

**TRABAJO ESPECIAL DE GRADO**

**MODELO DE SIMULACIÓN PARA CONVECCIÓN  
MIXTA LAMINAR ENTRE PLACAS PARALELAS  
VERTICALES**

**PRESENTADO ANTE LA ILUSTRE  
UNIVERSIDAD CENTRAL DE  
VENEZUELA  
POR EL Br.:  
HUGO MOLINA DÍAZ  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO MECÁNICO**

**CARACAS, 2002**

**TRABAJO ESPECIAL DE GRADO**

**MODELO DE SIMULACIÓN PARA CONVECCIÓN  
MIXTA LAMINAR ENTRE PLACAS PARALELAS  
VERTICALES**

**PRESENTADO ANTE LA ILUSTRE  
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
POR EL Br.:  
HUGO MOLINA DÍAZ  
PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO MECÁNICO**

**Profesor guía:  
García García., Francisco**

**CARACAS, 2002**

## **DEDICATORIA**

A mis padres.

## **AGRADECIMIENTOS**

A los profesores:

Julio Segura y Francisco García

Por brindarme la oportunidad y su valiosa ayuda para la realización de este trabajo.

A mis amigos:

Arturo Gil, Juan Sosa, Alejandro Llanos, Adolfo Velásquez, Kattyna Padilla

Por su apoyo y ayuda

## NOMENCLATURA

$A$	Área de la sección transversal del volumen de control
$a$	Coefficiente del método híbrido
$a$	Vector aceleración
$b$	Distancia entre las placas
$c_p$	Calor específico a presión constante
$c_v$	Calor específico a volumen constante
$D$	Conductancia difusiva
$da - Da$	Diferencial de área
$Ec$	Número de Eckert
$Em$	Temperatura media
$e$	Subíndice referente al este
$F$	Flujo de masa por unidad de área
$Gr$	Número de Grashof
$g$	Gravedad
$h$	Coefficiente convectivo
$IC$	Número de columnas
$i$	Contador de columnas
$JF$	Número de filas
$j$	Contador de filas
$k$	Conductividad térmica
$L$	Longitud de las placas
$Lef$	Longitud fluido dinámica
$n$	Subíndice referente al norte
$P$	Presión absoluta
$Pr$	Número de Prandtl
$Pe$	Número de Peclet
$q$	Tasa de flujo de calor

$q'$	Tasa de flujo de calor por unidad de longitud
$q''$	Tasa de flujo de calor por unidad de área
$Re$	Número de Reynolds
$Ra$	Número de Rayleigh
$s$	Subíndice referente al sur
$T$	Temperatura
$T_S$	Temperatura superficial
$T_\infty$	Temperatura de corriente libre
$U$	Velocidad media
$U_\infty$	Velocidad de corriente libre
$Nu$	Número de Nusselt
$u$	Velocidad en la dirección x
$V$	Vector velocidad
$w$	Subíndice referente al oeste
$\alpha$	Difusividad Térmica
$\beta$	Coef. volumétrico de expansión térmica
$\nabla$	Operador Nabla
$\epsilon$	Valor establecido como criterio de convergencia
$f$	Propiedad estudiada
$G$	Coefficiente difusivo
$\mu$	Viscosidad dinámica
$v$	Velocidad en la dirección “y”
$\nabla$	Derivada parcial / diferencial
$q$	Gradiente de temperatura

## ÍNDICE DE FIGURAS

No. Figura	Título	No. Pagina
1.1	Perfil de temperatura	4
1.2	Proceso de convección	5
1.3	Capa límite fluido dinámica	7
1.4	Capa límite térmica	8
2.1	Parte de la malla bidimensional	20
2.2	Algoritmo general de solución	30
2.3	Secuencias de barridos	34
3.1	Vista esquemática del modelo matemático y su dominio de solución	37
3.2	Variación de $Nu$ en placas isotérmicas	46
4.1	Malla desplazada	48
4.2	Volumen de control para el cálculo de $u$	49
4.3	Volumen de control para el cálculo de $T$	51
4.4	Volumen de control para el cálculo de $v$	53
4.5	Volumen de control en la entrada ( $T$ )	54
4.6	Volumen de control en la entrada ( $v$ )	55
4.7	Volumen de control en la entrada ( $u$ )	56
4.8	Volumen de control en la salida ( $T$ )	57
4.9	Volumen de control en la salida ( $v$ )	57
4.10	Volumen de control en la salida ( $u$ )	58
4.11	Volumen de control en las paredes ( $T$ )	59
4.12	Volumen de control en las paredes ( $v$ )	59
4.13	Volumen de control en las paredes ( $u$ )	60
5.1	Variación del Nusselt semiempírico Vs. Nusselt del programa	65
5.2	Caso uno	67
5.3	Zoom del vector velocidad, caso uno	68

<b>5.4</b>	Caso dos	69
<b>5.5</b>	Zoom del vector velocidad, caso dos	70
<b>5.6</b>	Caso tres	71
<b>5.7</b>	Zoom del vector velocidad, caso tres	72
<b>5.8</b>	Caso cuatro	73
<b>5.9</b>	Zoom del vector velocidad, caso cuatro	74
<b>5.10</b>	Caso cinco	75
<b>5.11</b>	Zoom del vector velocidad, caso cinco	76
<b>5.12</b>	Caso seis	77
<b>5.13</b>	Zoom del vector velocidad, caso seis	78
<b>5.14</b>	Caso siete	79
<b>5.15</b>	Zoom del vector velocidad, caso siete	80
<b>A.1</b>	Ventana de MATLAB	86
<b>A.2</b>	Ventana de DOS	87
<b>A.3</b>	Ventanas con los resultados de MATLAB	87



## ÍNDICE DE TABLAS

<b>No. Tabla</b>	<b>Título</b>	<b>No. Pagina</b>
2.1	Coef. para el método de “Diferencias Centradas”	23
2.2	Coef. para el método de “Diferencias Corriente Arriba”	24
2.3	Coef. para el método de “Diferencias Híbridas”	25
2.4	Coef. para el método de “Ley de Potencia”	26
2.5	Cuadro resumen de los métodos	27
3.1	Condiciones en las paredes	39
3.2	Condiciones en la entrada	39
3.3	Condiciones en la salida	39
5.1	Datos para comprobación del programa	64
A.1	Rutinas en MATLAB	

**RESUMEN**  
**MOLINA DÍAZ, Hugo**  
**“MODELO DE SIMULACIÓN PARA CONVECCIÓN MIXTA LAMINAR**  
**ENTRE PLACAS PARALELAS VERTICALES”**

Profesor guía: García G., Francisco, Caracas, U.C.V., Facultad de Ingeniería. Escuela de  
Ingeniería Mecánica, 2002. 114 p.

Palabras clave: Transferencia de Calor Computacional / Flujo Mixto Interno / Método de  
Volúmenes Finitos.

El propósito de este trabajo fue determinar la distribución de temperatura de un fluido bajo la acción de convección mixta, entre placas paralelas verticales con temperaturas superficiales uniformes. El régimen del fluido es laminar y se consideran propiedades termo físicas constantes (a excepción de la densidad). El modelo matemático esta constituido por las ecuaciones de continuidad, de cantidad de movimiento y de energía. Las ecuaciones que constituyen el modelo matemático fueron discretizadas mediante el método de Volúmenes Finitos con Esquema Híbrido. Se obtuvo la solución del planteamiento utilizando una modificación del algoritmo SIMPLER (Patankar, 1980), y por medio de la aplicación del algoritmo de matriz tridiagonal se resolvió el sistema discreto de ecuaciones resultantes, mediante el recorrido alterno en dirección horizontal y vertical de la malla de cálculo. Los parámetros adimensionales utilizados fueron los números de: Reynolds (Re), Prandtl (Pr), Grashof (Gr) y Eckert (Ec).

El algoritmo de cálculo desarrollado fue codificado mediante el lenguaje de computación FORTRAN 77. Para la implantación del código computacional se desarrolló una interfase aplicando el programa MATLAB que permite automatizar la representación gráfica de los resultados obtenidos. Para la validación de los resultados numéricos, se compararon los resultados obtenidos con una correlación semi empírica establecida en iguales condiciones y características a las usadas en este trabajo. Los resultados obtenidos muestran que el modelo desarrollado describe adecuadamente la convección mixta laminar entre placas paralelas verticales.

## CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>CAPITULO I</b>	
<b>MARCO TEÓRICO</b>	<b>3</b>
1.1 CONDUCCIÓN DE CALOR	4
1.2 CONVECCIÓN DE CALOR	5
1.3 CAPA LIMITE FLUIDO DINÁMICA	7
1.4 CAPA LIMITE TÉRMICA	8
1.5 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD	9
1.6 ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO	9
1.7 ECUACIÓN DE ENERGÍA	11
1.8 PARÁMETROS ADIMENSIONALES	12
1.9 CONVECCIÓN MIXTA	12
1.10 MÉTODO DE NORMALIZACIÓN	13
1.11 LONGITUD DE ENTRADA FLUIDO DINÁMICA	16
1.12 VELOCIDAD MEDIA	17
1.13 LONGITUD DE ENTRADA TÉRMICA	17
1.14 TEMPERATURA MEDIA	18
<b>CAPITULO II</b>	
<b>MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS</b>	<b>19</b>
2.1 MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS BIDIMENSIONALES	20
2.2 DIFERENCIAS CENTRADAS	22
2.3 DIFERENCIAS CORRIENTE ARRIBA	23

2.4 DIFERENCIAS HÍBRIDAS	24
2.5 LEY DE POTENCIA	25
2.6 CUADRO RESUMEN	26
2.7 ECUACIONES DISCRETIZADAS	28
2.8 CONFORMACIÓN DEL ALGORITMO GENERAL DE SOLUCIÓN	29
2.9 RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DISCRETIZADAS	31
2.10 ALGORITMO DE SOLUCIÓN DE SISTEMAS TRIDIAGONALES	32
<b>CAPITULO III</b>	
<b>MODELO MATEMÁTICO</b>	<b>36</b>
3.1 SISTEMA DE ECUACIONES GOBERNANTES	37
3.2 CONDICIONES DE CONTORNO	39
3.3 SOLUCIÓN SEMIEMPIRICA DEL MODELO MATEMÁTICO	40
<b>CAPITULO IV</b>	
<b>APLICACIÓN DEL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS AL</b>	
<b>MODELO MATEMÁTICO</b>	<b>47</b>
4.1 ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN X	49
4.2 ECUACIÓN DE ENERGÍA	50
4.4 CONDICIONES DE CONTORNO	54
4.4 A CONDICIONES EN LA ENTRADA	54
4.4 B CONDICIONES EN LA SALIDA	56
4.4 C CONDICIONES EN LAS PAREDES	58
4.5 PROGRAMA	61
<b>CAPITULO V</b>	
<b>RESULTADOS</b>	<b>63</b>

5.1 VALIDACIÓN DE RESULTADOS	63
5.3 CORRIDAS DEL PROGRAMA	67
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>82</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>84</b>
<b>ANEXO</b>	<b>86</b>

## INTRODUCCIÓN

Las nuevas tecnologías impulsan el desarrollo de modelos de simulación, con la finalidad de predecir el comportamiento de sistemas en condiciones que serían muy difíciles de evaluar físicamente o de costos excesivamente onerosos. Por ello existe gran interés en estos métodos, su implantación y aplicación son de gran importancia para el desarrollo de nuevas tecnologías.

Evaluar el comportamiento térmico de sistemas es de gran importancia, pues reduce sustancialmente los costos de diseño así como también el tiempo de investigación y desarrollo. La posibilidad de estudiar sistemas donde la realización de experimentos controlados son difíciles o imposibles de implementar; aunado a un nivel prácticamente ilimitado en el detalle de los resultados gracias a la aparición de computadoras de mayor capacidad, son ventajas que han permitido el desarrollo de los modelos de simulación numérica.

Mientras aparecen ideas cada vez más sofisticadas en la tecnología moderna, la transferencia de calor debe resolver problemas nuevos y cada vez más complejos. Por ello para la mayoría de los problemas que el ingeniero tiene que enfrentar en su vida profesional y que requieran de modelos matemáticos conformados por sistemas de ecuaciones diferenciales, incurrirán en el inconveniente de no encontrar solución analítica al planteamiento, por lo que tiene que utilizar formulas de correlación de datos hallados experimentalmente. Sin embargo, la solución de este sistema de ecuaciones diferenciales puede ser encontrada aplicando métodos numéricos, tales como: diferencias finitas, volúmenes finitos, elementos finitos, elementos de contorno, entre otros.

En la Unidad Docente y de Investigación de Transferencia de Calor, de la Escuela de Ingeniería Mecánica, de la Facultad de Ingeniería, existe interés en

desarrollar modelos de simulación numérica mediante la aplicación del método de Volúmenes Finitos para aplicarse a problemas de climatización. En este método, se integran las ecuaciones que gobiernan el fenómeno estudiado sobre todo el volumen de control. El integrar las ecuaciones a lo largo del volumen de control, distingue este método de las otras técnicas de dinámica de fluidos computacional. El resultado es que se garantiza el principio de conservación en todo el dominio y en cada volumen de control de tamaño finito. Esta clara relación entre el algoritmo numérico y los principios de conservación es el punto más fuerte de este método (Versteeg, 1995).

Con la premisa anterior, se han realizado estudios aplicados a problemas de transferencia de calor, como el caso de Coello y Jaramillo (1993), en cuyo trabajo se discretiza la ecuación convección-difusión por medio del método de Volúmenes Finitos pero no se desarrolla el código computacional. Luego, el trabajo de Gil (1998), en el que se considera la convección forzada entre placas paralelas horizontales, siendo estos los pioneros al nivel de pregrado de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Facultad de Ingeniería en desarrollar este tipo de modelos.

En el presente trabajo se emplea el método de los Volúmenes Finitos para discretizar la ecuación de convección-difusión, desarrollando un algoritmo de solución implantado por medio de un código computacional que sirve como patrón de calibración para su posterior aplicación a problemas de mayor complejidad. En el mismo, se determina la distribución de temperaturas de un flujo en régimen laminar a través de un conducto vertical de sección transversal constante y temperaturas superficiales uniformes. Los resultados de este modelo son comparados con los obtenidos por medio de la solución semi-analítica establecida por las correlaciones empíricas aplicadas para el caso de placas paralelas y verticales a temperatura constante desarrollada por Rar-Cohen y Rohsenow (1984).

## CAPITULO I

### MARCO TEÓRICO

Con la finalidad de desarrollar un modelo matemático de simulación para convección mixta laminar entre placas paralelas verticales, se debe realizar una serie de pasos que involucran todos los aspectos que atañen a la solución de un problema numérico (Shih, 1984), estos pasos son:

1. Definición del problema físico.
2. Formulación de las ecuaciones integro - diferenciales.
3. Discretización de las ecuaciones integro - diferenciales en ecuaciones algebraicas.
4. Análisis de las propiedades numéricas del método de discretización, como estabilidad, consistencia, convergencia y límite del error.
5. Si el método escogido es satisfactorio, usar un método para resolver las ecuaciones algebraicas. Si no volver al paso 3 y usar otro método.
6. Interpretación y discusión de los resultados obtenidos.

Consecuentemente con los pasos mencionados anteriormente, se define el problema físico estudiado como: determinación de la distribución de temperatura, velocidades y presión de un flujo en régimen laminar entre placas paralelas verticales con temperatura superficial uniforme.

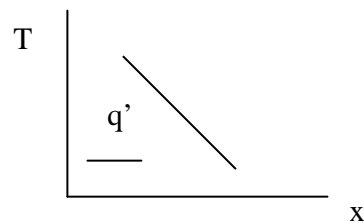
Es necesario establecer el entorno teórico y la base de la cual parten las ecuaciones integro - diferenciales utilizadas. Por esto, en este capítulo se presentan en un orden tal que permita entender el fundamento teórico de este trabajo especial de grado.



## 1.1 CONDUCCIÓN DE CALOR

La transferencia de calor por conducción es un fenómeno de propagación de energía en un medio sólido, líquido o gaseoso, mediante contacto molecular directo o entre medios a distintas temperaturas, sin que exista un movimiento relativo de las moléculas. En el caso de líquidos y gases esta transferencia es importante, siempre y cuando las corrientes naturales de flujo que pueden presentarse como consecuencia de las diferencias de densidades sean insignificantes. De aquí que la transferencia de calor por conducción sea de particular importancia en sólidos sujetos a una diferencia de temperaturas.

Al existir un gradiente de temperatura dentro del medio, la segunda ley de la termodinámica establece que la transferencia de calor se lleva a cabo desde la región de mayor temperatura como se ilustra en la figura 1.1.



**Figura 1.1** Perfil de temperatura

En estas circunstancias se dice que el flujo de calor es proporcional a la derivada direccional de temperatura, así Fourier estableció:

$$q'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (1.1)$$

Donde  $q''$  denota la tasa de flujo de calor por unidad de área o densidad de calor en la dirección  $x$ ,  $k$  es la conductividad térmica del material y  $\partial T / \partial x$  es el gradiente de temperatura en la dirección  $x$ . Las unidades de ésta en el Sistema Internacional son W/mK (Vatio por metro Kelvin). El signo negativo de la ecuación 1.1 es introducido de tal manera que la segunda ley de la termodinámica sea satisfecha, es decir que el calor fluya de mayor a menor temperatura. Esta ecuación se conoce como la Ley de Fourier de Conducción de Calor. Debe hacerse notar que esta

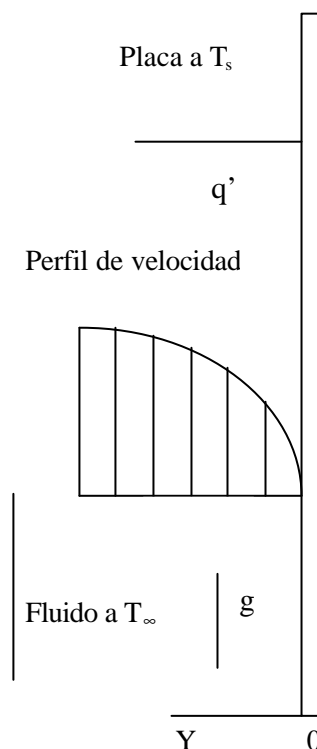
expresión define la conductividad térmica  $k$  que varía con la temperatura. Cuando los materiales presentan una alta conductividad térmica se denominan conductores mientras que los que poseen una baja conductividad térmica se denominan aislantes.

## 1.2 CONVECCIÓN DE CALOR.

La transferencia de calor por convección es un fenómeno de transporte de energía que se lleva a cabo como consecuencia del movimiento de un fluido (líquido o gas) y está íntimamente relacionado con el movimiento de éste.

Considérese como vía de explicación una placa cuya superficie se mantiene a una temperatura  $T_s$ . Como se muestra en la figura 1.2, la cual disipa calor hacia el medio ambiente cuya temperatura es  $T_\infty$ . ( $T_s > T_\infty$ )

La experiencia indica que el sistema disipa más calor cuando se incrementa la velocidad del medio; deduciéndose que la velocidad del fluido tiene un efecto importante sobre la transferencia de calor a lo largo de la superficie. De manera análoga, la experiencia indica que la tasa de flujo de calor es diferente (se incrementa) si la placa se enfría en agua o aceite en vez de aire. De aquí que las propiedades del fluido deban tener también un efecto importante sobre la transferencia de calor.



**Figura 1.2** Fenómeno de convección

Puesto que la velocidad relativa del fluido con respecto a la placa es en general idénticamente igual a cero ( $y=0$ ) en las interfaces sólido-líquido (Rosenhow y Hartnett, 1973), el calor se transfiere por conducción solamente en este plano del fluido. Sin embargo, aun cuando el calor disipado por la placa puede computarse mediante la ecuación 1.1, el gradiente de temperatura en el fluido depende de las características, a menudo complejas, del flujo de éste. Por consiguiente, es más conveniente calcular el flujo de calor disipado por el sistema en términos de la diferencia de temperaturas entre la superficie y el fluido. Es decir:

$$q'' = h(T_s - T_\infty) \quad (1.2)$$

Donde  $h$  es el coeficiente de transferencia de calor por convección. Sus unidades en el Sistema Internacional son  $W/m^2K$  (Vatio por metro cuadrado Kelvin). La ecuación 1.2 se conoce como la Ley de Newton del Enfriamiento. Debe notarse que esta expresión, más que una ley fenomenológica, define el coeficiente de transferencia de calor por convección  $h$ .

El fenómeno de transferencia de calor por convección usualmente se clasifica como convección forzada y convección libre o natural. En el primer caso el fluido se hace pasar sobre el sistema mediante la acción de algún agente externo, como un ventilador o bomba. Por otra parte, el movimiento del fluido resulta en el segundo caso como una consecuencia del gradiente de densidad, al estar en contacto con la superficie a mayor temperatura y en presencia de un campo gravitacional.

El coeficiente de transferencia de calor por convección en algunas geometrías sencillas puede determinarse mediante una combinación de las ecuaciones 1.1 y 1.2, es decir:

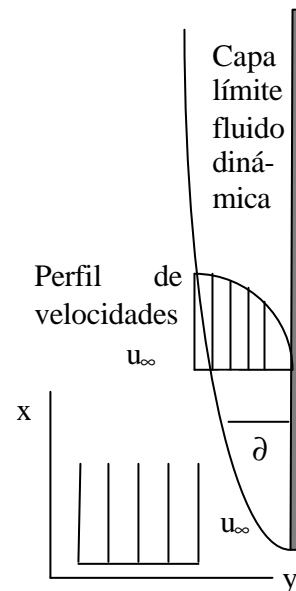
$$h = \frac{-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{T_s - T_\infty} \quad (1.3)$$

La ecuación anterior presupone un conocimiento del perfil de temperatura en el fluido. En el caso de geometrías más complejas, el coeficiente de transferencia de calor puede evaluarse mediante el uso de correlaciones empíricas, recurriendo a la experimentación.

