Universidad Central de Venezuela
Facultad de Farmacia
Matemática - Física

Guía de Cinemática (I)
(Una dimensión)

A. Resumen de la Teoría

A.1 *Movimiento Rectilíneo: velocidad media y velocidad instantánea*

El movimiento de un objeto es rectilíneo cuando su trayectoria es una recta. La posición x del objeto se relaciona con el tiempo t mediante una función x = x(t). Si en el instante t_1 el objeto se encuentra en la posición $x(t_1)$ y en el instante posterior t_2 se encuentra en la posición $x(t_2)$, la *velocidad media* entre t_1 y t_2 se define por:

$$\bar{v}\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{(ec. 1)}$$

La *velocidad instantánea* en el instante t_1 se define como el límite de la velocidad media entre t_1 y $t_2 = t_1 + \Delta t$, cuando Δt tiende a cero, lo cual coincide con la derivada de la función posición respecto al tiempo en $t=t_1$:

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}\Big|_{t_1}^{t_1+\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_1+\Delta t) - x(t_1)}{\Delta t} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_1} = x'(t_1) \qquad \text{(ec. 2)}$$

Si conocemos la función v=v(t) podemos obtener la posición x(t) resolviendo la ecuación diferencial (2) mediante separación de variables.

A.2 *Movimiento rectilíneo: aceleración media y aceleración instantánea*

Si en el instante t_1 el móvil tiene una velocidad $v(t_1)$ y en el instante t_2 tiene una velocidad $v(t_2)$, se define la *aceleración media* entre los instantes t_1 y t_2 como:

$$\bar{a}\Big|_{t_1}^{t_2} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad \text{(ec. 3)}$$

La *aceleración instantánea* en el instante t_1 se define como el límite de la aceleración media entre t_1 y $t_2 = t_1 + \Delta t$, cuando Δt tiende a cero, lo cual coincide con la derivada de la función velocidad respecto al tiempo en $t=t_1$:

$$a(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a}\Big|_{t_1}^{t_1+\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_1+\Delta t) - v(t_1)}{\Delta t} = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t_1} = v'(t_1) \qquad \text{(ec. 4)}$$

Si conocemos la función aceleración a(t), podemos calcular la función velocidad v(t) resolviendo la ecuación diferencial (4) mediante separación de variables.

A.3 *Movimiento Rectilíneo Uniforme (velocidad constante)*

En este caso v(t)=v, con v constante y a(t)=0. Luego, resolviendo la ecuación diferencial (2), obtenemos:

$$x(t) = vt + x(0) \qquad \text{(ec. 5)}$$

A.4 *Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado (aceleración constante)*

En este caso a(t)=a, con a constante. Luego, resolviendo la ecuación diferencial (5), obtenemos:

$$v(t) = at + v(0) \qquad \text{(ec. 6)}$$

Substituyendo esta ecuación en la ec. 2 y resolviendo la ecuación diferencial, obtenemos:

$$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \text{(ec. 7)}$$

De la ec. 6 se obtiene que:

$$a = \frac{v(t) - v(0)}{t} \qquad \text{(ec. 8)}$$

Substituyendo esta última ecuación en la ec. 7, para eliminar la aceleración, obtenemos:

$$x(t) = \frac{1}{2}[v(t) + v(0)]t + x(0) \qquad \text{(ec. 9)}$$

Despejando t de la ec. 8 y substituyendo en la ec. 9, para eliminar el tiempo, se obtiene:

$$v^2(t) = v^2(0) + 2a[x(t) - x(0)] \qquad \text{(ec. 10)}$$

B. *Ejercicios (*En esta guía adoptaremos el Sistema Internacional de Unidades (*Système International d´Unités)*, conocido universalmente como SI*)*

1. Un caballo de carrera puede acelerarse desde cero hasta 26,8 m/s en 5 s. a) ¿Cuál es la aceleración media durante dicho tiempo? b) ¿Qué distancia recorrerá durante los 5 segundos suponiendo que su aceleración sea constante? c) ¿Cuánto tiempo requeriría para recorrer una distancia de 402,5 m, si pudiese mantener el mismo valor de su aceleración?
   (*Soluc. a) 5,39 m/s*^{2} *b) 67,6 m c) 12,2 s*)

2. Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20 m/s. ¿Cuándo tendrá una velocidad de 6 m/s y a qué altura se encontrará?
   (*Soluc.* t_1*=1,4 s,* t_2*=2,7 s, h=18,6 m)*

3. Un tren parte del reposo y se mueve con aceleración constante. En un tiempo dado estaba viajando a 9,1 m/s y 48,8 m después, lo estaba haciendo a 15,2 m/s. Calcular: a) la aceleración, b) el tiempo requerido para recorrer los 48,8 metros mencionados, c) el tiempo requerido para alcanzar la rapidez de 9,1 m/s, d) la distancia recorrida desde que se puso en marcha hasta que alcanzó la rapidez de 9,1 m/s.
   (*Soluc. a) 1,5 m/s*^{2} *b) 4 s c) 6 s d) 27,4 m*)

4. Un tren que viaja a 26,8 m/s, entra repentinamente en una curva. El maquinista observa a 60,9 m por delante de él un tren más lento que va en el mismo sentido y por la misma vía a 13,4 m/s. Instantáneamente, el maquinista aplica los frenos. ¿Cuál tiene que ser la aceleración constante que resulte para evitar la colisión? (*Soluc.* a > 1,5 *m/s*^{2})

5. En el momento en que se enciende la luz verde de un semáforo, arranca un automóvil con una aceleración constante de 1,8 m/s^2. En el mismo instante, un camión que lleva una rapidez constante de 9,1 m/s alcanza y rebasa al automóvil. a) ¿A qué distancia del punto de partida alcanzará el automóvil al camión? b) ¿A qué velocidad irá el automóvil en dicho instante?
(*Soluc. a) 91,4 m, b) 18,3 m/s*)

6. a) ¿Con qué rapidez debe lanzarse verticalmente hacia arriba una pelota para alcanzar una altura de 15,2 m? b) ¿Cuánto tiempo estará en el aire?
(*Soluc. a) 17,3 m/s b) 3,5 s*)

7. Un globo va subiendo con una rapidez de 12 m/s a una altura de 80 m sobre el suelo, cuando se deja caer desde él un paquete. ¿Cuánto tiempo tarda el paquete en llegar al suelo?
(*Soluc. 5.5 s*)

8. Un cuerpo se mueve con una velocidad inicial de 3 m/s y una aceleración constante de 4 m/s^2 en la misma dirección que la de la velocidad. ¿Cuál es la velocidad del cuerpo y la distancia recorrida al final de 7 s?
(*Soluc. v=31 m/s, x=119 m*)

9. Una piedra cae desde un globo que desciende a una velocidad uniforme de 12 m/s. Calcular la velocidad y la distancia recorrida por la piedra después de 10 s.
(*Soluc. v= - 110 m/s, x= - 610 m*)

10. Se deja caer una piedra desde lo alto de un edificio. El sonido de la piedra al chocar con el suelo se escucha 6.5 s más tarde. Si la velocidad del sonido es de 341,4 m/s, calcular la altura del edificio.
(*Soluc. h=174 m*)

C. Bibliografía

Resnick & Holliday, Fundamentos de Física.

Allonso & Finn, Física (Volumen I).

Universidad Central de Venezuela
Facultad de Farmacia
Matemática - Física

Guía de Cinemática (II)
(Dos dimensiones)

D. Resumen de la Teoría

A.0 *Funciones vectoriales de una variable real*

Para describir el movimiento de un objeto en dos dimensiones se hace necesario la introducción de vectores y, en particular, de *funciones vectoriales de una variable real*. A continuación, una breve introducción de este concepto.

Definición 1: Se define el "*plano real*", denotado por R^2, como el siguiente conjunto:

$$R^2 = \{ (x, y) / x \in R, y \in R \}$$

Es decir, R^2 es el conjunto de todos los *pares ordenados* de números reales.

Definición 2: Una función cuyo dominio es un subconjunto de los números reales (R) y cuyo recorrido es un subconjunto del plano real (R^2) se denomina función vectorial de una variable real (en dos dimensiones).

Las funciones vectoriales de una variable real se designan por letras minúsculas con una flecha encima: $\vec{f}, \vec{g}$, etc. Así, si $\vec{f}$ es una función vectorial de una variable real, entonces $\vec{f}$: R → R^2. El valor de una función vectorial $\vec{f}$ en t se designa comúnmente por $\vec{f}(t)$. Como una función $\vec{f}(t)$ tiene valores en R^2, entonces tiene 2 componentes y podemos escribir:

$$\vec{f}(t) = (f_x(t), f_y(t))$$

donde $f_x : R \to R$ y $f_y : R \to R$ son funciones reales de un variable real. Así, f_x se llama la *componente x* de $\vec{f}$ y f_y se llama la *componente y* de $\vec{f}$.

