



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN INSTRUMENTACION

ANALISIS MORFOLOGICO DE IMAGEN MULTICANAL

Elaborado por: **Lic. Roger José Bello Otero**
Tutor: **Dr. Wuilian Torres.**

Caracas, Venezuela
Marzo 2012

Agradecimientos

Iboru Iboya Ibocheche, Maferefun Olofin, Orula, Elegua, bogbo Osha, bogbo Orisha ati Eggun. Al Creador, que de El vengo y a El retornare. A mis padres, mi fuente de vida. A mi hermano, un ser que Amo. A mi esposa, mi bella compañera de vida. A mis padrinos Romulo Tovar, Alexander Vergara, Kris Filiber, Marito Otura Sa y bogbo Awo por ser esa gran familia. Ludmila Diaz un ser especial. Mike Malatesta y Letizia Lanni mis grandes compadres y amigos. A Bnei Baruch, Excellent people and unique spiritual energy, especially my great friend and brother Jike Paramo. A la familia Hernandez Bolivar por ese apoyo incondicional. A los Licenciados Jocer Franquiz, Angel Retali, Linda Arvelo y Jonnathan Otero por su valiosa amistad. Al Dr. Francisco Tovar, un gran amigo. A Juan Albarran, excelente ser humano. Al Laboratorio de Computación Gráfica y Geometría Aplicada de la Escuela de Matemática y el Postgrado en Instrumentación de la Escuela de Física de la Universidad Central de Venezuela por todo su apoyo en mi formación profesional. Al Dr. Wuilian Torres, por ser mi tutor y enseñarme este bello mundo de las imágenes. A todos que de una u otra forma participaron en este proyecto, GRACIAS!

Indice

| | |
|---|-----------|
| Resumen | 9 |
| Introducción | 10 |
| 1. Imagen Digital | 13 |
| 1.1. Introducción | 13 |
| 1.2. Imagen Binaria | 13 |
| 1.3. Imagen en Tonos de Gris | 14 |
| 1.4. Imagen a Color | 15 |
| 1.4.1. Formación de la Imagen a Color | 15 |
| 1.5. Imagen Multicanal | 17 |
| 2. Morfología Matemática | 19 |
| 2.1. Introducción | 19 |
| 2.2. Teoría de Conjuntos | 20 |
| 2.3. Relaciones de Orden | 22 |
| 2.4. Retículo | 22 |
| 2.5. Propiedades de las Operaciones Morfológicas | 23 |
| 2.6. Transformaciones Morfológicas | 23 |
| 2.7. Elemento Estructurante | 23 |
| 2.8. Erosión $\epsilon_B(X)$ | 24 |
| 2.9. Dilatación $\delta_B(X)$ | 26 |
| 2.10. Apertura y Cierre | 28 |
| 2.11. Apertura $\gamma_B(X)$ | 28 |
| 2.12. Cierre $\varphi_B(X)$ | 29 |
| 2.13. Gradiente $\rho_B(X)$ | 30 |
| 2.13.1. Gradiente Multiescalar | 31 |
| 2.13.2. Gradiente Multiescalar por Erosión | 33 |
| 2.14. Filtros Morfológicos | 35 |
| 2.14.1. Gradiente de Filtro Morfológico por Erosión | 36 |
| 3. Transformaciones Geodésicas | 39 |
| 3.1. Introducción | 39 |
| 3.2. Distancia Geodésica | 40 |
| 3.3. Dilatación Condicional | 40 |
| 3.4. Dilatación Geodésica | 41 |
| 3.5. Erosión Geodésica | 41 |

| | |
|---|-----------|
| 3.6. Reconstrucción Geodésica | 42 |
| 3.7. Reconstrucción por Apertura o Cierre | 43 |
| 3.8. Divisoria de Aguas (Watershed) | 44 |
| 4. Ordenamiento Vectorial | 46 |
| 4.1. Introducción | 46 |
| 4.2. Relaciones de Orden n -Dimensionales | 48 |
| 4.2.1. Orden en Base a la Primera Componente | 48 |
| 4.2.2. Orden por Medida de Distancia | 49 |
| 4.2.3. Orden Canónico | 50 |
| 4.2.4. Orden Bit Mixing | 51 |
| 4.2.5. Orden Lexicográfico | 52 |
| 5. Ordenamiento SDL n-Dimensional | 53 |
| 5.1. Introducción | 53 |
| 5.2. Ordenamiento Multicanal | 55 |
| 5.3. Análisis del Ordenamiento | 61 |
| 5.3.1. Análisis Imagen Satelital (4 Canales) | 62 |
| 5.3.2. Análisis Imagen RMN (8 Canales) | 63 |
| 6. Morfología Multicanal en Imágenes Sintéticas - Ordenamiento SDL | 65 |
| 6.1. Introducción | 65 |
| 6.2. Aplicaciones | 66 |
| 6.3. Dilatación Multicanal | 67 |
| 6.4. Erosión Multicanal | 68 |
| 6.5. Apertura Multicanal | 69 |
| 6.6. Cierre Multicanal | 70 |
| 6.7. Top-Hat Multicanal | 71 |
| 6.8. Bottom-Hat Multicanal | 72 |
| 6.9. Gradiente | 73 |
| 6.9.1. Gradiente Multiescalar Multicanal | 74 |
| 6.9.2. Gradiente Multicanal de Filtro Morfológico por Erosión | 75 |
| 6.10. Filtrados Morfológicos Multicanales | 76 |
| 7. Morfología Multicanal en Imágenes Reales - Ordenamiento SDL | 78 |
| 7.1. Introducción | 78 |
| 7.2. Aplicaciones | 79 |
| 7.3. Dilatación Multicanal | 80 |
| 7.4. Erosión Multicanal | 81 |
| 7.5. Apertura Multicanal | 82 |
| 7.6. Cierre Multicanal | 83 |
| 7.7. Top-Hat Multicanal | 84 |
| 7.8. Bottom-Hat Multicanal | 85 |
| 7.9. Gradiente | 86 |
| 7.9.1. Gradiente Multiescalar Multicanal | 87 |
| 7.9.2. Gradiente Multiescalar Multicanal por Erosión | 88 |
| 7.10. Filtrados Morfológicos Multicanales | 89 |

| | |
|---|------------|
| 7.10.1. Gradiente de Filtro Morfológico por Erosión | 91 |
| 7.10.2. Reconstrucción Multicanal | 92 |
| 7.10.3. Segmentación Multicanal | 93 |
| 8. Conclusión | 95 |
| 9. Apéndice | 97 |
| Bibliografía | 109 |

Índice de figuras

| | |
|--|----|
| 1.1. Imagen Binaria | 13 |
| 1.2. Imagen en Tono de Gris | 14 |
| 1.3. Representación de la función $f : Z^2 \rightarrow Z$ | 15 |
| 1.4. Imagen en tono de gris y la matriz asociada a una sección de la imagen | 15 |
| 1.5. Descomposición de la imagen en RGB | 16 |
| 1.6. Imagen digital a color y su matriz asociada | 17 |
| 1.7. Descomposición de la imagen en RGB | 17 |
| 1.8. Imagen Multicanal | 18 |
| 2.1. Suma de Minkowski | 21 |
| 2.2. Elemento estructurante, disco de radio 3 | 24 |
| 2.3. Erosión de X por el elemento estructurante B | 25 |
| 2.4. Erosión con un Elemento Estructurante Disco de Radio 2 | 26 |
| 2.5. Dilatación de X por el elemento estructurante B | 27 |
| 2.6. Dilatación con un elemento estructurante disco de radio 2 | 28 |
| 2.7. Apertura de X por el elemento estructurante B | 29 |
| 2.8. Apertura con un Elemento Estructurante Disco de Radio 2 | 29 |
| 2.9. Cierre de X por el elemento estructurante B | 30 |
| 2.10. Cierre con un elemento estructurante disco de radio 2 | 30 |
| 2.11. Gradiente en tonos de gris | 31 |
| 2.12. Comportamiento de los B_i | 32 |
| 2.13. Comportamiento del Gradiente Multiescalar para dos Iteraciones | 33 |
| 2.14. Gradiente Multiescalar por Erosión. Dos Iteraciones | 34 |
| 2.15. Imagen con Ruido | 35 |
| 2.16. Combinaciones de Filtros Morfológicos | 36 |
| 2.17. Comportamiento del Gradiente de Filtro Morfológico por Erosión. Filtro Utilizado $\gamma\phi\gamma$ | 37 |
| 2.18. Comportamiento del Gradiente de Filtro Morfológico por Erosión - Preservando el Orden de los Filtros | 38 |
| 3.1. Conectividad | 39 |
| 3.2. Esquema Geodésico | 39 |
| 3.3. Distancia Geodésica en el conjunto X | 40 |
| 3.4. Dilatación Geodésica de orden 1 de f con respecto a g | 41 |
| 3.5. Erosión Geodésica de orden 1 de f con respecto a g | 42 |
| 3.6. Proceso de Reconstrucción Geodésica | 42 |
| 3.7. Reconstrucción Geodésica | 42 |
| 3.8. Reconstrucción Geodésica por Dilatación | 43 |

| | |
|---|----|
| 3.9. Reconstrucción Geodésica por Apertura | 44 |
| 3.10. Watershed - Divisor de Cuencas | 44 |
| 3.11. Sobresegmentación | 45 |
| 3.12. Diagrama Watershed | 45 |
| 3.13. Imagen Segmentada | 45 |
| 4.1. Colores falsos presentes en las imágenes a color | 47 |
| 4.2. Representación del Orden Primera Componente en el espacio 3D | 48 |
| 4.3. Representación del Orden por Medida de Distancia en el Espacio 3D | 49 |
| 4.4. Representación del Orden Canónico en el Espacio 3D | 50 |
| 4.5. Codificación y Decodificación en el espacio 3D. Imagen perteneciente a: Patrick Lambert & Jocelyn Chanussot. "Extending Mathematical Morphology to Color Image Processing ". International Conference on Color in Graphics and Image Processing - CGIP'2000. | 51 |
| 4.6. Representación del Orden Lexicográfico en el espacio 3D | 52 |
| 5.1. Representación 3D de la Primera Condición | 56 |
| 5.2. Comparación de Resultados en Suma de Diferencias Consecutivas para un Pixel Dado | 57 |
| 5.3. Secuencias del Comportamiento en Representación 3D de la Segunda Condición | 58 |
| 5.4. Representación 3D de la Segunda Condición | 59 |
| 5.5. Representación 3D de la Tercera Condición | 60 |
| 5.6. Comportamiento de los píxeles | 61 |
| 5.7. Imagen Satelital | 62 |
| 5.8. Imagen RMN | 63 |
| 6.1. Imagen a color para el procesamiento multicanal | 66 |
| 6.2. Dilatación - Imagen a Color | 67 |
| 6.3. Erosión - Imagen a Color | 68 |
| 6.4. Apertura - Imagen a Color | 69 |
| 6.5. Cierre - Imagen a Color | 70 |
| 6.6. Top-Hat - Imagen a Color | 71 |
| 6.7. Botton-Hat - Imagen a Color | 72 |
| 6.8. Gradiente Imagen Multicanal | 73 |
| 6.9. Gradiente Multiescalar con 2 Iteraciones | 74 |
| 6.10. Gradiente Multicanal de Filtro Morfológico por Erosión. Filtro con EE 3x3 y Erosión con EE 5x5 | 75 |
| 6.11. Imagen con Ruido | 76 |
| 6.12. Filtrados Morfológicos Multicanales | 77 |
| 7.1. Imágenes para el procesamiento multicanal | 79 |
| 7.2. Dilatación - Imagen Satelital | 80 |
| 7.3. Dilatación - Imagen RMN (canal 4) | 80 |
| 7.4. Erosión - Imagen Satelital | 81 |
| 7.5. Erosión - Imagen RMN (canal 4) | 81 |
| 7.6. Apertura - Imagen Satelital | 82 |
| 7.7. Apertura - Imagen RMN (canal 4) | 82 |
| 7.8. Cierre - Imagen Satelital | 83 |

| | |
|---|-----|
| 7.9. Cierre - Imagen RMN (canal 4) | 83 |
| 7.10. Top-Hat - Imagen Satelital | 84 |
| 7.11. Top-Hat - Imagen RMN (canal 4) | 84 |
| 7.12. Botton-Hat - Imagen Satelital | 85 |
| 7.13. Botton-Hat - Imagen RMN (canal 4) | 85 |
| 7.14. Gradiente - Imagen Satelital | 86 |
| 7.15. Gradiente - Imagen RMN (canal 4) | 86 |
| 7.16. Gradiente Multiescalar Multicanal - Imagen Satelital | 87 |
| 7.17. Gradiente Multiescalar Multicanal - Imagen RMN (canal 4) | 87 |
| 7.18. Gradiente Multiescalar Multicanal por Erosión - Imagen Satelital | 88 |
| 7.19. Gradiente Multiescalar Multicanal por Erosión - Imagen RMN (canal 4) | 88 |
| 7.20. Imágenes con Ruido | 89 |
| 7.21. Filtrados Morfológicos Multicanales - Imagen Satelital | 89 |
| 7.22. Filtrados Morfológicos Multicanales - Imagen RMN (canal 4) | 90 |
| 7.23. Gradiente de Filtro Morfológico por Erosión - Imagen Satelital | 91 |
| 7.24. Gradiente de Filtro Morfológico por Erosión - Imagen RMN (canal 4) | 91 |
| 7.25. Reconstrucción por Erosión - Imagen Satelital | 92 |
| 7.26. Reconstrucción por Dilatación - Imagen RMN (canal 4) | 92 |
| 7.27. Proceso de Segmentación | 93 |
| 7.28. Segmentación Multicanal - Imagen Satelital | 93 |
| 7.29. Segmentación Multicanal - Imagen RMN (canal 4) | 94 |
| 9.1. Luminosidad | 100 |
| 9.2. Matiz | 101 |
| 9.3. Saturación | 101 |
| 9.4. Representación de Luminancia-Matiz-Saturación como un espacio de color | 102 |
| 9.5. Síntesis Aditiva y Sustractiva | 103 |
| 9.6. Imagen Satelital Region de Turen | 105 |

Resumen

El presente Trabajo se orienta al estudio e investigación de la extensión de las operaciones morfológicas en imágenes multicanales, partiendo de los operadores morfológicos clásicos aplicados a las imágenes en tono de gris. El principal aporte de este trabajo es la programación de una librería de funciones morfológicas para su aplicación en imágenes multicanales obtenidas de diferentes fuentes, por ejemplo, imágenes de resonancia magnética (IRM), imágenes satelitales, etc.

La Morfología Matemática es un conjunto de herramientas fundamentadas en la teoría de conjuntos y topología de redes, para el análisis de imágenes digitales donde el aspecto geométrico de los objetos presentes en ella constituyen el parámetro primordial para su caracterización. Para analizar la geometría de los objetos presentes en la imagen se utiliza un elemento de referencia cuyas propiedades geométricas son conocidas: línea, disco, cuadrado, etc. que recibe el nombre de elemento estructurante.

Las operaciones básicas en la Morfología Matemática son: “erosión” y “dilatación”. La erosión se caracteriza por la búsqueda de los mínimos en la imagen, la dilatación por la búsqueda de los máximos en la imagen. El valor mínimo (máximo) entre los píxeles cubiertos por el elemento estructurante, esta definido por una pequeña ventana deslizante delimitada por la forma geométrica del elemento estructurante. La identificación de máximos y mínimos en estas dos operaciones, hace necesario que el conjunto en donde se esté trabajando esté conformado por un retículo completo (retículo completo es todo conjunto que posee máximo y mínimo).

Las operaciones morfológicas se han desarrollado principalmente en imágenes binarias, tonos de gris e imágenes a color, y poco en imágenes multicanales. En este trabajo se introducen algunos operadores morfológicos para su aplicación en la imágenes multicanal, para ello es necesario definir una estrategia de ordenamiento para los píxeles de estas imágenes. Cada píxel puede ser representado por un vector de N componentes (las cuales dependerán del número de canales). La estrategia de ordenamiento que se propone es la aplicación del orden lexicográfico a la imagen, considerando como primera componente a estudiar el promedio de las componentes del píxel, luego como segunda componente la suma de las diferencias entre las componentes, y por ultimo la aplicación directa del orden lexicográfico al píxel. Este orden satisface la definición de orden total y es utilizado para el desarrollo de operadores morfológicos como: Erosión, dilatación, apertura, cierre, top-hat, botton-hat, gradiente, filtros morfológicos y Watershed (separación de cuencas) para la segmentación de imágenes. Los operadores están desarrollados en MatLab, ya que este posee las herramientas mínimas necesarias para extender los operadores morfológicos en imágenes multicanal; tales como, imágenes de resonancia magnética, imágenes satelitales, etc.

Introducción

Motivación

En varias ramas de la ciencia hoy en día, para el estudio del comportamiento de un determinado elemento se adquieren simultáneamente una serie de imágenes que tratan de poner en evidencia sus características físicas, las cuales están contenidas en los distintos canales de las imágenes, como es el caso de las imágenes de IRM y Satelitales.

Las imágenes multicanal son una colección de imágenes adquiridas simultáneamente y en su conjunto permiten caracterizar alguna propiedad física del objeto presente en la escena.

La imagen por resonancia magnética (IRM) es un método tomográfico de emisión cuyas principales ventajas sobre otros métodos de imagen son: a) su capacidad multiplanar, con la posibilidad de obtener cortes o planos primarios en cualquier dirección del espacio; b) su elevada resolución de contraste, que es ciento de veces mayor que en cualquier otro método de imagen, c) la ausencia de efectos nocivos conocidos al no utilizar radiaciones ionizantes, y d) la amplia versatilidad para el manejo del contraste.

La imagen de satélite se dispone de varias bandas que corresponden a diversas regiones del espectro electromagnético. En muchos casos algunas de estas bandas corresponden a las sub-regiones del visible que corresponden a los colores azul, verde y rojo. Por otra parte, los monitores y tarjetas de video disponen de 3 canales (R-rojo, G-verde y B-azul) para representar los 3 colores básicos. Por tanto puede utilizarse cada canal para representar el nivel de una banda y obtener así una composición de color. La más obvia sería simular el color real, asumiéndolo de la siguiente forma: Banda 1 \rightarrow B, Banda 2 \rightarrow G, Banda 3 \rightarrow R; pero como se dispone de más bandas, nada impide utilizarlas para generar visualizaciones en color falso. Estas composiciones servirían para resaltar los elementos que mayor reflectividad presentan en las bandas utilizadas, además de obtener visualizaciones más o menos estéticas. Por ejemplo, si se pasa la banda 4 (por ejemplo, con alta reflectividad por parte de la vegetación) por el canal verde, la vegetación se verá mucho más claramente que si se utilizara en la banda 2.

La Morfología Matemática ha demostrado ser una poderosa herramienta para numerosas aplicaciones de visión por computador. Multitud de algoritmos hacen, hoy en día, uso de útiles morfológicos para aplicaciones tan variadas como la segmentación, reconstrucción, detección de bordes, aumento de contraste, análisis de texturas, etc. Sin embargo, la Morfología Matemática, requiere el establecimiento de un orden entre todos los píxeles de las imágenes sobre las que opera. [Ortiz, 2002].

El procesamiento de imágenes multicanal está motivado en razón de analizar los píxeles de las

imágenes de forma vectorial, lo cual constituye un aporte importante, ya que, se considera la imagen en su forma original, resaltando cada elemento que la constituye.

Las propiedades descritas anteriormente permiten delimitar el objeto bajo estudio, la morfología matemática es una técnica que permite el estudio y clasificación de los objetos presentes en las imágenes, sin embargo su adecuación a las imágenes multicanal aún es objeto de estudio por la necesidad de ordenar los vectores asociados a cada píxel de una imagen multicanal; es por ello, que al aplicar las propiedades asociadas a la Morfología Matemática, aparece el inconveniente de definir los supremos y ínfimos entre los vectores n -dimensionales asociados a la imagen multicanal.

El inconveniente surge en la ausencia de orden entre los píxeles, pues se corresponden con vectores n -dimensionales y, a priori, no hay un orden natural para determinar que píxel es mayor o menor que otro. En imágenes vectoriales no existe una relación que pueda definir un orden de forma natural, estructura de retículo completo, lo que dificulta la posibilidad de formular una extensión automática de morfología matemática. Caso que no ocurre en imágenes en escalas de grises, donde el orden de los píxeles es el orden de natural.

En el contenido de este trabajo se mostrara una propuesta de ordenamiento n -dimensional que se ha denominado SDL, con el cual se superaran las dificultades para definir los operadores morfológicos clásicos, y así poder ordenar los píxeles presentes en las imágenes multicanal.

Estructura

Este trabajo está organizado del modo siguiente:

En el Capítulo 1, se presenta el concepto matricial de imagen digital, tanto en tonos de gris, a color y multicanal, su representación vectorial y descomposición.

En el Capítulo 2, se recopila la base conceptual de la Morfología Matemática: teoría de conjunto, relaciones de orden, retículo, propiedades de las operaciones morfológicas, transformaciones morfológicas, erosión, dilatación, apertura, cierre.

En el Capítulo 3, se recopila la teoría de Transformaciones Geodésicas.

En el Capítulo 4, se hace una comparación de los distintos tipos de ordenamiento para vectores en n -dimensionales, y el estudio del Orden Lexicográfico.

En el Capítulo 5, se define el Ordenamiento SDL, con base en el Orden Lexicográfico, para el procesamiento de imágenes multicanal.

En el Capítulo 6, se realizan las aplicaciones del Ordenamiento SDL sobre una imagen sintética a color para estudiar su comportamiento.

En el Capítulo 7, se muestra la aplicación del Ordenamiento SDL en operadores morfológicos

sobre imágenes de Satélite y RMN, utilizando la librería creada en MatLab.

En el Capítulo 8, se presenta la conclusión de este trabajo.

En el Capítulo 9, corresponde a los apéndice sobre: El Ordenamiento SDL es un Orden Total, Especificación del Color Percibido, Imágenes Satelitales - Teledetección, Imagen por Resonancia Magnética, MatLab.

Capítulo 1

Imagen Digital

1.1. Introducción

Una imagen es una representación bidimensional (en el plano) de una escena. Las imágenes pueden ser capturadas por cámaras fotográficas, satélites, rayos X, etc. Una imagen puede ser en blanco y negro, en niveles de gris, color o con un número mayor de canales, la imagen digital se obtiene al convertir la radiación en un valor numérico que es almacenada en el computador para su transmisión, transformación, etc., usando un formato de imagen apropiado. Los archivos correspondientes tienen terminaciones: tiff, gif, jpg, png, bmp, etc.

1.2. Imagen Binaria

Una imagen binaria, es una imagen en la cual cada píxel puede tener solo dos posibles valores 0 o 1, es decir, los píxeles de los objetos presentes en la imagen se representan por el número 1 (blanco), mientras que el fondo es tomado con 0 (negro). Las operaciones básicas son las definidas en teoría de conjuntos. La figura 1.1 muestra un ejemplo de una imagen binaria.

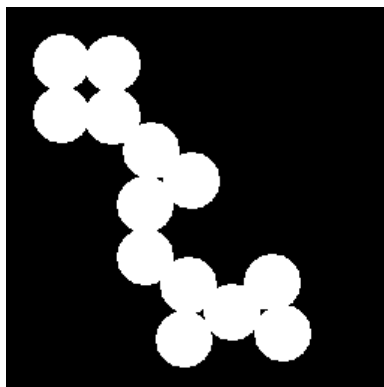


Figura 1.1: Imagen Binaria

1.3. Imagen en Tonos de Gris

Una imagen digital es una asignación de un nivel de gris a cada píxel de una matriz, caracterizada por una función:

$$f : Z^2 \longrightarrow Z \quad (1.1)$$

donde cada posición (x, y) corresponde a un punto de la imagen llamado píxel, con un valor numérico que puede ser codificado en tonos de gris entre su valor mínimo (negro) y máximo (blanco) [González, 2002]. El número total de niveles o tonos de gris dependerá de la cantidad de bits utilizados para representar el píxel, por ejemplo con 8 bits se dispone de 256 niveles con valores en el rango $[0, 255]$.

Para la interacción con las imágenes se utilizan programas que facilitan su utilización y procesamiento. En el marco de este trabajo se utilizó MatLab, ya que con su módulo de procesamiento digital de imágenes permite desarrollar aplicaciones específicas, tales como, eliminación de ruidos en la imagen (filtros), Watershed para segmentación de una imagen, etc. Ver figura 1.2, imagen del municipio turén en tonos de gris.

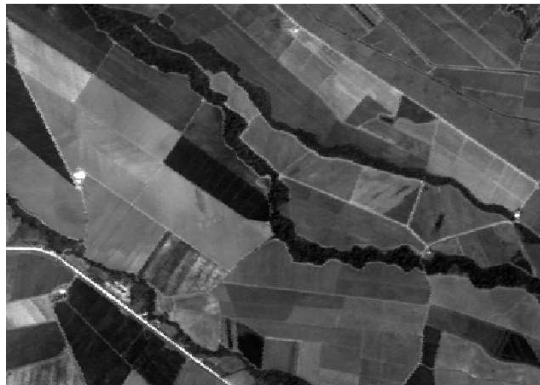


Figura 1.2: Imagen en Tono de Gris

La representación matricial de la imagen digital es la siguiente:

$$I = \begin{pmatrix} i_{(1,1)} & \dots & i_{(1,m)} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ i_{(n,1)} & \dots & i_{(n,m)} \end{pmatrix}$$

Una representación matemática del espacio de las funciones para las imágenes en tonos de gris, se representa en la figura 1.3:

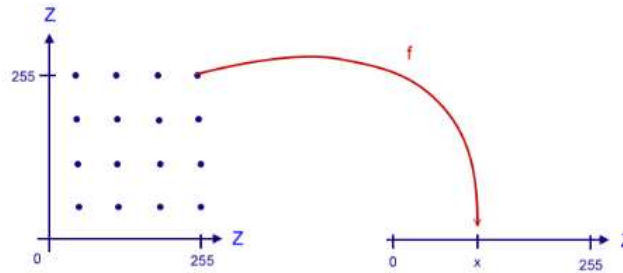


Figura 1.3: Representación de la función $f : Z^2 \longrightarrow Z$

Con el MATLAB, es posible extraer una sub-matriz que refleje los valores numéricos de la imagen (figura 1.4).

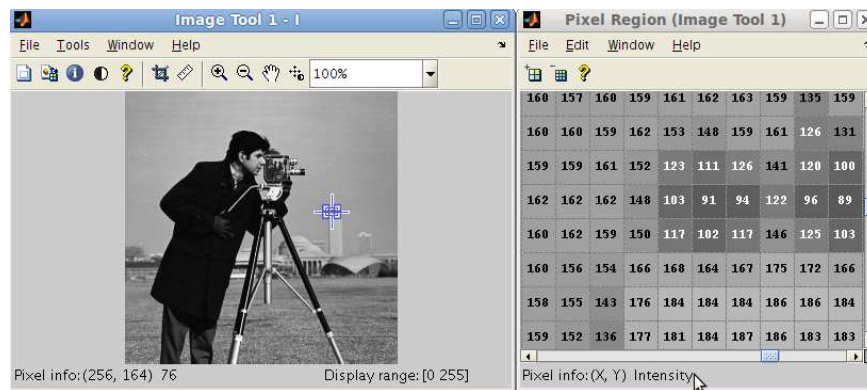


Figura 1.4: Imagen en tono de gris y la matriz asociada a una sección de la imagen

1.4. Imagen a Color

Para comprender el análisis en imágenes a color, es fundamental considerar el estudio del color y su comportamiento (Ver Anexo 1), el cual será mostrado en las siguientes líneas:

1.4.1. Formación de la Imagen a Color

Una imagen digital en color es una función bivariada (depende de dos variables) con valor tridimensional:

$$f : Z^2 \longrightarrow Z^3 \tag{1.2}$$

donde cada píxel $(x, y) \in Z^2$ está representado por un vector de tres componentes: $P = (I_1, I_2, I_3)$, donde I_1, I_2, I_3 corresponden a las componentes r (rojo), g (verde), b (azul) [Ortiz, 2002].

La imagen digital a color está compuesta por tres matrices, las cuales contienen la información de las componentes primarias, correspondiente a la síntesis aditiva que genera el color; por ejemplo, si se esta trabajando en el espacio de color RGB, la primera matriz de la imagen contiene la información del canal rojo de la imagen, la segunda el canal verde y la tercera el canal azul (figura 1.5).

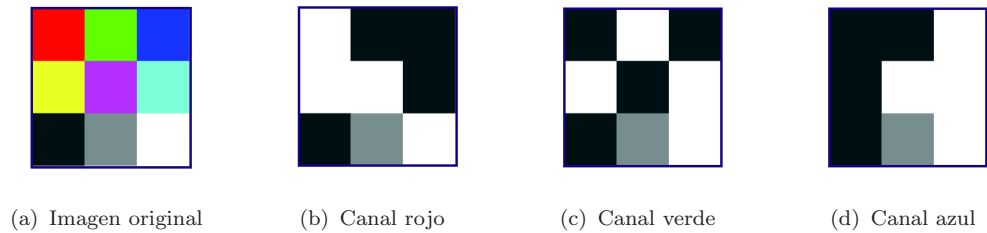


Figura 1.5: Descomposición de la imagen en RGB

Al separar una imagen digital a color en sus tres colores primarios, es decir, las matrices que la componen, su representación matemática se observa de la siguiente manera:

$$f_1 : Z^2 \longrightarrow Z \tag{1.3}$$

$$f_2 : Z^2 \longrightarrow Z \tag{1.4}$$

$$f_3 : Z^2 \longrightarrow Z \tag{1.5}$$

donde la expresión (1.3) corresponde al canal rojo, la (1.4) el canal verde y la (1.5) el canal azul. Es importante destacar que las tres matrices tienen la misma dimensión.