### 1.3 CAPA LÍMITE FLUIDO DINÁMICA

Consideremos un flujo viscoso que se aproxima con una velocidad “ $u_\infty$ ” sobre una superficie plana como se muestra en la figura 1.3. Cuando el fluido se desplaza a lo largo de la superficie, la porción de fluido en contacto directo con esta adquiere la velocidad de la superficie.

Así esta porción retarda el movimiento de las capas de fluido adyacentes, las cuales a su vez retardan el movimiento del fluido en las siguientes capas, hasta una distancia  $y=\delta$ , para la cual los efectos de la superficie sobre el fluido se hacen despreciables. Este retardo en el movimiento del fluido es originado por los esfuerzos cortantes  $\tau$  los cuales actúan en planos paralelos al movimiento del fluido.



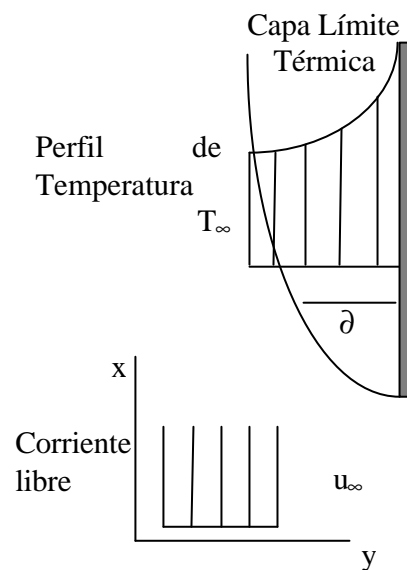
**Figura 1.3** Capa límite Fluido Dinámica

Con el incremento de la distancia “y” la componente en dirección “x” de la velocidad aumenta hasta llegar al valor de la velocidad de corriente libre  $u_{\infty}$  en el exterior de la capa límite. Por lo que se define como el espesor de la capa límite la zona comprendida entre la placa y el punto donde la velocidad  $u(y)$  alcanza un valor igual a  $0.99 u_{\infty}$ .

#### 1.4 CAPA LÍMITE TÉRMICA

Cuando se tiene flujo sobre una superficie, se desarrolla una capa límite térmica, si la temperatura de corriente libre difiere de la temperatura de la superficie. Esto se representa en la figura 1.4.

Considerando un flujo sobre una superficie plana con temperatura constante y el fluido en el borde de la placa posee una temperatura  $T_{\infty}$ . Al entrar en contacto las partículas del fluido con la superficie estas logran el equilibrio térmico a la temperatura de la superficie y se produce un intercambio de energía entre las partículas de las siguientes capas del fluido que generan un gradiente de temperaturas en la dirección de la coordenada “y”.



**Figura 1.4** Capa Límite Térmica

Esta región en la cual se tiene un gradiente de temperatura es conocida como la capa límite térmica y el espesor de ésta se extiende desde la superficie de la placa hasta donde se cumple que  $(T_s - T)/(T_s - T_{\infty}) = 0.99$ .

## 1.5 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Para toda clase de problemas fluido dinámicos calcular qué masa de fluido cruza o atraviesa una región determinada, la suposición de un medio continuo dice que el fluido puede ser tratado como una distribución continua de materia. La ley de la conservación de masa se puede aplicar dentro de un volumen de control diferencial, así el flujo másico que entra menos el que sale es igual a la variación de la masa, es decir,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{r}\bar{\mathbf{V}}) = 0 \quad (1.4)$$

Para flujo permanente ( $\partial\rho/\partial t=0$ ) y bidimensional ( $\bar{\mathbf{V}} = \bar{u} + \bar{v}j$ ) la ecuación 1.4 queda así:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{r}u) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{r}v) = 0 \quad (1.5)$$

## 1.6 ECUACIONES DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Una ecuación de la dinámica que describe el movimiento del fluido puede obtenerse mediante la aplicación de la segunda ley de Newton. Las fuerzas que actúan sobre un elemento de fluido pueden clasificarse como fuerzas de volumen y fuerzas de superficie, que incluyen las fuerzas normales y de corte. Por ejemplo para determinar la fuerza superficial en la dirección x, debemos sumar las fuerzas en la dirección x. Si el fluido es newtoniano este principio se cumple mediante las ecuaciones de Navier Stokes, cuya forma vectorial es,

$$\bar{\mathbf{a}} = -\frac{1}{\mathbf{r}}\nabla(P) + \bar{\mathbf{F}} + \mathbf{u}\nabla^2\bar{\mathbf{u}} + \frac{1}{3}\mathbf{u}\nabla(\nabla\bar{\mathbf{u}}) \quad (1.6)$$

Para flujo bidimensional permanente se puede describir la ecuación 1.6 en dirección x como:

$$\mathbf{r}u \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{r}v \frac{\partial u}{\partial y} = Fx - \frac{\partial P}{\partial x} + \mathbf{m} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (1.7)$$

Dadas las condiciones especiales que presentan las capas límites de espesores muy pequeño, se pueden aplicar las siguientes desigualdades:

- ❖  $u \gg v$
- ❖  $\partial u / \partial y \gg \partial u / \partial x, \partial v / \partial y, \partial v / \partial x$  (capa límite fluido dinámica)
- ❖  $\partial T / \partial y \gg \partial T / \partial x$  (capa límite térmica)

y definiendo la componente  $u$  de la velocidad paralela a la gravedad, el gradiente de presión en cualquier punto de la capa límite debe ser igual al gradiente de presión en esa sección fuera de la capa límite. Si en esta región  $u=v=0$  (convección natural) o las componentes de velocidad son constantes (condiciones de corriente libre) y  $F_x = -\rho g$ , de la ecuación 1.7 tenemos que:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\mathbf{r}_\infty g \quad (1.8)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de cantidad de movimiento 1.7:

$$\mathbf{r}u \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{r}v \frac{\partial u}{\partial y} = g(\mathbf{r}_\infty - \mathbf{r}) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathbf{m} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mathbf{m} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.9)$$

El término que incluye la diferencia de densidades tiene que ver con las fuerzas de empuje, que originan un movimiento del fluido por variación de la densidad. El origen de esta variación en el fluido se observa en forma más explícita con la introducción del coeficiente de expansión térmica,  $\beta$ :

$$\mathbf{b} \equiv -\frac{1}{\mathbf{r}} \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial T} \right)_p \quad (1.10)$$

Esta propiedad termodinámica de los fluidos provee una medida que relaciona los cambios de densidad como consecuencia de cambios en la temperatura a presión constante. Esta puede ser expresada en forma aproximada por:

$$\mathbf{b} \cong -\frac{1}{r} \frac{(\mathbf{r}_\infty - \mathbf{r})}{(T_\infty - T)} \quad (1.11)$$

como consecuencia:

$$(\rho_\infty - \rho) \approx \rho\beta(T - T_\infty) \quad (1.12)$$

así la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección x queda expresada como:

$$ru \frac{\partial u}{\partial x} + rv \frac{\partial u}{\partial y} = g r b (T - T_\infty) + \frac{\partial}{\partial x} \left( m \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( m \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.13)$$

Adicionalmente, un análisis de orden de magnitud de las velocidades de aproximación a la capa límite fluido dinámica, se puede demostrar que la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección y se reduce a (Shih, 1984)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (1.14)$$

## 1.7 ECUACIÓN DE ENERGÍA

La primera ley de la Termodinámica es un enunciado de la conservación de energía, la cual puede escribirse de muchas maneras diferentes dependiendo del tipo de estudio que se pretenda realizar y las consideraciones de cada caso en particular. Para un volumen de control diferencial que no realice trabajo sobre los alrededores (o los alrededores no realice trabajo sobre el) puede escribirse como:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \mathbf{a} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] + \frac{\mathbf{n}}{c_p} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (1.15)$$



## 1.8 PARÁMETROS ADIMENSIONALES

Debido a la complejidad de los problemas relacionados con el comportamiento de fluidos, la ciencia que estudia estos fenómenos posee un carácter experimental. Esto se debe a que las ecuaciones que rigen el movimiento de un fluido son no lineales, y por consiguiente no pueden ser integradas en la mayoría de los casos. Por esta razón los experimentos realizados se traducen en correlaciones empíricas que se expresan con grupos adimensionales. Estos se utilizan, ya que relacionan un gran número de variables en pocos parámetros adimensionales lo que simplifica el problema.

## 1.9 CONVECCIÓN MIXTA

Conocido ya el concepto de convección y sus modalidades a saber: libre y forzada, se puede hablar de un punto límite en el cual los dos fenómenos se presentan en el seno de un fluido, combinando así sus efectos.

Este límite se puede establecer con la utilización de parámetros adimensionales, que según relaciones ya establecidas, permiten distinguir que tipo de convección se está realizando. Por consiguiente para cada uno de los tres tipos de convección que existen, se presenta una relación que la confirma, esta involucra los parámetros conocidos con los nombres de número de Reynolds ( $Re$ ) y número de Grashof ( $Gr$ ) que serán definidos posteriormente.

Cuando predomina la convección libre se tiene que  $(Gr_L/Re_L^2) \gg 1$ ; por el contrario si los efectos de convección forzada son significativos  $(Gr_L/Re_L^2) \ll 1$ ; mientras que si existe una convección mixta la relación será  $(Gr_L/Re_L^2) \sim 1$ .

## 1.10 MÉTODO DE NORMALIZACIÓN

Para obtener los parámetros adimensionales necesarios en los problemas de transferencia de calor por convección mixta, se tomará el caso de una placa vertical, de longitud  $L$  y de temperatura uniforme  $T_s$ , expuesta a un flujo permanente y bidimensional de un fluido incompresible (donde se tomara en cuenta la variación de las propiedades según la temperatura), la velocidad de aproximación  $u_\infty$ , y de temperatura de corriente libre  $T_\infty$  así se seleccionan como parámetros de referencia la longitud de la placa  $L$ , la velocidad de aproximación  $u_\infty$ , la temperatura de corriente libre y la temperatura de la placa  $T_s$ , definiéndose las siguientes variables adimensionales:

$$X = x/L \Rightarrow x = X L \qquad Y = y/L \Rightarrow y = Y L \qquad (1.16)$$

$$U = u / u_\infty \Rightarrow u = U u_\infty \qquad V = v / u_\infty \Rightarrow v = V u_\infty \qquad (1.17)$$

$$\theta = (T_x - T_\infty) / (T_s - T_\infty) \Rightarrow T = \theta (T_s - T_\infty) + T_\infty \qquad (1.18)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 1.5 y dividiendo entre  $u_\infty$  toda la expresión:

$$\frac{u_\infty}{L} \left( \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = 0 \qquad (1.19)$$

Ya que  $u_\infty/L$  es distinto de cero, la ecuación de continuidad en forma adimensional queda expresada como:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \qquad (1.20)$$

Haciendo la sustitución en la ecuación 1.13, tenemos que:

$$\frac{u_\infty^2}{L} \left( U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = g \beta (T_s - T_\infty) \mathbf{q} + \nu \frac{u_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \qquad (1.21)$$

Dividiendo esta ecuación por  $u_\infty$  y  $v$  y multiplicando por  $L^2$ :

$$\frac{u_\infty L}{v} \left( U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = \frac{g \mathbf{b} (T_s - T_\infty) L^2}{u_\infty v} \mathbf{q} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (1.22)$$

De la ecuación anterior podemos destacar las relaciones denominadas Número de Reynolds y Número de Grashof definidas como:

$$\text{Re} = \frac{u_\infty L}{\nu} \quad (1.23)$$

$$\text{Gr} = \frac{g \mathbf{b} (T_s - T_\infty) L^3}{\nu^2} \quad (1.24)$$

Finalmente la ecuación de cantidad de movimiento en forma adimensional queda expresada como:

$$\text{Re} \left( U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}} \mathbf{q} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (1.25)$$

Ahora normalizada la ecuación de la energía 1.15, nos queda:

$$\mathbf{a} \frac{T_s - T_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial Y^2} + \frac{\nu}{C_p} \frac{u_\infty^2}{L^2} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 = u_\infty \frac{T_s - T_\infty}{L} \left[ U \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial X} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial Y} \right] \quad (1.26)$$

Multiplicando toda la ecuación por  $L^2/(\alpha(T_s - T_\infty))$ , luego multiplicando y dividiendo por  $\nu$  el segundo miembro de la ecuación obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial Y^2} + \frac{\nu}{\mathbf{a} C_p (T_s - T_\infty)} \frac{u_\infty^2}{L^2} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 = \frac{u_\infty L \nu}{\nu \mathbf{a}} \left[ U \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial X} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial Y} \right] \quad (1.27)$$

El factor que multiplica el segundo término del lado izquierdo es el producto del Número de Prandtl (Pr), por el Número de Eckert (Ec), que son definidos como:

$$\text{Pr} = \nu / \mathbf{a} \quad (1.28)$$

$$\text{Ec} = \frac{u_\infty^2}{C_p (T_s - T_\infty)} \quad (1.29)$$

El factor que multiplica el lado derecho de la ecuación es el producto del número de Reynolds (Re) por el número de Prandtl (Pr) que se define como el Número de Peclet (Pe). Así la ecuación de la energía queda expresada como:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial Y^2} + \text{Pr Ec} \left( \frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 = \text{Re Pr} \left[ U \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial X} + V \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial Y} \right] \quad (1.30)$$

El último de los parámetros adimensionales que se estudiará es el llamado Número de Nusselt. Este se puede apreciar si se iguala la ecuación 1.1 con la 1.2 estableciendo un balance térmico en la interfase sólido – líquido, donde el calor transferido por convección se iguala con el calor transferido por conducción a través del fluido en contacto con la interfase, tomando en cuenta que el área para el flujo de calor en ambos casos es la misma, así:

$$h(T_s - T_\infty) = -k \left. \frac{\partial T}{\partial Y} \right|_{y=0} \quad (1.31)$$

Adimensionalizada esta expresión queda:

$$h(T_s - T_\infty) = -k \frac{T_s - T_\infty}{L} \left. \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial Y} \right|_{y=0} \quad (1.32)$$

Simplificando el término  $(T_s - T_\infty)$ , multiplicando ambos lados de la expresión por L y dividiendo por K, se llega a:

$$\frac{hL}{k} = - \left. \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial Y} \right|_{y=0} \quad (1.33)$$

Donde el término  $hL/k$  es el Número de Nusselt (Nu).

### 1.11 LONGITUD DE ENTRADA FLUIDO DINÁMICA

Los flujos completamente limitados por superficies sólidas reciben el nombre de flujos internos, en estos el régimen de flujo (laminar o turbulento) es fundamentalmente una función del Número de Reynolds. En condiciones normales ocurren transiciones de flujo laminar a turbulento para un  $Re \approx 2300$  para flujo en tuberías, éste valor cambia para otras situaciones de flujo que se puedan presentar.

Se considera un flujo interno en cuya sección de entrada presenta un flujo laminar de velocidad  $u_b$ , debido a la condición de no deslizamiento en las paredes, la velocidad en ésta región debe ser cero; cuando esto sucede se desarrolla una capa límite a lo largo de las paredes del canal. La superficie sólida ejerce una fuerza retardadora sobre el flujo; de tal manera que la velocidad del flujo en la vecindad de la superficie se reduce. En secciones sucesivas a lo largo del canal en esta sección de entrada, el efecto de la superficie sólida se siente más lejos dentro del flujo.

Suficientemente lejos de la entrada de la tubería, la capa límite que se desarrolla en las paredes del canal alcanza la línea central del conducto y así finalmente actúan completamente las fuerzas viscosas en el fluido. La forma del perfil de velocidades cambia ligeramente después de que el núcleo no viscoso desaparece. Cuando la forma del perfil no cambia con el aumento de la distancia  $x$ , el flujo está completamente desarrollado. La distancia aguas abajo desde la entrada hasta la posición en la cual empieza el flujo completamente desarrollado se llama la longitud de entrada fluido dinámica  $L_{ef}$ . En un flujo laminar la longitud de entrada,  $L_{ef}$ , es una función del número de Reynolds:

$$\frac{L_{ef}}{D} \approx 0.06 \frac{r\bar{V}D}{m} \quad (1.34)$$

### 1.12 VELOCIDAD MEDIA

En las aplicaciones técnica, es muy útil el concepto de velocidad media: Se la puede definir como aquel valor que tendría la velocidad si el mismo caudal que atraviesa una superficie de control dada, fuera producido por una velocidad uniforme “ $U_m$ ” perpendicular a dicha superficie, esto es:

$$\int_{(A)} \mathbf{r} U_m dA = \int \mathbf{r} \bar{u} \cdot \bar{dA} \quad (1.35)$$

Si despejamos  $U_m$  y asumimos que el fluido es de densidad constante, tenemos que:

$$U_m = \frac{\int_{(A)} \bar{u} \cdot \bar{dA}}{\int_{(A)} dA} = \frac{\dot{V}}{A} \quad (1.36)$$

Donde A es el área de sección transversal.

### 1.13 LONGITUD DE ENTRADA TÉRMICA

Si un fluido entra con un perfil uniforme de temperatura, menor que la temperatura de la superficie del conducto se transfiere calor por convección, y comenzará el desarrollo de una capa límite térmica. Hasta una longitud  $x$  para la cual se tiene que los gradientes de temperatura existen en toda la sección transversal del conducto, en este punto se dice que el flujo se desarrollo térmicamente. Para flujo laminar la longitud de entrada térmica ( $L_{et}$ ), se puede obtener a través de la siguiente expresión:

$$\frac{L_{et}}{D} \approx 0.05 \text{ Re Pr} \quad (1.37)$$

Siendo la viscosidad cinemática una difusividad para la cantidad de

movimiento lineal, y la difusividad térmica una difusividad para el calor. (la difusividad de una propiedad es la capacidad que tiene esta a esparcirse en un medio). Si el Número de Prandtl es igual a 1, se tiene que la cantidad de movimiento y el calor son difundidos en el fluido en la misma proporción, y si la velocidad y la temperatura son uniformes para la sección de entrada del conducto, se obtendrá a la vez un desarrollo térmico y fluido – dinámico. Si el Número de Prandtl es mayor que 1, la difusión de la cantidad de movimiento será mayor que la del calor, ocurriendo primero el desarrollo fluido – dinámico que el térmico y viceversa si se tiene un Número de Prandtl menor que 1 (Incropera y DeWitt).

#### 1.14 TEMPERATURA MEDIA

La temperatura media de un fluido en una sección transversal se define en términos de la energía térmica transportada por el fluido en su movimiento a través de la sección transversal. La tasa a la cual ocurre este transporte de energía  $\dot{E}_t$  puede ser obtenida multiplicando el flujo másico transversal, quedando:

$$\dot{E}_t = \int_{(A)} \rho u c_v T dA \quad (1.38)$$

Entonces la temperatura media es definida como:

$$\dot{E}_t = \dot{m} c_p T_m \quad (1.39)$$

De donde se tiene:

$$T_m = \frac{\int_{(A)} \rho u c_v T dA}{\dot{m} c_v} \quad (1.40)$$

## CAPITULO II

### MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS

El planteamiento del método consiste en dividir la región de trabajo en un número finito de volúmenes de control, de tal manera que formen una malla donde cada nodo pertenece a un volumen de control determinado. Esto se realiza con la finalidad de poder integrar las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento del flujo en cada uno de los volúmenes de control, utilizando para ello algún perfil seleccionado que exprese la variación de una función  $\phi$ , entre dos nodos consecutivos que son utilizados para evaluar la integral requerida. El resultado de este proceso es la ecuación discreta que contiene los valores de  $\phi$  para un grupo de nodos.

Este método presenta una gran ventaja ante los demás de su especie, debido a que por sus características no requiere un alto número de iteraciones para obtener la convergencia deseada, ya que en su proceso de solución satisface los principios de conservación sobre cualquier grupo de volúmenes de control, y sobre todo el dominio de cálculo (Versteeg y Malalasekera, 1995).

El método de los volúmenes finitos se realiza mediante el desarrollo de tres pasos secuenciales que son:

- 1) Generación de la malla.
- 2) Discretización de las ecuaciones.
- 3) Solución de las ecuaciones.



## 2.1 MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS BIDIMENSIONALES

Se considera el caso más simple de convección - difusión representado por la ecuación de transporte bidimensional (Versteeg y Malalasekera):

$$\frac{\partial(\mathbf{r}\mathbf{f})}{\mathbf{d}t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{r}u\mathbf{f}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{r}v\mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial y}\right) + S \quad (2.1)$$

Donde  $\phi$  es la variable a ser estudiada, S el término fuente,  $\Gamma$  es el coeficiente de difusión. Considerando flujo permanente el primer término se hace nulo. Una porción de la malla usada para la discretización se muestra en la figura 2.1.

