Espacio Probabilístico

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica
Departamento de Electrónica, Computación y Control

Probabilidades

Abril, 2013

Contenido

Introducción a la teoría de conjuntos

Con el fin de discutir los conceptos básicos del modelo probabilístico que deseamos desarrollar, será muy conveniente tener presente algunas ideas y conceptos de la teoría matemática de conjuntos.

Definición 1 (Conjunto)**.** *Una serie o colección de objetos cualesquiera que posean una característica o propiedad en común bien definida se denominará* ***conjunto****. Comúnmente los conjuntos se designan con letras mayúsculas A, B, etc.*

Ejemplo

A continuación damos algunos ejemplos de conjuntos

(a) $V = \{a, e, i, o, u\}$

(b) $\mathbb{Z}_+ = \{n \in \mathbb{Z} : n = 1, 2, 3, \dots\}$

(c) $D = \{1, 3, 9\} = \{n \in \mathbb{Z}_+ : n \text{ es divisor de } 9\}$

(d) $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (Números naturales)

(e) $\mathbb{R} = \{\text{Conjunto de los números reales}\}$

(f) $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, \text{ y } x, y \text{ son números reales}\}$

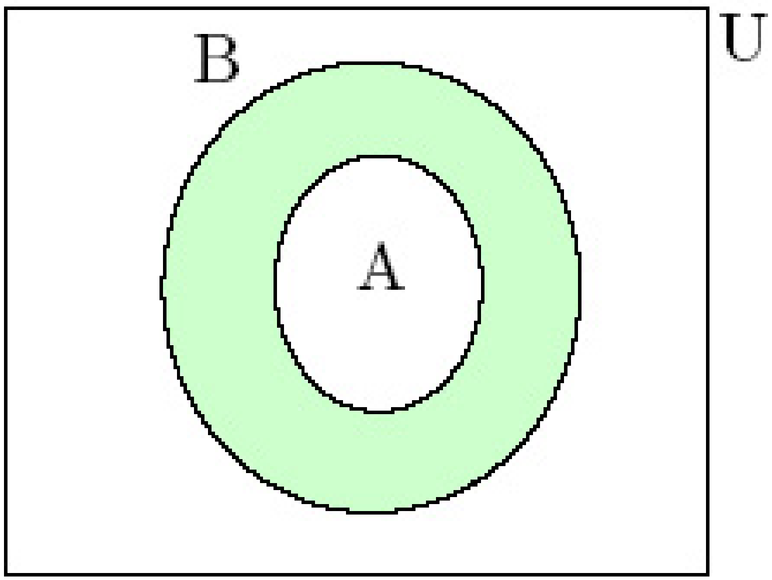
Definición 2 (Elemento de un conjunto)**.** *Los objetos que conforman la colección del conjunto se llaman elementos del conjunto. Cuando "a" es un elemento de un conjunto A escribimos $a \in A$ y cuando "a" no es un elemento de un conjunto A escribimos $a \notin A$.*

Definición 3 (Conjunto universal)**.** *Se define el conjunto universal como el conjunto de todos los objetos que se pueden considerar. Corrientemente este conjunto se denota por U.*

Definición 4 (Conjunto vacío). *Se define el conjunto vacío como el conjunto que no contiene elementos. Normalmente este conjunto se denota por* $\emptyset$.

Definición 5 (Subconjunto). *Se dice que un conjunto* A *es subconjunto del conjunto* B *si todo elemento de* A *es elemento de* B *y se escribe* $A \subset B$. *En otras palabras,*

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \, (x \in A \Rightarrow x \in B).$$



Definición 6 (Postulado de extensionalidad)**.** *Se dice que dos conjuntos A y B son iguales, si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$. En otras palabras,*

$$\forall A, \forall B \, (\forall x \, (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow A = B).$$

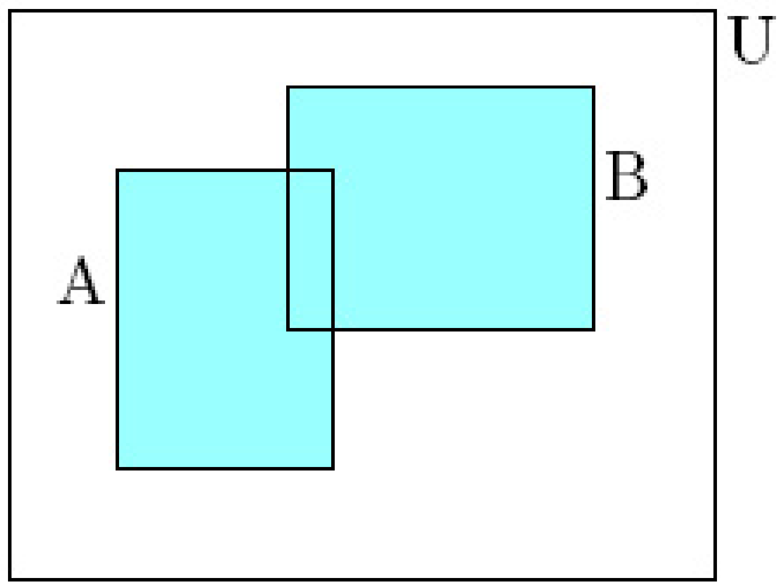
Definición 7 (Conjunto de partes de un conjunto)**.** *Se define el* ***conjunto de partes*** *de A, denotado con $\mathscr{P}(A)$, como el conjunto de todos los subconjuntos de A. En otras palabras,*

$$\forall A, \forall C \, (C \in \mathscr{P}(A) \Leftrightarrow C \subset A).$$

Álgebra de conjuntos

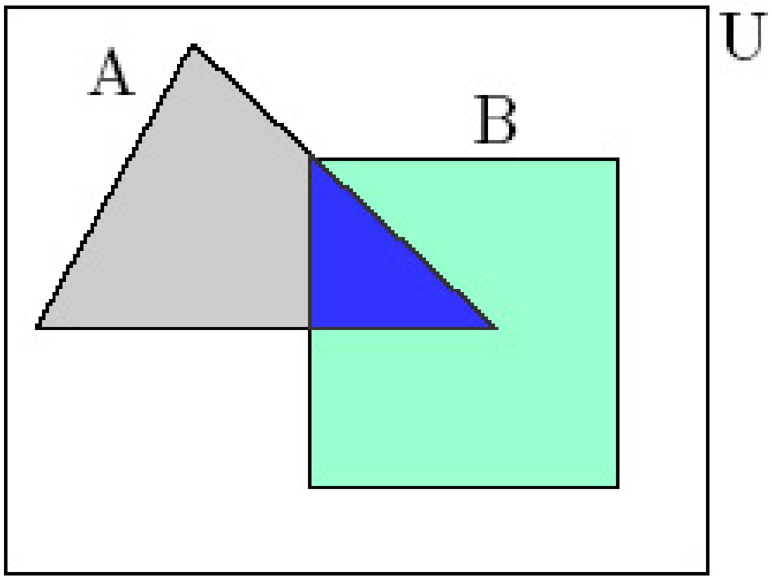
Definición 8 (Unión).

$$A \cup B := \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}.$$



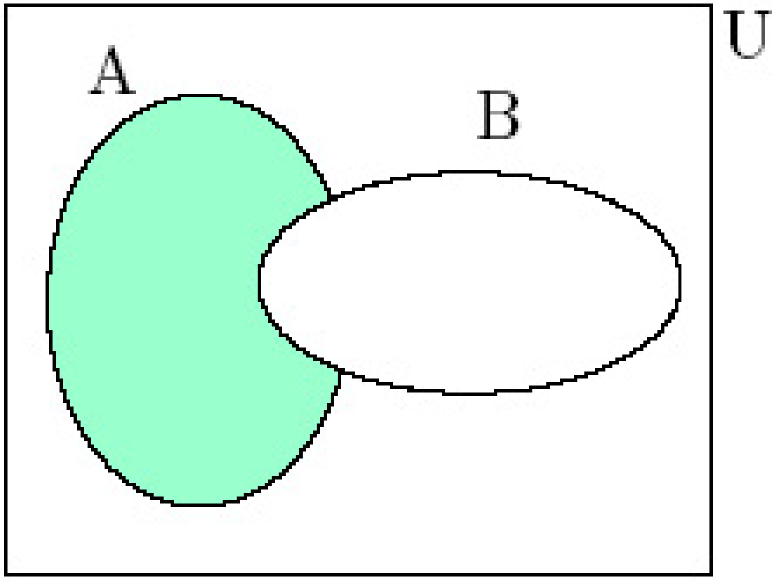
Definición 9 (Intersección)**.**

$$A \cap B := \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}.$$



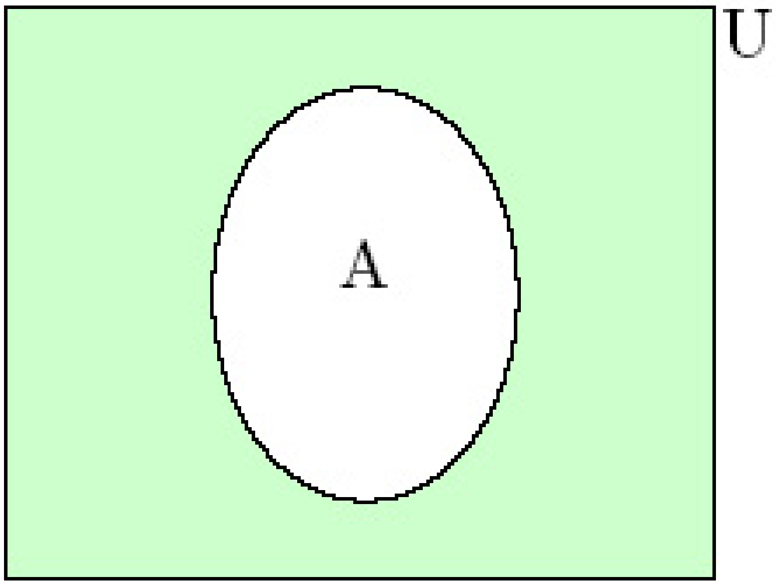
Definición 10 (Diferencia)**.**

$$A \backslash B = A - B := \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

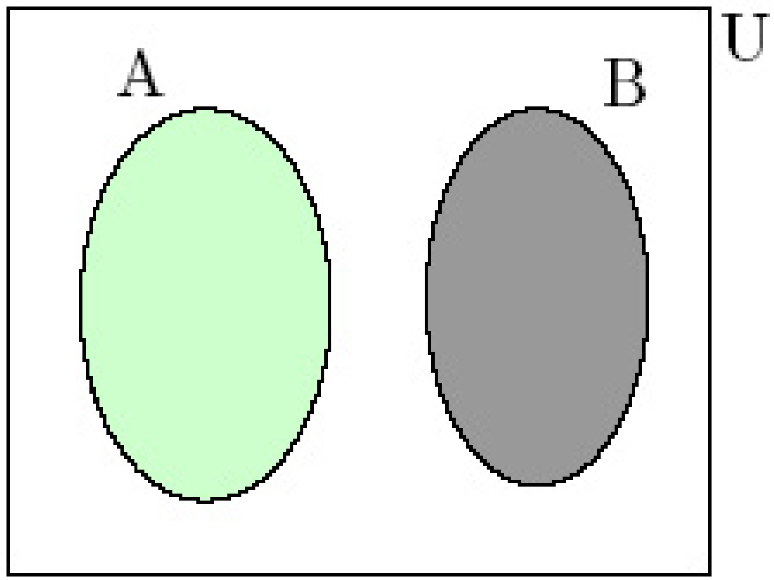


Definición 11 (Complemento).

$$\overline{A} = A' := \{x \in U : x \notin A\}.$$



Definición 12 (Conjuntos disjuntos). *Se dice que A y B son conjuntos disjuntos, si y sólo si $A \cap B = \emptyset$.*



Propiedades

1. Leyes Asociativas
   - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. Leyes Conmutativas
   - $A \cup B = B \cup A$
   - $A \cap B = B \cap A$
3. Leyes de Idempotencia
   - $A \cup A = A$
   - $A \cap A = A$
4. Inclusión respecto a una unión e intersección
   - $A \subset A \cup B$ ó $B \subset A \cup B$
   - $A \cap B \subset A$ ó $A \cap B \subset B$

5. Conjuntos vacío y universal

- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cup U = U$
- $A \cap U = A$

6. Leyes de absorción

- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$

7. Diferencia y Complemento

- $A \cup \overline{A} = U$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $\overline{(\overline{A})} = A$
- $\overline{U} = \emptyset$
- $\overline{\emptyset} = U$

8. Leyes de Morgan

- $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

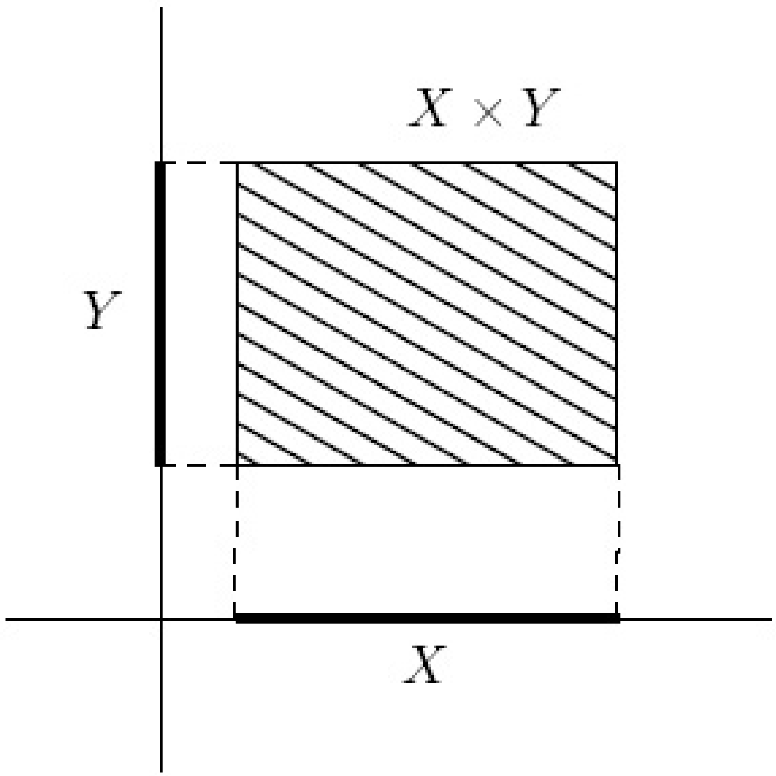
Definición 13 (Unión e Intersección generalizadas). *Se define respectivamente la unión e intersección generalizadas de los conjuntos* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *como:*

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n := \{x \in U : x \in A_1 \vee \cdots \vee x \in A_n\},\\ \bigcap_{i=1}^{n} A_i &= A_1 \cap A_2 \cap \cdots \vee \cap A_n := \{x \in U : x \in A_1 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}.\end{aligned}$$

Producto cartesiano

Sean X e Y dos conjuntos cualesquiera. Se denomina producto cartesiano de X por Y, denotado por $X \times Y$, al conjunto de pares ordenados definido como:

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}.$$



Experimentos, espacio muestral y eventos

Experimentos deterministas y aleatorios

En todos los experimentos tiene que pasar algo y se ha de observar algún hecho, proceso o sistema que está funcionando, y hay que observar una parte de él. La "cosa hecha" o "la parte observada", junto con la observación que se obtiene, es el ***experimento***.
La observación misma es un **resultado** del experimento.

Ejemplo

A continuación mostramos un enunciado de un experimento y un resultado del mismo.

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\text{observar el número que sale en la cara superior de un dado}\} \\ \alpha &= \{\text{sale 1 en la cara superior del dado}\} \end{aligned}$$

Definición 14 (Experimento aleatorio).
Se dice que un experimento es ***aleatorio****, si no se puede predecir, en el sentido ordinario, el resultado antes de llevar a cabo el experimento.*

Ejemplos

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \{\text{observar el número que sale en la cara superior de un dado}\} \\
E_2 &= \{\text{observar el tiempo de una persona en una cola de autobús}\} \\
E_3 &= \{\text{observar la sucesión de caras y sellos al lanzar una moneda tres veces}\} \\
E_4 &= \{\text{medir la resistencia a la tensión de una barra de acero}\}
\end{aligned}
$$

Definición 15 (**Experimento determinista**).
*Se dice que un experimento es **determinista**, si se puede predecir el resultado antes de llevar a cabo el experimento.*

Espacio muestral y eventos

Definición 16 (**Espacio muestral**).
El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento E se llama espacio muestral y se denota por S.

Definición 17 (**Espacio muestral discreto**).
*Un espacio muestral de un experimento aleatorio es **discreto**, si sus posibles resultados pueden ser enumerados.*
*Si el número total de posibles resultados de un experimento es finito, se dice que el espacio muestral es **finito**, de lo contrario se dice que es **infinito**.*

Definición 18 (Espacio muestral continuo).
Un espacio muestral de un experimento aleatorio es ***continuo****, si posee un número infinito de resultados que no pueden ser ordenados en una sucesión.*

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \{\text{observar el número que sale en la cara superior de un dado}\}\\
E_2 &= \{\text{observar el tiempo de una persona en una cola de autobús}\}\\
E_3 &= \{\text{observar la sucesión de caras y sellos al lanzar una moneda}\\
&\quad \text{tres veces}\}\\
E_4 &= \{\text{medir la resistencia a la tensión de una barra de acero}\}\\
E_5 &= \{\text{contar el número de lanzamientos de una moneda legal hasta}\\
&\quad \text{obtener una cara por primera vez}\}
\end{aligned}
$$

Definición 19 (Eventos).
Un ***evento*** *o* ***suceso*** *es un subconjunto del espacio muestral* S*. Designaremos con letras mayúsculas* A, B, C, *etc., a los eventos.*

Definición 20 (Evento atómico o elemental).
Un evento ***atómico*** *o* ***elemental*** *es un evento que contiene un sólo punto del espacio muestral* S*. En otras palabras,* $A = \{\alpha\}$ *es un evento atómico, donde* α *es un resultado de* E*.*

Ejemplo

Consideremos el experimento

$$E_3 = \{\text{observar la sucesión de caras y sellos al lanzar una moneda tres veces}\}$$

Los eventos atómicos o elementales de E_3 son:

$$ccc, \; ccs, \; csc, \; css, \; sss, \; ssc, \; scc, \; scs$$

A continuación mostramos algunos eventos de E_3.

