilon} \;+\; \log M \;+\; \sup_v\frac{|v|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{Q(s)-Q(x)}{(s-u)^2+v^2}\,ds. \qquad (2.22)$$

Se procede a estimar la integral en el lado derecho de la desigualdad (2,22), dividiéndola en varias partes.

Primero se demuestra que para $x \geq 1$, podemos hallar $C > 0$, tal que:

$$\log|P'\omega|(x) \;\leq\; \log\frac{1}{\epsilon} + \log M + C\,\epsilon \int_1^{+\infty} \frac{Q(y)}{y^2+1}\,ds.$$

Una estimación similar se cumple en $(-\infty,-1]$. En $[-1,1]$ es más sencillo de calcular y escogiendo $\epsilon = 1$, se obtiene la desigualdad de Markov:

$$\|P'\omega\|_\infty \;\leq\; C\,\|P\omega\|_\infty$$

donde la norma uniforme es tomada en $\mathbb{R}$.

- **Método de Levin y Lubinsky**: Al igual que el método anterior, en éste también se utiliza la fórmula de Cauchy para derivadas. Sin embargo, en lugar de recurrir a (2,21), se utiliza la teoría del potencial logarítmico para demostrar análogos a la desigualdad de Bernstein-Walsh, las cuales comparan el crecimiento de un polinomio en el plano complejo, conociendo su norma uniforme sobre un compacto de capacidad mayor que cero. Para $1 \leq p < +\infty$, el método se describe a continuación:

  - Para $x \geq 0$ y $\epsilon > 0$, al considerar la función entera F_x definida mediante:

    $$F_x(z) \;:=\; \exp(-Q(x) - Q'(x)(z-x))$$

    se obtiene que:

    $$F_x^{(j)}(z) \;=\; \omega^{(j)}(x), \qquad j = 0,1.$$

  - Utilizando la desigualdad de Hölder con $q = \frac{p}{p-1}$ tenemos:

    $$\begin{aligned} |(P\omega)'(x)| \;=\; |(PF_x)'(x)| \;&=\; \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|t-x|=\epsilon} \frac{(PF_x)(t)}{(t-x)^2}dt\right| \\ &\leq\; \left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t-x|=\epsilon} |PF_x|^p(t)|dt|\right)^{1/p} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{|t-x|=\epsilon} |t-x|^{-2q}(t)|dt|\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

    De donde,

    $$|(P\omega)'(x)| \;\leq\; \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |PF_x|^p\,(x+\epsilon\exp(i\theta)d\theta\right)^{1/p}.$$

  - Haciendo variar ϵ, considerándolo como una función de x, $\epsilon = \epsilon(n,x) = \varphi_n(x)$, donde φ se define para $n \geq 1$, mediante:

    $$\varphi_n(x) = \frac{a_n}{n}\,\frac{\left|1 - \frac{|x|}{a_{2n}}\right|}{\sqrt{\left|1 - \frac{|x|}{a_n}\right| + (nT(a_{2n}))^{-2/3}}}$$

    con $a_n = C_1\,n^{1/\alpha}$, $\alpha > 1$, C_1 una constante positiva y $T(t) = \dfrac{tQ'(t)}{Q(t)}$.

- Se llega a que:
$$|F_z(x)| \leq C\omega(z) \quad \text{para} \quad |z-x| \leq \varphi_n(x).$$
- Aplicando resultados sobre teoría de potenciales se llega a (ver [40]):
$$\int_{-a_{2n}}^{a_{2n}} \varphi_n |(P\omega)'(x)|^p \leq C \int_{-a_n}^{a_n} |P\omega)(x)|^p.$$

2.1.3. Resultados de K. H. Kwon y D. W. Lee

En 1999, K. H. Kwon y D. W. Lee, considerando la norma definida en $\mathbb{P}(\mathbb{C})$:

$$||P||_{L^2(\mu)} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |P(x)|^2 \, d\mu(x) \right\}^{1/2}, \tag{2.23}$$

donde $d\mu$, es cualquier medida positiva de Borel, mostraron que las desigualdes de tipo Markov-Bernstein en espacios L^2 con norma (2,23), se satisface no sólo para derivadas si no también para cualquier operador definido en $\mathbb{P}(\mathbb{C})$.

En adelante, asumiremos que μ es una función creciente en $\mathbb{R}$ tal que

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^n d\mu(x) \right| < \infty, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

y que el conjunto

$$supp(\mu) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \mu(x+\epsilon) - \mu(x-\epsilon) > 0, \quad \text{para cada} \quad \epsilon > 0\}$$

tiene cardinalidad $N+1$. Entonces existe un único sistema de polinomios ortonormales $\{P_j\}_{j=0}^N$ de orden N relativo a $d\mu$ (Ver [73]).

Para $1 \leq a \leq \infty$ y $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, utilizaremos la siguiente notación:

$$||c||_a = \begin{cases} \left(\sum_{k=0}^n |c_k|^a\right)^{1/a}, & \text{si} \quad 1 \leq a < \infty \\ \\ \text{máx}\{|c_k| : 0 \leq k \leq n\}, & \text{si} \quad a = \infty. \end{cases}$$

Además para $P \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$, consideremos la norma dada por (2,23).

Sea $T : \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}(\mathbb{C})$ un operador lineal, donde n es cualquier entero fijo con $0 \leq n \leq N$. Entonces T es acotado y por lo tanto existe una constante $\gamma_n(T)$, que depende sólo de n y T, tal que:

$$||TP||_{L^2(\mu)} \leq \gamma_n(T) \, ||P||_{L^2(\mu)}, \qquad P \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}).$$

Entonces, nuestro problema extremal consiste en hallar una expresión explícita para la constante óptima:

$$_n(T) = \sup_{||P||_{L^2(\mu)}=1} ||TP||_{L^2(\mu)}. \tag{2.24}$$

Así, la constante óptima viene dada por (2,24) y la expresión explícita para ella, estará dada en los siguientes resultados (ver [28]).

Teorema 2.1.8 *Sean T y ${}_n(T)$ como antes. Entonces*

$$ {}_n(T) \quad = \quad \underset{c\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}}{sup} \sqrt{\frac{cD^tA(m)D\bar{c}^t}{cA(n)\bar{c}^t}} $$

donde $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n)$ son vectores en $\mathbb{C}^{n+1}$, $D = (d^i_j)_{0\leq i\leq m,\ 0\leq j\leq n}$ y $A(n) = (a_{l,i})^n_{l,i=0}$ son matrices cuyas entradas están dadas por

$$ (T\phi_j)(x) \ = \ \sum_{i=0}^{m} d^i_j\phi_i(x), \qquad m = \max_{0\leq j\leq n} grad(T\phi_j), $$

con $\{\phi_j\}_{j=0}^{\infty}$ una sucesión de polinomios tal que $grad(\phi_j) = j$, para $j \geq 0$, y

$$ a_{li} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_l\, \bar{\phi}_i\, d\mu(x). $$

Teorema 2.1.9 *Sean T y ${}_n(T)$ como en el teorema 2.1.8, si asumimos que $m = \text{máx}\ grad(TP_j) \leq N$, entonces*

$$ {}_n(T) = \sup_{\substack{\|c\|_2=1\\ c\in\mathbb{C}^{n+1}}} \left\{ \sum_{i=0}^{m} \left| \sum_{j=0}^{n} c_j d^i_j \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, $$

donde $D = \left(d^j_i\right)_{0\leq i\leq m, 0\leq j\leq n}$ es la matriz cuyas entradas están dadas por

$$ (TP_j)(x) := \sum_{i=0}^{m} d^i_j P_i(x), \tag{2.25} $$

donde $\{P_j\}_{j=0}^N$ es un sistema de polinomios ortonormales de orden N relativo a $d\mu$. Además, ${}_n(T)$ satisface la siguiente estimación:

$$ \max_{0\leq j\leq n} \|TP_j\|_{L^2(\mu)} \leq {}_n(T) \leq C(a,n)\ \left\| (\|TP_0\|_{L^2(\mu)}, \ldots, \|Tq_n\|_{L^2(\mu)}) \right\|_b, $$

para cualquier a con $1 \leq a \leq \infty$ y donde

$$ C(a,n) = \sup_{c\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}} \frac{\|c\|_a}{\|c\|_2} \qquad y \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1. $$

En los casos particulares de que $a = 1$ o $a = 2$, tenemos el siguiente

Corolario 2.1.1 *Sean T y ${}_n(T)$ como en el teorema 2.1.9. Entonces*

$$ \max_{0\leq j\leq n} \|TP_j\|_{L^2(\mu)} \ \leq \ {}_n(T) \ \leq \ \sqrt{n+1} \max_{0\leq j\leq n} \|TP_j\|_{L^2(\mu)} $$

y

$$ \max_{0\leq j\leq n} \|TP_j\|_{L^2(\mu)} \ \leq \ {}_n(T) \ \leq \ \sqrt{n+1} \left\{ \sum_{j=0}^{n} \ \|TP_j\|^2_{L^2(\mu)} \right\}^{1/2}. $$

Otro resultado debido a Kwon y Lee, el cual es de especial interés para nosotros, es el que damos a continuación (ver [28]).

Teorema 2.1.10 *Sean T y $_n(T)$ como en el teorema 2.1.8. Si $A(n)$ y $D^t A(m)\,\bar{D}$ conmutan, entonces*

$$_n(T) \;=\; \max_{0\le j\le n} \sqrt{\frac{\nu_j}{\mu_j}},$$

donde ν_j son los valores propios positivos de $A(n)$, μ_j los valores propios no negativos de $D^t A(m)\,\bar{D}$ tales que:

$$Au_j \;=\; \nu_j u_j, \qquad D^t A(m)\,\bar{D}\,u_j \;=\; \mu_j u_j$$

con $\{u_j\}_{j=0}^n$ los $n+1$ vectores propios linealmente independientes comunes de $A(n)$ y $D^t A(m)\,\bar{D}$.

2.1.4. Problemas extremales de tipo Markov-Nikolskii

Las desigualdades del tipo $(1{,}1)$, donde $T = \dfrac{d^k}{dx^k}$ con $k = 0, 1, \cdots$, se denominan *Desigualdades de tipo Markov-Nikolskii.* En 1969, G. Labelle aportó un ejemplo al proporcionar una expresión explícita de la constante óptima $_n\left(\dfrac{d^k}{dx^k}\right)$, para la norma uniforme en $[-1, 1]$ y la norma

$$\|f\|_{L^2([-1,1])} \;=\; \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx\right)^{1/2}.$$

El lector interesado puede consultar [29] y [56].

Teorema 2.1.11 *(G. Labelle) Si $P \in \mathbb{P}_n$, entonces para cada $0 \le k \le n$ se cumple la siguiente desigualdad*

$$\|P^{(k)}\|_\infty \;\le\; \frac{(2k-1)!!\,(n+k+1)}{\sqrt{2(2k+1)}} \begin{pmatrix} n+k \\ n-k \end{pmatrix} \|P\|_{L^2[-1,1]}. \tag{2.26}$$

La igualdad en $(2{,}26)$ sólo se cumple para múltiplos constantes del polinomio

$$\sum_{i=0}^{n-k} (2i+2k+1) \begin{pmatrix} 2k+i \\ i \end{pmatrix} P_{k+i}(x),$$

donde P_ν es el polinomio de Legendre de grado ν.

El teorema 2,1,11 establece que para $0 \le k \le n:\ _n\left(\dfrac{d^k}{dx^k}\right) \;=\; \dfrac{(2k-1)!!\,(n+k+1)}{\sqrt{2(2k+1)}} \begin{pmatrix} n+k \\ n-k \end{pmatrix}.$

Demostración 2.1.11 Sea

$$\phi_\nu(x) \;=\; (\nu + 1/2)^{1/2}\, P_\nu(x),$$

el polinomio ortonormal de Legendre de grado ν. Entonces cualquier polinomio P en $\mathbb{P}_n$, puede ser únicamente expresado mediante

$$P(x) = \Sigma_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu \, \phi_\nu(x)$$

donde

$$\|P\|_{L^2([-1,1])} = \left(\sum_{\nu=0}^{n} (\alpha_\nu)^2 \right)^{1/2}.$$

De aquí, para $x_0 = \cos\theta_0$ en $[-1,1]$, tenemos que:

$$\begin{aligned} |P^{(k)}(x_0)| &= \left| \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu \, \phi_\nu^{(k)}(x_0) \right| \\ &\leq \left[\sum_{\nu=0}^{n} |\phi_\nu^{(k)}(x_0)|^2 \right]^{1/2} \left[\sum_{\nu=0}^{n} |\alpha_\nu|^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[\sum_{\nu=0}^{n} \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \left\{ P_\nu^{(k)}(\cos\theta_0) \right\}^2 \right]^{1/2} \|P\|_{L^2[-1,1]}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

La igualdad es obtenida solamente para múltiplos constantes de

$$\sum_{\nu=0}^{n} \phi_\nu^{(k)}(\cos\theta_0)\phi_\nu(x). \tag{2.28}$$

Ahora para $0 < \theta < \pi$ y $k \geq 0$, por propiedades de los polinomios de Legendre, tenemos que:

$$P_n^{(k)}(\cos\theta) = (2k-1)!! \sum_{\nu=0}^{n} D(k, n-\nu; \theta) P_\nu(\cos\theta), \tag{2.29}$$

donde

$$D(k,\mu;\theta) = \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_k=\mu} \frac{\operatorname{sen} \nu_1\theta + \cdots + \operatorname{sen} \nu_k\theta}{\operatorname{sen}^k \theta}.$$

En particular,

$$P_n^{(k)}(1) = (2k-1)!! \begin{pmatrix} n+k \\ n-k \end{pmatrix},$$

$$P_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n-k}(2k-1)!! \begin{pmatrix} n+k \\ n-k \end{pmatrix}$$

y

$$P_n^{(k)}(0) = \begin{cases} (2k-1)!!(-1)^{(n-k)/2} \begin{pmatrix} (n+k-1)/2 \\ (n-k/2) \end{pmatrix}, & \text{si } \; n \equiv k (mod\, 2) \\ 0, & \text{si } \; n \not\equiv k (mod\, 2). \end{cases}$$

Ahora, si $0 < \theta < \pi$,

$$\begin{aligned} |D(k,\mu;\theta)| &\leq \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_k=1} \left|\frac{\operatorname{sen}\nu_1\theta_0}{\operatorname{sen}\theta}\right| + \cdots + \left|\frac{\operatorname{sen}\nu_k\theta_0}{\operatorname{sen}\theta}\right| \\ &< \sum_{\nu_1+\cdots+\nu_k=1} \nu_1\cdots\nu_k \quad = \quad D(k,\mu,0) \quad = \quad \binom{\mu+k-1}{\mu-k}. \end{aligned}$$

De (2,29) tenemos que

$$\begin{aligned} |P_n^{(k)}(\cos\theta)| &< |Q_n^{(k)}(1)| \quad = \quad (2k-1)!!\binom{n+k}{n-k} \\ &= |P_n^{(k)}(-1)|. \end{aligned}$$

Así, el factor constante en (2,27), alcanzará su máximo en $\theta_0 = 0$ y en $\theta_0 = \pi$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|P^{(k)}\|_\infty &\leq \left[\sum_{\nu=0}^{n}(\nu+1/2)^{1/2}\{P_\nu^{(k)}(\pm 1)\}^2\right]^{1/2} \|P\|_{L^2[-1,1]} \\ &= \frac{(2k-1)!!}{\sqrt{2}}\left[\sum_{\nu=0}^{n}(2\nu+1)\binom{\nu+k}{\nu-k}^2\right]^{1/2} \|P^{(k)}\|_{L^2[-1,1]} \\ &= \frac{(2k-1)!!}{\sqrt{2}}\frac{n+k+1}{(2k+1)^{1/2}}\binom{n+k}{n-k}\|P\|_{L^2[-1,1]}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2,28) θ por $0, \pi$ y $\dfrac{\pi}{2}$, obtenemos el polinomio extremal.

■

En los ejemplos que siguen, sean la norma uniforme definida en $[-1,1]$ y

$$\|f\|_{L^2([-1,1]\,,\,\omega)} = \left(\int_{-1}^{1}|f(x)|\,d\omega(x)\right)^{1/2},$$

donde ω es una función peso dada. Daremos algunas desigualdades de tipo Bernstein-Nikolskii; es decir, desigualdades que involucran normas distintas tal que alguna o las dos dependen de una función peso dada y el operador lineal puede ser el operador identidad. Para nuestro primer ejemplo consideraremos un peso especial: el peso de Jacobi.

Ejemplo 2.1.7 *En 1974, A. Lupaş halló la desigualdad óptima relacionada al problema extremal de tipo Bernstein–Nikolskii, en donde se considera la norma infinito en* $[-1,1]$ *y la norma* L^2

$$\|P\|_{L^2([-1,1]\,,\,\omega^{(\alpha,\beta)})} = \left(\int_{-1}^{1}|P(x)|^2\,\omega^{(\alpha,\beta)}(x)dx\right)^{1/2}. \tag{2.30}$$

donde $\omega^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ *con* $\alpha,\beta > -1$, *es el peso Jacobi. El método que empleó Lupaş para la demostración de dicha desigualdad, puede ser resumido en los siguientes pasos:*

i) Dado un polinomio $P \in \mathbb{P}_n$, considerar la representación de Fourier de P con respecto a la base ortonormal $\{\tilde{P}_j^{(\alpha,\beta)}\}_{j=0}^n$, $\alpha, \beta > -1$, generada por el producto interno de donde proviene la norma dada en (2,30) :

$$\langle P, Q\rangle = \left(\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\omega^{(\alpha,\beta)}(x)dx\right)^{1/2} \tag{2.31}$$

ii) Utilizar tal representación de P y la desigualdad de Cauchy-Schwarz-Buniakowsky, para hallar una cota superior para $|P^{(k)}(x)|$ para $x \in [-1, 1]$ y $k = 0, 1, \ldots$

iii) Estimar $\|\frac{d^k}{dx^k} P_j^{(\alpha,\beta)}\|$ haciendo uso de las propiedades de las derivadas de los polinomios ortonormales de Jacobi.

La clave de este método consiste en que el valor de $\|\frac{d^k}{dx^k} P_j^{(\alpha,\beta)}\|$, para $q = \max(\alpha,\beta) \geq -\frac{1}{2}$, se puede determinar explícitamente en términos de una familia de polinomios de Jacobi de parámetros $(\alpha+k, \beta+k)$. Sin embargo, si tenemos esto en mente al considerar ortogonalidad Sobolev en general, es bien sabido que este hecho no se satisface.

Teorema 2.1.12 *Sea $P \in \mathbb{P}_n$, $k = 0, 1, \ldots$ y $q = \max(\alpha,\beta) \geq -1/2$. Entonces*

$$\|P^{(k)}\|_\infty \leq \left(\frac{k!}{2^{2k+\alpha+\beta+1}} \sum_{\nu=k}^{n} C_{\nu,k}^{(\alpha,\beta)} \binom{\nu+q}{\nu-k}\right)^{1/2} \|P\|_{L^2([-1,1],\omega^{(\alpha,\beta)})}$$

y polinomio extremal:

$$Q(x) = D\sum_{\nu=k}^{n} C_{\nu,k}^{(\alpha,\beta)} P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{2.32}$$

donde

$$C_{\nu,k}^{(\alpha,\beta)} = \frac{\nu!\,(2\nu+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(\nu+\alpha+\beta+k+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)\,\Gamma(\nu+\beta+1)} \binom{\nu+\alpha+\beta+k}{k}\binom{\nu+q}{\nu-k}$$

D es una constante y $P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)$ es el polinomio ortogonal de Jacobi de grado ν.

Demostración *(Teorema 2.1.12)*
Sean $\tilde{P}_\nu^{(\alpha,\beta)}$ el polinomio ortonormal de Jacobi de grado ν y el producto interno 2,31 *y donde $\omega^{(\alpha,\beta)}$ es el peso Jacobi con $\alpha, \beta > -1$. Entonces cada $P \in \mathbb{P}_n$ puede ser expresado mediante*

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu \tilde{P}_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{2.33}$$

donde

$$\gamma_\nu = \langle P, \tilde{P}_\nu^{(\alpha,\beta)}\rangle.$$

Por otra parte, observemos que

$$\|P\|^2_{(L^2[-1,1],\omega^{(\alpha,\beta)})} = \sum_{\nu=0}^{n} |\gamma_\nu|^2. \tag{2.34}$$

Ahora, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz-Buniakowsky y de (2.33) y (2.34), tenemos que

$$|P^{(k)}(x)| \leq \left[\sum_{\nu=k}^{n} \left(\frac{d^k}{dx^k} \tilde{P}_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) \right)^2 \right]^{1/2} \|P\|_{(L^2[-1,1],\omega^{(\alpha,\beta)})}. \tag{2.35}$$

De la siguiente relación (ver [73])

$$\frac{d}{dx} P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\nu+\alpha+\beta+1}{2} P_{\nu-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)$$

donde $P_\nu^{(\alpha,\beta)}$ *es el polinomio ortogonal de Jacobi de grado* ν *asociado al producto interno* (2,31). *Entonces*

$$\sum_{\nu=k}^{n} \left(\frac{d^k}{dx^k} \tilde{P}_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) \right)^2 = \sum_{\nu=k}^{n} \left[\frac{k!}{2^k \|P_\nu^{\alpha,\beta}\|_{\omega^{(\alpha,\beta)}}} \binom{\nu+\alpha+\beta+k}{k} P_{\nu-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(x) \right]^2 \tag{2.36}$$

Por otra parte sabemos que

$$\max_{-1\leq x\leq 1} \left| P_{\nu-k}^{(\alpha+k,\beta+k)} \right| = \left| P_{\nu-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(\check{x}) \right| = \binom{\nu+r}{\nu-k}$$

donde $r = \max\{\alpha,\beta\} \geq -1/2$ *y el máximo es obtenido en* $\check{x} = -1$ *cuando* $r = \beta$, *o en* $\check{x} = 1$, *cuando* $r = \alpha$. *Luego* (2,36) *queda*

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=k}^{n} \left(\frac{d^k}{dx^k} \tilde{P}_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) \right)^2 &\leq \sum_{\nu=k}^{n} \left[\frac{k!}{2^k \|P_\nu^{\alpha,\beta}\|_{\omega^{(\alpha,\beta)}}} \binom{\nu+\alpha+\beta+k}{k} \binom{\nu+r}{\nu-k} \right]^2 \\
&= \sum_{\nu=k}^{n} \left[\frac{k!}{2^k} \sqrt{\frac{\nu!(2\nu+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\nu+\alpha+1)\,\Gamma(\nu+\beta+1)}} \binom{\nu+\alpha+\beta+k}{k} \binom{\nu+r}{\nu-k} \right]^2 \\
&\leq \frac{(k!)^2}{2^{2k+\alpha+\beta+1}} \sum_{\nu=k}^{n} C_{\nu,k}^{(\alpha,\beta)} \binom{\nu+r}{\nu-k} \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

donde $C_{\nu,k}^{(\alpha,\beta)} = \frac{\nu!(2\nu+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(\nu+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\nu+\alpha+1)\,\Gamma(\nu+\beta+1)} \binom{\nu+\alpha+\beta+k}{k} \binom{\nu+r}{\nu-k}$.