Integrando la ecuación 2.1 sobre el volumen de control  $\Delta X\Delta Y=\Delta V$  representado en la figura 2.1, y estableciendo que el  $A_e$  (área cara este) =  $A_w$  (área cara oeste) y  $A_n$  (área cara norte) =  $A_s$  (área cara sur), obtenemos

$$\begin{aligned} & [(\mathbf{r}v\mathbf{A}\mathbf{f})_e - (\mathbf{r}v\mathbf{A}\mathbf{f})_w] + [(\mathbf{r}u\mathbf{A}\mathbf{f})_n - (\mathbf{r}u\mathbf{A}\mathbf{f})_s] = \\ & \left[ \Gamma_e A_e \left( \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial y} \right)_e - \Gamma_w A_w \left( \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial y} \right)_w \right] + \left[ \Gamma_n A_n \left( \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x} \right)_n - \Gamma_s A_s \left( \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x} \right)_s \right] + \bar{S}\Delta V \end{aligned} \quad (2.2)$$

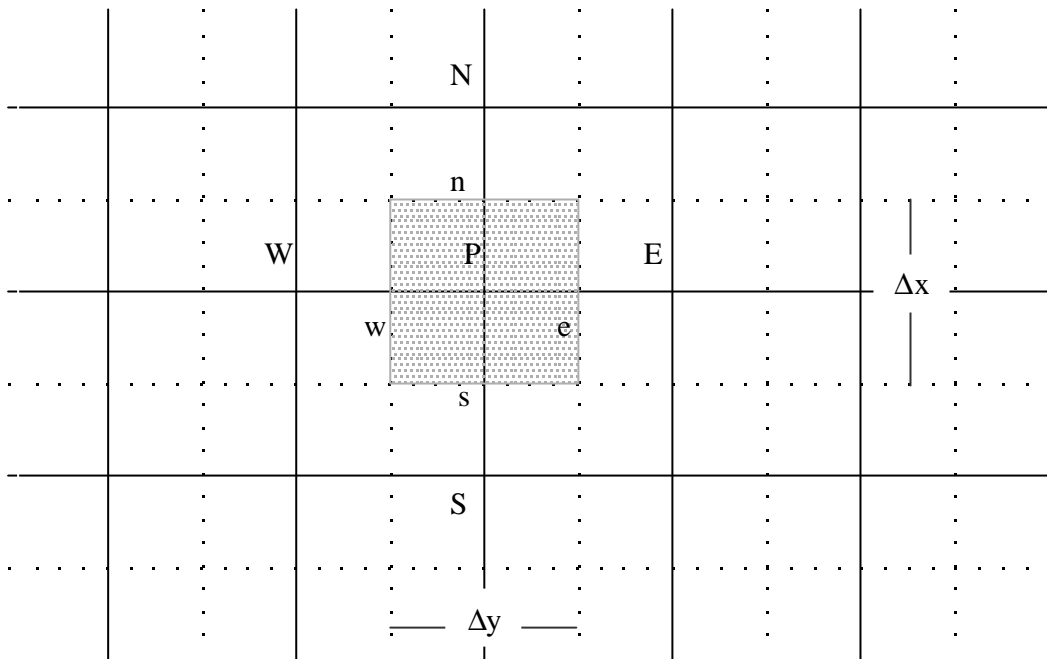
Utilizando las siguientes diferencias finitas:

$$\Gamma_w A_w \left. \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial y} \right|_w = \Gamma_w A_w \frac{(\mathbf{f}_p - \mathbf{f}_w)}{\mathbf{d}y_{wp}} \quad (2.3a)$$

$$\Gamma_e A_e \left. \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial y} \right|_e = \Gamma_e A_e \frac{(\mathbf{f}_e - \mathbf{f}_p)}{\mathbf{d}y_{pe}} \quad (2.3b)$$

$$\Gamma_s A_s \left. \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x} \right|_s = \Gamma_s A_s \frac{(\mathbf{f}_p - \mathbf{f}_s)}{\mathbf{d}x_{sp}} \quad (2.3c)$$

$$\Gamma_n A_n \left. \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial x} \right|_n = \Gamma_n A_n \frac{(\mathbf{f}_n - \mathbf{f}_p)}{\mathbf{d}x_{pn}} \quad (2.3d)$$



**Figura 2.1** Parte de la malla bidimensional

Es conveniente definir dos variables  $F$  y  $D$  para representar el flujo convectivo por unidad de área y la difusión conducida por las caras de la celda, así se puede escribir:

$$F = \mathbf{r}u \quad F = \mathbf{r}v \quad (2.4a)$$

$$D = \frac{\Gamma}{dx} \quad D = \frac{\Gamma}{dy} \quad (2.4b)$$

De manera que para cada cara de la celda en el volumen de control se puede decir:

$$F^w = (\mathbf{r}v)^w \quad F^e = (\mathbf{r}v)^e \quad F^s = (\mathbf{r}u)^s \quad F^n = (\mathbf{r}u)^n \quad (2.5a)$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{dy_{WP}} \quad D_e = \frac{\Gamma_e}{dy_{PE}} \quad D_s = \frac{\Gamma_s}{dx_{SP}} \quad D_n = \frac{\Gamma_n}{dx_{PN}} \quad (2.5b)$$

Asumiendo que  $A_w = A_e = A_s = A_n = A$  y linealizando el término fuente como  $\bar{S}\Delta V = S_u + S_p\phi_P$ , se puede re escribir la ecuación 2.1 como:

$$\begin{aligned} F_e \mathbf{f}_e - F_w \mathbf{f}_w + F_n \mathbf{f}_n - F_s \mathbf{f}_s = \\ D_e (\mathbf{f}_E - \mathbf{f}_P) - D_w (\mathbf{f}_P - \mathbf{f}_W) + D_n (\mathbf{f}_N - \mathbf{f}_P) - D_s (\mathbf{f}_P - \mathbf{f}_S) + S_U + S_P \mathbf{f}_P \end{aligned} \quad (2.6)$$

Para terminar de discretizar la ecuación 2.6, el método de volúmenes finitos presenta diferentes maneras de lograrlo, estos se presentan a continuación:

- Esquema de Diferencias Centradas (the central differencing scheme)
- Esquema de Diferencias Corriente Arriba (the upwind differencing scheme)
- Esquema de Diferencias Híbridas (the hybrid differencing scheme)
- Esquema de Ley de Potencia (the power law scheme)

## 2.2 DIFERENCIAS CENTRADAS

El esquema de discretización “Diferencias Centradas” se basa en la suposición de perfiles lineales de variación de  $\phi$  entre dos nodos consecutivos, tanto para el término difusivo, como para el conectivo.

Así para la malla podemos escribir que el valor de la propiedad es:

$$\mathbf{f}_e = \frac{(\mathbf{f}_P + \mathbf{f}_E)}{2} \quad (2.7a)$$

$$\mathbf{f}_w = \frac{(\mathbf{f}_W + \mathbf{f}_P)}{2} \quad (2.7b)$$

$$\mathbf{f}_n = \frac{(\mathbf{f}_P + \mathbf{f}_N)}{2} \quad (2.7c)$$

$$\mathbf{f}_s = \frac{(\mathbf{f}_S + \mathbf{f}_P)}{2} \quad (2.7d)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 2.6 nos queda:

$$\begin{aligned} \frac{F_e}{2}(\mathbf{f}_P + \mathbf{f}_E) - \frac{F_w}{2}(\mathbf{f}_W + \mathbf{f}_P) + \frac{F_n}{2}(\mathbf{f}_P + \mathbf{f}_N) - \frac{F_s}{2}(\mathbf{f}_S + \mathbf{f}_P) = \\ D_e(\mathbf{f}_E - \mathbf{f}_P) - D_w(\mathbf{f}_P - \mathbf{f}_W) + D_n(\mathbf{f}_N - \mathbf{f}_P) - D_s(\mathbf{f}_P - \mathbf{f}_S) + S_U + S_P \mathbf{f}_P \end{aligned} \quad (2.8)$$

Reorganizando esta ecuación e identificando los coeficientes  $a_P$ ,  $a_W$ ,  $a_E$ ,  $a_S$  y  $a_N$ :

$$a_P \mathbf{f}_P = a_W \mathbf{f}_W + a_E \mathbf{f}_E + a_S \mathbf{f}_S + a_N \mathbf{f}_N + S_u \quad (2.9)$$

$a_W$	$a_E$	$a_S$	$a_N$	$a_P$
$D_w + F_w/2$	$D_e - F_e/2$	$D_s + F_s/2$	$D_n - F_n/2$	$a_W + a_E + a_S + a_N + (F_e - F_w + F_n - F_s) - S_P$

**Tabla 2.1** Coeficientes para el método de "Diferencias Centradas".

### 2.3 DIFERENCIAS CORRIENTE ARRIBA

Uno de los inconvenientes del método anterior es la incapacidad de identificar la dirección del flujo, en este método la formulación del término difusivo es similar al esquema de "Diferencias Centradas", pero el término convectivo es calculado tomando en cuenta la dirección del flujo, así por ejemplo si la corriente se dirige de oeste (w) a este (e),  $u_w > 0$ ,  $u_e > 0$  ( $F_w > 0$ ,  $F_e > 0$ ), consecuentemente diremos que el flujo tiene una dirección de sur (s) a norte (n),  $u_s > 0$ ,  $u_n > 0$  ( $F_s > 0$ ,  $F_n > 0$ ), se tiene que:

$$\phi_w = \phi_W, \phi_e = \phi_E, \phi_s = \phi_S \text{ y } \phi_n = \phi_N \quad (2.10)$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación 2.6:

$$F_e \mathbf{f}_P - F_w \mathbf{f}_w + F_n \mathbf{f}_P - F_s \mathbf{f}_s = D_e(\mathbf{f}_E - \mathbf{f}_P) - D_w(\mathbf{f}_P - \mathbf{f}_W) + D_n(\mathbf{f}_N - \mathbf{f}_P) - D_s(\mathbf{f}_P - \mathbf{f}_S) + S_U + S_P \mathbf{f}_P \quad (2.11)$$

Esta puede ser arreglada como:

$$\begin{aligned} & [(D_w + F_w) + D_e + (F_e - F_w) + (D_s + F_s) + D_n + (F_n - F_s) + S_p] f_p = \\ & (D_w + F_w) f_w + (D_s + F_s) f_s + D_e f_e + D_n f_n + S_u \end{aligned} \quad (2.12)$$

Similarmente se puede desarrollar la ecuación para un flujo en dirección negativa. Los términos  $a_p$ ,  $a_w$ ,  $a_e$ ,  $a_s$  y  $a_n$  se describen a continuación para flujo en dirección positiva y negativa.

$a_w$	$a_e$	$a_s$	$a_n$	$a_p$
$D_w + \max(F_w, 0)$	$D_e + \max(F_e, 0)$	$D_s + \max(F_s, 0)$	$D_n + \max(F_n, 0)$	$a_w + a_e + a_s + a_n + (F_e - F_w + F_n - F_s) - S_p$

**Tabla 2.2** Coeficientes para el método "Diferencias Corriente Arriba".

## 2.4 DIFERENCIAS HÍBRIDAS

Este método esta basado en una combinación de los esquemas de "Diferencias Centradas" y "Corriente Arriba". Según Versteeg y Malalasekera (1995) el esquema "Diferencias Centradas" es exacto en segundo orden, por ello es empleado para los números de Peclet pequeños ( $Pe < 2$ ) y el esquema de "Corriente Arriba", que es exacto en primer orden es empleado para los números de Peclet grandes ( $Pe \geq 2$ ). El número de Peclet se evalúa a la cara del volumen del control, por ejemplo, para una cara oeste:

$$Pe_w = \frac{F_w}{D_w} = \frac{(n)_w}{\Gamma_w / \Delta x_{WP}} \quad (2.13)$$

La fórmula en “Diferencias Híbridas” para el flujo de calor neto por unidad de área para la cara oeste es:

$$q_w = F_w \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{Pe_w} \right) f_w + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{Pe_w} \right) f_p \right] \quad -2 < Pe_w < 2 \quad (2.14a)$$

$$q_w = F_w A_w f_w \quad Pe_w \geq 2 \quad (2.14b)$$

$$q_w = F_w A_w f_p \quad Pe_w \leq -2 \quad (2.14c)$$

Puede verse fácilmente que para un Número de Peclet bajo, el método es equivalente a usar “Diferencias Centradas”, pero cuando  $|Pe| > 2$  es equivalente al método “Corriente Arriba”. La forma general de la ecuación discretizada es la misma ecuación 2.9, y los coeficientes  $a_p$ ,  $a_w$ ,  $a_E$ ,  $a_S$  y  $a_N$  quedan definidos como:

$a_w$	$a_E$	$a_S$	$a_N$	$a_p$
$\text{Max}(F_w, D_w + F_w/2, 0)$	$\text{Max}(-F_e, D_e - F_e/2, 0)$	$\text{Max}(F_s, D_s + F_s/2, 0)$	$\text{Max}(-F_n, D_n - F_n/2, 0)$	$a_w + a_E + a_S + a_N + (F_e - F_w + F_n - F_s) - S_p$

**Tabla 2.3** Coeficientes para el método de "Diferencias Híbridas"

## 2.5 LEY DE POTENCIA

Este método conduce a una aproximación más exacta de la solución y produce mejores resultados que el esquema híbrido. En éste, la difusión es cero cuando el Pe excede 10. Si el Número de Peclet trabaja en los valores de  $0 < Pe < 10$  el flujo es evaluado usando una expresión polinómica; por ejemplo: Se evalúa la tasa de flujo neto por unidad de área en la cara oeste del volumen de control, utilizando la ecuación:

$$q_w = F_w \left[ \mathbf{f}_w - \frac{(1-0.1Pe_w)^5}{Pe_w} (\mathbf{f}_p - \mathbf{f}_w) \right] \text{ Para } 0 < Pe < 10 \quad (2.15a)$$

$$q_w = F_w \mathbf{f}_w \quad \text{Para } Pe > 10 \quad (2.15b)$$

Quedando finalmente que la ecuación discretizada es la ecuación 2.9 con los coeficientes  $a_p$ ,  $a_w$ ,  $a_E$ ,  $a_S$  y  $a_N$  descritos a continuación.

$a_w$	$a_E$	$a_S$	$a_N$	$a_p$
$D_w \text{Max}[0, (1-0.1  Pe_w )^5]$ +max[ $F_w, 0$ ]	$D_e \text{Max}[0, (1-0.1  Pe_e )^5]$ +max[ $-F_e, 0$ ]	$D_s \text{Max}[0, (1-0.1  Pe_s )^5]$ +max[ $F_s, 0$ ]	$D_n \text{Max}[0, (1-0.1  Pe_n )^5]$ +max[ $-F_n, 0$ ]	$a_w + a_E + a_S + a_N + F_e - F_w + F_n - F_s - S_p$

**Tabla 2.4** Coeficientes para el método de "Ley de Potencia".

Este último método presenta mejores resultados en los problemas unidimensionales que el método de diferencias híbridas (Patankar 1980), por consiguiente en problemas de flujo bidimensional las mejoras de este método no son evidentes, de tal manera que para la solución del problema planteado se utiliza el método de diferencias híbridas.

## 2.6 CUADRO RESUMEN

En este punto se estudiará la formulación de las ecuaciones discretizadas para los problemas de convección - difusión. La elección de las expresiones adecuadas para los valores de la propiedad  $\phi$  en la malla utilizada es muy importante. Todos los esquemas finitos presentados en este capítulo describen los efectos simultáneos de la convección y difusión a través de los valores del flujo por unidad de área  $F$  y la conductancia difusiva  $D$ .

Así finalmente se puede decir que todos los esquemas del método de volúmenes finitos en flujo bidimensional permanente se rigen bajo la ecuación discretizada:

$$a_p f_p = a_w f_w + a_e f_e + a_s f_s + a_n f_n + S_u \quad (2.16)$$

Donde el término  $a_p$  viene dado por:

$$a_p = a_w + a_e + a_s + a_n + (F_e - F_w + F_n - F_s) - S_u \quad (2.17)$$

De la ecuación 2.17 se desprecian los valores  $F_e$ ,  $F_w$ ,  $F_n$  y  $F_s$  ya que llegada la convergencia del método la sumatoria de estos valores será igual a cero. Los valores de los coeficientes  $a_w$ ,  $a_e$ ,  $a_s$  y  $a_n$  para cada uno de los esquemas presentados anteriormente se concentran en la tabla 2.5.

Método	$a_w$	$a_e$	$a_s$	$a_n$
Diferencias Centradas	$D_w + F_w/2$	$D_e - F_e/2$	$D_s + F_s/2$	$D_n - F_n/2$
Diferencias Corriente Arriba	$D_w + \max(F_w, 0)$	$D_e + \max(F_e, 0)$	$D_s + \max(F_s, 0)$	$D_n + \max(F_n, 0)$
Diferencias Híbridas	$\max(F_w, D_w + F_w/2, 0)$	$\max(-F_e, D_e - F_e/2, 0)$	$\max(F_s, D_s + F_s/2, 0)$	$\max(-F_n, D_n - F_n/2, 0)$
Ley de Potencia	$D_w \max[0, (1 - 0.1  Pe_w )^5] + \max[F_w, 0]$	$D_e \max[0, (1 - 0.1  Pe_e )^5] + \max[-F_e, 0]$	$D_s \max[0, (1 - 0.1  Pe_s )^5] + \max[F_s, 0]$	$D_n \max[0, (1 - 0.1  Pe_n )^5] + \max[-F_n, 0]$

**Tabla 2.5** Cuadro Resumen de los Métodos.



## 2.7 ECUACIONES DISCRETIZADAS

Primero se presentan las ecuaciones de conservación que determinan el fenómeno a estudiar. Para ello en el Capítulo I se desarrolla la formulación de las ecuaciones de continuidad, de cantidad de movimiento y de energía para flujo laminar - bidimensional en estado permanente, entre placas paralelas verticales. Estas ecuaciones se discretizarán para transformarlas en ecuaciones algebraicas, teniendo así que las ecuaciones que rigen el fenómeno en estudio son:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial(\mathbf{r}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\mathbf{r}v)}{\partial y} = 0 \quad (2.18)$$

Cantidad de movimiento en “x”:

$$\mathbf{r}u \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{r}v \frac{\partial u}{\partial y} = g\mathbf{r}b(T - T_{\infty}) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathbf{m} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mathbf{m} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.19)$$

Ecuación de energía:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \mathbf{a} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] \quad (2.20)$$

Estas ecuaciones de conservación se pueden escribir como una ecuación diferencial general, de la siguiente forma:

$$\left( \vec{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{f} = \Gamma_f \nabla^2 \mathbf{f} + S_f \quad (2.21)$$

Una presentación preliminar de las ecuaciones discretizadas se muestra a continuación (Estas se explicarán a fondo en el Capítulo IV) para conformar el algoritmo de solución, así se describen las ecuaciones 2.18, 2.19 y 2.20 como :

$$a_P v_P = a_W v_W + a_E v_E + TF \quad (2.22)$$

$$a_P u_P = a_W u_W + a_E u_E + a_S u_S + a_N u_N + S_u \quad (2.23)$$

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + a_S T_S + a_N T_N \quad (2.24)$$

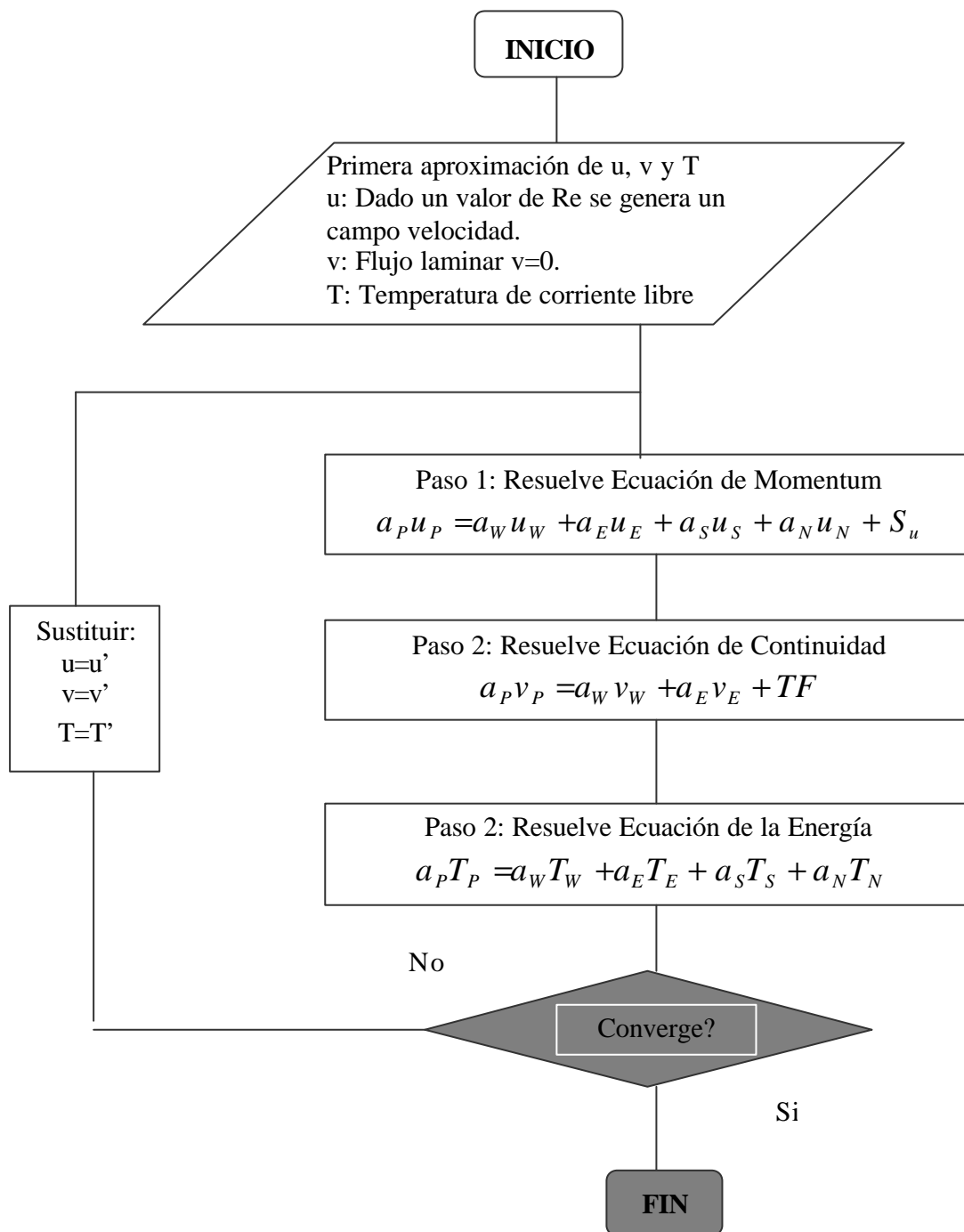
Conocidas las ecuaciones discretizadas, se desarrolla el algoritmo de solución de las mismas.