- A = {en la sucesión hay al menos dos caras}
  $A = \{ccc, ccs, csc, scc\}$
- B = {se obtuvo cara en el primer lanzamiento}
  $B = \{ccc, ccs, csc, css\}$
- C = {se obtuvo sello en el primer lanzamiento}
  $C = \{sss, ssc, scc, scs\}$
- D = {en la sucesión se observa al menos una cara o un sello}
  $D = S$
- F = {en la sucesión no se observan ni caras ni sellos}
  $F = \emptyset$

Definición 21 (**Evento imposible**). *Cualquier evento que sea igual al conjunto vacío se llama evento imposible.*

Definición 22 (**Evento seguro**). *Cualquier evento que sea igual al espacio muestral se llama evento seguro.*

Definición 23 (**Eventos excluyentes**). *Se dice que los eventos A y B son eventos excluyentes, si y sólo si $A \cap B = \emptyset$.*

Ejemplo

Para los eventos B, C, D y F definidos en el ejemplo anterior, las siguientes propiedades son ciertas:

- D es el evento seguro.
- F es el evento imposible.
- B y C son excluyentes.

Definiciones y propiedades de la probabilidad

Si A es un evento asociado a un experimento, no se puede indicar con certeza si A ocurrirá o no. La manera de como se asigna una medida a la ocurrencia de un evento, depende de cómo se define probabilidad. A continuación se describirán tres definiciones de probabilidad: *axiomática*, *frecuentista* y *clásica*.

Definición axiomática de la probabilidad

Sean E un experimento y S su espacio muestral asociado. A cada evento $A \subset S$ se le asocia un número real, denotado por $P(A)$ y llamado probabilidad de A, que satisface los siguientes axiomas:

I. $0 \leq P(A) \leq 1$.

II. $P(S) = 1$.

III. Si A y B son eventos excluyentes, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

IV. Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ son eventos mutuamente excluyentes, es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

A continuación se presentan algunos teoremas que se deducen de los axiomas de la probabilidad.

Teorema 1. $P(\emptyset) = 0$.

Teorema 2. *Si A es un evento, entonces*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Teorema 3. *Si A y B son eventos cualesquiera, entonces*

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}).$$

Teorema 4. *Si A y B son eventos cualesquiera, entonces*

$$P(A \cup A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Teorema 5. *Si A y B son eventos tales que $A \subset B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.*

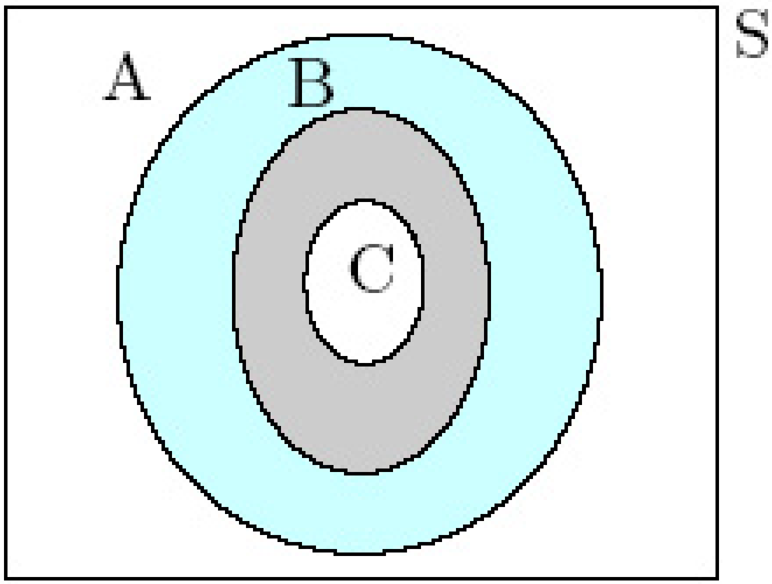
En los siguientes ejemplos se muestra la aplicación de los axiomas y teoremas de la probabilidad.

Ejemplo

Sean A, B y C tres eventos no vacíos tales que: $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$, y $P(C) = 1/4$. Por otra parte, si consideramos únicamente los eventos A, B y C a los efectos de enunciar las siguientes afirmaciones, se tiene que: la probabilidad de que ocurra exclusivamente el evento C es cero, y que sólo ocurra B también es cero. Mientras, la probabilidad de que ocurra únicamente el evento A es $1/6$. Además, la probabilidad de que se dé a lugar el evento C y no se produzca el evento B es cero. Determinar la probabilidad de que ocurran los eventos B o C.

Solución. Se debe calcular la probabilidad $P(B \cup C)$.

La disposición de los eventos A, B y C se muestra en el siguiente diagrama de Venn.



Así, la probabilidad de que ocurran los eventos B o C es

$$P(B \cup C) = P(B) = 1/3.$$

Ejemplo

Sean A, B y C tres eventos no vacíos todos subconjuntos del espacio muestral S. Se sabe que

$$P(A \cup B \cup C) = P(S),$$

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = 1/8,$$

$$P(B \cup C) = 1/2,$$

$$(\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (\overline{A} \cup \overline{C}) = S.$$

Determinar la probabilidad de que ocurra el evento A.

Solución. Como $\overline{S} = \emptyset$, entonces aplicando las leyes de Morgan se obtiene:

$$\emptyset = \overline{S} = \overline{\left[(\overline{A} \cup \overline{B}) \cup (\overline{A} \cup \overline{C})\right]} = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})} \cap \overline{(\overline{A} \cup \overline{C})}$$

$$= (A \cap B) \cap (A \cap C).$$

Como $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, entonces se tiene:

$$
\begin{aligned}
1 &= P(A \cup B \cup C) \\
&= P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) \\
&= P(A) + P(B \cup C) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap B) - P(A \cap C).
\end{aligned}
$$

Utilizando los valores $P(A \cap B) = P(A \cap C) = 1/8$ y $P(B \cup C) = 1/2$, y luego despejando $P(A)$ se obtiene:

$$P(A) = 3/4.$$

Definición frecuentista de la probabilidad

Sean E un experimento y A un evento asociado a E.

Suponga que E se realiza N veces.

Suponga también que en las N veces que se realizó E, el evento A ocurrió $n_N(A)$ veces.

Entonces, la definición frecuentista de la probabilidad de A está dada por:

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{n_N(A)}{N},$$

donde se supone la existencia del límite.

Definición clásica de la probabilidad

Sea E un experimento que tiene n resultados posibles.

Definición 24 (Eventos igualmente verosímiles). *Dos eventos A y B se dicen igualmente verosímiles si tienen la misma probabilidad de ocurrencia.*

Supongamos que los resultados de E son igualmente verosímiles.

En estas condiciones el espacio muestral de E es:

$$S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\},$$

con

$$P(\{\alpha_i\}) = \frac{1}{n}, \quad \text{para } i = 1, \ldots, n.$$

Sea A un evento asociado a E definido como

$$A = \{\alpha_{l_1}, \alpha_{l_2}, \ldots, \alpha_{l_m}\},$$

donde $l_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $l_i \neq l_j$, para $i \neq j$.

La definición clásica de la probabilidad de A es:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\#A}{\#S} = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}.$$

Ejemplo

Se lanza un dado normal. Sea A el evento definido como

$$A = \{\text{obtener un número mayor que } 4\}.$$

El evento A se puede escribir como

$$A = \{5, 6\}.$$

Como

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

entonces

$$P(A) = 2/6.$$

Ejemplo

Consideremos el experimento

$$E_3 = \{\text{observar la sucesión de caras y sellos al lanzar una moneda tres veces}\}$$

Sean los siguientes eventos asociados a E_3:

$$A = \{\text{en la sucesión hay al menos dos caras}\} = \{ccc, ccs, csc, scc\}$$

$$B = \{\text{se obtuvo cara en el primer lanzamiento}\} = \{ccc, ccs, csc, css\}$$

$C = \{\text{se obtuvo sello en el primer lanzamiento}\} = \{sss, ssc, scc, scs\}$

$D = \{\text{en la sucesión se observa al menos una cara o un sello}\} = S_3$

$F = \{\text{en la sucesión no se observan ni caras ni sellos}\} = \emptyset$

La probabilidad de cada uno de estos eventos está dada por:

- $P(A) = 1/2$
- $P(B) = 1/2$
- $P(C) = 1/2$
- $P(D) = 1$
- $P(F) = 0$

Cálculo de la probabilidad

Sea E un experimento que tiene n resultados diferentes.

Sea S el espacio muestral de E dado por:

$$S = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}.$$

Casos no igualmente verosímiles

A cada uno de los eventos elementales $\{\alpha_i\}$ se le asigna un número p_i, llamado probabilidad de $\{\alpha_i\}$, que satisface las siguientes condiciones:

i) $P(\{\alpha_i\}) = p_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

ii) $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

Sea A un evento asociado a E definido como

$$A = \{\alpha_{l_1}, \alpha_{l_2}, \ldots, \alpha_{l_m}\},$$

donde $l_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $l_i \neq l_j$, si $i \neq j$.

La probabilidad del evento A es

$$P(A) = p_{l_1} + p_{l_2} + \cdots + p_{l_m}. \tag{1}$$

Observaciones:

- Puesto que $\{\alpha_i\}$ es un evento, las condiciones i) y ii) deben estar de acuerdo con los axiomas de probabilidades.
- Es bueno aclarar que todos los números p_i no son necesariamente iguales.

- La asignación de la probabilidad p_i a cada uno de los eventos elementales $\{\alpha_i\}$, sujeto a las condiciones i) y ii), determina de un modo único $P(A)$ para cada uno de los sucesos $A \subset S$, en donde $P(A)$ está dado por la ecuación (1).

Ejemplo

Suponga que un experimento E tiene asociado el espacio muestral

$$S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}.$$

Además, suponga que $P(\{\alpha_1\}) = p_1$, $P(\{\alpha_2\}) = p_2$, y $P(\{\alpha_3\}) = p_3$, satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} p_1 = 2p_2 + p_3, \\ p_2 = p_1 - 2p_3. \end{cases}$$

Sea A un evento definido por $A = \{\alpha_1, \alpha_2\}$.
Determinar la probabilidad de A.

Solución. Utilizando la ecuación (1) la probabilidad de A viene dada por

$$P(A) = p_1 + p_2. \tag{2}$$

Considerando las ecuaciones

$$p_1 = 2p_2 + p_3 \quad \text{y} \quad p_2 = p_1 - 2p_3,$$

conjuntamente con la ecuación

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$

se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} p_1 - 2p_2 - p_3 = 0 \\ p_1 - p_2 - 2p_3 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema anterior se obtiene que:

$$p_1 = \frac{3}{5}, \qquad p_2 = \frac{1}{5}, \qquad p_3 = \frac{1}{5}.$$

Utilizando convenientemente estos valores en la expresión de $P(A)$ dada en (2) se tiene

$$P(A) = \frac{4}{5}.$$

Casos igualmente verosímiles

Supongamos que un experimento E tiene n eventos elementales igualmente verosímiles. Supongamos también que la probabilidad de cada evento elemental es $p_i = p$. Entonces de la condición

$$p_1 + \cdots + p_n = 1$$

se deduce que $p = 1/n$.

De esta forma, para cualquier evento A que conste de m eventos elementales, se tiene que

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{3}$$

Este método de evaluar $P(A)$ a menudo se indica como sigue:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{número de maneras en que } A \text{ puede ocurrir}}{\text{número total de maneras en que } E \text{ puede ocurrir}} \\ &= \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}}. \end{aligned}$$

Ejemplo

Se lanzan dos dados normales. Encontrar la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos.

a) La suma de los números obtenidos en los dados es igual a 7.

b) La suma de los números obtenidos en los dados es igual a 7 o a 11.

c) El número obtenido en uno de los dados es mayor que el obtenido en el otro dado.

d) En ambos dados se obtiene un número par.

Solución. Inicialmente se debe encontrar el espacio muestral asociado al experimento. Luego, se calculan las probabilidades de cada uno de los eventos.

El espacio muestral asociado al experimento es:

$$\begin{aligned} S = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\\ &(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),\\ &(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}. \end{aligned}$$

Elección al azar de uno o más objetos

Suponga que se tienen N objetos, digamos $a_1, a_2, \ldots, a_N$.

i) *Escoger al azar un objeto* de los N objetos, significa que cada uno de los objetos tiene la misma probabilidad de ser escogido. Esto es,

$$\text{Prob(elegir } a_i) = 1/N, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Ejemplo

Se tiene una caja con 2 esferas azules y 3 rojas. Se escoge una esfera al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la esfera escogida sea azul?

Solución.

ii) *Escoger al azar dos objetos* entre N objetos, significa que cada uno de los pares de objetos (sin considerar el orden) tienen la misma probabilidad de ser escogido que cualquier otro par. Esta afirmación nos lleva inmediatamente a la cuestión de **cuántos pares diferentes hay**. Suponga que hay K de tales pares. Entonces, la probabilidad de elegir cada par está dada por

$$\text{Prob}(\text{elegir } (a_i, a_j)) = 1/K.$$

Ejemplo

Se tiene una caja con 2 esferas azules y 3 rojas. Se escogen dos esferas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que una esfera sea azul y la otra sea roja?

Solución.

iii) *Escoger al azar n objetos ($n \leq N$) entre N objetos*, significa que cada n-upla

$$(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}),$$

tiene la misma probabilidad de ser escogida como cualquier otra n-upla. **¿Cuántas n-uplas diferentes hay?**

Ejemplo

Se tiene una caja con 5 esferas azules y 4 rojas. Se escogen 4 esferas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la muestra tenga exactamente 3 esferas azules?

Solución.

En consecuencia, para calcular la probabilidad de seleccionar al azar uno o más objetos de una colección dada, es necesario saber contar las maneras posibles de que ocurra tal selección. Se deja al lector investigar acerca de los métodos de enumeración.

Probabilidad condicional e independencia

Probabilidad condicional

Sean A y B dos eventos asociados con un experimento E. Se indica con $B|A$ al evento condicional B dado que A ha ocurrido.

La probabilidad condicional de B habiéndose presentado A, denotada por $P(B|A)$, es la probabilidad del evento $B|A$, que se define por

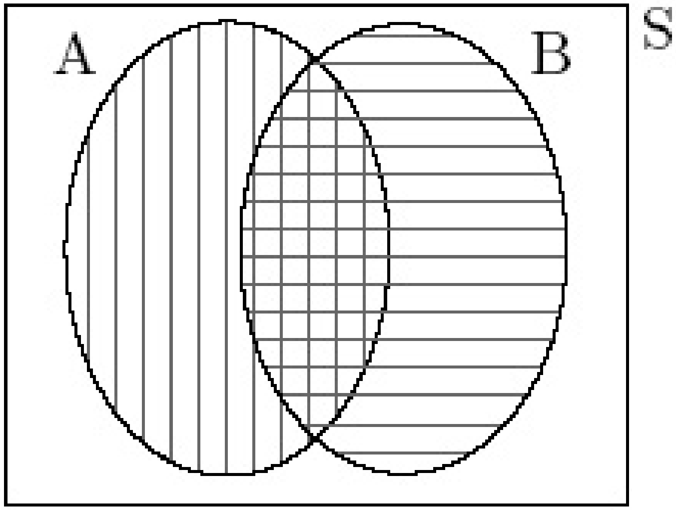
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{P(A)}, \qquad \text{siempre que } P(A) > 0.$$

Observaciones:

- En general los eventos $B|A$ y $A|B$ son diferentes. Por ello, generalmente, se cumple que

$$P(B|A) \neq P(A|B).$$

- Cada vez que se calcula $P(B|A)$ se está esencialmente calculando $P(B)$ con respecto al *espacio espacio muestral reducido* de A en vez del espacio muestral original S. Considere el siguiente diagrama de Venn.



Ejemplo

Se lanzan dos dados normales y se anotan los resultados (x_1, x_2), donde x_i es el resultado del i-ésimo dado, para $i = 1, 2$.

El espacio muestral S es

$$S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),$$
$$(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),$$
$$(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),$$
$$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

Considere los siguientes dos eventos:

$$A = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = 10\} \quad \text{y} \quad B = \{(x_1, x_2) : x_1 > x_2\}.$$

Así,

$$\begin{aligned} A &= \{(5,5),(4,6),(6,4)\}, \\ B &= \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2), \\ &\quad (5,3),(5,4),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$P(A) = \frac{3}{36}$$

y

$$P(B) = \frac{15}{36}.$$

Como

$$A \cap B = \{(6,4)\},$$

entonces

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3}$$

y

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{15}.$$

¿Por qué, en este caso, $P(B|A) > P(A|B)$?

Ley multiplicativa

Una consecuencia importante de la definición de probabilidad condicional se obtiene escribiéndola de la manera siguiente:

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

o, equivalentemente,

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

Esto a veces se conoce como ***ley multiplicativa*** o ***teorema de multiplicación*** de probabilidades.

Esta ley se puede generalizar a más de dos eventos de la siguiente manera:

$$P(A_1A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdots P(A_n|A_1A_2 \cdots A_{n-1}).$$

Ejemplo

Sea una caja que contiene cuatro esferas azules, tres rojas y dos verdes. Se toman aleatoriamente tres esferas una a una.
Determinar la probabilidad que:

a) la primera esfera es azul, la segunda roja y la tercera esfera es verde;

b) las tres esferas escogidas son de distinto color.

Solución. Definamos los siguientes eventos

$$
\begin{aligned}
A &= \{\text{escoger una esfera azul}\}, \\
R &= \{\text{escoger una esfera roja}\}, \\
V &= \{\text{escoger una esfera verde}\}.
\end{aligned}
$$

a) Debemos determinar la probabilidad

$$P(A \cap R \cap V).$$

Aplicando la ley multiplicativa se obtiene

$$\begin{aligned} P(A \cap R \cap V) &= P(V|A \cap R)\, P(A \cap R) \\ &= P(V|A \cap R)\, P(R|A)\, P(A). \end{aligned}$$

Como

$$P(A) = \frac{4}{9}, \quad P(R|A) = \frac{3}{8} \quad \text{y} \quad P(V|A \cap R) = \frac{2}{7},$$

entonces

$$\begin{aligned} P(A \cap R \cap V) &= \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} \\ &= \frac{1}{21} \end{aligned}$$

b) Definamos el evento:

$$D = \{\text{las tres esferas escogidas son de distinto color}\}.$$

Calculemos la probabilidad $P(D)$ utilizando dos procedimientos.

b.1) Los resultados deseados son de la forma

La probabilidad de cada uno de estos resultados se calculó en la parte a), la cual es igual a $1/21$.