La cota uniforme de $\left[\sum_{\nu=k}^{n} \left(\frac{d^k}{dx^k} \tilde{P}_\nu^{(\alpha,\beta)}(x) \right)^2 \right]^{1/2}$ *dada por* (2,37) *es justamente la constante establecida por el teorema. Para probar que esta constante es la óptima, basta notar que el polinomio dado por* (2,32) *transforma la desigualdad* (2,35) *en una igualdad.* ∎

Ejemplo 2.1.8 *A. Lupaş también probó una interesante desigualdad de tipo Bernstein-Nikolskii, la cual relaciona las normas antes consideradas.*

$$\|P\|_\infty \leq \sqrt{\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(r+1)\Gamma(n+r'+1)} \binom{n+r+1}{n}} \|P\|_{(L^2[-1,1],\omega^{(\alpha,\beta)})} \tag{2.38}$$

donde $r = \text{máx}\{\alpha, \beta\} \geq -1/2$ *y* $r' = \text{mín}\{\alpha, \beta\}$.
La igualdad es válida para los polinomios

$$P^*(x) \ = \ \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(2\nu + \alpha + \beta + 1)\,\Gamma(\nu + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\nu + r' + 1)} \, P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)$$

donde $P_\nu^{(\alpha,\beta)}$ *es el polinomio de Jacobi de grado* ν.

Ejemplo 2.1.9 *Utilizando una clase especial de polinomios y la norma*

$$\|f\|_{L^q([-1,1]\,,\,\omega^{(\alpha,\beta)})} \ = \ \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^q \omega^{(\alpha,\beta)}(x) dx \right)^{1/q} \qquad q = 0, 1, 2, \ldots,$$

Milovanovic y Kovacevic probaron otra desigualdad de tipo Bernstein-Nikolskii.
Para P *en* $\mathbb{P}_n$, *un polinomio positivo en* $(-1, 1)$, *establecieron que:*

$$\|P\|_\infty \ \leq \ \sqrt[q]{\frac{\Gamma(qn + \alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(r + 1)\Gamma(qn + r' + 1)}} \, \|P\|_{L^q([-1,1],\omega^{(\alpha,\beta)})} \tag{2.39}$$

donde $r = \text{máx}\{\alpha, \beta\} \geq -1/2$ *y* $r' = \text{mín}\{\alpha, \beta\}$. *La igualdad en* (2,39) *es obtenida por*

$$P(x) \quad = \quad \begin{cases} c(1 - x)^n, & si \quad r = \beta \\ c(1 + x)^n, & si \quad r = \alpha \end{cases}$$

donde c *es una constante positiva arbitraria. Observemos que para* $q = 2$, *la constante en la desigualdad* (2,39) *se acerca más a la óptima que la constante en* (2,38).

Capítulo 3

Problemas extremales de tipo Markov-Bernstein en espacios de Sobolev con pesos

Este capítulo está dedicado a presentar los resultados principales de este trabajo; determinación de una expresión explícita para la constante óptima ${}_n(T)$ asociada a la desigualdad de tipo Markov-Bernstein:

$$\|TP\|_S \leq \gamma_n(T)\|P\|_S, \quad \forall P \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}),$$

donde T es un operador lineal y $\|\cdot\|_S$ denota cierta norma de Sobolev sobre $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ (teoremas 3.1.1 y 3.1.2). También obtenemos cotas para ${}_n(T)$ y construimos dos ejemplos finales (ver sección 3.2), en los cuales damos cotas explícitas para algunas clases importantes de normas de Sobolev asociadas a pesos de Gegenbauer y de Laguerre. Todos los resultados presentados en este capítulo aparecen en [63].

3.1. Desigualdades de Markov-Bernstein y polinomios ortogonales de Sobolev con pesos

Un producto interno de Sobolev sobre $\mathbb{P}$ o sobre $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ es, esencialmente, aquel que involucra a las derivadas de los polinomios hasta un cierto orden. En esta sección trabajaremos con el siguiente caso especial:

Sea (μ_0, μ_1) un vector de medidas no negativas sobre la recta real, tal que para $j = 0, 1,$ y $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\left| \int_{\Delta_j} x^n d\mu_j(x) \right| < \infty,$$

es decir, cada elemento de la sucesión $\{x^n\}_{n=0}^{\infty}$ es una función μ_j- integrable para cada j; $j = 0, 1,$ o equivalentemente,

$$\{x^n\}_{n=0}^{\infty} \subset L^1(\Delta_j, \mu_j); \quad j = 0, 1.$$

con Δ_0 y Δ_1, los soportes de μ_0 y μ_1, respectivamente. Estos soportes son subconjuntos, compactos o no de $\mathbb{R}$, tales que al menos uno de ellos debe contener una cantidad infinita de puntos y, para evitar casos triviales, supondremos adicionalmente que μ_1 no es la medida nula. Podemos definir en un espacio adecuado de funciones de Sobolev, el cual contiene a $\mathbb{P}(\mathbb{C})$, el siguiente producto interno de Sobolev asociado al vector de medidas (μ_0, μ_1) :

$$\langle P, Q\rangle_S \;=\; \int_{\Delta_0} P(x)\,\overline{Q(x)}\,d\mu_0(x) \;+\; \int_{\Delta_1} P'(x)\,\overline{Q'(x)}\,d\mu_1(x), \tag{3.1}$$

para cada $P, Q \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$ y donde la barra indica el complejo conjugado de la función dada.

Plantearemos y resolveremos el problema extremal de tipo Markov-Bernstein (1,1), para el caso en que $T : (\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \|\,.\,\|_S) \to (\mathbb{P}(\mathbb{C}), \|\,.\,\|_S)$ es un operador lineal cualquiera y con respecto a la norma Sobolev:

$$\|P\|_S \;=\; \left(\int_{\Delta_0} |P(x)|^2\,d\mu_0(x) \;+\; \int_{\Delta_1} |P'(x)|^2\,d\mu_1(x)\right)^{1/2}. \tag{3.2}$$

Hallaremos una expresión explícita de $_n(T)$, el operador norma de T:

$$_n(T) := \sup_{\substack{\|P\|_S=1\\ P\in\mathbb{P}_n(\mathbb{C})}} \|TP\|_S.$$

Para lograr este objetivo, seguimos principalmente las ideas de K. H. Kwon y D. W. Lee en [28]. Nuestros resultados responden parcialmente a un problema abierto planteado en el año 2008 por el Profesor Francisco Marcellán en una conferencia sobre Teoría Constructiva de Funciones, celebrada en Campos do Jordão, Brasil. Sin embargo, otras aproximaciones relacionadas pueden encontrarse en [44].

En el siguiente resultado, hallamos una expresión explícita para la norma Sobolev inducida por (3,1) de un operador lineal T, a través de los elementos de la matriz asociada a T con respecto a una base para $\mathbb{P}(\mathbb{C})$.

Teorema 3.1.1 *Sean n cualquier entero no negativo, $T : \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}(\mathbb{C})$ un operador lineal, $_n(T)$ su operador norma Sobolev inducida por* (3,1) *y $\{\phi_\nu\}_{\nu\geq 0}$ una base para el espacio vectorial $\mathbb{P}(\mathbb{C})$. Entonces*

$$_n(T) = \sup_{c\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}} \sqrt{\frac{cD^tR(m+1)\overline{D}\overline{c}^t}{cR(n+1)\overline{c}^t}},$$

donde $\overline{c}^{\,t}$ es la transpuesta conjugada del vector $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$, $D = \left(d_\nu^j\right)_{0\leq j\leq m, 0\leq\nu\leq n}$ y $R(n+1) = \left(r_{ij}\right)_{0\leq i,j\leq n}$ son matrices cuyas entradas estan dadas por:

$$(T\phi_\nu)(x) := \sum_{j=0}^{m} d_\nu^j \phi_j(x), \quad m := \max_{0\leq\nu\leq n} \deg(T\phi_\nu)$$

y

$$r_{ij} := \int_{\Delta_0} \phi_i(x)\overline{\phi_j(x)}d\mu_0(x) + \int_{\Delta_1} \phi_i'(x)\overline{\phi_j'(x)}d\mu_1(x).$$

Demostración (Teorema 3.1.1) Para $P \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, podemos hallar $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ tales que $P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \phi_\nu(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|P\|_S^2 &= \int_{\Delta_0}\left(\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\phi_\nu(x)\overline{\sum_{j=0}^{n} c_j\phi_j(x)}\right)d\mu_0(x) + \int_{\Delta_1}\left(\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\phi'_\nu(x)\overline{\sum_{j=0}^{n} c_j\phi'_j(x)}\right)d\mu_1(x)\\
&= \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\left(\sum_{j=0}^{n}\overline{c_j}\right)\left[\int_{\Delta_0}\phi_\nu(x)\overline{\phi_j(x)}d\mu_0(x) + \int_{\Delta_1}\phi'_\nu(x)\overline{\phi'_j(x)}d\mu_1(x)\right]\\
&= \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\left(\sum_{j=0}^{n}\overline{c_j}\right) r_{\nu j} \quad = \quad \sum_{\nu=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_\nu\, r_{\nu j}\,\overline{c_j} \quad = \quad c\,R(n+1)\,\overline{c}^{\,t},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

con $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n)$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\|TP\|_S^2 &= \int_{\Delta_0}|(TP)(x)|^2 d\mu_0(x) + \int_{\Delta_1}|(TP)'(x)|^2 d\mu_1(x)\\
&= \int_{\Delta_0}\left[\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\left(\sum_{i=0}^{m} d_\nu^i\phi_i(x)\right)\right]\left[\sum_{\nu=0}^{n}\overline{c_\nu}\left(\sum_{j=0}^{m}\overline{d_l^j}\,\overline{\phi_j(x)}\right)\right]d\mu_0(x)\\
&\quad + \int_{\Delta_1}\left[\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu\left(\sum_{i=0}^{m} d_\nu^i\phi'_i(x)\right)\right]\left[\sum_{l=0}^{n}\overline{c_l}\left(\sum_{j=0}^{m}\overline{d_l^j}\,\overline{\phi'_j(x)}\right)\right]d\mu_1(x)\\
&= \sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu d_\nu^i\right)\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{l=0}^{n}\overline{c}_l\overline{d_l^j}\right)\int_{\Delta_0}\phi_i(x)\overline{\phi_j(x)}d\mu_0(x)\\
&\quad + \sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu d_\nu^i\right)\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{l=0}^{n}\overline{c}_l\overline{d_l^j}\right)\int_{\Delta_1}\phi'_i(x)\overline{\phi'_j(x)}d\mu_1(x)\\
&= \sum_{i=0}^{m}\left(\sum_{\nu=0}^{n} c_\nu d_\nu^i\right)\sum_{j=0}^{m}\left(\sum_{l=0}^{n}\overline{c}_l\overline{d_l^j}\right) r_{ij} \quad = \quad (Dc^t)^t R(m+1)(\overline{D}\overline{c}^{\,t}).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Luego, de (3,3) y (3,4) se tiene que:

$$\frac{\|TP\|_S}{\|P\|_S} = \sqrt{\frac{cD^tR(m+1)\overline{D}\overline{c}^{\,t}}{cR(n+1)\overline{c}^{\,t}}},$$

para cada $P \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$. Por tanto,

$${}_n(T) \le \sup_{c\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}} \sqrt{\frac{cD^tR(m+1)\overline{D}\overline{c}^{\,t}}{cR(n+1)\overline{c}^{\,t}}}. \tag{3.5}$$

Además, para $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ se tiene lo siguiente:

$$\sqrt{\frac{cD^t R(m+1)\overline{D}\overline{c}^{\,t}}{cR(n+1)\overline{c}^{\,t}}} \quad \in \quad \left\{ \frac{\|TP\|_S}{\|P\|_S} \;\; | \;\; P \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\} \right\}$$

de aquí que:

$$\sqrt{\frac{cD^t R(m+1)\overline{D}\overline{c}^{\,t}}{cR(n+1)\overline{c}^{\,t}}} \quad \leq \quad {}_n(T)$$

para cada $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ y en consecuencia

$$\sup_{c \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}} \sqrt{\frac{cD^t R(m+1)\overline{D}\overline{c}^{\,t}}{cR(n+1)\overline{c}^{\,t}}} \quad \leq \quad {}_n(T). \tag{3.6}$$

Por lo tanto, de (3,5) y (3,6) tenemos que:

$${}_n(T) = \sup_{c \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}} \sqrt{\frac{cD^t R(m+1)\overline{D}\overline{c}^{\,t}}{cR(n+1)\overline{c}^{\,t}}}.$$

■

En adelante, para cualquier vector $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, utilizaremos la siguiente notación:

$$\|c\|_a \quad := \quad \begin{cases} \left(\sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu|^a\right)^{\frac{1}{a}}, & \text{si } 1 \leq a < \infty, \\ \\ \text{máx}\{|c_\nu| : 0 \leq \nu \leq n\} & \text{si } a = \infty. \end{cases}$$

Teorema 3.1.2 *Sean T y ${}_n(T)$ como en el teorema 3.1.1 y $\{Q_\nu\}_{\nu \geq 0}$ una sucesión de polinomios ortonormales con respecto al producto interno* (3,1)*. Entonces*

$${}_n(T) = \sup_{\substack{\|c\|_2 = 1 \\ c \in \mathbb{C}^{n+1}}} \left\{ \sum_{j=0}^{m} \left| \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu d_\nu^j \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{3.7}$$

donde $D = \left(d_\nu^j\right)_{0 \leq j \leq m,\, 0 \leq \nu \leq n}$ es la matriz cuyas entradas están dadas por

$$(TQ_\nu)(x) := \sum_{j=0}^{m} d_\nu^j \, Q_j(x). \tag{3.8}$$

Además, ${}_n(T)$ satisface las siguientes estimaciones:

$$\max_{0 \leq \nu \leq n} \|TQ_\nu\|_S \;\leq\; {}_n(T) \leq C(a,n) \left\| \left(\|TQ_0\|_S, \ldots, \|TQ_n\|_S \right) \right\|_b, \tag{3.9}$$

para cualquier a con $1 \leq a \leq \infty$ *y donde*

$$C(a,n) = \sup_{c \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}} \frac{||c||_a}{||c||_2}, \quad con \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1.$$

Demostración (Teorema 3.1.2) Por hipótesis, $\{Q_\nu\}_{\nu=0}^n$ es una base ortonormal para $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Por el Teorema (3,1,1) y al considerar esta base ortonormal en lugar de $\{\phi_\nu\}_{\nu=0}^n$, tenemos que la matriz $R(n+1)$ es la matriz identidad I_{n+1}. Por tanto, para $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ se tiene que:

$$cR(n+1)\overline{c}^{\,t} = ||c||_2^2 \qquad \text{y} \qquad {}_n(T) = \sup_{\substack{c \in \mathbb{C}^{n+1} \\ ||c||_2 = 1}} \sqrt{c\, D^t\, \overline{D}\, \overline{c}^{\,t}}.$$

Además, si

$$D = \begin{pmatrix} d_0^0 & d_1^0 & d_2^0 & \ldots & d_n^0 \\ d_0^1 & d_1^1 & d_2^1 & \ldots & d_n^1 \\ d_0^2 & d_1^2 & d_2^2 & \ldots & d_n^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_0^m & d_1^m & d_2^m & \ldots & d_n^m \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} c\, D^t\, \overline{D}\, \overline{c}^{\,t} &= \left[\sum_{k=0}^n c_k d_k^0\right]\left[\sum_{s=0}^n \bar{c}_s \bar{d}_s^0\right] + \left[\sum_{k=0}^n c_k d_k^1\right]\left[\sum_{s=0}^n \bar{c}_s \bar{d}_s^1\right] + \ldots + \left[\sum_{k=0}^n c_k d_k^m\right]\left[\sum_{s=0}^n \bar{c}_s \bar{d}_s^m\right] \\ &= \sum_{j=0}^m \left[\sum_{k=0}^n c_k d_k^j\right]\overline{\left[\sum_{s=0}^n c_s d_s^j\right]} \quad = \quad \sum_{j=0}^m \left|\sum_{\nu=0}^n c_\nu d_\nu^j\right|^2. \end{aligned}$$

Por tanto, se cumple (3,7).

Para probar (3,9), sea a con $1 \leq a \leq \infty$ cualquiera y $P(x) = \displaystyle\sum_{\nu=0}^n c_\nu Q_\nu(x)$ en $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Entonces,

$$||P||_S^2 = \left\langle \sum_{k=0}^n c_k Q_k(x), \sum_{j=0}^n c_j Q_j(x) \right\rangle_S = \sum_{k=0}^n |c_k|^2 = ||c||_2^2 \tag{3.10}$$

y

$$||TP||_S \leq \textstyle\sum_{\nu=0}^n \left| c_\nu \; ||TQ_\nu||_S \right| = ||\, c\, (\, ||TQ_0||_S, ||TQ_1||_S, \ldots, ||TQ_n||_S\,)\, ||_1$$

donde $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$.

Ahora, utilizando la desigualdad de Hölder, tenemos que:

$$||TP||_S \leq ||\, c\, ||_a \; ||\, (\, ||TQ_0||_S, ||TQ_1||_S, \ldots, ||TQ_n||_S\,)\, ||_b, \tag{3.11}$$

donde $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = 1$.

Consideremos $H : (\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), ||\cdot||_S) \to (\mathbb{C}^{n+1}, ||\cdot||_a)$, el operador lineal definido mediante:

$$HP = (c_0, \ldots, c_n),$$

donde $P = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu Q_\nu$. Entonces H es un operador biyectivo y acotado con

$$||H|| = \sup_{P \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\}} \frac{||HP||_a}{||P||_S}.$$

Luego, para cada $P \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ se cumple que:

$$||HP||_a \leq ||H||\,||P||_S \tag{3.12}$$

y por (3,10)

$$||c||_a \leq ||H||\;||c||_2, \tag{3.13}$$

para cada $c \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$.

De (3,13) podemos concluir que:

$$C(a, n) \leq ||H||.$$

Supongamos que $C(a, n) < ||H||$, entonces existe $P_1 \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\}$ tal que $\dfrac{||HP_1||_a}{||P_1||_S} > C(a, n)$. Entonces, es posible hallar $c' = (c'_0, c'_1, \ldots, c'_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, el cual satisface que $HP_1 = c'$ con $\frac{||Hp_1||_a}{||p_1||_S} = \frac{||c'||_a}{||c'||_2}$. Es decir, existe $c' \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, tal que $\frac{||c'||_a}{||c'||_2} > C(a, n)$. Esto es una contradicción y por lo tanto $C(a, n) = ||H||$.

Volviendo a la desigualdad (3,11) y utilizando (3,12) tenemos que:

$$||TP||_S \leq C(a, n)\; ||\,(\,||TQ_0||_S, ||TQ_1||_S, \ldots, ||TQ_n||_S\,)\,||_b\, ||P||_S.$$

De aquí, para cada $P \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$

$$\frac{||TP||_S}{||P||_S} \leq C(a, n)||(||TQ_0||_S, \ldots, ||TQ_n||_S)||_b$$

y

$$_n(T) \leq C(a, n)||(||TQ_0||_S, \ldots, ||TQ_n||_S)||_b.$$

Por ser $\{Q_\nu\}_{\nu=0}^{n}$ una base ortonormal para $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, $||TQ_\nu||_S \in \{\,||TP||_S \mid ||P||_S = 1\,\}$, para $0 \leq \nu \leq n$. Por tanto, $\max_{0\leq\nu\leq n} ||TQ_\nu||_S \leq {}_n(T)$. ■

El siguiente resultado nos proporciona una expresión explícita para $C(a, n)$:

Lema 3.1.1

$$C(a, n) = \begin{cases} (n+1)^{\frac{1}{a}-\frac{1}{2}}, & si\ \ 1 \leq a \leq 2 \\ \\ 1, & si\ \ 2 \leq a \leq \infty. \end{cases}$$

Demostración (Lema 3.1.1)
Caso I: Para $a \in [1,2]$, $f(x) = x^{2/a}$ es una función convexa en el intervalo $[0,+\infty)$. Como $\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1$, podemos aplicar la desigualdad de Jensen y para cada $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n) \in C^{n+1}\backslash\{0\}$, se cumple que:

$$\left(\tfrac{1}{n+1} \textstyle\sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu|^a\right)^{\frac{2}{a}} \leq \tfrac{1}{n+1} \textstyle\sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu|^2 \Rightarrow \tfrac{1}{n+1} \textstyle\sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu|^a \leq (n+1)^{-\frac{a}{2}} \left(\textstyle\sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu|^2\right)^{\frac{a}{2}}$$

$$\Rightarrow \left(\textstyle\sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu|^a\right)^{\frac{1}{a}} \leq (n+1)^{(1-\frac{a}{2})\frac{1}{a}} \left(\textstyle\sum_{\nu=0}^{n} |c_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow ||c||_a \leq (n+1)^{\frac{1}{a}-\frac{1}{2}} ||c||_2.$$

Luego,

$$C(a,n) \leq (n+1)^{\frac{1}{a}-\frac{1}{2}}. \tag{3.14}$$

Sea $c_1 = (1,1,\ldots,1) \in C^{n+1}$, entonces $\dfrac{||c_1||_a}{||c_1||_2} = \dfrac{(n+1)^{\frac{1}{a}}}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} = (n+1)^{\frac{1}{a}-\frac{1}{2}}$. De aquí y por (3,14)

$$(n+1)^{\frac{1}{a}-\frac{1}{2}} = \frac{||c_1||_a}{||c_1||_2} \leq C(a,n) \leq (n+1)^{\frac{1}{a}-\frac{1}{2}}$$

Así, $C(a,n) = (n+1)^{\frac{1}{a}-\frac{1}{2}}$, para $1 \leq a \leq 2$.

Caso II: Sea $a = \infty$ y $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n) \in C^{n+1}\backslash\{0\}$. Entonces para cada $\nu \in \{0,1,\ldots,n\}$ $|c_\nu| \leq ||c||_2$ y de aquí, $\dfrac{||c||_\infty}{||c||_2} \leq 1$, Así, $C(\infty,n) \leq 1$. Considerando $c_1 = (1,0,0,\ldots 0)$, se cumple que $1 = \dfrac{||c_1||_\infty}{||c_1||_2} \leq C(\infty,n) \leq 1$ y se concluye que: $C(\infty,n) = 1$.

Caso III: Para $2 < a < \infty$ y $c \in C^{n+1}\backslash\{0\}$, se tiene que: $||c||_\infty \leq ||c||_a \leq ||c||_2$. Por lo tanto, para cada $c \in C^{n+1}\backslash\{0\}$: $\dfrac{||c||_\infty}{||c||_2} \leq \dfrac{||c||_a}{||c||_2} \leq 1$. De aquí, $C(\infty,n) \leq C(a,n) \leq 1$ y por el caso anterior, $C(a,n) = 1$.

■

Volviendo al Teorema 3,1,2 y para los casos $a = 1$ y $a = 2$, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.1.1 *Sean T y $_n(T)$ como en el Teorema* 3,1,2*, entonces*

$$\max_{0\leq\nu\leq n} ||TQ_\nu||_S \leq {}_n(T) \leq \sqrt{n+1} \max_{0\leq\nu\leq n} ||TQ_\nu||_S. \tag{3.15}$$

$$\max_{0\leq\nu\leq n} ||TQ_\nu||_S \leq {}_n(T) \leq \left\{\sum_{\nu=0}^{n} ||TQ_\nu||_S^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.16}$$

Demostración (Corolario 3.1.1) Del Teorema 3.1.2, tenemos que

$$\max_{0\le\nu\le n} \|TQ_\nu\|_S \;\le\; {}_n(T) \le C(a,n) \left\| \left(\|TQ_0\|_S, \ldots, \|TQ_n\|_S \right) \right\|_b,$$

Si $a = 1$, $b = \infty$ y $\left\| (\|TQ_0\|_S, \ldots, \|TQ_n\|_S) \right\|_b = \max_{0\le\nu\le n} \|TQ_\nu\|_S$. Utilizando el lema anterior, $C(1,n) = \sqrt{n+1}$ y la desigualdad (3,15) se cumple.