La matriz asociada a una imagen digital a color se puede representar de la siguiente manera:

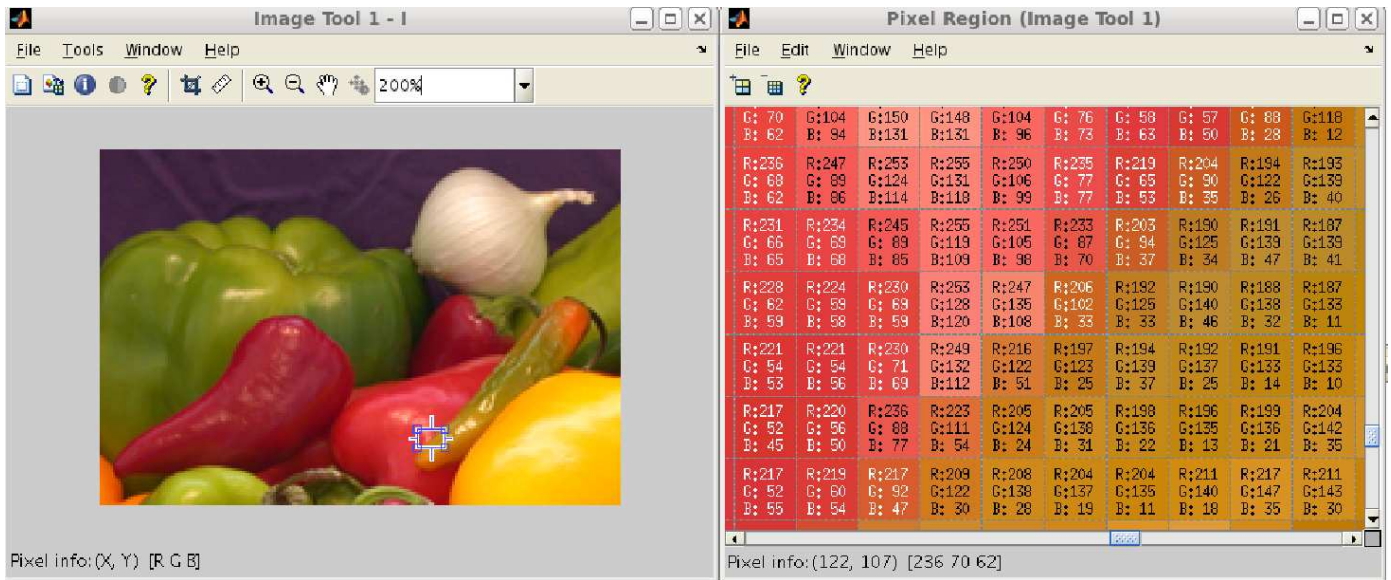


Figura 1.6: Imagen digital a color y su matriz asociada

La figura 1.6 muestra un detalle de la matriz asociada a una imagen a color, donde cada píxel se presenta en un recuadro que contiene la cantidad de rojo, verde y azul presente en cada píxel.

Ahora bien, la descomposición en matrices de cada componente de la imagen digital a color se observa en la figura 1.7:

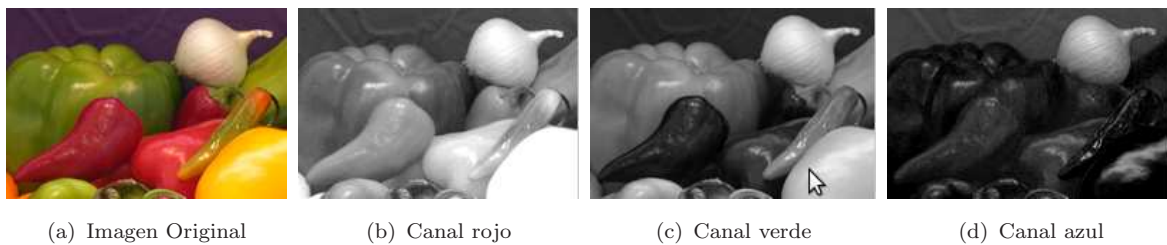


Figura 1.7: Descomposición de la imagen en RGB

La figura 1.7 muestra la descomposición de la imagen a color, en sus componentes de color, donde su representación es en tonos de gris. (b) corresponde al canal rojo. (c) corresponde al canal verde. (d) corresponde al canal azul.

1.5. Imagen Multicanal

Una imagen multicanal es un arreglo de imágenes definidas en un dominio común:

$$f : Z^2 \longrightarrow Z^n \tag{1.6}$$

donde a cada píxel $\xi(x, y) \in f$ se asocia un vector de escalares definido por el valor de cada canal. La dimensión de la imagen corresponde al número de canales de la imagen.

$$\xi(x, y) = (\xi_1(x, y), \dots, \xi_n(x, y)) \tag{1.7}$$

Una representación gráfica de estas imágenes se muestra en la figura 1.8:

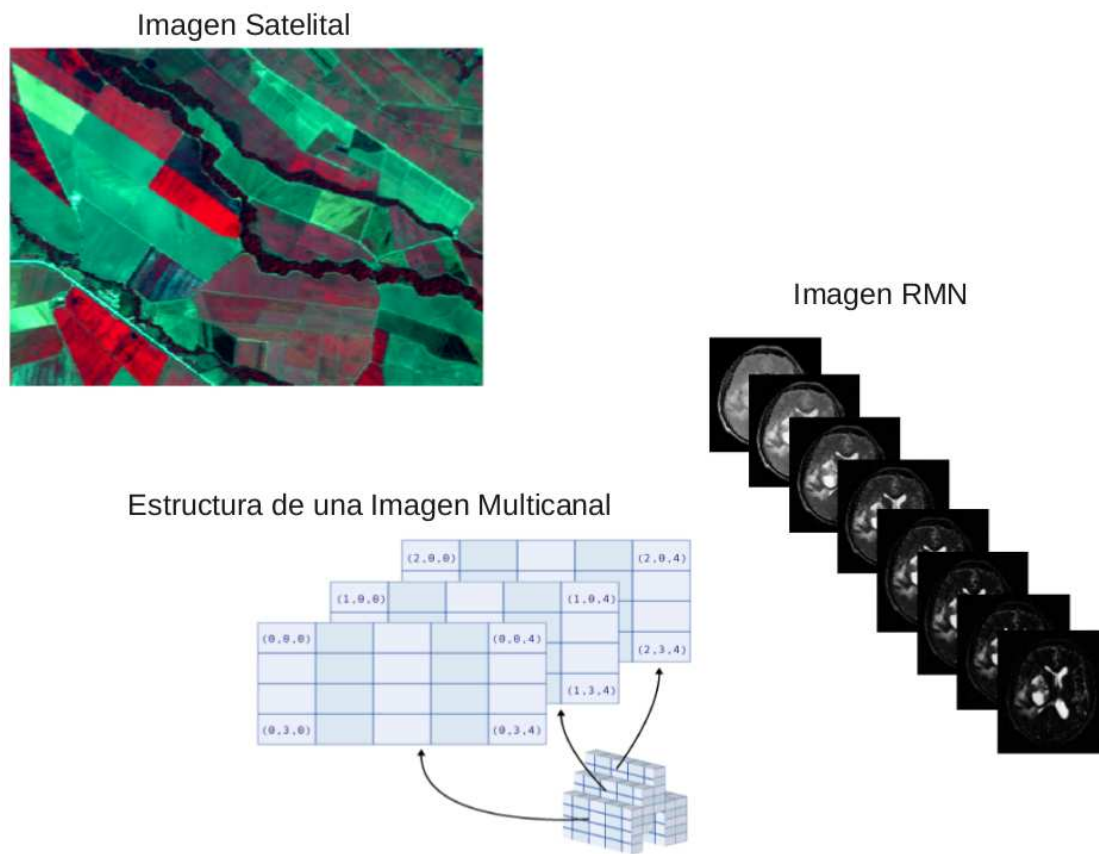


Figura 1.8: Imagen Multicanal

En general cada una de las imágenes en una imagen multicanal esta asociada a una propiedad particular de los objetos presentes en la escena, ver anexo 2 y 3.

Capítulo 2

Morfología Matemática

2.1. Introducción

La Morfología Matemática se puede definir como una teoría basada en retículos, para objetos u operadores en espacios continuos o discretos, modelos topológicos. La Morfología Matemática descansa en la “teoría de conjuntos” cuyos primeros trabajos se deben a Minkowski (1901) y Hadwiger (1957). La continuación de estos trabajos de investigación, bajo el impulso y reforma de Matherron y Serra, se darían posteriormente a conocer bajo la denominación de Morfología Matemática, como una técnica no lineal de tratamiento de señal. La mayor parte de esta teoría ha sido desarrollada en el *Centre de Morphologie Mathématique*(CMM) de *l’Ecole des Mines de París, Francia* [Ortiz, 2002].

Se pueden encontrar aplicaciones tales como la “segmentación”, “restauración”, “detección de bordes”, “aumento de contraste”, “análisis de texturas”, “compresión”, etc [Serra, 1982].

Las primeras aplicaciones desarrolladas en Morfología Matemática se orientan a imágenes binarias y su extensión a niveles de gris [Soille, 1999]. Las aplicaciones en el dominio del color están en proceso de desarrollo.

2.2. Teoría de Conjuntos

En la naturaleza existen “cosas”, “objetos”, “elementos”, que constituyen unidades completamente identificables. A la vez, esos “elementos”, son agrupables, de acuerdo a algún tipo de criterio, conformando lo que se conoce como “conjuntos”. Por lo tanto, se dice que los elementos pertenecen a conjuntos.

Es a partir de esos tres conceptos: *elemento*, *pertenencia* y *conjunto*, que se desarrolla la teoría de conjuntos.

Los términos “conjunto” y “elemento” quedan precisados por las reglas siguientes:

- Un conjunto B está bien definido si existe un criterio que permita decidir si, dado un x cualquiera, la proposición $x \in B$ es verdadera o falsa.
- Un objeto matemático no puede ser a la vez un conjunto y elemento de este conjunto, es decir la proposición $x \in x$ es siempre falsa.

Los conjuntos se denotarán con letras mayúsculas (A, B, C, \dots) y los elementos de dichos conjuntos con letras minúsculas (a, b, c, \dots).

Definición 2.1 *Dos conjuntos son iguales si están formados por los mismos elementos:*

$$X = Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y \text{ y } x \in Y \Rightarrow x \in X) \quad (2.1)$$

La igualdad de conjuntos es reflexiva, simétrica y transitiva. El conjunto vacío será denotado por \emptyset .

Definición 2.2 *X es un subconjunto de Y si todos los elementos de X pertenecen a Y :*

$$X \subseteq Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y) \quad (2.2)$$

Definición 2.3 *Si X y Y son dos conjuntos arbitrarios, se denomina intersección de X y Y , y se denota con $X \cap Y$, al conjunto definido por:*

$$X \cap Y = \{x | x \in X \text{ y } x \in Y\} \quad (2.3)$$

Si $X \cap Y = \emptyset$, se dice que los conjuntos X y Y son disjuntos. La intersección es conmutativa, asociativa e ídempotente. Esta última propiedad es de particular importancia en morfología y significa que $X \cap X = X$

Definición 2.4 *Se llama unión o reunión de dos conjuntos X y Y , y se denota $X \cup Y$, al conjunto cuyos elementos pertenecen al menos a uno de los conjuntos dados. Se puede por tanto escribir:*

$$X \cup Y = \{x | x \in X \text{ ó } x \in Y\} \quad (2.4)$$

Al igual que la intersección, la unión de conjuntos es conmutativa, asociativa e ídempotente.

Definición 2.5 La diferencia entre conjuntos X y Y , la componen los elementos que pertenecen a X pero que no están incluidos en Y :

$$X - Y = \{x | x \in X \text{ y } x \notin Y\} \quad (2.5)$$

En general esta operación no es conmutativa.

Definición 2.6 La complementación de un subconjunto X , contenido en un conjunto Y (conjunto referencia) se define como:

$$X^c = \{x | x \notin X \text{ y } x \in Y\} \quad (2.6)$$

Definición 2.7 Sean X y A dos conjuntos pertenecientes a \mathfrak{R}^2 , definimos la adición y la resta de Minkowski de siguiente manera:

$$X \oplus A = \bigcup_{a \in A} X_a \quad (2.7)$$

$$X \ominus A = \bigcap_{a \in A} X_a \quad (2.8)$$

donde,

$$X_h = \{x + h | x \in X\} \quad (2.9)$$

h es un vector en el espacio \mathfrak{R}^2 [Heimans, 1994].

Ejemplo de Suma de Minkowski:

Sea $A = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$ y $B = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0)\}$, entonces la suma de Minkowski de A y B es:

$$A \oplus B = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -1), (2, 0), (2, 1), (3, -1), (3, 0), (3, 1)\}$$

La figura 2.1 representa el conjunto A , el conjunto B y la suma $A \oplus B$.

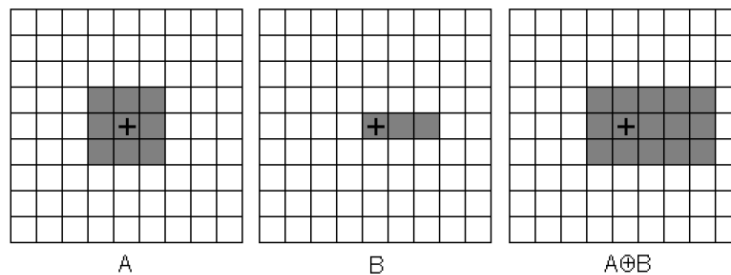


Figura 2.1: Suma de Minkowski

2.3. Relaciones de Orden

Definición 2.8 Dado un conjunto X no vacío, una relación binaria \leq en X es llamada un Orden Parcial si se satisfacen las siguientes propiedades:

- $x \leq x$ (Reflexiva)
- $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$ (Antisimétrica)
- $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitiva)

Para todo $x, y, z \in X$. Un conjunto con una relación de este tipo será un conjunto que presenta un orden parcial y se denotará como (X, \leq) . El conjunto será totalmente ordenado si satisface que:

- $x \leq y$ ó $y \leq x$; $\forall x, y \in X$

Por ende (X, \leq) tendrá una relación de tipo total [E.AptoulaandS.Lefevre, 2007].

Definición 2.9 Sea (X, \leq) un conjunto ordenado y $S \subset X$, con $S \neq \emptyset$:

- Un elemento $x \in S$, es el menor elemento de S (mínimo) si $x \leq y \forall y \in S$.
- Un elemento $y \in S$, es el mayor elemento de S (máximo) si $x \leq y \forall x \in S$.
- Un elemento $x \in X$, es cota inferior de S si $x \leq y \forall y \in S$.
- Un elemento $y \in X$, es cota superior de S si $x \leq y \forall x \in S$.
- Un elemento $x \in X$, es ínfimo de S si y sólo si es cota inferior de S y para toda cota inferior y de S se verifica que $y \leq x$ (es la mayor de las cotas inferiores).
- Un elemento $y \in X$, es supremo de S si sólo si es cota superior de S y para toda cota superior de $x \in S$ se verifica que $y \leq x$ (es la menor de las cotas superiores).

Una relación binaria en el conjunto X que sólo sea reflexiva y transitiva no podrá conocerse como relación de orden, sino de preorden. Esta consideración será importante en morfología matemática, pues la ausencia de la propiedad antisimétrica no asegura, en teoría, la unicidad de ínfimo y supremo del retículo completo.

2.4. Retículo

Definición 2.10 Un conjunto L con una relación de orden total es llamado un retículo si todo subconjunto finito de L posee ínfimo y supremo. Un retículo es llamado completo si todo subconjunto de L posee ínfimo y supremo [Bruzual, 2003].

El concepto de retículo completo es la base para la formación de la morfología matemática. Los operadores morfológicos deben conservar el orden presente en la estructura de retículo.

2.5. Propiedades de las Operaciones Morfológicas

Si denominamos Ψ y Φ dos operaciones sobre los conjuntos X, Y , definimos las siguientes propiedades:

- Invarianza a las traslaciones: $\Psi(X_i) = (\Psi(X))_i$
- Ídempotencia: $\Psi(\Psi(X)) = \Psi(X)$
- Ψ es extensiva si: $\Psi(X) \leq X$
- Ψ es antiextensiva si: $X \leq \Psi(X)$
- Ψ es creciente si: $X \leq Y \Rightarrow \Psi(X) \leq \Psi(Y)$
- Dualidad: Φ es la operación dual de Ψ , respecto al complemento si $\Phi(X) \Leftrightarrow \Psi(X^c)^c$
- Complementariedad: Φ es complementaria de Ψ si $\Phi(X) = (\Psi(X^c))^c$

2.6. Transformaciones Morfológicas

El objetivo de las transformaciones morfológicas es el realce de la imagen en base a la extracción de estructuras geométricas en los conjuntos sobre los que se opera, utilizando un conjunto de referencia denominado “Elemento Estructurante”. La forma de este elemento viene dado por figuras geométricas (círculos, cuadrados, etc.). El tamaño y la forma de este elemento se escoge dependiendo de las características geométricas de los objetos a estudiar.

2.7. Elemento Estructurante

Forma geométrica simple (círculo, rectángulo, línea, puntos, etc.), que se utiliza como elemento de referencia, está definido por una ventana deslizante, con la cual se compara cada objeto de la imagen, permitiendo discriminar aquellos que poseen propiedades geométricas comunes.

Presentan un origen denominado “centro” del elemento estructurante.

El elemento estructurante se elige de manera que sus características geométricas (forma, tamaño, orientación, etc.) se identifiquen con las características morfológicas de los objetos presentes en la imagen.

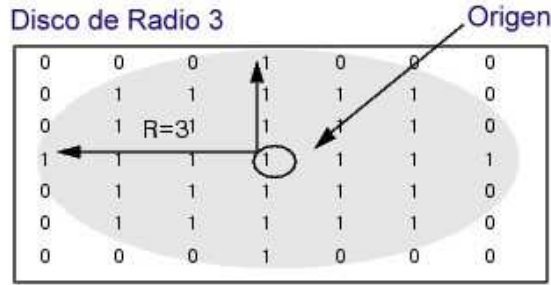


Figura 2.2: Elemento estructurante, disco de radio 3

2.8. Erosión $\epsilon_B(X)$

Definición 2.11 Dado X, Y retículos completos. Un operador $\epsilon : X \rightarrow Y$, que satisfice:

$$\epsilon(\bigwedge_{i \in I} x_i) = \bigwedge_{i \in I} \epsilon(x_i) \tag{2.10}$$

para todo $i \in I$, donde I es un conjunto de índices y $x_i \in X$, es llamado Erosión [Heimans, 1994].

En la definición 2.11 el símbolo \wedge se define como ínfimo.

En términos de la teoría de conjuntos, el conjunto erosionado siempre está contenido en el original. Una transformación que cumple esta propiedad se denomina “antiextensiva”. Cuando esto no ocurre, el resultado de la erosión es el conjunto vacío.

La erosión de un conjunto X por un elemento estructurante B la podemos definir como el conjunto de puntos o elementos $x \in X$, tal que el elemento estructurante B cuando se traslada a ese punto, el elemento queda incluido en X :

$$\epsilon_B(X) = \{x | B_x \subseteq X\} \tag{2.11}$$

La ecuación anterior la podemos reformular, en términos de la intersección de conjuntos trasladados, tomando la definición de la resta de “Minkowski” se tiene que:

$$\epsilon_B(X) = \bigcap_{a \in B} X_{-a} \tag{2.12}$$

de esta forma, las traslaciones vienen determinadas por el elemento estructurante B .

En la figura 2.3 se puede observar que el efecto de aplicar la erosión de X por el elemento estructurante B , es de mantener aquellos elementos que pueden contener el elemento estructurante.

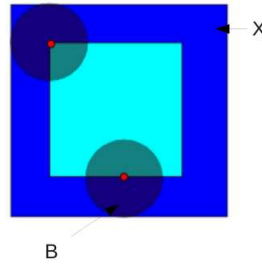


Figura 2.3: Erosión de X por el elemento estructurante B

En el caso de imágenes binarias, la erosión se concibe usualmente como una reducción de la imagen original. En la figura 2.3 se muestra la imagen original de color azul oscuro, el resultado de la erosión en azul claro y el elemento estructurante un círculo \cdot . De la definición anterior, podemos extender el concepto de erosión para imágenes digitales, es decir:

$$\epsilon_B(f) = \bigwedge_{a \in B} f_{-a} \quad (2.13)$$

donde f es la imagen original y B el elemento estructurante.

Ahora bien, como el conjunto (espacio RGB, HSI, etc) a trabajar en las imágenes digitales es acotado, entonces el concepto de ínfimo pasa a ser el mínimo, por lo que la ecuación anterior se expresa de la siguiente manera:

$$\epsilon_B(f)(x, y) = \min_{(s,t) \in B} f(x + s, y + t) \quad (2.14)$$

El resultado de la erosión en imágenes digitales en tonos de gris es una imagen más oscura, es decir, realza los niveles bajos, puesto que la erosión toma el valor mínimo de los valores presentes en el área definida por el elemento estructurante.

En otras palabras, el valor del píxel x de la imagen erosionada corresponde al valor mínimo de los píxeles de la imagen que se encuentran en la una vecindad delimitada por el elemento estructurante B centrado en x .

La ilustración de aplicar la erosión a una imagen en tonos de gris, se muestra en el siguiente ejemplo:

Dada una imagen, al aplicarle una erosión con un elemento estructurante con la geometría de un círculo de radio 2, se obtiene el siguiente resultado (figura 2.4):



(a) Imagen Original



(b) Imagen Erosionada

Figura 2.4: Erosión con un Elemento Estructurante Disco de Radio 2

Podemos observar que los tonos claros de la imagen (blancos) tienden a disminuir, y los tonos oscuros (negros) tienden a aumentar, es decir, objetos caracterizados por un tono claro tienden a reducirse de tamaño, lo opuesto para el caso contrario. Esto refleja la importancia que le da la erosión al mínimo de los elementos de la imagen.

2.9. Dilatación $\delta_B(X)$

Definición 2.12 Dado X, Y retículos completos. Un operador $\delta : Y \rightarrow X$, que satisface:

$$\delta(\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I} \delta(x_i) \quad (2.15)$$

para todo $i \in I$, donde I es un conjunto de índices y $x_i \in Y$, es llamado Dilatación [Heimans, 1994].

En la definición 2.15 el símbolo \bigvee se define como supremo.

En términos de la teoría de conjuntos, el conjunto dilatado siempre contiene al original. Una transformación que cumple esta propiedad se denomina “extensiva”.

El resultado de la dilatación es el conjunto de puntos origen del elemento estructurante B (en la dilatación es el simétrico de B) tales que el elemento estructurante contiene algún elemento del conjunto X , cuando el elemento se desplaza por el espacio que contiene a ambos conjuntos:

$$\delta_B(X) = \{x | B_x \cap X \neq \emptyset\} \quad (2.16)$$

La ecuación anterior la podemos reformular, en términos de la unión de conjuntos trasladados, tomando la definición de la suma de “Minkowski” se tiene que:

$$\delta_B(X) = \bigcup_{a \in B} X_{-a} \quad (2.17)$$

de esta forma, las traslaciones vienen determinadas por el elemento estructurante B .

En la figura 2.5 se puede observar que el efecto de aplicar la dilatación a X es mantener el centro del elemento estructurante cuya intersección con X es diferente de vacío. Elemento estructurante aumenta el conjunto original.

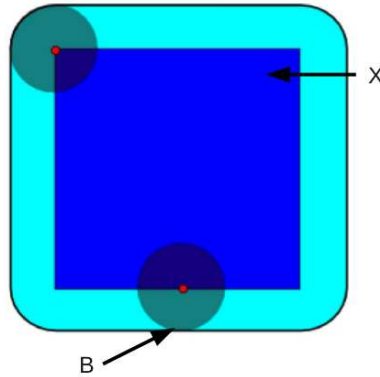


Figura 2.5: Dilatación de X por el elemento estructurante B

En el caso de imágenes digitales, la dilatación se concibe usualmente como un aumento de la imagen original. De la definición anterior, se puede extender el concepto de dilatación para imágenes digitales, es decir:

$$\delta_B(f) = \bigvee_{a \in B} f_{-a} \quad (2.18)$$

Donde f es la imagen original, B el elemento estructurante y $a \in B$.

Ahora bien, como el conjunto utilizado en las imágenes digitales es acotado, entonces el concepto de supremo pasa a ser el máximo, por lo que la ecuación anterior se expresa de la siguiente manera:

$$\delta_B(f)(x, y) = \max_{(s,t) \in B} f(x + s, y + t) \quad (2.19)$$

El resultado de la dilatación en imágenes digitales (escala de grises) es una imagen más clara, es decir, realce de niveles claros, puesto que la dilatación pretende maximizar el valor, en el caso de los grises tiene una definición de $[0, 255]$.

El valor del píxel x de la imagen dilatada corresponde al valor máximo de los píxeles de la imagen que se encuentran en la ventana definida por el elemento estructurante B centrado en x .

La visualización de aplicar la dilatación a una imagen en tonos de gris, se muestra en el siguiente ejemplo (figura 2.6):

Dada una imagen, al aplicarle una dilatación con un elemento estructurante con la geometría de un círculo de radio 2, se obtiene el siguiente resultado:



(a) Imagen Original



(b) Imagen Dilatación

Figura 2.6: Dilatación con un elemento estructurante disco de radio 2

Podemos observar que los tonos claros de la imagen (blancos) tienden a aumentar, y los tonos oscuros (negros) tienden a desaparecer. Esto refleja la importancia que le da la dilatación al máximo de los elementos de la imagen.

Las operaciones de erosión y dilatación, son la base de cualquier transformación morfológica. Cualquier operador, transformación o algoritmo incluirá una erosión, una dilatación o ambas primitivas en su implementación. Sin necesidad de formar nuevos operadores es posible encontrar aplicaciones interesantes en las transformaciones básicas.

2.10. Apertura y Cierre

La erosión y la dilatación están muy relacionados con la forma. La erosión y la dilatación usualmente se emplean por pares, bien la dilatación seguida de la erosión o viceversa. En cualquier caso, el resultado de esta aplicación sucesiva de erosiones y dilataciones es una eliminación de detalles menores, sin distorsionar la forma global del objeto.

Un aspecto fundamental de esta aplicación sucesiva es el hecho de que la aplicación sucesiva de pares de operadores (erosión + dilatación o dilatación + erosión) es ídempotente, es decir la aplicación sucesiva de estos operadores no cambia el resultado.

La apertura y cierre proporcionan los medios por los cuales seleccionar subformas y superformas de una forma compleja.

Cuando un elemento estructurante contiene el origen, la dilatación expande la imagen y la erosión la reduce. La apertura y cierre se conocen como filtros morfológicos.

2.11. Apertura $\gamma_B(X)$

La apertura de una imagen f por un elemento estructurante B se denota por $\gamma_B(f)$ y se define como la erosión de f por B , seguida de la dilatación por el mismo elemento estructurante:

$$\gamma_B(f) = \delta_B(\epsilon_B(f)) \quad (2.20)$$

La apertura permite identificar los objetos de la imagen que pueden contener el elemento estructurante.

En el caso de las imágenes binarias, al recorrer la imagen con el elemento estructurante, este está totalmente contenido en uno de los objetos presentes, entonces todos los píxeles del elemento estructurante pertenecen al objeto.

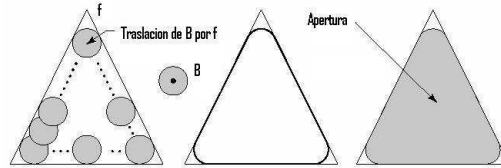


Figura 2.7: Apertura de X por el elemento estructurante B

Dada una imagen, al aplicarle una apertura con un elemento estructurante con la geometría de un círculo de radio 2, se obtiene el siguiente resultado (figura 2.8):



(a) Imagen Original



(b) Imagen Apertura

Figura 2.8: Apertura con un Elemento Estructurante Disco de Radio 2

El tamaño y la forma de los elementos estructurantes empleados en la apertura deben ser acordes con los objetos presentes en la imagen que se desea eliminar. En ocasiones, tamaños elevados de elementos estructurantes eliminarán formas indeseables en la imagen pero afectarán al resto de la estructura. Tamaños reducidos serán óptimos cuando las imágenes contengan pequeños detalles.

2.12. Cierre $\varphi_B(X)$

El cierre de una imagen f por un elemento estructurante B se denota por $\varphi_B(f)$ y se define como la dilatación de f por B , seguida de la erosión por el mismo elemento estructurante:

$$\varphi_B(f) = \epsilon_B(\delta_B(f)) \quad (2.21)$$

En imágenes binarias, al recorrer la imagen con el elemento estructurante, éste se encuentra totalmente fuera de los objetos (fondo de la imagen), entonces todos los píxeles del elemento estructurante formarán parte del fondo de la imagen.

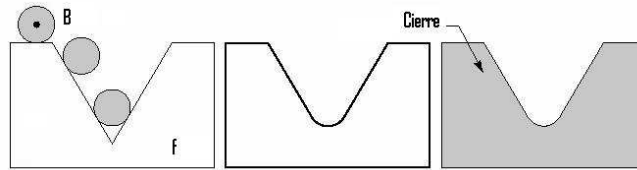


Figura 2.9: Cierre de X por el elemento estructurante B

En una imagen, al aplicarle un cierre con un elemento estructurante con la geometría de un círculo de radio 2, se obtiene el siguiente resultado:



(a) Imagen Original



(b) Imagen Cierre

Figura 2.10: Cierre con un elemento estructurante disco de radio 2

En una imagen el cierre ayuda a eliminar estructuras oscuras menores en tamaño al elemento estructurante. Los objetos oscuros quedan sensiblemente atenuados.

2.13. Gradiente $\rho_B(X)$

El gradiente o residuo es un operador morfológico que al ser aplicado a una imagen (binaria o en tonos de gris), da como resultado el borde de los objetos presentes en dicha imagen.

El primero de los gradientes a definir se conoce como gradiente por erosión y es la diferencia entre el conjunto o imagen original y la erosión por un elemento estructurante B [Ortiz, 2002].

$$\rho_B^-(f) = f - \epsilon_B(f) \quad (2.22)$$

El gradiente por dilatación se define como la diferencia entre una dilatación por elemento estructurante B y la imagen original [Ortiz, 2002]:

$$\rho_B^+(f) = \delta_B(f) - f \quad (2.23)$$

El gradiente simétrico se define como una diferencia entre la dilatación y la erosión de una imagen por un elemento estructurante B [Ortiz, 2002].

El Gradiente se expresa de la siguiente manera:

$$\rho_B(f) = \delta_B(f) - \epsilon_B(f) \quad (2.24)$$

donde B , es el elemento estructurante.

Un ejemplo de gradiente en tonos de gris se observa en la figura 2.11.



(a) Imagen Original

(b) Gradiente

Figura 2.11: Gradiente en tonos de gris

2.13.1. Gradiente Multiescalar

El gradiente convencional (dilatación - erosión), nos arroja resultados favorables, ya que podemos extraer satisfactoriamente el borde de los objetos presentes en la imagen; pero en el caso donde los objetos se encuentran muy cerca uno del otro (ver figura 2.11), sus bordes tenderán a intersectarse, lo cual no permitirá un detalle preciso del contenido de la imagen. Este problema puede ser resuelto por medio del gradiente multiescalar [Nallaperumal K, 2007].