## 2.8 CONFORMACIÓN DEL ALGORITMO GENERAL DE CÁLCULO

El término convectivo de una variable escalar  $\phi$  estudiada en cada ecuación, depende de la magnitud del campo local de velocidad. Hasta el momento en el desarrollo del método se ha supuesto conocido. Pero en la mayoría de los casos prácticos este no lo es, por ello se hace necesario la adaptación de un algoritmo de solución que permita establecerlo. Así se presenta un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, las cuales son: la velocidad  $u$ , la velocidad  $v$  y la temperatura  $T$ .

Para otros estudios en la unidad docente de transferencia de calor, se han implantado algoritmos como el SIMPLE (“Semi-Implicit Method for Pressure - Linked”) que fue originalmente elaborado por Patankar (1980) y se basa en un procedimiento de suposición y corrección. Luego modificado en 1980 por el mismo Patankar y llamado como algoritmo SIMPLER.

Basado en las experiencias y algoritmos mencionados anteriormente, se desarrolla a partir de estos un algoritmo adecuado a la solución del problema en estudio, este se representa en la figura 2.2.



**Figura 2.2** Algoritmo General de Cálculo.

Comienza su lazo iterativo con valores iniciales en los campos de velocidades y temperaturas, esta primera aproximación se elige arbitrariamente, tomando en cuenta que mientras mejor sean estos valores, menos serán las iteraciones necesarias para la convergencia de la solución.

## 2.9 RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DISCRETAS

Al aplicar el algoritmo de solución se tiene que tomar en cuenta que por cada expresión de los pasos 2 al 3 (descritos al principio de este capítulo) se genera un sistema lineal de ecuaciones.

Las técnicas directas son métodos que proporcionan una respuesta en un número fijo de pasos, sujeta solamente a errores de redondeo. La complejidad y tamaño de este sistema de ecuaciones dependerá de la dimensión del problema, el número de nodos de la malla y del esquema de discretización utilizado. Aunque cualquier método es válido para resolver las ecuaciones discretas, los recursos computacionales disponibles imponen una limitante exigente. Los métodos de solución directa más usados son: La regla de Cramer de inversión de matrices y la eliminación Gaussiana. El número de operaciones requeridas para resolver un sistema de  $N$  ecuaciones y  $N$  incógnitas utilizando un método directo puede determinarse de antemano y es del orden de  $N^3$ .

Cuando en las ecuaciones que conforman el sistema, existe una gran cantidad de valores ceros, es decir, que conforman una matriz esparcida, el método más apropiado para resolver sistemas lineales grandes es el de técnicas iterativas, en vez de directas. Los métodos iterativos están basados en la repetición de un algoritmo relativamente sencillo buscando la convergencia, luego de un número de repeticiones. Las operaciones requeridas por los métodos iterativos son de  $N$  operaciones por ciclo

de iteración, por lo cual no se puede determinar de antemano.

Además la convergencia depende del cumplimiento de ciertas características del sistema de ecuaciones según el método utilizado. Pero la utilización de métodos iterativos para sistemas de ecuaciones por encima de 100.000 o 1 millón de ecuaciones es más económico que el uso de un método directo (Versteeg y Malalasekera, 1995). Los métodos indirectos más conocidos son el de Jacobi y el de Gauss-Seidel. Estos son de fácil implementación en códigos computacionales, pero la convergencia del sistema de ecuaciones puede ser lenta si el sistema de ecuaciones es muy grande.

Luego del reconocimiento de las técnicas directas e indirectas, se concluye que el método que se adapta y favorece a las características de nuestro problema es el algoritmo de Thomas (1949) que se explica a continuación.

## 2.10 ALGORITMO DE SOLUCIÓN DE SISTEMAS TRIDIAGONALES

Esta técnica para resolver rápidamente sistemas tridiagonales de ecuaciones fue desarrollada por Thomas en 1949, es también conocida como “TMA”, del inglés “Tri – Diagonal matrix Algoritm”. Este método es en realidad un método directo para solución de sistemas de ecuaciones en una dimensión, pero puede ser aplicado iterativamente para resolver sistemas bidimensionales.

Considérese un sistema de ecuaciones tridiagonal de la forma:

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= C_1 \\
 -\beta_2\phi_1 + D_2\phi_2 - \alpha_2\phi_3 &= C_2 \\
 -\beta_3\phi_2 + D_3\phi_3 - \alpha_3\phi_4 &= C_3 \\
 -\beta_4\phi_3 + D_4\phi_4 - \alpha_4\phi_5 &= C_4
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

Donde los valores de  $\phi_1$  y de  $\phi_{n+1}$  son los valores de las condiciones de contorno, es decir, son conocidos.

Este tipo de sistemas de ecuaciones puede ser resuelto por una eliminación hacia delante con una posterior sustitución hacia atrás. Luego de la sustitución hacia delante queda:

$$\mathbf{f}_j = A_j \mathbf{f}_{j+1} + C_j \quad (2.26)$$

En la cual:

$$A_j = \frac{a_j}{D_j - \mathbf{b}_j A_{j-1}} \quad (2.27)$$

$$C'_j = \frac{\mathbf{b}_j C'_{j+1} + C_j}{D_j - \mathbf{b}_j A_{j-1}} \quad (2.28)$$

Y la sustitución hacia atrás resuelve estas ecuaciones comenzando por los puntos frontera  $j=1$  y  $j=n+1$ , para los cuales

$$A_1 = 0 \quad \text{y} \quad C'_1 = \phi_1; \quad A_{n+1} = 0 \quad \text{y} \quad C'_{n+1} = \phi_{n+1}$$

Como el valor de  $\phi$  es conocido en el contorno (n+1), los valores de  $\phi_j$  pueden ser obtenidos en orden inverso ( $\phi_n, \phi_{n-1}, \phi_{n-2}, \dots, \phi_2$ ) por medio de la ecuación 2.26.

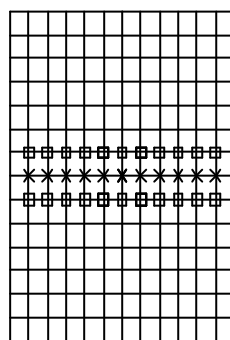
El algoritmo de Thomas puede ser aplicado iterativamente para resolver sistemas de ecuaciones de dos dimensiones. Considerando la malla de la figura 2.3 y la ecuación general de transporte para dos dimensiones la cual tiene la forma:

$$a_P \mathbf{f}_P = a_W \mathbf{f}_W + a_E \mathbf{f}_E + a_S \mathbf{f}_S + a_N \mathbf{f}_N + S_u \quad (2.29)$$

Para aplicar el algoritmo de Thomas a lo largo de la sección, por ejemplo las líneas (norte – sur) la ecuación 2.29 es re ordenada de la siguiente manera:

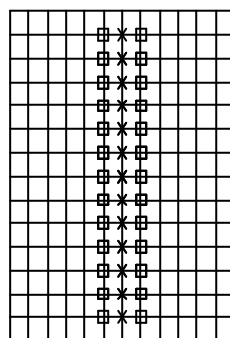
$$-\alpha^2 \phi^2 + \alpha^b \phi^b - \alpha^N \phi^N = \alpha^A \phi^A + \alpha^E \phi^E + Z^n \tag{2.30}$$

Los términos de la derecha de la ecuación 2.30 se asumen temporalmente conocidos. Siendo éstos de la forma de las ecuaciones 2.25. Donde  $\alpha_j \equiv a_N$ ,  $\beta_j \equiv a_S$ ,  $D_j \equiv a_P$ , y  $C_j \equiv a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u$ . Ahora se puede resolver el sistema en la dirección norte – sur, variando j desde 1 hasta n. Como muestra la figura 2.3, en donde todos los valores en los nodos del contorno son conocidos por las condiciones de frontera.



Barrido Horizontal de W a E (oeste a este)

- Supuestos temporalmente conocidos.  
 $a_N$  y  $a_S$
- x Valores a calcular  
 $a_P$ .



Barrido Vertical de S a N (sur a norte)

- Supuestos temporalmente conocidos  
 $a_E$  y  $a_W$ .
- x Valores a calcular  
 $a_P$ .

**Figura 2.3** Secuencias de Barridos

Seguidamente se pasa a la siguiente línea norte – sur. La secuencia bajo la cual las líneas son seleccionadas se conoce como dirección de barrido. Si se realiza un barrido Este – Oeste los valores al oeste del punto P ( $\phi_W$ ) son conocidos de los cálculos de la línea previa. Pero los valores al este de P ( $\phi_E$ ) no son conocidos, lo que nos dice que el proceso de solución debe ser iterativo. En cada ciclo de iteración, se obtiene el valor de  $\phi_E$  con el valor inicial supuesto. Así se realizará el proceso de barrido hasta obtener la convergencia de la solución.

En problemas bidimensionales, aplicar el algoritmo de la matriz tridiagonal utilizando barridos en una sola dirección, puede provocar que la extensión de la información del contorno en el dominio de cálculo y la convergencia de la solución sean lentas, y dependientes de la dirección del flujo, teniéndose que un barrido de dirección corriente arriba o corriente abajo, obtendrá una convergencia mucho más rápida que un barrido paralelo a la dirección del flujo. Por lo que la ejecución de barridos alternos en la malla del dominio de cálculo puede aliviar los problemas de convergencia. Esto quiere decir que cada ciclo iterativo estará compuesto por barridos en la dirección de las distintas coordenadas, en el caso bisimensional se tendrán dos barridos uno de dirección norte – sur y otro este – oeste.



## CAPITULO III

### MODELO MATEMÁTICO

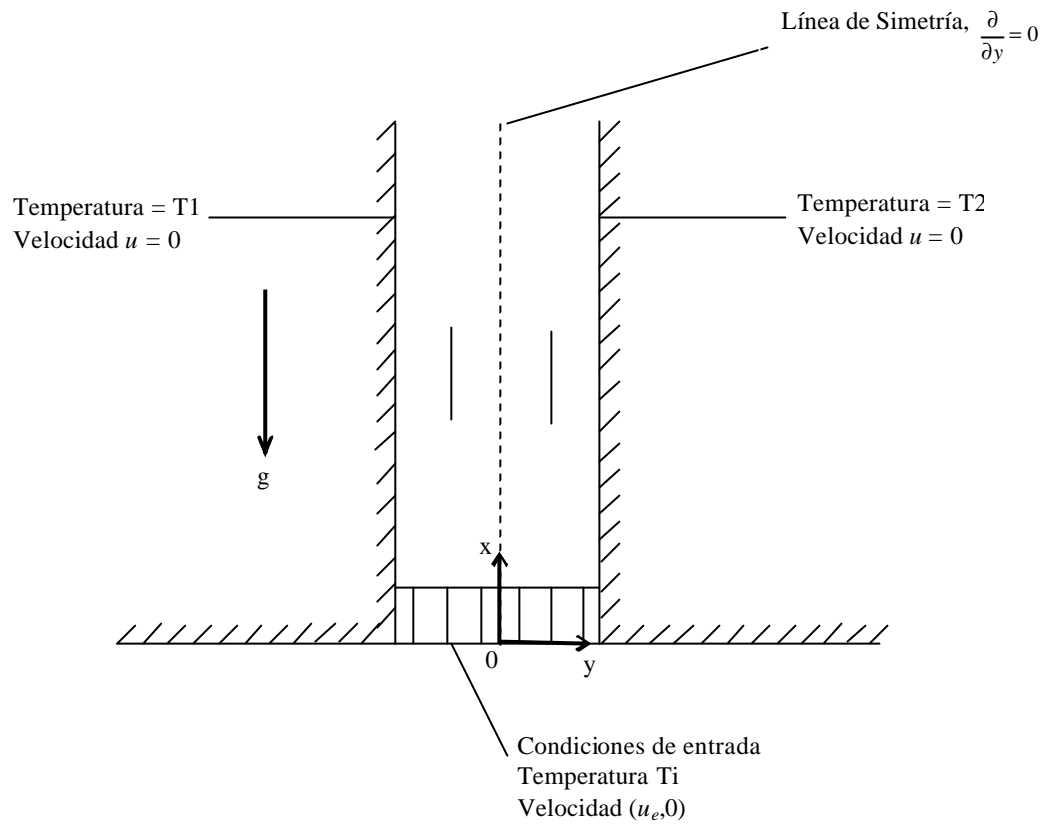
La situación considerada contempla el flujo de un fluido en régimen laminar, el cual se somete a transferencia de calor por convección mixta, con velocidad  $(u,v)$  entre dos placas verticales y paralelas en el dominio  $0=x=L$ ,  $0=y=b$  como se ilustra en la figura 3.1.

En el modelo del fluido se supone una temperatura de entrada  $T_i$  uniforme, teniendo que en esta sección del conducto, es decir en  $x=0$  y el intervalo  $0=y=b$  la velocidad se expresa como  $(u_e,0)$ . Las paredes del conducto están, cada una, a temperaturas uniformes  $T_1$  y  $T_2$ , las cuales pueden o no ser iguales, para que puedan estudiarse los efectos de la convección natural sobre la convección forzada.

La aceleración de gravedad  $g$  actúa verticalmente hacia abajo. Se considera que el fluido es Newtoniano, con propiedades constantes a excepción de la densidad.

Las consideraciones establecidas en el desarrollo de este trabajo tienen por finalidad simplificar, en cuanto sea posible, el modelo matemático aquí usado, aunque la inclusión de variaciones en algunas propiedades físicas no debe en teoría ser difícil de introducir en el análisis numérico siguiente.

La configuración geométrica y el sistema de coordenadas a utilizar para el desarrollo del modelo matemático para convección laminar entre placas paralelas se muestra en la figura 3.1.



**Figura 3.1** Vista esquemática de la configuración geométrica

Para el flujo considerado se tiene que todos los términos  $\delta/\delta z$  son nulos, por lo que la descripción del fenómeno se puede realizar de forma bidimensional. En conclusión la orientación del conducto será completamente vertical, este tendrá una longitud ( $L$ ) y una separación entre placas ( $b$ ).

### 3.1 SISTEMA DE ECUACIONES DE CONSERVACIÓN

El modelo matemático desarrollado se obtiene aplicando los principios de conservación de masa, cantidad de movimiento lineal, energía y las leyes adecuadas

que rigen el fenómeno físico de la convección, particularizado para el flujo laminar entre placas paralelas verticales.

El desarrollo del modelo matemático se realiza en coordenadas cartesianas y bajo las siguientes consideraciones:

- Flujo laminar en estado permanente.
- No existen fuentes internas de calor.
- Fluido Newtoniano.
- Se desprecia la disipación viscosa en calor frente a otras tasas de flujo de calor.

Por lo que las ecuaciones de conservación antes mencionados se pueden escribir como:

Ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

Ecuación de cantidad de movimiento en x.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.2)$$

Ecuación de energía.

$$\rho \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \rho c_p \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.3)$$

La ecuación de cantidad de movimiento en y no aporta a la solución del problema pues la derivada de la presión en esa dirección es nula.

### 3.2 CONDICIONES DE CONTORNO

El sistema consiste en dos placas verticales y paralelas, las cuales poseen la condición de no-deslizamiento y cada una de ellas su propia temperatura prescrita.

<b>y = 0</b>	<b>y = b</b>
$u(x,0) = 0$	$u(x,b) = 0$
$v(x,0)=0$	$V(x,b)=0$
$T(x,0)=TW$	$T(x,b)=TE$

**Tabla 3.1** Condiciones en las paredes.

El flujo en la entrada posee un perfil de velocidad uniforme perpendicular al plano yz. Y la temperatura posee un perfil de temperatura uniforme para toda la sección de entrada.

<b>x=0</b>	$u(0,y)=UCL$	$v(0,y)=0$	$T(0,y)=TCL$
------------	--------------	------------	--------------

**Tabla 3.2** Condiciones a la entrada.

Para la sección de salida se supone un flujo fluido dinámicamente desarrollado en el cual exigiremos una condición espejo, lo cual implica que se comprobara que al llegar a la convergencia la temperatura en tres nodos consecutivos será la misma.

<b>Para x=L</b>	$\partial u/\partial x=0$	$v(L,y)=0$	$T(L,y)=Ty$
-----------------	---------------------------	------------	-------------

**Tabla 3.3** Condiciones a la salida

### 3.3 SOLUCIÓN SEMIEMPIRICA DEL MODELO MATEMÁTICO

En régimen laminar totalmente desarrollado, el flujo bidimensional entre dos Placas paralelas, como el mostrado en la figura 3.1 una la caída de presión que viene dada por (Rohsenow y Choi, 1961.)

$$\left. \frac{dP}{dx} \right|_{Pérdida} = -12 \frac{\dot{m}}{rb^3} \quad (3.4)$$

En convección libre, la resistencia del flujo es balanceada por el potencial flotante expresado como por (Rohsenow y Choi, 1961):

$$\left. \frac{dP}{dx} \right| = (\bar{r} - r_i) g = -\bar{r} b g (\bar{T} - T_i) \quad (3.5)$$

Igualando las ecuaciones 3.4 y 3.5, el de flujo de masa por unidad de ancho (w) en el canal es:

$$\dot{m} = \bar{r}^2 g \beta b^3 (\bar{T} - T_i) / 12 m \quad (3.6)$$

Un balance de energía en el volumen diferencial, mostrado en la figura 3.1, se produce igualando el calor transferido de dos paredes isotérmicas con el calor absorbido por el flujo, así:

$$\dot{m} c_p dT = 2h(T_w - T) dx \quad (3.7)$$

Por consideraciones de continuidad, la tasa de flujo de masa ( $\dot{m}$ ) es constante, y en un flujo totalmente desarrollado con propiedades independientes de la temperatura, como son el coeficiente de transferencia de calor (h) así como el calor específico (cp) son constantes. Consecuentemente,  $w cp / 2h$  pueden ser considerados constantes a lo largo del canal, y la ecuación 3.7 puede ser integrada, teniendo que la variación de temperatura viene expresada como:

$$T_f = T_m^\circ - (T_m^\circ - T_o) e^{-\Gamma x} \quad (3.8)$$

Donde G es reemplazado por  $2h/w$  cp.

Con la intención de obtener una expresión para el número de Nusselt basado en la diferencia de temperaturas entre la pared y el fluido,  $Nu_b$  pueden definirse como

$$Nu_i = \left[ \frac{q/A}{T_m^\circ - T_i} \right] \frac{b}{k} \quad (3.9)$$

La tasa de flujo de calor (q) puede determinarse por el flujo de masa y el incremento de temperatura en el canal con el uso de las ecuaciones 3.6 y 3.8, evaluando posteriormente en  $x=L$  para encontrar la temperatura de la salida. La temperatura media del fluido en el canal puede ser encontrada integrando la ecuación 3.5 en el intervalo de  $x=0$  a  $x=L$  y dividiendo entre la longitud del canal (L), siguiendo estas operaciones queda:

$$q = \left[ \frac{c_p \bar{r}^2 g b b^3 S}{12m} (T_m^\circ - T_i) \left( 1 - \frac{1 - e^{-\Gamma L}}{\Gamma L} \right) \right] \left[ (T_m^\circ - T_i) (1 - e^{-\Gamma L}) \right] \quad (3.10)$$

Insertando la ecuación 3.10 en la 3.9 y teniendo que el área de superficie (A) es igual  $2LS$ , así el Número de Nusselt queda como:

$$Nu_i = \frac{1}{24} \left[ \frac{c_p \bar{r}^2 g b b^4 (T_m^\circ - T_i)}{mkL} \right] \left[ \left( 1 - \frac{1 - e^{-\Gamma L}}{\Gamma L} \right) (1 - e^{-\Gamma L}) \right] \quad (3.11)$$

La combinación de parámetros que aparecen en el primer término del corchete de la ecuación 3.11 es reconocida como el número de Rayleigh en el canal, es decir,  $Ra_{b/L} = Ra'$ . Por consiguiente, cerca del límite donde el fluido está totalmente desarrollado,  $L \gg 8$ , el segundo término en la ecuación 3.11 es aproximadamente uno (1) así el  $Nu_0$  es aproximadamente  $Ra'/24$ . Este resultado está de acuerdo exactamente con los resultados analíticos y numéricos previamente citados (Elebaas, 1942; Bodoia y Osterle, 1964; Aung, 1972)

En un canal formado por dos placas con flujo de calor constante, la temperatura del fluido aumenta linealmente a lo largo del canal y ecuación 3.5 puede reemplazarse por:

$$T = T_i + 2q''x / mc_p \quad (3.12)$$

Subsecuentemente, en muchas aplicaciones electrónicas, la máxima temperatura en la pared del canal es de importancia crítica, es deseable definir el número de Nusselt para esta configuración, así

$$Nu_i = \left[ \frac{q''}{T_o - T_i} \right] \frac{b}{k} \quad (3.13)$$

De las consideraciones básicas de transferencia de calor y la ecuación 3.12, definimos la diferencia de temperatura como:

$$T_o - T_L = (T_o - T) + (T - T_i) = q'' \left( \frac{1}{h} + \frac{2L}{mc_p} \right) \quad (3.14)$$

Usando la ecuación 3.12 para encontrar la temperatura máxima promedio en el canal y combinando las ecuaciones 3.6, 3.13 y 3.14, produce la suposición de flujo bidimensional.

$$Nu_i = \left[ \frac{1}{h} + \frac{2L}{c_p \sqrt{\bar{r}^2 g b b^3 q'' L / 12 m c_p}} \right]^{-1} \frac{b}{k} \quad (3.15)$$

Manipulando algebraicamente la ecuación queda:

$$Nu_i = \left[ \frac{k}{bh} + 6.93 \sqrt{\frac{m L k^2}{\bar{r}^2 g b^5 q'' c_p}} \right]^{-1} \quad (3.16)$$

La combinación de parámetros bajo la raíz cuadrada en la ecuación 3.16 es el inverso del número de Rayleigh modificado en el canal, es decir,  $Ra * b/L = Ra'$ . Para grandes valores de L y pequeños valores de b, apropiados para el flujo completamente desarrollado, el primer término de la ecuación 3.16 es despreciable, relativamente a la raíz cuadrada, así la expresión anterior queda:

$$Nu_o = \sqrt{Ra'' / 48} = 0.144 \sqrt{Ra''} \quad (3.17)$$

Este resultado es idéntico al obtenido en estudios previos (Aung, 1972) para también aplicar a varias proporciones de superficie del flujo de calor,  $q1''/q2''$ , donde  $Ra''$  es basado en el promedio del valor de  $q''$ .