Definición 3: Si $\vec{f} = (f_x, f_y)$ es una función vectorial, definimos el límite, la derivada y la integral de $\vec{f}$ así:

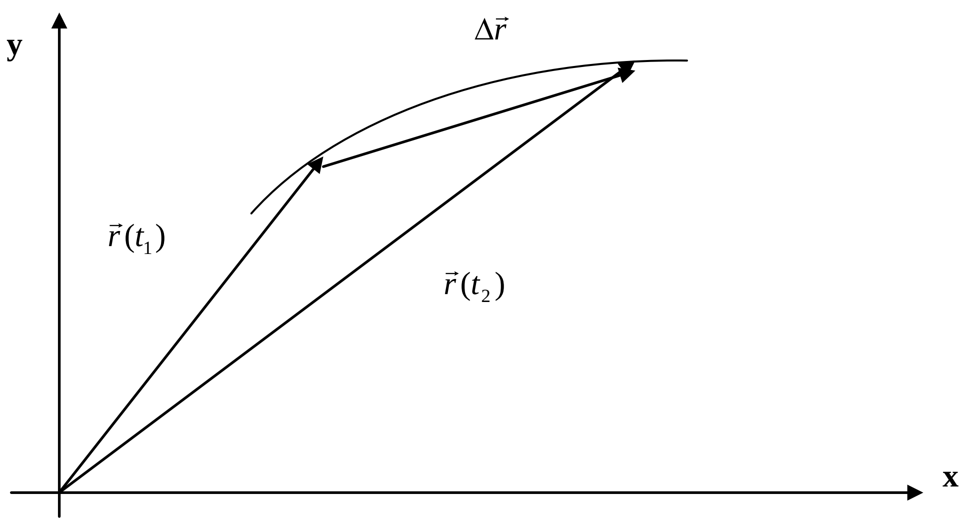
i) $\lim\limits_{t \to p} \vec{f}(t) = (\lim\limits_{t \to p} f_x(t), \lim\limits_{t \to p} f_y(t))$

ii) $\vec{f}\,'(t) = (f'_x(t), f'_y(t))$

iii) $\int_a^b \vec{f}(t)dt = (\int_a^b f_x(t)dt, \int_a^b f_y(t)dt)$

A.1 *Movimiento Curvilíneo: vectores posición, desplazamiento, velocidad y aceleración*

Supongamos que una partícula se mueve en el plano de modo que su posición en el instante t referida a un cierto sistema de coordenadas venga dada por un vector $\vec{r}(t)$ (ver figura de abajo). Cuando t varía desde un instante t_1 hasta otro t_2, la curva descrita por el vector $\vec{r}(t)$ se denomina la *trayectoria* de la partícula. A la función vectorial $\vec{r}(t)$ se le denomina *función posición* del movimiento. Al vector $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$ se le denomina *vector desplazamiento* entre t_1 y t_2.



El vector *velocidad instantánea* $\vec{v}(t)$ se define como la derivada de la función posición respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \text{(ec.1)}$$

Se puede demostrar que *el vector velocidad instantánea es tangente a la trayectoria del móvil en todo momento*.

Finalmente, el vector *aceleración instantánea* se define como la derivada de la función velocidad respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \text{(ec. 2)}$$

A.2 *Movimiento en el plano bajo aceleración constante*

En este caso la aceleración es constante, tanto en magnitud como en dirección. Luego, si $\vec{a} =$ vector c*onstante*, resolviendo la ecuación diferencial (ec. 2) obtenemos la función velocidad:

$$\vec{v}(t) = \vec{a}t + \vec{v}(0) \qquad \text{(ec. 3)}$$

Substituyendo esta ecuación en la ec. 1 y resolviendo la ecuación diferencial, obtenemos la función posición:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}(0)t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \qquad \text{(ec. 4)}$$

A.3 *Ejemplo de movimiento en el plano bajo aceleración constante: Movimiento de proyectiles*