El grosor de los bordes obtenidos a partir de un gradiente convencional ρ de tamaño B_i se puede reducir utilizando la erosión con un EE de tamaño B_{i-1} (ver figura 2.12):

$$\rho_\epsilon(f) = \sum_{i=1}^n \epsilon_{B_{i-1}}(\rho_{B_i}(f)); \quad n \in \mathfrak{N} \quad (2.25)$$

donde B_i , son elementos estructurantes de dimensión creciente por construcción. Con B_0 definido:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la expresión (2.25) nos reducirá el grosor de los bordes del gradiente, obteniendo así mejor separación entre los objetos.

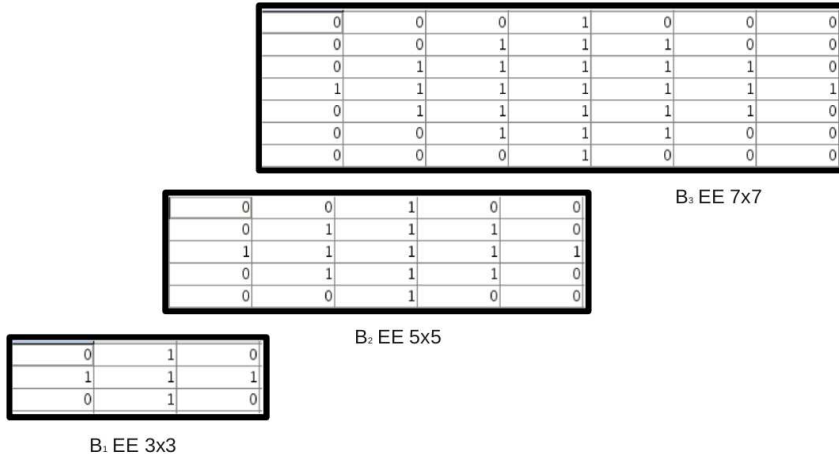


Figura 2.12: Comportamiento de los B_i

La figura 2.12 muestra la estructura de los B_i , donde a medida que i aumente, el elemento estructurante aumenta de dimensión. Para este ejemplo se utilizó un EE arbitrario.

Para $n = 1$ el resultado de la ecuación (2.25) es el gradiente convencional, ya que:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En otras palabras, no hay traslación del EE con el operador erosión, por lo tanto, el resultado será el gradiente convencional (dilatación - erosión), es decir:

$$\rho_\varepsilon(f) = \sum_{i=1}^n \epsilon_{B_{i-1}}(\rho_{B_i}(f)); \quad n \in \mathbb{N} \tag{2.26}$$

Para $n = 1$:

$$\Leftrightarrow \rho_\varepsilon(f) = \epsilon_{B_0}(\rho_{B_1}(f)) \tag{2.27}$$

$$\Leftrightarrow \rho_\varepsilon(f) = \rho_{B_1}(f); \tag{2.28}$$

Para observar el comportamiento de este gradiente, se muestran las siguientes imágenes:

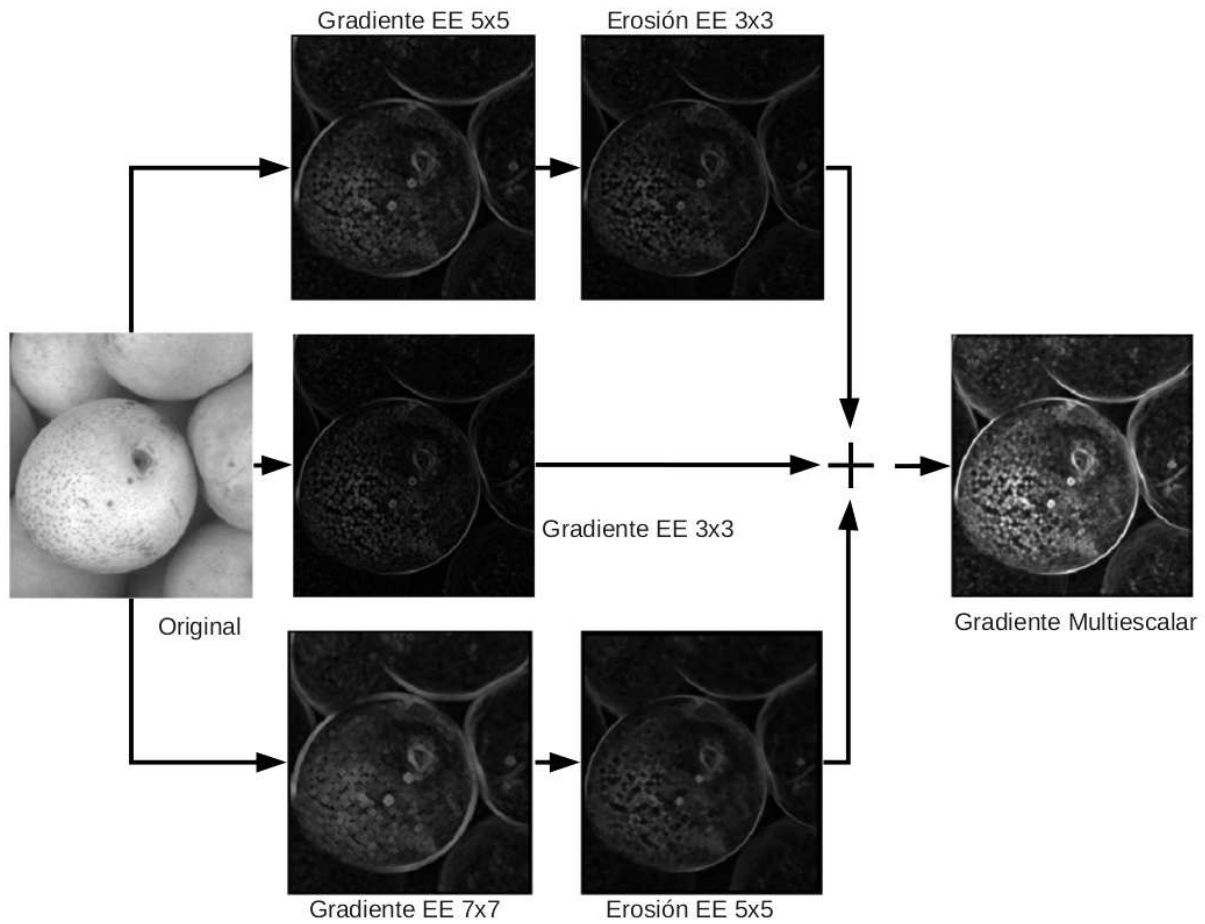


Figura 2.13: Comportamiento del Gradiente Multiescalar para dos Iteraciones

En la figura 2.13 se observa el proceso paso a paso de este gradiente, donde primero se realiza un gradiente a la imagen original con EE de dimensión 3x3, luego se realizan gradientes de EE 5x5 y 7x7, seguidos de erosiones de EE 3x3 y 5x5 respectivamente, al sumar todas estas operaciones se obtiene la imagen final, obteniendo así una mejor separación entre los objetos de la imagen, es decir, la intersección entre sus bordes es menor.

2.13.2. Gradiente Multiescalar por Erosión

Considerando la definición de gradiente por erosión:

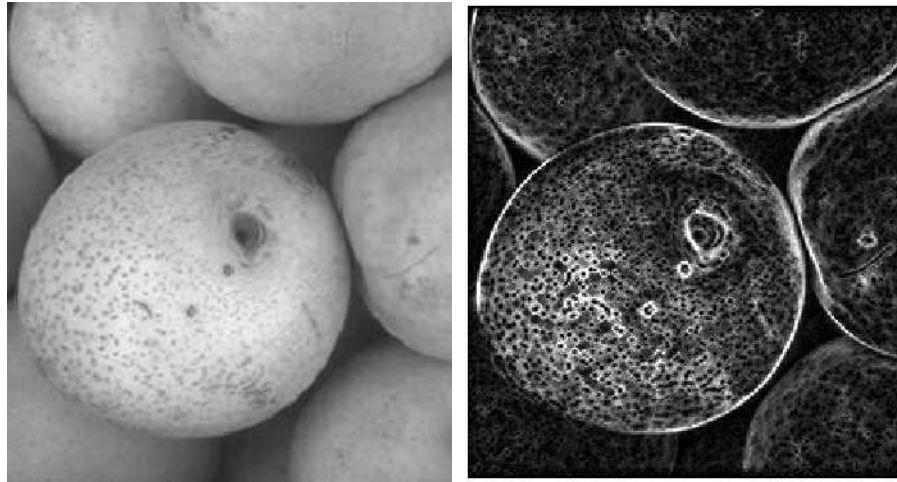
$$\rho_B^-(f) = f - \epsilon_B(f) \tag{2.29}$$

Se utiliza para realizar el gradiente multiescalar de la siguiente manera:

$$\rho_{\varepsilon}^{-}(f) = \sum_{i=1}^n \epsilon_{B_{i-1}}(\rho_{B_i}^{-}(f)); \quad n \in \mathfrak{N} \quad (2.30)$$

donde B_i , son elementos estructurantes de dimensión creciente.

El resultado de aplicar este gradiente se muestra en la siguiente imagen:



(a) Imagen Original

(b) Imagen Gradiente Multiescalar por Erosión

Figura 2.14: Gradiente Multiescalar por Erosión. Dos Iteraciones

2.14. Filtros Morfológicos

Los filtros morfológicos tienen por objetivo disminuir ruidos en la imagen, suprimiendo algunas estructuras geométricas, definidas por el elemento estructuranre.

Estos filtros poseen la propiedad de idempotencia y son crecientes, lo que nos dice con esta ultima que aseguran una relación de orden [Ortiz, 2002]. La apertura es un filtro morfológico anti-extensivo, es decir, es menor que la imagen original. El cierre es extensivo, es decir, es mayor que la imagen original.

Los filtros morfológicos pueden obtenerse por composición de filtros morfológicos básicos: apertura y cierre; la composición de estos mantiene las propiedades de los filtro morfológicos.

Los filtros basados en apertura y cierre son: $\gamma(\varphi(f))$ (apertura + cierre), $\varphi(\gamma(f))$ (cierre + apertura), $\gamma(\varphi(\gamma(f)))$ (apertura + cierre + apertura) y $\varphi(\gamma(\varphi(f)))$ (cierre + apertura + cierre). Por la idempotencia no es posible hacer otras combinaciones. Los cuales cumplen la siguiente propiedad:

$$\gamma \leq \gamma\varphi\gamma \leq \gamma\varphi \quad \text{ó} \quad \varphi\gamma \leq \varphi\gamma\varphi \leq \varphi \quad (2.31)$$

Para observar el comportamiento de estos filtros, se considera la siguiente imagen:

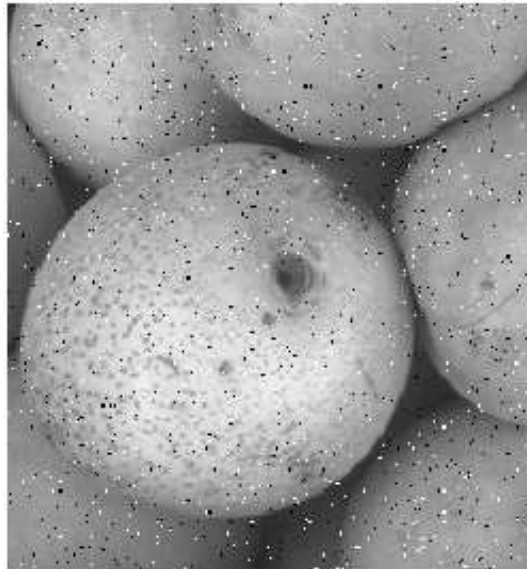


Figura 2.15: Imagen con Ruido

Un ejemplo del comportamiento de un filtro morfológico se observa en la figura 2.17:

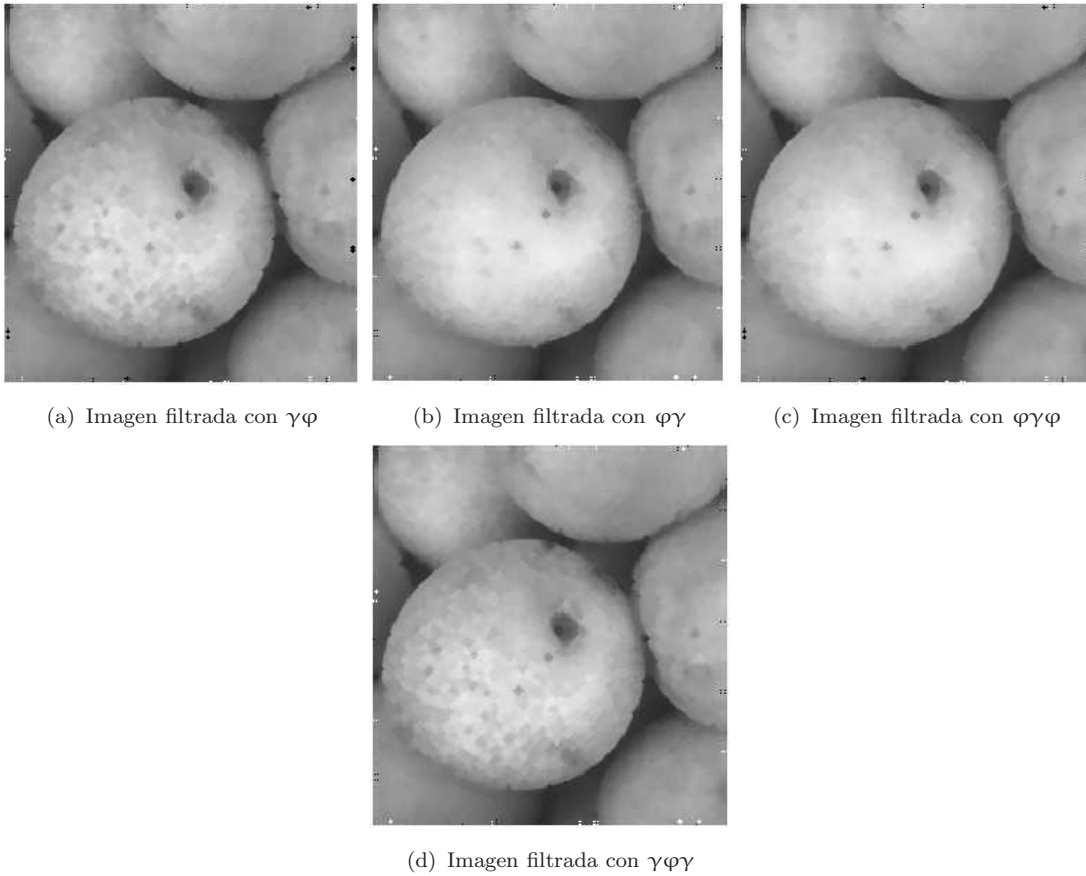


Figura 2.16: Combinaciones de Filtros Morfológicos

Se observa en la figura 2.16 el resultado de combinar los filtros básicos apertura y cierre a una imagen, donde la atenuación del ruido es notorio, para este caso, los mejores resultados se obtienen en los filtros $\phi\gamma$ y $\phi\gamma\phi$, ya que en ambos se busca los menores máximos mas pequeños en la imagen.

Estos filtros pueden ser aplicados en la búsqueda de gradientes dentro de imagen, para ello se observan la siguiente sección(2.14.1).

2.14.1. Gradiente de Filtro Morfológico por Erosión

Sea ω la expresión que define los filtros morfológicos, es decir, $\omega = \phi\gamma$ ó $\omega = \gamma\phi$ ó $\omega = \phi\gamma\phi$ ó $\omega = \gamma\phi\gamma$.

Se define el gradiente de filtro morfológico por erosión de la siguiente manera:

$$\rho_{f_{m\epsilon}} = |f - \epsilon_{B_i}(\omega_{B_{i+1}}(f))| \quad (2.32)$$

donde B_i , son elementos estructurantes de dimensión creciente.

Para observar el comportamiento de este gradiente, se muestra la figura 2.17, en este ejemplo se utilizo un filtro $\gamma\varphi\gamma$ (Apertura - Cierre - Apertura) :

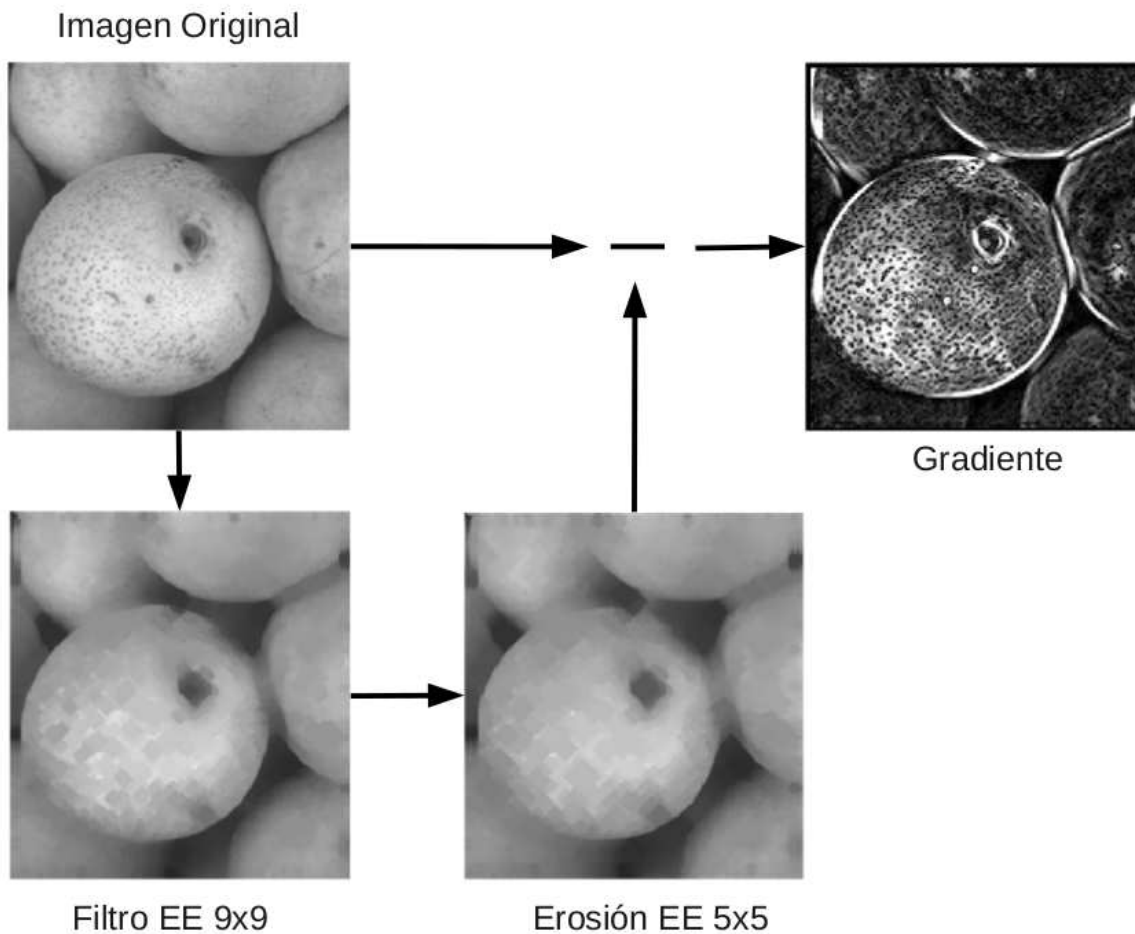


Figura 2.17: Comportamiento del Gradiente de Filtro Morfológico por Erosión. Filtro Utilizado $\gamma\varphi\gamma$

La ecuación 2.31 muestra el orden que preservan estos filtros, de la cual se deriva por ejemplo que $\varphi\gamma\varphi > \varphi\gamma$. Al aplicar este razonamiento en la ecuación 2.32, se obtiene:

$$\rho_{f_{m\varepsilon}} = |\varphi\gamma\varphi(f) - \varepsilon_{B_i}(\varphi\gamma_{B_{i+1}}(f))| \quad (2.33)$$

La figura 2.18 muestra el gradiente resultante:

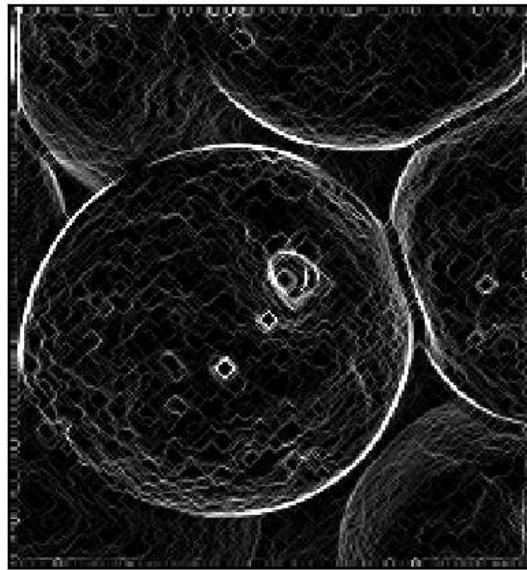


Figura 2.18: Comportamiento del Gradiente de Filtro Morfológico por Erosión - Preservando el Orden de los Filtros

Capítulo 3

Transformaciones Geodésicas

3.1. Introducción

El concepto fundamental en el desarrollo geodésico es la conectividad; esta puede ser definida de la siguiente manera: un conjunto es conectado si cada par de elementos pueden ser unidos por un camino definido por elementos pertenecientes al conjunto. En el caso discreto 2D se puede definir la conectividad como una vecindad local de píxeles adyacentes, en este sentido se tiene, la 4-conectividad y la 8-conectividad como vecindades válidas entre puntos (ver figura 3.1).

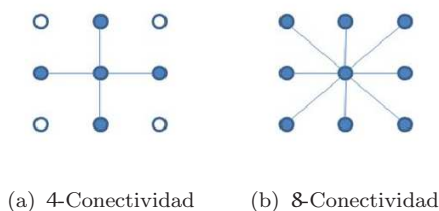


Figura 3.1: Conectividad

Las transformaciones geodésicas son operaciones morfológicas que consideran dos imágenes. La imagen a transformar se denomina marcadora y la imagen de referencia se llama máscara (ver figura 3.2).



Figura 3.2: Esquema Geodésico

Su objetivo es procesar individualmente objetos presentes en la imagen, caracterizados por una condición de conectividad. La máscara actúa de límite de propagación de la transformación del mar-

ador en el caso de la dilatación geodésica, viceversa para la erosión geodésica.

3.2. Distancia Geodésica

Sea X un conjunto no vacío. La distancia geodésica $d_X(p, q)$ entre los puntos $p, q \in X$ que se encuentran dentro del mismo objeto que están conectados, es el camino mas corto dentro del objeto que conecte a ambos puntos, en otras palabras, es el mínimo de todos los caminos desde p hasta q formado por los puntos intermedios pertenecientes al conjunto X . Si el conjunto es no conectado (ver figura 3.3), la distancia $d_X(p, r) = d_X(q, r) = \infty$.

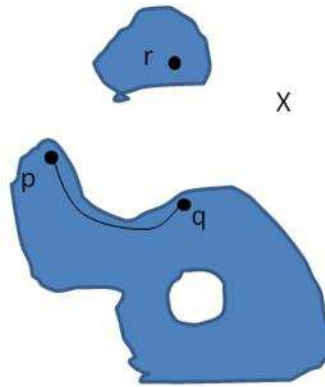


Figura 3.3: Distancia Geodésica en el conjunto X

La distancia geodésica satisface la definición de distancia que debe cumplir cualquier métrica, i.e:

$$d_X(p, q) = d_X(q, p) \quad (3.1)$$

$$d_X(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q \quad (3.2)$$

$$d_X(p, w) \leq d_X(p, q) + d_X(q, w) \quad (3.3)$$

3.3. Dilatación Condicional

La dilatación condicional de una imagen marcadora f por una imagen mascara g , utilizando un elemento estructurante B , se define por la siguiente expresión:

$$D[(f, b)/g] = \delta(f, b) \cap g \quad (3.4)$$

3.4. Dilatación Geodésica

Si f es una imagen marcadora y g la imagen mascara, tal que: $f \leq g$. Llamamos dilatación geodésica de orden 1 de f con respecto a g a la dilatación condicional de f utilizando un elemento estructurante elemental B (conectividad 4: cruz 3×3 , conectividad 8: cuadrado 3×3).

$$D_g^1(f) = \delta(f, b) \cap g \quad (3.5)$$

La máscara actúa de límite de propagación de la dilatación del marcador. Un ejemplo de ello se muestra en la figura 3.4.

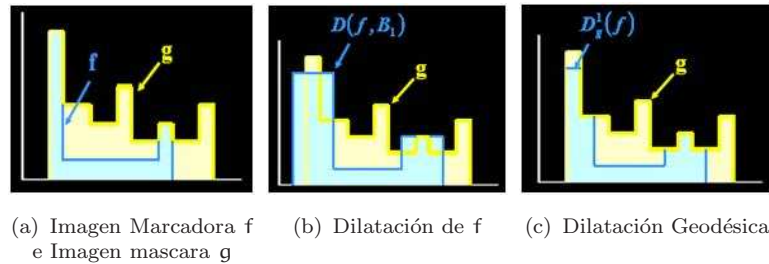


Figura 3.4: Dilatación Geodésica de orden 1 de f con respecto a g

Propiedades de la Dilatación Geodésica

- Extensiva: $f \leq D_g^1(f) \leq g$
- Creciente: Si $(f' \leq f) \wedge (g' \leq g)$, con $(f' \leq g') \wedge (f \leq g)$, entonces: $D_g^1(f') \leq D_g^1(f)$

La dilatación geodésica de orden n de f con respecto a g se obtiene haciendo n dilataciones geodésicas sucesivas de orden 1. i.e:

$$D_g^n(f) = D_g^1[D_g^{n-1}(f)]; \quad D_g^0(f) = f \quad (3.6)$$

3.5. Erosión Geodésica

Es la operación dual respecto al complemento de la dilatación geodésica. Con $g \leq f$, tenemos:

$$E_g^1(f) = \epsilon(f, b) \cup g \quad (3.7)$$

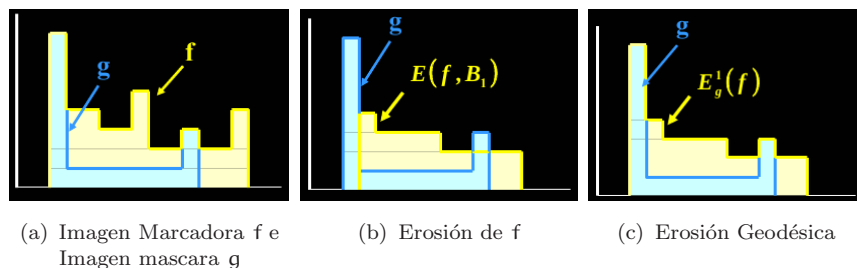


Figura 3.5: Erosión Geodésica de orden 1 de f con respecto a g

3.6. Reconstrucción Geodésica

La erosión y la dilatación geodésica poseen la particularidad que al alcanzar la idempotencia permiten la definición de poderosos algoritmos de reconstrucción morfológica. Tanto la erosión geodésica como la dilatación convergen a la idempotencia en un número finito de iteraciones, es decir, la reconstrucción geodésica se basa en iteraciones de dilatación (erosión) geodésica hasta alcanzar idempotencia.

La reconstrucción geodésica por dilatación de una imagen marcadora f en relación a la imagen mascara g ($f \geq g$), se define como la dilatación geodésica de f respecto a g hasta obtener la estabilidad (figura 3.6).

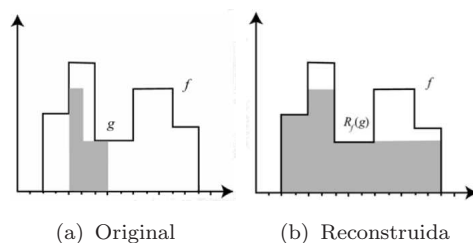


Figura 3.6: Proceso de Reconstrucción Geodésica

$$R_g(f) = D_g^i(f); \quad D_g^i(f) = D_g^{i+1}(f) \tag{3.8}$$

En la reconstrucción por dilatación la marcadora debe estar contenida en la mascara.

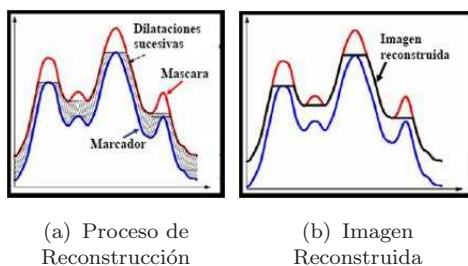


Figura 3.7: Reconstrucción Geodésica

La reconstrucción es una operación idempotente. Además, la reconstrucción por dilatación es una operación antiextensiva $R_g(f) \leq g$.

Un ejemplo de reconstrucción geodésica, se muestra en la siguiente figura:

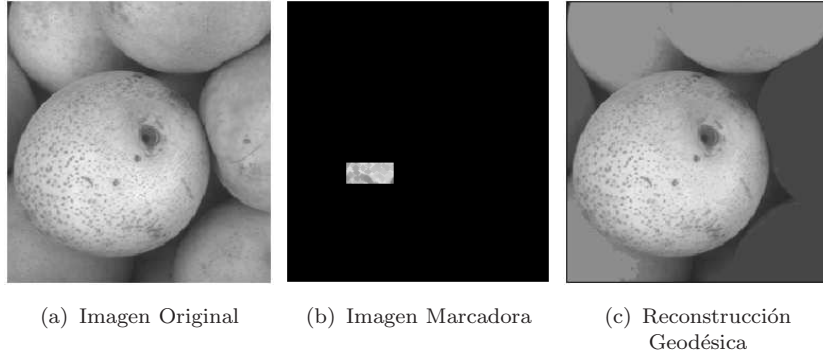


Figura 3.8: Reconstrucción Geodésica por Dilatación

La reconstrucción por erosión se define por dualidad y se expresa de la siguiente manera:

$$R_g(f) = E_g^i(f); \quad E_g^i(f) = E_g^{i+1}(f) \quad (3.9)$$

donde, imagen marcadora f e imagen mascara g ($f \geq g$).