Frecuentemente en estudios experimentales, el  $Nu_b$  se define en términos del valor medio más alto (o aproximadamente el promedio) de la temperatura de la pared, el desarrollo arriba expuesto produce:

$$Nu_o = \left[ \frac{q''}{T_{w, L/2} - T_o} \right] \frac{b}{k} = \sqrt{Ra'' / 12} = 0.289 \sqrt{Ra''} \quad (3.18)$$



Cuando una función varía entre dos expresiones límites que están bien definidas, y cuando las soluciones para los valores intermedios de la función son difíciles de obtener o involucran otras funciones tabuladas, se puede obtener una aproximación de la relación por la sumatoria apropiada de expresiones límites, Churchill y Usagi (1972) han sugerido que la superposición lineal frecuentemente empleada es vista como un caso especial de una suma más general de la forma:

$$Nu_i = \sqrt{Ra''/24} = 0.204\sqrt{Ra''} \quad (3.19)$$

donde:

$$Nu_i = \sqrt{Ra''/6} = 0.41\sqrt{Ra''} \quad (3.20)$$

En problemas de convección natural bajo las consideraciones aquí presentadas, la variación de  $Nu_0$  toma la forma de  $C_1Ra'$  o  $C_2 v(Ra'')$  para los valores pequeños del número de Rayleigh y para el caso contrario:

$$Nu_L = C_3 (Ra^*)^{1/4} = C_4 (Ra^*)^{1/5} \quad (3.21)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación 3.21 por  $b/l$  esta relación puede ser convertida a una relación entre el número de Nusselt del canal,  $hb/k$ , y el número de Rayleigh del canal,  $Ra'$  y  $Ra''$ , en placas isotérmicas.

Aplicando la ecuación 3.21 a la convección natural en el canal, podría anticiparse así que los  $Nu_0$  variarían según:

$$Nu_i = \left[ (C_1 Ra')^{-n} + (C_3 \sqrt[4]{Ra'})^{-n} \right]^{-1/n} \quad (3.22)$$

El valor del exponente de la correlación ( $n$ ) puede ser evaluado comparando la

ecuación 3.23 con datos experimentales.

$$Nu_i = \left[ (C_2 Ra')^{-n} + (C_4 \sqrt[3]{Ra'})^{-n} \right]^{-1/n} \quad (3.23)$$

Como Nu para la convección libre laminar en superficies isotérmicas es dependiente de  $(Ra')^{1/4}$  y variaciones de la configuración en los diferentes valores del coeficiente, C3. Para las placas verticales moderadamente cortas en aire y  $10^4 < Ra < 10^9$ , Mc Adams (1954) establece que C3 es igual a 0,59. Esta relación (ecuación 3.11), puede insertarse en la ecuación 3.23 para producir:

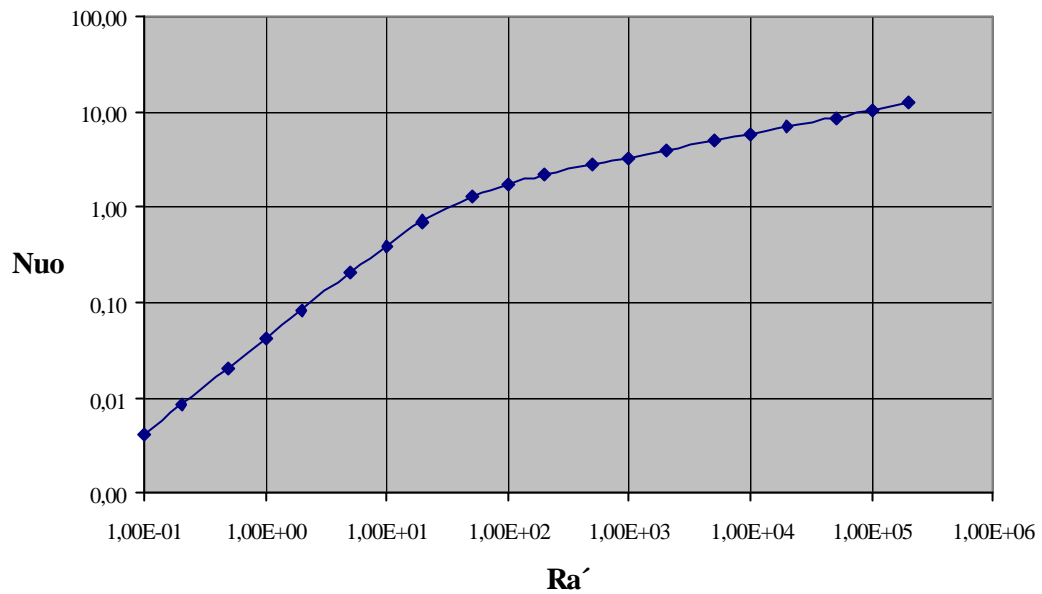
$$Nu_i = \left[ \left( \frac{1}{24} Ra' \right)^{-n} + (0.59 \sqrt[3]{Ra'})^{-n} \right]^{-1/n} \quad (3.24)$$

La correlación de Elenbaas (1942) para esta misma configuración térmica toma la forma

$$Nu_i = \frac{1}{24} Ra' \left[ 1 - e^{-35/Ra'} \right]^{3/4} \quad (3.25)$$

Siguiendo el procedimiento descrito por Churchill y Usagi (1972), poniendo en correlación el exponente (n) se encuentra que es aproximadamente igual a 2, produciendo una relación compuesta para dos superficies isotérmicas como:

$$Nu_i = \left( 576 / (Ra')^2 + 2.873 / \sqrt{Ra'} \right)^{-1/2} \quad (3.26)$$



**Figura 3.2** Variación de  $Nu$  en Placas isotérmicas

La íntima proximidad con los datos de Elebaas apunta a la relación compuesta, y las ecuaciones de las asíntotas a ambos límites, indicado en la figura 3.2, que sirven para validar este acercamiento.

$$y = \left[ (Az^p)^n + (Bz^q)^n \right]^{1/n} \quad (3.27)$$

$$\begin{array}{lll}
 y \rightarrow Az^p & \text{cuando} & z \rightarrow 0 \\
 y \rightarrow Bz^q & \text{cuando} & z \rightarrow \infty \\
 n > 0 & \text{si} & p < q \\
 n < 0 & \text{si} & p > q
 \end{array}$$

## CAPITULO IV

### APLICACIÓN DEL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS AL MODELO MATEMÁTICO

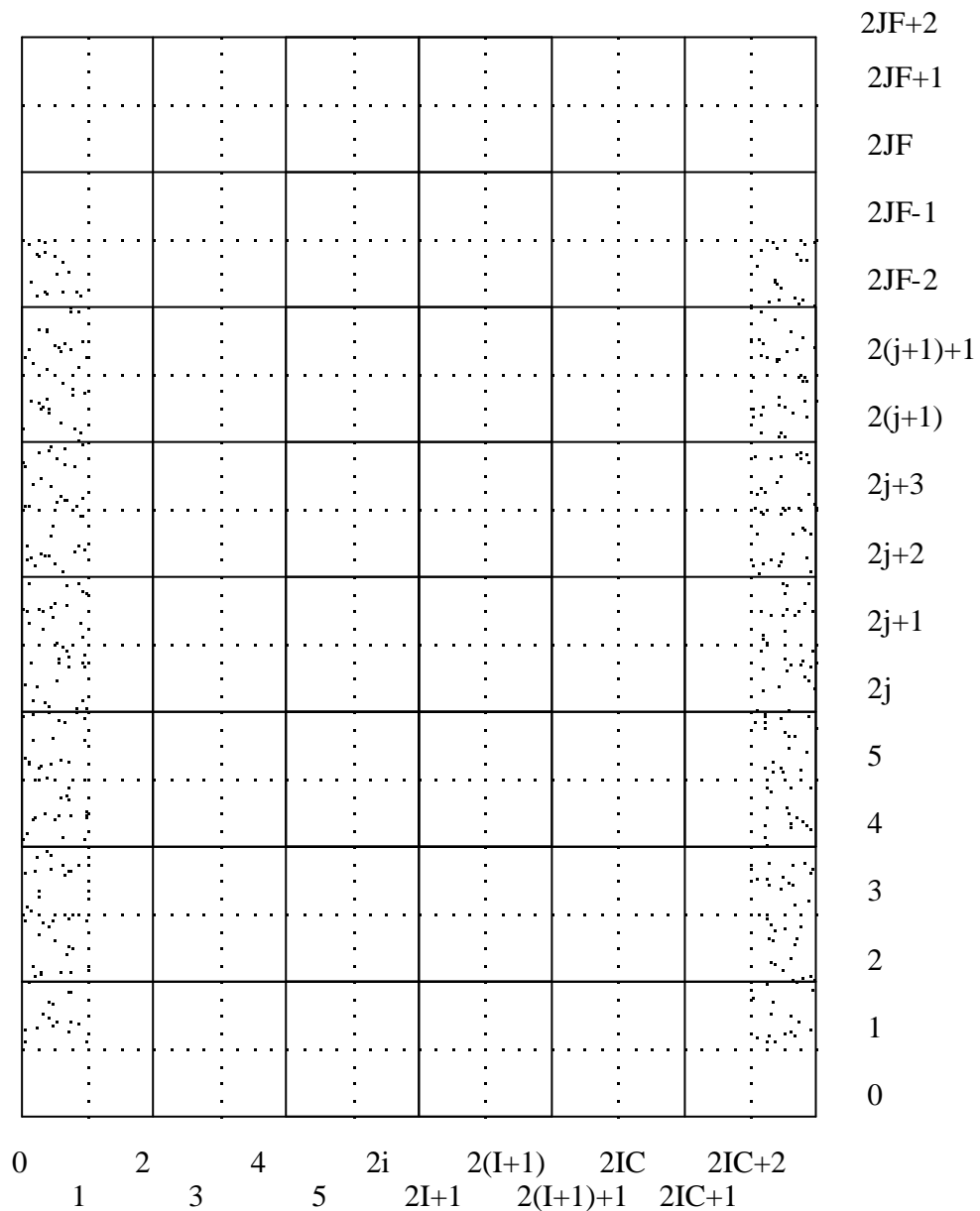
Establecido el modelo matemático que describe el fenómeno físico que se desea estudiar y conocido el método ideal que se implanta para la resolución de este tipo de problemas, solo queda conjugar estas estrategias para así obtener la solución del mismo.

El método de volúmenes finitos con el esquema de diferencias híbridas es un modelo numérico que se adapta a los problemas de flujo de fluidos, ya que ofrece el cumplimiento de los principios de conservación, tanto para todo el dominio de cálculo, como para cada volumen finito. Además el esquema híbrido posee las ventajas del esquema de diferencias centradas cuando la difusión es elevada y las del esquema corriente arriba cuando la convección prevalece sobre la difusión. Por lo que los resultados que se obtiene son físicamente realistas (Versteg y Malalasekera, 1995).

Para aplicar el método se debe discretizar el dominio de cálculo, para ello se utiliza un sistema de mallas desplazadas el cual se representa en la figura (4.1), que muestra el sistema bidimensional de placas verticales y paralelas.

Las partes sombreadas de la malla representan las paredes y el número de nodos viene dado por la expresión  $(2I+2) \times (2J+2)$ . En esta discretización los valores de temperatura y de propiedades del fluido se evalúan en los nodos de la forma  $(2i, 2j)$ , las componentes de la velocidad en dirección "x" en los nodos  $(2I, 2J+1)$ , y las componentes en la dirección "y" de la velocidad en los nodos  $(2I+1, 2J)$ . Se dispuso la malla de manera tal que para las secciones de entrada y de

salida coincidieran con las interfaces de los nodos de cálculo para la temperatura, permitiendo así aplicar las condiciones de contorno de velocidades normales conocidas para los nodos de entrada.



**Fig. 4.1** Malla Desplazada

#### 4.1 ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO EN X

La Ecuación de cantidad de movimiento en dirección x (2.17) discretizada según el método de volúmenes de control esquema híbrido es de la forma:

$$a_P u_{2i,2j+1} = a_N u_N + a_S u_S + a_E u_E + a_W u_W + g \rho \beta (T - T_\infty) dx dy \quad (4.1)$$

donde  $a_P = a_N + a_S + a_E + a_W$  y

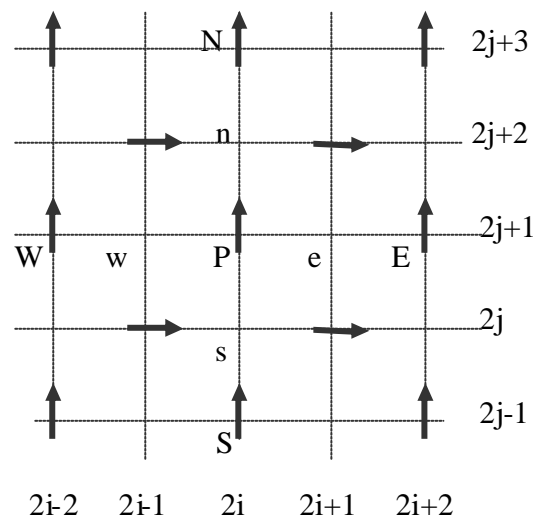
$$a_N = \max [ F_n ; (D_n + F_n/2) ; 0 ]$$

$$a_E = \max [ F_e ; (D_e + F_e/2) ; 0 ]$$

$$a_S = \max [ F_s ; (D_s + F_s/2) ; 0 ]$$

$$a_W = \max [ F_w ; (D_w + F_w/2) ; 0 ]$$

De manera que un fragmento de la malla que represente un volumen de control para la velocidad  $u$  sería como el que se muestra en la figura (4.2):



**Fig. 4.2** Volumen de Control para el cálculo de  $u$

Luego las variables F y D quedan expresadas como:

$$F_e = \mathbf{r}(u_e)Ae = \frac{1}{4}(\mathbf{r}_{2i+2,2j+2} + \mathbf{r}_{2i,2j+2} + \mathbf{r}_{2i+2,2j} + \mathbf{r}_{2i,2j})\frac{1}{2}(v_{2i+1,2j+2} + v_{2i+1,2j})dx$$

$$F_w = \mathbf{r}(u_w)Aw = \frac{1}{4}(\mathbf{r}_{2i,2j+2} + \mathbf{r}_{2i,2j} + \mathbf{r}_{2i-2,2j+2} + \mathbf{r}_{2i-2,2j})\frac{1}{2}(v_{2i-1,2j+2} + v_{2i-1,2j})dx$$

$$F_n = \mathbf{r}(u_n)An = \mathbf{r}_{2i,2j+2} \frac{1}{2}(u_{2i,2j+1} + u_{2i,2j+3})dy$$

$$F_s = \mathbf{r}(u_s)As = \mathbf{r}_{2i,2j} \frac{1}{2}(u_{2i,2j+1} + u_{2i,2j-1})dy$$

$$D_e = \frac{\Gamma Ae}{dy} = \frac{1}{4}(\mathbf{m}_{2i+2,2j+2} + \mathbf{m}_{2i,2j+2} + \mathbf{m}_{2i+2,2j} + \mathbf{m}_{2i,2j})dx/dy$$

$$D_w = \frac{\Gamma Aw}{dy} = \frac{1}{4}(\mathbf{m}_{2i,2j+2} + \mathbf{m}_{2i,2j} + \mathbf{m}_{2i-2,2j+2} + \mathbf{m}_{2i-2,2j})dx/dy$$

$$D_n = \frac{\Gamma An}{dx} = \mathbf{m}_{2i,2j+2}dy/dx$$

$$D_s = \frac{\Gamma As}{dx} = \mathbf{m}_{2i,2j}dy/dx$$

## 4.2 ECUACIÓN DE ENERGÍA

La forma discretizada de la ecuación de energía (2.18) según el método de volúmenes finitos con esquema híbrido es:

$$a_P T_{2i,2j} = a_N T_N + a_S T_S + a_E T_E + a_W T_W \quad (4.2)$$

donde  $a_P = a_N + a_S + a_E + a_W$  y los coeficientes  $a_N$ ,  $a_S$ ,  $a_E$  y  $a_W$  se calculan como:

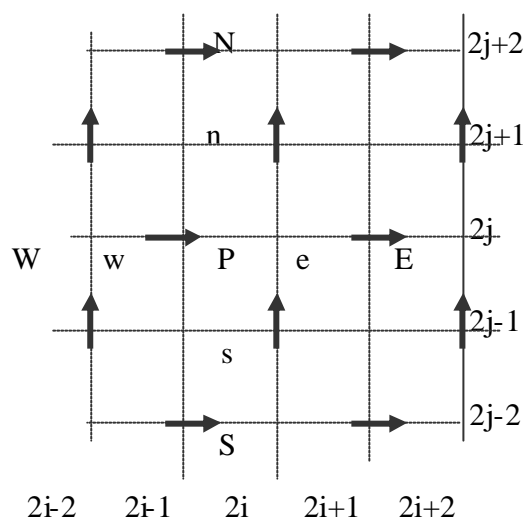
$$a_N = \max [ F_n ; (D_n + F_n/2) ; 0 ]$$

$$a_E = \max [ F_e ; (D_e + F_e/2) ; 0 ]$$

$$a_S = \max [ F_s ; (D_s + F_s/2) ; 0 ]$$

$$a_w = \max [ F_w ; (D_w + F_w/2) ; 0 ]$$

En la figura (4.3) se puede apreciar la distribución en torno al volumen de control de las velocidades tanto en dirección x como en dirección y.



**Fig. 4.3** Volumen de Control para el cálculo de T

Así las variable F y D quedan definidas para cada Volumen de Control como:

$$F_e = \mathbf{r}(u_e)Ae = \frac{1}{4}(\mathbf{r}_{2i+2,2j+2} + \mathbf{r}_{2i,2j+2} + \mathbf{r}_{2i+2,2j} + \mathbf{r}_{2i,2j})\frac{1}{2}(v_{2i+1,2j+2} + v_{2i+1,2j})dx$$

$$F_w = \mathbf{r}(u_w)Aw = \frac{1}{4}(\mathbf{r}_{2i,2j+2} + \mathbf{r}_{2i,2j} + \mathbf{r}_{2i-2,2j+2} + \mathbf{r}_{2i-2,2j})\frac{1}{2}(v_{2i-1,2j+2} + v_{2i-1,2j})dx$$

$$F_n = \mathbf{r}(u_n)An = \mathbf{r}_{2i,2j+2}\frac{1}{2}(u_{2i,2j+1} + u_{2i,2j+3})dy$$

$$F_s = \mathbf{r}(u_s)As = \mathbf{r}_{2i,2j}\frac{1}{2}(u_{2i,2j+1} + u_{2i,2j-1})dy$$



$$D_e = \frac{\Gamma A e}{dy} = \frac{1}{4} (\mathbf{m}_{2i+2,2j+2} + \mathbf{m}_{2i,2j+2} + \mathbf{m}_{2i+2,2j} + \mathbf{m}_{2i,2j}) dx / dy$$

$$D_w = \frac{\Gamma A w}{dy} = \frac{1}{4} (\mathbf{m}_{2i,2j+2} + \mathbf{m}_{2i,2j} + \mathbf{m}_{2i-2,2j+2} + \mathbf{m}_{2i-2,2j}) dx / dy$$

$$D_n = \frac{\Gamma A n}{dx} = \mathbf{m}_{2i,2j+2} dy / dx$$

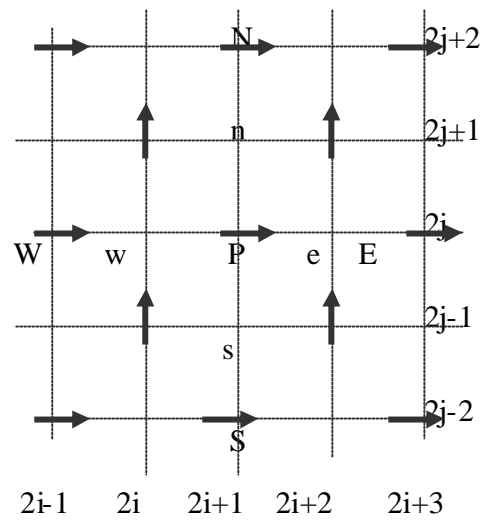
$$D_s = \frac{\Gamma A s}{dx} = \mathbf{m}_{2i,2j} dy / dx$$

### 4.3 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

La ecuación de continuidad (2.16) no puede ser discretizada directamente por el método híbrido de volúmenes finitos, sin embargo dada su simplicidad se pueden ajustar sus valores convenientemente a la malla de discretización para transformar esta ecuación integro diferencial en una expresión algebraica de la siguiente manera:

$$[(\mathbf{r}vA)_e - (\mathbf{r}vA)_w] + [(\mathbf{r}uA)_n - (\mathbf{r}uA)_s] = 0 \quad (4.3)$$

Esta ecuación se obtiene eligiendo los volúmenes de control con centro en los nodos donde se encuentran las velocidades  $v$ , ya que esta es la única variable que falta por resolver. Este volumen de control se representa en la figura 4.4



**Fig. 4.4** Volumen de Control para el cálculo de  $v$

De la manera que esta definida la ecuación de la energía es necesario conocer los valores de las velocidades en las fronteras del volumen de control. En los nodos este “e” ( $2i+2,2j$ ) y oeste “w” ( $2i,2j$ ) no se encuentran las velocidades  $v$  y correspondientemente en los nodos norte “n” ( $2i+1,2j+1$ ) y sur “s” ( $2i+1,2j-2$ ) las velocidades  $u$ , así que estos valores se obtiene de la siguiente manera:

$$v_{2i+2,2j} = \frac{v_{2i+3,2j} + v_{2i+1,2j}}{2}$$

$$u_{2i+1,2j+1} = \frac{u_{2i,2j+1} + u_{2i+2,2j+1}}{2}$$

$$v_{2i,2j} = \frac{v_{2i-1,2j} + v_{2i+1,2j}}{2}$$

$$u_{2i+1,2j-2} = \frac{u_{2i,2j-2} + u_{2i,2j+1}}{2}$$

Y los valores de  $F$  definidos para la ecuación de continuidad como:

$$F_e = rAe$$

$$F_n = rAn$$

$$F_w = rAw$$

$$F_s = rAs$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (4.1) y organizando nos queda:

$$v_{2i+1,2j}(F_e - F_w) = v_{2i,2j}F_w - v_{2i+2,2j}F_w + (u_{2i,2j-1} + u_{2i+2,2j-1})F_s - (u_{2i,2j+1} + u_{2i+2,2j+1})F_n \quad (4.4)$$

Para la resolución de esta ecuación se supone conocido el campo de velocidad  $u$ , así que los últimos dos valores conformarían el término fuente, pudiéndose re escribir la ecuación (4.4) como:

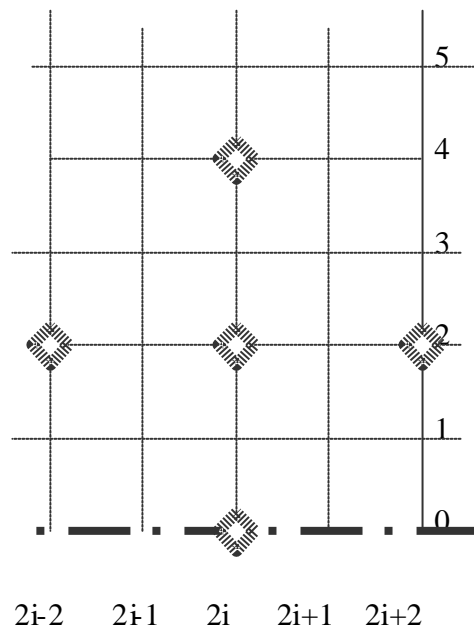
$$v_{2i+1,2j}(F_e - F_w) = v_{2i,2j}F_w - v_{2i+2,2j}F_w + Su \quad (4.5)$$

#### 4.4 CONDICIONES DE CONTORNO

En el capítulo III se mencionaron las condiciones de contorno que poseen las ecuaciones de conservación, estas condiciones se expresan en la malla para utilizarse en las ecuaciones discretizadas.