Por lo tanto,

$$P(D) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$

b.2) Este procedimiento consiste en contar los casos favorables y los casos posibles, luego calcular la probabilidad pedida como

$$P(D) = \frac{\#\text{ casos favorables}}{\#\text{ casos posibles}}.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}\#\text{ casos favorables} &= 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24 \\ \#\text{ casos posibles} &= \binom{9}{3} = \frac{9!}{6! \cdot 3!}\end{aligned}$$

De esta forma,

$$P(D) = \frac{24}{\frac{9!}{6! \cdot 3!}} = \frac{24 \cdot 6}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{2}{7}.$$

Probabilidad total

Se utilizará el concepto de probabilidad condicional para calcular la probabilidad de un evento cualquiera B.

Definición 25 (Partición).
Se dice que los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ representan una partición del espacio muestral S si:

(a) $A_i \cap A_j = \emptyset$, *para* $i \neq j$.

(b) $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

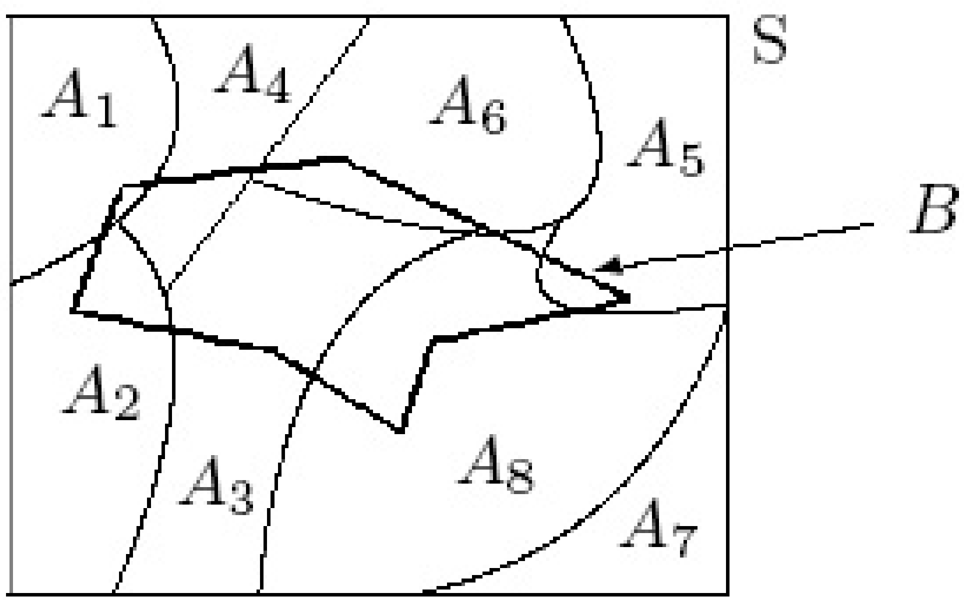
(c) $P(A_i) > 0$, *para* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Observación:

Cuando se efectúa el experimento E, ocurre uno y sólo uno de los eventos A_i.

Proposición 1 (Principio de probabilidad total).
Sean E un experimento y S su espacio muestral. Sea B un evento asociado con el experimento E. Suponga que los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ representan una partición del espacio muestral S. Entonces,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i).$$



Teorema de Bayes

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición del espacio muestral S, y B un evento. Aplicando la definición de probabilidad condicional, la ley multiplicativa, y el principio de probabilidad total, se obtiene:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Este resultado se conoce como ***teorema de Bayes***. También se le llama fórmula para la probabilidad de las "causas".

Observación:

Puesto que los A_i son una partición del espacio muestral, uno y sólo uno de los eventos A_i ocurre. Por lo tanto, la fórmula (4) nos da la probabilidad de un A_i particular (esto es, una "causa"), dado que el evento B *ha* ocurrido.

Ejemplo

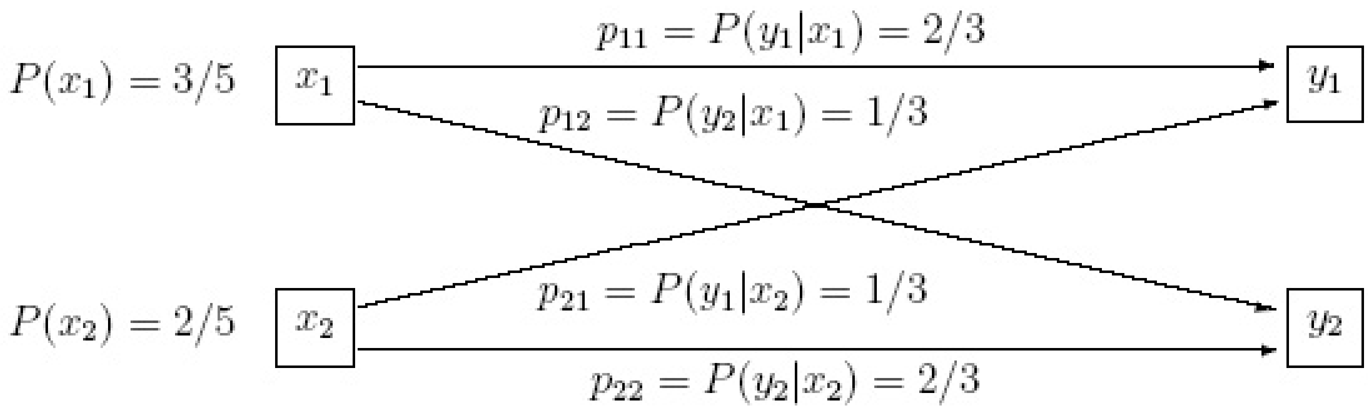
Un *canal binario y simétrico* está caracterizado por:

- un alfabeto de entrada $X = \{x_1, x_2\}$;
- un alfabeto de salida $Y = \{y_1, y_2\}$;
- probabilidades de transición p_{ij} definidas como

$$p_{ij} = P(y_j|x_i) = P(\text{recibir símbolo } y_j|\text{ símbolo } x_i \text{ fue transmitido})$$

- $P(x_i)$ que denota la probabilidad que x_i fue transmitido;
- $P(y_j)$ denota la probabilidad que y_j fue recibido;
- P_e probabilidad de error. En un canal binario, un error ocurre si y_2 es recibido cuando x_1 es transmitido o y_1 es recibido cuando x_2 es transmitido.

Considere el siguiente canal binario y simétrico.



Calcular:

a) la probabilidad que y_1 fue recibido;

b) la probabilidad que y_2 fue recibido;

c) la probabilidad que x_1 fue transmitido dado que y_1 fue recibido;

d) la probabilidad que x_1 fue transmitido dado que y_2 fue recibido;

e) la probabilidad que x_2 fue transmitido dado que y_1 fue recibido;

f) la probabilidad que x_2 fue transmitido dado que y_2 fue recibido;

g) la probabilidad de error.

Eventos independientes

Definición 26. *Se dice que los eventos A y B son independientes si*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

En el siguiente teorema se muestra otra definición equivalente de eventos independientes.

Teorema 6. *Los eventos A y B son independientes si y sólo si*

$$P(A|B) = P(A)$$

ó

$$P(B|A) = P(B).$$

El siguiente ejemplo nos permitirá entender la importancia de extender la noción de independencia a más de dos eventos.

Ejemplo

Supongamos que se lanzan dos dados. Definamos los eventos A, B y C, como sigue:

$$\begin{aligned}
A &= \{\text{el primer dado muestra un número par}\},\\
B &= \{\text{el segundo dado muestra un número impar}\},\\
C &= \{\text{ambos dados muestran números pares o números impares}\}.
\end{aligned}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned}
A &= \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(4,1),(4,2),(4,3),\\
&\quad (4,4),(4,5),(4,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\,,\\
B &= \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(1,3),(2,3),(3,3),\\
&\quad (4,3),(5,3),(6,3),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5)\}\,,\\
C &= \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6),\\
&\quad (1,1),(3,1),(5,1),(1,3),(3,3),(5,3),(1,5),(3,5),(5,5)\}\,.
\end{aligned}$$

Así,

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}.$$

Aún más,

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto, los tres eventos son independientes dos a dos.

Ahora, como

$$A \cap B \cap C = \emptyset$$

y

$$P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8},$$

entonces

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C).$$

Este ejemplo motiva la siguiente definición.

Definición 27. *Se dice que los tres eventos A, B y C son mutuamente independientes si y sólo si todas las condiciones siguientes se cumplen:*

(i) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$,

(ii) $P(A \cap C) = P(A)P(C)$,

(iii) $P(B \cap C) = P(B)P(C)$,

(iv) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

Definición 28. *Se dice que los n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente independientes si y sólo si se tiene, para $k = 2, 3, \ldots, n$,*

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}).$$

(Se deja al lector verificar que hay $2^n - n - 1$ condiciones juntas anotadas.)

Experimentos compuestos

Se dice que un ***experimento es compuesto*** si se obtiene como una sucesión de experimentos independientes.

Ejemplo

Si considera el lanzamiento de una moneda legal seguido con el lanzamiento de un dado perfecto, el experimento resultante es un experimento compuesto.

Espacio de probabilidades de un experimento compuesto

Asociado a un experimento compuesto está su espacio muestral S y la manera de como se debe asignar la probabilidad a un evento contenido en S. A continuación se presenta la definición de espacio muestral y probabilidad para un experimento compuesto.

Definición 29. *Sean* E_1 *y* E_2 *dos experimentos independientes con espacios muestrales* S_1 *y* S_2*, respectivamente. Sea* E *el experimento compuesto conformado por la sucesión de los experimentos* E_1 *y* E_2*. Entonces, el espacio muestral de* E *está definido por*

$$S = S_1 \times S_2.$$

Definición 30. *Sean* $\{\alpha\}$ *un evento elemental de* E_1 *con probabilidad* p_α *y* $\{\beta\}$ *un evento elemental de* E_2 *con probabilidad* p_β*. Entonces, la probabilidad del evento elemental* $\{(\alpha, \beta)\} \subset S$ *se define como*

$$P(\{(\alpha, \beta)\}) = p_\alpha \cdot p_\beta.$$

Observación:

Las definiciones de espacio muestral y probabilidad para un experimento compuesto se pueden extender fácilmente para la sucesión de n experimentos independientes.

Experimento binomial

Sea E un experimento con espacio muestral S. Suponga que se desea observar la ocurrencia de un evento A. Sea p la probabilidad de A. Así,

$$P(\overline{A}) = 1 - p.$$

Supongamos que se realizan n repeticiones independientes de E donde en cada repetición no se cambian las probabilidades $P(A)$ y $P(\overline{A})$.

En estas condiciones, tenemos un experimento compuesto de tipo **binomial**

$$E^n = \underbrace{E\ E\ \cdots\ E}_{n \text{ veces}}$$

con espacio muestral

$$S^n = \underbrace{S \times S \times \cdots \times S}_{n \text{ veces}}.$$

Observaciones:

- En un experimento binomial se tiene interés en el número de veces que ocurre A en esas n repeticiones del experimento E.

- A una ocurrencia de A se le denominará éxito y la ocurrencia de $\overline{A}$ se le llamará fracaso. En otras palabras, en un experimento binomial es importante contar el número de éxitos y el número de fracasos en las n repeticiones del experimento E.

- La probabilidad de que en n repeticiones de E hallan k éxitos está dada por

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

  donde A_k es el evento definido por

$$A_k = \{k \text{ éxitos en } n \text{ ensayos del experimento } E\}$$

  para $k = 0, 1, \ldots, n$.

Ejemplo

Una caja contiene 6 tornillos con tuerca y 4 sin tuerca. Se extraen aleatoriamente y con reposición 4 tornillos de la caja. ¿Cuál es la probabilidad que se extraigan 3 tornillos con tuerca?

Solución. Como los tornillos se toman con reposición y la probabilidad de obtener un tornillo con tuerca no cambia en cada extracción, este experimento es binomial.

De esta forma, un éxito es sacar un tornillo con tuerca. Sea p la probabilidad de sacar un tornillo con tuerca de un total de 10 tornillos, es decir,

$$p = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Por lo tanto, la probabilidad que se extraigan 3 tornillos con tuerca es

$$P(A_3) = \binom{4}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{216}{625}.$$

Ejemplo

Si se lanza una moneda normal 10 veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener 6 caras?

Solución. Un éxito es obtener una cara. Sea p la probabilidad de obtener cara en una moneda normal, es decir,

$$p = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener 6 caras es

$$\begin{aligned} P(A_6) &= \binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= \frac{21}{2^{10}}. \end{aligned}$$

Experimento geométrico

Las siguientes condiciones describen un experimento de tipo **geométrico**:

- Se efectúa un experimento E y estamos interesados sólo en la ocurrencia o no de algún evento A.
- Repetidamente se efectúa E, las repeticiones son independientes, y en cada una de las repeticiones $P(A) = p$ y $P(\overline{A}) = 1 - p$ permanecen constantes.
- El experimento E se repite hasta que A ocurra por primera vez.

Observaciones:

- En un experimento geométrico se tiene interés en el número de veces que debe repetirse el experimento E hasta que ocurra A por vez primera.

- A una ocurrencia de A se le denominará éxito y la ocurrencia de $\overline{A}$ se le llamará fracaso.

- Los eventos elementales de un experimento geométrico son de la forma

$$
\begin{array}{l}
A \\
\overline{A}\ A \\
\overline{A}\ \overline{A}\ A \\
\overline{A}\ \overline{A}\ \overline{A}\ A \\
\vdots
\end{array}
$$

- La probabilidad que ocurra A por primera vez en la k-ésima repetición de E está dada por

$$P(A_k) = (1-p)^{k-1}p, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

donde A_k es el evento definido por

$$A_k = \{\text{ocurre } A \text{ en la } k\text{-ésima repetición de } E\},$$

para $k = 0, 1, \ldots, n$.

Ejemplo

Si se lanza un dado normal repetidamente hasta obtener un tres, ¿cuál es la probabilidad que en el cuarto lanzamiento se obtenga un tres?

Solución. Un éxito es obtener un tres. Sea $p = 1/6$ la probabilidad de obtener un tres en un dado normal.

Por lo tanto, la probabilidad que en el cuarto lanzamiento se obtenga un tres es

$$P(A_4) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5^3}{6^4} \approx 0.096451$$

Ejemplo

Sea una caja con cuatro esferas azules y seis rojas. Si se toma con reposición una esfera de la caja hasta obtener una esfera azul, ¿cuál es la probabilidad que en la sexta extracción se obtenga una esfera azul?

Solución. La probabilidad que en la sexta extracción se obtenga una esfera azul es

$$P(A_6) = \left(\frac{3}{5}\right)^5 \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{3^5 \cdot 2}{5^6} = 0.031104$$

Experimento hipergeométrico

Describamos un experimento hipergeométrico a través de un ejemplo.

- Suponga que se tiene un lote de N artículos, de los cuales r son defectuosos y $(N - r)$ no son defectuosos.
- Suponga que se escogen al azar y sin reposición n artículos del lote $(n \leq N)$.
- Sea D_k el evento definido como

$$D_k = \{k \text{ artículos defectuosos encontrados entre los } n\},$$

  para $k = 0, 1, \ldots, r$.

  La ocurrencia de D_k indica que en la muestra de tamaño n hay exactamente k artículos defectuosos y $(n - k)$ artículos no defectuosos.

De esta forma, la probabilidad de encontrar k artículos defectuosos entre los n es

$$P(D_k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, r.$$

Ejemplo

Sea una caja con cuatro esferas azules y ocho verdes. Si se toman al azar y sin reposición seis esferas de la caja, entonces:

a) ¿cuál es la probabilidad que la muestra tenga dos esferas azules?

b) ¿cuál es la probabilidad que la muestra tenga cinco esferas azules?

Solución. a) La probabilidad que la muestra tenga dos esferas azules

$$P(D_2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{8}{6}}{\binom{12}{6}}$$

b) La probabilidad que la muestra tenga cinco esferas azules

$$P(D_5) = ?$$

Problemas propuestos

En esta sección se dan algunos problemas que contemplan los conceptos básicos de probabilidades, experimentos aleatorios y eventos.

Problema 1. *Sean dos cajas numeradas 1 y 2 tales que la caja 1 tiene* 2 *esferas azules y* 3 *rojas, y la caja 2 tiene* 3 *esferas azules y* 2 *rojas. Sean dos jugadores* A *y* B *que realizan el siguiente juego. El jugador* A *toma con reposición diez esferas de la caja 1. Simultáneamente, el jugador* B *escoge con reposición diez esferas de la caja 2. El jugador* A *gana el juego cuando él obtiene al menos* 3 *esferas azules y el jugador* B *escoge a lo sumo* 2 *esferas rojas. En cambio el jugador* B *gana el juego cuando él toma al menos* 3 *esferas rojas y el jugador* A *toma a lo sumo* 2 *esferas azules. Determinar la probabilidad de que el jugador* A *gane el juego.*

Problema 2. *Sean seis cajas numeradas* $1, 2, \ldots, 6$ *tales que la caja* j *tiene* $7 - j$ *esferas azules y* j *esferas rojas, para* $j = 1, 2, \ldots, 6$*. Suponga que usted lanza una moneda normal sobre una superficie plana. Si en la moneda se obtiene cara, usted toma una esfera de la caja 6 y la coloca en la caja 1. Por el contrario, si en la moneda sale sello usted no altera el contenido de las cajas. Finalmente como última etapa del experimento, usted toma una esfera de cada una de las cajas. Determinar la probabilidad de extraer sendas esferas azules.*

Problema 3. *Se tienen dos cajas que contienen esferas de igual tamaño y peso, pero de distintos colores. La primera caja contiene 4 esferas blancas, 3 rojas y 4 negras. En cambio, la segunda caja contiene 3 esferas blancas, 4 azules y 4 negras. Si se extraen con reposición 3 esferas de cada caja, entonces determinar la probabilidad de que se extraigan al menos 2 esferas negras. (Tenga presente que debe considerar el total de esferas extraídas, es decir, las tres esferas de la primera caja más las otras tres de la segunda caja.)*

Problema 4. *Cuatro amigos (Alberto, Beatriz, Carmen y Luis) se sientan alrededor de una mesa a jugar, apostando cierta cantidad de dinero. El juego consiste en que cada uno de ellos lanzará un dado corriente, por turnos; el primero de ellos que saque el número 1 ganará y recibirá de cada uno de sus compañeros 10 Bs.F. Ahora bien, Alberto toma el dado y decide lanzar de primero. Luego de Alberto, se acordó que sería el turno de Beatriz, luego Carmen y, por último, Luis. Este orden se repite hasta lograr un ganador. Determinar la probabilidad de que Alberto gane.*

Problema 5. *En un galpón se encuentran 4 componentes tipo A y 6 componentes tipo B. La probabilidad de que un componente tipo A dure más de 6 meses es* 0.9*. Mientras que dicha probabilidad para un componente tipo B es* $4/5$*. Para ensamblar un aparato se necesitan dos componentes, no importa de que tipo, los cuales pueden conectarse en serie o en paralelo. Un día el técnico encargado del ensamblaje selecciona dos componentes al azar de los que están en el galpón. Se tiene que la probabilidad de que el técnico ensamble los componentes en paralelo es de* $2/3$.

a) Determinar la probabilidad de que el equipo ensamblado por el técnico dure más de 6 meses.

b) Si se sabe que los componentes han sido conectados en serie, entonces determinar la probabilidad de que el equipo esté conformado por los dos tipos de componentes.