Para $a = 2$, $b = 2$, $\left\| (\|TQ_0\|_S, \ldots, \|TQ_n\|_S) \right\|_b = \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \|TQ_\nu\|_S^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$, $C(2,n) = 1$ y obtenemos (3,16).

■

Los teoremas 2.1.2 y 2.1.9 del capítulo anterior, plantean el caso particular del teorema 3.1.2, cuando $\mu_1 = 0$ y μ_0 es absolutamente continua. La mejor constante ${}_n(T)$ o ${}_n\left(\frac{d^k}{dx^k}\right)$, como se denotó en el teorema 2.1.2, fueron obtenidas por Dörfler en [17] y K. H. Kwon y por D. W. Lee en [28], respectivamente, siguiendo distintos enfoques.

Bajo las condiciones planteadas en el Teorema 3.1.1, se cumple que:

$${}_n(T) = \sup_{c\in\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}} \sqrt{\frac{c\, D^t\, R(m+1)\overline{D}\,\overline{c}^{\,t}}{c\, R(n+1)\,\overline{c}^{\,t}}}.$$

Por tanto, para cada $c \in C^{n+1}/\{0\}$, ${}_n(T)$ es el valor más pequeño de los λ que satisfacen que:

$$\lambda \;\ge\; \sqrt{\frac{c\, D^t\, R(m+1)\overline{D}\,\overline{c}^{\,t}}{c\, R(n+1)\,\overline{c}^{\,t}}}$$

o

$$\lambda^2 \;\ge\; \frac{c\, D^t\, R(m+1)\overline{D}\,\overline{c}^{\,t}}{c\, R(n+1)\,\overline{c}^{\,t}}. \tag{3.17}$$

De aquí, para $c \in C^{n+1}/\{0\}$ fijo pero arbitrario, se tiene que:

$$\lambda^2 \;-\; \frac{c\, D^t\, R(m+1)\overline{D}\,\overline{c}^{\,t}}{c\, R(n+1)\,\overline{c}^{\,t}} \;\ge\; 0.$$

Esto implica que:

$$\lambda^2\, c\, R(n+1)\,\overline{c}^{\,t} \;-\; c\, D^t\, R(m+1)\overline{D}\,\overline{c}^{\,t} \;\ge\; 0$$

o

$$c\left[\lambda^2\, R(n+1) \;-\; D^t\, R(m+1)\,\overline{D}\right]\overline{c}^{\,t} \;\ge\; 0. \tag{3.18}$$

De (3,18) y como $c \in C^{n+1}/\{0\}$ es arbitrario, $\lambda^2 R(n+1) - D^t R(m+1)\overline{D}$ es semi-definida positiva. Así, ${}_n(T)$ es el valor más pequeño de λ tal que $\lambda^2 R(n+1) - D^t R(m+1)\overline{D}$ es semi-definida positiva. Por ser μ_0 y μ_1 medidas positivas en $\mathbb{C}$, $R(n+1)$ es hermitiana para $n \geq 0$ y $D^t R(m+1)\overline{D}$ es hermitiana y semidefinida positiva para $m \geq 0$.

Si $R(n+1)$ y $D^t R(m+1)\overline{D}$ conmutan y ya que ambas son hermitianas (ver [30]), ellas tienen $n+1$ autovectores linealmente independientes comunes $\{u_i\}_{i=0}^n$ tales que:

$$R(n+1)\,u_i \;=\; \zeta_i\,u_i, \quad D^t R(m+1)\,\overline{D}\,u_i \;=\; \eta_i\,u_i, \quad i = 0,\dots,n, \tag{3.19}$$

con $\zeta_i,\, \eta_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \dots, n$. En consecuencia, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.1.3 *Sean T y ${}_n(T)$ como en el Teorema 3.1.1. Si $R(n+1)$ y $D^t R(m+1)\overline{D}$ conmutan, entonces*

$${}_n(T) = \max_{0\leq i\leq n} \sqrt{\frac{\eta_i}{\zeta_i}},$$

donde $\zeta_i > 0$ y $\eta_i \geq 0$, $0 \leq i \leq n$, son los valores propios de $R(n+1)$ y $D^t R(m+1)\overline{D}$, respectivamente, como en (3,19).

Demostración (Teorema 3.1.3) Debido a que $R(n+1)$ y $D^t R(m+1)\overline{D}$ son matrices hermitianas, donde $R(n+1)$ es definida positiva y $D^t R(m+1)\overline{D}$ es semidefinida positiva, tenemos que $\zeta_i > 0$ y $\eta_i \geq 0$, para cada i.

Por otra parte, si $\sigma = \max_{0\leq i\leq n} \sqrt{\frac{\eta_i}{\zeta_i}}$, entonces se tiene que $\sigma^2 \geq \frac{\eta_i}{\zeta_i}$ con $i = 0, 1, \dots, n$. De aquí, $\sigma^2\,\zeta_i - \eta_i \geq 0$, para $i = 0, 1, \dots, n$. Como además se cumple que:

$$\left[\sigma^2 R(n+1) - D^t R(m+1)\,\overline{D}\right] u_i \;=\; \left(\sigma^2\zeta_i - \eta_i\right) u_i,$$

se tiene que $\sigma^2\zeta_i - \eta_i$ es un valor propio no negativo para $\sigma^2 R(n+1) - D^t R(m+1)\overline{D}$, con $i = 0, 1, \dots, n$. Luego, σ es un valor λ tal que $\lambda^2 R(n+1) - D^t R(m+1)\overline{D}$ es semidefinida positiva. Como ${}_n(T)$ es el valor λ más pequeño que satisface la desigualdad (3,17), tenemos que:

$${}_n(T) \;\leq\; \sigma. \tag{3.20}$$

Recíprocamente, para cada $c \in C^{n+1}/\{0\}$, se cumple que: $\dfrac{cD^tR(m+1)\overline{D}\overline{c}^t}{cR(n+1)\overline{c}^t} \;\leq\; \lambda^2.$

En particular, si $c = \bar{u}_r^t$ donde r es un entero tal que $0 \leq r \leq n$ y $\sigma = \sqrt{\frac{\eta_r}{\zeta_r}}$, se tiene que:

$$\frac{c\,D^t R(m+1)\,\overline{D}\,\overline{c}^t}{c\,R(n+1)\,\overline{c}^t} \;=\; \frac{\bar{u}_r^t\,D^t R(m+1)\,\overline{D}\,u_r}{\bar{u}_r^t\,R(n+1)\,u_r} \;=\; \frac{\bar{u}_r^t\,\eta_r\,u_r}{\bar{u}_r^t\,\zeta_r\,u_r} \;=\; \sigma^2.$$

Por teorema 3.1.2

$${}_n(T) \;\geq\; \sqrt{\frac{\bar{u}_r^t D^t R(m+1)\overline{D}\overline{\bar{u}_r^t}^t}{\bar{u}_r^t R(n+1)\overline{\bar{u}_r^t}^t}} \;=\; \sigma. \tag{3.21}$$

De (3,20) y (3,21), ${}_n(T) = \sigma$.

■

En el producto interno definido por (3,1), supongamos que μ_1 es la medida nula y que μ_0 es una medida no negativa sobre la recta real, con soporte Δ_0 infinito o compacto, tal que todos los momentos

$$m_\nu \quad = \quad \int_{\Delta_0} x^\nu d\mu_0(x) \quad \nu = 0, 1, \ldots$$

existen, son finitos y $m_0 > 0$. Bajo estas condiciones, al considerar el producto interno de Sobolev (3,1) definido en $\mathbb{P}_n$, vemos que éste coincide con el producto interno (2,4); es decir,

$$\langle P, Q \rangle_S := \int_{\Delta_0} P(x)\, Q(x)\, d\mu_0(x).$$

La norma Sobolev asociada se expresa mediante:

$$\|P\|_S := \left\{ \int_{\Delta_0} |P(x)|^2 d\mu_0(x) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

El teorema 2.1.3 del segundo capítulo de este trabajo, presenta un resultado debido a G. V. Milovanović (ver [56]), el cual determina una expresión explícita para la constante óptima ${}_n\left(\frac{d^r}{dx^r}\right)$, a través del máximo valor propio asociado a una matriz de tipo Gram.

En lo que sigue, generalizaremos y demostraremos un resultado similar al de Milovanović, enfocando la demostración a la luz del Teorema 3.1.1.

Corolario 3.1.2 *Sea* (μ_0, μ_1) *un vector de medidas no negativas sobre la recta real, asociado al producto interno definido por* (3,1), *tal que* μ_0 *no es indénticamente nula, los soportes* Δ_0 *y* Δ_1, *respectivamente, son compactos o no y al menos uno de ellos contiene un número infinito de puntos. Los momentos asociados a dichas medidas existen y son finitos. Además, consideremos la norma Sobolev dada por* (3,2), $\{Q_\nu\}_{\nu\geq 0}$ *una sucesión ortonormal inducida por* (3,1) *y el siguiente problema extremal*

$${}_n\left(\frac{d^k}{dx^k}\right) = \sup_{p\in\mathbb{P}_n(C)} \frac{\|P^{(k)}\|_S}{\|P\|_S}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Entonces,

$${}_n\left(\frac{d^k}{dx^k}\right) \;=\; \left(r_{\text{máx}}(B_{n,k})\right)^{1/2},$$

donde $r_{\text{máx}}(B_{n,k})$ *es el máximo valor propio de la matriz*

$$B_{n,k} = \left[b_{i,j}^{(k)}\right]_{k\leq i,j\leq n},$$

cuyos elementos están dados por:

$$b_{i,j}^{(k)} = \left\langle Q_i^{(k)}, Q_j^{(k)} \right\rangle_S, \quad k \leq i, j \leq n.$$

Un polinomio extremal es

$$P^*(x) = \sum_{\nu=k}^{n} c_{\nu-k} Q_{\nu-k}(x),$$

donde $[c_0, c_1, \ldots, c_{n-k}]^t$ *es un vector propio de la matriz* $B_{n,k}$ *correspondiente al valor propio* $r_{\text{máx}}(B_{n,k})$.

Demostración (Corolario 3.1.2) Al considerar la base ortonormal $\{Q_0, \ldots, Q_n\}$ of $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ en el Teorema 3.1.3, podemos observar que la matriz $R(n+1)$ es la matriz identidad I_{n+1}. Por lo tanto, las matrices, $R(n+1)$ y $D^t R(m+1)\overline{D} = D^t\overline{D}$ conmutan y para $T = \dfrac{d^k}{dx^k}$, $1 \leq k \leq n$, tenemos que:

$$_n(T) = \max_{0\leq i\leq n} \sqrt{\frac{\eta_i}{\zeta_i}},$$

donde $\zeta_i > 0$ y $\eta_i \geq 0$, $0 \leq i \leq n$, son los valores propios de $R(n+1)$ y $D^t R(m+1)\overline{D}$, respectivamente. Pero $\zeta_i = 1$ para $0 \leq i \leq n$; por tanto,

$$_n(T) = \max_{0\leq i\leq n} \sqrt{\eta_i}.$$

Veamos la relación entre las matrices $D^t R(m+1)\overline{D} = D^t\overline{D}$ y la matriz $B_{n,k}$. Sabemos que

$$D = \left(d_\nu^j\right)_{0\leq\nu\leq n\,,\,0\leq j\leq m},$$

donde las componentes de la matriz están expresadas por

$$\frac{d^k}{dx^k}\big(Q_\nu\big) = \sum_{j=0}^{m} d_\nu^j Q_j, \quad m = \max_{0\leq\nu\leq n} \deg\left[\frac{d^k}{dx^k}\big(Q_\nu\big)\right].$$

Ahora para $k \leq i, j \leq n$, se tiene que:

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= \langle \textstyle\sum_{l=0}^m d_i^l Q_l\,,\ \sum_{r=0}^m d_j^r Q_r\rangle_S = \sum_{l=0}^m d_i^l \left[\sum_{r=0}^m \bar{d}_j^{\,r} \langle Q_l\,,\ Q_r\rangle_S\right] \\ &= \textstyle\sum_{l=0}^m d_i^l \left[\bar{d}_j^0 \langle Q_l, Q_0\rangle_S + \bar{d}_j^1 \langle Q_l, Q_1\rangle_S + \ldots \bar{d}_j^n \langle Q_l, Q_n\rangle_S\right] \\ &= d_i^0 \bar{d}_j^0 + d_i^1 \bar{d}_j^1 + \ldots + d_i^n \bar{d}_j^n = \textstyle\sum_{r=0}^m d_i^r \bar{d}_j^r \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz $B_{n,k}$ no es más que el bloque de orden $n-k+1$ de entradas no nulas de la matriz $D^t R(m+1)\overline{D} = D^t\overline{D}$. Es decir

$$D^t\overline{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{k,k} & b_{k,k+1} & \dots & b_{k,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{k+1,k} & b_{k+1,k+1} & \dots & b_{k+1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n,k} & b_{n,k+1} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & B_{n,k} \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$_n(T) = \max_{0\le i\le n} \sqrt{\eta_i} = \sqrt{r_{\text{máx}}(B_{n,k})}.$$

Finalmente, si $[c_0, c_1, \dots, c_{n-k}]^t$ es un vector propio de la matriz $B_{n,k}$ correspondiente al valor propio $r_{\text{máx}}(B_{\lambda,n,k})$, entonces el hecho de que $P^*(x) = \sum_{\nu=k}^{n} c_{\nu-k} Q_{\nu-k}(x)$ sea un polinomio extremal, es inmediato.

■

Consideremos ahora un problema extremal similar sobre el espacio de los polinomios con coeficientes no negativos.

Sea T un operador lineal sobre el espacio de los polinomios reales $\mathbb{P}$ y consideremos el siguiente problema extremal:

$$^{\star}_{n}(T) = \sup_{P\in S_n} \frac{\|T(P)\|_S}{\|P\|_S},$$

donde

$$S_n := \left\{ P \in \mathbb{P}_n : P(x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \phi_\nu(x), \quad c_\nu \ge 0, \quad 0 \le \nu \le n \right\},$$

y $\{\phi_\nu\}_{\nu\ge 0}$ es una sucesión de polinomios reales con $\deg(\phi_\nu) = \nu$, $\nu \ge 0$.

Siguiendo el argumento anterior, tenemos que para cada $c = (c_0, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ con $c_\nu \ge 0$, $0 \le \nu \le n$, se tiene que $^{\star}_{n}(T)$ es el valor mas pequeño de λ que satisface

$$c\,[\lambda^2 R(n+1) - D^t R(m+1)\, D]\, c^t \ge 0, \tag{3.22}$$

donde las matrices $R(n+1)$ y D viene dadas como en el Teorema 3.1.1.

Hagamos $D^t R(m+1)D = (\tilde{r}_{ij})_{0\leq i,j\leq n}$, y asumamos que $r_{ij} \geq 0$, $\tilde{r}_{ij} \geq 0$ para $0 \leq i, j \leq n$, y si $r_{ij} = 0$, entonces $\tilde{r}_{ij} = 0$. Sea

$$\breve{\sigma} := \max_{0\leq i,j\leq n} \left\{ \sqrt{\frac{\tilde{r}_{ij}}{r_{ij}}} \; : r_{ij} > 0 \right\}.$$

Debido a que las componentes de c son no negativos, la desigualdad (3,22) se cumple para $\lambda = \breve{\sigma}$. De aquí,

$$^{\star}_{n}(T) \leq \breve{\sigma}.$$

Teorema 3.1.4 *Supongamos que el máximo $\breve{\sigma}$ se obtiene cuando $i = j = s$, entonces $^{\star}_{n}(T) = \breve{\sigma}$, es decir,*

$$\|TP\|_S \leq \sqrt{\frac{\tilde{r}_{ss}}{r_{ss}}}\, \|P\|_S, \quad P \in S_n, \tag{3.23}$$

y la igualdad se cumple para $P(x) = b\,\phi_s(x)$, donde b es una constante no negativa.

Demostración (Teorema 3.1.4) Por hipótesis, $\breve{\sigma} = \sqrt{\frac{\tilde{r}_{ss}}{r_{ss}}}$. Consideremos ahora, $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n)$ tal que $c_\nu = 0$, si $\nu \neq s$ y $c_\nu = 1$, cuando $\nu = s$, entonces se tiene que,

$$c[\breve{\sigma}^2 R(n+1) - D^t R(m+1)D]c^t = 0 \tag{3.24}$$

Así se cumple que $^{\star}_{n}(T) \geq \breve{\sigma}$, teniéndose entonces que $^{\star}_{n}(T) = \breve{\sigma}$. La igualdad en (3,23) se cumple para cualquier $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k(x) \in S_n$ si y solo si $c = (c_0, c_1, \ldots, c_n)$ satisface (3,24). En particular, si $c_\nu = 0$ para $\nu \neq s$ y $c_s \geq 0$ es arbitrario.

■

3.2. Ejemplos

En general, es muy difícil calcular $_n(T)$, de manera explícita. Sin embargo, ilustraremos con algunos ejemplos, el teorema 3.1.2, cuando $T = \dfrac{d^k}{dx^k}$ y para $k = 0, 1, \ldots, n$. El lector puede consultar [28] para el caso en que $\mu_1 = 0$.

Ejemplo 3.2.1 *Sea (μ_0, μ_1) un vector de medidas no negativas sobre la recta real, definidas mediante:*

$$\begin{aligned} d\mu_0(x) &= \chi_{[-1,1]}(x)\,dx, \\ d\mu_1(x) &= (1-x^2)\chi_{[-1,1]}(x)\,dx, \end{aligned}$$

donde $\chi_{[-1,1]}$ *es la función característica sobre el intervalo* $[-1,1]$. *Consideremos el producto interno de Sobolev definido en* $\mathbb{P}(\mathbb{C})$, *mediante:*

$$\langle P,Q\rangle_S := \int_{\mathbb{R}} P(x)\,\overline{Q(x)}\,d\mu_0(x) + \int_{\mathbb{R}} P'(x)\,\overline{Q'(x)}\,d\mu_1(x). \tag{3.25}$$

Utilizando el hecho de que:

$$\int_{-1}^{1} P_\nu^{(\alpha,\beta)}(x)\,P_j^{(\alpha,\beta)}(x)\,(1-x)^\alpha\,(1+x)^\beta\,dx \;=\; \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2n+\alpha+\beta+1)}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1))}\,\delta_{\nu j},$$

donde $\{P_\nu^{(\alpha,\beta)}\}_{n\geq 0}$ *son los polinomios ortogonales clásicos de Jacobi, con* $\alpha,\beta>-1$, *y considerando los polinomios clásicos ortonormales de Legendre* $\{P_\nu\}_{\nu\geq 0}$, *definidos por:*

$$P_\nu(x) \;=\; \sqrt{\frac{2\nu+1}{2}}\,P_\nu^{(0,0)}(x) \;=\; \sqrt{\frac{2\nu+1}{2}}\,\sum_{j=0}^{[\nu/2]}\frac{(-1)^j(2\nu-2j)!}{2^\nu j!(\nu-j)!(\nu-2j)!}x^{\nu-2j}, \quad \nu\geq 0,$$

tenemos que se satisface la relación de ortogonalidad de Sobolev:

$$\langle P_\nu, P_j\rangle_S = (\nu(\nu+1)+1)\delta_{\nu j}, \quad \nu, j\geq 0.$$

Entonces, podemos fácilmente deducir que el sistema $\{Q_\nu\}_{\nu\geq 0}$, *definido por*

$$Q_\nu(x) = \sqrt{\frac{2\nu+1}{2\nu(\nu+1)+2}}\,\sum_{j=0}^{[\nu/2]}\frac{(-1)^j(2\nu-2j)!}{2^\nu j!(\nu-j)!(\nu-2j)!}x^{\nu-2j}, \quad \nu\geq 0,$$

es ortonormal con respecto al producto interno de Sobolev (3,25).

Por otra parte, si $C_m^{(\xi)}$ *es el m-ésimo polinomio de Gegenbauer , entonces*

$$C_m^{(\xi)}(x) = \frac{\Gamma(\xi+1/2)\Gamma(m+2\xi)}{\Gamma(2\xi)\Gamma(m+\xi+1/2)}\,P_m^{(\xi-1/2,\xi-1/2)}(x), \quad \xi>-1/2,$$

donde $P_m^{(\xi-1/2,\xi-1/2)}$ *es el m-ésimo polinomio de Jacobi normalizado por*

$$P_m^{(\xi-1/2,\xi-1/2)}(1) = \binom{m+\xi-\frac{1}{2}}{m}, \quad \xi>-1/2.$$

Luego cada polinomio Q_ν, $\nu-$*ésimo polinomio de Legendre ortonormalizado mediante la norma* $\|\cdot\|_S$, *puede ser expresado mediante polinomios de Gegenbauer de la siguiente manera:*

$$Q_\nu(x) \;=\; \sqrt{\frac{2\nu+1}{2\nu(\nu+1)+2}}\,C_\nu^{(1/2)}(x).$$

Además, también sabemos que

$$\frac{d}{dx}C_m^{(\xi)}(x) = 2\xi C_{m-1}^{(\xi+1)}(x),$$

de donde, para $1 \leq k \leq m$, *podemos deducir que*

$$\frac{d^k}{dx^k}C_m^{(\xi)}(x) = 2^k(\xi)_k C_{m-k}^{(\xi+k)}(x).$$

De aquí, utilizando la definición del símbolo de Pochhammer y la fórmula de duplicación de la función Gamma:

$$(1/2)_k = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+k)}{\Gamma(1/2)} \qquad y \qquad \Gamma(k)\Gamma(k+1/2) = 2^{1-2k}\Gamma(1/2)\Gamma(2k)$$

respectivamente, y para $1 \leq k \leq \nu$, *obtenemos que:*

$$\frac{d^k}{dx^k}Q_\nu(x) = \left(\frac{2\nu+1}{2\nu(\nu+1)+2}\right)^{1/2}\frac{\Gamma(2k+1)}{2^k\Gamma(k+1)}C_{\nu-k}^{\left(k+\frac{1}{2}\right)}(x). \tag{3.26}$$

Más aún, la relación (ver [73, p. 99])

$$C_m^{(\xi)}(x) = \sum_{j=0}^{[m/2]} a_{j,m}C_{m-2j}^{(\zeta)}(x), \quad \xi > \zeta > 0,$$

donde

$$a_{j,m} = \frac{\Gamma(\zeta)(m-2j+\zeta)\Gamma(j+\xi-\zeta)\Gamma(m-j+\xi)}{\Gamma(\xi)j!\Gamma(\xi-\zeta)\Gamma(m-j+\zeta+1)},$$

nos proporciona para $\xi = j+1/2,\ m = \nu-j\ y\ \zeta = 1/2$ *la siguiente identidad:*

$$C_{\nu-j}^{\left(j+\frac{1}{2}\right)}(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{\nu-k}{2}\right]} a_{j,\nu-k}\, C_{\nu-k-2j}^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x).$$

Así, la igualdad (3,26) *es equivalente a:*

$$\frac{d^k}{dx^k}Q_\nu(x) = \left(\frac{(2\nu+1)}{\nu(\nu+1)+1}\right)^{1/2}\sum_{j=0}^{\left[\frac{\nu-k}{2}\right]} e_{j,\nu-k}\, Q_{\nu-k-2j}(x), \tag{3.27}$$

donde

$$e_{j,\nu-k} = \frac{2^k(\nu-k-2j+1/2)\,\Gamma(j+k)\,\Gamma(\nu-j+1/2)}{j!\,\Gamma(k)\,\Gamma(\nu-k-j+3/2)}\left(\frac{(\nu-k-2j)(\nu-k-2j+1)+1}{2(\nu-k-2j)+1}\right)^{1/2},$$

Al considerar $T = \dfrac{d^k}{dx^k}$ *y expresarlo de la forma:*

$$(TQ_\nu)(x) := \sum_{j=0}^{m} d_\nu^j Q_j(x),$$

donde

$$m := \max_{0\le\nu\le n} \deg(TQ_\nu) \;=\; \nu - k,$$

tenemos que la relación (3,27) *implica que los coeficientes en* (3,8) *están dados por:*

$$d_\nu^j = \begin{cases} e_{\frac{\nu-k-j}{2},\nu-k}\,, & \textit{si } \nu + j \textit{ es impar con } 0 \le j \le [\frac{\nu-k}{2}], \\ \\ 0\,, & \textit{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$${}_n(T) = \sup_{\substack{\|c\|_2=1 \\ c\in\mathbb{C}^{n+1}}} \left\{ \sum_{j=0}^{\nu-k} \left| \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu d_\nu^j \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

A través del siguiente argumento, podemos hallar cotas para ${}_n(T)$.

$$\begin{aligned} \max_{k\le\nu\le n} \left\| \frac{d^k}{dx^k} Q_\nu \right\|_S &= \max_{k\le\nu\le n} \left(\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)+1} \right)^{1/2} \left\| \sum_{j=0}^{[\frac{\nu-k}{2}]} e_{j,\nu-k}\, Q_{\nu-k-2j} \right\|_S \\ &= \max_{k\le\nu\le n} \left(\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)+1} \right)^{1/2} \Delta_{\nu,k} \end{aligned}$$

en donde $\Delta_{\nu,k} \;=\; \left(\sum_{j=0}^{[\frac{\nu-k}{2}]} |e_{j,\nu-k}|^2 \right)^{1/2}$.