##### 4.4A CONDICIONES EN LA ENTRADA

Aquí se presentan la distribución de las variables estudiadas en los límites de la entrada, que se encuentra perpendicular a la dirección "x". De la figura 4.5 a la 4.7 se presentan los volúmenes de control para cada una de las variables, llamándolos T - celda, u - celda y v - celda a cada una de ellas.



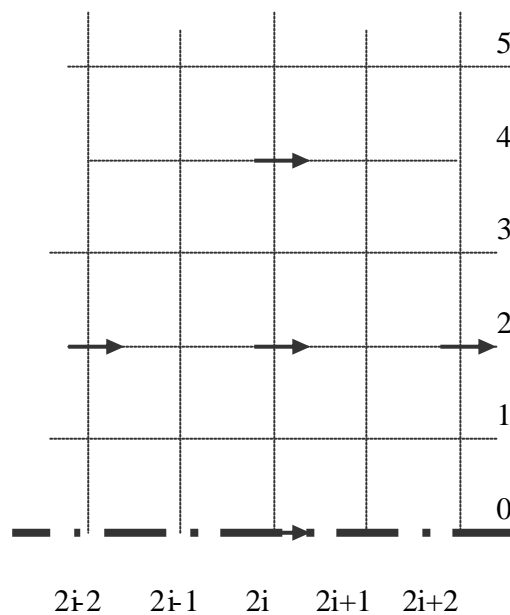
**Fig. 4.5** Vol. de Control en la entrada.

En las figuras la línea gruesa (punto ralla punto) representa la zona de penetración del fluido a la malla. En las figuras los rombos simbolizan los nodos de valores de temperaturas y las flechas los nodos de las velocidades  $u$  y  $v$  respectivamente.

Se comienzan a calcular los valores de las temperaturas  $T$  y las velocidades  $v$  a partir de  $j=2$ , mientras que las velocidades  $u$  a partir de  $j=3$ , donde los valores en  $j=0$  están conformados por las condiciones de contorno para  $T$  y  $v$  como:

$$v_{(0,2j)}=0 \text{ (flujo laminar)}$$

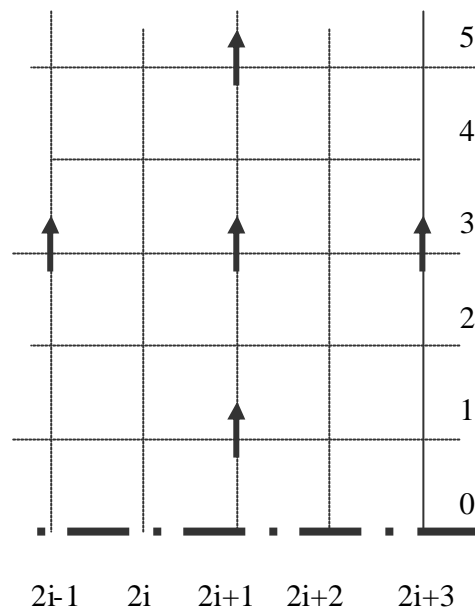
$$T_{(0,2j)}=T_{CL} \text{ (temperatura de corriente libre)}$$



**Fig. 4.6** Volumen de Control en la entrada.

Y los valores de  $j=1$  son las condiciones de frontera para las velocidades  $u$  dadas por:

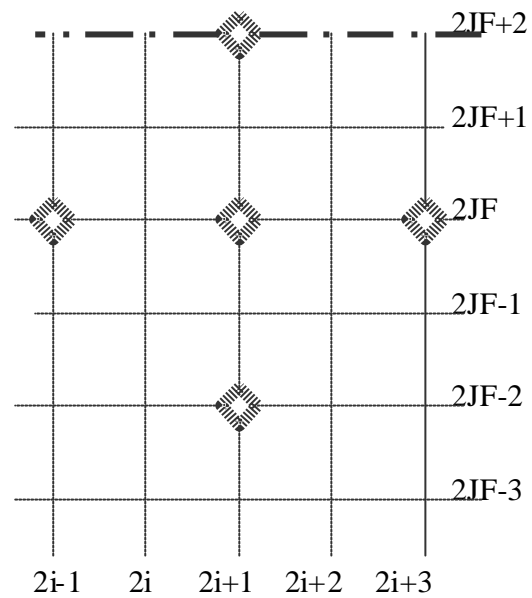
$$u_{(1,2j+1)}=U_0 \text{ (Velocidad de aproximación)}$$



**Fig. 4.7** Volumen de Control en la entrada

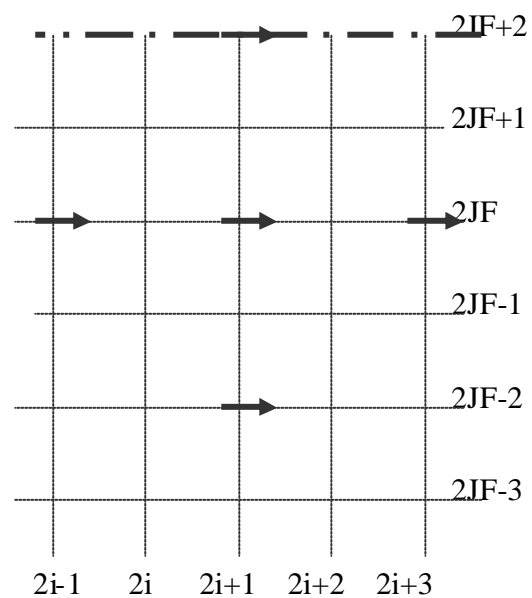
#### 4.4B CONDICIONES EN LA SALIDA

En esta región, donde el flujo se encuentra completamente desarrollado, se puede decir que las variables se estabilizan, en otras palabras la variación de las propiedades es cero en esta región. Así para el caso de las velocidades  $v$  y temperaturas  $T$  se tienen que en  $2JF+2$  (número de nodos a lo largo de la dirección  $x$ ) cuando las ecuaciones pertinentes se resuelvan, los valores de las variables del flujo en esta sección son iguales a los del nodo más próximo, es decir a  $2JF$ . Esto quiere decir que fuera del dominio, es determinado por extrapolación ya que el gradiente de las variables es cero. Para el caso de la velocidad  $u$  el valor en  $2JF+1$  se extrapola del valor en  $2JF-1$ .

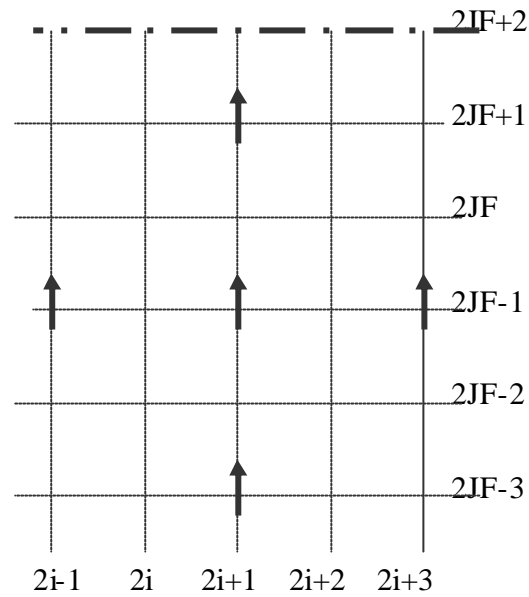


**Fig. 4.8** Volumen de Control en la salida.

En las figuras 4.8, 4.9 y 4.10 la línea gruesa (punto ralla punto) representa la sección de salida



**Fig. 4.9** Volumen de Control en la salida



**Fig. 4.10** Volumen de Control en la salida

Finalmente en la salida de la malla se debe cumplir que:

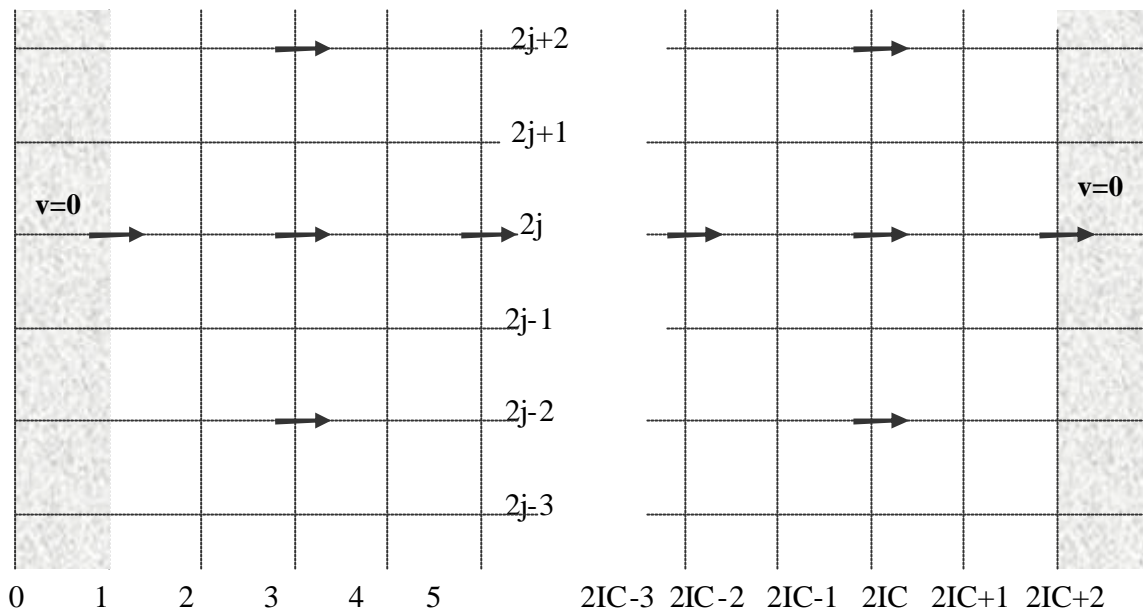
$$T_{(2i,2JF+2)}=T_{(2i,2JF)}$$

$$u_{(2i,2JF+1)}=u_{(2i,2JF-1)}$$

$$V_{(2i+1,2JF+2)}=V_{(2i+1,2JF)}$$

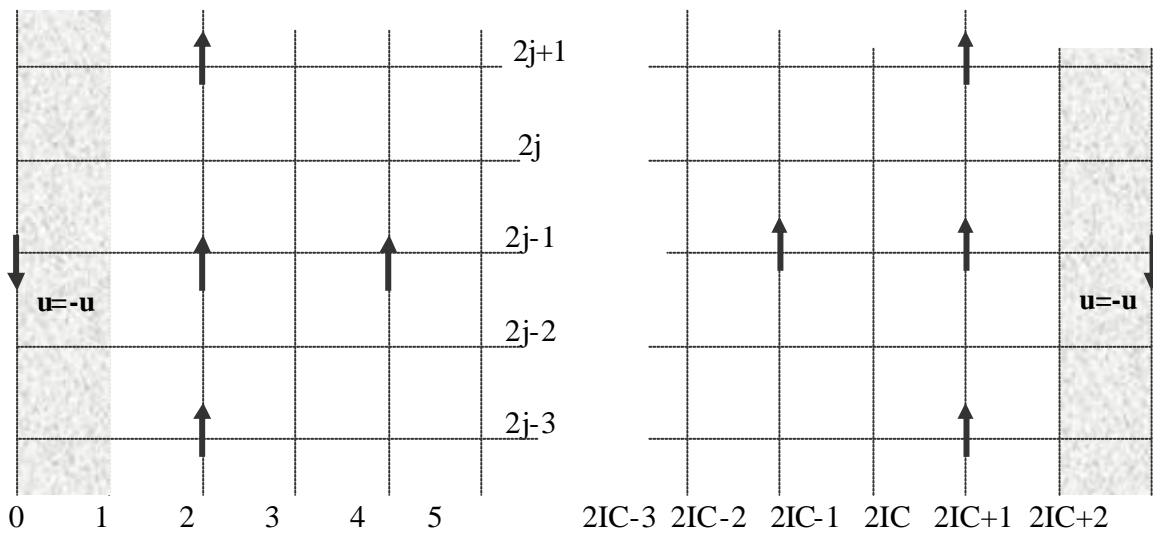
#### 4.4C CONDICIONES EN LAS PAREDES

Las paredes están alineadas en la dirección  $x$ , es decir paralelas a la velocidad  $u$ . La condición de no deslizamiento ( $u=v=0$ ) es la apropiada para las componentes de la velocidad en las paredes sólidas. Las figuras enumeradas como 4.11, 4.12 y 4.13 representan los volúmenes de control para las variables estudiadas en estas regiones.



**Fig. 4.11** Volumen de Control en las paredes

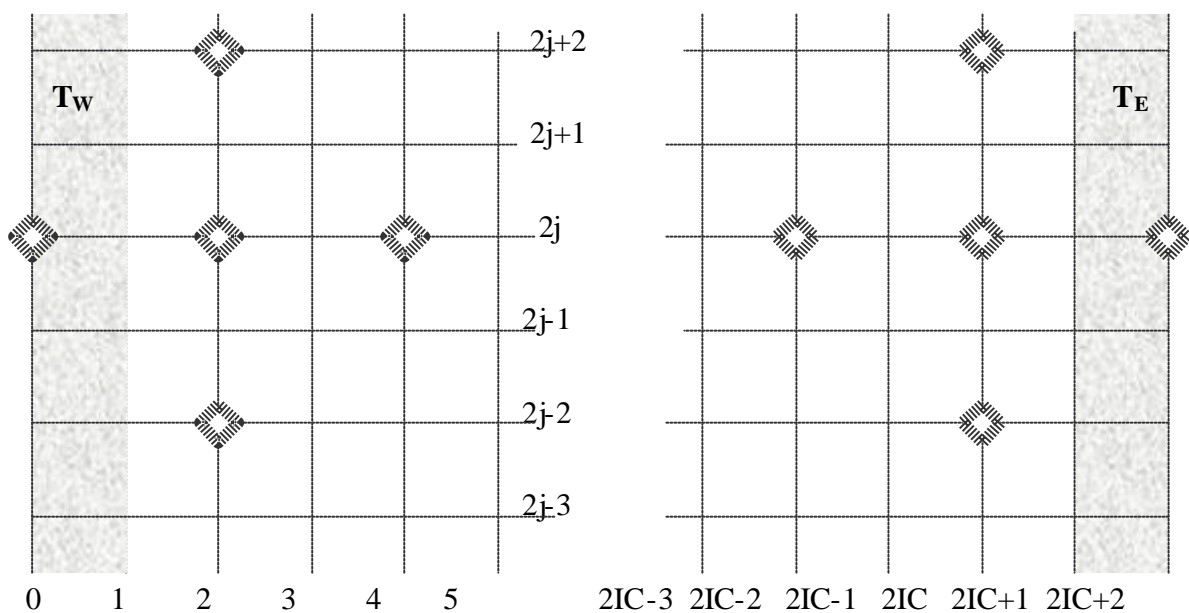
En la figura 4.11 que representa la distribución de temperatura  $v$ , se puede suponer la condición de no deslizamiento directamente en las columnas 1 y  $2IC+1$  donde se permite la existencia de velocidades  $v$  y se sustituyen por valores ceros.



**Fig. 4.12** Volumen de Control en las paredes



En la figura 4.12 también se puede apreciar la condición de no deslizamiento. Aquí surge el inconveniente de que en los límites de las paredes (ubicados en las columnas 1 y  $2IC+1$ ) no están definidas las velocidades  $u$ , en este caso se utiliza un artificio mediante el cual se generan velocidades imaginarias detrás de la pared (ubicados en las columnas 0 y  $2IC+2$ ) de igual magnitud pero de signo contrario a las ubicadas en los nodos siguientes y posteriores respectivamente. Así se cumple la condición de no deslizamiento para el campo de velocidades  $u$ .



**Fig. 4.13** Volumen de Control en las paredes

Las paredes están representadas por los bloques sombreados – granulado. Cada uno de ellos con una temperatura diferente, denotadas en la figura 4.13 como  $T_W$  y  $T_E$ , estos valores asignados a las columnas 1 y  $2IC+1$ . Como en el caso de las velocidades  $u$ , en las columnas límites de las paredes no están definidas las temperaturas, pero la condición de temperatura prescrita debe de prevalecer, para ello al igual que en el caso de las velocidades  $u$  se generan valores de temperaturas en las columnas 0 y  $2IC+2$ , dentro de la pared, de tal manera que al promediar estos valores con los de los nodos más cercanos a ellos de el valor de la temperatura en la pared.

Finalmente se puede decir que las condiciones de bordes en la pared oeste “W” se rigen bajo las siguientes relaciones:

$$(T_{(0,2j)} + T_{(2,2j)})/2 = T_w$$

$$u_{(0,2j)} = -u_{(2,2j)}$$

$$v_{(0,2j)} = 0$$

Análogamente para la pared este “E” los valores en la frontera toman la forma:

$$(T_{(2iC,2j)} + T_{(2iC+2,2j)})/2 = T_E$$

$$u_{(2iC,2j)} = -u_{(2iC+2,2j)}$$

$$v_{(2iC+1,2j)} = 0$$

#### 4.5 PROGRAMA

Los métodos numéricos se implantan para realizar cálculos repetitivos que de otra manera sería casi imposible de resolver. Esto se efectúa mediante un programa de computación que registra los datos suministrados y a partir de ellos obtiene los resultados requeridos. En este caso el algoritmo de solución presentado en la figura 2.2 se implementa en un lenguaje de programación que efectúa las operaciones del método de volúmenes finitos híbrido que se ha desarrollado con las condiciones establecidas.

A continuación se enumeran los pasos que efectúa el programa y posteriormente en el Capítulo V se analizarán los resultados que este genera.

1. Lectura de datos suministrados por el usuario. Con esta información se establecen los campos de velocidad y temperatura iniciales.
2. Actualización de las propiedades del fluido a trabajar en función del campo de temperatura.

3. Cálculo del campo de temperatura  $T$  a partir de los campos de velocidad  $u$  y  $v$  con la ecuación (4.2).
4. Cálculo del campo de velocidad  $v$  con la ecuación (4.5)
5. Cálculo del campo de velocidad  $u$  con la ecuación (4.6)
6. Verificación de la convergencia de las variables estudiadas.
7. Registro de las soluciones obtenidas en un archivo de resultados.
8. Representación gráfica de los campos de temperatura y velocidad.

Para la ejecución del programa se escogió el entorno MATLAB for windows, en su versión 4.2 de The MathWorks, Inc, que ejecuta un archivo desarrollado en Fortran 77 con el programa WATCOM Integrated Development Environment Versión 10.6 de WATCOM International Corp., encargado de todas las operaciones matemáticas necesarias para resolver el sistema de ecuaciones planteado. Los resultados obtenidos son representados gráficamente con el programa MATLAB mediante la interfaz gráfica desarrollada.

## **CAPITULO V**

### **RESULTADOS**

Conformado el programa capaz de resolver el sistema de ecuaciones planteado, los resultados obtenidos por éste deben ser verificados, y evidenciar así su capacidad predictiva. En este capítulo se tomará esta premisa como tópico y eje principal a ser desarrollado aunado a diferentes ejemplos de soluciones del programa desarrollado.