Problema 6. *Sean A, B y C tres eventos no imposibles asociados a un experimento E cuyo espacio muestral es S. Se sabe que*

$$\begin{aligned} P(A|B) = P(B|A) &= 1/2, \\ P(A \setminus B) &= 1/4, \\ A \cup B \cup C &= S, \\ \overline{((A \cup B) \cap C)} &= S. \end{aligned}$$

Determinar la probabilidad de que ocurra el evento C.

Una Variable Aleatoria

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica
Departamento de Electrónica, Computación y Control
Probabilidades

Abril, 2013

Contenido

Definición de variable aleatoria

En muchos experimentos se presenta la necesidad de asignar un número real x a cada uno de los elementos α del espacio muestral asociado al experimento. Es decir, $x = X(\alpha)$ es el valor de una función X definida del espacio muestral a los números reales.

Definición 1. *Sea E un experimento y S su espacio muestral. Una función X que asigna a cada uno de los elementos $\alpha \in S$, un número real $X(\alpha)$, se llama* ***variable aleatoria****.*

Para ilustrar esta definición veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Consideremos el experimento:

$$E = \{\textit{lanzar una moneda normal repetidamente hasta obtener cara}\}$$

El espacio muestral de este experimento se puede expresar como

$$S = \{c, sc, ssc, sssc, ssssc, sssssc, ssssssc, \ldots\},$$

donde la posición de los símbolos "s" y "c" en cada cadena de caracteres, indica el número del lanzamiento de la moneda donde se obtuvo un sello o una cara, respectivamente.

Sea $X : S \to \mathbb{R}$ una función definida como

$$\begin{aligned}
X(\{c\}) &= 1 \\
X(\{sc\}) &= 2 \\
X(\{ssc\}) &= 3 \\
X(\{sssc\}) &= 4 \\
X(\{ssssc\}) &= 5 \\
X(\{sssssc\}) &= 6 \\
X(\{ssssssc\}) &= 7 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$X = \textit{número del lanzamiento de la moneda donde se obtuvo cara},$$

que es la manera más común de definir una variable aleatoria.

Ahora bien, $X = k$ es una forma simplificada de denotar

$$X(\{\underbrace{ss\ldots s}_{k-1}c\}) = k,$$

además, $X = k$ significa, para nuestro experimento, que en el k-ésimo lanzamiento se obtuvo cara.

Eventos definidos por una variable aleatoria

A continuación describimos los eventos que pueden ser definidos utilizando una variable aleatoria. Sean X una variable aleatoria y x un número real fijo.

Sea $A_x \subset S$ un evento que contiene todos los eventos elementales α tales que la variable aleatoria X le asigna el número x. Esto es,

$$A_x = \{\alpha \in S : X(\alpha) = x\} = (X = x).$$

Como A_x es un evento, tiene una probabilidad la cual viene dada por

$$P(A_x) = P(X = x) = p.$$

Uno puede definir otros tipos de eventos en función de una variable aleatoria. Por ejemplo, para números reales fijos x, a y b, podemos definir los siguientes eventos:

$$\begin{aligned} (X \leq x) &= \{\alpha \in S : X(\alpha) \leq x\}, \\ (X > x) &= \{\alpha \in S : X(\alpha) > x\}, \\ (a < X \leq b) &= \{\alpha \in S : a < X(\alpha) \leq b\}. \end{aligned}$$

Estos eventos tienen probabilidades denotadas como:

- $P(X \leq x)$ es la probabilidad de que X tome valores menores o iguales a x;
- $P(X > x)$ es la probabilidad de que X tome valores mayores que x;
- $P(a < X \leq b)$ es la probabilidad de que X tome valores mayores que a y menores o iguales a b.

Ejemplo

Consideremos el experimento

$$E = \{lanzar\ una\ moneda\ normal\ repetidamente\ hasta\ obtener\ cara\}$$

y la variable aleatoria X definida como

$$X = n\acute{u}mero\ del\ lanzamiento\ de\ la\ moneda\ donde\ se\ obtuvo\ cara.$$

Sea A el evento definido como

$$A = \{\alpha \in S : X(\alpha) \leq 15\} = (X \leq 15).$$

De esta forma, el evento A se puede escribir equivalentemente como

$$A = \{c, sc, ssc, sssc, ssssc, \ldots, sssssssssssssssc\}.$$

Por lo tanto, la probabilidad de $(X \leq 15)$ está dada por

$$\begin{aligned} P(X \leq 15) &= P(A) \\ &= P(\{c\}) + P(\{sc\}) + \cdots + P(\{sssssssssssssssc\}) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{15}} \\ &= 1 - \frac{1}{2^{15}}. \end{aligned}$$

¿Cuál es el valor de $P(X < 1/2)$?

Tipos de variables aleatorias

Dependiendo de la naturaleza de los experimentos a los cuales está asociada una variable aleatoria, se pueden distinguir tres tipos de variables aleatorias: discretas, continuas y mixtas.

Variable aleatoria discreta

Definición 2. *Sea X una variable aleatoria. Si el número de valores de X con probabilidad positiva es finito o infinito numerable, llamamos a X* ***variable aleatoria discreta****. Esto es, se pueden anotar los valores de X con probabilidad positiva como $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ En el caso finito la lista termina y en el caso infinito numerable la lista continúa indefinidamente.*

Distribución de probabilidades

Definición 3. *Sea X una variable aleatoria discreta. Asumamos que $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ son los únicos valores de X con probabilidad positiva. Sea $p_i = P(X = x_i)$ la probabilidad de que la variable aleatoria X tome el valor x_i. La colección de pares (x_i, p_i), $i = 1, 2, \ldots$, se llama* ***distribución de probabilidades*** *de X.*

Observación:

Los números p_i satisfacen las siguientes condiciones:

a) $p_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots$,

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Definición 4. *La función*

$$p_X(x) = P(X = x) \quad \textit{para } x \in \mathbb{R},$$

se denomina ***función de probabilidades*** *de la variable aleatoria discreta* X.

La función de probabilidades de X satisface:

$$p_X(x) = \begin{cases} p_i, & \text{si } x = x_i,\ i = 1, 2 \ldots \\ 0, & \text{si } x \neq x_i,\ i = 1, 2 \ldots \end{cases}$$

Por lo tanto, $0 \leq p_X(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Además,

$$\sum_{x_i} p_X(x_i) = 1.$$

Ejemplo

Sea Z la variable aleatoria definida como el número de caras en tres lanzamientos de una moneda. Determinar la función de probabilidades de Z.

Solución. El espacio muestral del experimento es

$$S = \{ccc, ccs, csc, scc, sss, ssc, scs, css\}.$$

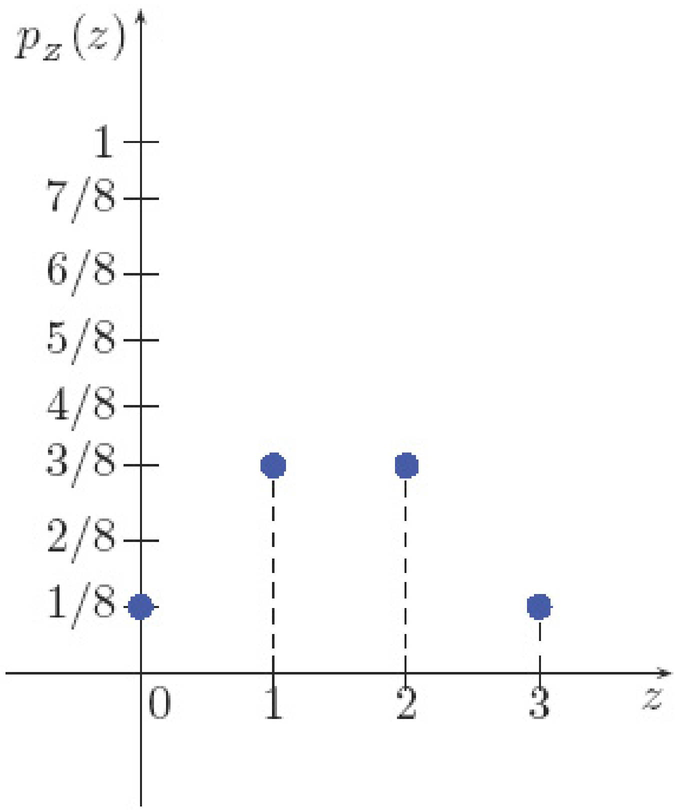
Además los ocho eventos elementales son igualmente probables.

Los eventos definidos por la variable aleatoria Z cuyo probabilidad es distinta de cero son:

$$\begin{aligned}
(Z = 0) &= \{sss\} \\
(Z = 1) &= \{ssc, scs, css\} \\
(Z = 2) &= \{ccs, csc, scc\} \\
(Z = 3) &= \{ccc\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de probabilidades de Z es

$$p_Z(z) = \begin{cases} 1/8, & z = 0, \\ 3/8, & z = 1, \\ 3/8, & z = 2, \\ 1/8, & z = 3, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$



Variable aleatoria continua

Definición 5. *Sea X una variable aleatoria. Si el conjunto de valores de X con probabilidad positiva es un conjunto no numerable de números reales, llamamos a X* ***variable aleatoria continua****.*

Ejemplo

Supongamos que se escoge aleatoriamente un punto del intervalo $(0, 1)$. Definamos la variable aleatoria X como la coordenada x del punto escogido. Efectivamente, X es una variable aleatoria continua.

Observación:
Para calcular la probabilidad de un evento A descrito a través de una variable aleatoria continua, es necesario definir una función real $f_X(x)$ a valores reales, llamada *función de densidad de probabilidades*. Más adelante trataremos con mayor atención esta función.

Variable aleatoria mixta

Hay situaciones donde podemos encontrar variables del tipo *mixto*, es decir, variables aleatorias con la particularidad de ser continuas y discretas al mismo tiempo.

Definición 6. *Sea X una variable aleatoria. Si el número de valores de X con probabilidad positiva es finito o infinito numerable, $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, y también comprende algún intervalo $a \leq x \leq b$, llamamos a X* ***variable aleatoria mixta****.*

Ejemplo

Supongamos que estamos probando un equipo y medimos su tiempo de funcionamiento. Supongamos también que el equipo puede fallar en el tiempo $t = 0$.

Sea X la variable aleatoria definida como

$$X = \textit{tiempo de funcionamiento del equipo}.$$

Es claro que el conjunto de valores de X con probabilidad positiva es

$$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

Por otra parte, como el equipo puede fallar en el tiempo $t = 0$, entonces

$$P(X = 0) > 0.$$

Por lo tanto, la variable aleatoria X es mixta.

Observación:
Para calcular la probabilidades de un evento A descrito a través de una variable aleatoria mixta, se emplea la función de densidad de probabilidades.

Función de densidad de probabilidades

En esta sección no haremos una distinción entre los tipos de variables aleatorias. Todos los conceptos que aquí aparecen se extienden a cualquier tipo de variable aleatoria.

Definición 7. *Sea X una variable aleatoria cualquiera. La* ***función de densidad de probabilidades*** *de la variable aleatoria X, denotada por f_X, es una función real tal que satisface las siguientes condiciones:*

a) $f_X(x) \geq 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$;

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$;

c) $P(a < X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f_X(x)\,dx$, *para todo* $a, b \in \mathbb{R}$.

Definición 8. *Sean* X *una variable aleatoria discreta y* $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ *el conjunto de valores de* X *con probabilidad positiva. La función de densidad de probabilidades de la variable aleatoria discreta* X *se define como*

$$f_X(x) = \sum_k p_X(x_k)\delta(x - x_k), \quad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

donde

- $p_X(x)$ *es la función de probabilidades de* X*, y*
- $k = 1, 2, \dots, n$*, si el conjunto de valores de* X *con probabilidad positiva es finito, o* $k = 1, 2, \dots,$ *si es infinito.*

Ejemplo

Considere el siguiente experimento.

$$E = \{\textit{lanzar un dado normal repetidamente hasta obtener un seis}\}.$$

Hallar la función de densidad de probabilidades de la variable aleatoria X definida como

$$X = \textit{número de lanzamientos necesarios para obtener un seis}.$$

Solución. Se tiene que el conjunto de valores de X con probabilidad positiva es

$$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Además,

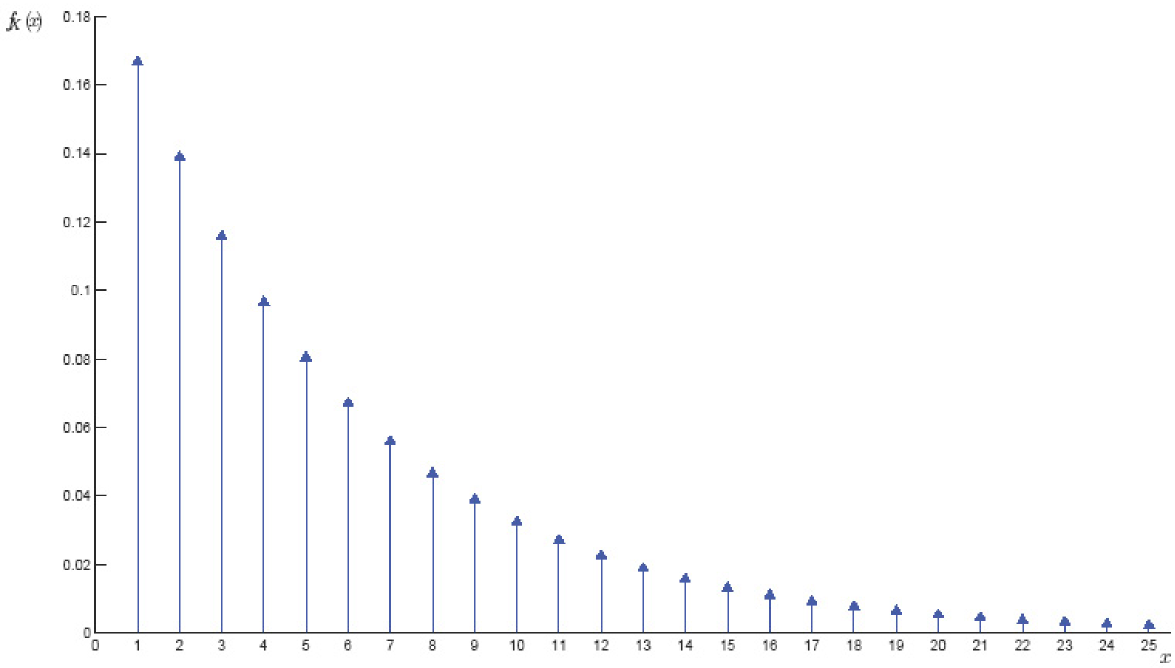
$$P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}\right), \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Así, la función de probabilidades de X es

$$p_X(x) = \begin{cases} (5/6)^{x-1}(1/6), & \text{si } x = 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por tanto, la función de densidad de X es

$$f_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_X(k)\delta(x-k) = (1/6)\sum_{k=1}^{\infty}(5/6)^{k-1}\delta(x-k).$$



Función de distribución acumulativa de probabilidades

Definición 9. *Sea X una variable aleatoria cualquiera. La* ***función de distribución acumulativa de probabilidades****, o simplemente,* ***función de distribución*** *de la variable aleatoria X, denotada por F_X, se define como*

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1. *Sea X una variable aleatoria con función de distribución F_X. Entonces se cumple:*

(i) La función F_X no es decreciente. Esto es,

$$x_1 \leq x_2 \;\Rightarrow\; F_X(x_1) \leq F_X(x_2).$$

(ii) F_X es continua por la derecha y

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0 \quad y \quad \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1.$$

El siguiente teorema muestra las relaciones entre la función de densidad y la función de distribución acumulativa de probabilidades.

Teorema 2. *Sea X una variable aleatoria cuyas funciones de densidad y distribución son respectivamente f_X y F_X. Entonces se cumple:*

(i) $f_X(x) = \dfrac{dF_X}{dx}(x) = F'_X(x)$;

(ii) $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(s)\, ds.$

Ejemplo

Considere el siguiente experimento.

$$E = \{\textit{lanzar un dado normal repetidamente hasta obtener un seis}\}.$$

Hallar la función de densidad de probabilidades de la variable aleatoria

$$X = \textit{número de lanzamientos necesarios para obtener un seis}.$$

Solución. Utilizaremos dos procedimientos para hallar a F_X, a saber: (i) definición de F_X, y (ii) relación de F_X con f_X.

(i) En este procedimiento debemos construir la función $F_X(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

- Supongamos que $x \leq 0$.

  Por la definición de la variable aleatoria X podemos escribir:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 0.$$

- Supongamos que $x > 0$.