Para estudiar este máximo consideremos la función $F : [-1/2, +\infty) \to \mathbb{R}$ *definida mediante:* $F(x) = \left(\dfrac{(2x+1)}{x(x+1)+1} \right)^{1/2}$. *Debido a que* F *es decreciente en* $(0{,}3660254037, +\infty)$, $\left(\dfrac{(2\nu+1)}{\nu(\nu+1)+1} \right)^{1/2} < 1$, *y para* $k \le \nu \le n$ *tenemos que:*

$$\left(\frac{2n+1}{n(n+1)+1} \right)^{1/2} \le \left(\frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)+1} \right)^{1/2} \le \left(\frac{2k+1}{k(k+1)+1} \right)^{1/2}.$$

Por lo tanto,

$$\left(\frac{2n+1}{n(n+1)+1} \right)^{1/2} \max_{k\le\nu\le n} \Delta_\nu \le \max_{k\le\nu\le n} \left\| \frac{d^k}{dx^k} Q_\nu \right\|_S$$

y

$$\max_{k\le\nu\le n} \left\| \frac{d^k}{dx^k} Q_\nu \right\|_S \le \left(\frac{2k+1}{k(k+1)+1} \right)^{1/2} \max_{k\le\nu\le n} \Delta_{\nu,k}.$$

Luego, la desigualdad (3,15) *nos da:*

$$\left(\frac{2n+1}{n(n+1)+1}\right)^{1/2} \max_{k\leq\nu\leq n} \Delta_{\nu,k} \leq {}_n(T)$$

y

$${}_n(T) \leq \left(\frac{(2k+1)(n+1)}{k(k+1)+1}\right)^{1/2} \max_{k\leq\nu\leq n} \Delta_{\nu,k}.$$

Ejemplo 3.2.2 *En* $\mathbb{P}(\mathbb{C})$, *sea el siguiente producto interno:*

$$\langle P, Q\rangle_\alpha \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} P(x)\,\overline{Q(x)}\,x^\alpha\,e^{-x}\,H(x)\,dx, \tag{3.28}$$

donde $\alpha > -1$ *y* H *es la función escalonada de Heaviside:*

$$H(x) \quad = \quad \begin{cases} 1, & si \;\; x \geq 0 \\ 0, & si \;\; x < 0 \end{cases} .$$

Un sistema ortogonal asociado al producto (3,28) *viene dado por la sucesión* $\{L_n^{(\alpha)}(x)\}$, *donde* $L_n^{(\alpha)}(x)$ *es el* $n-$*ésimo polinomio de Laguerre:*

$$L_n^{(\alpha)}(x) \quad = \quad \sum_{j=0}^{\nu}(-1)^j\binom{\nu+\alpha}{\nu-j}\frac{x^j}{j!}.$$

Este sistema satisface la siguiente condición de ortogonalidad:

$$\left\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)}\right\rangle_\alpha \quad = \quad \Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}\delta_{nm}.$$

Consideremos el siguiente producto interno de Sobolev:

$$\langle P, Q\rangle_S := \int_{\mathbb{R}} P(x)\overline{Q(x)}d\mu_0(x) + \int_{\mathbb{R}} P'(x)\overline{Q'(x)}d\mu_1(x), \tag{3.29}$$

para $P, Q \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$ *y donde* (μ_0, μ_1) *es un vector de medidas no negativas sobre la recta real, tales que:*

$$\begin{aligned} d\mu_0(x) &= x^\alpha e^{-x}\,H(x)dx, \\ d\mu_1(x) &= x^{\alpha+1}\,e^{-x}\,H(x)dx. \end{aligned}$$

Debido a que:

$$\frac{d}{dx}L_\nu^{(\alpha)}(x) = -L_{\nu-1}^{(\alpha+1)}(x), \tag{3.30}$$

se tiene que los polinomios ortonormales clásicos de Laguerre: $\{P_\nu^{(\alpha)}\}_{\nu\geq 0}$, *dados por*

$$\begin{aligned} P_\nu^{(\alpha)}(x) &= \left(\frac{\nu!}{\Gamma(\nu+\alpha+1)}\right)^{1/2} L_\nu^{(\alpha)}(x) \\ &= \left(\frac{\nu!}{\Gamma(\nu+\alpha+1)}\right)^{1/2} \sum_{j=0}^{\nu}(-1)^j\binom{\nu+\alpha}{\nu-j}\frac{x^j}{j!}, \quad \nu\geq 0. \end{aligned}$$

satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad Sobolev:

$$\langle P_\nu^{(\alpha)}, P_j^{(\alpha)}\rangle_S = (\nu+1)\delta_{\nu j}, \quad \nu, j\geq 0,$$

Además, se puede deducir que los polinomios $\{q_\nu^{(\alpha)}\}_{\nu\geq 0}$, *donde*

$$q_\nu^{(\alpha)}(x) = \left(\frac{\nu!}{(\nu+1)\Gamma(\nu+\alpha+1)}\right)^{1/2} \sum_{j=0}^{\nu}(-1)^j\binom{\nu+\alpha}{\nu-j}\frac{x^j}{j!}, \quad \nu\geq 0,$$

son ortonormales con respecto al producto interno de Sobolev (3,29).

De (3.30) se tiene que

$$\frac{d^k}{dx^k}L_\nu^{(\alpha)}(x) = (-1)^k L_{\nu-k}^{(\alpha+k)}(x), \quad 1\leq k\leq \nu.$$

De aquí, para $1\leq k\leq\nu$, *obtenemos que*

$$\frac{d^k}{dx^k}q_\nu^{(\alpha)}(x) = (-1)^k\left(\frac{\nu!}{(\nu+1)\Gamma(\nu+\alpha+1)}\right)^{1/2} L_{\nu-k}^{(k+\alpha)}(x).$$

y utilizando la fórmula de adición (ver [73, p. 391, Problema 90]):

$$L_\nu^{(\alpha+\beta+1)}(x+y) = \sum_{j=0}^{\nu} L_{\nu-j}^{(\alpha)}(x)L_j^{(\beta)}(y),$$

se puede concluir que:

$$\frac{d^k}{dx^k}q_\nu^{(\alpha)}(x) = (-1)^k\left(\frac{\nu!}{(\nu+1)\Gamma(\nu+\alpha+1)}\right)^{1/2} \sum_{j=0}^{\nu-k}\tilde{e}_{j,\nu-k}\, q_{\nu-k-j}^{(\alpha)}(x), \tag{3.31}$$

donde

$$\tilde{e}_{j,\nu-k} = \left(\frac{(\nu-k-j+1)\Gamma(\nu-k-j+\alpha+1)}{(\nu-k-j)!}\right)^{\frac{1}{2}}\binom{k+j-1}{j}.$$

Sustituyendo $j=\nu-k-j$ *en* (3,31), *tenemos*

$$\frac{d^k}{dx^k}q_\nu^{(\alpha)}(x) = (-1)^k\left(\frac{\nu!}{(\nu+1)\Gamma(\nu+\alpha+1)}\right)^{1/2} \sum_{j=0}^{\nu-k}\tilde{e}_{\nu-k-j,\nu-k}\, q_j^{(\alpha)}(x).$$

Al tomar $T = \dfrac{d^k}{dx^k}$, *la relación* (3,31) *implica que los coeficientes en* (2,25) *están dados por:*

$$d_\nu^j = \begin{cases} (-1)^k \left(\dfrac{\nu!(j+1)\Gamma(j+\alpha+1)}{j!(\nu+1)\Gamma(\nu+\alpha+1)} \right)^{1/2} \binom{\nu-j-1}{\nu-j-k} & 0 \le j \le \nu - k, \\ 0 & \textit{en otro caso}, \end{cases}$$

tal que:

$$ {}_n(T) = \sup_{\substack{\|c\|_2 = 1 \\ c \in \mathbb{C}^{n+1}}} \left\{ \sum_{j=0}^{n-k} \left| \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu d_\nu^j \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

De manera similar al ejemplo anterior, hallemos cotas para ${}_n(T)$.

$$\max_{k \le \nu \le n} \left\| \frac{d^k}{dx^k} q_\nu^{(\alpha)} \right\|_S = \max_{k \le \nu \le n} \left(\frac{\nu!}{(\nu+1)\Gamma(\nu+\alpha+1)} \right)^{1/2} \left\| \sum_{j=0}^{\nu-k} \tilde{e}_{\nu-k-j,\nu-k}\, q_j^{(\alpha)} \right\|_S . \tag{3.32}$$

Entonces, se cumple que:

$$\left\| \sum_{j=0}^{\nu-k} \tilde{e}_{\nu-k-j,\nu-k}\, q_j^{(\alpha)} \right\|_S = \left(\sum_{j=0}^{\nu-k} \frac{(j+1)\Gamma(j+\alpha+1)}{j!} \binom{\nu-j-1}{\nu-j-k}^2 \right)^{1/2}$$

Al considerar la función $G : \mathbb{N} \times (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *definida mediante:*

$$G(n, \alpha) := \frac{n!}{(n+1)\Gamma(n+\alpha+1)},$$

tenemos que G como función en la variable n es creciente para $-1 < \alpha < 0$, *y decreciente cuando* $\alpha \ge 0$.

Sea $a_\nu^{(\alpha)} := (G(\nu, \alpha))^{1/2}$, *para cada* $\alpha > -1$, *y* $k \le \nu \le n$. *Entonces, para* $-1 < \alpha < 0$,

$$a_k^{(\alpha)} \le \left(\frac{\nu!}{(\nu+1)\Gamma(n+\alpha+1)} \right)^{1/2} \le a_n^{(\alpha)}, \tag{3.33}$$

y para $\alpha \ge 0$,

$$a_n^{(\alpha)} \le \left(\frac{\nu!}{(\nu+1)\Gamma(n+\alpha+1)} \right)^{1/2} \le a_k^{(\alpha)}. \tag{3.34}$$

Volviendo a la expresión en (3,32)*, se tiene que:*

$$\max_{k \le \nu \le n} \left\| \frac{d^k}{dx^k} q_\nu^{(\alpha)} \right\|_S = \max_{k \le \nu \le n} \left(\frac{\nu!}{(\nu+1)\Gamma(\nu+\alpha+1)} \right)^{1/2} \Delta_\nu^{(\alpha)},$$

donde

$$\Delta_\nu^{(\alpha)} = \left(\sum_{j=0}^{\nu-k} \frac{(j+1)\Gamma(j+\alpha+1)}{j!} \binom{\nu-j-1}{\nu-j-k}^2 \right)^{1/2}, \; k \le \nu \le n.$$

Utilizando (3,33) *y* (3,34), *se llega a que:*

$$a_k^{(\alpha)} \max_{k\leq\nu\leq n} \Delta_\nu^{(\alpha)} \leq \max_{k\leq\nu\leq n} \left\| \frac{d^k}{dx^k} q_\nu^{(\alpha)} \right\|_S \leq a_n^{(\alpha)} \max_{k\leq\nu\leq n} \Delta_\nu^{(\alpha)}, \qquad si \quad -1 < \alpha < 0,$$

y

$$a_n^{(\alpha)} \max_{k\leq\nu\leq n} \Delta_\nu^{(\alpha)} \leq \max_{k\leq\nu\leq n} \left\| \frac{d^k}{dx^k} q_\nu^{(\alpha)} \right\|_S \leq a_k^{(\alpha)} \max_{k\leq\nu\leq n} \Delta_\nu^{(\alpha)}, \qquad si \quad \alpha \geq 0.$$

De aquí, la desigualdad (3,15) *nos da que:*

$$\begin{cases} a_k^{(\alpha)} \max\limits_{k\leq\nu\leq n} \Delta_\nu^{(\alpha)} \leq {}_n(T) \leq (n+1)^{1/2} a_n^{(\alpha)} \max\limits_{k\leq\nu\leq n} \Delta_\nu^{(\alpha)}, & si \quad -1 < \alpha < 0, \\ a_n^{(\alpha)} \max\limits_{k\leq\nu\leq n} \Delta_\nu^{(\alpha)} \leq {}_n(T) \leq (n+1)^{1/2} a_k^{(\alpha)} \max\limits_{k\leq\nu\leq n} \Delta_\nu^{(\alpha)}, & si \quad \alpha \geq 0. \end{cases}$$

En particular, cuando $\alpha = 0$*, tenemos que*

$$\begin{aligned} a_k^{(0)} &= (G(k,0))^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{k+1}}, \\ a_n^{(0)} &= (G(n,0))^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\max_{k\leq\nu\leq n} \left(\sum_{j=0}^{\nu-k} \frac{j+1}{n+1} \binom{\nu-j-1}{\nu-j-k}^2 \right)^{1/2} \leq {}_n(T)$$

y

$$_n(T) \leq \max_{k\leq\nu\leq n} \left(\sum_{j=0}^{\nu-k} \frac{(n+1)(j+1)}{k+1} \binom{\nu-j-1}{\nu-j-k}^2 \right)^{1/2}.$$

Capítulo 4

Conclusiones y recomendaciones

En este último capítulo mencionaremos los resultados fundamentales de nuestro trabajo y expondremos problemas abiertos y futuras líneas de investigación relativos a desigualdades de tipo Markov-Bernstein con normas Sobolev.

4.1. Conclusiones

Las desigualdades de tipo Markov-Bernstein son un tópico útil e interesante en teoría de aproximación. En este trabajo se determinan resultados asociados a desigualdades de este estilo en el contexto de normas de Sobolev. Se obtienen representación explícita y cotas para la constante óptima ${}_n(\Psi)$, incluso en el caso en el que Ψ es un operador lineal no necesariamente diferenciable. Además, se determinan cotas explícitas para ejemplos concretos asociados a ciertas normas de Gegenbauer-Sobolev y de Laguerre-Sobolev.

Aunque las pruebas son relativamente cortas y no parecen ser muy díficiles una vez dadas, obtener la idea inicial del problema no es trivial y los resultados presentados en esta memoria resuelven parcialmente un problema abierto propuesto por el Profesor F. Marcellán en la conferencia "Constructive Theory of Functions," celebrada en Campos do Jordão, Brasil (2008).

4.2. Problemas abiertos y futuras líneas de investigación

Problema 1. Dado el producto interno de Sobolev definido en $\mathbb{P}$, mediante:

$$\langle P, Q\rangle_S = \sum_{k=0}^{m} \int_E P^{(k)}(x)\, \overline{Q^{(k)}(x)}\, d\mu_k(x) = \sum_{k=0}^{m} \langle P^{(k)}, Q^{(k)}\rangle_{L^2(\mu_k)} \,,$$

donde para $m \in \mathbb{Z}^+$, $\{\mu_k\}_{k=0}^m$, es un conjunto de $m+1$ medidas finitas de Borel tales que sus soportes Δ_k, $k = 0, 1, \cdots, m$, satisfacen que $\Delta_k \subset E \subset \mathbb{R}$ y al menos Δ_0 contiene una cantidad infinita de puntos. Además, μ_m no es la medida nula y si E es un conjunto no acotado, supondremos que x^n es μ_k-integrable en E, para cada k y todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Consideremos $\Psi : (\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|_S) \to (\mathbb{P}(\mathbb{C}), \|\cdot\|_S)$ un operador lineal y $m \in \mathbb{Z}^+$, con $m > 1$. Estudiar el problema extremal:

$$ {}_n(\Psi) = \sup_{\substack{\|P\|_S=1 \\ P\in\mathbb{P}_n(\mathbb{C})}} \|\Psi P\|_S, $$

donde

$$ \| P\|_S = \left\{ \sum_{k=0}^{m} \int_E |P^{(k)}(x)|^2 \, d\mu_k(x) \right\}^{1/2}. $$

Problema 2. Consideremos el producto interno de Sobolev definido en el espacio de los polinomios $\mathbb{P}$, mediante:

$$ \langle P, Q\rangle_S = \int P(x)\, Q(x)\, d\mu(x) + \lambda \int P'(x)\, Q'(x)\, d\mu(x) + \eta \int [P'(x)\, Q(x) + P(x)\, Q'(x)]\; d\mu(x), \quad (4.1) $$

donde $\lambda - \eta^2 > 0$.

El producto interno $(4,1)$ puede ser expresado en forma matricial de la siguiente manera:

$$ \langle P, Q\rangle_S = \int (\, P \;\; P' \,) \begin{pmatrix} 1 & \eta \\ \eta & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix} d\mu(x). $$

Esta forma matricial es conocida como producto interno de Sobolev *no diagonal*. El caso $\eta = 0$ suele llamarse “*caso diagonal*.”

Hallar las condiciones necesarias para establecer desigualdades análogas a las desigualdades de Markov-Bernstein en espacios de Sobolev dotados de un producto interno de Sobolev no diagonal.

Problema 3. Consideremos $\langle\, ,\, \rangle$ un producto interno definido en $\mathbb{P}$ y $\|\cdot\|$ la norma inducida por este producto interno:

$$ \|P\| = \sqrt{\langle P, P\rangle}. $$

Sea $\Psi : (\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|) \to (\mathbb{P}(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$, un operador lineal, determinar una fórmula explícita para la constante óptima ${}_n(\Psi)$:

$$ {}_n(\Psi) = \sup_{\substack{\|P\|=1 \\ P\in\mathbb{P}_n(\mathbb{C})}} \|\Psi P\|. $$

Problema 4. Para cualquier función no negativa φ en $[-1, 1]$ sea $\mathcal{P}(\varphi, n)$ la clase de todos los polinomios $P \in \mathbb{P}_n$ tales que:

$$ |P(x)| \leq \varphi(x) $$

para cada $x \in [-1, 1]$.

Para cada $P \in \mathcal{P}(\varphi, n)$, consideremos la norma:

$$ \|P\|_\varphi = \sup_{-1<x<1} \frac{|P(x)|}{\varphi(x)} $$

y la norma Sobolev:

$$\|P\|_S = \|P\|_\varphi + \|P'\|_\varphi.$$

Si $\|P\|_\varphi \leq 1$ y $k \in \mathbb{Z}^+$, ¿ cúan grande puede ser $\|P^{(k)}\|_S$?

Problema 5. Sea (μ_0, μ_1) un vector de medidas no negativas sobre la recta real, el cual satisface que μ_0 no es identicamente nula, para $j = 0, 1,$ y $n = 0, 1, 2, \ldots,$

$$\left| \int_{\Delta_j} x^n d\mu_j(x) \right| < \infty,$$

donde Δ_0 y Δ_1, son los soportes de μ_0 y μ_1, respectivamente. Estos soportes son subconjuntos, compactos o no, de $\mathbb{C}$, tales que al menos uno de ellos debe contener una cantidad infinita de puntos. Para P y Q polinomios, definimos:

$$\langle P, Q \rangle_S = \int_{\Delta_0} P(x)\, \overline{Q(x)}\, d\mu_0 + \int_{\Delta_1} P'(x)\, \overline{Q'(x)}\, d\mu_1, \tag{4.2}$$

donde la barra indica el conjugado complejo de la función dada. Sabemos que (4,2) define un producto interno sobre el espacio lineal de todos los polinomios.

Sea W_n un subconjunto del espacio de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Estudiar el problema extremal de tipo Turán-Sobolev dado por:

$$B_{n,k} = \inf_{P \in W_n} \frac{\|P^{(k)}\|_S}{\|P\|_S} \quad (1 \leq k \leq n).$$

Hemos expuesto algunos problemas de la Teoría de Aproximación en espacios de Sobolev que están actualmente en vías de estudio o como futuras líneas de investigación. Sin embargo, como ya ha ocurrido a lo largo de los últimos años, muy probablemente nuevos e interesantes aspectos de esta teoría surgirán en un futuro próximo.

Apéndice A

Polinomios Ortogonales

Como referencias para este apéndice, recomendamos [7], [34], [43], [58], [75] y [73].
Sea μ una medida positiva y finita de Borel definida en la recta real. Supongamos que el conjunto, $supp(\mu)$, soporte de la medida μ definido por:

$$supp(\mu) \ := \ \{x \in \mathbb{R} : \mu(x-\epsilon, x+\epsilon) > 0, \ \ \text{para cada} \ \ \epsilon > 0\ \}$$

es un conjunto formado por una cantidad infinita de puntos y está contenido en un subconjunto cerrado E del eje real. En caso de que E sea un conjunto no acotado, supondremos además que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, los momentos

$$m_n \ = \ \int_E x^n \, d\mu(x) \tag{A.1}$$

son finitos. Denotaremos por $\mathcal{M}(E)$, al espacio de las medidas soportadas en E con las propiedades dadas anteriormente, por $\mathbb{P}$ al espacio vectorial de todos los polinomios y por $\mathbb{P}_n$ el subespacio de $\mathbb{P}$ de todos los polinomios de grado a lo sumo n y coeficientes reales.

Sabemos que $L^2(E,\mu)$, el espacio de las funciones de cuadrado integrable en E con respecto a la medida μ, posee estructura de espacio de Hilbert al definir para cada f y g en este espacio, el siguiente producto interno:

$$\langle f, g\rangle_{L^2(E,\mu)} = \int_E f(x)\, g(x)\, d\mu(x) \tag{A.2}$$

y la correspondiente norma

$$||f||_{L^2(E,\mu)} \ = \ \sqrt{\int_E [f(x)]^2 \, d\mu(x)}. \tag{A.3}$$

El considerar este producto interno sobre el espacio $\mathbb{P}$, nos lleva inmediatamente a la siguiente

Definición A.0.1 *Una sucesión $\{P_n\}_{n\geq 0}$ se dice que es una **sucesión de polinomios ortogonales con respecto al producto interno** $(A,2)$, si se satisface:*

i) $grad(P_n) = n$, *para cada* $n \in \mathbb{Z}^+$.

ii) $\langle P_n, P_m\rangle_{L^2(E,\mu)} = 0$ *si* $n \neq m$ *y* $\langle P_n, p_n\rangle_{L^2(E,\mu)} \neq 0$

Si para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, *se cumple que* $||P_n||_{L^2(E,\mu)} = 1$, *diremos que* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *es una* ***sucesión de polinomios ortonormales con respecto a la medida*** μ. *Ahora, si el coeficiente lider o principal de* P_n *es igual a uno, la sucesión se denominará,* ***sucesión de polinomios ortogonales mónicos con respecto a la medida*** μ.