Un ejemplo de movimiento curvilíneo con aceleración constante es el movimiento de proyectiles, o sea, el movimiento bidimensional de una partícula arrojada oblicuamente al aire. En este caso tenemos que (ver figura de la página siguiente):

$\vec{a} = (0, -g)$ (la componente horizontal de la aceleración es nula)

$\vec{v}(0) = (v_{0x}, v_{0y}) = (v_0 \cos\theta, v_0 sen\theta)$ (θ es el ángulo de inclinación de $\vec{v}_0$)

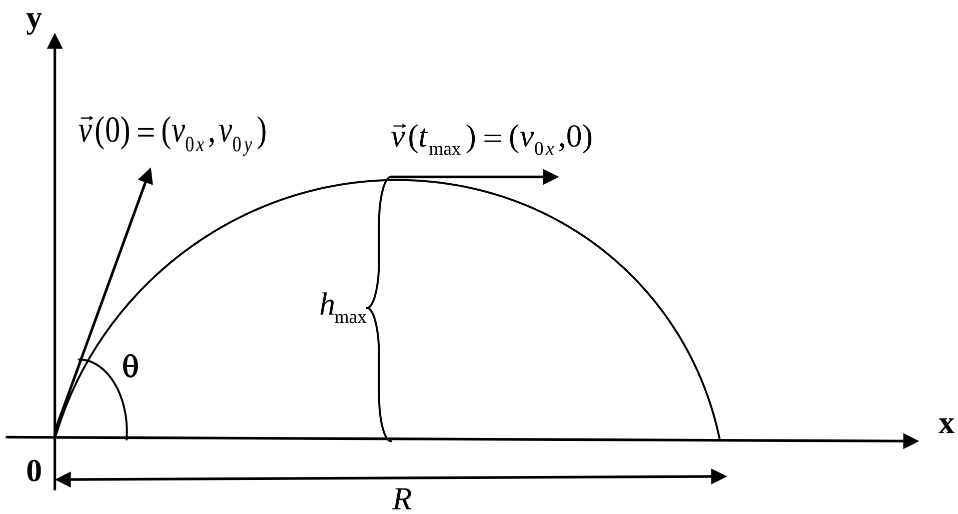
$\vec{r}(0) = (0, 0)$ (el origen O del sistema coincide con $\vec{r}_0$)

Con lo cual, las ecuaciones 3 y 4 se transforman en:

$$\vec{v} = (v_0 \cos\theta, v_0 sen\theta - gt) \qquad \text{(ec. 5)}$$

$$\vec{r} = (v_0 \cos\theta\, t, v_0\, sen\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2) \qquad \text{(ec. 6)}$$

Se puede demostrar que un móvil con un vector posición $\vec{r}$ dado por la ec. 6 tiene una trayectoria parabólica (ver figura).



Algunos parámetros importantes de este movimiento son:

i) *Tiempo para alcanzar la altura máxima* (t_{max}): en este caso se hace cero la componente y de $\vec{v}$. Luego, se obtiene que:

$$t_{\max} = \frac{v_0 sen\theta}{g} \qquad \text{(ec.7)}$$

ii) *Altura máxima* (h_{max}): en este caso se substituye t_{max} en la componente y de $\vec{r}$:

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 sen^2\theta}{2g} \qquad \text{(ec.8)}$$

iii) *Tiempo de vuelo* (t_{vuelo}): es el tiempo necesario para que el proyectil retorne al nivel del suelo. En este caso se hace cero la componente y de $\vec{r}$, obteniéndose:

$$t_{vuelo} = \frac{2v_0 sen\theta}{g} \qquad \text{(ec.9)}$$

Obsérvese que $t_{vuelo} = 2t_{\max}$.

iv) *Alcance* o *distancia horizontal máxima* (R): en este caso se hace $t=t_{vuelo}$ en la componente x de $\vec{r}$, obteniéndose:

$$R = \frac{v_0^2 sen(2\theta)}{g} \qquad \text{(ec.10)}$$

E. *Ejercicios (cinemática en dos dimensiones).* (En esta guía adoptaremos el Sistema Internacional de Unidades (*Système International d´Unités*), conocido universalmente como SI).