  Así,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(X \leq 0) + P(0 < X \leq x) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq x} P(X = k) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq x} (1/6)(5/6)^{k-1}. \end{aligned}$$

  Por lo tanto, la función de distribución acumulativa de probabilidades de la variable aleatoria X es

$$F_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (1/6)(5/6)^{k-1} u(x-k).$$

(ii) Como la función de densidad de X es

$$f_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (1/6)(5/6)^{k-1} \delta(x-k).$$

y

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\, ds,$$

entonces

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} \sum_{k=1}^{\infty} (1/6)(5/6)^{k-1} \delta(s-k)\, ds \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1/6)(5/6)^{k-1} \int_{-\infty}^{x} \delta(s-k)\, ds \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1/6)(5/6)^{k-1}\, u(x-k). \end{aligned}$$

Proposición 1. *Sea X una variable aleatoria cuyas funciones de densidad y distribución son respectivamente f_X y F_X. Entonces se cumple, para $a, b \in \mathbb{R}$:*

(i)

$$P(X \leq a) = F_X(a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx;$$

(ii)

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F_X(a) = 1 - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)\,dx;$$

(iii)

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{a}^{b} f_X(x)\,dx.$$

Distribuciones de probabilidad especiales

Distribución degenerada

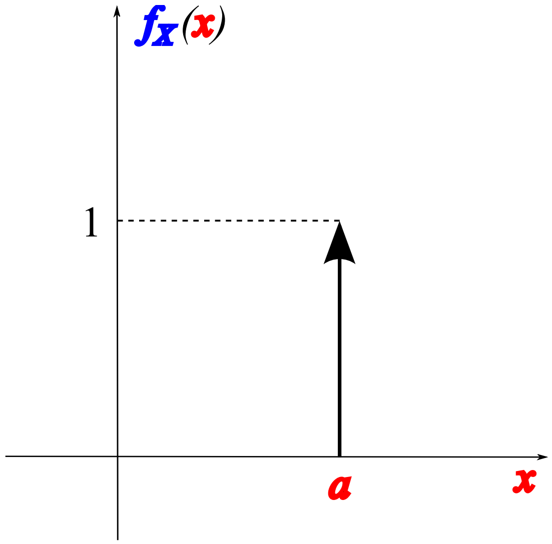
La variable aleatoria X tiene una distribución degenerada concentrada en $a \in \mathbb{R}$, si X tiene

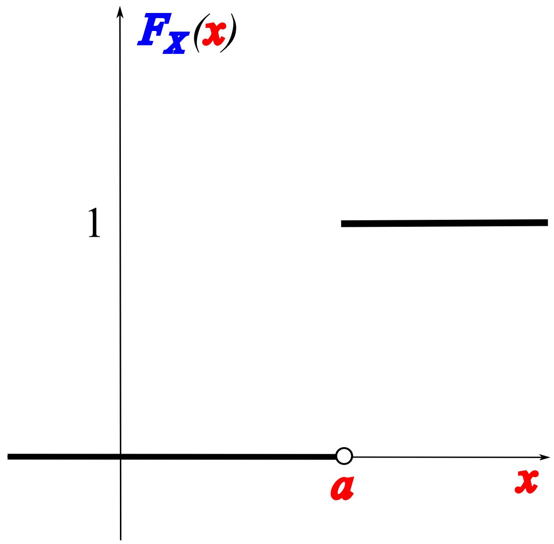
- función de densidad

$$f_X(x) = \delta(x - a),$$

- función de distribución

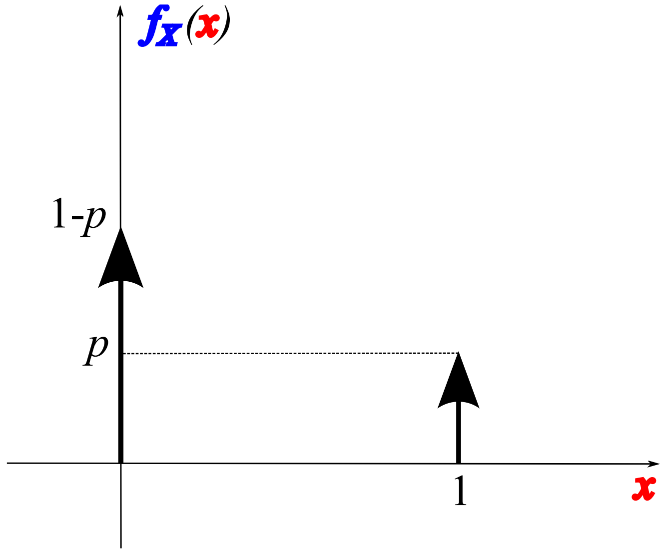
$$F_X(x) = u(x - a).$$





Distribución de Bernoulli

La variable aleatoria X tiene una distribución de Bernoulli de parámetro p $(0 < p < 1)$, si X tiene

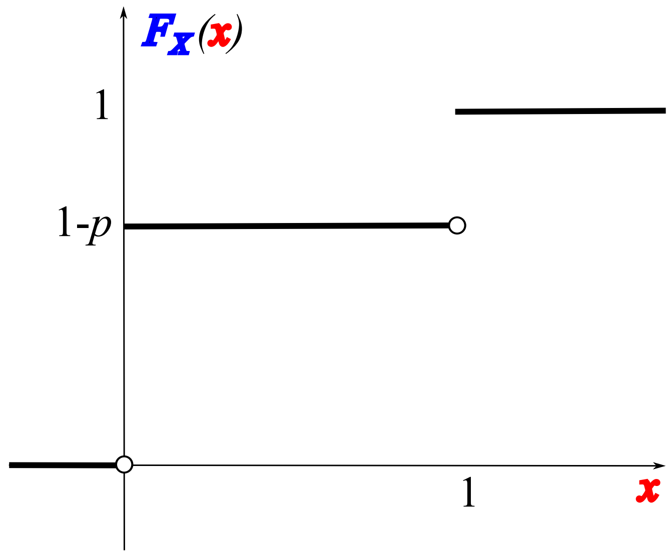


- función de densidad

$$f_X(x) = (1-p)\delta(x)+p\,\delta(x-1),$$

- función de distribución

$$F_X(x) = (1-p)\,u(x)+p\,u(x-1).$$



Distribución binomial

La variable aleatoria X tiene una distribución binomial de parámetros n, p $(0 < p < 1,\ n \geq 1)$, si X tiene

- función de densidad

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta(x-k),$$

- función de distribución

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} u(x-k).$$

Distribución geométrica

La variable aleatoria X tiene una distribución geométrica de parámetro p $(0 < p < 1)$, si X tiene

- función de densidad

$$f_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}\delta(x-k),$$

- función de distribución

$$F_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}u(x-k).$$

Distribución de Poisson

La variable aleatoria X tiene una distribución de Poisson de parámetro λ ($\lambda > 0$), si X tiene

- función de densidad

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \delta(x - k),$$

- función de distribución

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} u(x - k).$$

Distribución uniforme

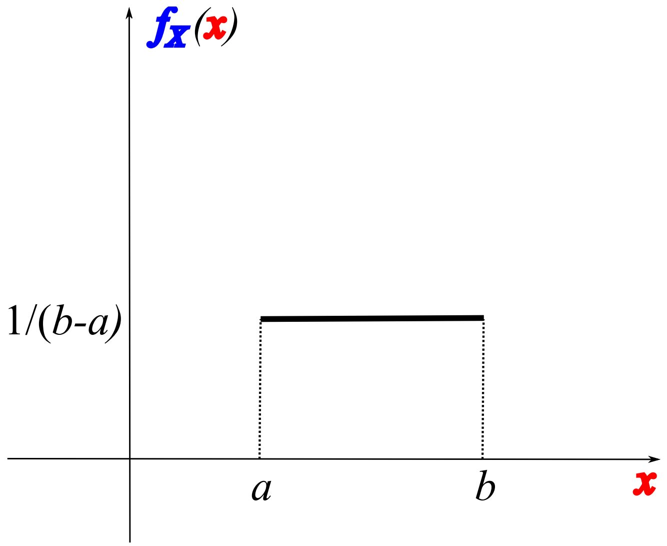
La variable aleatoria X tiene una distribución uniforme en el intervalo (a, b) $(a < b)$, si X tiene

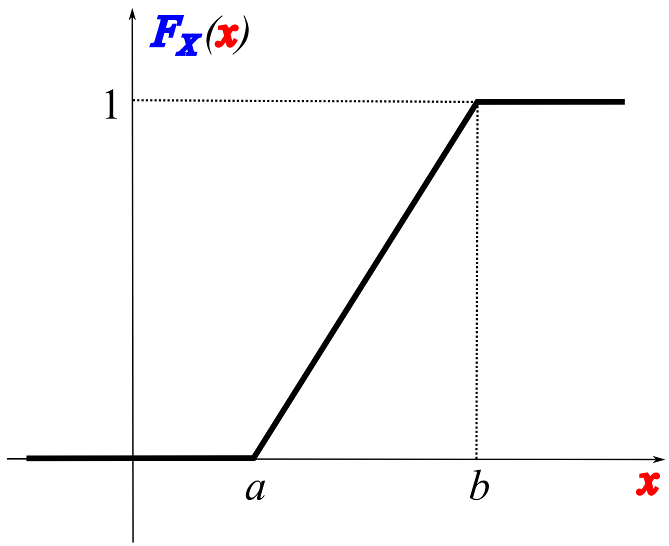
- función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in (a,b), \\ 0, & x \notin (a,b), \end{cases}$$

- función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x < b, \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$





Distribución exponencial

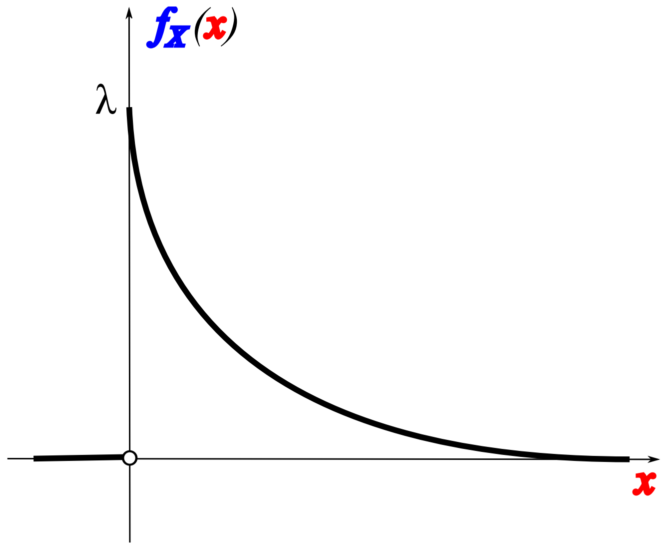
La variable aleatoria X tiene una distribución exponencial de parámetro λ ($\lambda > 0$), si X tiene

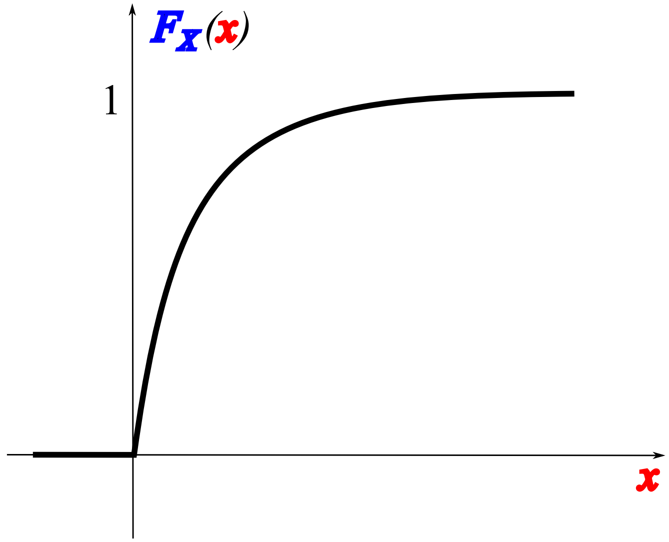
- función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

- función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

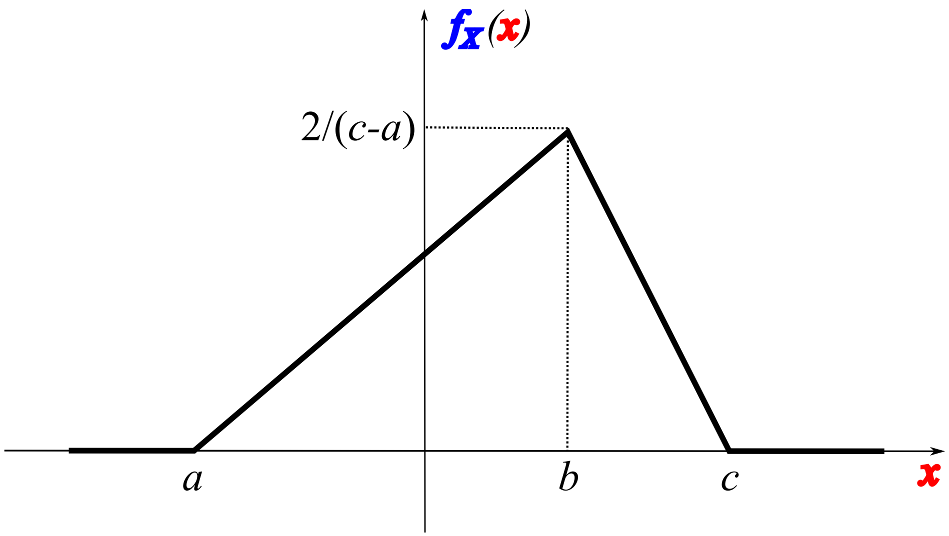




Distribución triangular

La variable aleatoria X tiene una distribución triangular con mínimo a, moda b y máximo c, si X tiene función de densidad dada por

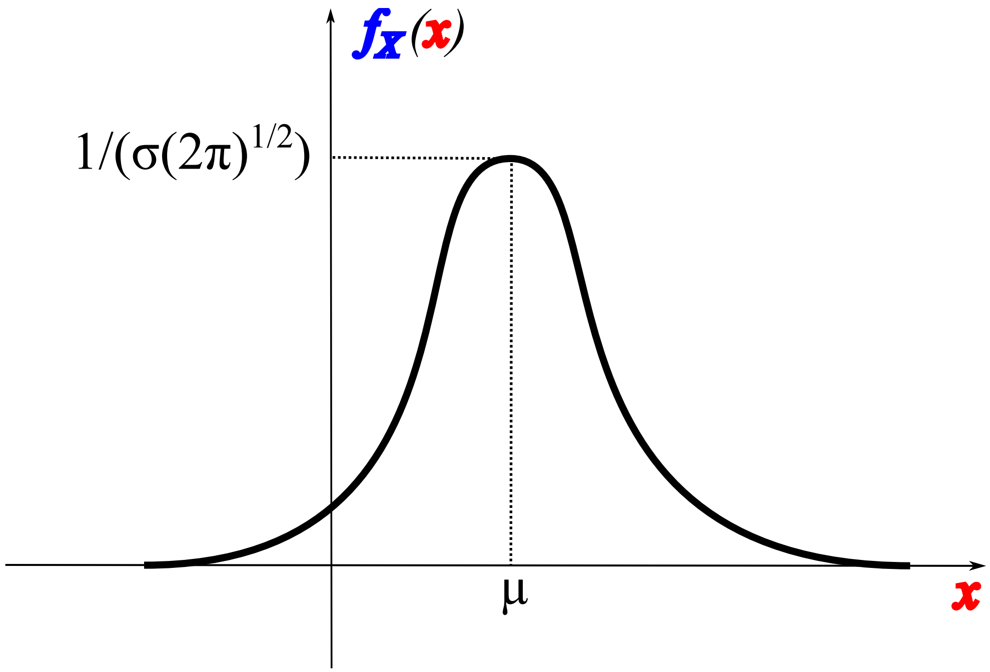
$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \dfrac{2(x-a)}{(c-a)(b-a)}, & a < x \leq b, \\ \dfrac{2(x-c)}{(c-a)(b-c)}, & b < x \leq c, \\ 0, & x > c. \end{cases}$$



Distribución normal o gaussiana

La variable aleatoria X tiene una distribución normal de media μ y varianza σ^2 ($\sigma > 0$), si X tiene función de densidad dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Ejercicios

1. Sea X una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $(-2, 3)$. Calcular la probabilidad del evento $(X < -1) \cup (X > 0)$.

2. Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución triangular con mínimo -1, moda 1 y máximo 3. Calcular la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

a) $(X > 0)$;

b) $(|X - 1| \leq 1)$;

c) $(|X| > 1)$;

d) $(X < 0) \cup (X \geq 1)$.

Funciones de distribución y densidad condicionadas

Sea X una variable aleatoria cuya función de distribución es F_X y su función de densidad es f_X. Sea A un evento no imposible.

Definición 10. *La* ***función de distribución de*** X ***condicionada al evento*** A, *denotada por* $F_X(x|A)$, *se define como*

$$F_X(x|A) = P(X \leq x|A) = \frac{P\left((X \leq x) \cap A\right)}{P(A)}, \quad \textit{para } x \in \mathbb{R}.$$

Consideremos la siguiente definición.

Definición 11. *Sean* X *una variable aleatoria,* A *un evento y* x *un número real fijo. Escribiremos* $x \in A$ *si* $(X = x) \subset A$.

Definición 12. *La* ***función de densidad de*** X ***condicionada al evento*** A*, denotada por* $f_X(x|A)$*, se define como*

$$f_X(x|A) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{P(A)}, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Las funciones de distribución y densidad condicionales satisfacen:

i) $f_X(x|A) \geq 0$;

ii) $f_X(x|A) = \dfrac{d}{dx} F_X(x|A)$;

iii) $F_X(x|A) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_X(s|A)\, ds$;

iv) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F_X(x|A) = 0$, y $\displaystyle\lim_{x \to \infty} F_X(x|A) = 1$;

v) $P(a < X \leq b|A) = F_X(b|A) - F_X(a|A) = \displaystyle\int_a^b f_X(x|A)\, dx$.

Ejemplo

Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución triangular con mínimo -1, moda 1 y máximo 3. Sea $A = \{X \in \mathbb{R} : |X - 1| \leq 1\}$ un evento. Determinar las funciones de densidad y distribución condicionadas al evento A.

Solución. Determinemos primero $f_X(x|A)$.