Podemos observar que la condición *ii*) de la definición anterior, es equivalente a:

$$\langle P_n, x^k\rangle_{L^2(E,\mu)} = 0 \qquad \text{si} \qquad k = 0, 1, \cdots n-1. \tag{A.4}$$

A partir de la base canónica de los mónicos $\{1, x, x^2, \ldots\}$ podemos utilizar el método de Jorgen Pedersen Gram $(1850 - 1916)$ y Erhard Schmidt $(1845 - 1921)$ para obtener el resultado siguiente:

Teorema A.0.1 *Existe una sucesión de polinomios* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *que satisfacen:*

i) $grad(P_n) = n$, *para cada* $n \in \mathbb{Z}^+$.

ii) $\langle P_n, P_m\rangle_{L^2(E,\mu)} = 0$ *si* $n \neq m$

Notemos que si $\{P_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de polinomios dada a través del teorema anterior, con $P_n(x) = \gamma_n x^n + \cdots, \gamma_1 x + \gamma_0$, $\gamma_n \neq 0$, entonces podemos construir dos sucesiones más de polinomios ortogonales, $\{\tilde{P}_n\}_{n\geq 0}$ y $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ tales que:

- Si para cada n consideramos $\tilde{P}_n = \dfrac{P_n}{\gamma_n}$, obtenemos una sucesión $\{\tilde{P}_n\}_{n\geq 0}$ de polinomios mónicos.
- Si $Q_n = \dfrac{P_n}{||P_n||_{L^2(E,\mu)}}$, entonces $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de polinomios ortonormales.

Por otra parte, de $(A,1)$ y $(A,2)$ tenemos que para cada $n \in \mathbb{Z}^+$, también podemos expresar los momentos mediante

$$m_n = \langle 1, x^n\rangle_{L^2(E,\mu)}.$$

La matriz de Gram para el producto $(A,2)$ en la base canónica viene dada por:

$$H_n = \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_{n+1} \\ m_2 & m_3 & m_4 & \cdots & m_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_n & m_{n+1} & m_{n+2} & \cdots & m_{2n} \end{pmatrix} \tag{A.5}$$

y matrices de este tipo, constantes a largo de las anti-diagonales, se conocen como *matrices de Hankel*.

Si consideramos la expresión de P_n a través de la base canónica, digamos

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{j,n}\, x^j,$$

de las relaciones en $(A,4)$ podemos formar el siguiente sistema de n ecuaciones con $n+1$ incógnitas las cuales corresponden a los coeficientes del polinomio:

$$\begin{array}{lclclclcl}
a_{0,n}\, m_0 & + & a_{1,n}\, m_1 & + & \cdots & + & a_{n,n}\, m_n & = & 0\\
a_{0,n}\, m_1 & + & a_{1,1}\, m_2 & + & \cdots & + & a_{n,n}\, m_{n+1} & = & 0\\
a_{0,n}\, m_2 & + & a_{1,n}\, m_3 & + & \cdots & + & a_{n,n}\, m_{n+2} & = & 0\\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\
a_{0,n}\, m_{n-1} & + & a_{1,n}\, m_n & + & \cdots & + & a_{n,n}\, m_{2n-1} & = & 0
\end{array}$$

y así podemos obtener familias de polinomios ortogonales, salvo constantes multiplicativas, utilizando la regla de Cramer, bajo el supuesto de que $\Delta_n = detH_n \neq 0$ para cada n.

Si además suponemos que $a_{n,n} > 0$, existe una única sucesión de polinomios ortonormales $\{Q_n\}_{n\geq 0}$, donde

$$Q_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n\, \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n\\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1}\\ m_2 & m_3 & \cdots & m_{n+2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ m_{n-1} & m_n & \cdots & m_{2n-1}\\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}$$

y el coeficiente principal está dado por

$$a_{n,n} = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}.$$

En el caso de la sucesión de polinomios ortogonales mónicos, $\{\tilde{P}_n\}_{n\geq 0}$, tenemos que para cada n, $\tilde{P}_n$ viene dado por:

$$\tilde{P}_0(x) = 1 \quad \text{y} \quad \tilde{P}_n(x) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n\\ m_1 & m_2 & \cdots & m_{n+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ m_{n-1} & m_n & \cdots & m_{2n-1}\\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \quad \text{para} \quad n > 0. \tag{A.6}$$

Introduzcamos ahora un tipo muy especial de familias de polinomios ortogonales y para ello consideremos la siguiente

Definición A.0.2 *El operador multiplicación por la variable independiente* x, $M_x : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ *se define mediante:*

$$M_x(P) = xP,$$

para cada $P \in \mathbb{P}$.

Definición A.0.3 *Sea* $\langle\, , \,\rangle : \mathbb{P}\times\mathbb{P} \to [0, +\infty)$ *un producto interno sobre* $\mathbb{P}$. *Diremos que* $\langle\, , \,\rangle$ *es un producto interno estándar sobre* $\mathbb{P}$, *si el operador* M_x *es autoadjunto, es decir,*

$$\langle M_x(P), Q\rangle \;=\; \langle xP\,,\, Q\rangle \;=\; \langle P\,,\, xQ\rangle \;=\; \langle P, M_x(Q)\rangle,$$

para cada $P, Q \in \mathbb{P}$.

Así, por ejemplo, el producto interno dado por $(A{,}2)$, es un producto interno estándar sobre $\mathbb{P}$.

Definición A.0.4 *Diremos que una sucesión de polinomios ortogonales* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *es estándar si es ortogonal con respecto a un producto interno estándar sobre* $\mathbb{P}$.

La sucesión $\{\tilde{P}_n\}_{n\geq 0}$, expresada en $(A{,}6)$, es una sucesión de polinomios ortogonales mónicos denominada **sucesión estándar de polinomios ortogonales mónicos respecto a la medida** μ.

Ahora, la representación en términos de matrices de Hankel $(A{,}5)$, no es muy útil a la hora de calcular la expresión algebraica de los polinomios ortogonales ya que se requiere de la evaluación de determinantes. Existen maneras más eficientes de expresar el comportamiento algebraico de los polinomios ortogonales sobre la recta real y una de las propiedades fundamentales de los polinomios ortogonales estándar asociados a una medida μ, es que se pueden generar de manera recurrente.

Teorema A.0.2 *Sea* $\{P_n\}_{n\geq 0}$, *la sucesión estándar de polinomios ortogonales respecto a la medida* μ, *con* $P_n(x) = \gamma_n x^n + \delta_n x^{n-1} + \ldots$ *Entonces esta sucesión satisface la siguiente relación de recurrencia a tres términos*

$$xP_n(x) \;=\; a_{n+1}\, P_{n+1}(x) \;+\; b_n\, P_n(x) \;+\; a_n\, P_{n-1}(x), \tag{A.7}$$

con la condición inicial que $P_0 = 1$ *y* $P_{-1} = 0$. *Los coeficientes de recurrencia están dados por*

$$a_n \;=\; \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} > 0 \quad y \quad b_n \;=\; \frac{\delta_n}{\gamma_n} - \frac{\delta_{n+1}}{\gamma_{n+1}}.$$

Los polinomios mónicos $\tilde{P}_n = \frac{P_n}{\gamma_n}$, *satisfacen la relación de recurrencia a tres términos*

$$\tilde{P}_{n+1}(x) \;=\; (x - b_n)\, \tilde{P}_n(x) - \; a_n^2 P_{n-1}(x), \tag{A.8}$$

La fórmula de recurrencia $(A{,}7)$, caracteriza las sucesiones de polinomios que son ortogonales con respecto a alguna medida soportada en el eje real.

Teorema A.0.3 *Sea* $\{P_n\}_{n\geq 0}$, *una sucesión de polinomios mónicos en* $\mathbb{P}$ *generada por la relación de recurrencia* $(A{,}7)$, *con* a_{n+1} *real positivo y* b_n *real, entonces* $\{P_n\}_{n\geq 0}$, *es una sucesión estándar de polinomios ortogonales mónicos con respecto a una medida* μ *(no necesariamente única).*

El teorema fue enunciado por J.A. Favard en [20] y una demostración puede ser hallada en [15].

Como consecuencia de la fórmula de recurrencia $(A{,}8)$, tenemos el siguiente resultado:

Proposición A.0.1 *Dos polinomios ortogonales consecutivos no pueden tener ceros comunes.*

Demostración Sea $\{P_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales mónicos y supongamos por el absurdo que existe x_0 tal que $P_{n+1}(x_0) = P_n(x_0) = 0$. Pero por $(A,8)$, $p_{n-1}(x_0) = 0$ y aplicando repetidamente la fórmula de recurrencia llegamos a que $P_0(x_0) = 0$, lo cual contradice el hecho de que P_0 es el polinomio mónico constante uno. ∎

Sea μ un elemento en $\mathcal{M}(E)$, tal que $supp(\mu)$ contiene una cantidad infinita de puntos . Consideremos $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos asociada a μ. Recordemos que la cápsula convexa del soporte de μ, denotada por $C0(supp(\mu))$ es el menor intervalo que contiene a $supp(\mu)$. Otras propiedades se resumen en

Proposición A.0.2 *Los ceros de los polinomios ortogonales $\{P_n\}_{n\geq 0}$ son distintos y todos están en el interior de $C0(supp(\mu))$, con la topología de $\mathbb{R}$. Además entre dos ceros de P_n hay al menos un cero de P_m, para $m > n$.*

A.1. Polinomios ortogonales clásicos

Consideremos ahora una familia muy especial de medidas no negativas μ en $\mathbb{R}$, las medidas absolutamente continuas con respecto a la medida de Borel en $\mathbb{R}$ cuyo soporte es un subconjunto E de $\mathbb{R}$; es decir, aquellas para las cuales existe una función $\omega : E \to \mathbb{R}$ no negativa tal que:

$$d\mu(x) = \omega(x)dx. \tag{A.9}$$

En $L^2(E,\omega)$, el espacio de las funciones $\mu-$ medibles sobre E, con μ que satisface $(A,9)$, tales que:

$$\int_E f(x)\, d\omega(x) < \infty,$$

para cada $f \in L^2(E,\omega)$, consideremos el siguiente producto interno:

$$\langle f, g\rangle_{L^2(E,\omega)} = \int_E f(x)\, g(x)\, \omega(x)dx. \tag{A.10}$$

La norma asociada a este producto interno, conocida como *norma cuadrática* o *euclídea*, viene dada por:

$$||f||_{L^2(E,\omega)} = \sqrt{\int_E [f(x)]^2\ \omega(x)dx.}$$

para f y g en $L^2(E,\omega)$.

Ejemplos de familias de polinomios ortogonales asociadas al producto interno $(A,10)$, surgen en el estudio de diversos fenómenos físicos y en problemas propios de las matemáticas; y los podemos hallar en teoría de grupos, ecuaciones diferenciales, teoría de probabilidad, álgebra computacional, teoría de aproximación, entre otros. Mientras que, en física e ingeniería tiene aplicaciones en la mecánica cuántica, los osciladores y las teorías de comunicación. Éstos son los llamados *polinomios ortogonales clásicos*, entre los que se encuentran los polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi (con los casos especiales de Legendre, Chebyshev y Gegenbauer). Cabe destacar que históricamente, el origen de los polinomios ortogonales puede situarse a finales del siglo $XVIII$, en conexión con la solución de ecuaciones en derivadas parciales por el método de separación de variables y de problemas de valores en la frontera. Con los estudio realizados por Adrien-Maric Legendre $(1752-1833)$, en relación con el problema de la atracción de un cuerpo por una esfera (1782), se introduce la primera familia de polinomios ortogonales, hoy conocida con el nombre de *Polinomios de Legendre*.

Por otro lado, la familia de polinomios ortogonales clásicos no sólo satisfacen una relación de recurrencia a tres términos $(A,8)$, sino también otras propiedades importantes como son: el ser funciones propias de un operador diferencial lineal de segundo orden con coeficientes polinomiales, sus derivadas tambien constituyen una familia ortogonal, sus funciones generatrices pueden ser dadas explicítamente, entre otras.

Ahora, no toda propiedad caracteriza a una sucesión de polinomios ortogonales clásicos. Sabemos que la relación de recurrencia a tres términos $(A,7)$, determina a la sucesión de polinomios ortogonales si para cada n, a_{n+1} es un real positivo y b_n real (Teorema A.0.3). De hecho, podemos hallar varias familias que cumplen alguna propiedad de recurrencia a tres términos $(A,8)$, pero no una ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes polinomiales, o la fórmula de tipo Rodrigues. Sólo las familias de polinomios ortogonales clásicos cumplen estas propiedades y otras más que las caracterizan.

Definición A.1.1 *Diremos que una sucesión de polinomios ortogonales* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *es una* ***sucesión de polinomios ortogonales clásicos*** *con respecto a la función peso* ω *si*

$$\langle P_n, P_m\rangle_{L^2(E\,,\omega)} \;=\; \delta_{mn}\, d_n^2,$$

donde δ_{mn} *es el símbolo de Kronecker*

$$\begin{cases} 1, & si \quad m = n; \\ 0, & si \quad m \neq n, \end{cases}$$

d_n *es la norma del polinomio* P_n, ω *es la solución de la ecuación de Pearson:*

$$[\sigma(x)\omega(x)]' \;=\; \tau(x)\omega(x), \tag{A.11}$$

con σ *y* τ *son polinomios fijos de grado a lo más* 2 *y exactamente* 1 *respectivamente, tal que se satisfaga la siguiente condición de frontera*

$$\sigma(a)\omega(a) \;=\; \sigma(b)\omega(b).$$

Observemos que $(A,11)$ es equivalente a

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\tau - \sigma'}{\sigma}.$$

Se puede probar que las únicas familias que satisfacen la anterior definición son los polinomios de Hermite, Laguerre y Jacobi (ver [8] y [15]). Existen otras propiedades que los caracterizan y algunas de ellas vienen resumidas en el siguiente resultado:

Teorema A.1.1 *Sea* $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *una sucesión de polinomios ortogonales. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *es una sucesión de polinomios ortogonales clásicos.*

ii) La sucesión de sus derivadas $\{P'_n\}_{n\geq 1}$ *es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a la función peso* $\omega_1(x) = \sigma(x)\omega(x)$, *donde* ω *satisface* $(A,11)$.

iii) $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *satisface la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes polinomiales*

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda_n y = 0, \tag{A.12}$$

donde $deg(\sigma) \leq 2$, $deg(\tau) = 1$, *con* σ *y* τ *polinomios independientes de* n *y* λ_n *es una constante independiente de* x.

iv) $\{P_n\}_{n\geq 0}$ *puede ser expresada por la fórmula de Rodrigues*

$$P_n(x) = \frac{B_n}{\omega(x)} \frac{d^n}{dx^n}[\sigma^n(x)\,\omega(x)].$$

donde B_n *es independiente de* x, ω *es no negativa en un cierto intervalo de la recta,* σ *es un polinomio de grado a lo más* 2*, independiente de* n.

v) Existen tres sucesiones de números complejos $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$, $\{c_n\}_n$ *y un polinomio* σ, *con* $deg(\sigma) \leq 2$, *tal que*

$$\sigma(x)P'_n(x) = a_n P_{n+1}(x) + b_n P_n(x) + c_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

vi) Existen dos sucesiones de números complejos $\{d_n\}_n$, $\{e_n\}_n$, *tal que la siguiente relación para polinomios mónicos se cumplen*

$$P_n(x) = \frac{P'_{n+1}(x)}{n+1} + d_n P'_n(x) + g_n P'_{n-1}(x), \quad g_n \neq a_n, \quad n \geq 1.$$

donde en este caso, a_n *es el correspondiente coeficiente en la relación* $(A,7)$

Los únicas soluciones polinomiales ortogonales que satisfacen la ecuación diferencial $(A,12)$ son los polinomios de Hermite, Laguerre, Jacobi y, nos falta una cuarta familia, cuando en dicha ecuación diferencial $\sigma(x) = x^2$, la familia de los polinomios de Bessel. A diferencia de las tres familias anteriores, no corresponden a un caso definido positivo ya que la medida de ortogonalidad no es positiva. Aunque estos polinomios habían sido considerados por muchos matemáticos, fueron H. L. Krall y O. Frink quienes los presentaron formalmente en 1949 en su artículo *A new class of orthogonal polynomials* y les dieron el nombre por su relación con la función de Bessel. En ese trabajo estudiaron una gran cantidad de propiedades y probaron la ortogonalidad respecto a una función peso en la circunferencia unidad. Sin embargo, no encontraron ninguna función peso (necesariamente signada) sobre la recta real. El problema fue resuelto en 1990, por A. J. Durán, quien encontró las primeras medidas signadas sobre $\mathbb{R}$ y $(0,+\infty)$ respecto a las cuales los polinomios de Bessel eran ortogonales.

En la siguiente tabla esbozamos algunas características de estas cuatro familias de polinomios ortogonales clásicos.

Tabla 1
Sistema de Polinomios Ortogonales Clásicos

	Hermite	Laguerre	Jacobi	Bessel
$P_n(x)$	$H_n(x)$	$L_n^{(\alpha)}$	$P_n^{(\alpha,\beta)}$	$B_n^{(\alpha)}$
(a,b)	$\mathbb{R}$	$[0,+\infty)$	$[-1,1]$	$\mathcal{T} := \{\lvert z\rvert = 1, z \in \mathbb{C}\}$
$\sigma(x)$	1	x	$1-x^2$	x^2
$\tau(x)$	$-2x$	$-x+\alpha+1$	$-(\alpha+\beta+2)x+\beta-\alpha$	$(\alpha+2)x+2$
λ_n	$2n$	n	$n(n+\alpha\beta+1)$	$-n(n+\alpha+1)$
$\omega(x)$	e^{-x^2}	$x^\alpha e^{-x}$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a+k+1)\left(-\frac{2}{x}\right)^k}$
		$\alpha > -1$	$\alpha,\beta > -1$	$\alpha > -2$

A.1.1. Polinomios de Hermite

La sucesión de *Polinomios de Hermite*, denotada por $\{H_n\}_{n\geq 0}$, satisface la siguiente relación de ortogonalidad con relación a la función peso $\omega(x) = e^{-x^2}$, sobre $(-\infty,+\infty)$:

$$\langle H_n, H_m \rangle_{L^2(\mathbb{R},\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\,H_m(x)\,e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,2^n\,n!\,\delta_{mn}.$$

Como $\omega(x) = e^{-x^2}$, ω es una función no negativa en toda la recta real, $\dfrac{\omega'(x)}{\omega(x)} = -2x$ y al considerar en $(A,12)$, $\sigma(x) = 1$, y $\tau(x) = -2x$ para cada $x \in \mathbb{R}$, obtenemos que los polinomios de Hermite satisfacen la ecuación diferencial:

$$y_n''(x) - 2x\,y_n'(x) = -2n\,y_n$$

y para $B_n = (-1)^n$ obtenemos la fórmula de Rodrigues

$$e^{-x^2} y_n(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2}].$$

Además, la sucesión $\{H_n\}_{n\geq 0}$ satisface la siguiente relación de recurrencia a tres términos:

$$H_n(x) = 2x\, H_{n-1}(x) - (2n-1)\, H_{n-2}(x).$$

Los polinomios de Hermite H_n llamados así en honor a Charles Hermite $(1822-1901)$ quien los estudió junto con el caso de varias variables en 1864, en su ensayo *Sur un nouveau développement en série des fonctions.* El primero en considerarlos fue Laplace en 1810 en su *Mécanique céleste* quien los utilizó en problemas relacionados con teoría de las probabilidades. Luego, en 1859 Pafnuti Lvovich Chebyshev $(1821 - 1894)$ realizó un estudio detallado de los mismos en *Sur le développement des fonctions á une seule varieble*.

De la anterior fórmula de Rodrigues, podemos deducir que

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 & H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 & H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 & H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x \\ H_6(x) &= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120x & H_7(x) &= 128x^7 - 1344x^5 + 33600x^3 - 1680x \end{aligned}$$

Y en general,

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{(n-2k)!\, k!}.$$

donde $[x]$, parte entera de x, es el mayor entero que no excede a x y $a_n = 2n$ es el coeficiente principal de $Hn(x)$.

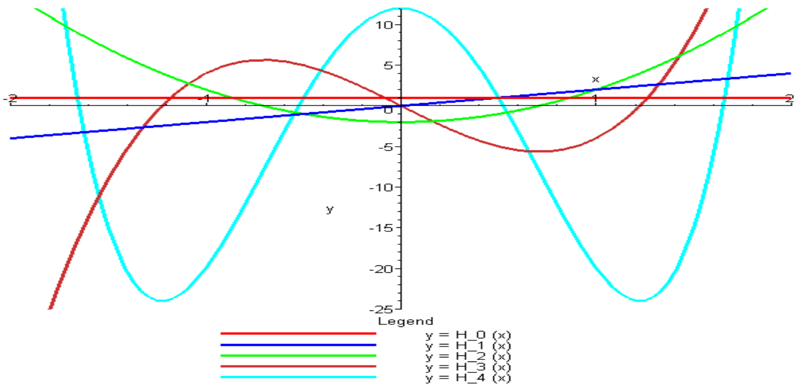

Figura A.1: Polinomios de Hermite

A.1.2. Polinomios de Laguerre

Los polinomios de Laguerre constituyen una familia uniparamétrica, es decir, para diferentes valores de un parámetro dado α se obtienen distintas sucesiones de polinomios de Laguerre. De ahí que, al n−ésimo polinomio de Laguerre suele denotarse por $L_n^{(\alpha)}$, donde $\alpha > -1$.

En este caso, $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}$, de donde ω es una función peso en $[0, +\infty)$ y $\dfrac{\omega'(x)}{\omega(x)} = \dfrac{(\alpha - x)}{x}$. Al considerar en $(A,12)$, $\sigma(x) = x$, y $\tau(x) = \alpha + 1 - x$, obtenemos que los polinomios de Laguerre satisfacen la siguiente ecuación diferencial:

$$x\, y_n''(x) + (\alpha + 1 - x)\, y_n'(x) = -n\, y_n.$$

Para $B_n = n!$ obtenemos la fórmula de Rodrigues:

$$e^{-x} x^\alpha y_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x} x^{n+\alpha}].$$

Utilizando el método de integración por partes obtenemos la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle_{L^2([0,+\infty),\omega)} = \int_0^{+\infty} L_n^{(\alpha)} L_m^{(\alpha)} e^{-x} x^\alpha\, dx = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}\delta_{mn}.$$

Luego, $\{L_n^{(\alpha)}\}_{n\geq 0}$ son ortogonales sobre $[0, +\infty)$, con relación a la función peso $\omega(x) = e^{-x} x^\alpha$. La integrabilidad se sigue al asumir que $\alpha > -1$.