3.7. Reconstrucción por Apertura o Cierre

La reconstrucción por apertura de tamaño n de una imagen f se define como la reconstrucción por dilatación de f a partir de la erosión clásica de tamaño n de f (la imagen marcadora se obtiene por erosión de la imagen original):

$$A_R^n(f) = R_f^\delta[e(f)] \quad (3.10)$$

Contrariamente a la apertura clásica, la reconstrucción por apertura preserva perfectamente la forma de los objetos que no son eliminados por la erosión. Todos los objetos que sean menores al elemento estructurante son suprimidos, el resto permanecen sin alteración. Un ejemplo de ello se muestra en la figura 3.9:

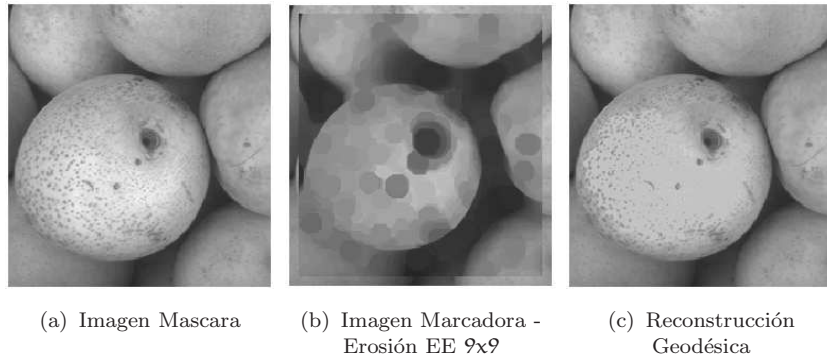


Figura 3.9: Reconstrucción Geodésica por Apertura

El reconstrucción por cierre se define por dualidad y se corresponde con la erosión geodésica hasta la idempotencia de la imagen dilatada:

$$C_R^n(f) = R_f^e[\delta(f)] \quad (3.11)$$

3.8. Divisoria de Aguas (Watershed)

El significado de la operación de watershed se encuentra en su notación francesa como la ligne de partage des eaux (línea de separación de las aguas). Esta transformación consiste en simular la inundación de la imagen numérica (vista como un mapa topográfico) a partir de los mínimos regionales. El resultado es un conjunto de contornos que identifican las regiones de la imagen [Ortiz, 2002]. En la figura 3.10 se muestra un ejemplo de ello:

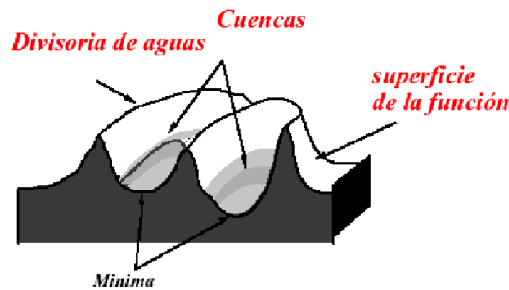


Figura 3.10: Watershed - Divisor de Cuencas

En la práctica, el proceso de segmentación morfológica se aplica a la imagen gradiente, pues se pretende identificar el contorno de los objetos.

Los mínimos proceden en este caso de la imagen gradiente. El resultado en imágenes reales suele conducir al fenómeno de la sobsegmentación, porque la presencia de mínimos en esta imagen es bastante alta [Ortiz, 2002].

Un ejemplo de sobresegmentación se observa en la figura 3.11:

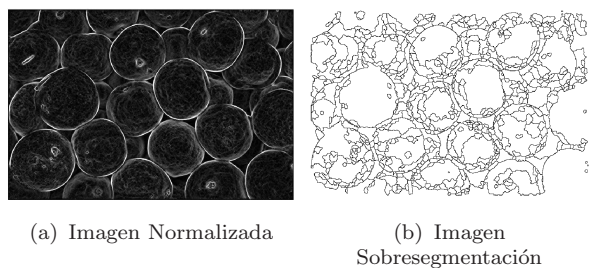


Figura 3.11: Sobresegmentación

Para reducir la sobresegmentación, al gradiente se le aplican filtros morfológicos y normalización de la imagen con algún tipo de distancia deseada (euclidia o infinita), en la figura 3.12 se muestra el siguiente esquema [J.ChanussotandP.Lambert]:

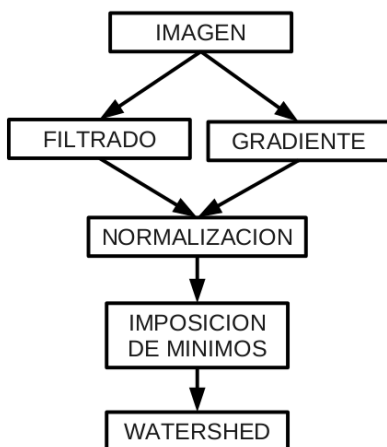


Figura 3.12: Diagrama Watershed

Un ejemplo de ello se muestra en la figura 3.13:

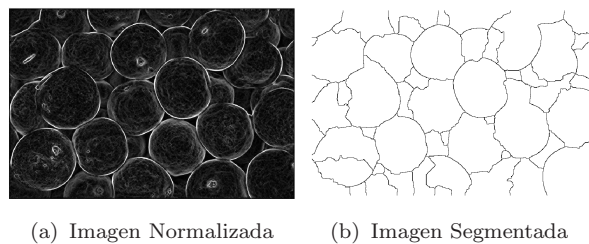


Figura 3.13: Imagen Segmentada

Capítulo 4

Ordenamiento Vectorial

4.1. Introducción

Al aplicar las propiedades asociadas al retículo, aparece el inconveniente de definir los supremos y los ínfimos entre los vectores n -dimensionales (donde $n \in \mathfrak{N}$) asociados a la imagen multicanal.

El inconveniente surge en la ausencia de orden entre los píxeles, pues se corresponden con vectores n -dimensionales y, a priori, no hay un orden natural para determinar que, por ejemplo, en el sistema RGB (donde $n = 3$), si un píxel con valor $(34, 26, 123)$ es menor que $(59, 1, 104)$. En imágenes vectoriales no existe una relación que pueda definir un orden de forma natural, estructura de retículo completo, lo que dificulta la posibilidad de formular una extensión automática de morfología matemática.

En escala de grises el orden de los valores discretos $0 < 1 < 2 < 3 \dots < 253 < 254 < 255$ es suficiente para formar el retículo completo. Una solución al problema de ausencia de orden se puede alcanzar considerando las imágenes multicanal como la composición de funciones independientes con valor bidimensional, es decir:

$$f : Z^n \longrightarrow Z / \xi(x, y) = (\xi_1(x, y), \dots, \xi_n(x, y)) \longrightarrow \xi_1(x, y), \xi_2(x, y), \dots, \xi_n(x, y); \quad n \in \mathfrak{N} \quad (4.1)$$

donde, cada $\xi_i(x, y)$ con $i = \{1, \dots, n\}$ corresponde a un píxel en su canal correspondiente.

El procesamiento marginal es aplicar el operador morfológico a cada canal por separado, por ejemplo, la erosión aplicada a la ecuación 4.1 resulta:

$$\varepsilon(f) : Z^n \longrightarrow Z / \varepsilon(\xi(x, y)) \longrightarrow \varepsilon(\xi_1(x, y)), \dots, \varepsilon(\xi_n(x, y)) \quad (4.2)$$

Esto trae como consecuencia la aparición de colores falsos, como es el caso en imágenes a color.

Por ejemplo, en las imágenes a color en el espacio RGB al separar la imagen en sus componentes cromáticas rojo, verde y azul, se considera la imagen como composición de mapas unidimensionales de valor $\xi_1(x, y) = \text{rojo}$, $\xi_2(x, y) = \text{verde}$ y $\xi_3(x, y) = \text{azul}$, i.e:

$$f_1 : Z^3 \longrightarrow Z \text{ tal que } X = (x, y) \longrightarrow \xi_1(x, y) \quad (R) \quad (4.3)$$

$$f_2 : Z^3 \longrightarrow Z \text{ tal que } X = (x, y) \longrightarrow \xi_2(x, y) \quad (G) \quad (4.4)$$

$$f_3 : Z^3 \longrightarrow Z \text{ tal que } X = (x, y) \longrightarrow \xi_3(x, y) \quad (B) \quad (4.5)$$

Al aplicar un operador morfológico que requiere el ordenamiento (erosión o dilatación) de cada canal de la imagen, se introducen colores que no existen en la imagen original, es por ello la necesidad de recurrir a un tratamiento vectorial para las imágenes multicanal. En la figura 4.1a se muestra una imagen a color, al aplicarle a esta imagen una erosión con el tratamiento individual, utilizando un elemento estructurante cuadrado de lado 4, se tiene como resultado la imagen de la figura 4.1b, donde aparece el color falso $(0, 0, 0)$, el cual no existe en la imagen original.

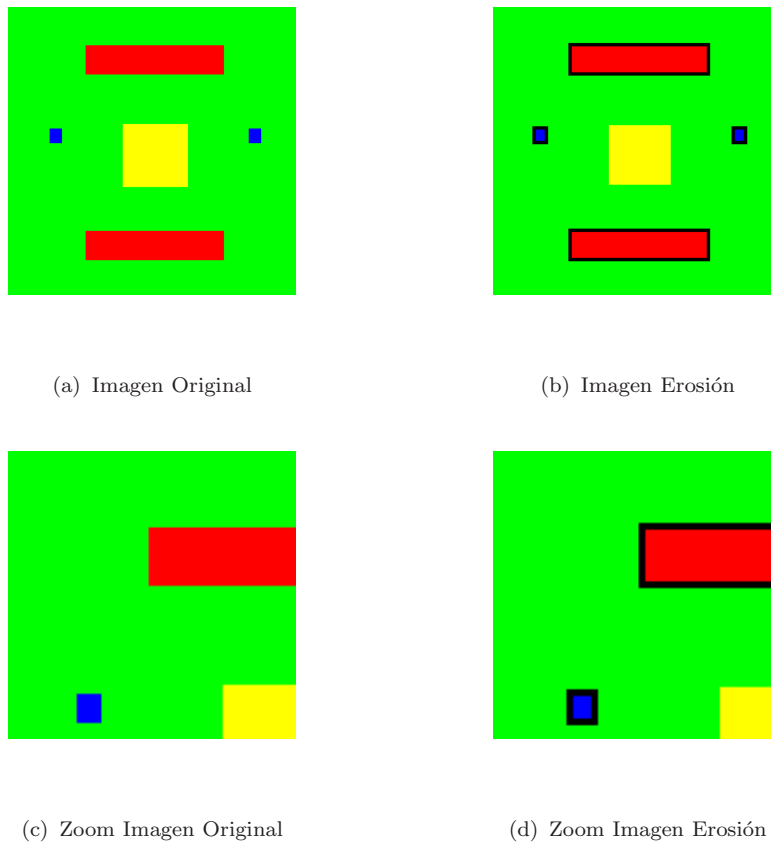


Figura 4.1: Colores falsos presentes en las imágenes a color

En la figura 4.1c y 4.1d se presenta un zoom de las imágenes 4.1a y 4.1b para mejor apreciación de lo antes expuesto.

Es por ello, la necesidad de definir un orden n -dimensional, que facilite el estudio en las imágenes multicanales.

4.2. Relaciones de Orden n -Dimensionales

A continuación se realiza una revisión de algunas técnicas de ordenamiento para los vectores n -dimensionales.

4.2.1. Orden en Base a la Primera Componente

Sea $\xi^1(x, y), \xi^2(x, y) \in Z^n$, donde

$\xi^1(x, y) = (\xi_1^1(x, y), \dots, \xi_n^1(x, y))$ y $\xi^2(x, y) = (\xi_1^2(x, y), \dots, \xi_n^2(x, y))$, se tiene que:

$$\xi^1(x, y) < \xi^2(x, y) \iff \xi_1^1(x, y) < \xi_1^2(x, y) \quad (4.6)$$

Consiste en ordenar vectores atendiendo al valor de una única componente [Ortiz, 2002], previamente definida como fuente del orden. El orden en este caso se reduce a una comparación escalar. Se deduce que este tipo de relación no es antisimétrica, ya que si consideramos los vectores $\xi^1(x, y) = (x_0, y_1, z_1)$ y $\xi^2(x, y) = (x_0, y_2, z_2)$ (donde $n = 3$), se tiene que $\xi^1(x, y) \leq \xi^2(x, y)$ y $\xi^2(x, y) \leq \xi^1(x, y)$, entonces $\xi^1(x, y) = \xi^2(x, y)$, no es cierto, pues $\xi^1(x, y) \neq \xi^2(x, y)$ por construcción. Esta relación se denominara formalmente un preorden (conjunto que cumple con la definición de reflexión y transitividad).

La figura 4.2 muestra como es el comportamiento en espacio 3D de este ordenamiento:

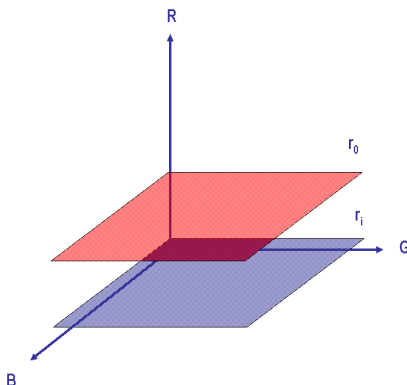


Figura 4.2: Representación del Orden Primera Componente en el espacio 3D

Los vectores en el plano $r_0, \forall g, b \in RGB$ no son iguales. Los que se encuentran en el plano r_i son menores, es decir, $r_i < r_0$.

4.2.2. Orden por Medida de Distancia

Sea $\xi^1(x, y), \xi^2(x, y) \in Z^n$,

donde $\xi^1(x, y) = (\xi_1^1(x, y), \dots, \xi_n^1(x, y))$ y $\xi^2(x, y) = (\xi_1^2(x, y), \dots, \xi_n^2(x, y))$, se tiene que:

$$\xi^1(x, y) < \xi^2(x, y) \iff \sqrt{(\xi_1^1(x, y))^2 + \dots + (\xi_n^1(x, y))^2} < \sqrt{(\xi_1^2(x, y))^2 + \dots + (\xi_n^2(x, y))^2} \quad (4.7)$$

Este método de orden se basa en el cálculo de una distancia a un píxel de referencia [Ortiz, 2002], previamente definido. En la mayoría de los casos el píxel de referencia es el vector 0 .

Si consideramos los vectores $\xi^1(x, y) = (a, 0, 0)$, $\xi^2(x, y) = (0, a, 0)$, se tiene que por este orden los vectores $\xi^1(x, y)$ y $\xi^2(x, y)$ son iguales, ya que poseen la misma longitud, pero el vector $\xi^1(x, y) \neq \xi^2(x, y)$ por construcción. Por lo cual, a este método de distancia se le denomina un preorden.

Este método de la distancia es un preorden, pues es evidente que la reducción a un escalar por medida de distancia (euclídea, por ejemplo) no produce escalares únicos por cada vector.

La figura 4.3 muestra como es el comportamiento en espacio 3D de este ordenamiento:

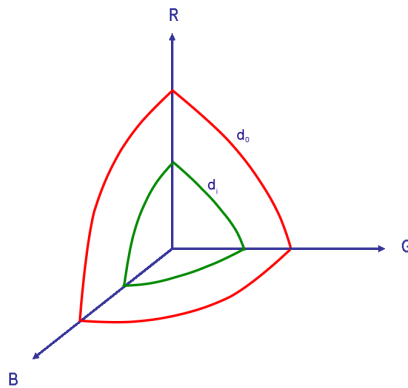


Figura 4.3: Representación del Orden por Medida de Distancia en el Espacio 3D

4.2.3. Orden Canónico

Sea $\xi^1(x, y), \xi^2(x, y) \in Z^n$,

donde $\xi^1(x, y) = (\xi_1^1(x, y), \dots, \xi_n^1(x, y))$ y $\xi^2(x, y) = (\xi_1^2(x, y), \dots, \xi_n^2(x, y))$, se tiene que:

$$\xi^1(x, y) < \xi^2(x, y) \iff \xi_i^1(x, y) < \xi_i^2(x, y) \forall i \in \mathfrak{N} \quad (4.8)$$

El orden inducido por la comparación es parcial [Ortiz, 2002]. Los vectores que no cumplen con la ecuación (4.8) no son comparables y dan origen a indeterminación, por lo tanto, pueden quedar zonas en la imagen donde el orden sea indeterminado. Por ejemplo, al considerar los vectores $\xi^1(x, y) = (120, 220, 30)$ y $\xi^2(x, y) = (30, 220, 120)$, siguiendo este orden, los vectores $\xi_1^1(x, y)$ y $\xi_2^1(x, y)$ no son comparables.

La figura 4.4 muestra como es el comportamiento en espacio 3D de este ordenamiento:

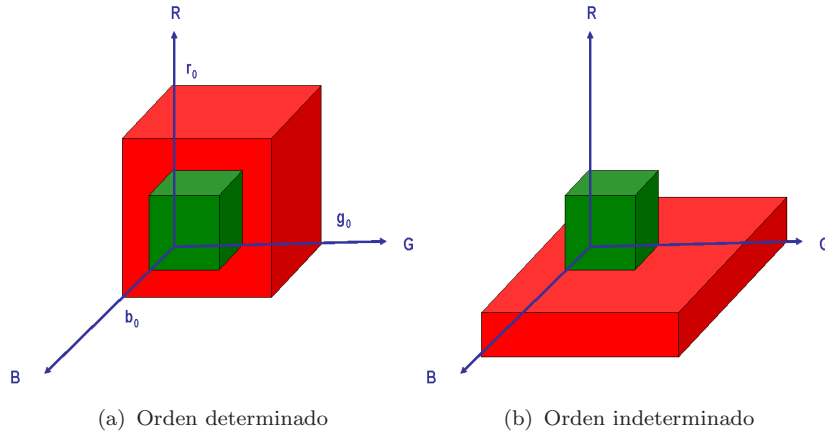


Figura 4.4: Representación del Orden Canónico en el Espacio 3D

Los vectores que se encuentran sobre el paralelepípedo (de color rojo) definido por (r_0, g_0, b_0) son iguales, si se encuentran dentro de el (paralelepípedo de color verde) son menores que los que se encuentran en el de color rojo (figura 4.4a).

La figura 4.4a muestra cuando dos colores son comparables con respecto al orden canónico, es decir, que existe una relación de orden de tipo parcial entre los vectores del espacio. La figura 4.4b muestra cuando el orden canónico es indeterminado.

4.2.4. Orden Bit Mixing

Dada una función biyectiva h , la cual satisface el orden total:

$$h : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R} \tag{4.9}$$

$$x \rightarrow h(x) \tag{4.10}$$

El orden está definido en el espacio de color (para $n = 3$) sobre \mathfrak{R} .

$$\forall(x_i, x_j) \in \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R}^3, x_i \leq x_j \Leftrightarrow h(x_i) \leq h(x_j) \tag{4.11}$$

Como h es biyectiva, el \sup y el \inf están definidos de forma única:

$$x_{\inf} = h^{-1}[\text{mín}(h(x_i))] \tag{4.12}$$

$$x_{\sup} = h^{-1}[\text{máx}(h(x_j))] \tag{4.13}$$

La figura 4.5 muestra un ejemplo en el caso 3D de ordenamiento en forma de bit [P.Lambertand].Chanussot

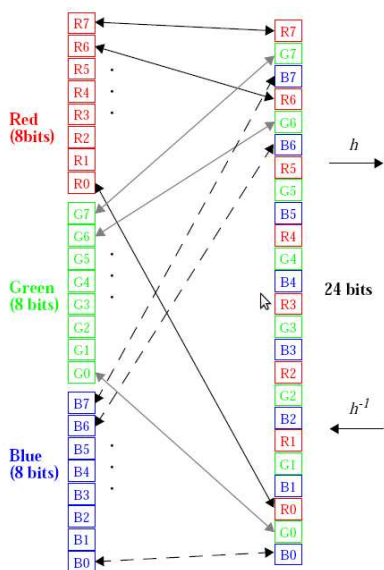


Figura 4.5: Codificación y Decodificación en el espacio 3D. Imagen perteneciente a: Patrick Lambert & Jocelyn Chanussot. “Extending Mathematical Morphology to Color Image Processing”. International Conference on Color in Graphics and Image Processing - CGIP’2000.

Este ordenamiento presenta una corrección muy favorable de la asimetría entre los píxeles, pero no es considerada para nuestro trabajo, porque no es tan flexible a la hora de interactuar con las interpretaciones físicas.

4.2.5. Orden Lexicográfico

Dados los vectores $\xi^1(x, y), \xi^2(x, y) \in Z^n$, donde $\xi^1(x, y) = (\xi_1^1(x, y), \dots, \xi_n^1(x, y))$ y $\xi^2(x, y) = (\xi_1^2(x, y), \dots, \xi_n^2(x, y))$, se define el Orden Lexicográfico con la notación \leq_{lex} , a los vectores satisfacen la siguiente condición:

$$\xi^1(x, y) <_{\text{lex}} \xi^2(x, y) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi_1^1(x, y) < \xi_1^2(x, y) \\ \text{ó} \\ \xi_1^1(x, y) = \xi_1^2(x, y) \text{ y } \xi_2^1(x, y) < \xi_2^2(x, y) \\ \text{ó} \\ \vdots \\ \xi_1^1(x, y) = \xi_1^2(x, y) \text{ y } \xi_2^1(x, y) = \xi_2^2(x, y) \dots \xi_n^1(x, y) < \xi_n^2(x, y) \end{array} \right.$$

Este orden es también conocido como orden diccionario, y cumple con la definición de orden total (ver Teorema 5.1).

La figura 4.6 muestra como es el comportamiento en espacio 3D de este ordenamiento:

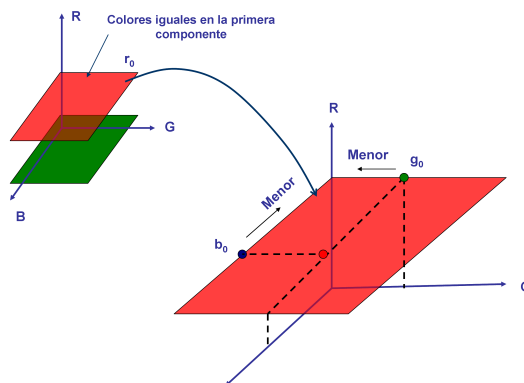


Figura 4.6: Representación del Orden Lexicográfico en el espacio 3D

Si dos vectores del espacio poseen la primera componente distinta, es decir, son comparables por la primera componente, entonces se tendrá una representación como en la figura 4.6, donde los vectores que pertenecen al plano de color verde son menores a los que pertenecen al plano de color rojo. Cuando los vectores poseen igual la primera componente, entonces sobre el plano r_0 (de color rojo) se realiza la comparación de los vectores por la segunda componente (figura 4.6). Cuando las coordenadas g_0 y b_0 tienden al origen de eje, entonces estas son menores que las que se alejan de el.

Una de las características más importantes de este orden, por el cual fue considerado para el desarrollo de este trabajo, es que el orden lexicográfico permite la clasificación de sus componentes a estudiar partiendo de una interpretación física [E.AptoulaandS.Lefevre, 2007], por ejemplo, al considerar como primer patrón de estudio la suma de las componentes de un píxel, nos facilita la interpretación en los resultados al analizar imágenes satelitales.

Capítulo 5

Ordenamiento SDL n -Dimensional

5.1. Introducción

Los primeros desarrollos de la morfología matemática y donde ha tenido su máxima evolución y orientación es en la aplicación en imágenes binarias y en tonos de gris. Se han desarrollado bibliotecas en distintos lenguajes de programación, incluyendo MatLab, para la aplicación de los operadores morfológicos a este tipo de imágenes.

Recientemente los operadores morfológicos se han extendido a imágenes a color, las cuales pueden estar representadas en los diferentes espacios de color: RGB, HSI, HSL, Lab, etc. Se han desarrollado bibliotecas para aplicar los operadores morfológicos en imágenes a color. Las aplicaciones realizadas son: Filtrado de imágenes, watershed, segmentación, eliminación de un color específico de la imagen considerando el elemento estructurante con forma y color.

En las imágenes multicanales, existen pocas bibliotecas de morfología matemática que permitan aplicar los desarrollos conocidos en imágenes binarias, tonos de gris o color. La mayor parte de las bibliotecas utilizan el ordenamiento marginal.

Nuestro propósito es disponer de una biblioteca de operadores morfológicos que permita la aplicación de operadores morfológicos en imágenes multicanales.

Teorema 5.1 *El Orden lexicográfico es un orden total.*

Demostración 5.1 *Sean tres vectores $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ y $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$ tal que $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in Z^n$ y $n \in \mathbb{N}$*

Para $n = 1$ la relación de Orden Lexicográfico es exactamente el orden en \mathbb{N} , y por lo tanto es relación de orden.

Supongamos que el Orden Lexicográfico es una relación de orden (Capítulo 2, sección 2,3) para $n - 1$, verifiquemos para n .

Reflexiva

Como $x_1 = x_1$, y por hipótesis de inducción se cumple para $n - 1$, se tiene que $(x_2, \dots, x_n) \leq_{\text{lex}} (x_2, \dots, x_n)$. Entonces por la definición de Orden Lexicográfico se tiene que $(x_1, \dots, x_n) \leq_{\text{lex}} (x_1, \dots, x_n)$; por lo tanto es reflexiva.

Antisimétrica

Supongamos que,

$$(x_1, \dots, x_n) \leq_{\text{lex}} (y_1, \dots, y_n) \quad (5.1)$$

y

$$(y_1, \dots, y_n) \leq_{\text{lex}} (x_1, \dots, x_n) \quad (5.2)$$

Ahora bien, supongamos en (5.1) se cumple $x_1 < y_1$, entonces por (5.2) se tiene que: ó $y_1 < x_1$, ó $y_1 = x_1$ y $(y_2, \dots, y_n) \leq_{\text{lex}} (x_2, \dots, x_n)$. La primera opción no puede ser por que se supuso que $x_1 < y_1$ y el orden es estricto, pero la segunda ha de ser $y_1 = x_1$ lo cual es una contradicción ya que se supuso que $x_1 < y_1$.

Por ende solo puede ocurrir que $x_1 = y_1$, y ello trae como consecuencia que por (5.1), $(x_2, \dots, x_n) \leq_{\text{lex}} (y_2, \dots, y_n)$, y por (5.2), $(y_2, \dots, y_n) \leq_{\text{lex}} (x_2, \dots, x_n)$; y por hipótesis inductiva, como \leq_{lex} es un orden para $n - 1$, se tiene que $(y_2, \dots, y_n) = (x_2, \dots, x_n)$; y como $x_1 = y_1$ entonces $(y_1, \dots, y_n) = (x_1, \dots, x_n)$. Por lo tanto, es antisimétrica.

Transitiva

Supongamos que:

$$(x_1, \dots, x_n) \leq_{\text{lex}} (y_1, \dots, y_n) \quad (5.3)$$

$$(y_1, \dots, y_n) \leq_{\text{lex}} (z_1, \dots, z_n) \quad (5.4)$$

Supongamos $x_1 < y_1$, entonces

Si $y_1 < z_1$, se tiene que $x_1 < y_1$, y por definición de Orden Lexicográfico se obtiene que $(x_1, \dots, x_n) \leq_{\text{lex}} (z_1, \dots, z_n)$.

Si $y_1 = z_1$, se tiene que $x_1 < z_1$, y por definición de Orden Lexicográfico se obtiene que $(x_1, \dots, x_n) \leq_{\text{lex}} (z_1, \dots, z_n)$.

Ahora supongamos que $x_1 = y_1$, entonces

Si $y_1 < z_1$, se tiene que $x_1 < z_1$, y por definición de Orden Lexicográfico se obtiene que $(x_1, \dots, x_n) \leq_{\text{lex}} (z_1, \dots, z_n)$.

Si $y_1 = z_1$, se tiene que

$$(x_2, \dots, x_n) \leq_{\text{lex}} (y_2, \dots, y_n) \quad (5.5)$$

$$(y_2, \dots, y_n) \leq_{\text{lex}} (z_2, \dots, z_n) \quad (5.6)$$

y por hipótesis inductiva al ser \leq_{lex} transitiva para $n - 1$, se tiene que

$$(x_2, \dots, x_n) \leq_{\text{lex}} (z_2, \dots, z_n) \quad (5.7)$$

y como $x_1 = y_1 = z_1$, se tiene que

$$(x_1, \dots, x_n) \leq_{\text{lex}} (z_1, \dots, z_n) \quad (5.8)$$

Entonces la relación es transitiva. Por lo tanto la relación de Orden Lexicográfico es un orden parcial.

Ahora bien, por definición de Orden Lexicográfico $\forall p, q \in Z^n$, se cumple que $p \leq_{\text{lex}} q$ o $q \leq_{\text{lex}} p$. Por lo tanto, la relación de Orden Lexicográfico es un orden total. ■

5.2. Ordenamiento Multicanal

Las imágenes que se estudian en este trabajo pertenecen a un espacio de dimensión n , donde $n \in \mathbb{N}$. Las imágenes multicanal son adquiridas simultáneamente por una batería de n sensores, están representadas en un espacio de dimensión n . Por ende, cada píxel se representa como un vector de dimensión n .

La definición de operadores morfológicos requiere definir relaciones de orden total que no es posible definir de manera absoluta en imágenes multidimensionales. No tiene una solución única, lo que nos obliga a definir estrategias (algoritmos) para establecer relaciones de orden total, las cuales deben estar adaptadas al problema.

El ordenamiento propuesto (el cual sera definido con el símbolo " $<_{\text{SDL}}$ ") debe ser de tipo "Orden Total", ya que la morfología matemática está basada sobre conjuntos que forman "Retículos

Completos ”. El cual estará representado bajo la estructura del Orden Lexicográfico, es decir, se trata de una variante del orden lexicográfico, considerando las componentes a estudiar como ordenes reducidos que interactúan con las expresiones físicas necesarias en este trabajo, de la manera siguiente:

Dado el píxel vectorial $\xi(x, y) \in Z^n$, donde $\xi(x, y) = (\xi_1(x, y), \dots, \xi_n(x, y))$. Las componentes a estudiar se clasifican de la siguiente manera:

Primera Condición:

Sean dos píxeles vector $\xi^1(x, y)$ y $\xi^2(x, y)$, si la suma de las componentes de $\xi^1(x, y)$ son menores a las de $\xi^2(x, y)$, entonces se tendrá, que el vector $\xi^2(x, y)$ es mayor que $\xi^1(x, y)$.

$$S = \sum_{i=1}^n \xi_i(x, y) \quad (5.9)$$

La figura 5.1 muestra una representación de esta condición en el espacio 3D, es decir, 3 canales.