#### **5.1 VALIDACIÓN DE RESULTADOS**

Con la finalidad de corroborar los resultados del programa elaborado en este trabajo, se compararon diferentes soluciones obtenida por éste; con los resultados correspondientes a la relación semiempírica presentada en el capítulo anterior (Capítulo IV).

Específicamente, se tomaron datos y condiciones de contorno, con los cuales se calcularon el número de Rayleigh y el número de Nusselt, obteniendo una gráfica que, sobrepuesta a la obtenida por Churchill y Usagi (1972), establecerá un patrón de confiabilidad que permitirá constituir el rango de aplicabilidad del programa. Es importante recordar que a diferencia de la solución semiempírica expuesta en el trabajo antes mencionado, este programa está concebido para calcular la distribución de velocidades, temperaturas y presiones en un sistema asimétrico en el cual las paredes límites presentan una diferencia de temperatura, por lo cual también se expondrán en este capítulo las soluciones que arroja el programa para condiciones de contorno de estas características.

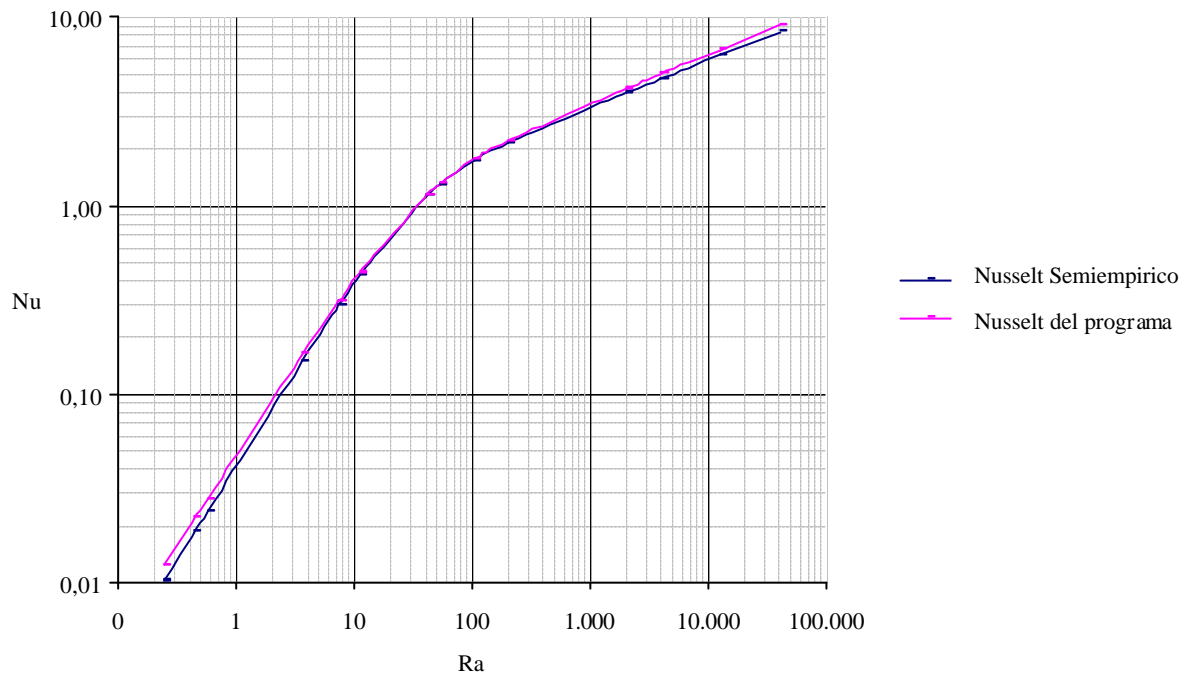
En la tabla 5.1 se especifican los datos más representativos, necesarios para la

ejecución del código computacional, de igual manera se especifican los resultados arrojados por el programa, representados por los valores del número de Rayleigh y el número de Nusselt. Para la validación de los resultados se incluyen en la tabla los valores del número de Nusselt, el cual es usado como patrón de medida y basándose en este se calcula el error porcentual entre al valor obtenido por el programa y el de la relación semiempírica.

<b>B (m)</b>	<b>L (m)</b>	<b>Ti (k)</b>	<b>To (k)</b>	<b>Te (k)</b>	<b>Ra</b>	<b>Nu</b>	<b>Nup</b>	<b>Error (%)</b>
0,020	0,0050	293,15	303,15	303,15	2,46E-01	1,02E-02	1,24E-02	20,89
0,020	0,0050	283,15	313,15	313,15	4,45E-01	1,85E-02	2,19E-02	17,95
0,050	0,0125	293,15	303,15	303,15	5,75E-01	2,39E-02	2,79E-02	16,71
0,050	0,0125	283,15	313,15	313,15	3,67E+00	1,50E-01	1,63E-01	8,16
0,100	0,0250	293,15	303,15	303,15	7,46E+00	2,96E-01	3,11E-01	5,17
0,100	0,0250	283,15	313,15	313,15	1,12E+01	4,27E-01	4,42E-01	3,59
0,200	0,0500	293,15	303,15	303,15	4,14E+01	1,13E+00	1,14E+00	0,51
0,200	0,0500	283,15	313,15	313,15	5,31E+01	1,29E+00	1,31E+00	1,07
0,500	0,1250	293,15	303,15	303,15	1,03E+02	1,72E+00	1,76E+00	2,28
0,500	0,1250	283,15	313,15	313,15	1,97E+02	2,14E+00	2,20E+00	3,19
1,000	0,2500	293,15	303,15	303,15	2,05E+03	3,96E+00	4,20E+00	5,87
1,000	0,2500	283,15	313,15	313,15	3,99E+03	4,69E+00	5,00E+00	6,60
2,000	0,5000	293,15	303,15	303,15	1,26E+04	6,25E+00	6,74E+00	7,88
2,000	0,5000	283,15	313,15	313,15	4,04E+04	8,36E+00	9,13E+00	9,19

**Tabla 5.1** Datos para Comprobación del Programa.

A continuación en la figura 5.1, se presentan los valores del número Nusselt vs el número Rayleigh de la Tabla 5.1. Comparados los resultados obtenidos se puede apreciar gran similitud entre ellos. Se aprecia fácilmente que en el rango de  $1Ra$  a  $10.000 Ra$ , la diferencia es menor al 20%.



**Figura 5.1** Variación del Nusselt semiempírico Vs. Nusselt del programa

El programa está diseñado para distintas condiciones, por consiguiente su aplicabilidad se diversifica en comparación de otros trabajos similares realizados anteriormente.

## 5.2 REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Los resultados obtenidos por el programa en lenguaje FORTRAN son guardados en archivos dispuestos de manera tal que MATLAB pueda obtener los datos necesarios para la representación gráfica de la Temperatura, Presión y Velocidad.

En el caso de la temperatura y la presión, los valores numéricos son convertidos en colores tomando siempre la misma gama y degradación para la representación de los diferentes valores. Estos son organizados según la distribución de la malla dispuesta en la configuración del programa.

Para las velocidades se toma cada nodo como origen del vector de velocidad que representa, el módulo viene dado por el valor obtenido por el programa FORTRAN, la dirección para las velocidades  $u$  es vertical y para las velocidades  $v$  es horizontal, el sentido viene expresado por el signo del valor numérico obtenido por el programa. Es importante resaltar que mientras más fina sea la malla estudiada mayor será la densidad de vectores representado por flechas, es decir que la visualización obtenida perderá detalle.

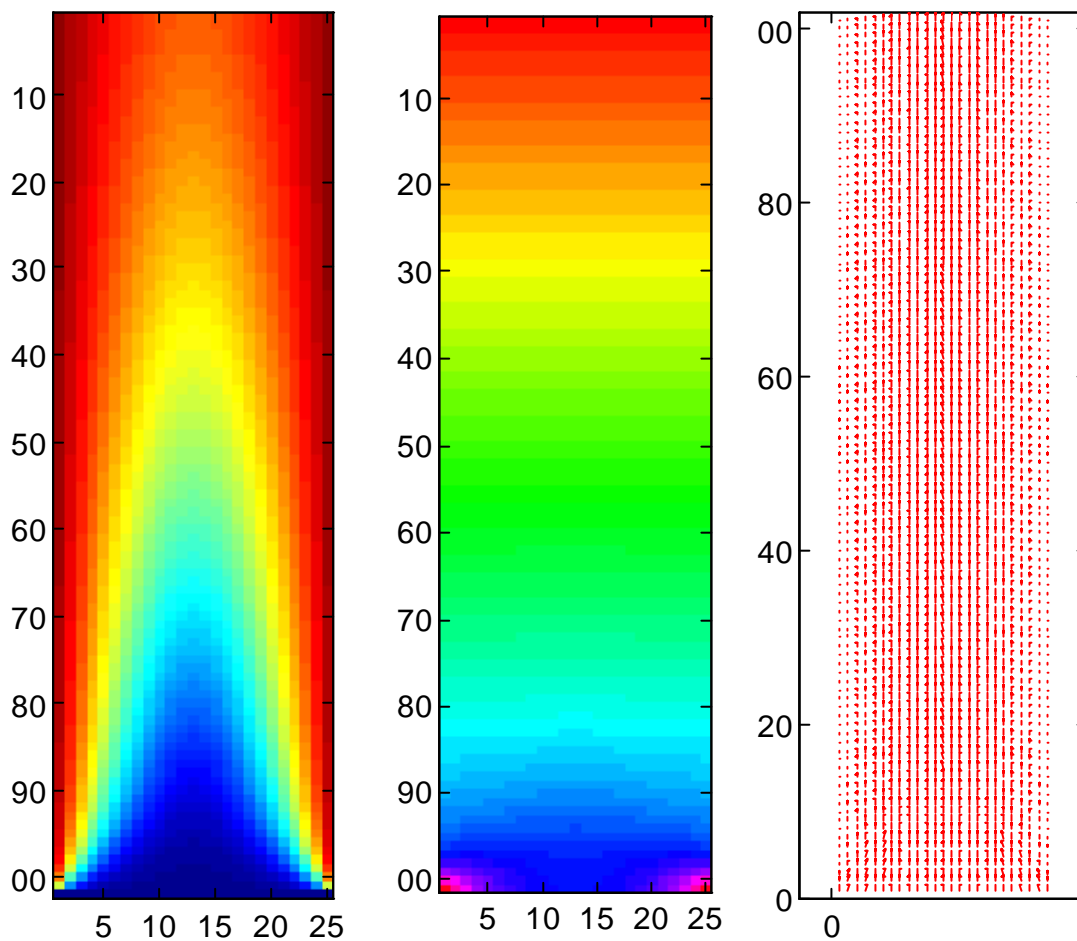
### **5.3 CORRIDAS DEL PROGRAMA.**

A continuación se presentarán siete (7) casos diferentes, utilizando datos donde se comprobará la acción del fenómeno de convección dependiendo de las condiciones establecidas para el flujo y así observar el patrón de comportamiento del fluido en cuanto a las variables estudiadas, que a saber son: las distribuciones de la velocidad, la presión y la temperatura.

Para los casos estudiados se estableció un patrón para poder comparar los resultados. Las mallas de cálculo son de iguales dimensiones (100 x 25); se fija un el valor único de  $4 \times 10^{-4}$  m (lo que significa 1cm x 0.25cm) para los diferenciales  $dx$  y  $dy$ ; se establece un  $\epsilon$  de  $5 \times 10^{-15}$  y un máximo de iteraciones de  $1 \times 10^6$  (valor que no se alcanzó en ninguno de los casos).

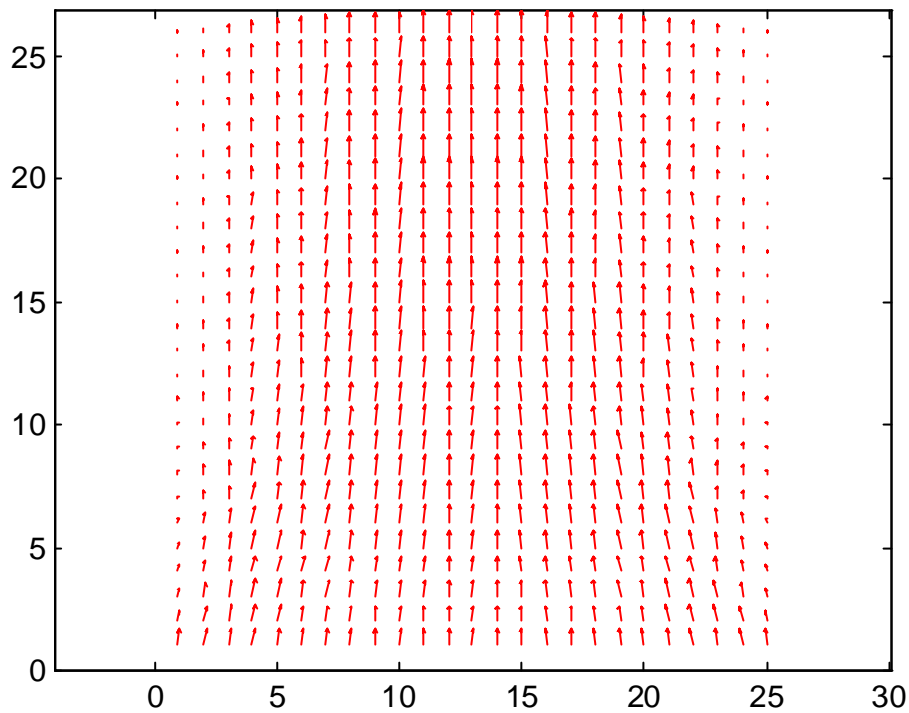
El caso uno corresponde a convección natural en el cual las temperaturas de las paredes ( $T_e$  y  $T_o$ ) son iguales entre si y mayores a la temperatura del fluido ( $T_i$ ), la figura 5.2 pertenece a este caso

<b>CASO UNO</b>								
							$\frac{Gr_L}{(Re_L)^2} = 116.12$	
No. Filas	No. Col.	dx (m)	dy (m)	Re	Pr	$\mu$ (N*s/m <sup>2</sup> )	cp (kJ/kg*K)	k (W/m*K)
100	25	1D-4	1D-4	50	0.711381	181.2e <sup>-7</sup>	1.006663	24.952e <sup>-3</sup>
Ti (K)	Te (K)	To (K)	$\epsilon_{P,u,v}$	$\epsilon_T$	Ite. Max.	R1	R2	g (m/s <sup>2</sup> )
293.15	313.15	313.15	5D-15	5D-12	1000000	0.3	0.5	9.80556



<b>RESULTADOS</b>		
 313.15 Valor máximo 293.15 Valor mínimo	 0.22602566032 Valor máximo 0.15183991514 Valor mínimo	0.04316437651 Valor máximo.
		3.83892970e-04 Valor mínimo.
<b>FIGURA 5.1</b>		
TEMPERATURA (K)	PRESIÓN (Pa)	VELOCIDAD (m/s)



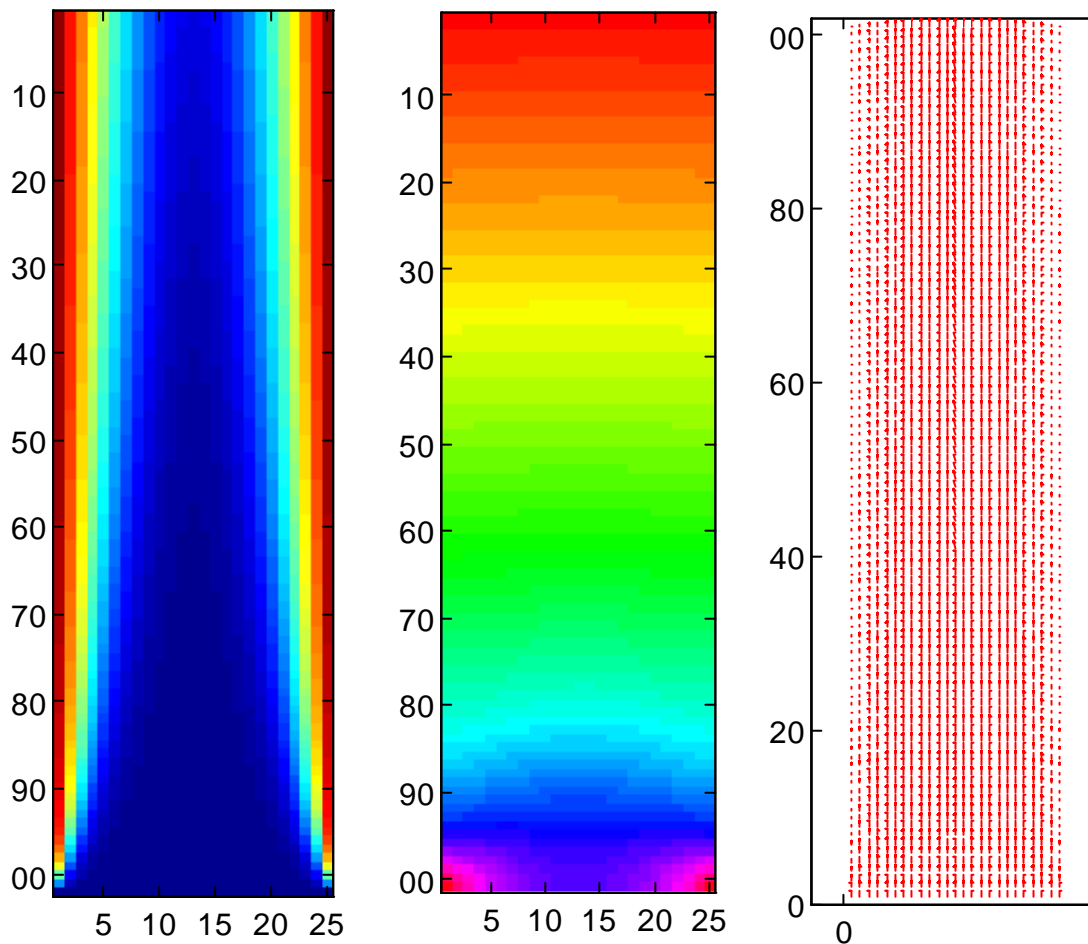


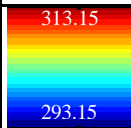
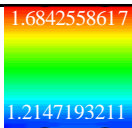
**Figura 5.2** Zoom del Campo Vectorial de Velocidad, CASO UNO

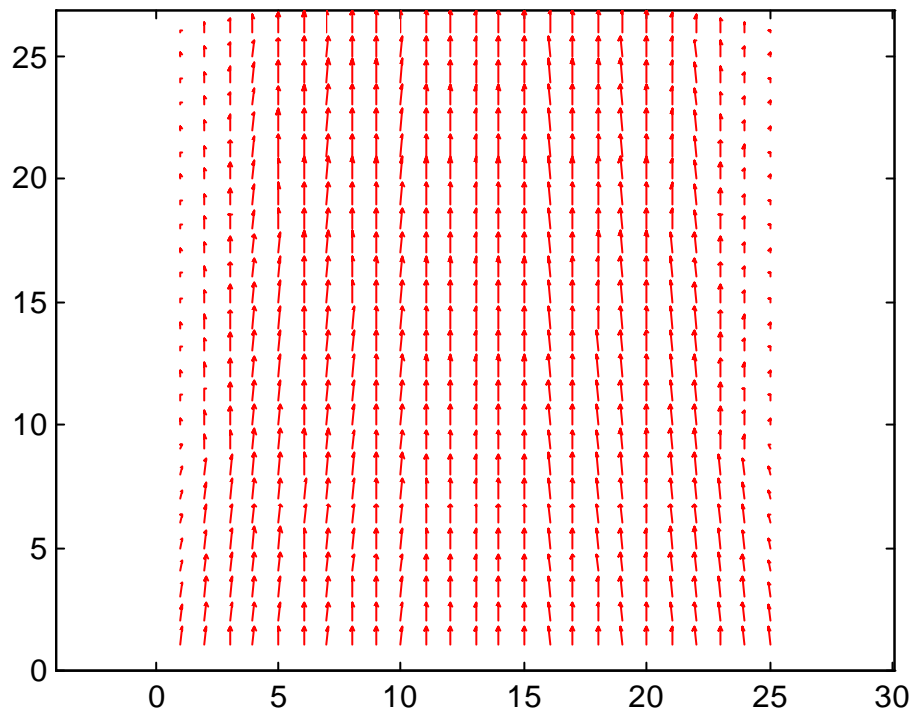
En la figura 5.2 se observa la distribución de temperatura del flujo, esta se presenta en forma parabólica y en la sección de salida se observa que la misma tiende a estabilizarse, es decir que corriente arriba el fluido alcanzará la temperatura de las paredes.