La sucesión de polinomios de Laguerre de parámetro α, verifica la siguiente relación de recurrencia a tres términos:

$$nL_n^{(\alpha)}(x) = (-x + 2n + \alpha - 1)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha - 1)\, L_{n-2}^{(\alpha)}(x).$$

Para el caso en que $(\alpha = 0)$, los polinomios de Laguerre aparecieron por primera vez en el siglo $XVIII$ en los trabajos de de N. H. Abel y J. L. Lagrange. Más tarde fueron estudiados por P. L. Chebyshev y finalente por E. N. Laguerre $(1834 - 1886)$. La generalización, $\alpha > -1$, fue tarea inicialmente de Y.K. Sokhotsky y posteriormente de N.Y. Sonin a fines del siglo XIX. Una expresión explícita viene dada por:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

Nótese que el coeficiente principal de $L_n^{(\alpha)}$ es $a_n^{(\alpha)} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$. Algunos elementos de la sucesión para $\alpha = 0$ y denotando $L_n^{(0)}$ por L_n son:

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 1\\
L_1(x) &= -x + 1\\
L_2(x) &= x^2 - 4x + 2\\
L_3(x) &= -x^3 + 9x^2 - 18x + 6\\
L_4(x) &= x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24\\
L_5(x) &= -x^5 + l25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120\\
L_6(x) &= x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720\\
L_7(x) &= -x^7 + 49x^6 - 882x^5 + 7350x^4 - 29400x^3 + 52920x^2 - 35280x + 5040
\end{aligned}$$

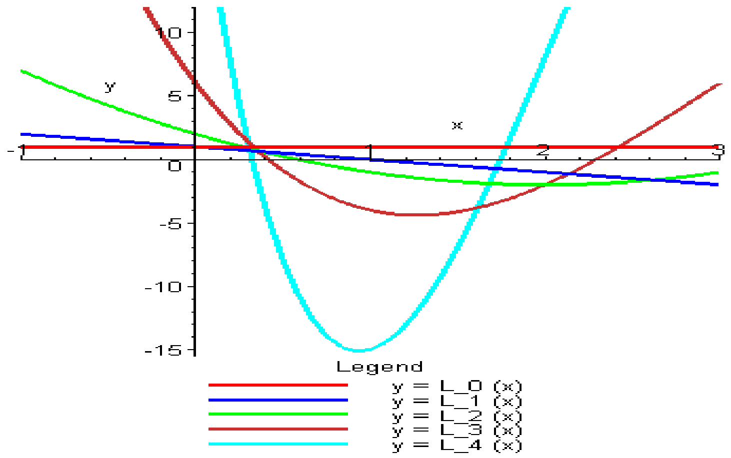

Figura A.2: Polinomios de Laguerre

A.1.3. Polinomios de Jacobi

Los *polinomios de Jacobi* constituyen una familia biparamétrica, es decir, para diferentes valores de dos parámetros dados α y β, se obtienen distintas sucesiones de polinomios de Jacobi. Por esta razón al *$n-$ésimo polinomio de Jacobi de parámetros* (α,β), lo denotaremos por $P_n^{(\alpha,\beta)}$, donde $\alpha,\beta > -1$. Estos polinomios satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\left\langle P_n^{(\alpha,\beta)},\, P_m^{(\alpha,\beta)} \right\rangle_{L^2([-1,1],\omega)} \;=\; \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n!(2n+\alpha+\beta+1)}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}\,\delta_{mn}. \qquad \text{(A.13)}$$

Por tanto, los polinomios de Jacobi son ortogonales en el intervalo $[-1,1]$ con respecto a la función peso $\omega(x) = \omega^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, asegurándose la integrabilidad de la función ω al requerir que $\alpha,\beta > -1$.

Luego, ω es una función no negativa en $[-1,1]$ con $\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = \frac{-\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x}$. Si $\sigma(x) = x^2 - 1$, y $\tau(x) = (2+\alpha+\beta)x - \beta$ en $(A,12)$, obtenemos que los polinomios de Jacobi satisfacen la siguiente ecuación diferencial:

$$(x^2-1)\,y_n''(x) \;+\; [(2+\alpha+\beta)x + -\beta]\,y_n'(x) \;=\; n[n+1+\alpha+\beta]\,y_n.$$

Para $B_n = 2^n n!$ la fórmula de Rodrigues viene dada mediante:

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,y_n(x) \;=\; \frac{(-1)^n}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}].$$

Además, satisfacen la relación de recurrencia:

$$\begin{aligned}2n(n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \;&=\; (2n+\alpha+\beta-1)[(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta-2)x+\alpha^2-\beta^2]\,P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x)\\ &\quad -2(n+\alpha-1)(n+\beta-1)(2n+\alpha+\beta)\,P_{n-2}^{(\alpha,\beta)}(x),\end{aligned}$$

con $P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$ y $P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta+2)x + \dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

Los polinomios de Jacobi deben su nombre a Karl Gustav Jacob Jacobi $(1804-1851)$, quien los introdujo en 1850 y pueden ser expresados en la siguiente forma explícita:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}(x-1)^k(x+1)^{n-k},$$

con coeficiente principal $a_n^{(\alpha,\beta)} = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{2n+\alpha+\beta}{n}$ y valores en los extremos de $[-1,1]$:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \quad \text{y} \quad P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n\binom{n+\beta}{n} = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}.$$

donde el $(\alpha)_n$ denota el símbolo de Pochhammer

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)$$

para $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ y $(\alpha)_0 = 1$.

Utilizando inducción matemática sobre $k \in \mathbb{Z}^+$, $1 \le k \le n$, se tiene que la derivada de orden k del polinomio de Jacobi de grado n viene expresada mediante:

$$\frac{d^k}{dx^k}\Big(P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\Big) = \frac{(n+\alpha+\beta+1)_n}{2^n}\, P_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(x).$$

Si a los polinomios de Jacobi mónicos los denotamos por $\{\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\ge 0}$, una representacón explícita para el término $n-$ ésimo de dicha sucesión es:

$$\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{2^n\, n!\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{k}\binom{n+\beta}{n-k}(x-1)^k(x+1)^{n-k}$$

y para $1 \le k \le n$,

$$\frac{d^k}{dx^k}\Big(\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}(x)\Big) = \frac{n!}{(n-k)!}\, \tilde{P}_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(x).$$

Casos particulares de polinomios de Jacobi

- **Polinomios de Legendre**, cuando $\alpha = \beta = 0$ y denotados por $\{P_n\}$.

  Despuũes de Newton y al tomar en cuenta que La Tierra no tenía esfericidad perfecta, y a la hora de los cálculos, se requerían nuevas funciones, tal como sucedió en la memoria clásica de A. M. Legendre $(1752-1833)$, sobre el movimiento de los planetas, en la cual intodujo los polinomios que hoy en día llevan su nombre. J. L. Lagrange $(1736-1813)$, ya había utilizado la relación de recurrencia que satisfacen estos polinomios:

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) = (2n+1)x\,P_n(x) - n\,P_{n-1}(x).$$

Además, cumplen con la ecuación diferencial:

$$(x^2 - 1)\, y'' \; + \; 2x + \; y' \; = \; n(n+1)\, y$$

y la fórmula de Rodrigues viene dada por:

$$P_n\,(x) \; = \; \frac{(-1)^n}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,[(1-x^2)^n].$$

También satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\langle\, P_n,\; P_m \,\rangle_{L^2([-1,1],\omega^{0,0})} \quad = \; \int_{-1}^{1} P_n(x)\, P_m(x)\; dx \; = \quad \frac{2}{(2n+1)}\,\delta_{mn}.$$

Pueden ser expresados en la siguiente forma explícita:

$$P_n(x) \quad = \quad \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x-1)^k (x+1)^{n-k}.$$

Los primeros cinco polinomios de Legendre se dan a continuación.

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \quad , P_1(x) \; = \; x, \qquad P_2(x) \; = \; \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{1}{4}(10x^3 - 6x), \qquad P_4(x) \; = \; \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3). \end{aligned}$$

En la siguiente figura se presentan las gráficas en el intervalo $[-1, 1]$.

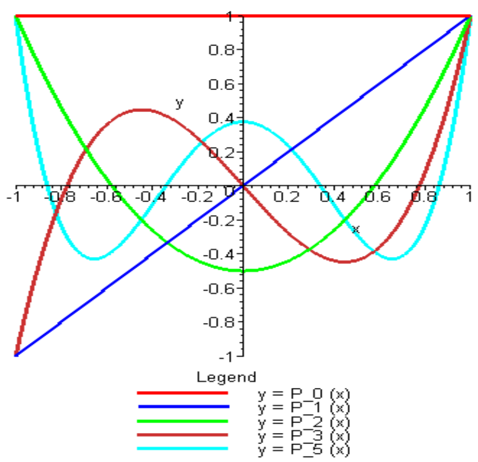

Figura A.3: Polinomios de Legendre

- **Polinomios de Chebyshev de primer tipo**: en caso de que $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ y denotados por $\{T_n\}$.

  En 1854, P. L. Chebyshev al investigar sobre algunos mecanismos que transformaban la energía de rotación en energía de traslación, introdujo los hoy conocidos polinomios de Chebyshev. En su memoria, *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes*, encontró la mejor aproximación polinómica uniforme de una función continua en un cierto intervalo (a, b), hallando que los polinomios de Chebyshev de primer tipo, T_n, son la solución al problema extremal.

  Estos polinomios satisfacen la siguiente relación de recurrencia :

  $$T_{n+1}(x) \;=\; 2x\,T_n(x)\; - T_{n-1}(x),$$

  la cual, utilizando la definición trigonométrica de T_n :

  $$T_n(x) \;=\; \cos(n(\arccos x)),$$

  también se pueden obtener de la identidad trigonométrica:

  $$\cos(n+1)\theta \;+\; \cos(n-1)\theta \;=\; 2\cos\theta\,\cos n\theta.$$

  Además satisface la ecuación diferencial

  $$(1-x^2)\,y'' \;-\; x\,y' \;=\; n^2\,y.$$

  La fórmula de Rodrigues viene dada por:

  $$T_n\,(x) \;=\; (-1)^n\,\sqrt{1-x^2}\,\frac{2^n n!}{(2n)!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}]$$

  y cumplen con la siguiente relación de ortogonalidad:

  $$\langle\, T_n, T_m\,\rangle_{L^2([-1,1],\omega^{-1/2,\,-1/2})} \;=\; \int_{-1}^{1} U_n(x)\,U_m(x)\,\sqrt{1-x^2}\,dx \;=\; 0 \;\text{ si }\; m \neq n.$$

  Su expresión explícita es:

  $$T_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k}^2 x^{n-2k}(1-x^2)^k.$$

  Los cinco primeros polinomios de Chebyshev de primer tipo vienen expresados mediante:

  $$\begin{array}{lll} T_0(x) \equiv 1, \quad T_1(x) = x, & & T_2(x) = 2x^2 - 1, \\ T_3(x) = 4x^3 - 3x), & & T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1. \end{array}$$

  A continuación se presentan las gráficas en el intervalo $[-1, 1]$.

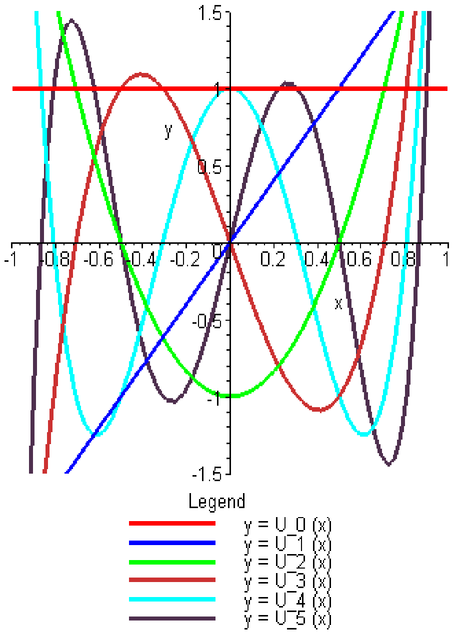

Figura A.4: Polinomios de Chebyshev de Primer tipo

- **Polinomios de Chebyshev de segundo tipo**: si $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ y denotados por $\mathcal{U}_n$.

  Los polinomios de Chebyshev de segundo tipo, surgen en la teoría de momento angular. Son un caso particular de los polinomios de Gegenbauer que veremos más adelante y satisfacen la siguiente relación de recurrencia:

$$\mathcal{U}_{n+1}(x) \;=\; 2x\,\mathcal{U}_n(x) \;-\mathcal{U}_{n-1}(x).$$

  La definición trigonométrica de $\mathcal{U}_n$ viene dada por

$$\mathcal{U}_n(x) \;=\; \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}, \quad x = \cos\theta \;\in\; [-1,1].$$

  Cumplen con la ecuación diferencial:

$$(1-x^2)\,y'' \;-\; 3x\,y' \;=\; -n(n+2)\,y$$

  y con la fórmula de Rodrigues:

$$\mathcal{U}_n\,(x) \;=\; \frac{(-1)^n}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{2^n n!}{(2n)!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}].$$

  La relación de ortogonalidad, está dada por:

$$\langle\,\mathcal{U}_n,\mathcal{U}_m\,\rangle_{L^2([-1,1],\omega^{1/2,1/2})} \;=\; \int_{-1}^{1}\mathcal{U}_n(x)\,\mathcal{U}_m(x)\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \;=\; \begin{cases} (n+1)\pi, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Su expresión explícita viene dada mediante:

$$\mathcal{U}_n(z) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n+1}{2k+1} x^{n-2k} \, (x^2-1)^k.$$

Por otra parte, observemos que diferenciando $T_n(x) = \cos n\theta$ con respecto a x, obtenemos que:

$$T_n'(x) = \left(\frac{d}{d\theta}\cos n\theta\right)\frac{d\theta}{dx} = \frac{-n\sin n\theta}{-\sin\theta} = n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} = n\mathcal{U}_{n-1}(x), \qquad x = \cos\theta.$$

Así, podemos relacionar los polinomios de Chebyshev de primer y segundo tipo, mediante:

$$\mathcal{U}_{n-1}(x) = \frac{1}{n}\, T_n'(x)$$

para cada $n \in \mathbb{Z}^+$. Entre otras fórmulas que los relacionan, están

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_n(x) - \mathcal{U}_{n-2}(x) &= 2T_n(x). \\ T_{n-1}(x) &= \mathcal{U}_n(x) - x\mathcal{U}_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Los seis primeros polinomios de Chebyshev de Segundo tipo son:

$$\begin{array}{lllllllll} \mathcal{U}_0(x) & = & 1, & \mathcal{U}_1(x) & = & 2x, & \mathcal{U}_2(x) & = & 4x^2-1, \\ \mathcal{U}_3(x) & = & 8x^3-4x, & \mathcal{U}_4(x) & = & 16x^4-12x^2+1, & \mathcal{U}_5(x) & = & 32x^5-32x^3+6x. \end{array}$$

A continuación se presentan las gráficas en el intervalo $[-1,1]$.

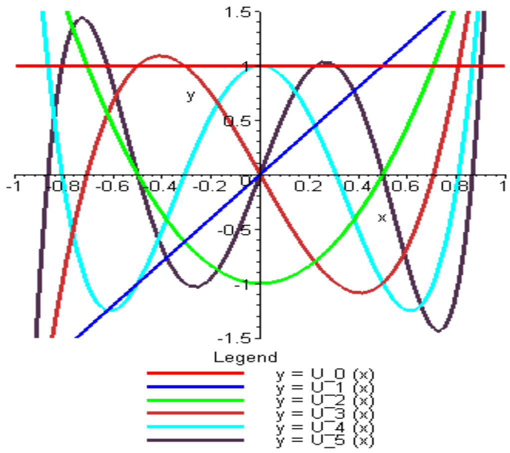

Figura A.5: Polinomios de Chebyshev de Segundo tipo

- **Polinomios de Gegenbauer** o **Ultraesféricos**: con $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$ y usualmente se denota al $n-$ésimo polinomio de Gegenbauer mediante C_n^{λ}.

  Estos polinomios deben su nombre a L. B. Gegenbauer $(1849 - 1903)$, quien fue alumno de K. Weierstrass y L. Kronecker. Tienen aplicaciones en diversas áreas de las Matemáticas, como la Geometría Diferencial, en donde aparecen de manera natural para parámetros $\lambda = n \in \mathbb{N}$ y en las isometrías de la hiperesfera por lo que también son llamados polinomios ultraesféricos. Son polinomios ortogonales con respecto al peso de Gegenbauer $\omega(x) = \omega^{\lambda}(x) = (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ en $[-1,1]$ y la integrabilidad de este peso está garantizada por la condición de que $\lambda > -\frac{1}{2}$.

  Siguiendo la notación de Szegö en [73], los polinomios de Gegengauer pueden ser expresados de la siguiente forma explícita:

$$C_n^{\lambda}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (\lambda)_{n-k}}{k!\,(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$

  y también en términos de los polinomios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$, con $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$, por

$$\begin{aligned} C_n^{\lambda}(x) &= \frac{\Gamma(\lambda+1/2)}{\Gamma(2\lambda)} \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(n+\lambda+1/2)} P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})}(x) \\ &= \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda+1/2)_n} P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})}(x) \end{aligned}$$

  donde $(\lambda)_n$ es el símbolo de Pochhammer.

  En 1884, Gegenbauer en *Zur Theorie der Functionen* $C_n^{\nu}(x)$, llegó a la siguiente expresión:

$$C_n^{(\mu)}(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} a_{k,n}\, C_{n-2k}^{(\lambda)}(x),$$

  donde

$$a_{k,n}(x) = \frac{\Gamma(\lambda)\,(n-2k+\lambda)\,\Gamma(k+\mu-\lambda)\,\Gamma(n-k+\mu)}{\Gamma(\mu)\,k!\,\Gamma(\mu-\lambda)\,\Gamma(n-k+\lambda+1)},$$

  para $\mu > \lambda > -1$.

  Estos polinomios satisfacen la llamada ecuación diferencial de Gegenbauer:

$$(1-x^2)\,y''(x) - (2\lambda+1\lambda)\,y' + n(n+2\lambda)\,y = 0.$$

  La fórmula de Rodrigues viene expresada mediante:

$$(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(-2)^n\,(\lambda)_n}{n!\,(n+2\lambda)_n} \frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}+n}\right\}.$$

  Cumplen la relación de ortogonalidad:

$$\left\langle C_n^{\lambda}, C_m^{\lambda} \right\rangle_{L^2([-1,1],\omega^{\lambda})} = \frac{\pi\, 2^{1-2\lambda}\,\Gamma(n+2\lambda)}{n!\,(n+\lambda)\,[\Gamma(\lambda)]^2}\,\delta_{nm}$$

y satisfacen la siguiente relación de recurrencia:

$$n\, C_n^{\lambda}(x) \;=\; 2(n+\lambda-1)\, x\, C_{n-1}^{\lambda}(x) \;-\; (n+2\lambda-2)\, C_{n-2}^{\lambda}(x),$$

para $n = 2, 3, \ldots,$ con $C_0^{\lambda}(x) \equiv 1$ y $C_1^{\lambda}(x) = 2\lambda x$.
Una expresión explícita viene dada por:

$$C_n^{\lambda}(x) \;=\; \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k\, \Gamma(n-k+\lambda)}{\Gamma(\lambda)\, k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}.$$

Notemos que

$$C_{2k}^{\lambda}(0) \;=\; \frac{(-1)^k\, (\lambda)_k}{k!(n-2k)!} \quad \text{y} \quad C_{2k+1}^{\lambda}(0) \;=\; 0.$$

Además

$$C_n^{\lambda}(-x) \;=\; (-1)^n\, C_n^{\lambda}(x) \qquad \text{y} \qquad C_n^{\lambda}(1) \;=\; \frac{(2\lambda)_n}{n!}.$$

Cabe destacar que cuando $\alpha = 0$, $C_0^{\lambda}(x) \equiv 1$, y $C_n^{\lambda}(x) = \dfrac{2}{n}\, T_n(x)$ para $n > 0$, donde $T_n(x)$ es el polinomio de Chebyshev de Primer tipo de grado n.
Algunos ejemplos de polinomios de Gegenbauer son:

$$\begin{array}{lcllcllcl}
C_2^0(x) & = & 2x^2 - 1, & C_0^2(x) & = & 1, & C_3^2(x) & = & 32x^3 - 12x, \\
C_4^2(x) & = & 80x^4 - 48x^2 + 3, & C_3^1(x) & = & 8x^3 - 4x, & C_4^1(x) & = & 16x^4 - 12x^2 + 1.
\end{array}$$

Con gráficas,

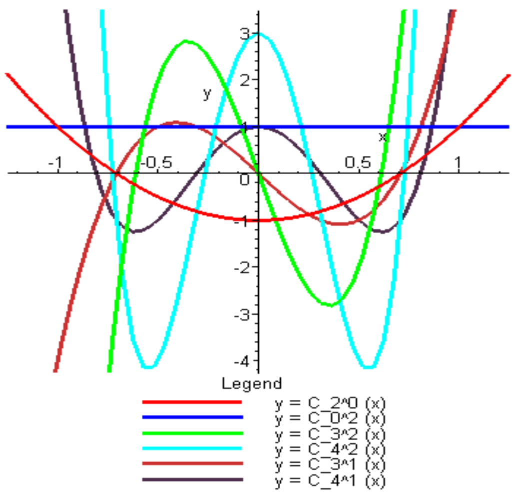

Figura A.6: Polinomios de Gegenbauer

A.1.4. Polinomios de Bessel

Los polinomios de Bessel denotados por $B_n^{(\alpha)}$, constituyen una familia uniparamétrica de parámetro α, donde $\alpha \neq -2, -3, -4, \ldots$ No corresponden a un caso positivo debido a que la medida de ortogonalidad no es positiva. Aunque estos polinomios habían sido considerados por muchos matemáticos, fueron H. L. Krall y O. Frink quienes lo presentaron formalmente en 1949 en su artículo *A new class of orthogonal polynomials* y les dieron el nombre por su relación con las funciones de Bessel.

Estos polinomios satisfacen la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\left\langle B_n^{(\alpha)}, B_m^{(\alpha)} \right\rangle_{L^2(\mathcal{T},\omega)} = \int_{\mathcal{T}} B_n^{(\alpha)}(z)\, B_m^{(\alpha)}(z) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a+k+1)} \left(-\frac{2}{z}\right)^k dz = \frac{2(-1)^{n+1} n!}{(2n+\alpha+1)\,(\alpha+1)_n}\, \delta_{mn}$$

donde $\mathcal{T} := \{|z| = 1\}$.