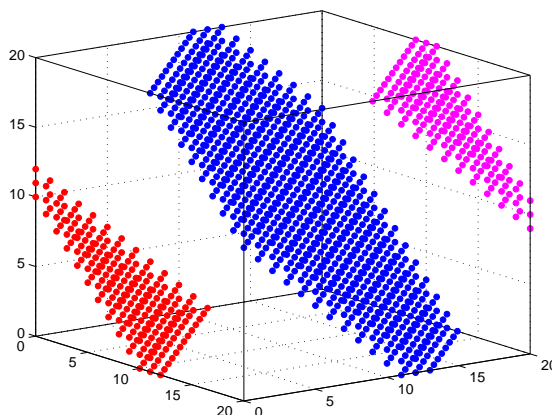


Figura 5.1: Representación 3D de la Primera Condición

Donde cada plano de la figura 5.1 corresponde a píxeles que tienen la misma suma de sus componentes, es decir, supongamos que el píxel ξ^1 pertenece al plano de color rojo, y el ξ^2 al de color azul, entonces, $\xi^1 < \xi^2$, ya que el ξ^2 tendrá mayor Suma que ξ^1 .

Segunda Condición:

Sean dos píxeles vector $\xi^1(x, y)$ y $\xi^2(x, y)$, si la suma de diferencias de las componentes de $\xi^1(x, y)$ son menores a las de $\xi^2(x, y)$, entonces se tendrá, que el vector $\xi^2(x, y)$ es mayor que $\xi^1(x, y)$; esto nos da información de la variación de los píxeles, aproximándose a una derivada, en otras palabras, podemos medir la frecuencia del comportamiento entre los píxeles.

$$SD = \sum_{i=1}^{n-1} |\xi_{i+1}(x, y) - \xi_i(x, y)| \quad (5.10)$$

En la figura 5.2 se muestra la diferencia en variación de un píxel para esta segunda condición, teniendo como resultado para la curva roja un valor de 19, y para la curva azul un valor de 20 en Suma de Diferencias Consecutivas, lo cual indica que el píxel representado por la curva de color azul posee mayor variación de las pendientes en las rectas que la conforman:

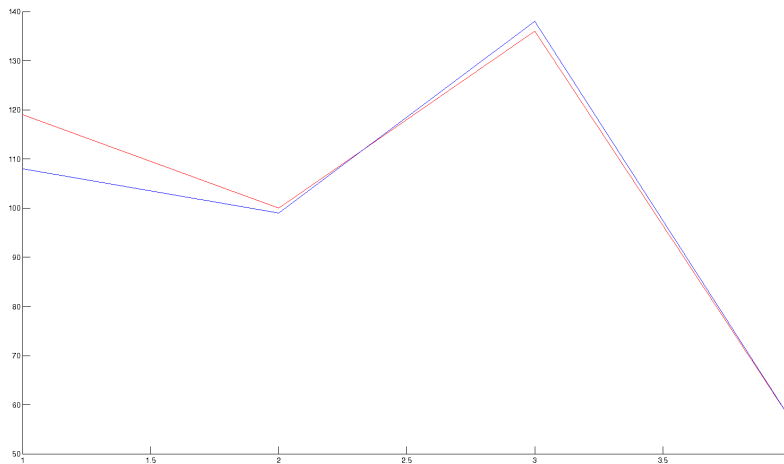


Figura 5.2: Comparación de Resultados en Suma de Diferencias Consecutivas para un Pixel Dado

Detalles de la figura 5.2:

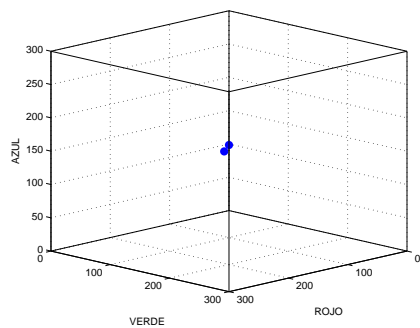
Imagen Utilizada: Imagen Satéltal de 4 Canales.

Píxeles Utilizados: $(109, 100, 136, 57)$ y $(108, 99, 138, 57)$, ambos con Suma de Componentes igual a 402.

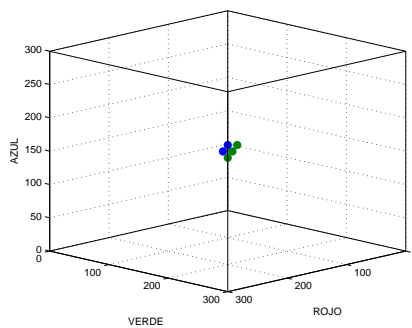
Curva Roja: Suma de Diferencias Consecutivas = 36.

Curva Azul: Suma de Diferencias Consecutivas = 39.

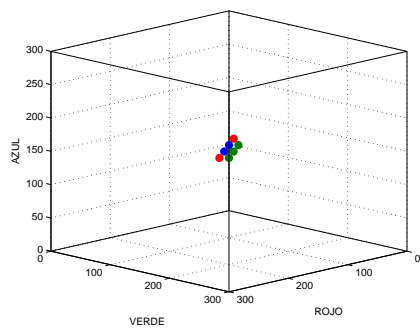
Para ilustrar el comportamiento de la Segunda Condición en el espacio 3D, se observa la figura 5.3:



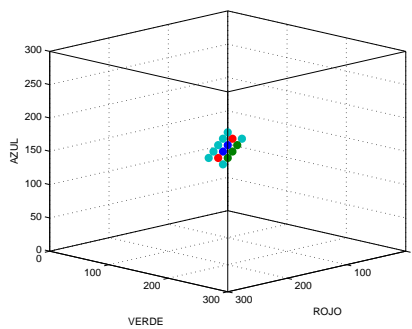
(a) Píxeles Menores - Primera Secuencia



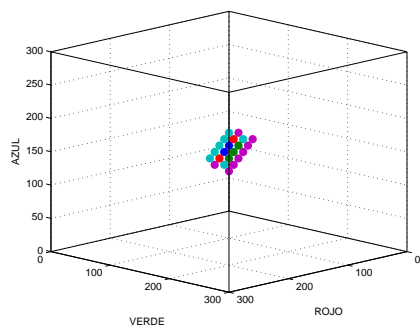
(b) Segunda Secuencia



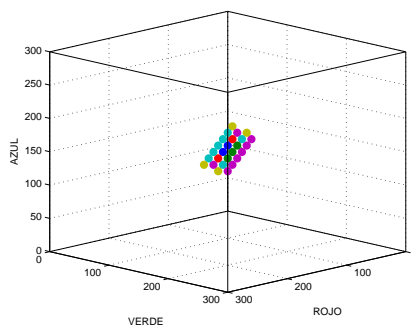
(c) Tercera Secuencia



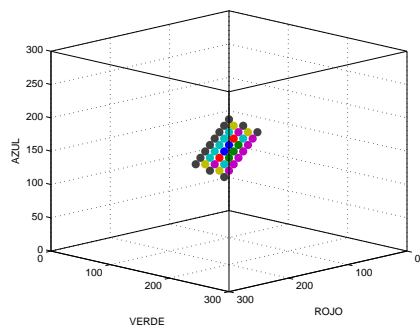
(d) Cuarta Secuencia



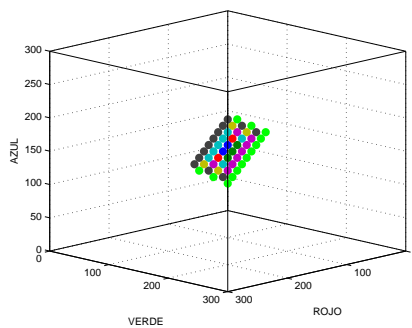
(e) Quinta Secuencia



(f) Sexta Secuencia



(g) Séptima Secuencia



(h) Octava Secuencia

Figura 5.3: Secuencias del Comportamiento en Representación 3D de la Segunda Condición

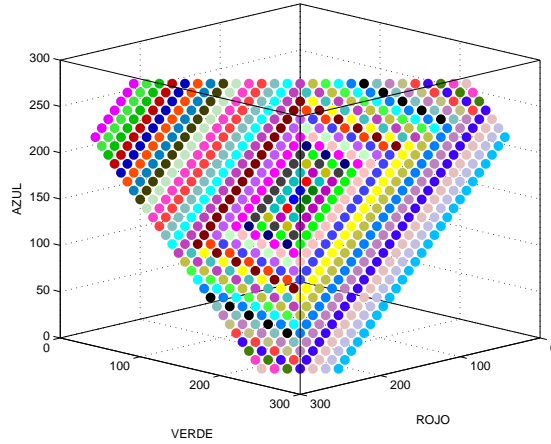


Figura 5.4: Representación 3D de la Segunda Condición

La figura 5.4 refleja el comportamiento de los píxeles en la Segunda Condición, donde todos los píxeles que pertenecen a este plano poseen la misma Suma (Primera Condición) y los que poseen un mismo color tiene la misma “suma del modulo de la diferencia de dos valores consecutivos”, y allí interviene el orden lexicográfico, el cual es analizado en la Tercera Condición.

Tercera Condición:

Re-ordenar las componentes de cada píxel (vector de dimensión n), considerando el Orden Lexicográfico aplicado directamente al píxel. Se debe establecer a priori el orden en que van a ser considerados los canales, lo cual dependerá del tipo de imagen a estudiar.

Dados los píxeles $\xi^1(x, y), \xi^2(x, y) \in Z^n$, donde $\xi^1(x, y) = (\xi_1^1(x, y), \dots, \xi_n^1(x, y))$ y $\xi^2(x, y) = (\xi_1^2(x, y), \dots, \xi_n^2(x, y))$, se tiene que:

$$\xi^1(x, y) <_{\text{lex}} \xi^2(x, y) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi_1^1(x, y) < \xi_1^2(x, y) \\ \text{ó} \\ \xi_1^1(x, y) = \xi_1^2(x, y) \text{ y } \xi_2^1(x, y) < \xi_2^2(x, y) \\ \text{ó} \\ \vdots \\ \xi_1^1(x, y) = \xi_1^2(x, y) \text{ y } \xi_2^1(x, y) = \xi_2^2(x, y) \dots \xi_n^1(x, y) < \xi_n^2(x, y) \end{array} \right.$$

El comportamiento de esta Tercera Condición se presenta en la figura 5.3:

La Tercera Condición tomara el control del algoritmo en aquellos píxeles de la figura 5.4 que que no han sido ordenados por las condiciones anteriores, tomando un grupo de ellos, se presentan

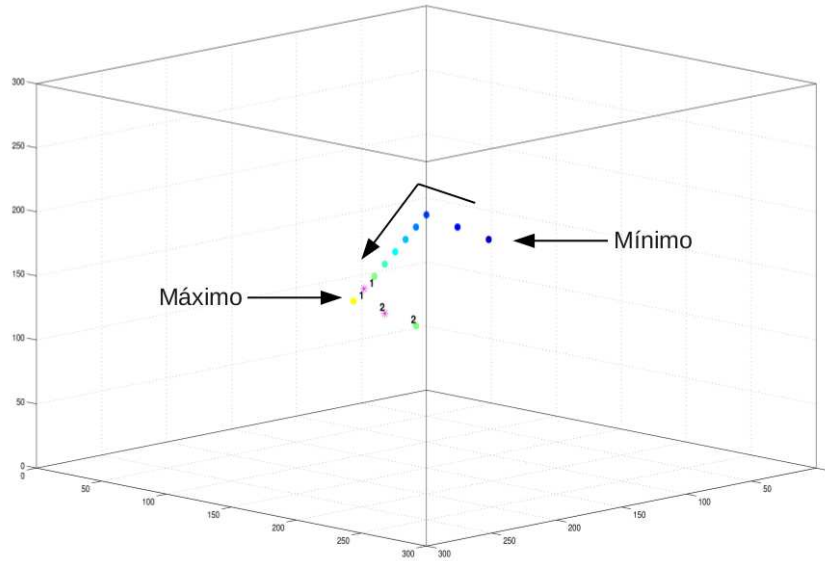


Figura 5.5: Representación 3D de la Tercera Condición

en la figura 5.5, donde se muestra el comportamiento de esta condición. Los píxeles que presentan el mismo color poseen la primera componente del vector igual, para dar un ejemplo, se observa los píxeles marcados con * o los de color verde, donde ambos tienen la primera coordenada igual y el orden lexicográfico considerara la segunda coordenada como patrón de comparación, quedando así el píxel etiquetado con 2 mayor que el 1.

El esquema del ordenamiento propuesto en este trabajo lo podemos representar de la siguiente forma:

Sean

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \xi_i^1(x, y)$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2(x, y)$$

$$SD_1 = \sum_{i=1}^{n-1} |\xi_{i+1}^1(x, y) - \xi_i^1(x, y)|$$

$$SD_2 = \sum_{i=1}^{n-1} |\xi_{i+1}^2(x, y) - \xi_i^2(x, y)|$$

entonces,

$$\xi^1(x, y) <_{SDL} \xi^2(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 < S_2 \\ \text{ó} \\ S_1 = S_2 \text{ y } SD_1 < SD_2 \\ \text{ó} \\ S_1 = S_2 \text{ y } SD_1 = SD_2 \text{ y } \xi^1(x, y) <_{lex} \xi^2(x, y) \end{cases}$$

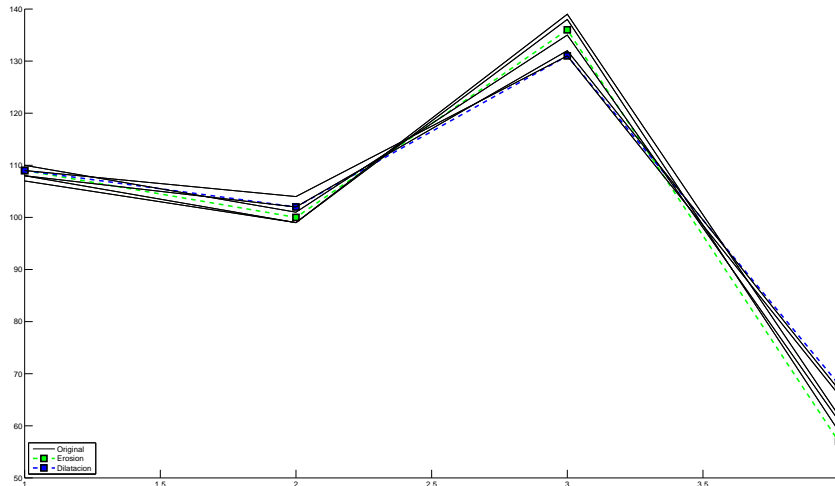


Figura 5.6: Comportamiento de los píxeles

En la figura 5.6 se muestra el comportamiento de los píxeles al aplicarle el Ordenamiento SDL, donde la línea verde muestra el resultado de la erosión y la azul la dilatación. Este resultado, como se muestra en la figura, dependerá de las componentes de cada vector n-dimensional, para su clasificación, es decir, no depende de su posición espacial lo que lo hará mayor o menor entre ellos, sino las condiciones antes mencionadas.

Una vez establecida la relación de orden total, se diseñan los operadores morfológicos básicos y los diferentes filtros basados en ellos.

5.3. Análisis del Ordenamiento

Cada condición del ordenamiento se aplica a la imagen dependiendo de su estructura, de la forma como la imagen esta constituida (ver Anexos 2 y 3), es por ello que en esta sección se obtendrá información detallada del comportamiento de cada una de las condiciones que conforman el orden propuesto en este trabajo, el cual se utilizaran elementos estructurantes (EE) de distintas dimensiones, y así obtener un porcentaje de la cantidad de píxeles que pertenecen a cada EE al pasar por las distintas condiciones del ordenamiento, lo cual dará como información la importancia entre cada condición de ordenamiento y la imagen a estudiar.

La ecuación utilizada para el calculo de los porcentaje es:

$$\kappa = \frac{\text{Total de Vectores Ordenados}}{\text{Total de Vectores en la Imagen}} \quad (5.11)$$

5.3.1. Análisis Imagen Satelital (4 Canales)



Figura 5.7: Imagen Satelital

Aplicando la ecuación 5.11 a la imagen satelital, la cual esta constituida por 4 canales, se obtiene la siguiente tabla:

| | Primera Condición | Segunda Condición | Tercera Condición |
|--------|-------------------|-------------------|-------------------|
| EE 3x3 | 69,2704 % | 28,8586 % | 1,8710 % |
| EE 5x5 | 47,6756 % | 48,1494 % | 4,1750 % |
| EE 7x7 | 34,0331 % | 58,9225 % | 7,0444 % |

Podemos observar que en las dos primeras columnas (primera y segunda condición) es donde el ordenamiento realiza la mayor parte de la clasificación vectorial, dejando así un porcentaje mínimo en la tercera condición (lexicográfico), ya que el orden lexicográfico esta presente para garantizar el orden total en el espacio n -dimensional, es decir, a el llegaran aquellos elementos que poseen igual Suma (primera condición) e igual Suma de Diferencias Consecutivas (segunda condición).

A medida que incrementamos el tamaño del elemento estructurante (EE) aumenta los vectores con igual suma, y allí es donde la segunda condición toma mayor poder de decisión en el análisis.

Al aplicar un EE 3x3 se obtiene que el 69,2704 % de los píxeles que pertenecen a la ventana deslizante están siendo analizados por la primera condición (Suma de las componentes del vector multicanal), esto se debe a la variabilidad de píxeles distintos (pertenecientes a diferentes planos) que están presente en ese sección de la imagen. Todos aquellos que pertenescan al mismo plano (que posean igual Suma), serán tratados por la segunda condición, que para este caso son el 28,8586 %, quedan así, solo un 1,8710 % los cuales serán analizados por el orden lexicográfico. Al observar el resultado del análisis con un EE 5x5 se obtiene, un porcentaje de 47,6756 % en la primera condición y de 48,1494 % en la segunda condición, es decir, un porcentaje equivalente entre ambas condiciones, lo que significa que para estas secciones de la imagen existen mayor cantidad de píxeles que cohabitan en el mismo plano (poseen la misma Suma), ya que la imagen allí es menos uniforme entre sus regio-

nes, y la tercera condición aumenta a un 4,1750 % debido a esta diversidad. Ahora bien, al aplicar un EE 7x7 el resultado es totalmente opuesto a los anteriores, donde, el 34,0331 % se encuentra bajo el control de la primera condición, y un 58,9225 % bajo la segunda condición, debido a que al aumentar la dimensión del EE, aumenta la probabilidad de que aparezcan píxeles con igual Suma, y esto lleva como consecuencia un mayor porcentaje en la tercera condición (7,0444 %); por lo que es recomendable trabajar con elementos estructurantes de dimensión pequeña.

5.3.2. Análisis Imagen RMN (8 Canales)

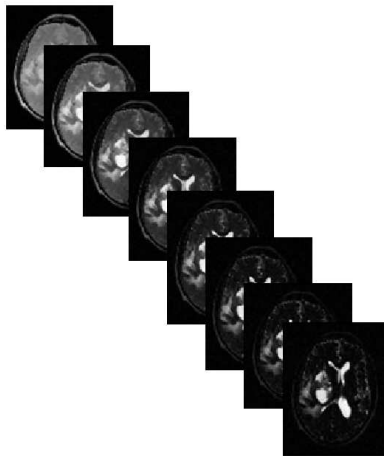


Figura 5.8: Imagen RMN

Aplicando la ecuación 5.11 a la imagen de RMN, la cual esta constituida por 8 canales, se obtiene la siguiente tabla:

| | Primera Condición | Segunda Condición | Tercera Condición |
|--------|-------------------|-------------------|-------------------|
| EE 3x3 | 90,7734 % | 8.9364 % | 0,2902 % |
| EE 5x5 | 79,8733 % | 18.6686 % | 1,4581 % |
| EE 7x7 | 69,1721 % | 26,7047 % | 4,1232 % |

Podemos observar que en las dos primeras columnas (primera y segunda condición) es donde el ordenamiento realiza la mayor parte de la clasificación vectorial, dejando así un porcentaje mínimo en la tercera condición (lexicográfico), ya que el orden lexicográfico esta presente para garantizar el orden total en el espacio n -dimensional, es decir, a el llegaran aquellos elementos que poseen igual Suma (primera condición) e igual Suma de Diferencias Consecutivas (segunda condición).

A medida que incrementamos la dimensión del elemento estructurante (EE), la suma como primera condición mantiene un poder de decisión en la clasificación de los píxeles, lo que indica que esta imagen posee mayor cantidad de vectores distintos en relación a la suma de sus componentes.

Al aplicar un EE 3x3 se obtiene que el 90,77034 % de los píxeles que pertenecen a la ventana deslizante están siendo analizados por la primera condición (Suma de las componentes del vector multicanal), esto se debe a la variabilidad de píxeles distintos (pertenecientes a diferentes planos)

que están presente en ese sección de la imagen. Todos aquellos que pertenescan al mismo plano (que posean igual Suma), serán tratados por la segunda condición, que para este caso son el 8,9364%, quedan así, solo un 0,2902% los cuales serán analizados por el orden lexicográfico. Al observar el resultado del análisis con un EE 5x5 se obtiene, un porcentaje de 79,8733% en la primera condición y de 18,6686% en la segunda condición, y solo un 1,4581% para el orden lexicográfico, es decir, se mantiene el poder de decisión en la primera condición. Al analizar la imagen medica con un EE 7x7 el resultado es equivalente a los anteriores, donde, el 69,1721% se encuentra bajo el control de la primera condición, y un 26,7047% bajo la segunda condición, quedando un 4,1232% para ser analizado por la tercera condición. Como se pudo observar, la primera condición mantiene el control al momento de tomar decisión en el ordenamiento, esto es debido a la estructura de la imagen medica que esta tratando en este trabajo, ya que el comportamiento de sus píxeles es de forma exponencial decreciente, donde la intersección de sus curvas es prácticamente cero [Ver Anexo 2], en tal sentido, se tiene que sus píxeles pertenecen a planos distintos, por lo cual, la primera condición posee mayor porcentaje.

Capítulo 6

Morfología Multicanal en Imágenes Sintéticas - Ordenamiento SDL

6.1. Introducción

En este capítulo se mostrará el resultado de aplicar el ordenamiento propuesto sobre una imagen multicanal a color, creada sintéticamente para visualizar el comportamiento del ordenamiento propuesto. Las funciones que serán aplicadas son: dilatación, erosión, apertura, cierre, gradientes, filtros morfológicos, reconstrucción geodésica y watershed.

Las operaciones fundamentales de la morfología matemática son erosión y dilatación, las cuales identifican los valores mínimos y máximos de la imagen, dentro del elemento estructurante.

Se aplica el algoritmo del ordenamiento propuesto (Capítulo 5) para la erosión y dilatación de imágenes multicanales.

6.2. Aplicaciones

Las imagen de las figura 6.1, será la utilizada en este capítulo para aplicar los operadores morfológicos en imágenes multicanal a color. En ella se muestran los niveles digitales de cada círculo (por ejemplo: RGB: 0, 128, 255, significa: cantidad de rojo=0, cantidad de verde=128 y cantidad de azul=255), y así al aplicar los operadores morfológicos se apreciara su respuesta en color.

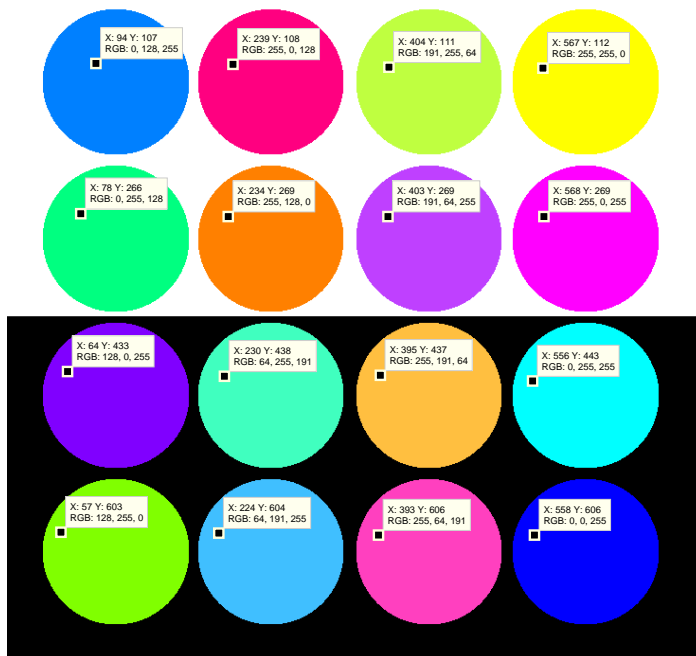


Figura 6.1: Imagen a color para el procesamiento multicanal

6.3. Dilatación Multicanal

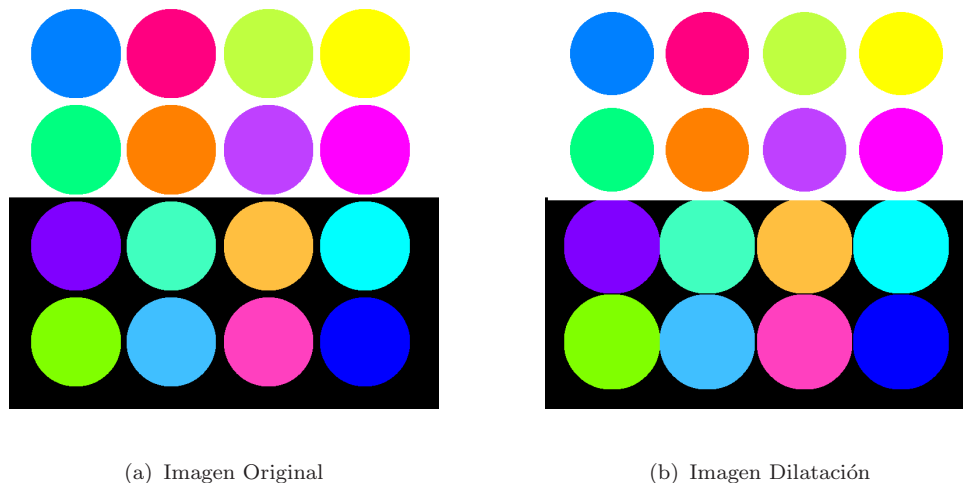


Figura 6.2: Dilatación - Imagen a Color

En la figura 6.2 se observa el resultado de aplicar la dilatación con el ordenamiento propuesto a la imagen a color. Los máximos en esta imagen final son los que predominan, es decir, los elementos con mayor suma y mayor suma de diferencias consecutivas (Círculos de color y región de color blanco), en otras palabras, en las zonas de fondo blanco la dilatación hace que los círculos se vean reducidos en tamaño, mientras que con el fondo negro hace que se vean ampliados; cuando los círculos se tocan, allí predominara el que posea mayor nivel con respecto al orden propuesto. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 6.

6.4. Erosión Multicanal

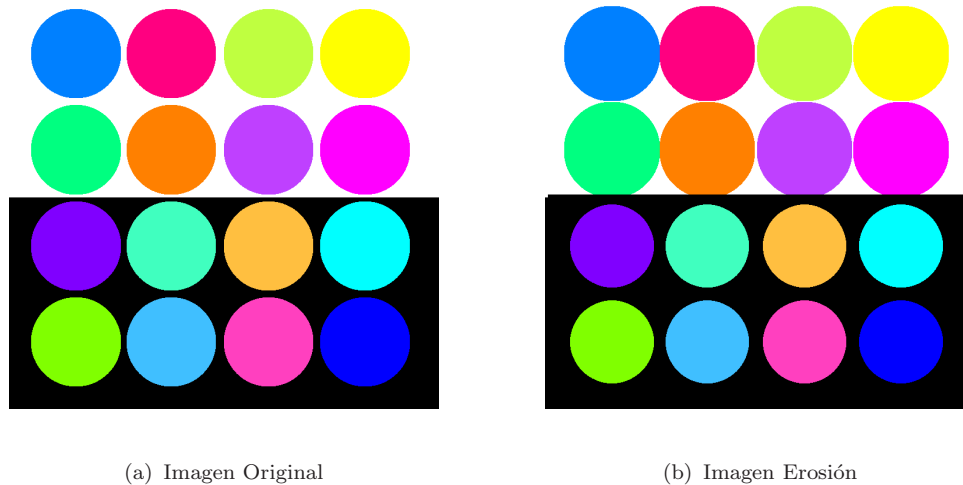


Figura 6.3: Erosión - Imagen a Color

En la figura 6.3 se observa el resultado de aplicar la erosión con el ordenamiento propuesto a la imagen a color. Los mínimos en esta imagen final son los que predominaran, es decir, los elementos con menor suma y menor suma de diferencias consecutivas (Círculos de color y región de color negro), en otras palabras, en las zonas de fondo blanco la dilatación hace que los círculos se vean ampliados en tamaño, mientras que con el fondo negro hace que se vean reducidos; cuando los círculos se tocan, allí predominara el que posea mayor nivel con respecto al orden propuesto. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 6.

6.5. Apertura Multicanal

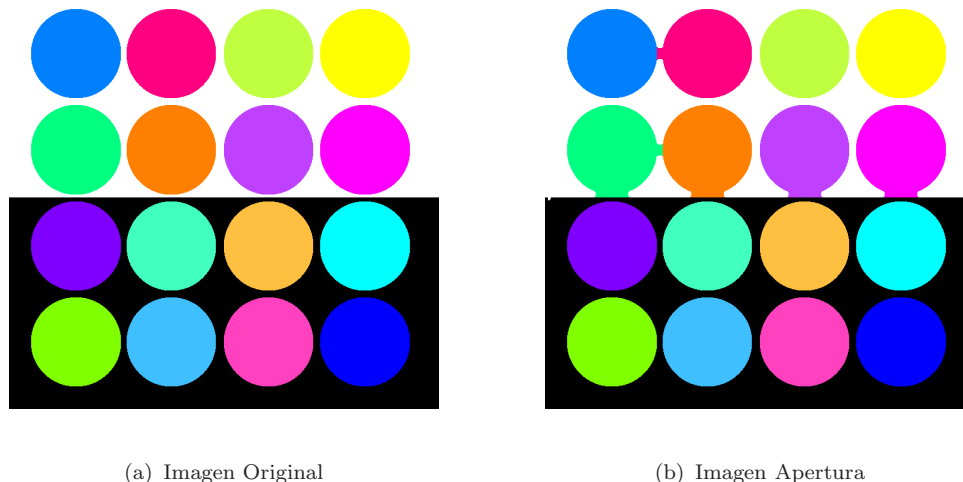


Figura 6.4: Apertura - Imagen a Color

En la figura 6.4 se observa el resultado de aplicar la apertura con el ordenamiento propuesto. El elemento estructurante al recorrer la imagen, encontró zonas totalmente contenidas dentro de él, es por ello la aparición de objetos conectados entre si, es decir, al recorrer la imagen con el elemento estructurante, este está totalmente contenido en uno de los objetos presentes, entonces todos los píxeles del elemento estructurante pertenecen al objeto. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 6.