La función de densidad de X es

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{1}{4}(x+1), & -1 < x \leq 1; \\ \frac{1}{4}(3-x), & 1 < x < 3; \\ 0, & x \geq 3. \end{cases}$$

Ahora pasemos a calcular la probabilidad del evento

$$A = \{X \in \mathbb{R} : |X - 1| \leq 1\}.$$

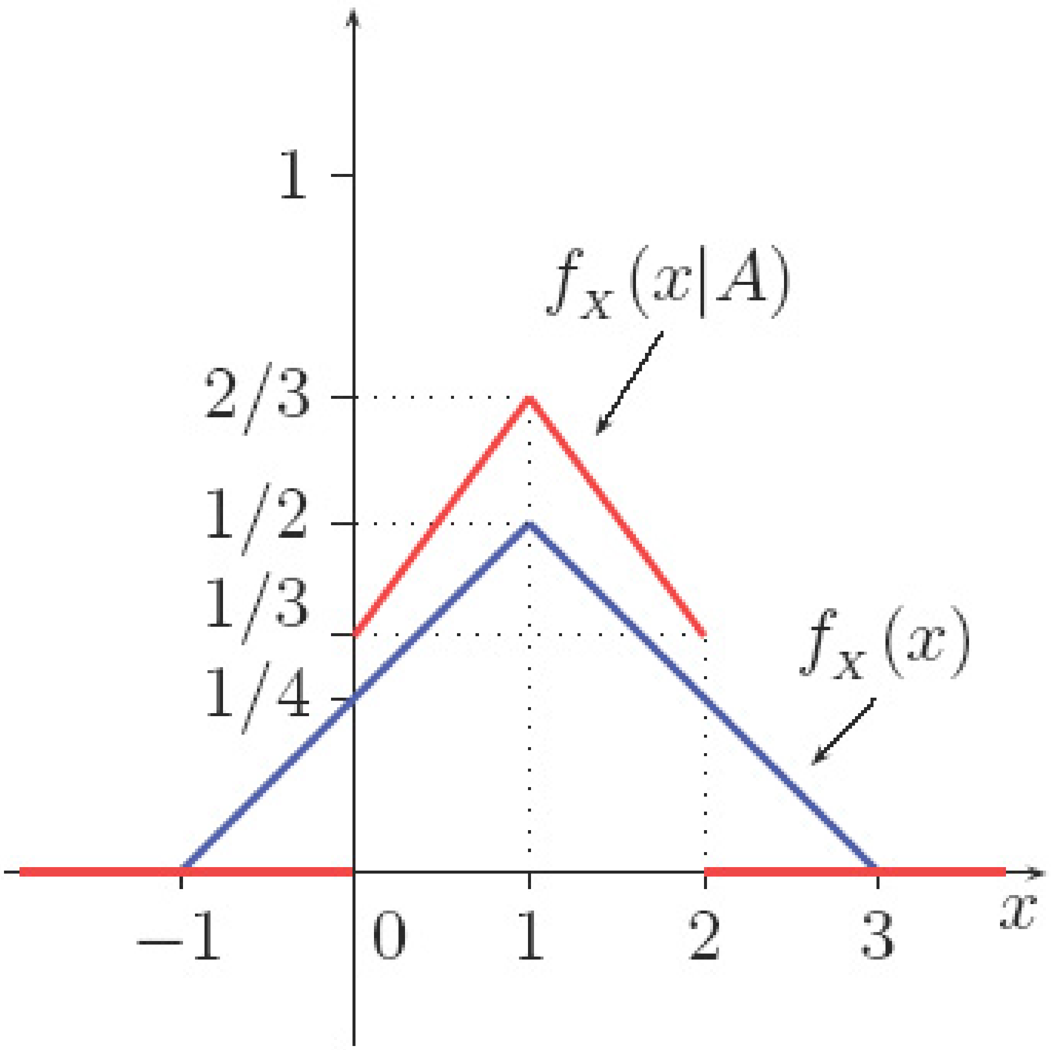
Se tiene que

$$\begin{aligned} P(A) &= \int_0^2 f_X(x)\,dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{4}(x+1)\,dx + \int_1^2 \frac{1}{4}(3-x)\,dx \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Ahora, por la definición de $f_X(x|A)$ podemos escribir:

$$\begin{aligned} f_X(x|A) &= \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{P(A)}, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{3}(x+1), & 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{1}{3}(3-x), & 1 < x \leq 2; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases} \end{aligned}$$

En la siguiente figura podemos observar las gráficas de $f_X(x)$ y $f_X(x|A)$.



Ahora calculemos la función de distribución de X condicionada al evento A. Para ello emplearemos la identidad

$$F_X(x|A) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s|A)\, ds, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Como

$$f_X(x|A) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x+1), & 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{1}{3}(3-x), & 1 < x \leq 2; \\ 0, & \text{en otros casos;} \end{cases}$$

entonces

$$F_X(x|A) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{1}{6}\, x\,(x+2), & 0 \leq x < 1; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\,(x-1)\,(5-x), & 1 \leq x < 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Valor esperado y varianza

Valor esperado

Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f_X(x)$.

Definición 13. *El valor esperado de X, denotado por $E(X)$, está definido por*

$$E(X) = \overline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx.$$

Definición 14. *Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Entonces el valor esperado de $g(X)$ está dado por*

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f_X(x)\, dx.$$

Ejemplo

El valor esperado de una variable aleatoria X distribuida uniformemente en el intervalo (a, b) está dado por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx = \frac{a+b}{2}.$$

Propiedades del valor esperado

Para esta parte consideramos una variable aleatoria X cualquiera. A continuación damos una lista de algunas propiedades del valor esperado.

i) $E(a) = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

ii) $E(aX) = a\, E(X)$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

iii) $E(aX + b) = a\, E(X) + b$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

iv) $E(ag(X) + bh(X)) = a\, E(g(X)) + b\, E(h(X))$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y las funciones $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

v) Si X es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidades es una función par, entonces $E(X) = 0$.

vi) Si X es una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidades f_X satisface que $f_X(m + x) = f_X(m - x)$ para cierto $m \in \mathbb{R}$, entonces $E(X) = m$.

Varianza de una variable aleatoria

Definición 15. *Sea X una variable aleatoria cualquiera. La varianza de una variable aleatoria X, denotada por $V(X)$, se define como*

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

Observación:

Como

$$(X - E(X))^2 = X^2 - 2XE(X) + E(X)^2,$$

entonces por la Propiedad (iv) del valor esperado, la varianza de X se puede escribir equivalentemente como

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Propiedades de la varianza

i) $V(a) = 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

ii) $V(aX) = a^2V(X)$, para todo $a \in \mathbb{R}$.

iii) $V(aX + b) = a^2V(X)$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

Ejemplo

La varianza de una variable aleatoria X distribuida uniformemente en el intervalo (a, b) está dada por

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx \right)^2 \\ &= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\, dx - \left(\int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx \right)^2 \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Valor esperado y varianza condicionados

Sea X una variable aleatoria con función de densidad f_X. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Consideremos un evento A asociado a la variable aleatoria X.

Definición 16 (Valor esperado condicionado). *El valor esperado de X condicionado al evento A, denotado por $E(X|A)$, se define como*

$$E(X|A) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x|A)\, dx.$$

Definición 17 (Valor esperado de una función condicionado). *El valor esperado de $g(x)$ condicionado al evento A, denotado por $E(g(X)|A)$, se define como*

$$E(g(X)|A) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x|A)\, dx.$$

Definición 18 (Varianza condicionada). *La varianza de X condicionada al evento A, denotado por $V(X|A)$, se define como*

$$V(X|A) = E(X^2|A) - E(X|A)^2.$$

Observación:

Como la función de densidad de X condicionada al evento A es

$$f_X(x|A) = \begin{cases} \dfrac{f_X(x)}{P(A)}, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

entonces el valor esperado de X condicionado al evento A está dado por

$$E(X|A) = \frac{1}{P(A)} \int_A x f_X(x)\, dx.$$

y el valor esperado de una función $g(X)$ condicionado al evento A se expresa como

$$E(g(X)|A) = \frac{1}{P(A)} \int_A g(x) f_X(x)\, dx.$$

Ejemplo

Sea X una variable aleatoria cuya función de densidad de probabilidades es:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos x, & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2; \\ 0, & \text{si } |x| \geq \pi/2. \end{cases}$$

Determinar el valor esperado y la varianza de X condicionados al evento $M = \{X \in \mathbb{R} : -\pi/4 \leq X \leq \pi/4\}$.

Solución. Se tiene que la función de densidad de probabilidades de X condicionada al evento M es

$$f_X(x|M) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x, & \text{si } -\pi/4 \leq x \leq \pi/4; \\ 0, & \text{si } |x| > \pi/4. \end{cases}$$

Por lo tanto, podemos escribir:

$$\begin{aligned} E(X|M) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x|M)\, dx, \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x \cos x \, dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

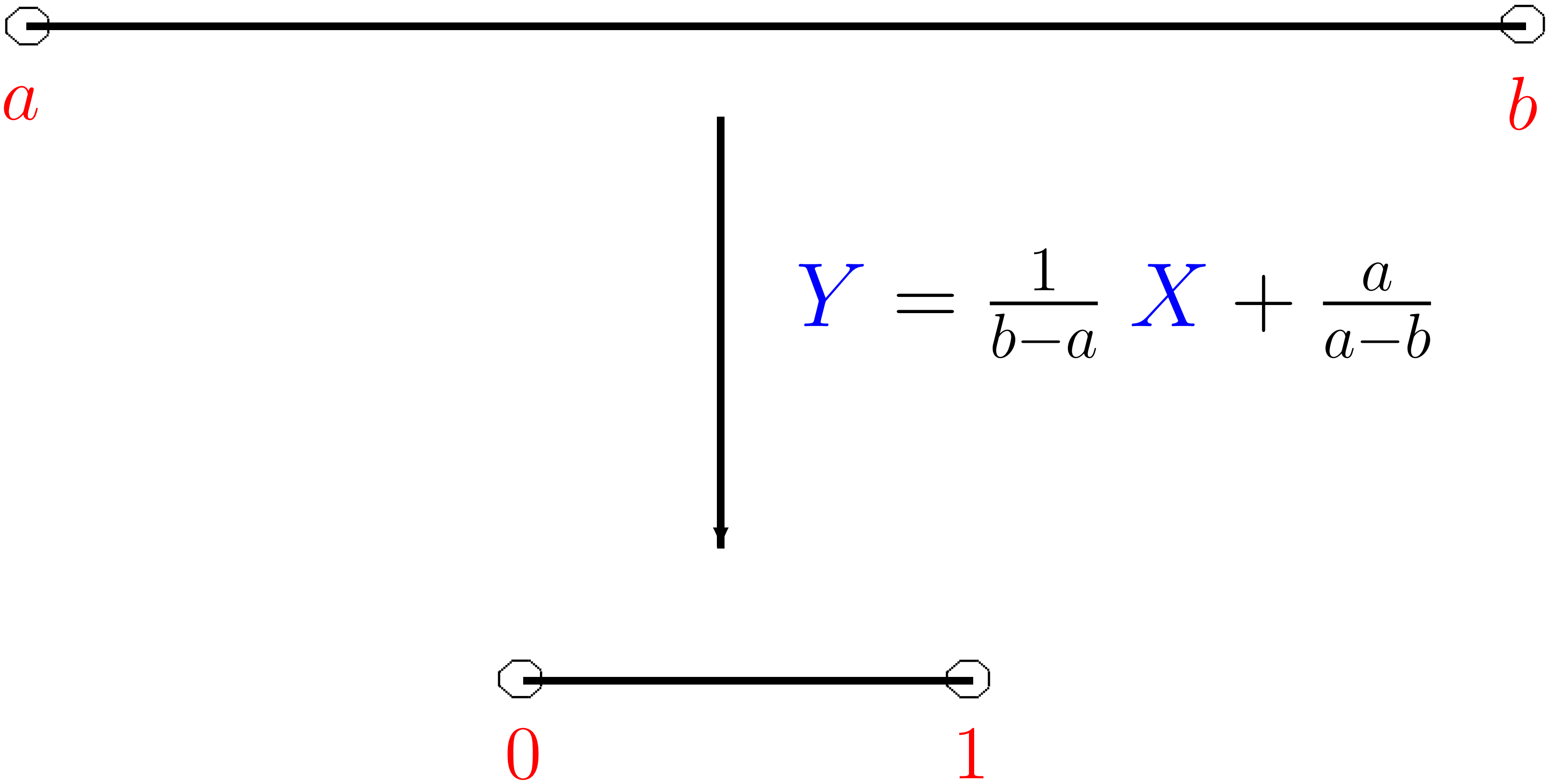
y

$$\begin{aligned} V(X|M) &= E(X^2|M) - E(X|M)^2 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2 \cos x \, dx \\ &= \frac{1}{16}\left(\pi^2 + 8\pi - 32\right). \end{aligned}$$

Una función de una variable aleatoria

¿Qué relación tiene $f_Y(y)$ con $f_X(x)$?

Sea X uniformemente distribuida en el intervalo (a, b)



$$Y = \frac{1}{b-a} X + \frac{a}{a-b}$$

Y está uniformemente distribuida en el intervalo $(0, 1)$

Sean E un experimento y S su espacio muestral. Sea X una variable aleatoria definida en S, cuya función de distribución es F_X y su función de densidad es f_X.

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cualesquiera, podría ser continua, diferenciable, etc.

Definamos la variable aleatoria Y como

$$Y = g(X).$$

Para cualquier evento $C \subset \mathbb{R}$ asociado con la variable aleatoria Y, definimos $P(C)$ como

$$P(C) = P\left(\{X \in \mathbb{R} : g(X) \in C\}\right).$$

Los eventos

$$C \quad \text{y} \quad \{X \in \mathbb{R} : g(X) \in C\}$$

se denominan ***eventos equivalentes***.

- La probabilidad $P(\{X \in \mathbb{R} : g(X) \in C\})$ se calcula utilizando la función de densidad de X.

- Nuestro propósito es encontrar las expresiones analíticas de $F_Y(y)$ y $f_Y(y)$. Para ello utilizaremos el siguiente procedimiento:

  i) Obtener $F_Y(y)$ a través de la expresión

  $$P(Y \leq y) = P(A_y), \quad \text{para cada } y \in \mathbb{R},$$

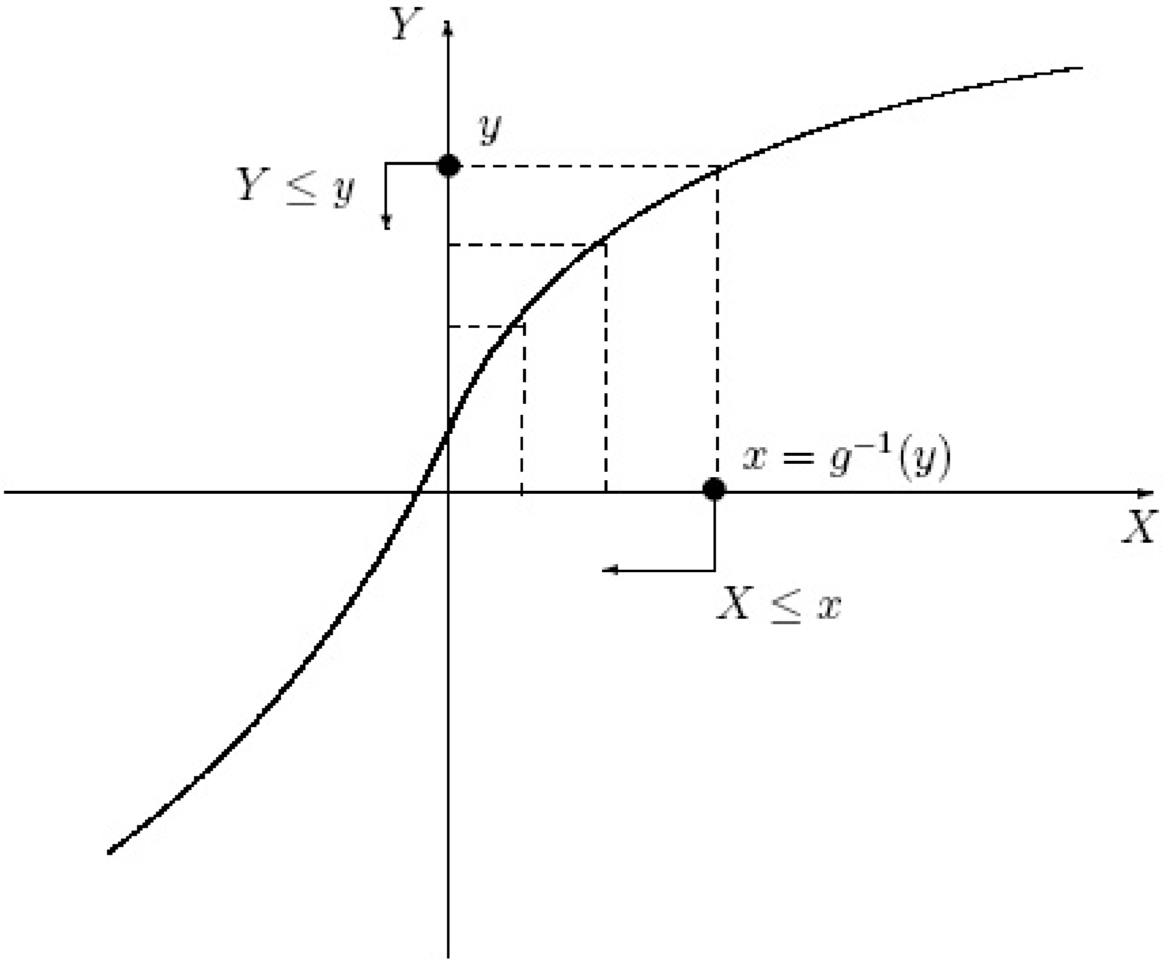
  donde el evento $A_y = \{X \in \mathbb{R} : g(X) \leq y\}$ es equivalente al evento $(Y \leq y)$.

  ii) Diferenciar a $F_Y(y)$ con respecto a y para obtener $f_Y(y)$.

Pasemos ahora ha encontrar las expresiones analíticas de F_Y y f_Y para tres casos generales de la función g.

g es continua y monótona creciente

Como g es continua y monótona creciente, entonces g posee inversa. Además, el evento $A_y = \{X \in \mathbb{R} : X \leq g^{-1}(y)\}$ es equivalente al evento $(Y \leq y)$.