Al considerar la función peso $\omega(x) = \dfrac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a+k+1)} \left(-\dfrac{2}{x}\right)^k$ con $\alpha > -2$, $\sigma(x) = x^2$ y $\tau(x) = (\alpha+2)x + 2$ en $(A{,}12)$, obtenemos que los polinomios de Bessel satisfacen la ecuación diferencial:

$$x^2\, y''(x) - [(\alpha+2)x + 2]\, y'(x) = n(n+\alpha+1)\, y.$$

La fórmula de Rodrigues viene dada por:

$$B_n^{\alpha}(x) = 2^{-n}\, x^{-\alpha}\, e^{2/x} \frac{d^n}{dx^n} [x^{2n+\alpha} e^{-2x}].$$

Además cumplen con la siguiente relación de recurrencia a tres términos:

$$2(n+\alpha+1)\,(2n+\alpha)\, B_n^{\alpha}(x) = (2n+\alpha)\,[(2n+\alpha+2)x + 2\alpha] B_{n-1}^{\alpha}(x) + 2n\,(2n+\alpha+2)\, B_{n-2}^{\alpha}(x).$$

Una representación explícita está dada por:

$$B_n^{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n+\alpha+1)_k \left(\frac{x}{2}\right)^k$$

Algunos ejemplos de estos polinomios, se indican a continuación

$$\begin{aligned}
B_2^0(x) &= 3x^2 + 3x + 1,\\
B_3^0(x) &= 15x^3 + 15x^2 + 6x + 1,\\
B_4^0(x) &= 105x^4 + 105x^3 + 45x^2 + 10x + 1.
\end{aligned}$$

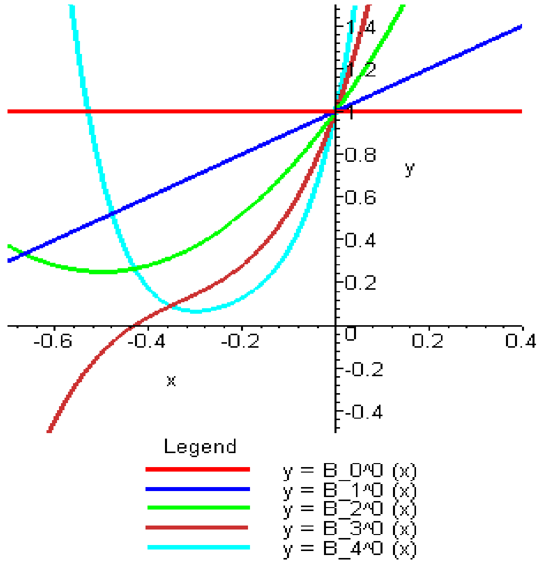

Figura A.7: Polinomios de Bessel

A.2. Ortogonalidad tipo Sobolev

En contraste a los polinomios ortogonales considerados hasta ahora, el producto interno presentado en esta sección no sólo envuelve valores de las funciones, sino también valores de las derivadas. Un producto interno de Sobolev sobre el espacio $\mathbb{P}$ o sobre el espacio $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ es, esencialmente, un producto interno que involucra a las derivadas de los polinomios hasta un cierto orden.

Por el momento nos restringimos a la definición de producto de Sobolev sobre el espacio de los polinomios, que admiten derivada de cualquier orden y que son integrables con respecto a cualquier medida finita de Borel.

En el espacio vectorial $\mathbb{P}(\mathbb{C})$ introducimos el siguiente producto interior,

$$\langle P, Q\rangle_S := \sum_{k=0}^{m} \int_E P^{(k)}(x)\,\overline{Q^{(k)}(x)}\,d\mu_k(x) = \sum_{k=0}^{m} \langle P^{(k)}, Q^{(k)}\rangle_{L^2(E,\mu_k)} \,, \tag{A.14}$$

donde los superíndices entre paréntesis denotan el orden de derivación, $\{\mu_k\}_{k=0}^{m}$, con $m \in \mathbb{Z}^+$ fijo, un sistema de $m+1$ medidas finitas de Borel con soporte $\Delta_k \subset E \subset \mathbb{R}$, para $k = 0, 1, \cdots, m$. Supondremos que al menos el soporte de μ_0 contiene una cantidad infinita de puntos y, para evitar casos triviales, que μ_m no es la medida nula. Si E es un conjunto no acotado, supondremos además que x^n es μ_k−integrable en E para cada k y todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Al producto definido en $(A{,}14)$ lo llamaremos *producto de Sobolev de orden* m.

La norma asociada a $(A,14)$ se denomina *norma de Sobolev* y viene dada por:

$$\|f\|_S = \{\langle f, f\rangle_S\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\sum_{k=0}^{m}\langle f^{(k)}, f^{(k)}\rangle_{L^2(\mu_k)}\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{\sum_{k=0}^{m}\|f^{(k)}\|^2_{L^2(\mu_k)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Una familia de polinomios $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ es ortogonal con respecto a $(A,14)$, si para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $grad(Q_n) = n$ y

$$\langle Q_n, Q_m\rangle_S \begin{cases} \neq 0, & n = m,\\ = 0, & n \neq m.\end{cases}$$

En tal caso diremos que Q_n es el n-ésimo *polinomio ortogonal de Sobolev* respecto a $(A,14)$. Si además se tiene que $\langle Q_n, Q_n\rangle_S = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que la familia $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$, es ortonormal.

Se han estudiado propiedades algebraicas y diferenciales de los polinomios $\{Q_n\}$ ortogonales con respecto a $(A,14)$ cuando las medidas $\mu_k = \mu$ para cada k. En particular, se deduce una relación algebraica y otra relación diferencial entre $\{Q_n\}$ y la sucesión $\{P_n\}$ de polinomios ortogonales mónicos respecto a μ, bajo la hipótesis de que μ, es una medida que satisface una ecuación diferencial de Pearson y algunas condiciones extras. Por ejemplo, si consideramos en $(A,14)$, $\mu_k(x) = \exp(-x^4)$ para cada $k = 0, 1, \ldots, m$ y $x \in \mathbb{R}$, obtenemos el siguiente producto interno de Sobolev, definido en $\mathbb{P}$:

$$\langle P, Q\rangle_S := \int_{\mathbb{R}} P(x)\, Q(x)\, \exp(-x^4) d(x) + \sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}} P^{(k)}(x) Q^{(k)}(x)\, \exp(-x^4) d(x), \tag{A.15}$$

Los polinomios $\{Q_n\}$ ortogonales con respecto a $(A,15)$, son un caso particular de los llamados polinomios de Freud-Sobolev. En [12], los autores prueban que los polinomios de $\{Q_n\}$ satisfacen una relación de recurrencia a $(2m+3)-$ términos.

En general, el estudio de este producto interno, así como sus correspondientes sucesiones de polinomios ortogonales, es relativamente nuevo y se ha llevado a cabo de manera exhaustiva durante los últimos años. La mayoría de los resultados han sido obtenidos para $m = 1$ (ver [4], [43], [49],[46] y [51]):

$$\langle P, Q\rangle_S := \int_E P(x)\overline{Q(x)} d\mu_0(x) + \int_E P'(x)\overline{Q'(x)} d\mu_1(x) \tag{A.16}$$

o

$$\langle P, Q\rangle_S := \int_E P(x)\overline{Q(x)} d\mu_0(x) + \lambda P'(c)\overline{Q'(c)} \quad \lambda > 0. \tag{A.17}$$

El producto de Sobolev $(A,16)$ es un ejemplo de los denominados *productos internos de Sobolev continuos* o caso no discreto. En los años comprendidos entre 1962 y 1973, este producto de Sobolev fue estudiado cuando $d\mu_0$ y $d\mu_1$ están definidas mediante funciones de peso continuas. De 1991 a 1995, las medidas involucradas en la definición $(A,16)$, forman el llamado *par de medidas coherentes* (ver definición A.2.1 más adelante), medidas tales que los polinomios ortogonales asociados a la medida $d\mu_1$ cumplen una relación con ciertas derivadas de los polinomios ortogonales asociados a $d\mu_0$. En el período comprendido entre los años 1988 y 1995, el estudio fue orientado especialmente para productos interno de Sobolev del tipo $(A,17)$, éste es un ejemplo del caso discreto.

En general, el estudio de los polinomios ortogonales de Sobolev se ha enfocado desde puntos de vista formalmente diferentes, según el tipo de producto interno de Sobolev involucrado (ver [43]):

(a) El caso no diagonal, el cual estudia polinomios ortogonales respecto a productos internos de la forma

$$\langle f,g\rangle_S \;=\; \int_I F(x)AG^t(x)\,d\mu(x)$$

donde I es un intervalo real, acotado o no, μ es una medida de Borel absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue en I. Los vectores F y G vienen expresados por

$$F(x) \;=\; (f(x), f'(x),\cdots, f^{(m)}(x)), \qquad G(x) \;=\; (g(x), g'(x),\cdots, g^{(m)}(x))$$

y A es una matriz simétrica semidefinida positiva de orden $m+1\times m+1$. Este caso ha sido ampliamente estudiado cuando A es una matriz diagonal.
De igual manera han sido objeto de estudio polinomios ortogonales respecto a productos internos de la forma

$$\langle f,g\rangle_S \;=\; \int_I F(z)\overline{AG^t(z)}\,d\mu(z)$$

donde μ es una medida de Borel compleja, positiva y tal que para n dado, $z^n \in L^1(\mu)$, cuyo soporte contiene una cantidad infinita de puntos, los vectores F y G vienen expresados por

$$F(z) \;=\; (f(z), f'(z),\cdots, f^{(m)}(z)), \qquad G(z) \;=\; (g(z), g'(z),\cdots, g^{(m)}(z))$$

y A es una matriz hermitiana definida positiva de orden $m+1\times m+1$.

(b) El caso continuo corresponde al estudio de polinomios ortogonales respecto al producto interno de Sobolev definido en $(A,14)$, en donde las medidas involucradas satisfacen que $d\mu_k(x) = \omega_k(x)dx$, donde ω_k es alguna función peso clásica.

(c) El caso discreto, donde los soportes de cada una de las medidas μ_k con $k=1,\cdots,m$ de $(A,14)$, contienen un número finito de puntos. Por ejemplo,

$$\langle f,g\rangle_S \;=\; \int f(x)g(x)\,d\mu_0(x) \;+\; \lambda f'(\xi)g'(\xi),$$

es un caso particular de A.14, cuando $m=1$, $d\mu_1=\delta_\xi$, donde δ_ξ es la delta de Dirac en ξ.

(d) Si se considera el caso en que en el producto de Sobolev, $m=1$, la primera medida de ortogonalidad, μ_0 es discreta y μ_1 es no discreta digamos

$$\langle P,Q\rangle_S \;=\; P(c)Q(c) \;+\; \lambda\int P'(x)Q'(x)d\mu_1(x),$$

el producto de Sobolev es denominado *discreto-continuo*.

En 1996, T. E. Pérez y M. A. Piñar presentaron en [62], un primer ejemplo de este tipo de producto de Sobolev. En particular, los autores estudian los polinomios ortogonales generalizados de Laguerre, L_n^α, para el caso en que $\alpha=-1$ y $c=0$, como un ejemplo canónico de polinomios ortogonales con respecto a tal tipo de productos internos. Observemos que esta sucesión de polinomios no es ortogonal con respecto a una medida de Borel positiva. Sin embargo, es ortogonal con respecto al producto de Sobolev,

$$\langle P, Q\rangle_S \;=\; P(0)Q(0) \;+\; \lambda \int P'(x)Q'(x)\exp(-x)\,dx.$$

Una extensión natural de este producto interno está dado en [25], donde se estudian algunas propiedades de la sucesión de polinomios ortogonales con respecto a una forma bilineal considerada.

En 1947, D. C. Lewis en [33], planteó un problema que puede ser reformulado de la siguiente manera:

Sean $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$, funciones monótonas crecientes definidas en $[a, b]$ y f una función definida también en $[a, b]$ y la cual satisface ciertas condiciones de regularidad (ver [51] y [33]). Considere el producto interno de Sobolev en $\mathbb{P}_n$, dado por $(A,14)$ y donde $E = [a, b]$:

$$\langle P, Q\rangle_S := \sum_{k=0}^{m} \int_a^b P^{(k)}(x)\, Q^{(k)}(x)\, d\mu_k(x) = \sum_{k=0}^{m} \langle P^{(k)},\ Q^{(k)}\rangle_{L^2([a,b],\mu_k)}\,. \tag{A.18}$$

Dada una función f, determinar un polinomio $P \in \mathbb{P}_n$ tal que la norma Sobolev $\|f - P\|_S$ sea mínima.

La solución al problema sigue al considerar $\{S_n\}_{n\geq 0}$, la sucesión de polinomios ortonormales con respecto al producto interno de Sobolev $(A,18)$. Entonces cada $S_n(x)$ puede ser expresado de manera explícita, aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt sobre $1, x, x^2, \ldots$ Entonces,

$$P(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} c_k S_k(x)$$

donde $c_k = \langle f, S_k\rangle_S$.

Lewis no dió esta interpretación, simplemente comentó que el problema da un sistema $n+1$ ecuaciones para $n+1$ coeficientes de P, el cual tiene una única solución si $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ son funciones con una cantidad suficiente de puntos de crecimiento. Su resultado principal es una representación integral para $f - P$.

Aunque Lewis en su trabajo no trata con polinomios ortogonales, su investigación puede ser considerada como el punto de partida de la teoría de polinomios ortogonales en espacios de Sobolev, debido a que los siguientes autores utilizaron su trabajo como una motivación para desarrollar tal teoría.

En el año de 1962 (ver [51]), P. Althammer presentó el primer trabajo sobre el tema en sí. Recordó el problema de Lewis y lo interpretó en términos de polinomios ortogonales. Sin embargo, señaló que en el caso general, la analogía entre los polinomios ortogonales $\{S_n\}_{n\geq 0}$ y los polinomios ortogonales estándar, no podría ir muy lejos. Althammer consideró el siguiente ejemplo de producto interno de Sobolev:

Ejemplo A.2.1

$$\langle P, Q\rangle_S \;=\; \int_{\Delta_0} P(x)Q(x)d\mu_0(x) + \int_{\Delta_1} P'(x)Q'(x)d\mu_0(x) \tag{A.19}$$

donde $\Delta_j = [-1,1]$ *para* $j = 0,1,$

$$d\mu_0(x) = dx \quad y \quad d\mu_0(x) = \begin{cases} 10dx, & si \ -1 \leq x < 0 \\ dx, & si \ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Los polinomios ortogonales mónicos respecto al producto $(A,19)$, denominados polinomios de Althammer y denotados por A_n, no poseen una formulación cómoda, por ello solo nos limitaremos a mostrar los cinco primeros elementos de la sucesión:

$$\begin{aligned}
A_0(x) &= 1 \\
A_1(x) &= x \\
A_2(x) &= x^2 + \frac{27}{35}x - \frac{1}{3} \\
A_3(x) &= x^3 + \frac{74115}{124450}x^2 - \frac{64431}{124450}x - \frac{24705}{124450} \\
A_4(x) &= x^4 + \frac{844033050}{1873273045}x^3 - \frac{2060017890}{1873273045}x^2 - \frac{968801175}{1873273045}x + \frac{312018021}{1873273045} \\
A_5(x) &= x^5 + \frac{83323629088875}{171550139740686}x^4 - \frac{214250266242530}{171550139740686}x^3 - \frac{104937613933950}{171550139740686}x^2 \\
&+ \frac{26730969323265}{171550139740686}x + \frac{18314478826875}{171550139740686}
\end{aligned}$$

Observemos que $A_2(x)$, tiene un raíz en $x = -1,08$ fuera del intervalo de ortogonalidad $(-1,1)$. Althammer consideró que esto era una razón suficiente para dejar de lado el problema general y se limitó al producto interior especial:

Ejemplo A.2.2

$$\langle P, Q\rangle_S = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,dx + \lambda \int_{-1}^{1} P'(x)Q'(x)\,dx \tag{A.20}$$

con $\lambda > 0$.

Este producto es una generalización del producto interno de Legendre y recibe el nombre de producto interno Legendre-Sobolev . Sus polinomios ortogonales asociados pueden verse como generalizaciones de los polinomios clásicos de Legendre. Althammer argumentó que hallar una raíz fuera del intervalo de ortogonalidad, es un fenómeno frecuente en la teoría de polinomios ortogonales de Sobolev. Probó que si $\{S_n^\lambda\}$ es la sucesión de polinomios ortogonales asociados a $(A,20)$, entonces $\{S_n^\lambda\}$ tiene n raices reales simples en $(-1,1)$, halló una expresión de la ecuación diferencial que satisface S_n y una relación de recurrencia para la derivada de S_n (ver [51]).

Para $\lambda > 0$, tenemos los primeros seis polinomios mónicos ortogonales con respecto a $(A,20)$:

$$
\begin{aligned}
S_0^{\lambda}(x) &= 1\\
S_1^{\lambda}(x) &= x\\
S_2^{\lambda}(x) &= x^2 - \frac{2}{3}\\
S_3^{\lambda}(x) &= x^3 - \frac{3(5\lambda+1)}{5(3\lambda+1)}x\\
S_4^{\lambda}(x) &= x^4 - \frac{6(21\lambda+1)}{7(15\lambda+1)}x^2 + \frac{3(35\lambda+1)}{35(15\lambda+1)}\\
S_5^{\lambda}(x) &= x^5 - \frac{25(135\lambda^2+57\lambda+1)}{21(105\lambda^2+45\lambda+1)}x^3 + \frac{5(189\lambda^2+77\lambda+1)}{21(105\lambda^2+45\lambda+1)}x\\
S_6^{\lambda}(x) &= x^6 - \frac{105(1155\lambda^2+125\lambda+1)}{77(945\lambda^2+105\lambda+1)}x^4 + \frac{35(1485\lambda^2+153\lambda+1)}{77(945\lambda^2+105\lambda+1)}x^2 - \frac{5(2079\lambda^2+189\lambda+1)}{231(945\lambda^2+105\lambda+1)}
\end{aligned}
$$

En 1972, J. Brenner consideró el siguiente producto interno (ver [51]):

Ejemplo A.2.3

$$\langle P, Q\rangle_S = \int_0^{\infty} P(x)\,Q(x)\,\exp(-x)d(x) + \lambda \int_{-1}^{1} P'(x)\,Q'(x)\,\exp(-x)d(x) \quad \lambda > 0.$$

Este producto es una generalización del producto interno de Laguerre con $\alpha = 0$. Sus resultados son similares a los obtenidos por Althammer a excepción de la fórmula de recurrencia (ver [51]).

Los primeros polinomios mónicos ortogonales Laguerre- Sobolev, son los siguientes:

$$
\begin{aligned}
G_0^{\lambda}(x) &= 1\\
G_1^{\lambda}(x) &= x - 1\\
G_2^{\lambda}(x) &= x^2 - \frac{2(\lambda+2)}{(\lambda+1)}x + \frac{2}{\lambda+1}\\
G_3^{\lambda}(x) &= x^3 - \frac{3(2\lambda^2+7\lambda+3)}{\lambda^2+3\lambda+1}x^2 + \frac{6(\lambda^2+4\lambda+3)}{\lambda^2+3\lambda+1}x - \frac{6}{\lambda^2+3\lambda+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_4^{\lambda}(x) &= x^4 - \frac{4(3\lambda^3+16\lambda^2+21\lambda+4)}{\lambda^3+5\lambda^2+6\lambda+1}x^3 + \frac{12(3\lambda^3+17\lambda^2+25\lambda+6)}{\lambda^3+5\lambda^2+6\lambda+1}x^2 \\
& - \frac{24(\lambda^3+6\lambda^2+10\lambda+4)}{\lambda^3+5\lambda^2+6\lambda+1}x + \frac{24}{\lambda^3+5\lambda^2+6\lambda+1} \\
G_5^{\lambda}(x) &= x^5 - \frac{5(4\lambda^4+29\lambda^3+65\lambda^2+40\lambda+5)}{\lambda^4+7\lambda^3+15\lambda^2+10\lambda+1}x^4 + \frac{20(6\lambda^4+45\lambda^3+100\lambda^2+81\lambda+10)}{\lambda^4+7\lambda^3+15\lambda^2+10\lambda+1}x^3 \\
& - \frac{60(4\lambda^4+31\lambda^3+77\lambda^2+65\lambda+10)}{\lambda^4+7\lambda^3+15\lambda^2+10\lambda+1}x^2 - \frac{120}{\lambda^4+7\lambda^3+15\lambda^2+10\lambda+1}
\end{aligned}
$$

En el mismo año, F. W. Schäfke retoma el producto interno $(A,20)$. Simplifica los cálculos de Althammer utilizando la normalización $S_n^{\lambda}(1) = 1$.

Finalmente, E. A. Cohen en 1975, introduce el nombre de "espacio de Sobolev ". El probó que para $\lambda > \frac{n}{2}$ las raices de S_n^{λ} se intercalaban con los del polinomio de Legendre P_{n-1}.

Otros ejemplos de productos de Sobolev y algunos polinomios ortonormales respecto de cada producto interno, se dan a continuación.

Ejemplo A.2.4 *Al considerar en* $\mathbb{P}$ *el producto interno:*

$$
\langle P, Q\rangle_S = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)exp(-x^2)\,d(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)Q'(x)exp(-x^2)\,d(x),
$$

tenemos que, en contraste a los ejemplos anteriores, se obtienen polinomios mónicos ortogonales cuyos coeficientes no dependen de λ, *obtenemos los polinomios mónicos de Hermite:*

$$
\begin{aligned}
H_0(x) &= 1 \\
H_1(x) &= x \\
H_2(x) &= x^2 - \frac{1}{2} \\
H_3(x) &= x^3 - \frac{3}{4}x \\
H_4(x) &= x^4 - 3x^2 + \frac{3}{4} \\
H_5(x) &= x^5 - 5x^3 + \frac{15}{4}x \\
H_6(x) &= x^6 - \frac{15}{2}x^4 + \frac{45}{4}x^2 - \frac{15}{18}
\end{aligned}
$$

En el siguiente ejemplo de producto interno de la forma (b) y para $m = 1$, la función peso involucrada es la función de Jacobi en el intervalolo $[-1, 1]$.

Ejemplo A.2.5 *Consideremos sobre $\mathbb{P}$, el producto interno de Sobolev definido por:*

$$\langle f, g\rangle_S = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\omega^{(\alpha,\beta)}(x)dx + \lambda \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)\omega^{(\alpha,\beta)}(x)dx \tag{A.21}$$

donde $\omega^{(\alpha,\beta)} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *es la función peso Jacobi expresada por:*

$$\omega^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$$

con $\alpha, \beta > -1$ *y* $\lambda > 0$.

Observemos que si en $(A,21)$ $\lambda = 0$, obtenemos el producto interno con peso Jacobi:

$$\langle f, g\rangle_{\omega^{(\alpha,\beta)}} = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\omega^{(\alpha,\beta)}(x)dx \tag{A.22}$$

Sean $\{\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\geq 0}$ y $\{Q_n^{(\alpha,\beta)}(\cdot,\lambda)\}_{n\geq 0}$ la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Jacobi y Jacobi-Sobolev mónicos con respecto a $\langle\, ,\, \rangle_{\omega^{(\alpha,\beta)}}$ y $\langle\, ,\, \rangle_S$, respectivamente. Es inmediato que los primeros dos polinomios de la sucesión $\{Q_n^{(\alpha,\beta)}(\cdot,\lambda)\}_{n\geq 0}$ coinciden con los dos primeros polinomios de la sucesión $\{\tilde{P}_n^{(\alpha,\beta)}\}_{n\geq 0}$, es decir,

$$\begin{aligned} Q_0^{(\alpha,\beta)}(x,\lambda) &= 1 = \tilde{P}_0^{(\alpha,\beta)}(x) \\ Q_1^{(\alpha,\beta)}(x,\lambda) &= x + \frac{(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta+2)} = \tilde{P}_1^{(\alpha,\beta)}(x) \end{aligned}$$

Para grados mayores, ambas sucesiones son diferentes y los polinomios $Q_n^{(\alpha,\beta)}(\cdot,\lambda)$ pueden ser expresados en términos de los momentos asociados al producto interno de Jacobi $(A,22)$

$$m_j = \langle 1, x^j\rangle_{\omega^{\alpha,\beta}} = \int_{-1}^{1} x^j\omega^{\alpha,\beta}(x)dx \qquad j = 0, 1, \ldots$$

De la siguiente forma:

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x,\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ \frac{m_1}{\lambda} & \frac{m_2}{\lambda} + m_0 & \cdots & \frac{m_{n+1}}{\lambda} + nm_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{m_{n-1}}{\lambda} & \frac{m_n}{\lambda} + (n-1)m_{n-2} & \cdots & \frac{m_{2n-1}}{\lambda} + n(n-1)m_{2n-3} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_{n-1} \\ \frac{m_1}{\lambda} & \frac{m_2}{\lambda} + m_0 & \cdots & \frac{m_n}{\lambda} + (n-1)m_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{m_{n-1}}{\lambda} & \frac{m_n}{\lambda} + (n-1)m_{n-2} & \cdots & \frac{m_{2n-2}}{\lambda} + (n-1)^2m_{2n-4} \end{vmatrix}}. \tag{A.23}$$

Notemos que cada coeficiente de $Q_n^{(\alpha,\beta)}(\cdot,\lambda)$ en (A.23), es una función racional en λ, cuyo numerador y denominador tienen grado $n-1$. Para λ suficientemente grande, obtenemos los polinomios límites $R_n^{(\alpha,\beta)}$ asociados a la sucesión de polinomios ortogonales mónicos de Jacobi-Sobolev, $\{Q_n^{(\alpha,\beta)}(\cdot,\lambda)\}_{n\geq 0}$, dada por

$$R_0^{(\alpha,\beta)}(x) = Q_0^{(\alpha,\beta)}(x,\lambda) = \tilde{P}_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1,$$

$$R_1^{(\alpha,\beta)}(x) = Q_1^{(\alpha,\beta)}(x,\lambda) = \tilde{P}_1^{(\alpha,\beta)}(x) = x + \frac{(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta+2}.$$

Para $n \geq 2$:

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_n \\ 0 & m_0 & \cdots & nm_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (n-1)m_{n-2} & \cdots & n(n-1)m_{2n-3} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_{n-1} \\ 0 & m_0 & \cdots & (n-1)m_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & (n-1)m_{n-2} & \cdots & (n-1)^2 m_{2n-4} \end{vmatrix}}.$$

Luego, $R_n^{(\alpha,\beta)}$ es un polinomio mónico, de grado n y no depende de λ.