6.6. Cierre Multicanal

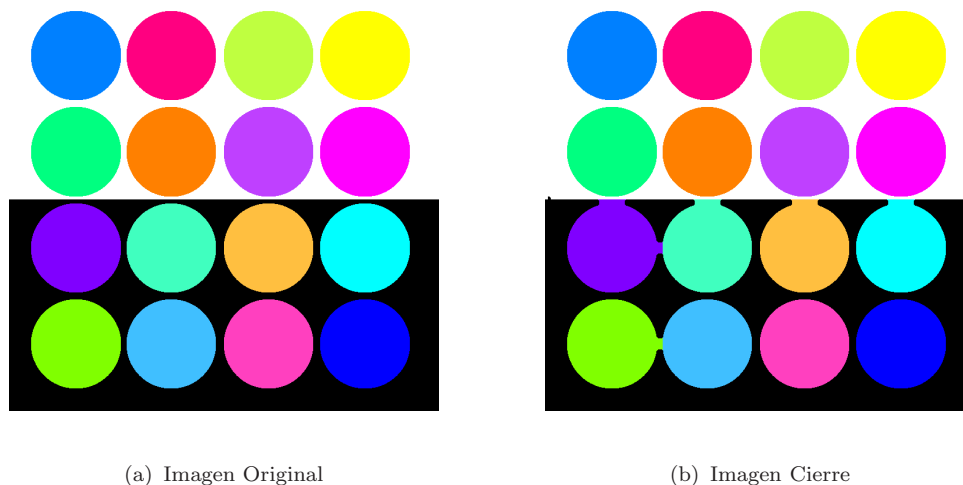


Figura 6.5: Cierre - Imagen a Color

En la figura 6.5 se observa el resultado de aplicar el cierre con el ordenamiento propuesto. El elemento estructurante al recorrer la imagen se encuentra con objetos en los cuales la separación entre ellos es menor que el tamaño del elemento estructurante, por lo cual se obtiene como resultado una conectividad entre ellos, es decir, al recorrer la imagen con el elemento estructurante, éste se encuentra totalmente fuera de los objetos (fondo de la imagen), entonces todos los píxeles del elemento estructurante formarán parte del fondo de la imagen. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 6.

6.7. Top-Hat Multicanal

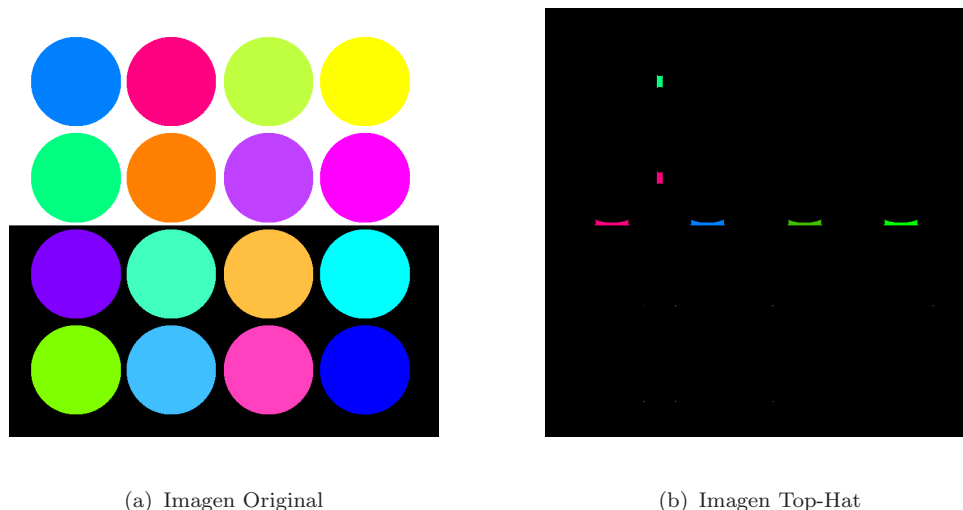


Figura 6.6: Top-Hat - Imagen a Color

En la figura 6.6 se observa el resultado de aplicar el Top-Hat con el ordenamiento propuesto a la imagen a color. En esta figura se obtiene la información eliminada por la apertura; Top-Hat recupera la información eliminada por la apertura que no se percibe a simple vista. Los colores presentes en esta imagen no presentan ninguna relación con la imagen original, ya que este operador solo muestra los objetos eliminados por la apertura sin tomar en cuenta su color de salida. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 6.

6.8. Bottom-Hat Multicanal

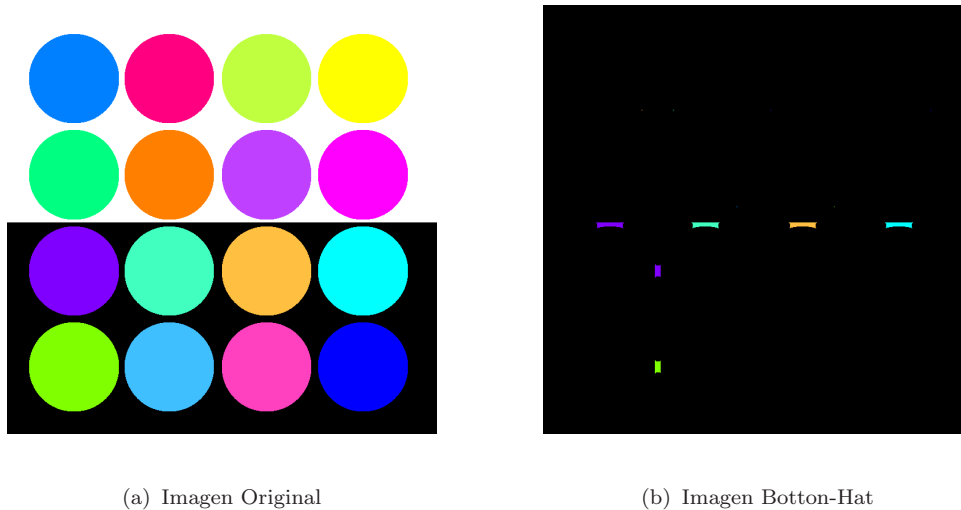


Figura 6.7: Bottom-Hat - Imagen a Color

En la figura 6.7 se observa el resultado de aplicar el Bottom-Hat con el ordenamiento propuesto a la imagen a color. En esta figura se obtiene la información eliminada por el cierre; Bottom-Hat recupera la información eliminada por el cierre que no se percibe a simple vista. Los colores presentes en esta imagen no presentan ninguna relación con la imagen original, ya que este operador solo muestra los objetos eliminados por el cierre sin tomar en cuenta su color de salida. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 6.

6.9. Gradiente

La definición de Gradiente se extiende a imágenes multicanales, permite recuperar el borde del objeto en la imagen.

El Gradiente se expresa de la siguiente manera:

$$\rho_B(f) = \delta_B(f) - \epsilon_B(f) \quad (6.1)$$

donde B , es el elemento estructurante.

El gradiente multicanal se observa en la figura 6.8:

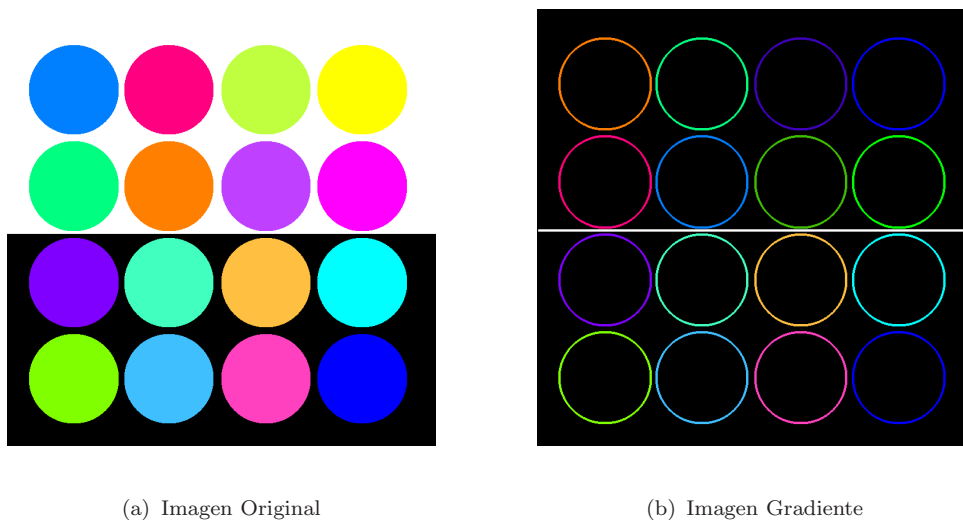
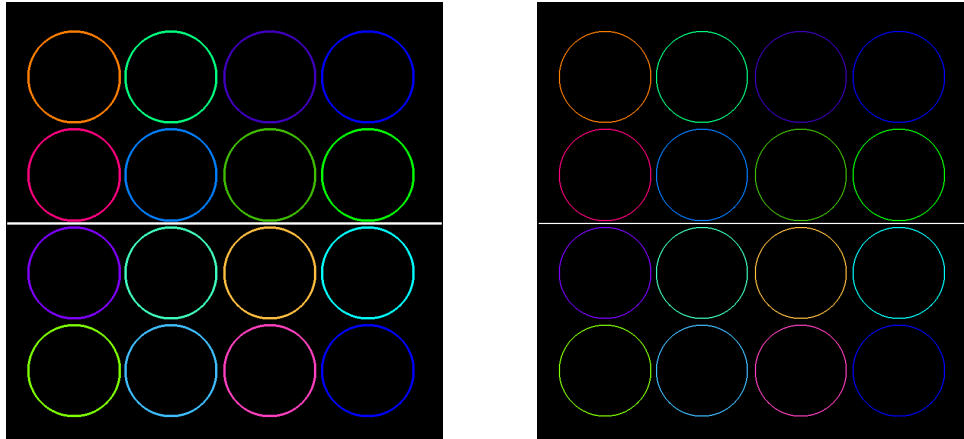


Figura 6.8: Gradiente Imagen Multicanal

En la figura 6.8 se observan los bordes de los objetos presentes en la imagen, elemento estructurante utilizado: disco de radio 2.

6.9.1. Gradiente Multiescalar Multicanal

Para observar el comportamiento de este gradiente, se muestran la siguiente imagen:



(a) Imagen Gradiente

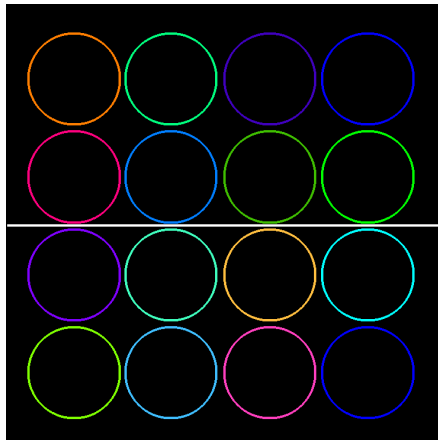
(b) Imagen Gradiente Multiescalar

Figura 6.9: Gradiente Multiescalar con 2 Iteraciones

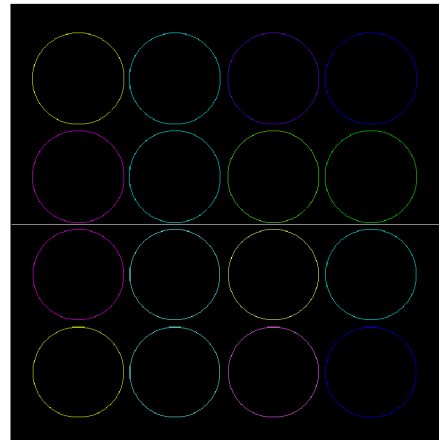
La figura 6.9 muestra una alternativa bastante aceptable, ya que este gradiente disminuye en buena forma el grosor de los objetos presentes en la imagen.

6.9.2. Gradiente Multicanal de Filtro Morfológico por Erosión

En la figura 6.10 se muestra el resultado de este gradiente, para este ejemplo se utilizó un filtro $\gamma\phi\gamma$ (Apertura - Cierre - Apertura) :



(a) Imagen Gradiente



(b) Imagen Gradiente Multiescalar por Filtro Morfológico

Figura 6.10: Gradiente Multicanal de Filtro Morfológico por Erosión. Filtro con EE 3x3 y Erosión con EE 5x5

Este gradiente puede ser de mucha utilidad en imágenes con mayor cantidad de detalles, por ejemplo, las satelitales, donde el gradiente convencional dejara pequeños ruidos en los bordes de los objetos, pero con este método que se propone, el filtro (apertura-cierre-apertura) que antecede al gradiente elimina dichos ruidos.

6.10. Filtrados Morfológicos Multicanales

En la figura 6.11 se muestra una imagen a color con un ruido sal y pimienta, de magnitud 0,02, a la cual le sera aplicada los filtros morfológicos.

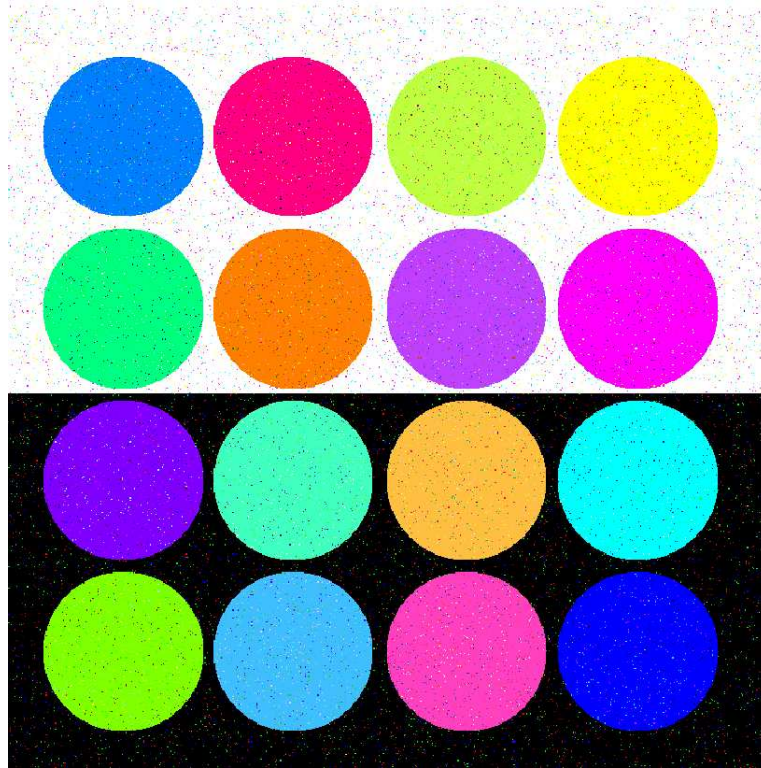


Figura 6.11: Imagen con Ruido

La figura 6.12 muestra el resultado de aplicar los filtros morfológicos multicanales, utilizando un elemento estructurante disco de radio 2.

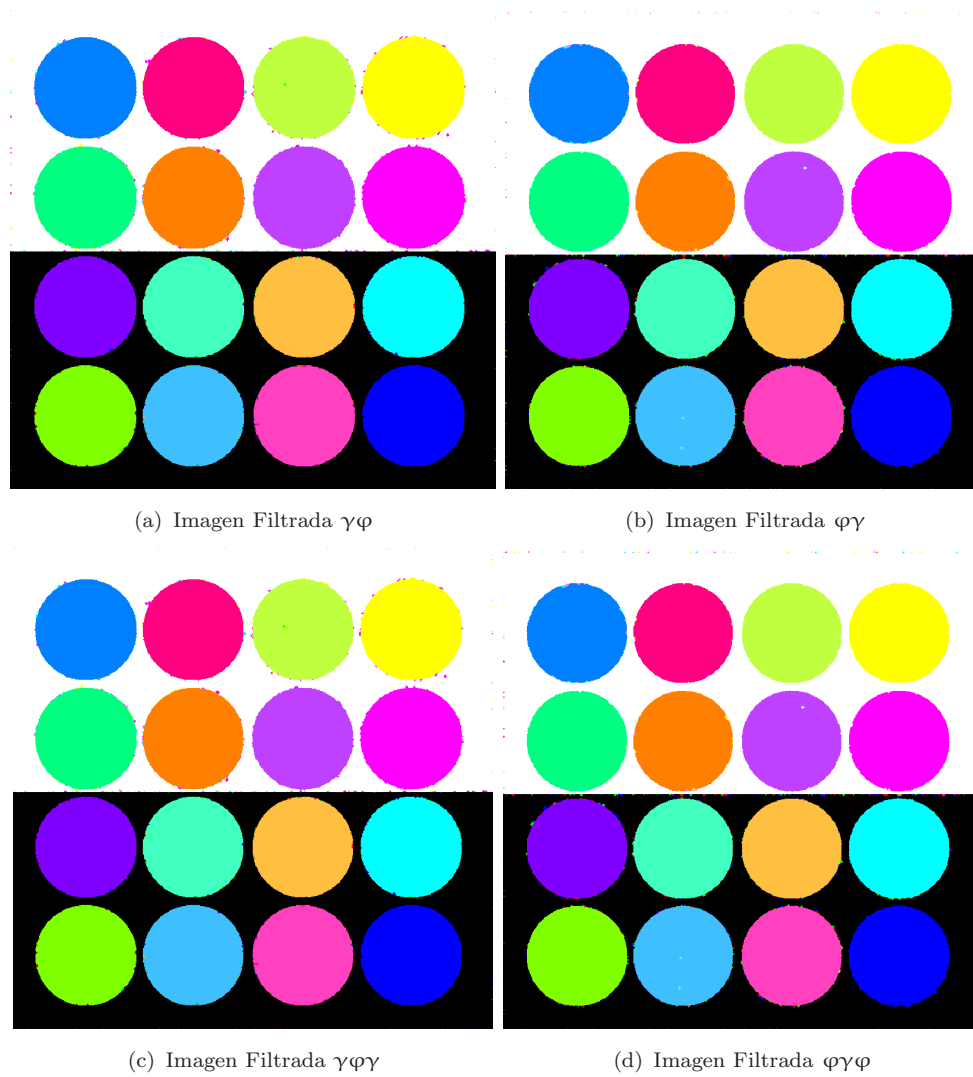


Figura 6.12: Filtrados Morfológicos Multicanales

Capítulo 7

Morfología Multicanal en Imágenes Reales - Ordenamiento SDL

7.1. Introducción

En este capítulo se mostrará el resultado de aplicar el ordenamiento propuesto sobre imágenes multicanales. Las funciones que se crearon son para realizar dilatación, erosión, top-hat, botton-hat, apertura, cierre, gradientes, filtros morfológicos, reconstrucción geodésica y watershed.

Las operaciones fundamentales de la morfología matemática son erosión y dilatación, las cuales identifican los valores mínimos y máximos de la imagen, dentro del elemento estructurante.

Se aplica el algoritmo del ordenamiento propuesto (Capítulo 5) para la erosión y dilatación de imágenes multicanales.

7.2. Aplicaciones

Las imágenes de las figuras 7.1(a) y 7.1(b), serán las utilizadas en este capítulo para aplicar los operadores morfológicos en imágenes multicanal.

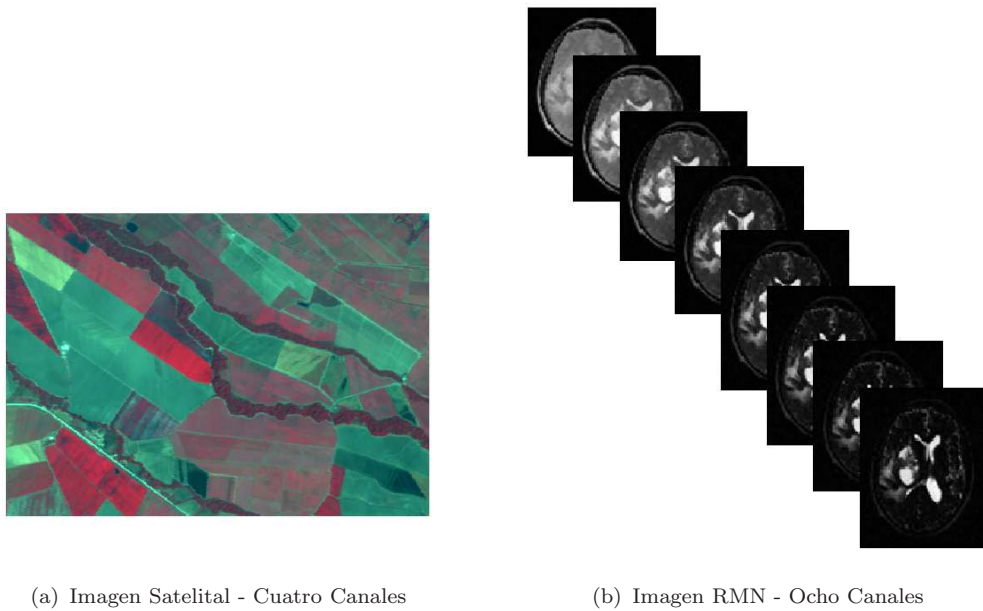
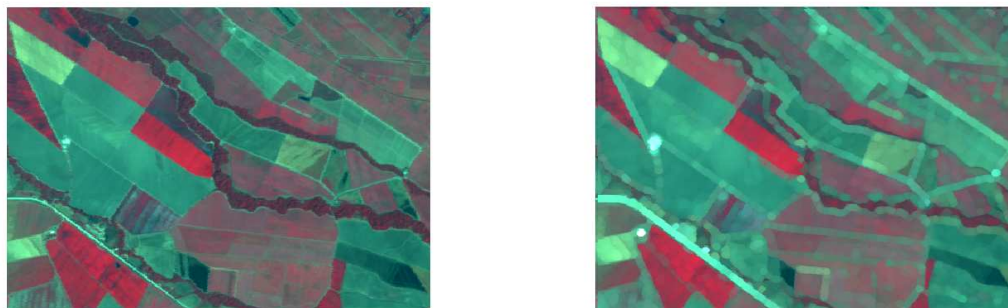


Figura 7.1: Imágenes para el procesamiento multicanal

7.3. Dilatación Multicanal

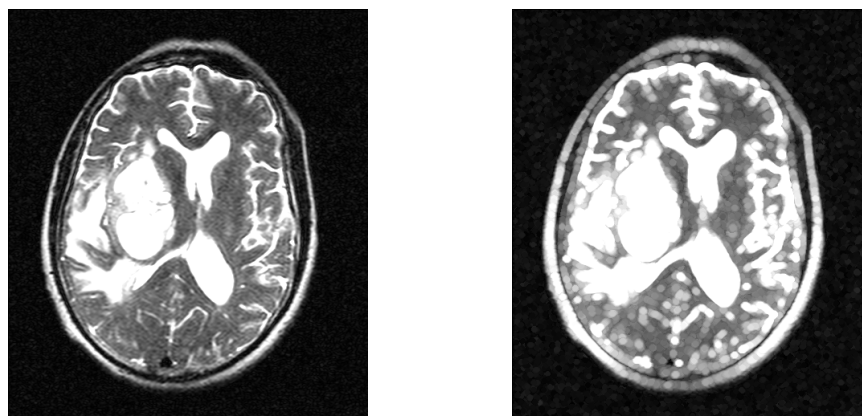


(a) Imagen Original

(b) Imagen Dilatación

Figura 7.2: Dilatación - Imagen Satelital

En la figura 7.2 se observa el resultado de aplicar la dilatación con el ordenamiento SDL a la imagen satelital. Los máximos en esta imagen final son los que predominaran. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 6.



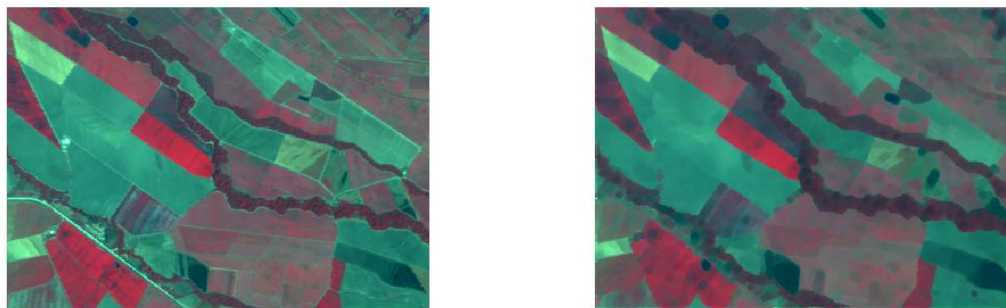
(a) Imagen Original

(b) Imagen Dilatación

Figura 7.3: Dilatación - Imagen RMN (canal 4)

En la figura 7.3 se observa el resultado de aplicar la dilatación con el ordenamiento propuesto a la imagen RMN. Los máximos en esta imagen final son los que predominaran. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 6. Se muestra solo un canal de la imagen (canal 4) para su ilustración.

7.4. Erosión Multicanal

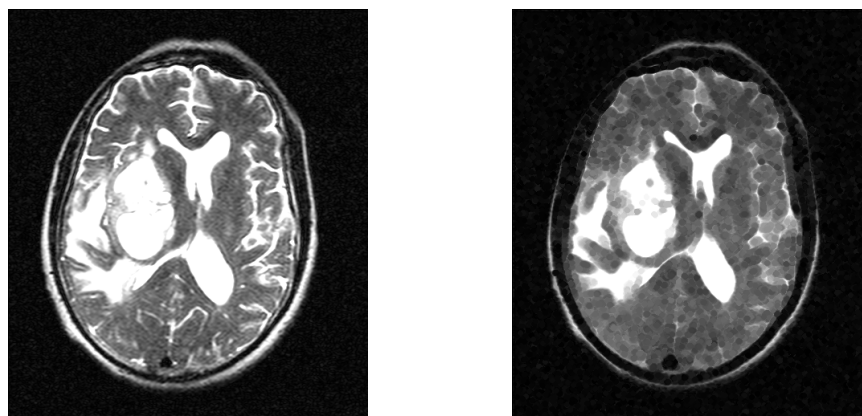


(a) Imagen Original

(b) Imagen Erosión

Figura 7.4: Erosión - Imagen Satelital

En la figura 7.4 se observa el resultado de aplicar la erosión con el ordenamiento propuesto a la imagen satelital. Los mínimos en esta imagen final son los que predominaran. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 6.



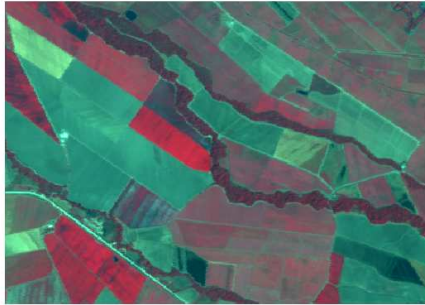
(a) Imagen Original

(b) Imagen Erosión

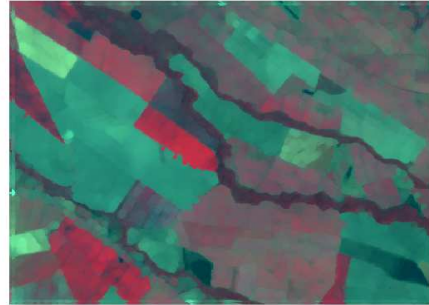
Figura 7.5: Erosión - Imagen RMN (canal 4)

En la figura 7.5 se observa el resultado de aplicar la erosión con el ordenamiento propuesto a la imagen RMN. Los mínimos en esta imagen final son los que predominaran. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 6. Se muestra solo un canal de la imagen (canal 4) para su ilustración.

7.5. Apertura Multicanal



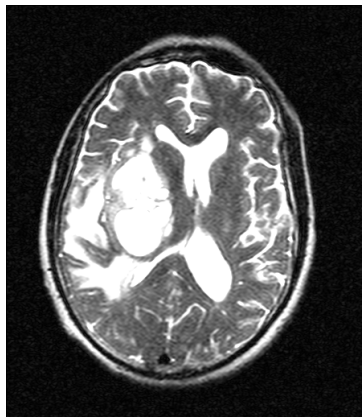
(a) Imagen Original



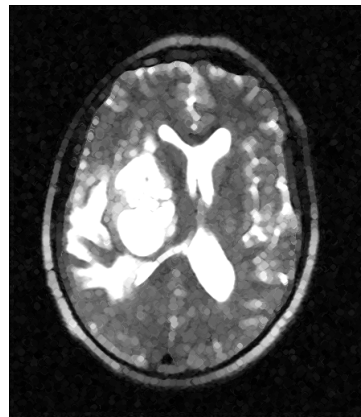
(b) Imagen Apertura

Figura 7.6: Apertura - Imagen Satelital

En la figura 7.6 se realizó una apertura a una imagen satelital. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 6.



(a) Imagen Original

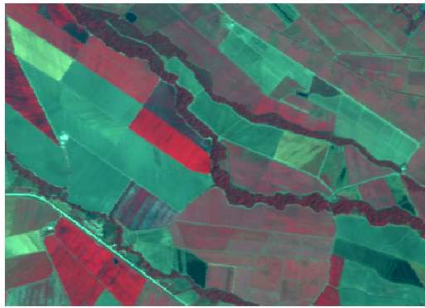


(b) Imagen Apertura

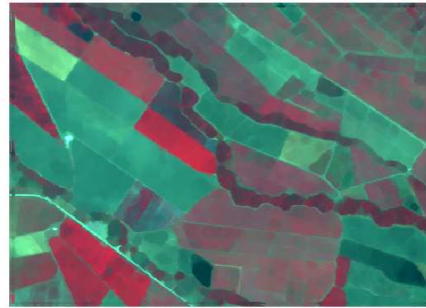
Figura 7.7: Apertura - Imagen RMN (canal 4)

En la figura 7.7 se observa el resultado de aplicar la apertura con el ordenamiento propuesto a la imagen RMN. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 6. Se muestra solo un canal de la imagen (canal 4) para su ilustración.