Por la definición de F_Y podemos escribir:

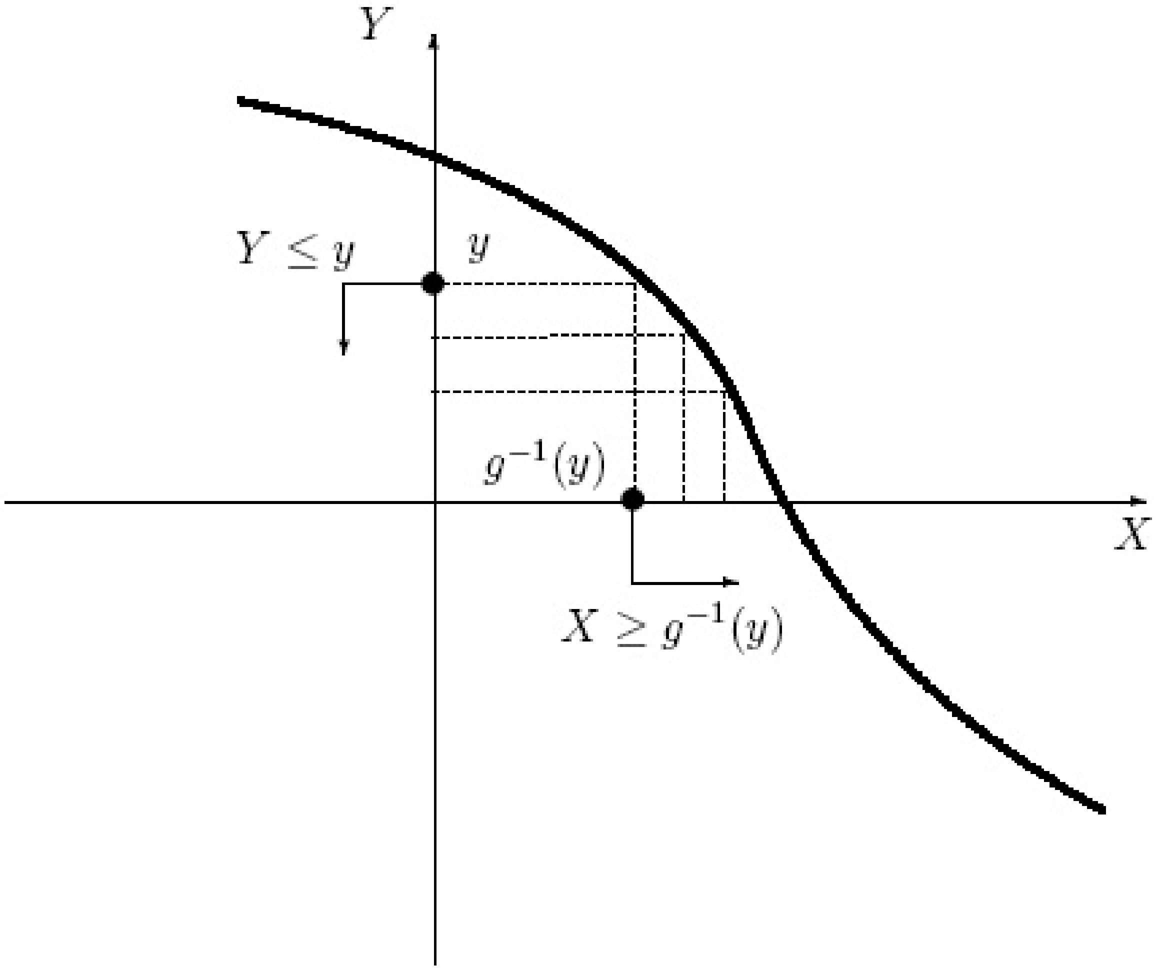
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(g(X) \leq y) \\ &= P(X \leq g^{-1}(y)) \\ &= F_X(g^{-1}(y)), \quad \text{para } y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ahora derivando $F_Y(y)$ con respecto a y obtenemos la expresión analítica de la función de densidad f_Y, esto es:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d\,F_Y}{dy}(y) \\ &= \frac{d}{dy}\left[F_X(g^{-1}(y))\right] \\ &= \left.\left[\frac{f_X(x)}{|g'(x)|}\right]\right|_{x=g^{-1}(y)}, \quad \text{para } y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

g es continua y monótona decreciente

Como g es continua y monótona decreciente, entonces g posee inversa. Además, el evento $A_y = \{X \in \mathbb{R} : X \geq g^{-1}(y)\}$ es equivalente al evento $(Y \leq y)$.



Por la definición de F_Y podemos escribir:

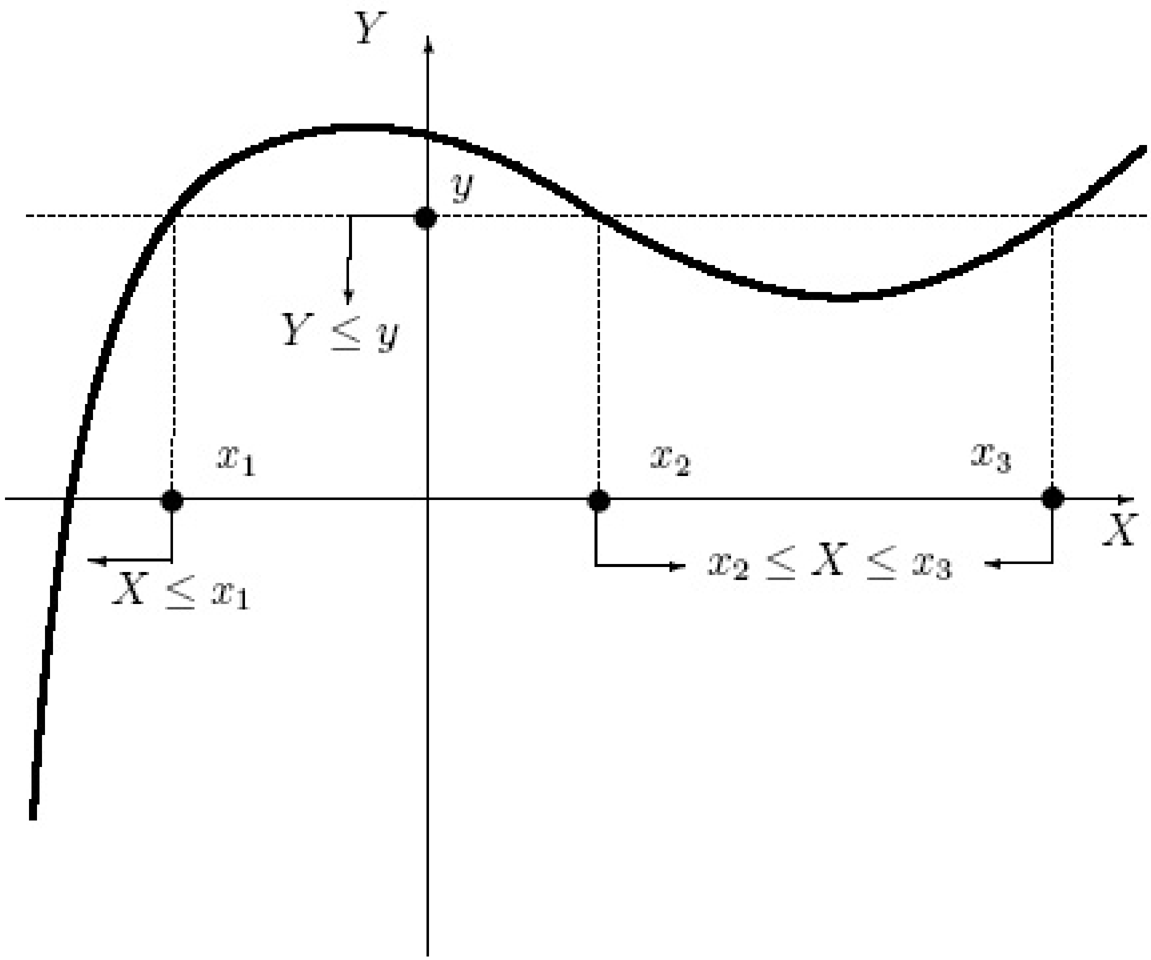
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(g(X) \leq y) \\ &= P(X \geq g^{-1}(y)) \\ &= 1 - P(X < g^{-1}(y)) \\ &= 1 - \left(P(X \leq g^{-1}(y)) - P(X = g^{-1}(y))\right) \\ &= 1 - P(X \leq g^{-1}(y)) + P(X = g^{-1}(y)) \\ &= 1 - F_X(g^{-1}(y)) + P(X = g^{-1}(y)), \quad \text{para } y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ahora derivando $F_Y(y)$ con respecto a y obtenemos la expresión analítica de la función de densidad f_Y, esto es:

$$f_Y(y) = \left[\frac{f_X(x)}{|g'(x)|}\right]\Bigg|_{x=g^{-1}(y)}, \quad \text{para } y \in \mathbb{R}.$$

g es continua y no-monótona

Supongamos que g es como se muestra en la siguiente figura.



Luego, el evento $A_y = \{X \in \mathbb{R} : X \leq x_1 \text{ ó } x_2 \leq X \leq x_3\}$ es equivalente al evento $(Y \leq y)$.

Por la definición de F_y podemos escribir:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P((X \leq x_1) \cup (x_2 \leq X \leq x_3)) \\ &= P(X \leq x_1) + P(x_2 \leq X \leq x_3) \\ &= P(X \leq x_1) + P(x_2 < X \leq x_3) + P(X = x_2) \\ &= F_X(x_1) + F_X(x_3) - F_X(x_2) + P(X = x_2), \quad \text{para } y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Ahora derivando $F_Y(y)$ con respecto a y obtenemos la expresión analítica de la función de densidad f_Y, esto es:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} + \frac{f_X(x_3)}{|g'(x_3)|}, \quad \text{para } y \in \mathbb{R}.$$

Observación:

Los números x_1, x_2, y x_3 dependen de cada y.

Ejemplo (g continua a trozos)

Sea X una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $(-2, 3)$. Sean las variables aleatorias Y y Z definidas respectivamente como:

$$Y = \text{máx}(1 - |X|\,,\, u(X+1) - u(X-1)),$$

$$Z = \text{mín}(1 - |X|\,,\, u(X+1) - u(X-1)).$$

Entonces,

$$f_Y(y) = \frac{3}{5}\,\delta(y) + \frac{2}{5}\,\delta(y-1), \qquad f_Z(z) = \begin{cases} \frac{2}{5}, & -1 \le z \le 1; \\ \frac{1}{5}, & -2 < z < -1; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dos Variables Aleatorias

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica
Departamento de Electrónica, Computación y Control
Probabilidades

Abril, 2013

Contenido

Definición de variables aleatorias conjuntas

A lo largo del tema consideraremos un experimento E al cual se le asocia un par de variables aleatorias X e Y. Los eventos elementales de este experimento pueden visualizarse como un par ordenado (x, y). Bajo estas condiciones, diremos que X e Y son ***variables aleatorias conjuntas*** o, equivalentemente, el símbolo (X, Y) denotará una ***variable aleatoria bidimensional***.

Ejemplos

E_1**:** lanzar una moneda y un dado simultáneamente;

E_3**:** medir la corriente que circula por un circuito y simultáneamente medir la temperatura de la habitación.

Funciones de densidad y distribución de probabilidades

Función de densidad de probabilidades

La **función de densidad de probabilidades** de las variables aleatorias conjuntas X e Y, es una función $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

(a)

$$f_{XY}(x, y) \geq 0, \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\, dy dx = 1.$$

Ejemplo

Sea $f_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función como

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 6\,e^{-2x-3y}, & \text{si } x \geq 0,\ y \geq 0; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Verifiquemos que esta función es efectivamente una función de densidad.

- Es claro que $f_{XY}(x,y) \geq 0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
- Por la definición de f_{XY} podemos escribir:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy dx &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} 6\,e^{-2x-3y}\,dy dx \\ &= 6\left(\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-3y}\,dy\right) \\ &= 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 1. \end{aligned}$$

Función de probabilidades

La **función de probabilidades** de las variables aleatorias discretas conjuntas X e Y, es una función $p_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$p_{XY}(x, y) = P(X = x, Y = y),$$

y que satisface las siguientes propiedades:

(a)

$$0 \leq p_{XY}(x, y) \leq 1, \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(b)

$$\sum_{x} \sum_{y} p_{XY}(x, y) = 1.$$

Ejemplo

Sea $p_{XY} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida como

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} k(2x + y), & x = 1, 2, \ y = 1, 2; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Hallemos el valor de $k > 0$ para que p_{XY} sea una función de probabilidades de las variables aleatorias conjuntas X e Y.

Se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_x \sum_y p_{XY}(x, y) &= \sum_{x=1}^{2} \sum_{y=1}^{2} p_{XY}(x, y) \\ &= p_{XY}(1, 1) + p_{XY}(1, 2) + p_{XY}(2, 1) + p_{XY}(2, 2) \\ &= k\,[3 + 4 + 5 + 6] = 18\,k = 1, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $k = 1/18$.

Probabilidad de un evento

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un evento asociado a las variables aleatorias conjuntas X e Y.

- Si X e Y son variables aleatorias continuas, la probabilidad del evento A se define como:

$$P(A) = \iint_A f_{XY}(x, y)\, dy dx.$$

- Si X e Y son variables aleatorias discretas, la probabilidad del evento A se define como:

$$P(A) = \sum_{(x,y)\in A} p_{XY}(x, y).$$

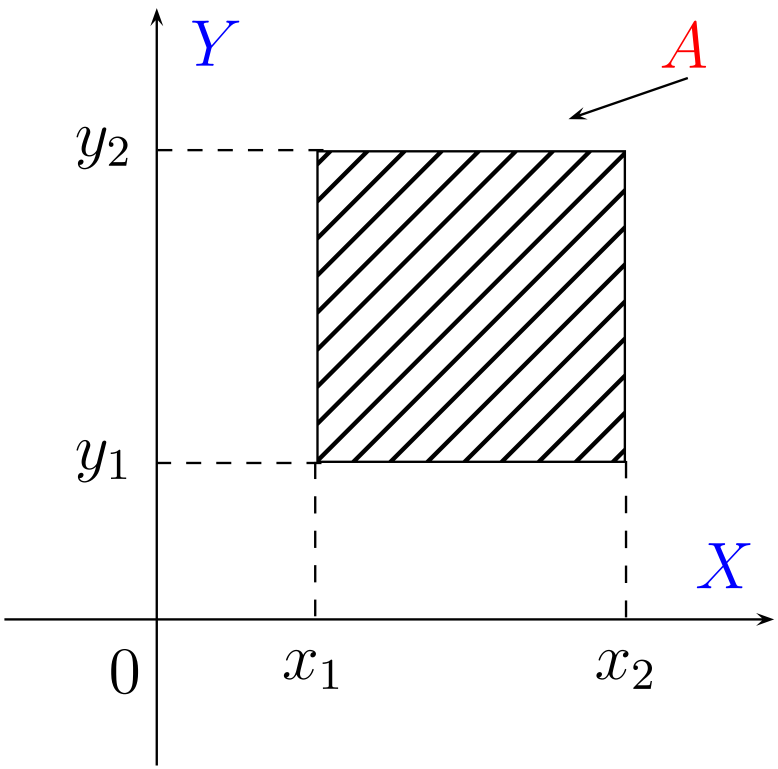
  La suma anterior se hace sobre todos los puntos (x, y) pertenecientes al evento A.

Ejemplo

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un evento definido como

$$A = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq X \leq x_2,\ y_1 \leq Y \leq y_2\},$$

donde $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Una posible representación gráfica del evento A se puede apreciar en la siguiente figura.



Según sea la naturaleza de las variables aleatorias conjuntas X e Y, la probabilidad del evento A se calcula por la siguiente expresión:

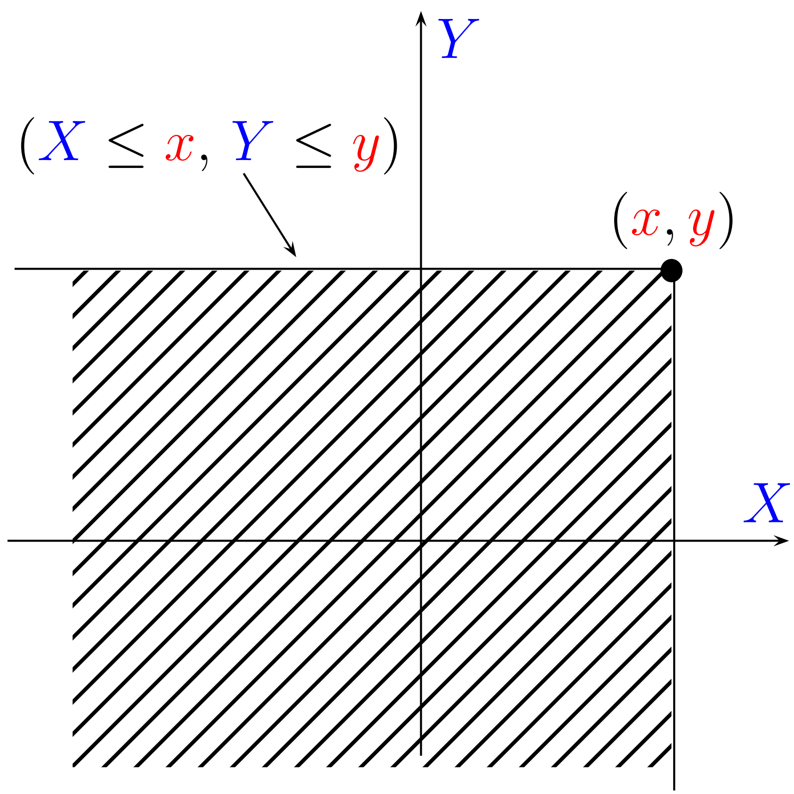
$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(x_1 \leq X \leq x_2,\, y_1 \leq Y \leq y_2) \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_{XY}(x, y)\, dy dx, & \text{si } X \text{ e } Y \text{ son continuas;} \\ \displaystyle\sum_{x_1 \leq x \leq x_2} \sum_{y_1 \leq y \leq y_2} p_{XY}(x, y), & \text{si } X \text{ e } Y \text{ son discretas.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Nota: Si X es discreta y Y es continua o viceversa, la expresión de $P(A)$ contiene integrales y sumatorias,

Función de distribución acumulativa de probabilidades

La **función de distribución acumulativa de probabilidades** de las variables aleatorias conjuntas X e Y, denotada por F_{XY}, se define como

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y). \tag{1}$$



Ejemplo

Sea

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 6\,e^{-2x-3y}, & \text{si } x \geq 0,\ y \geq 0; \\ 0, & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

una función de densidad de X e Y. Hallemos $F_{XY}(x,y)$.

- Supongamos primero que $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

  Así,

$$\begin{aligned} F_{XY}(x,y) &= P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(r,s)\,ds dr \\ &= \int_{0}^{x} \int_{0}^{y} 6\,e^{-2r-3s}\,ds dr \\ &= 6\left(\int_{0}^{x} e^{-2r}\,dr\right)\left(\int_{0}^{y} e^{-3s}\,ds\right) \\ &= \left(1-e^{-2x}\right)\left(1-e^{-3y}\right), \quad \text{para } x \geq 0,\ y \geq 0. \end{aligned}$$

- Supongamos que $x < 0$ ó $y < 0$.

  Así, por las definiciones de F_{XY} y f_{XY}, podemos escribir:

$$F_{XY}(x, y) = 0, \quad \text{para } x < 0 \text{ ó } y < 0.$$

De esta forma,

$$F_{XY}(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-3y}), & \text{si } x \geq 0,\ y \geq 0; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Ejemplo

Sea

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} k(2x + y), & x = 1, 2, \ y = 1, 2; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

la función de probabilidades de X e Y. Hallemos $F_{XY}(x, y)$.