H. Pijeira, Y. Quintana y W. Urbina en [69], para la clase de los polinomios ortogonales mónicos $\{Q_n^{(\alpha,\beta)}(\cdot,\lambda)\}_{n\geq 0}$ de Jacobi-Sobolev probaron que el menor intervalo cerrado que contiene a sus ceros reales es $[-\sqrt{1+2C}, \sqrt{1+2C}]$; donde C es una constante explícitamente determinada. Estudiaron la distribución asintótica de tales ceros, así como también analizaron el comportamiento asintótico de los polinomios ortogonales mónicos de Jacobi-Sobolev respecto a los polinomios ortogonales mónicos de Jacobi, bajo ciertas restricciones.

En 1973, F. W. Schäfke y G. Wolf publicaron un enfoque general de los producto de Sobolev. Todas las publicaciones anteriores estaban relacionadas con un productos de Sobolev en especial. El producto interno estudiado por Schäfke y Wolf puede ser reducido a la forma estándar:

$$\langle P, Q\rangle_S = \int_a^b \omega(x)\, P(x)\, B\, Q(x)\, dx \tag{A.24}$$

siendo B un operador diferencial y donde (a,b) y ω cumplen que:

i) $(a,b) = (-1,1)$ y ω es la función peso de Jacobi.

ii) $(a,b) = (0,\infty)$ y ω es la función peso de Laguerre.

iii) $(a,b) = (-\infty,\infty)$ y ω es la función peso de Hermite.

Bajo ciertas condiciones, los autores observaron que los polinomios ortogonales con respecto a $(A,24)$ son justamente los polinomios clásicos de Jacobi, Laguerre o Hermite; pero bajo otras condiciones los resultados no son tan sencillos. El trabajo de Schäfke y Wolf proporciona resultados sobre una amplia clase de productos internos e incluyen todos los resultados anteriores de Althammer y Brenner. Sin embargo, para algunos entendidos, como H. G. Meijer en [49], es difícil trasladar los resultados generales a un caso concreto.

En 1991, A. Iserles, P. E. Koch, S. P. Norsett y J. M. Sanz-Serna consideraron el producto interno (ver [24]):

$$\langle P, Q\rangle_S \;=\; \int_a^b P(x)\,Q(x)\,d\mu_0(x) \;+\; \lambda \int_a^b P'(x)\,Q'(x)\,d\mu_1(x), \tag{A.25}$$

donde μ_0 y μ_1 son funciones de distribución sobre $[a, b]$ y $\lambda \geq 0$.

Sean $\{P_n\}$ una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a $d\mu_0(x)$ y $m_{i,j} = \langle P_i, P_j\rangle_S$, entonces los polinomios ortogonales con respecto a $(A,25)$, S_n^λ, pueden ser representados por:

$$S_0^\lambda \equiv 1 \qquad \text{y} \qquad S_n^\lambda(x) \;=\; \begin{vmatrix} m_{0,0} & m_{1,0} & \cdots & m_{n,0} \\ m_{0,1} & m_{1,1} & \cdots & m_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ m_{0,n-1} & m_{1,n-1} & \cdots & m_{n,n-1} \\ P_0(x) & P_1(x) & \cdots & P_n(x) \end{vmatrix} \qquad \text{para} \qquad n \geq 1.$$

Observemos que en la primera fila solamente $m_{0,0}$ es diferente de cero y en la primera columna solamente $m_{0,0}$ y P_0. Esto implica que

$$S_n^\lambda \;=\; \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^n(\lambda)\, P_j(x),$$

para $n \geq 1$ y en donde $\alpha_j^n(\lambda)$ es un polinomio en λ de grado menor o igual a $n-1$. Se introducen una series de condiciones sobre las medidas y surgen así, los llamados *pares coherentes de medidas.*

Definición A.2.1 *Sean* $\{P_n\}$ *y* $\{Q_n\}$, *sucesiones de polinomios ortogonales con respecto a* $d\mu_0(x)$ *y* $d\mu_1(x)$, *respectivamente. El par* $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ *se denomina par coherente de medidas si existen constantes no nulas* A_n, *y* B_n, *tales que*

$$Q_n \;=\; A_n\, P'_{n+1} \;+\; B_n\, P'_n, \qquad n \geq 1.$$

Los autores probaron que si en $(A,25)$, $\{d\mu_0, d\mu_1\}$ es un par coherente de medidas, entonces la sucesión $\{S_n^\lambda\}$ de polinomios ortogonales con respecto al producto interno $(A,25)$, tiene una estructura interesante (ver [51]).

En 1995, F. Marcellan y J. C. Petronilho, estudiaron este problema de una manera más general, al considerar a μ_0 y μ_1 funcionales lineales cuasi definidas sobre $\mathbb{P}$. Resolvieron completamente el problema para el caso en que uno de los funcionales sea uno clásico, es decir, Hermite, Laguerre, Jacobi o Bessel. Para otros resultados sobre par de medidas coherentes el lector puede consultar [51] y [49].

A continuación consideremos sobre $\mathbb{P}$, los siguientes productos internos de Sobolev.

Ejemplo A.2.6 *Producto interno de Gegenbauer-Sobolev definido en* $[-1,1]$:

$$\langle f,g\rangle_S = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,(1-x^2)^{\alpha-1/2}\,dx \;+\; \lambda \int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)(1-x^2)^{\alpha-1/2}\,dx, \qquad (A.26)$$

con $\alpha > 1/2$ *y* $\lambda \geq 0$.

Claramente, si $\lambda = 0$, tenemos el clásico producto interno de Gegenbauer. Luego supondremos que $\lambda > 0$. El producto interno $(A{,}26)$, es definido positivo y por lo tanto existe la correspondiente sucesión de polinomios ortogonales. Los polinomios ortogonales con respecto a $(A{,}26)$ han sido estudiados por T. E. Pérez en [68]. Este producto involucra en su definición un par coherente de medidas, estudiado primeramente por A. Iserles, P. E. Koch, S. P. Norsett y J. M. Sanz-Serna en [24]. Las raíces de estos polinomios han sido estudiados por H. G. Meijer en [49], por T. E. Pérez en [68] y que todas las raíces se acumulan en $[-1,1]$ cuando $n \to \infty$ por A. Martínez-Finkelshtein, J. J. Moreno-Balcázar y H. Pijeira en [47].

Ejemplo A.2.7 *Producto interno de Freud-Sobolev definido en* $\mathbb{R}$ *(ejemplo de una medida no clásica):*

$$\langle f,g\rangle_S = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,\exp(-x^4)\,dx \;+\; \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)g'(x)\,\exp(-x^4)\,dx. \qquad (A.27)$$

En el año 2003, A. Cachafeiro, J. J. Moreno-Balcázar y F. Marcellán analizaron la conexión entre los llamados polinomios de Nevai asociados con la función de peso Freud, $\omega(x) = \exp(-x^4\,(x)$, y los polinomios asociados al producto $(A{,}27)$. Si $\{P_n\}_{n\geq 0}$ y $\{Q_n\}_{n\geq 0}$ son las sucesiones de polinomios mónicos asociados a la medida ω y a $(A{,}27)$, respectivamente, los autores probaron la siguiente expresión:

$$P_n(x) = Q_n(x) + \lambda_{n-2}Q_{n-2}(x)$$

para $n \geq 3$, y algún $\lambda_{n-2} > 0$ (ver [13]).

Con respecto al producto interno de Sobolev, caso continuo discreto, durante los últimos años varios autores han estudiado polinomios ortogonales respecto de estos productos (ver [6]):

$$\langle P,Q\rangle_S = \int_I P(x)Q(x)\,d\mu_0(x) + \sum_{k=0}^{m} M_k\,P^{(k)}(c)Q^{(k)}(c), \qquad (A.28)$$

donde μ_0 es una medida de Borel positiva y finita soportada en un intervalo I de $\mathbb{R}$, $c \notin \overset{\circ}{I}$ (el interior de I), $m \geq 1$, $M_k > 0$, para $k = 0,...,n\ \ 1$ y $M_m > 0$. Algunas propiedades de los polinomios Q_n ortogonales respecto del producto $(A{,}28)$ y en especial, la localización de los ceros de dichos polinomios ha sido considerada por ejemplo en [5], [42], [50], destacando la existencia de ceros fuera de la envoltura convexa de $I \bigcup \{c\}$ los cuales pueden ser incluso complejos (ver [6], [3], [52]). Uno de los primeros resultados sobre ceros de los polinomios Q_n, es que tienen al menos $n-(m+1)$ cambios de signo o ceros de multiplicidad impar en $\overset{\circ}{I}$ siempre que $n \geq m+1$. "Este número en $\overset{\circ}{I}$, no depende del orden de las derivadas en el producto $(A{,}28)$ sino del número de términos en la parte discreta del producto interior de Sobolev (ver [6]).

Una propiedad interesante de los polinomios clásicos es el entrelazamiento de los ceros, lo cual ocurre en el caso de que en $(A,28)$, μ_0 sea una medida absolutamente continua con respecto a una clásica y parte discreta nula. Luego, todos los ceros de Q_{n+1} se entrelazan con los de Q_n. Sin embargo, para productos tipo Sobolev con $M_k \geq 0$, los polinomios Q_n y Q_{n+1} pueden tener ceros comunes (ver [6]).

Bibliografía

[1] R. A. Adams y J. F. Fournier: *Sobolev Spaces*, Segunda Edición, Academic Press Inc., San Diego, USA, 2003.

[2] R. P. Agawal y G. V. Milovanović: *Extremal problems, inequalities, and classical orthogonal polynomials*, Journal Applied Mathematics and Computation,**128** (2002), 151-166.

[3] M. Alfaro, F. Marcellán, H. G. Meijer y M. L. Rezola: *Symmetric orthogonal polynomials for Sobolev-type inner products*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **184** (1994), 360-381.

[4] M. Alfaro, F. Marcellán y M.L. Rezola: *Orthogonal polynomials on Sobolev spaces: Old and new directions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **48** (1993), 113-131.

[5] M. Alfaro, F. Marcellán, M. L. Rezola y A. Ronveaux: *On orthogonal polynomials of Sobolev type: algebraic properties and zeros*, Journal on Mathematical Analysis, **23** (1992), 737-757.

[6] M. Alfaro y M. L. Rezola, *Ceros de polinomios ortogonales de Sobolev, Margarita Mathematica en memoria de José Javier (Chicho) Guadalupe Hernández*, Editores: Universidad de La Rioja, 569-576, España, 2001.

[7] R. Álvarez-Nodarse: *On characterizations of classical polynomials*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **196** (2006), 320-337.

[8] R. Álvarez-Nodarse: *Polinomios hipergeométricos y q-polinomios*, Monografías del Seminario Matemático García de Galdeano, Prensas Universitarias de Zaragoza, Zaragoza, España, **26** (2003).

[9] G. E. Andrews y L. L. Littlejohn: *A combinatorial interpretation of the Legendre-Stirling numbers*, Proceedings of the American Mathematical Society, **137** (2009), 2581-2590.

[10] A. I. Aptekarev, A. Draux y V. A. Kalyagin: *On the asymptotics of sharp constants in Markov-Bernstein inequalities in integral metrics with classical weight*, Communications of the Moscow Mathematical Society, **55** (2000), 173-174.

[11] P. Borwein y T. Erdélyi: *Polynomials and Polynomials Inequalities*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[12] M. I. Bueno, F. Marcellán y J. Sánchez-Ruiz: *Continuous symmetrized Sobolev inner products of order N (II)*, Electronic Transactions on Numerical Analysis **24** (2006), 55-65.

[13] A. Cachafeiro, J. J. Moreno-Balcázar y F. Marcellán: *On asymptotic properties of Freud-Sobolev orthogonal polynomials*, Journal of Approximation Theory, **125** (2003), 26-41.

[14] E. W. Cheney: *Introduction to Approximation Theory*, Mcgraw-Hill Book Co., New York, 1996.

[15] T. S. Chihara: *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1978.

[16] P. Dörfler: *A Markov Type Inequality for Higher Derivatives of Polynomials*, Monatshefte für Mathematik, **109** (1990), 113-122.

[17] P. Dörfler: *New inequalities of Markov type*, Journal on Mathematical Analysis, **18** (1987), 490-494.

[18] T. Erdélyi: *Markov-Nikolskii type inequalities for exponential sums on finite intervals*, Advances in Mathematics, **208**(2007), 135-146.

[19] T. Erdélyi: *Markov -and Bernstein- type inequalities for Müntz polynomials and exponential sums in L_p*, Journal of Approximation Theory, **104** (2000) 142-152.

[20] J. A. Favard: *Sur les polynomes de Tchebicheff*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, **200** (1935), 2052-2053.

[21] N. K. Govil y G. Labelle: *On Bernstein's inequality*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **126** (1987), 494-500.

[22] A. Guessab y G. V. Milovanović: *Weighted L^2 analogues of Bernstein's inequality and classical orthogonal polynomials*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **182** (1994) 244-249.

[23] E. Hille, G. Szegő y J. D. Tamarkin: *On some generalizations of a theorem of A. Markoff*, Duke Mathematical Journal, **3** (1937), 729-739.

[24] A. Iserles, P.E. Koch, S. Norsett y J.M. Sanz-Serna: *On polynomials orthogonal with respect to certain Sobolev inner products*, Journal of Approximation Theory **65** (1991), 151-175.

[25] I. H.Jung, K. H. Kwon y J. K. Lee: *Sobolev Orthogonal Polynomials relative to* $\lambda p(c)q(c) + \langle \tau, p'(x)q'(x) \rangle$, Communications of the Korean Mathematical Society, **12**(1997), 603-617.

[26] N. Korneichuk, L. Kudryavtsev, Vasilii S Vladimirov y V. Dzyadyk: *Sergei Mikhailovich Nikol'skii (on his eighty-fifth birthday)*, Russian Mathematical Surveys, **46** (1991), 241-250.

[27] A. Kufner y B. Opic: *How to define reasonably Weighted Sobolev Spaces*, Commentationes Mathematicae Universitatis Caroline, **25** (1984), 537-554.

[28] K. H. Kwon y D. W. Lee: *Markov-Bernstein type inequalities for polynomials*, Bulletin of the Korean Mathematical Society, **36** (1999), 63-78.

[29] G. Labelle: *Concerning polynomials on the unit interval*, Proceedings of the American Mathematical Society, **20** (1969), 321-326.

[30] P. Lancaster y M. Tismenetsky: *The Theory of Matrices*, Segunda edición, Academic Press, New York, 1985.

[31] E. Levin y D. S. Lubinsky: *Orthogonal Polynomials for Exponential Weights*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[32] E. L. Levin y D. S. Lubinsky: *L_∞ Markov and Bernstein inequalities for Freud weights*, Journal on Mathematical Analysis, **21** (1990), 1065-1082.

[33] D. C. Lewis: *Polynomial least square approximation*, American Journal of Mathematics, **69** (1947), 273-278.

[34] G. López Lagomasino y H. Pijeira: *Polinomios Ortogonales*, XIV Escuela Venezolana de Matemáticas 2001, Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela, 2001.

[35] G. López Lagomasino y H. Pijeira: *Zero location and n-th root asymptotics of Sobolev orthogonal polynomials*, Journal of Approximation Theory, **99** (1999), 30-43.

[36] G. G. Lorentz: *Approximation of Functions*, Segunda edición, Chelsea, New York, NY, 1986.

[37] D. S. Lubinsky: *L_∞ Markov and Bernstein inequalities for Erdös weights*, Journal of Approximation Theory, **60** (1990), 188-230.

[38] D. S. Lubinsky: *A survey of weighted polynomial approximation with exponential weights, Surveys in Approximation Theory*, **3** (2007), 1-105.

[39] D. S. Lubinsky: *Bernstein's weighted approximation on $\mathbb{R}$ still has problems, Electronic Transactions on Numerical Analysis,* **25** (2006), 166-177.

[40] D. S. Lubinsky: *L_p Markov-Bernstein Inequalities on Arcs of the Circle*, Journal of Approximation Theory, **108** (2001), 1-17.

[41] A. Lupaş: *An inequality for polynomials*, Publications de la faculté d'electrotechinique de l'Universite a Belgrade, **493** (1974), 241-243.

[42] F. Marcellán, T. E. Pérez y M. A. Piñar: *On zeros of Sobolev type orthogonal polynomials*, Rendiconti Di Matematica e Delle Sue Applicazioni, **12** (1992), 455-473.

[43] F. Marcellán y Y. Quintana: *Polinomios Ortogonales No Esándar. Propiedades Algebraicas Y Análiticas*, XXI Escuela Venezolana de Matemáticas. Escuela Matemática de América Latina y El Caribe. Emalca-Venezuela 2009, Facultad de Ciencias, Universidad de los Andes, Mérida, Venezuela, 2009.

[44] F. Marcellán y J. M. Rodríguez: *Markov type inequalities in weighted Sobolev spaces*, manuscript.

[45] A. A. Markov: *On a question of D. I. Mendeleev*, Zap. Imp. Akad. Nauk, St. Petersburg, **62** (1889), 1-24.

[46] A. Martínez-Finkelshtein: *Asymptotic properties of Sobolev orthogonal polynomials*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **99** (1998), 491-510.

[47] A. Martínez-Finkelshtein, J. J. Moreno-Balcázar, y H. Pijeira, *Strong asymptotics for Gegenbauer-Sobolev orthogonal polynomials*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **81** (1997), 211-216.

[48] H. Meijer: *Determination of all coherent pairs*, Journal of Approximation Theory **89**(1997), 321-343.

[49] H. G. Meijer: *A short history of ortogonal polynomials in a Sobolev space, I. The non-discrete case*,Delft University of Technology, Faculty of Technical Mathematics and Informatics, 1996.

[50] H. G. Meijer: *Zero distribution of orthogonal polynomials in a certain discrete Sobolev space*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **172** (1993), 520-532.

[51] H. G. Meijer: *Coherente pairs and zeros of Sobolev-type orthogonal polynomials*, Indagationes Mathematicae,**4** (1993), 163-176.

[52] H. G. Meijer: *On real and complex zeros of orthogonal polynomials in a discrete Sobolev space*, J. Comput. Appl. Math.**49** (1993), 179-191.

[53] D. I. Mendeleev: *Investigation of aqueous solutions based on specific gravity*. St. Petersburg, 1887.

[54] T.M. Mills, S. J. Smith y A. K. Varma: *Markoff type inequalities for curved majorants*, Journal of the Australian Mathematical Society, **58** (1995), 1-14.

[55] I. Ž. Milovanović y M. A. Kovačević: *An extremal problem for real algebraic polynomials*, Tamkang Journal of Mathematics, **24** (1993), 203-208.

[56] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović y Th. M. Rassias: *Topics in Polynomials: Extremal problems, inequalities, zeros*, Wordl Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1994.

[57] L. Mirsky: *An inequality of the Markov-Bernstein type for Polynomials*, Journal on Mathematical Analysis, **14** (1983), 1004-1008.

[58] P. Nevai: *Orthogonal polynomials*,Memoirs of the American Mathematical Society, **213** Providence, Rhode Is1and, 1979.

[59] P. Nevai, V. Totik: *Weighted polynomial inequalities*, Constructive Approximation, **2** (1986), 113-127.

[60] P. Nevai, Geza Freud: *Orthogonal polynomials and Chnstoffel functions. A case study*, Journal of Approximation Theory **48** (1986). 3-167.

[61] S. M. Nikolskií: *Some Words about Myself*, Steklov Institute of Mathematics, **232** (2001), 2-12.

[62] T. E. Pérez y M. A. Piñar: it On Sobolev orthogonality for Generalized Laguerre polynomials, Journal of Approximation Theory, *86* (1996), 278-285.

[63] D. Pérez y Y. Quintana: *Some Markov-Bernstein type inequalities and certain class of Sobolev polynomials*, Journal of Advanced Mathematical Studies.**4** (2011), 85-100.

[64] D. Pérez y Y. Quintana: *Some Markov-Bernstein type inequalities and certain class of Sobolev polynomials*, Abstracts Short Communications and Posters. International Congress of Mathematicians, Agosto 26-28, (pp. 549-550). Hindustan Book Agency, 2010.

[65] D. Pérez y Y. Quintana : *Some Markov-Bernstein type inequalities and certain class of Sobolev polynomials*, [Abstracts en línea] The international Satellite Conference on Harmonic analysis (SATEHA$_I CM$2010), Consultado el día 03 de Septiembre de 2010 de la World Wide Web:http://niser.ac.in/ sateha

[66] D. Pérez y Y. Quintana: *On inequalities of Markov-Bernstein type and Nikolskii type associated to weighted Sobolev norms* , manuscript.

[67] D. Pérez, Y. Quintana: *A survey on the Weierstrass approximation theorem*, Divulgaciones Matemáticas. **16** (2008) 231-247.

[68] T.E. Pérez: *Polinomios Ortogonales respecto a productos de Sobolev: el caso continuo*, Ph.D. Thesis, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada, 1994.

[69] H. Pijeira, Y. Quintana y W. Urbina: *Zero localization and asymptotic behavior of orthogonal polynomials of Jabobi-Sobolev*, Revista Colombiana de Matemáticas, **35** (2001), 77-97.

[70] A. Pinkus: *Negative Theorems in Approximation Theory*, The American Mathematical Monthly, **110** (2003), 900-911.

[71] G. V. Radzievskiǐ: *Direct and inverse theorems on approximation by root functions of a regular boundary-value problem*, Sbornik: Mathematics, **197** (2006) 1037-1083.

[72] K-G Steffens: *The History of Approximation Theory From Euler to Bernstein*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin,**175** (2006), 98-105.

[73] G. Szegö: *Orthogonal Polynomials*, Colloquium Publications American Mathematical Society, Cuarta edición, Providence, R.I., 1975.

[74] Q. M. Tariq: *Concerning polynomials on the unit interval*, Proceedings of the American Mathematical Society, **99** (1987), 293-296.

[75] W. Van Assche : *Orthogonal polynomials in the complex plane and on the real line*, Fields Institute Communications, **14** (1997), 211-245.