7.6. Cierre Multicanal



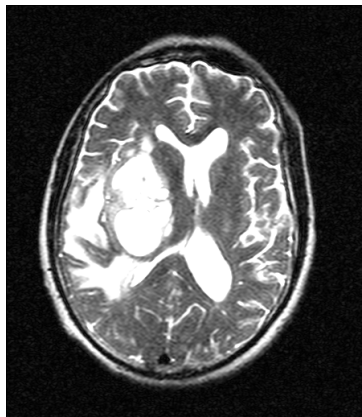
(a) Imagen Original



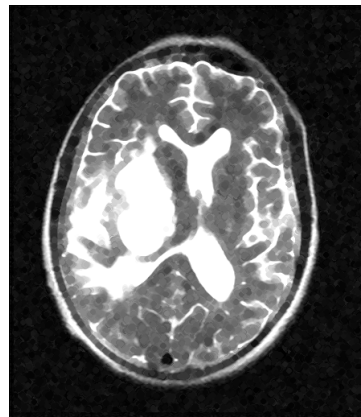
(b) Imagen Cierre

Figura 7.8: Cierre - Imagen Satelital

En la figura 7.8 se realizó un cierre a una imagen satelital. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 6.



(a) Imagen Original

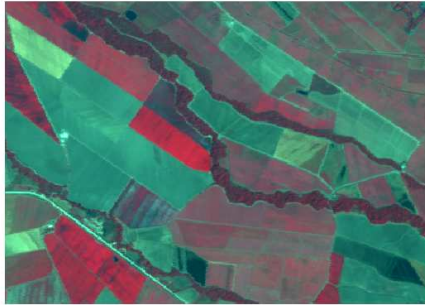


(b) Imagen Cierre

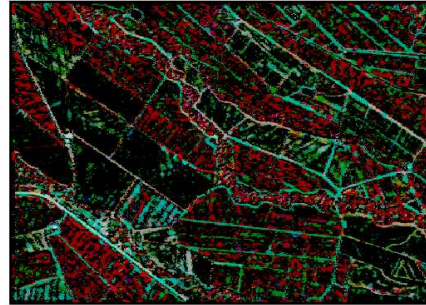
Figura 7.9: Cierre - Imagen RMN (canal 4)

En la figura 7.9 se observa el resultado de aplicar el cierre con el ordenamiento propuesto a la imagen RMN. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 6. Se muestra solo un canal de la imagen (canal 4) para su ilustración.

7.7. Top-Hat Multicanal



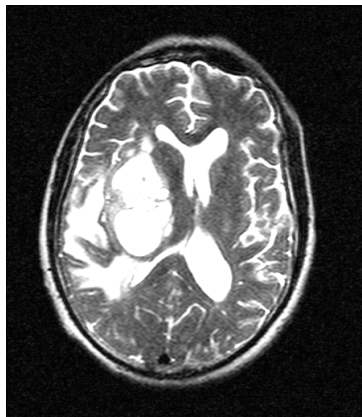
(a) Imagen Original



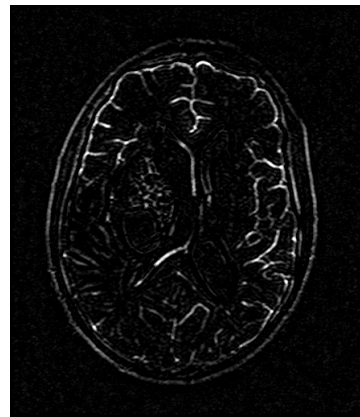
(b) Imagen Top-Hat

Figura 7.10: Top-Hat - Imagen Satelital

En la figura 7.10 se realizó un Top-Hat a la imagen satelital. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 6.



(a) Imagen Original

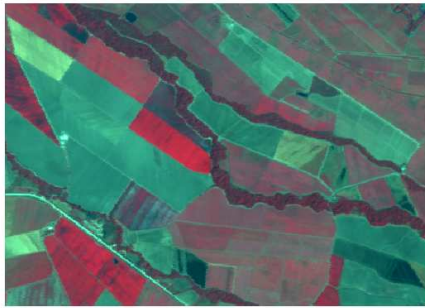


(b) Imagen Top-Hat

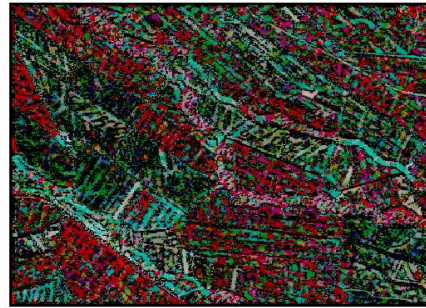
Figura 7.11: Top-Hat - Imagen RMN (canal 4)

En la figura 7.11 se realizó un Top-Hat a la imagen RMN. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 6.

7.8. Bottom-Hat Multicanal



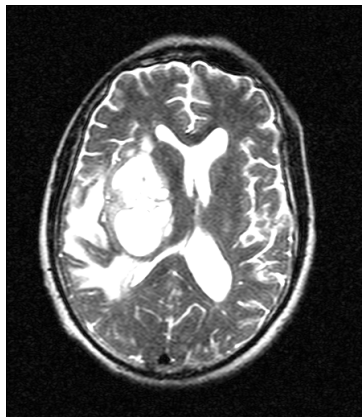
(a) Imagen Original



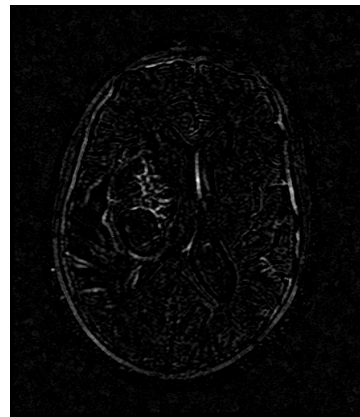
(b) Imagen Botton-Hat

Figura 7.12: Botton-Hat - Imagen Satelital

En la figura 7.12 se realizó un Botton-Hat a la imagen satelital. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 6.



(a) Imagen Original

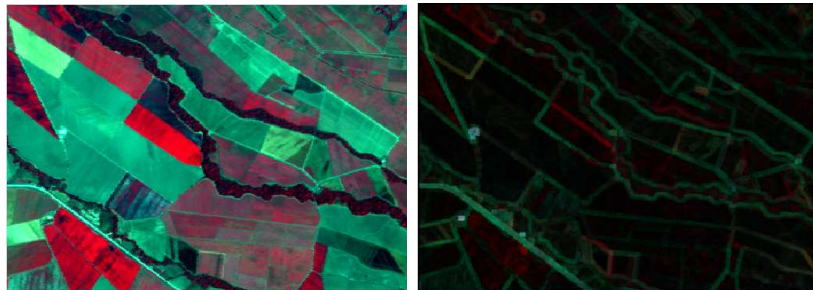


(b) Imagen Botton-Hat

Figura 7.13: Botton-Hat - Imagen RMN (canal 4)

En la figura 7.13 se realizó un Botton-Hat a la imagen RMN. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 6.

7.9. Gradiente

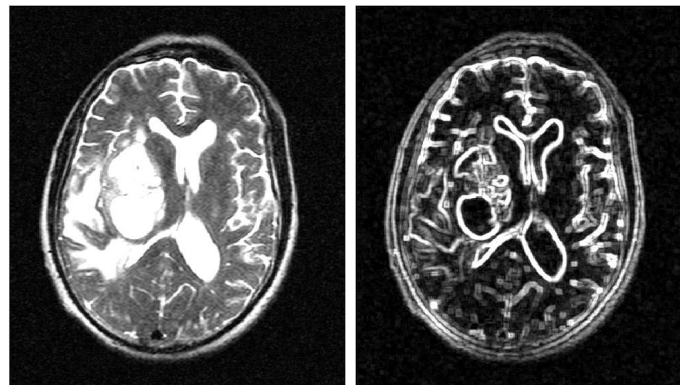


(a) Imagen Original

(b) Imagen Gradiente

Figura 7.14: Gradiente - Imagen Satelital

En la figura 7.14 se realizó un Gradiente a la imagen satelital. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 2.



(a) Imagen Original

(b) Imagen Gradiente

Figura 7.15: Gradiente - Imagen RMN (canal 4)

En la figura 7.15 se realizó un Gradiente a la imagen RMN. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 2.

7.9.1. Gradiente Multiescalar Multicanal

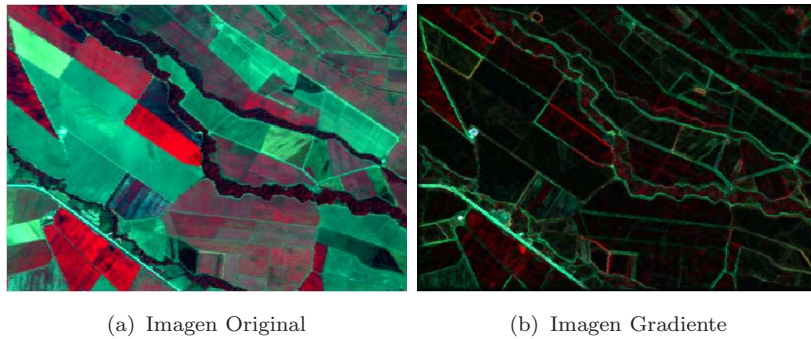


Figura 7.16: Gradiente Multiescalar Multicanal - Imagen Satelital

En la figura 7.16 se realizó un Gradiente Multiescalar Multicanal a la imagen satelital. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 2.

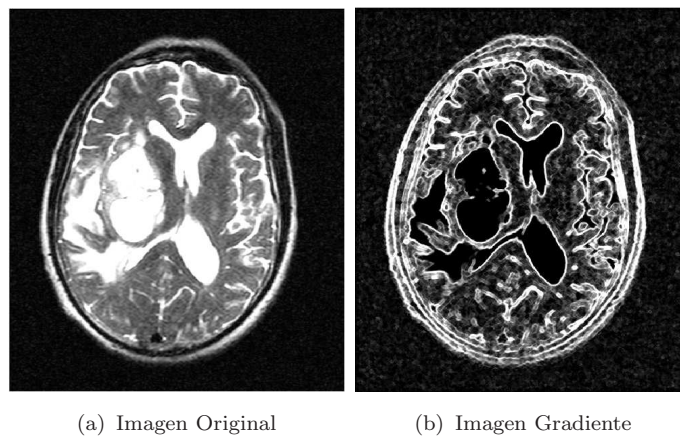
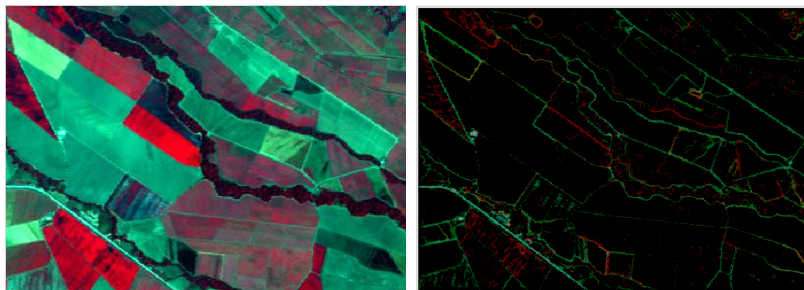


Figura 7.17: Gradiente Multiescalar Multicanal - Imagen RMN (canal 4)

En la figura 7.17 se realizó un Gradiente Multiescalar Multicanal a la imagen RMN. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 2.

7.9.2. Gradiente Multiescalar Multicanal por Erosión

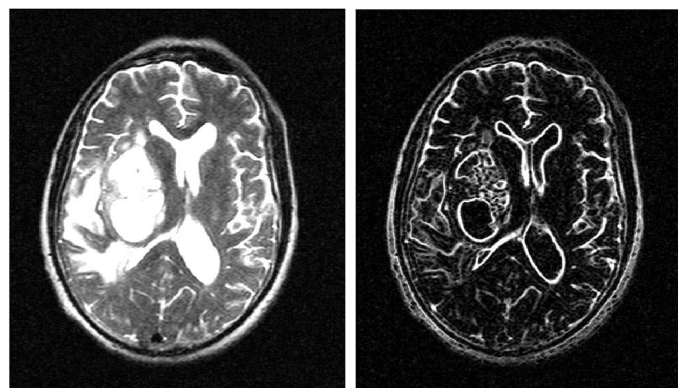


(a) Imagen Original

(b) Imagen Gradiente

Figura 7.18: Gradiente Multiescalar Multicanal por Erosión - Imagen Satelital

En la figura 7.18 se realizó un Gradiente Multiescalar Multicanal por Erosión a la imagen satelital. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 2.



(a) Imagen Original

(b) Imagen Gradiente

Figura 7.19: Gradiente Multiescalar Multicanal por Erosión - Imagen RMN (canal 4)

En la figura 7.19 se realizó un Gradiente Multiescalar Multicanal por Erosión a la imagen RMN. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 2.

7.10. Filtrados Morfológicos Multicanales

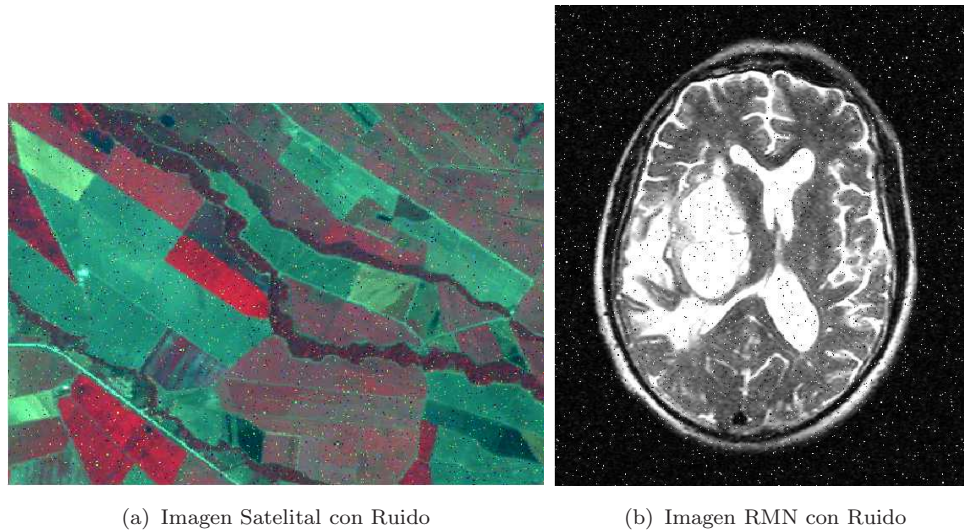


Figura 7.20: Imágenes con Ruido

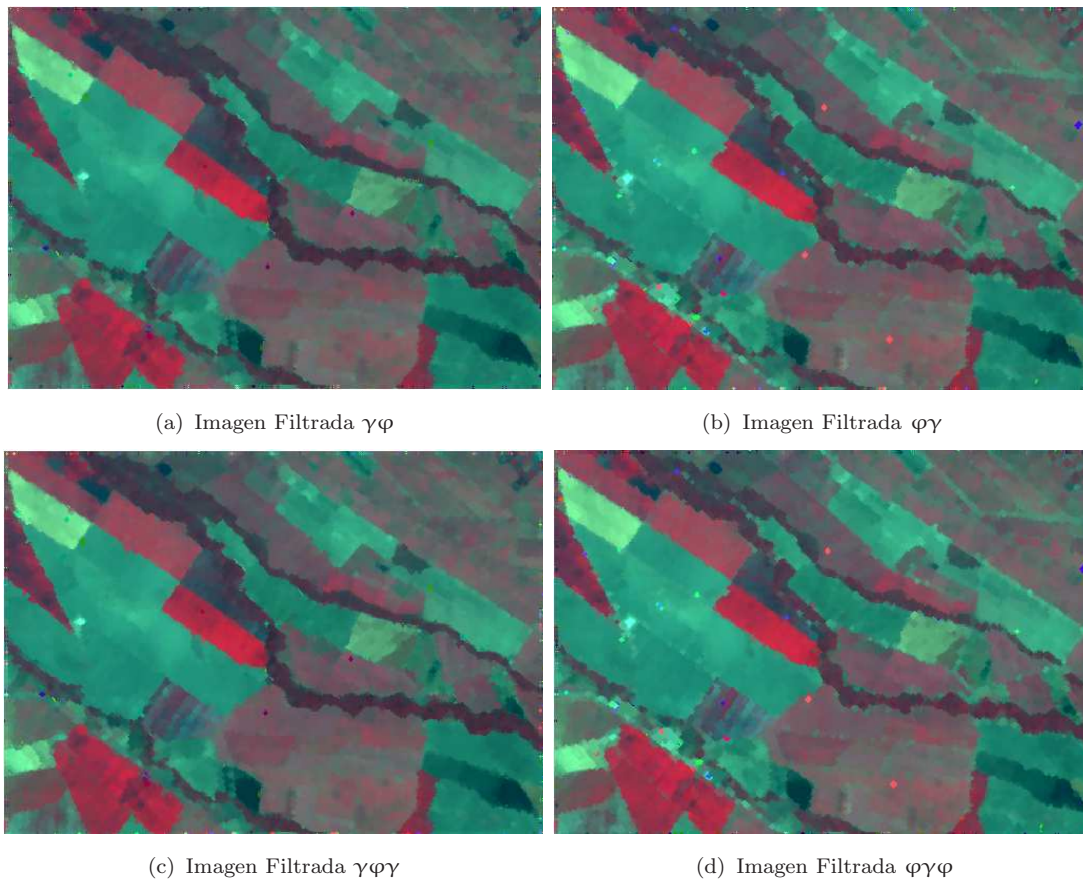


Figura 7.21: Filtrados Morfológicos Multicanales - Imagen Satelital

La figura 7.21 muestra el resultado de aplicar los filtros morfológicos multicanales, utilizando un

elemento estructurante disco de radio 2.

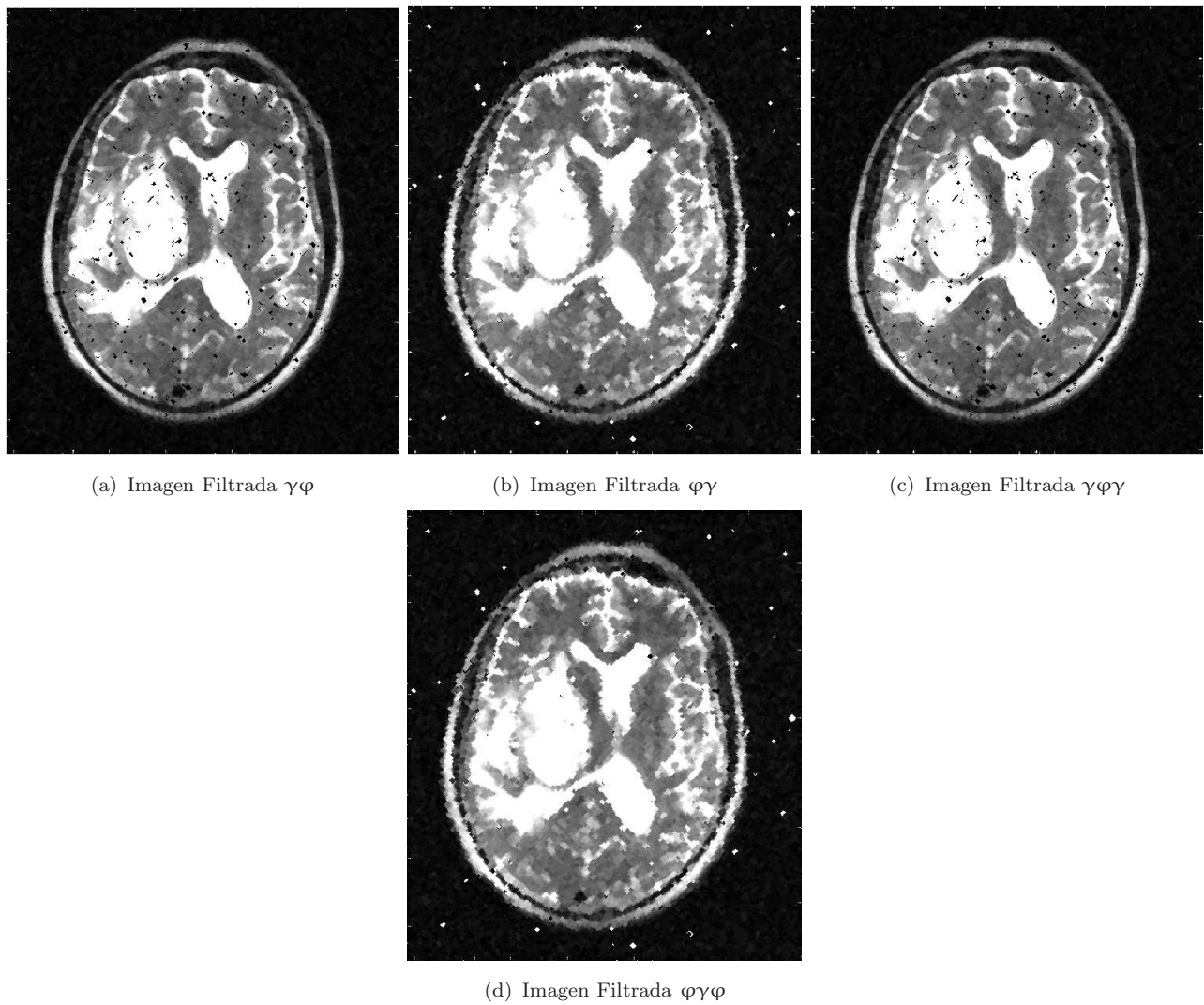


Figura 7.22: Filtrados Morfológicos Multicanales - Imagen RMN (canal 4)

La figura 7.22 muestra el resultado de aplicar los filtros morfológicos multicanales, utilizando un elemento estructurante disco de radio 2.

7.10.1. Gradiente de Filtro Morfológico por Erosión

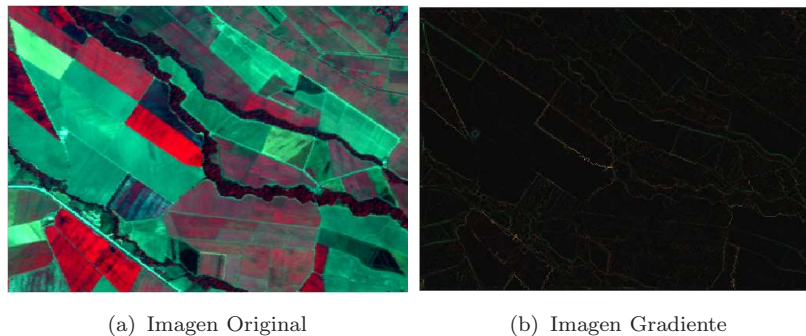


Figura 7.23: Gradiente de Filtro Morfológico por Erosión - Imagen Satelital

En la figura 7.23 se realizó un Gradiente de Filtro Morfológico por Erosión a la imagen satelital. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 2.

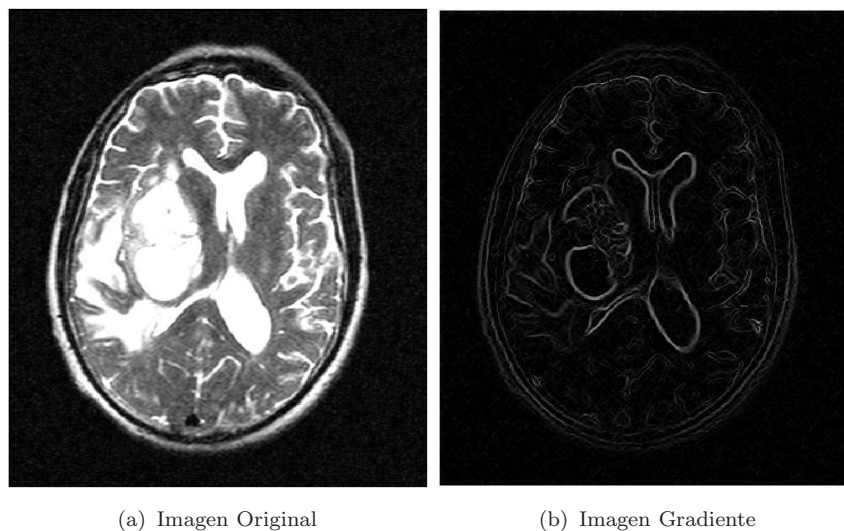


Figura 7.24: Gradiente de Filtro Morfológico por Erosión - Imagen RMN (canal 4)

En la figura 7.24 se realizó un Gradiente de Filtro Morfológico por Erosión a la imagen RMN. El elemento estructurante utilizado fue un disco de radio 2.

7.10.2. Reconstrucción Multicanal

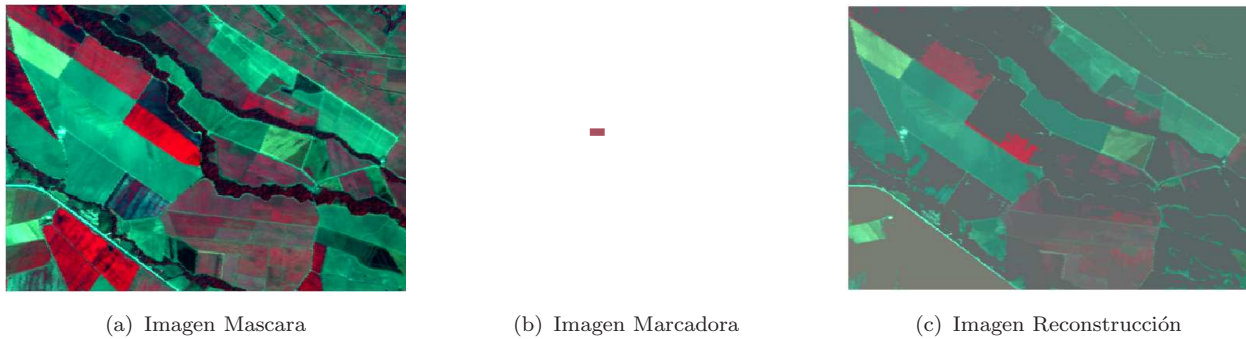


Figura 7.25: Reconstrucción por Erosión - Imagen Satelital

En la figura 7.25 se realizó un Reconstrucción por Erosión a la imagen satelital.

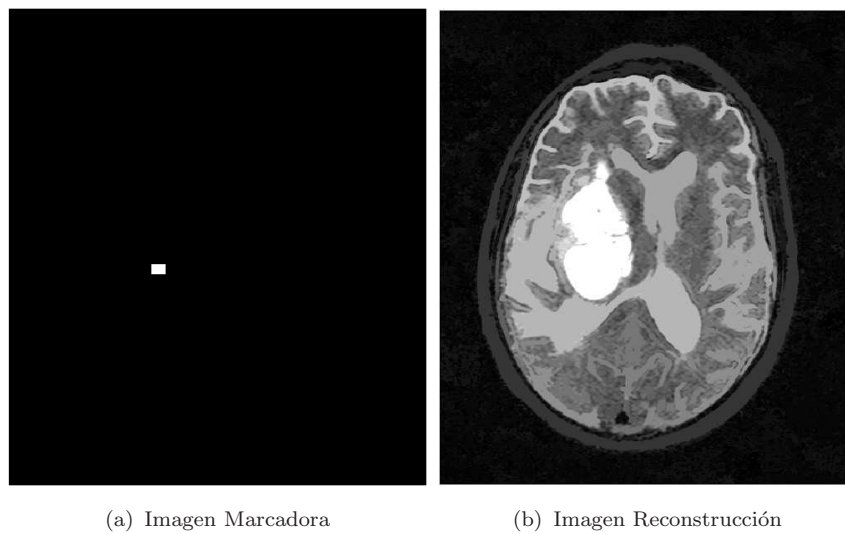


Figura 7.26: Reconstrucción por Dilatación - Imagen RMN (canal 4)

En la figura 7.26 se realizó una Reconstrucción por Dilatación a la imagen RMN.

7.10.3. Segmentación Multicanal

Siguiendo el esquema presentado en la sección 3,8 de este trabajo:

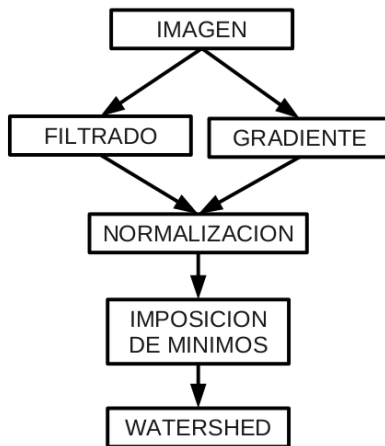


Figura 7.27: Proceso de Segmentación

El cual fue aplicado a las imágenes satelitales y de RMN. En las siguientes figuras se muestra el resultado:

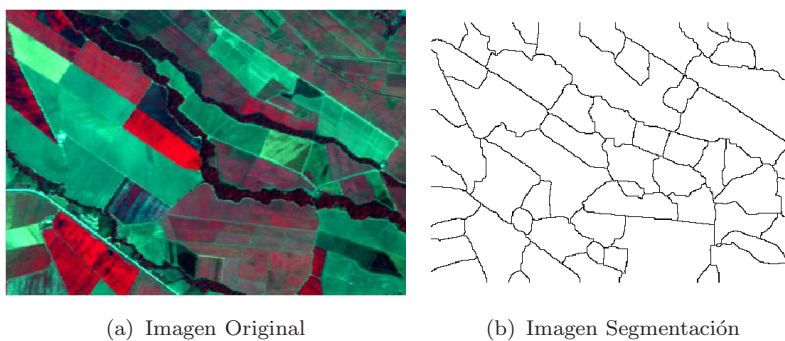


Figura 7.28: Segmentación Multicanal - Imagen Satelital

En la figura 7.28 se realizó una Segmentación Multicanal a la imagen satelital.

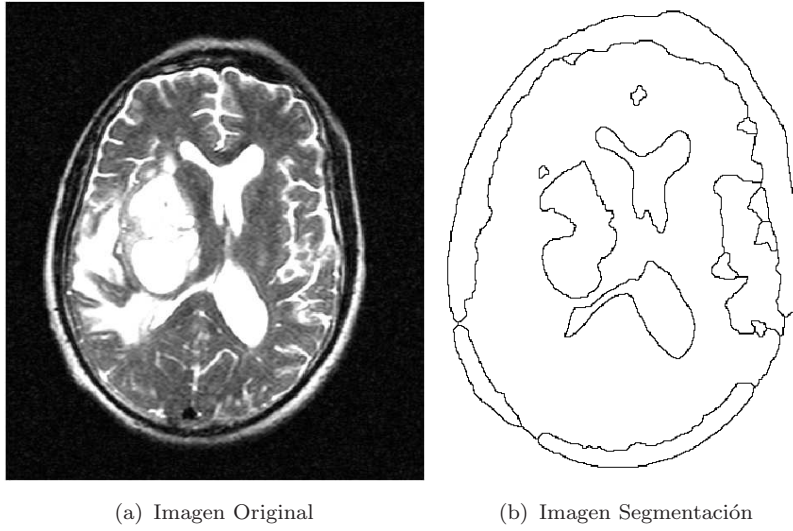


Figura 7.29: Segmentación Multicanal - Imagen RMN (canal 4)

En la figura 7.29 se realizó una Segmentación Multicanal a la imagen RMN.