Se tiene:

- para $x < 1, \ -\infty < y < \infty$,

$$F_{XY}(x, y) = 0,$$

- para $-\infty < x < \infty, \ y < 1$,

$$F_{XY}(x, y) = 0,$$

- para $x = 1, \;\; y = 1,$

$$\begin{aligned} F_{XY}(1,1) &= P(X \leq 1, Y \leq 1) \\ &= P(X < 1, Y < 1) + P(X = 1, Y = 1) \\ &= p_{XY}(1,1) = 3k, \end{aligned}$$

- para $x = 1, \;\; 1 < y < 2,$

$$\begin{aligned} F_{XY}(x,y) &= P(X \leq 1, Y \leq y) \\ &= P(X \leq 1, Y \leq 1) + P(X \leq 1, 1 < Y \leq y) \\ &= p_{XY}(1,1) = 3k, \end{aligned}$$

- para $x = 1, \;\; y \geq 2,$

$$\begin{aligned} F_{XY}(1,2) &= P(X \leq 1, Y \leq 2) \\ &= p_{XY}(1,1) + p_{XY}(1,2) = 7k, \end{aligned}$$

- para $1 < x < 2$, $y = 1$,

$$F_{XY}(x, y) = p_{XY}(1, 1) = 3k,$$

- para $x \geq 2$, $y = 1$,

$$F_{XY}(x, y) = p_{XY}(1, 1) + p_{XY}(2, 1) = 8k,$$

- para $1 < x < 2$, $1 < y < 2$,

$$F_{XY}(x, y) = p_{XY}(1, 1) = 3k,$$

- para $1 < x < 2$, $y \geq 2$,

$$F_{XY}(x, y) = p_{XY}(1, 1) + p_{XY}(1, 2) = 7k,$$

- para $x \geq 2,\ \ 1 < y < 2$,

$$F_{XY}(x,y) \;=\; p_{XY}(1,1) + p_{XY}(2,1) = 8k,$$

- para $x \geq 2,\ \ y \geq 2$,

$$F_{XY}(x,y) \;=\; p_{XY}(1,1) + p_{XY}(2,1) + p_{XY}(1,2) + p_{XY}(2,2) = 1.$$

Así,

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 1, -\infty < y < \infty, \\ 0, & -\infty < x < \infty, \ y < 1, \\ 3k, & 1 \leq x < 2, \ 1 \leq y < 2, \\ 7k, & 1 \leq x < 2, \ y \geq 2, \\ 8k, & x \geq 2, \ 1 \leq y < 2, \\ 1, & x \geq 2, \ y \geq 2. \end{cases}$$

Funciones de densidad y probabilidades marginales

Sean X e Y variables aleatorias conjuntas, con $f_{XY}(x, y)$ su función de densidad de probabilidades o $p_{XY}(x, y)$ su función de probabilidades , según sea la naturaleza de las variables aleatorias.

- Si X e Y son variables aleatorias continuas, tendremos las siguientes funciones de densidad marginales:
  - *Función de densidad de probabilidades marginal* de X, definida como
  $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\, dy.$$

– *Función de densidad de probabilidades marginal* de Y, definida como

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\, dx.$$

- Si X e Y son variables aleatorias discretas, las funciones de probabilidades marginales son:

  – *Función de probabilidades marginal* de X, definida por

  $$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x, y).$$

  – *Función de probabilidades marginal* de Y, definida por

  $$p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x, y).$$

Ejemplo

Sea $f_{XY}(x,y)$ la función de densidad de probabilidades de las variables aleatorias conjuntas X e Y definida por

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k, & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Las funciones de densidad de probabilidades marginales son:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dy = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ k\,(1-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)\, dx = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ k\, y, & 0 < y < 1, \\ 0, & y \geq 1. \end{cases}$$

Ejemplo

Sea $p_X(x, y)$ la función de probabilidades de las variables aleatorias conjuntas X e Y definida por

$$p_{XY}(x, y) = \begin{cases} k(|x| + y), & x = -2, -1, \ldots, 2,\ y = |x|, |x| + 1, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Las funciones de probabilidades marginales son:

$$p_X(x) = \sum_y p_{XY}(x,y) = \begin{cases} 9k, & |x| = 2, \\ 5k, & |x| = 1, \\ k, & x = 0, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

y

$$p_Y(y) = \sum_x p_{XY}(x,y) = \begin{cases} 5k, & y = 1, \\ 14k, & y = 2, \\ 10k, & y = 3, \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Funciones de distribución y densidad condicionadas

Sean X e Y dos variables aleatorias conjuntas con F_{XY} su función de distribución y f_{XY} su función de densidad (o p_{XY} su función de probabilidades). Sea A un evento cualquiera relacionado con las variables aleatorias conjuntas X e Y.

- La ***función de distribución acumulativa de probabilidades condicionada al evento*** A, denotada por $F_{XY}(x, y|A)$, se define como

$$F_{XY}(x, y|A) = \frac{P\left((X \leq x, Y \leq y) \cap A\right)}{P(A)}.$$

- Si las variables aleatorias conjuntas X e Y son continuas, la ***función de densidad de probabilidades condicionada al evento*** A se define como

$$f_{XY}(x, y|A) = \begin{cases} \dfrac{f_{XY}(x, y)}{P(A)}, & \text{si } (x, y) \in A; \\ 0, & \text{si } (x, y) \notin A. \end{cases}$$

- Si las variables aleatorias conjuntas X e Y son discretas, la ***función de probabilidades condicionada al evento*** A se define como

$$p_{XY}(x, y|A) = \begin{cases} \dfrac{p_{XY}(x, y)}{P(A)}, & \text{si } (x, y) \in A; \\ 0, & \text{si } (x, y) \notin A. \end{cases}$$

Funciones de densidad y distribución de probabilidades marginales condicionadas

- Si X e Y son variables aleatorias continuas, entonces se tienen las siguientes funciones de densidad marginales condicionadas:

  - **Función de densidad marginal de X condicionada al evento A**

$$f_X(x|A) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y|A)\, dy, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

  - **Función de densidad marginal de Y condicionada al evento A**

$$f_Y(y|A) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y|A)\, dx, \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}.$$

- Si X e Y son variables aleatorias discretas, entonces tenemos las siguientes funciones de probabilidades marginales condicionadas:

  - **Función de probabilidades marginal de X condicionada al evento A**

$$p_X(x|A) = \sum_y p_{XY}(x, y|A), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

  - **Función de probabilidades marginal de Y condicionada al evento A**

$$p_Y(y|A) = \sum_x p_{XY}(x, y|A), \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}.$$

Ahora, bien consideremos los casos:

$$A = \{X \in \mathbb{R} : X = x\} = (X = x)$$

o

$$A = \{Y \in \mathbb{R} : Y = y\} = (Y = y).$$

Para cada uno de estos casos se tienen las siguientes funciones de densidad o probabilidades:

- Si X e Y son variables aleatorias continuas:
  - **Función de densidad marginal de X condicionada al evento** $(Y = y)$

$$f_X(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}, \quad \text{para } (x, y) \text{ donde se esté bien definida.}$$

– **Función de densidad marginal de Y condicionada al evento $(X = x)$**

$$f_Y(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}, \quad \text{para } (x,y) \text{ donde se esté bien definida.}$$

- Si X e Y son variables aleatorias discretas:

  – **Función de probabilidades marginal de X condicionada al evento $(Y = y)$**

$$p_X(x|y) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_Y(y)}, \quad \text{para } (x,y) \text{ donde se esté bien definida.}$$

  – **Función de probabilidades marginal de Y condicionada al evento $(X = x)$**

$$p_Y(y|x) = \frac{p_{XY}(x,y)}{p_X(x)}, \quad \text{para } (x,y) \text{ donde se esté bien definida.}$$

Ejemplo

Sean X e Y variables aleatorias conjuntas con función de densidad

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} k\,(x+|y|), & \text{si } 0 \le x \le |y| \le 1; \\ 0, & \text{en otros casos;} \end{cases}$$

Sea el evento $A = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le X \le 1/2,\ |Y| \le 1/2\}$, con $P(A) = k/8$.

Entonces:

- $$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ k(1+2x-3x^2), & 0 \le x \le 1; \\ 0; & x > 1. \end{cases}$$

- $$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -1; \\ \frac{3}{2}\, k\, y^2, & -1 \leq y \leq 1; \\ 0; & y > 1. \end{cases}$$

- $$f_{XY}(x, y|A) = \begin{cases} 8\,(x + |y|), & \text{si } 0 \leq x \leq |y| \leq 1/2; \\ 0, & \text{en otros casos}; \end{cases}$$

- $$f_X(x|A) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 2 + 8x - 24x^2, & 0 \leq x \leq 1/2; \\ 0; & x > 1/2. \end{cases}$$

- $$f_Y(y|A) = \begin{cases} 0, & y < -1/2; \\ 12\,y^2, & -1/2 \leq y \leq 1/2; \\ 0; & y > 1/2. \end{cases}$$

- $$f_X(x|y) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\,\dfrac{(x+|y|)}{y^2}, & \text{si } 0 \leq x \leq |y| \leq 1; \\ 0, & \text{en otros casos;} \end{cases}$$

- $$f_Y(y|x) = \begin{cases} \dfrac{(x+|y|)}{1+2x-3x^2}, & \text{si } 0 \leq x \leq |y| \leq 1; \\ 0, & \text{en otros casos;} \end{cases}$$

Ejemplo

Sean X e Y variables aleatorias conjuntas con función de probabilidades

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} k\,|xy|, & x = -3,-2,-1,1,2,3,\ y = \operatorname{sgn}(x); \\ k, & x = 0,\ y = -1,0,1; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Sea el evento $A = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : Y = X\}$, con $P(A) = 3k$.

Entonces:

- $$p_X(x) = \begin{cases} k\,|x|, & x = -3,-2,-1,1,2,3; \\ 3k, & x = 0; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

- $$p_Y(y) = \begin{cases} 7k, & |y| = 1; \\ k, & y = 0; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

- $$p_{XY}(x, y|A) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & x = -1, 0, 1, \ y = x; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

- $$p_X(x|A) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & x = -1, 0, 1; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

- $$p_Y(y|A) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & y = -1, 0, 1; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

- $$p_X(x|Y = -1) = \begin{cases} \frac{1}{7}\,|x|, & \text{si } x = -3, -2, -1; \\ \frac{1}{7}, & \text{si } x = 0; \\ 0, & \text{en otros casos;} \end{cases}$$

- $$p_Y(y|X = 0) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{si } y = -1, 0, 1; \\ 0, & \text{en otros casos;} \end{cases}$$

Variables aleatorias independientes

Sean X e Y dos variables aleatorias conjuntas con f_{XY} su función de densidad de probabilidades. **Se dice que las variables aleatorias X e Y son *independientes* si**

$$f_X(x|y) = f_X(x),$$

o, equivalentemente, si

$$f_Y(y|x) = f_Y(y).$$

Teorema 1. *Las variables aleatorias X e Y son independientes si, y sólo si*

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Ejemplo

Sea

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} ab\, e^{-(ax+by)}, & \text{si } x > 0,\ y > 0; \\ 0, & \text{en otros casos;} \end{cases}$$

donde $a > 0$ y $b > 0$, la función de densidad de probabilidades de las variables aleatorias conjuntas X e Y.

Como

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0; \\ a\, e^{-ax}, & \text{si } x > 0, \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \leq 0; \\ b\, e^{-by}, & \text{si } y > 0, \end{cases}$$

y

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y),$$

entonces, las variables aleatorias X e Y son independientes.

Valor esperado conjunto

- Sean X e Y variables aleatorias conjuntas con f_{XY} su función de densidad de probabilidades.

- Sea Z una variable aleatoria relacionada con las variables aleatorias conjuntas X e Y a través de la función

$$Z = g(X, Y),$$

donde $g(x, y)$ es una función definida de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

El valor esperado de Z o, equivalentemente, el valor esperado de la función $g(X, Y)$ se define como

$$E(Z) = E(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)\, f_{XY}(x, y)\, dy dx.$$

- Valor esperado de X

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{XY}(x,y)\, dydx = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx.$$

- Valor esperado de Y

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{XY}(x,y)\, dydx = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y)\, dy.$$

- Valor esperado de X^2

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f_{XY}(x,y)\, dydx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f_X(x)\, dx.$$

- Valor esperado de Y^2

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2\, f_{XY}(x,y)\, dydx = \int_{-\infty}^{\infty} y^2\, f_Y(y)\, dy.$$

- Varianza de X

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

- Varianza de Y

$$V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

- Valor esperado de XY

El valor esperado

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}(x, y)\, dydx,$$

se denomina *correlación* de las variables aleatorias X e Y.

- Covarianza de X e Y

La cantidad

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y),$$

se denomina *covarianza* de las variables aleatorias X e Y.

- Valor esperado de $X + Y$

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y)\, f_{XY}(x,y)\, dydx = E(X) + E(Y).$$

- Varianza de $X + Y$

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) - 2\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Proposición 1. *Si las variables aleatorias X e Y son independientes, entonces*

$$E(XY) = E(X)\, E(Y)$$

y

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0.$$

Coeficiente de correlación

El coeficiente de correlación de las variables aleatorias conjuntas X e Y se define como

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)\,V(Y)}}.$$

Notas:

- $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.
- El coeficiente de correlación mide la relación lineal entre las variables aleatorias X e Y.
- Si $\rho_{XY} = \pm 1$, entonces las variables aleatorias X e Y están relacionadas linealmente.
- Si X e Y son variables aleatorias independientes, entonces $\rho_{XY} = 0$.

Ejemplo

Sean X e Y variables aleatorias conjuntas con función de densidad

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} (x+|y|), & \text{si } 0 \leq x \leq |y| \leq 1; \\ 0, & \text{en otros casos;} \end{cases}$$

Entonces:

$$E(X) = \frac{5}{12}, \quad E(X^2) = \frac{7}{30}, \quad V(X) = \frac{43}{720},$$

$$E(Y) = 0, \quad E(Y^2) = \frac{3}{5}, \quad V(Y) = \frac{3}{5},$$

$$E(XY) = 0, \quad \mathrm{Cov}(X,Y) = 0, \quad \rho_{XY} = 0$$

Ejemplo

Sean X e Y variables aleatorias conjuntas con función de probabilidades

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{15}\,|xy|, & x = -3,-2,-1,1,2,3,\ y = \operatorname{sgn}(x); \\ \frac{1}{15}, & x = 0,\ y = -1,0,1; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Entonces:

$$E(X) = 0, \qquad E(X^2) = \frac{72}{15}, \qquad V(X) = \frac{72}{15},$$

$$E(Y) = 0, \qquad E(Y^2) = \frac{14}{15}, \qquad V(Y) = \frac{14}{15},$$

$$E(XY) = \frac{27}{15}, \quad \operatorname{Cov}(X,Y) = \frac{27}{15}, \quad \rho_{XY} = 0.85042$$

Una función de dos variables aleatorias

- Sean X e Y dos variables aleatorias conjuntas con f_{XY} y F_{XY} sus funciones de densidad y distribución, respectivamente.

- Sea Z una variable aleatoria relacionada con las variables aleatorias conjuntas X e Y a través de la función

$$Z = g(X, Y),$$

donde $g(x, y)$ es una función definida de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

- A continuación se presenta un método general para calcular la función de distribución de la variable aleatoria Z.
  - Para cada $z \in \mathbb{R}$, se determina la expresión matemática de la función de distribución, $F_Z(z)$, la cual está definida por

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(g(X, Y) \leq z).$$

– La función de densidad de probabilidades de la variable aleatoria Z se puede determinar a través de la ecuación

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z}{dz}(z).$$

Ejemplo

Sean X e Y dos variables aleatorias conjuntas con función de densidad de probabilidades dada por

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1/4, & \text{si } 0 < x < 2,\ 0 < y < 2; \\ 0, & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Sea Z otra variable aleatoria relacionada con las variables aleatorias X e Y a través de la función $Z = g(X, Y) = XY$.

Entonces, las funciones de distribución y densidad de la variable aleatoria Z son, respectivamente:

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z \leq 0; \\ \frac{z(1+2\ln 2-\ln z)}{4}, & \text{si } 0 < z < 4; \\ 1, & \text{si } z \geq 4. \end{cases}$$

y

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z \leq 0; \\ \frac{2\ln 2-\ln z}{4}, & \text{si } 0 < z < 4; \\ 0, & \text{si } z \geq 4. \end{cases}$$

Las siguientes proposiciones presentan un procedimiento alternativo para calcular las funciones de distribución y densidad de la variable aleatoria Z, cuando las variables aleatorias X e Y son independientes y la función $g(X, Y)$ tiene una forma muy particular.

Proposición 2. *Sea* Z *una variable aleatoria relacionada con las variables aleatorias* X *e* Y *a través de la función* $Z = X + Y$*. Entonces,*

$$f_Z(z) = f_Y * f_X = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(r)\, f_X(z-r)\, dr \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Proposición 3. *Sea* Z *una variable aleatoria relacionada con las variables aleatorias* X *e* Y *a través de la función* $Z = \text{mín}(X, Y)$*. Entonces,*

$$f_Z(z) = f_X(z)(1 - F_Y(z)) + f_Y(z)(1 - F_X(z)) \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

y

$$F_Z(z) = F_X(z) + F_Y(z) - F_X(z)F_Y(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Proposición 4. *Sea Z una variable aleatoria relacionada con las variables aleatorias X e Y a través de la función $Z = \text{máx}(X, Y)$. Entonces,*

$$f_Z(z) = f_X(z)F_Y(z) + f_Y(z)F_X(z) \qquad \forall z \in \mathbb{R},$$

y

$$F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z) \qquad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Dos funciones de dos variables aleatorias

- Sean X e Y dos variables aleatorias conjuntas con f_{XY} y F_{XY} sus funciones de densidad y distribución, respectivamente.

- Sean Z y W dos variables aleatorias relacionadas con las variables aleatorias conjuntas X e Y a través de las funciones

$$Z = g_1(X, Y) \quad \text{y} \quad W = g_2(X, Y),$$

donde $g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y $g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- Se debe hallar la función de densidad de probabilidades, f_{ZW}, de las variables aleatorias conjuntas Z y W.

- Supongamos que las funciones g_1 y g_2 son diferenciables en $\mathbb{R}^2$.

- Sea $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función definida por

$$G(x, y) = \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

  Supongamos que $G(x, y)$ es inyectiva en $\mathbb{R}^2$.

Entonces, la función de densidad de probabilidades de las variables aleatorias conjuntas Z y W se define como

$$f_{ZW}(z, w) = \left[\frac{1}{|\det G'(x, y)|} \cdot f_{XY}(x, y) \right] \Bigg|_{(x,y)=G^{-1}(z,w)},$$

donde G^{-1} es la función inversa de $G(x, y)$ y $G'(x, y)$ su Jacobiano.

Ejemplo

Sean X e Y variables aleatorias conjuntas con función de densidad f_{XY}. Sean Z y W dos variables aleatorias definidas por

$$Z = 2X + Y \quad \text{y} \quad W = X + 2Y.$$

Entonces, la función de densidad de probabilidades de las variables aleatorias conjuntas Z y W es

$$f_{ZW}(z, w) = \frac{1}{3} f_{XY}\left(\frac{2z - w}{3}, \frac{4w - 2z}{6}\right),$$

para todo $(z, w) \in \mathbb{R}^2$.