1. En el tiempo t_0 la velocidad de un objeto está dada en m/s por $v_0 = 125\hat{\imath} + 25\hat{\jmath}$. Pasados 3 s, la velocidad es $v = 100\hat{\imath} - 75\hat{\jmath}$. ¿Cuál fue la aceleración media del objeto durante este intervalo de tiempo? (*Soluc.* $(-25, -100)/3$ *m/s*^{2})
2. Si las coordenadas de una partícula que se mueve en un plano están dadas por: $x = 3t-4t^2$, $y = -6t^2+t^3$, donde x e y están dados en metros y t en segundos, encontrar: a) el vector desplazamiento entre t=0 s y t=3 s, b) la velocidad media durante los primeros 3 s, c) la velocidad instantánea en t=3 s, d) la aceleración media durante los primeros 3 s, e) la aceleración instantánea en t=3 s.
(*Soluc. a)* $r = (-27,-27)$ *, b) 13 m/s a 230°, c) 23 m a 200°, d) 8,5 m/s*^{2} *a 200°, e) 10 m/s*^{2} *a 140°)*
3. Una partícula se mueve de tal manera que su posición como función del tiempo es: $r(t) = \hat{\imath} + 4t^2\hat{\jmath} + t\hat{k}$. a) encontrar expresiones para la velocidad y aceleración en función del tiempo. b) ¿Cuál es la forma de la trayectoria de la partícula?
(*Soluc. a)* $v = 8t\,\hat{\jmath} + \hat{k}$ *;* $a = 8\,\hat{\jmath}$ *; b) una parábola)*
4. Se apunta un fusil horizontalmente a un blanco que está a 30,5 metros de distancia. El proyectil alcanza el blanco a 7,6 centímetros por debajo del punto de mira. ¿Cuál es la rapidez inicial del proyectil? (*Soluc. 243,9 m/s*)
5. Un fusil dispara una bala con una velocidad inicial de 457,3 m/s sobre un pequeño blanco situado a 45,7 metros. ¿A qué altura, por encima del blanco, debe apuntarse el proyectil para que dé en el blanco? (*Soluc. 4,8 centímetros*)
6. Un aeroplano tiene una rapidez de 80,5 m/s y está dirigiéndose con un ángulo de 30° por debajo de la horizontal cuando se arroja un objeto. La distancia horizontal entre el punto en que se suelta dicho objeto y el punto donde llega al suelo es de 701 metros. a)¿Cuál era la altura del aeroplano cuando se dejó caer el objeto? b)¿Cuánto tiempo estuvo el objeto en el aire? (*Soluc. a) 883,9 m, b) 10 s*)
7. Se lanza al aire una pelota desde el suelo. A una altura de 9,1 metros se observa que su velocidad es $\bar{v} = 7{,}6\hat{\imath} + 6{,}1\hat{\jmath}$ en m/s a) ¿A qué altura máxima se elevará la pelota? b) ¿Cuál será la distancia horizontal total que recorrerá la pelota? c) ¿Cuál será la velocidad de la pelota (en magnitud y dirección) un instante antes de llegar al suelo? (*Soluc. a) 10,9 m b) 22,9 m c) 16,5 m/s, 62° por debajo de la horizontal*)
8. Se patea un balón de fútbol americano con una rapidez inicial de 19,5 m/s y con un ángulo de elevación de 54°. Un jugador que está en la línea de meta a 54,9 m de distancia y en la dirección del vuelo del balón, empieza a correr en ese instante para recoger el balón. ¿Cuál deberá ser su rapidez para alcanzar el balón antes de que éste llegue al suelo? (*Soluc. 5,8 m/s*)
9. Un proyectil es disparado con una velocidad de 600 m/seg haciendo un ángulo de 60° con la horizontal. Calcular: a) el alcance horizontal, b) la altura máxima, c) la rapidez y altura después de 30 s, d) la rapidez y el tiempo cuando el proyectil se encuentra a 10 km de altura. (*Soluc. a) 31,8 km, b) 27,5 km, c) 375 m/s, 11,2 km, d) 405 m/s, 23 s, 79 s*)
10. Un proyectil es disparado haciendo un ángulo de 35°. Llega al suelo a una distancia de 4 km del cañón. Calcular: a) la rapidez inicial, b) el tiempo de vuelo, c) la máxima altura, d) la rapidez en el punto de máxima altura. (*Soluc. a) 204 m/s, b) 23,9 s, c) 700 m, d) 171 m/s*)

F. *Bibliografía*

Resnick & Holliday, Fundamentos de Física.
Allonso & Finn, Física (Volumen I).