Capítulo 8

Conclusión

Después de hacer una revisión exhaustiva de los trabajos realizados en morfología matemática para imágenes multicanales, se propone un nuevo ordenamiento basado en el orden Lexicográfico, el cual fue llamado SDL, este ordenamiento propuesto (el cual fue definido con el símbolo “ \leq_{SDL} ”) es de tipo “Orden Total”, ya que la morfología matemática está basada sobre conjuntos que forman “Retículos Completos”. El cual esta representado bajo la estructura del Orden Lexicográfico, es decir, se trata de una variante del orden lexicográfico, considerando las componentes a estudiar como ordenes reducidos que interactúan con las expresiones físicas necesarias en este trabajo, de la manera siguiente:

Dado el píxel vectorial $\xi(x, y) \in Z^n$, donde $\xi(x, y) = (\xi_1(x, y), \dots, \xi_n(x, y))$. Las componentes estudiadas se clasifican de la siguiente manera:

Primera Condición:

Sean dos píxeles vector $\xi_1(x, y)$ y $\xi_2(x, y)$, tal que $\xi_1(x, y) < \xi_2(x, y)$ si la suma de las componentes de $\xi_1(x, y)$ son menores a las de $\xi_2(x, y)$, entonces se tendrá, que el vector $\xi_2(x, y)$ es mayor que $\xi_1(x, y)$; lo cual nos dará la cantidad total de la variable distribuida a partes iguales, es decir, con esta condición poseemos la distribución de los píxeles (dispersión entre ellos).

$$S = \sum_{i=1}^n \xi_i(x, y) \quad (8.1)$$

Segunda Condición:

Sean dos píxeles vector $\xi_1(x, y)$ y $\xi_2(x, y)$, tal que $\xi_1(x, y) < \xi_2(x, y)$ si la suma de diferencias de las componentes de $\xi_1(x, y)$ son menores a las de $\xi_2(x, y)$, entonces se tendrá, que el vector $\xi_2(x, y)$ es mayor que $\xi_1(x, y)$; esto nos da información de la variación de los píxeles, considerando la inclinación de la recta que se forma entre dos puntos (píxeles), aproximándose a una derivada, en otras palabras, podemos medir la frecuencia del comportamiento entre los píxeles.

$$SC = \sum_{i=1}^{n-1} |\xi_{i+1}(x, y) - \xi_i(x, y)| \quad (8.2)$$

Tercera Condición:

Re-ordenar las componentes de cada píxel (vector de dimensión n), considerando el Orden Lexicográfico aplicado directamente al píxel. Se debe establecer a priori el orden en que van a ser considerados los canales, lo cual dependerá del tipo de imagen a estudiar.

Dados los píxeles $\xi^1(x, y), \xi^2(x, y) \in Z^n$, donde $\xi^1(x, y) = (\xi_1^1(x, y), \dots, \xi_n^1(x, y))$ y $\xi^2(x, y) = (\xi_1^2(x, y), \dots, \xi_n^2(x, y))$, se tiene que:

$$\xi^1(x, y) <_{\text{lex}} \xi^2(x, y) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \xi_1^1(x, y) < \xi_1^2(x, y) \\ \text{ó} \\ \xi_1^1(x, y) = \xi_1^2(x, y) \text{ y } \xi_2^1(x, y) < \xi_2^2(x, y) \\ \text{ó} \\ \vdots \\ \xi_1^1(x, y) = \xi_1^2(x, y) \text{ y } \xi_2^1(x, y) = \xi_2^2(x, y) \dots \xi_n^1(x, y) < \xi_n^2(x, y) \end{array} \right.$$

El esquema del ordenamiento propuesto (SDL) en este trabajo quedo representado de la siguiente forma:

Sea $S_1 = \sum_{i=1}^n \xi_i^1(x, y)$, $S_2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2(x, y)$, $SD_1 = \sum_{i=1}^{n-1} |\xi_{i+1}^1(x, y) - \xi_i^1(x, y)|$, $SD_2 = \sum_{i=1}^{n-1} |\xi_{i+1}^2(x, y) - \xi_i^2(x, y)|$, entonces:

$$\xi^1(x, y) <_{\text{SDL}} \xi^2(x, y) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} S_1 < S_2 \\ \text{ó} \\ S_1 = S_2 \text{ y } SC_1 < SD_2 \\ \text{ó} \\ S_1 = S_2 \text{ y } SC_1 = SD_2 \text{ y } \xi^1(x, y) <_{\text{lex}} \xi^2(x, y) \end{array} \right.$$

A continuación se resumen los resultados obtenidos:

- Se encontraron métodos para el procesamiento digital de imágenes multicanales, con el fin de aplicar las operaciones morfológicas.
- Se introdujo la definición de Orden Lexicográfico, en las aplicaciones matemáticas, es decir, ordenamiento de los píxeles (n -dimensionales) en una imagen multicanal.
- Se introdujo un nuevo sistema de clasificación de los píxeles (SDL), el cual permitió una manipulación adecuada de las imágenes.
- Se presentaron algoritmos para el procesamiento digital de imágenes multicanales y la aplicación de la morfología matemática.

Capítulo 9

Apéndice

Apéndice 1

El Ordenamiento SDL es un Orden Total

Demostración 9.1 Sean f una imagen multicanal (n canales), B un Elemento Estructurante (EE) y $\xi^1 = (\xi_1^1, \xi_2^1, \dots, \xi_n^1)$, $\xi^2 = (\xi_1^2, \xi_2^2, \dots, \xi_n^2) \in f$.

Definamos el siguiente orden:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^n \xi_i^1 \\ S_2 &= \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \\ SD_1 &= \sum_{i=1}^{n-1} |\xi_{i+1}^1 - \xi_i^1| \\ SD_2 &= \sum_{i=1}^{n-1} |\xi_{i+1}^2 - \xi_i^2| \end{aligned}$$

entonces,

$$\xi^1 <_{\text{SDL}} \xi^2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} S_1 < S_2 \\ \text{ó} \\ S_1 = S_2 \text{ y } SD_1 < SD_2 \\ \text{ó} \\ S_1 = S_2 \text{ y } SD_1 = SD_2 \text{ y } \xi^1 <_{\text{lex}} \xi^2 \end{array} \right.$$

Claramente el orden $<_{\text{SDL}}$ hereda las propiedades del $<_{\text{lex}}$.

Demostración:

Por definición dos elementos de f siempre pueden ser comparables.

I) Veamos que es transitivo

Sean $\xi^1, \xi^2, \xi^3 \in f$. Supongamos que $\xi^1 <_{\text{SDL}} \xi^2$ y $\xi^2 <_{\text{SDL}} \xi^3$.

Como $\xi^1 <_{\text{SDL}} \xi^2$, entonces se satisface una de las siguientes: $S_1 < S_2$ ó $SD_1 < SD_2$ (si $S_1 = S_2$) ó $\xi^1 <_{\text{lex}} \xi^2$ (si $S_1 = S_2$ y $SD_1 = SD_2$).

Pero como $\xi^2 <_{\text{SDL}} \xi^3$, entonces también se satisfacen las mismas desigualdades (basta reemplazar ξ^1 por ξ^2 y ξ^2 por ξ^3).

Luego se tiene que:

$S_1 < S_2 < S_3$ ó $SD_1 < SD_2 < SD_3$ (si $S_1 = S_2 = S_3$) ó $\xi^1 <_{\text{lex}} \xi^2 <_{\text{lex}} \xi^3$ (si $S_1 = S_2 = S_3$ y $SD_1 = SD_2 = SD_3$).

De donde se tiene que $\xi^1 <_{\text{SDL}} \xi^3$.

II) Veamos que es reflexiva

$S_1 = S_1$ y $SD_1 = SD_1$, por lo tanto $\xi^1 <_{\text{SDL}} \xi^1 \Leftrightarrow \xi^1 <_{\text{lex}} \xi^1$, y $<_{\text{lex}}$ es reflexivo, por lo tanto $<_{\text{SDL}}$ es efectivamente reflexivo.

III) Veamos que es antisimétrica

Supongase que $\xi^1 <_{\text{SDL}} \xi^2$ y $\xi^2 <_{\text{SDL}} \xi^1$.

Caso 1:

Si $S_1 < S_2$ y $S_2 < S_1$, entonces $\xi^1 <_{\text{SDL}} \xi^2 \Leftrightarrow S_1 < S_2$, $\xi^2 <_{\text{SDL}} \xi^1 \Leftrightarrow S_2 < S_1$. Pero, si $S_1 < S_2$ y $S_2 < S_1$ entonces $S_1 = S_2 \Rightarrow \xi^1 =_{\text{SDL}} \xi^2$ ($\xi^1 =_{\text{SDL}} \xi^2 \Leftrightarrow \xi^1 <_{\text{SDL}} \xi^2$ y $\xi^2 <_{\text{SDL}} \xi^1$). El caso $S_2 < S_1$ es análogo.

Caso 2:

Si $S_1 = S_2$, $SD_1 < SD_2$ y $SD_2 < SD_1$, entonces $\xi^1 <_{\text{SDL}} \xi^2 \Leftrightarrow SD_1 < SD_2$ y $\xi^2 <_{\text{SDL}} \xi^1 \Leftrightarrow SD_2 < SD_1$. Nuevamente como $SD_1 < SD_2$ y $SD_2 < SD_1$, entonces $SD_1 = SD_2$. Por lo tanto, $\xi^1 =_{\text{SDL}} \xi^2$.

Caso 3:

Si $S_1 = S_2$ y $SD_1 = SD_2$, entonces $\xi^1 <_{SDL} \xi^2 \Rightarrow \xi^1 <_{lex} \xi^2$ y $\xi^2 <_{SDL} \xi^1 \Rightarrow \xi^2 <_{lex} \xi^1$. Como $\xi^1 <_{lex} \xi^2$ y $\xi^2 <_{lex} \xi^1$, entonces $\xi^1 =_{lex} \xi^2 \Rightarrow \xi^1 =_{SDL} \xi^2$.

Finalmente, por definición dos elementos cualesquiera son comparables, por lo cual $<_{SDL}$ es un orden total.

El orden $<_{SDL}$ define un orden total en el espacio de píxeles de la imagen f . Como f es acotada, y $<_{SDL}$ es total, entonces toda cadena tiene un máximo y un mínimo. Por lo tanto, el Espacio de Píxeles [Franquiz Jocer, 2011] junto con el ordenamiento $<_{SDL}$ forma un retículo completo.

Apéndice 2

Especificación del Color

Cuando se pretende definir o especificar el color es necesario realizar una distinción entre lo que se conoce como color percibido y color psicofísico. Esta distinción es necesaria ya que en cada uno de los casos el color poseerá un significado distinto. En el caso subjetivo se considera el color como un aspecto de la percepción visual, mientras que en el caso objetivo éste es una característica de la energía radiada por los objetos en el rango visible del espectro. En ambos casos el color permite al observador distinguir las diferencias entre los objetos que poseen las mismas dimensiones, forma y/o estructura.

Especificación del Color Percibido

Bajo un punto de vista subjetivo o intuitivo, la CIE (Comisión Internacional de Iluminación) ha definido y recomendado las siguientes características para especificar el color percibido:

- Luminosidad (brillo)

Es la percepción de lo claro u oscuro de un objeto. El brillo se representa en tonos de gris partiendo de cero brillo (negro) al máximo de brillo (blanco) (figura 8.1).



Figura 9.1: Luminosidad

El brillo es la componente no cromática del color.

- Matiz (tono)

Se refiere a los colores espectrales del rojo al púrpura. Dentro de cada uno de ellos hay una gran diversidad de colores subjetivos. Por ejemplo, el rosa, el color ladrillo, el burdeos, etc., son matices del rojo (figura 8.2).

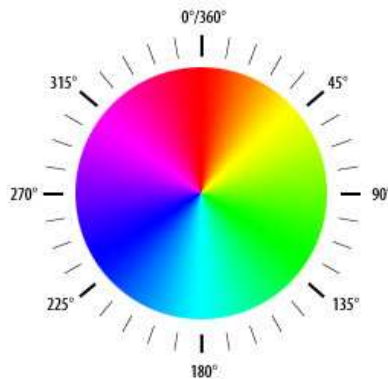


Figura 9.2: Matiz

Los ángulos en la figura 1.6, representan la ubicación de cada color en el círculo cromático.

- Saturación

Se puede considerar como un atributo visual que permite estimar la proporción de color cromático puro contenido en la sensación visual (ver figura 8.3). Una saturación nula corresponde a una ausencia de color, a un color acromático. La escala de grises (blanco y el negro incluidos) posee una saturación nula.



Figura 9.3: Saturación

El matiz y la saturación definen las características colorimétricas de un estímulo de color y reciben, en conjunto, el nombre de cromía o cromaticidad.

Las tres propiedades anteriores se pueden visualizar en el espacio de color HLS (Matiz, Luminancia y Saturación):

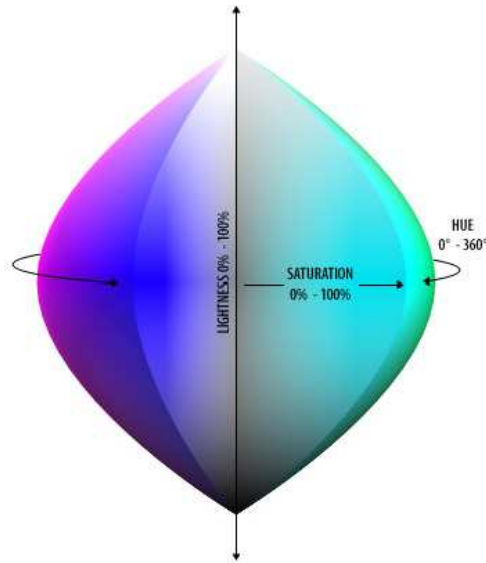


Figura 9.4: Representación de Luminancia-Matiz-Saturación como un espacio de color

Especificación del Color Psicofísico

Los términos psicofísicos del color suelen estar relacionados con el proceso conocido como “color matching” o igualación del color. Leonardo da Vinci fue el primero en afirmar que únicamente con tres colores se podían igualar casi todos los colores conocidos. Posteriormente, ya en siglo XVII, Newton comprobó científicamente que con tres franjas del espectro visible se podía obtener la luz blanca, aunque no sería hasta el siglo XIX cuando, Thomas Young, con su teoría tricromática de la visión humana por un lado y el físico alemán Grassman, con sus leyes sobre la síntesis del color, generalizaran fisiológica y físicamente la tricromaticidad, la cual consiste en la especificación (igualación) de cualquier color o estímulo cromático únicamente con tres longitudes de onda independientes.

Existen dos técnicas que permiten la generación del color: la síntesis aditiva y la síntesis sustractiva. La mezcla aditiva del color consiste en mezclar colores añadiendo o sumando luz, partiendo de la ausencia absoluta de color como negro, al máximo color como blanco. Los colores principales o primarios del sistema de mezcla aditivo son el azul, verde y rojo. Mezclando estos primarios se consiguen los secundarios de la síntesis aditiva: amarillo (verde+rojo), magenta (rojo+azul) y cyan (verde+azul), así hasta llegar al blanco (verde + rojo + azul), aplicado en los monitores.

La síntesis sustractiva parte del blanco y por sustracción llega al negro; es otro método para la generalización de múltiples tonalidades, aunque, en este caso, la mezcla de colores se realiza sustrayendo o restando luz. En esta síntesis los colores primarios son los suplementarios de la mezcla aditiva, es decir, el amarillo, magenta y cyan siendo los secundarios el rojo, verde y azul, para generar, por último, el color negro (figura 1.9), aplicado en la imprenta.



Figura 9.5: Síntesis Aditiva y Sustractiva

Leyes de Grassman

En 1853 el físico alemán Grassman sistematizó la teoría de la mezcla aditiva del color en una serie de conclusiones que hoy se conocen como las leyes de Grassman.

- Primera Ley

Por síntesis aditiva del color es posible conseguir todos los colores percibidos mezclando tres franjas del espectro visible (roja, verde y azul) en la proporción de intensidad adecuada, siempre que ninguno de los tres iluminantes o valores triestímulos elegidos pueda obtenerse por mezcla de los otros dos.

$$C = \alpha(R) + \beta(G) + \gamma(B) \tag{9.1}$$

siendo C , R , G y B estímulos monocromáticos del espectro electromagnético y α , β y γ , las cantidades de luz de cada estímulo cromático en la formación del nuevo color C .

A las radiaciones que producen iguales sensaciones de matiz, saturación y luminosidad, teniendo diferente distribución espectral, se les denomina radiaciones cromáticamente equivalentes. A los colores cromáticamente equivalentes se les designa colores metámeros y a la propiedad de la visión humana que permite que dos luces de composición espectral diferente produzcan idéntica sensación se conoce con el nombre de metamerismo.

- Segunda Ley

Al mezclar aditivamente dos radiaciones cualesquiera se forma un tercer color por síntesis aditiva de los componentes primarios rojo, verde y azul. Es decir, cualquier radiación cromática que se mezcle aditivamente con otra, puede ser sustituida por una radiación cromática equivalente.

$$C_3 = C_1 + C_2 = (R_1 + R_2) + (G_1 + G_2) + (B_1 + B_2) \tag{9.2}$$

donde, $C_1 = (R_1, G_1, B_1)$, $C_2 = (R_2, G_2, B_2)$, $C_3 = (R_3, G_3, B_3)$.

■ Tercera Ley

Siempre que dos superficies produzcan igual sensación cromática es posible variar su luminancia, manteniendo constante el matiz y la saturación, sin que varíe la igualdad cromática entre ambas superficies.

$$\text{Si } C_1 = C_2 \text{ entonces } kC_1 = kC_2 \quad (9.3)$$

■ Cuarta Ley

Puesto que cualquier color puede crearse por síntesis aditiva de los colores primarios rojo, verde y azul, y dado que al mezclar aditivamente estos componentes se suman sus respectivas luminancias, se puede deducir que la luminancia de un color cualquiera equivale a la suma de las luminancias de sus componentes primarios

$$\text{Lum}(C) = \text{Lum}(R) + \text{Lum}(G) + \text{Lum}(B) \quad (9.4)$$

Apéndice 3

Imágenes Satelitales - Teledetección

El termino teledetección indica la adquisición de información sobre un objeto a distancia, sin un contacto material entre el objeto observado y el observador. En nuestro caso el objeto observado es la superficie terrestre o marina y la atmósfera, el observador por su parte es un sensor situado en el aire o el espacio capaz de detectar y almacenar la información para su posterior análisis. Este análisis permite el reconocimiento de las características de la superficie terrestre y de los fenómenos que en ella se producen. Por tanto son muchas las ciencias, tanto naturales como sociales, interesadas en su uso (Geografía, Geología, Meteorología, Agronomía, Urbanismo, etc).

La adquisición de información a distancia implica la existencia de un flujo de información entre el objeto observado y el sensor. El portador de esta información es la radiación electromagnética, esta puede ser emitida por el objeto o proceder de otro cuerpo y haber sido reflejada por este. Todos los cuerpos (planetas, seres vivos, objetos inanimados) emiten radiación electromagnética; la cantidad y tipo de esta radiación emitida depende fundamentalmente de su temperatura. El principal emisor de radiación en el sistema solar es el propio Sol cuya radiación, reflejada por la Tierra y los objetos situados en ella, es la más comúnmente utilizada en teledetección (al igual que en fotointerpretación) y es la que nos permite ver los objetos situados a nuestro alrededor. Otra opción es que el propio sensor incorpore un emisor de radiación cuyo reflejo en la superficie terrestre se capta posteriormente por el propio sensor.

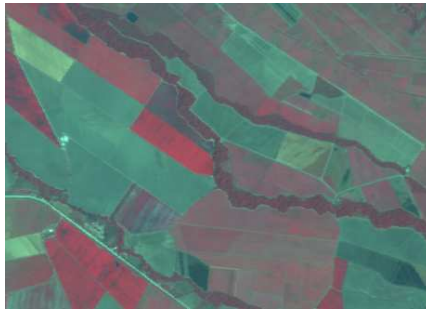


Figura 9.6: Imagen Satelital Region de Turen

La incorporación de cámaras (sensores) a los satelites artificiales ha permitido la obtención sistemática (a intervalos de tiempo regular) de imágenes a una escala espacial variable, con lo que pueden utilizarse para estudiar procesos que tienen lugar a diferentes escalas espacio-temporales, y utilizando regiones del espectro electromagnético (tipo luz) distintos a la luz visible. Esta tiene el inconveniente de, por ejemplo, resultar totalmente absorbida por las nubes por lo que no es útil en todos los casos. Además las diferentes regiones del espectro electromagnético van a permitir descubrir información distinta y complementaria a la portada por la luz visible.

El objetivo fundamental de la teledetección es analizar las características de la radiación que abandona la superficie terrestre, y es captada posteriormente por un sensor situado en un satélite, para

determinar, a partir de estas características, que elementos y factores ambientales las han producido.

En una imagen de satélite se dispone de varias bandas que corresponden a diversas regiones del espectro electromagnético. En muchos casos algunas de estas bandas corresponden a las sub-regiones del visible que corresponden a los colores azul, verde y rojo. Por otra parte, los monitores y tarjetas de video disponen de 3 canales (R-rojo, G-verde y B-azul) para representar los 3 colores básicos. Por tanto puede utilizarse cada canal para representar el nivel de una banda y obtener así una composición de color. La mas obvia seria simular el color real, asumiéndolo de la siguiente forma: Banda 1 \rightarrow B, Banda 2 \rightarrow G, Banda 3 \rightarrow R; pero como se dispone de más bandas, nada impide utilizarlas para generar visualizaciones en color falso. Estas composiciones servirían para resaltar los elementos que mayor reflectividad presentan en las bandas utilizadas, además de obtener visualizaciones más o menos estéticas. Por ejemplo, si se pasa la banda 4 (por ejemplo, con alta reflectividad por parte de la vegetación) por el canal verde , la vegetación se verá mucho más claramente que si se utilizara en la banda 2.

Apéndice 4

Imagen por Resonancia Magnética

La imagen por resonancia magnética (IRM) es un método tomográfico de emisión cuyas principales ventajas sobre otros métodos de imagen son: a) su capacidad multiplanar, con la posibilidad de obtener cortes o planos primarios en cualquier dirección del espacio; b) su elevada resolución de contraste, que es ciento de veces mayor que en cualquier otro método de imagen, c) la ausencia de efectos nocivos conocidos al no utilizar radiaciones ionizantes, y d) la amplia versatilidad para el manejo del contraste.

La IRM se basa en la excitación de los núcleos de uno de los tres isótopos del hidrógeno, el H^1 , previamente introducidos en un potente campo magnético estático, denominado B_0 . La intensidad del campo magnético que se utiliza para la obtención de imágenes medicas en RM oscila entre 0,012 y 2T eslas. Los imanes para producir ese campo magnético pueden ser permanentes, resistivos, superconductivos o mistos. Los imanes que producen campos magnéticos altos, a partir de 0,5T, son superconductivos.

Los protones magnetizados en el campo magnético (CM), es estado de relajación, adquieren dos orientaciones: de baja y alta energía, o paralelos y antiparalelos respectivamnete.

Simultáneamente, los momentos magnéticos de los protones realizan un movimiento de precesión alrededor del eje del campo magnético. La frecuencia de precesión depende de la intensidad del campo. Para un CM de 1T la frecuencia de precesión es de 45;Hz. Esta aumenta o disminuye de manera proporcional al CM, de tal manera que en un CM de 0,5T la frecuencia de precesión es de 22,5Mhz y en 2T de 90Mhz.

En una pequeña proporción, predominan los protones de orientación paralela o de baja energía, formándose en la muestra un vector de magnetización neto, orientado en la dirección del campo magnético. En esta situación, los protones están en estado de magnetización y relajación. Cuanto más intenso es el CM, mayor es la proporción de paralelos sobre antiparalelos, y el vector neto es mayor.

Como únicamente se puede medir magnetización en el plano transversal, la muestra es expuesta a pulsos de radiofrecuencia, junto a gradientes de campo magnético variables, que inclinan el vector de magnetización de la loncha o volumen seleccionado hacia el plano transversal. La radiofrecuencia es devuelta en forma de señal eléctrica oscilante, generalmente en forma de eco. Estas señales, codificadas en fase y frecuencia mediante gradientes, se utilizan para formar la imagen. La amplitud del eco se reflejará en el menor o mayor brillo de la imagen final, y depende preferiblemente de la densidad protónica, la relajación T_1 y T_2 , y en menor medida de otros factores como el flujo, la perfusión, la difusión y la transferencia de la magnetización [Técnica de la Imagen por Resonancia Magnética, por Javier Martinez y Luis Moreno. Hospital General Universitario Gregorio Marañón. Madrid].

Apéndice 5

MatLab

■ GENERALIDADES

Matlab es la abreviatura de Matrix Laboratory (laboratorio de matrices). Es un programa de matemáticas creado por The MathWorks en 1984. Está disponible para las plataformas Unix, Windows y MAC.

Se pueden ampliar sus capacidades con Toolboxes, algunas de ellas están destinadas al procesado digital de señal, procesamiento digital de imágenes, adquisición de datos, economía, inteligencia artificial, lógica difusa... También cuenta con otras herramientas como Simulink, que sirve para simular sistemas.

La primera versión surgió con la idea de emplear unos paquetes de subrutinas escritas en Fortran en los cursos de álgebra lineal y análisis numérico, sin necesidad de escribir programas en Fortran.

Usa un lenguaje de programación creado en 1970 para proporcionar un sencillo acceso al software de matrices LINPACK y EISPACK sin tener que usar Fortran. También tiene su propio compilador.

Es un software muy usado en universidades, centros de investigación, científicos y por ingenieros. En los últimos años ha incluido muchas más capacidades, como la de programar directamente procesadores digitales de señal y otras.

Matlab es un programa de cálculo numérico, orientado a matrices y vectores. Por tanto desde el principio hay que pensar que todo lo que se pretenda hacer con el, será mucho más rápido y efectivo si se piensa en términos de matrices y vectores. [Wikipedia]

■ TOOLBOX DE PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMÁGENES

El toolbox de procesamiento digital de imágenes es una colección de funciones que facilitan la manipulación y el análisis de las imágenes en blanco y negro, y en tonos de gris, utilizando la computadora.

Con la implementación de este toolbox se pueden realizar los siguientes análisis a las imágenes en blanco y negro, y en tonos de gris:

1. Realce de imágenes
2. Filtrado de imágenes
3. Segmentación
4. Morfología matemática
5. Restauración
6. Análisis de textura
7. Reconocimiento de patrones, entre otros.

Bibliografía

- [A. Evans and X. Liu, 2006] A Morphological Gradient Approach to Color Edge Detection.
- [Bernardo C. Salinas, 2003] El Libro de LaTeX. Prentice Hall
- [Bruzual, 2003] Bruzual R., Domínguez M. (2003). Espacio de Banach. Facultad de Ciencias, Escuela de Matemática, Universidad Central de Venezuela.
- [Franquiz Jocer, 2011] Franquiz J., Desarrollo de un Nuevo Método Geométrico para la Extracción de los Elementos Externos en Imágenes Digitales. Tesis de Maestría.
- [Castleman, 1996] Castleman, R. Kenneth. Digital Image Processing. Prentice Hall.
- [Douglas A. Skoog, F. James Holler y Timothy A. Nieman, 2001] Principios de Análisis Instrumental. Mc Graw Hill
- [Dugundji, 1974] Dugundji James. Topology. Allyn and Bacon, INC.
- [E. Aptoula and S. Lefevre, 2007] A Comparative Study on Multivariate Mathematical Morphology.
- [Erchan Aptoula, 2008] Analyse d'images couleur par morphologie mathématique. Application à la description, l'annotation et la recherche d'images. Thèse de Doctorat
- [González, 2002] González, R., Woods, R. (2002). Digital Image Processing. Second Edition. Prentice Hall.
- [González, 2004] González, R., Woods, R., Eddins, S. (2004). Digital Image Processing Using MatLab. Prentice Hall.
- [Heijmans, 1994] Heijmans Henk J.A.M. Morphological Image Operators. Academic Press, INC.
- [Jerrold E. Marsden y Michael J. Hoffman, 1998] Análisis Clásico Elemental. Segunda Edición. Addison-Wesley Iberoamericana.
- [J. Angulo, 2007] Morphological Colour Operators in Totally Ordered Lattices Based on Distances: Application to Image Filtering, Enhancement and Analysis.
- [J. Chanussot and P. Lambert, 1997] Bit Mixing Paradigm for Multivalued Morphological Filters.
- [J. Chanussot and P. Lambert, 1997] Entrelacement de Bits et "Space Filling Curves": une Extension des Filtres de Rang aux Images Couleur.
- [J. Chanussot and P. Lambert] Watershed Approaches for Color Image Segmentation.

- [Hanbury, 2001] Hanbury Allan. Lexicographical Order in the HLS Colour Space. Centre de Morphologie Mathematique.
- [MatLab, 2001] MatLab, (2001). The Language of Technical Computing.
- [Molina, 1998] Molina, R (1998). Introducción al Procesamiento Digital de Imágenes Digitales. Departamento de Ciencias de la Computación. Universidad de Granada.
- [Nallaperumal K, 2007] . A novel Multi-scale Morphological Watershed Segmentation Algorithm.
- [Ortiz, 2002] Ortiz F., Procesamiento morfológico de imágenes en color. Aplicación a la reconstrucción geodésica. Tesis Doctoral. Universidad de Alicante.
- [P. Lambert and J. Chanussot, 2000] Extending Mathematical Morphology to Color Image Processing.
- [Rivaud, 1973] Rivaud Lentin. Álgebra Moderna. Aguilar.
- [Serra J, Iwanowski M] Morphological Interpolation and Color Images.
- [Serra, 1982] J. Serra. Image Analysis and Mathematical Morphology.
- [Soille, 1999] Soille Pierre. Morphological Image Analysis. Springer.
- [W. Torres y B. Roger, 2006] Procesamiento de Imágenes a Color Utilizando Morfología Matemática.
- [Wikipedia, Online] Enciclopedia libre. Disponible en: <<http://www.wikipedia.com>>.