Los casos 2, 3 y 4 corresponden a convección mixta en la cual la relación  $Gr / Re^2$  tiende a la unidad. En el caso 2, las temperaturas de las paredes son iguales entre sí ( $T_e = T_o$ ) pero mayores a la temperatura del fluido ( $T_i$ )

CASO DOS						$\frac{Gr_L}{(Re_L)^2} = 1.81$		
No. Filas	No. Col.	dx (m)	dy (m)	Re	Pr	$\mu$ (N*s/m <sup>2</sup> )	cp (kJ/kg*K)	k (W/m*K)
100	25	1D-4	1D-4	400	0.711381	181.2e <sup>-7</sup>	1.006663	24.952e <sup>-3</sup>
Ti (K)	Te (K)	To (K)	$\epsilon_{P,u,v}$	$\epsilon_T$	Ite. Max.	R1	R2	g (m/s <sup>2</sup> )
293.15	313.15	313.15	5D-15	5D-12	1000000	0.3	0.5	9.80556



RESULTADOS		
 Valor máximo 313.15	 Valor máximo 1.6842558617	0.70533985879 Valor máximo.
Valor mínimo 293.15	Valormínimo. 1.2147193211	0.06669066387 Valor mínimo.
TEMPERATURA (K)	PRESIÓN (Pa)	VELOCIDAD (m/s)



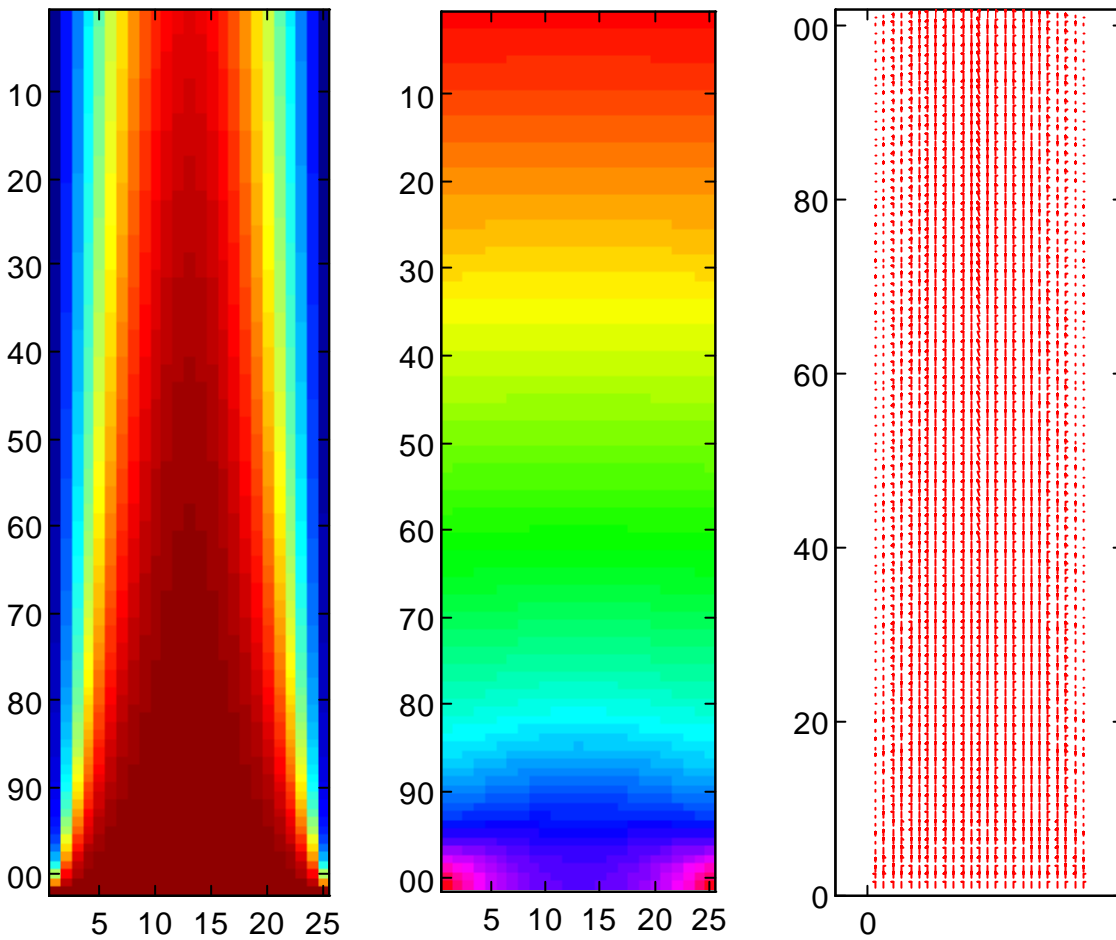
**Figura 5.4** Zoom del Campo Vectorial de Velocidad, CASO DOS

En este caso se verifica la convección mixta debido a que la relación  $Gr/Re^2$  es igual 1. Al igual que en el caso uno, se observan disturbios en la presión en la entrada, y en menor grado se aprecian diferencias de presión longitudinalmente en la sección previa a la salida, justo antes de comenzar el flujo térmicamente desarrollado.

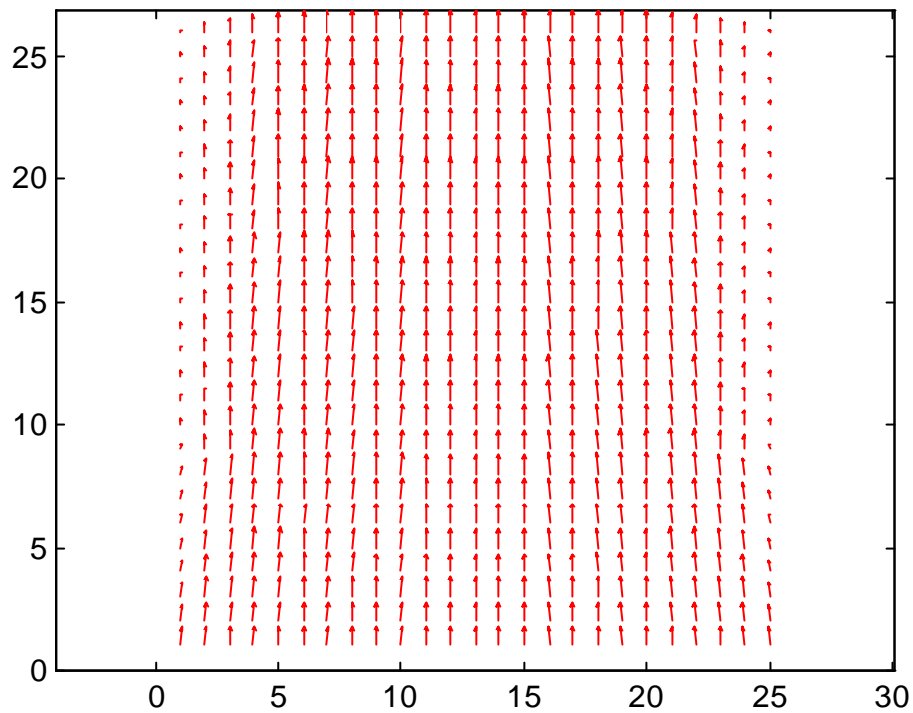
Las variaciones de la velocidad en el centro del canal son mínimas, donde hubo menor variación de temperatura.

En el caso 3, la temperatura de las paredes son iguales entre sí ( $T_e=T_o$ ) pero menores a la temperatura del fluido ( $T_i$ )

<b>CASO TRES</b>								
								$\frac{Gr_L}{(Re_L)^2} = 1.34$
No. Filas	No. Col.	dx (m)	dy (m)	Re	Pr	$\mu$ (N*s/m <sup>2</sup> )	cp (kJ/kg*K)	k (W/m*K)
100	25	1D-4	1D-4	400	0.707	190.8e <sup>-7</sup>	1.007	26.9e <sup>-3</sup>
Ti (K)	Te (K)	To (K)	$\epsilon_{P,u,v}$	$\epsilon_T$	Ite. Max.	R1	R2	g (m/s <sup>2</sup> )
313.15	293.15	293.15	5D-15	5D-12	1000000	0.3	0.5	9.80556



<b>RESULTADOS</b>		
	Valor máximo	0.83492444187227 Valor máximo.
	Valor mínimo	0.00797162952544 Valor mínimo.
		<b>FIGURA 5.5</b>
TEMPERATURA (K)	PRESIÓN (Pa)	VELOCIDAD (m/s)



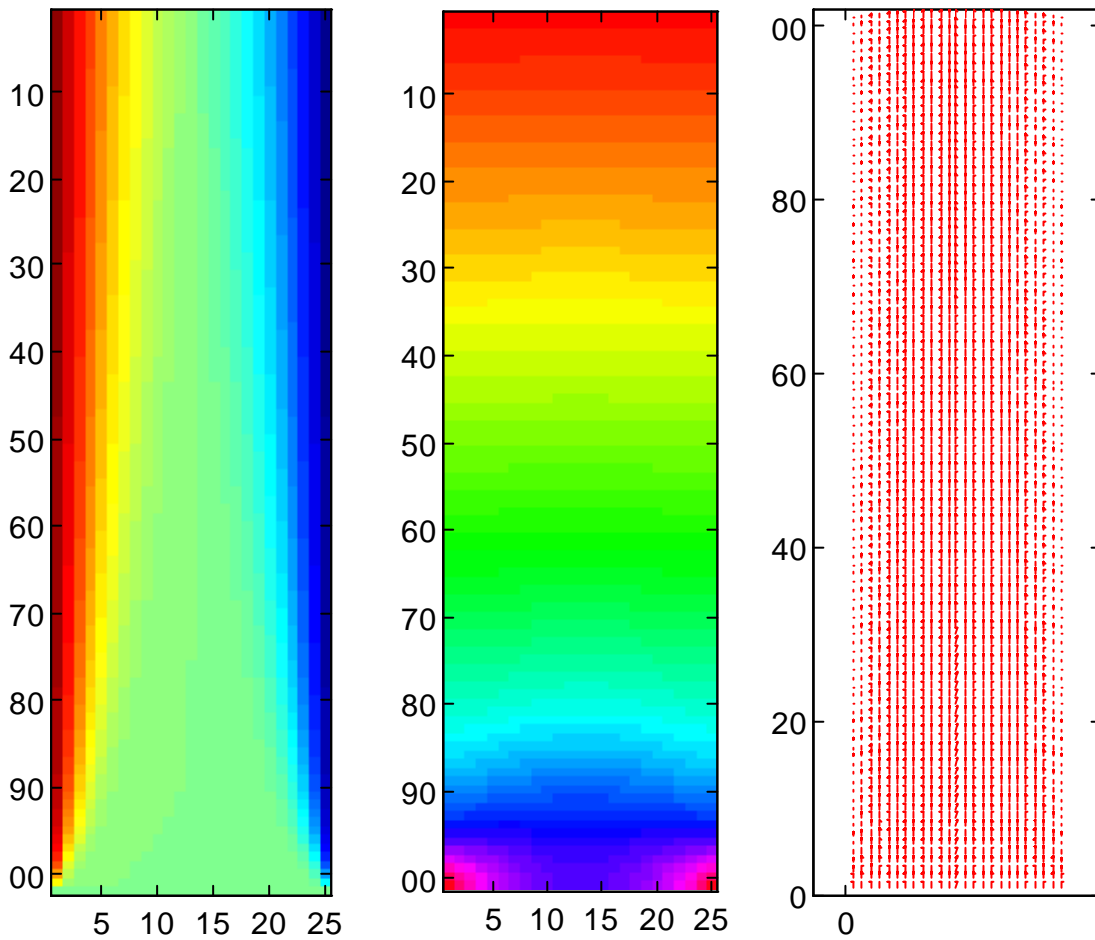
Al comparar los resultados entre el caso dos y tres se observa que en general estos presentan gran similitud. Se puede apreciar que en esta configuración el valor de la velocidad es mayor que en el caso anterior.

CASO DOS U (m/s)		CASO TRES U (m/s)	
0.70533985879	Valor máximo.	0.83492444187227	Valor máximo.
0.06669066387	Valor mínimo.	0.00797162952544	Valor mínimo.

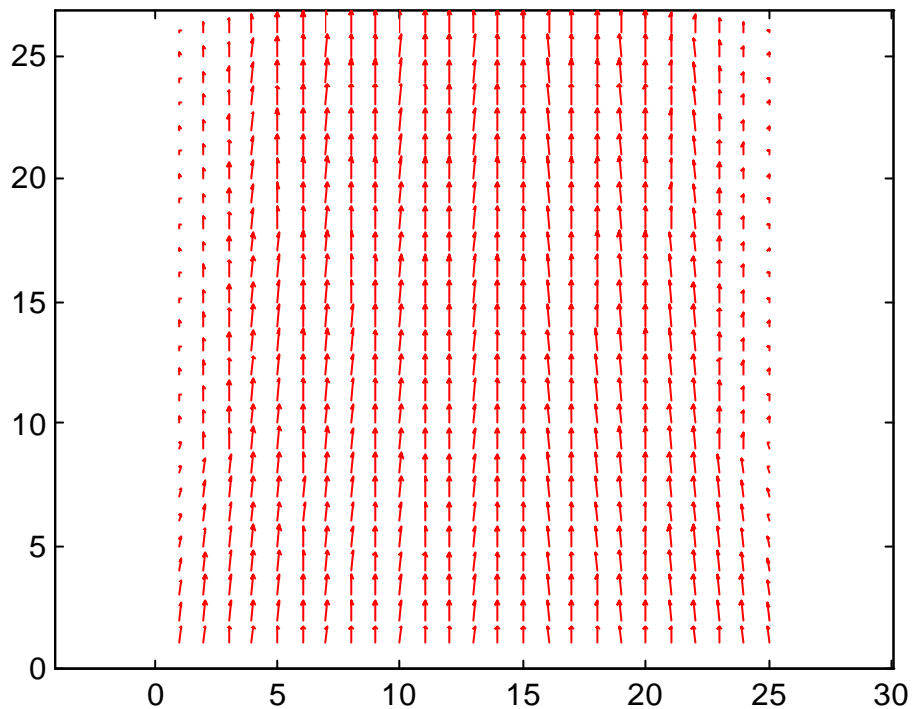
Teniendo en cuenta que solo se varió la temperatura, se verifica que un fluido a alta temperatura circula más fácilmente de forma ascendente dentro de un conducto a baja temperatura que el caso contrario.

El caso 4 corresponde a un sistema en convección mixta en el cual la temperatura de entrada del fluido es mayor a la temperatura de la pared este y menor a la temperatura de la pared oeste.

<b>CASO CUATRO</b>								
								$\frac{Gr_L}{(Re_L)^2} = 1.34$
No. Filas	No. Col.	dx (m)	dy (m)	Re	Pr	$\mu$ (N*s/m <sup>2</sup> )	cp (kJ/kg*K)	k (W/m*K)
100	25	1D-4	1D-4	400	0.707	$190.8e^{-7}$	1.007	$26.9e^{-3}$
Ti (K)	Te (K)	To (K)	$\epsilon_{P,u,v}$	$\epsilon_T$	Ite. Max.	R1	R2	g (m/s <sup>2</sup> )
313.15	293.15	333.15	5D-15	5D-12	1000000	0.3	0.5	9.80556



<b>RESULTADOS</b>		
	Valor máximo	0.8349883171275 Valor máximo
		0.0079372600033 Valor mínimo
		<b>FIGURA 5.7</b>
TEMPERATURA (K)	PRESIÓN (Pa)	VELOCIDAD (m/s)

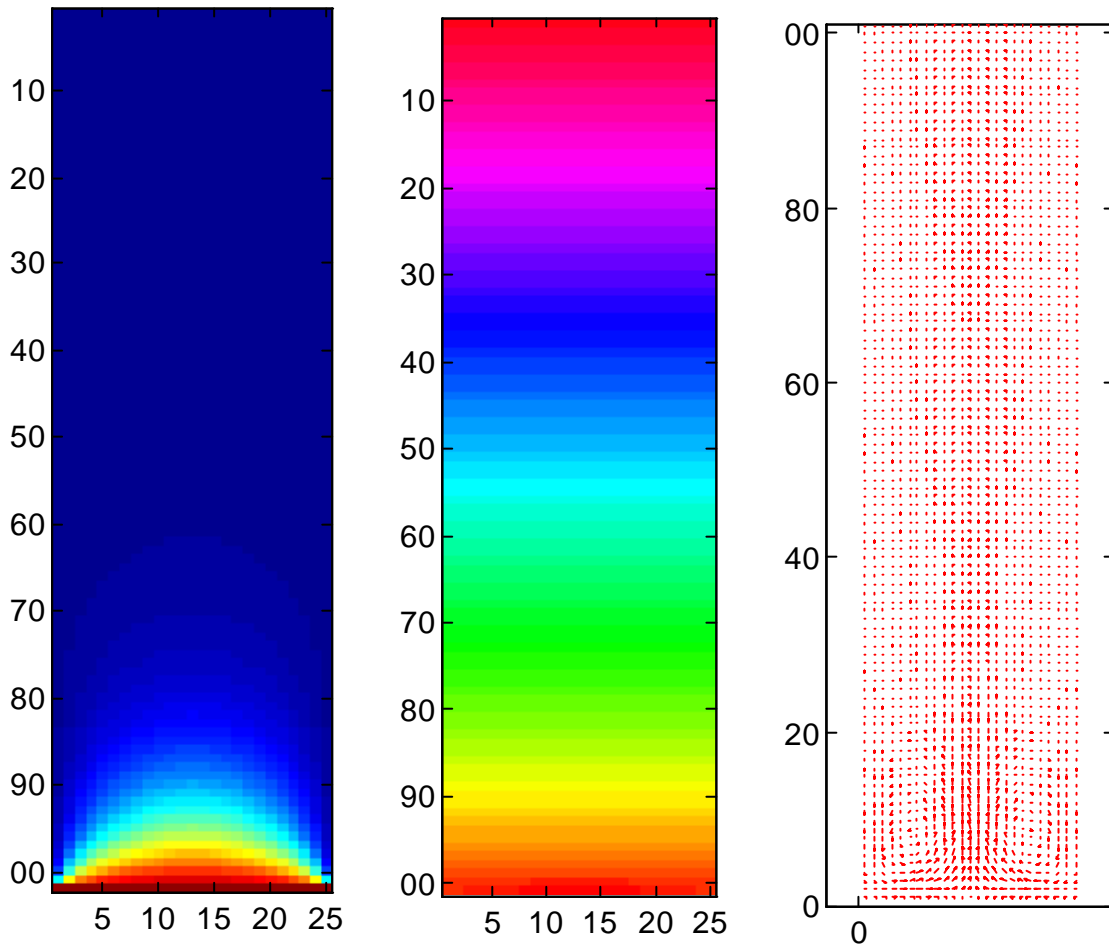


**Figura 5.8** Zoom del Campo Vectorial de Velocidad, CASO CUATRO

En las figuras 5.7 y 5.8 se puede apreciar al igual que en los casos anteriores, perturbaciones en la presión, tanto a la entrada como en la sección previa a la salida. Tomando en cuenta que el valor de  $Re$  en los casos dos, tres y cuatro es el mismo, las variaciones de la velocidad se producen por las características propias de cada sistema. Verificando que en éste caso la velocidad es mayor a las anteriores, se justifica, pues posee mayor temperatura en una de sus paredes. Con la finalidad de observar las celdas convectivas obtenidas debido al movimiento del fluido como consecuencia de la diferencia de densidades originadas por una diferencia de temperaturas, en las figuras 5.9-5.14, se presentan los resultados de tres casos de convección natural donde existen diferencias de temperatura significativas ( $\Delta T \approx Xxxx$ ) entre el fluido y las paredes del conducto.

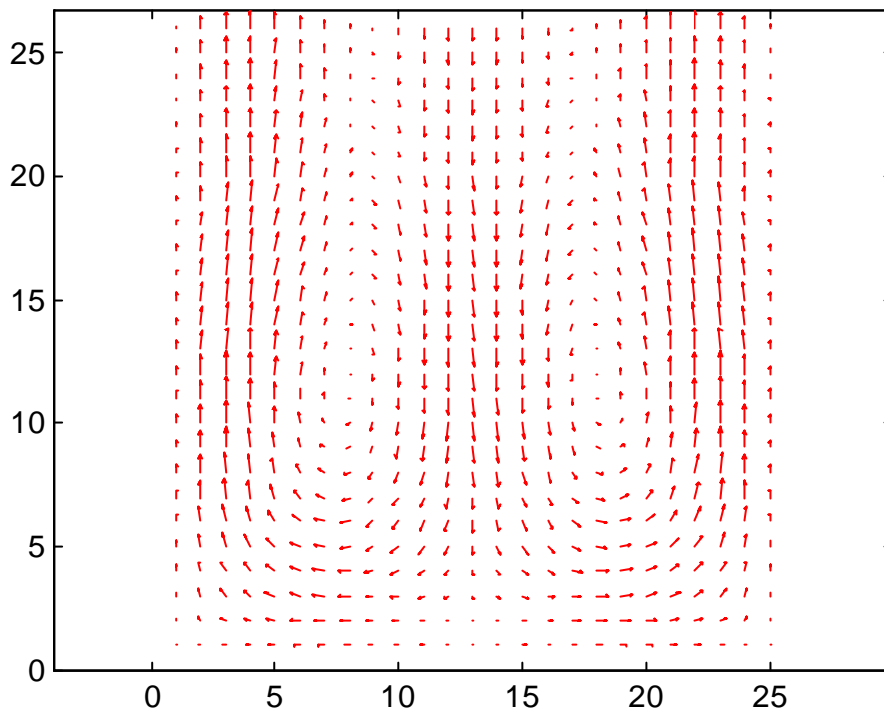
El caso cinco corresponde a convección natural en la cual las temperaturas de las paredes del conducto son iguales entre si pero mayores que la temperatura del fluido.

<b>CASO CINCO</b>						convección libre		
No. Filas	No. Col.	dx (m)	dy (m)	Re	Pr	$\mu$ (N*s/m <sup>2</sup> )	cp (kJ/kg*K)	k (W/m*K)
100	25	1D-4	1D-4	1e <sup>-5</sup>	0.707	190.8e <sup>-7</sup>	1.007	26.9e <sup>-3</sup>
Ti (K)	Te (K)	To (K)	$\epsilon_{P,u,v}$	$\epsilon_T$	Ite. Max.	R1	R2	g (m/s <sup>2</sup> )
1000	283.15	283.15	5D-15	5D-12	1000000	0.3	0.5	9.80556



<b>RESULTADOS</b>		
	Valor máximo	4.61240393e-8 Valor máximo
	Valor mínimo	2.19184376e-8 Valor mínimo
		-9.80915280897e-8 Valor máximo
		-1.03808163432e-9 Valor mínimo
<b>FIGURA 5.9</b>		
TEMPERATURA (K)	PRESIÓN (Pa)	VELOCIDAD (m/s)





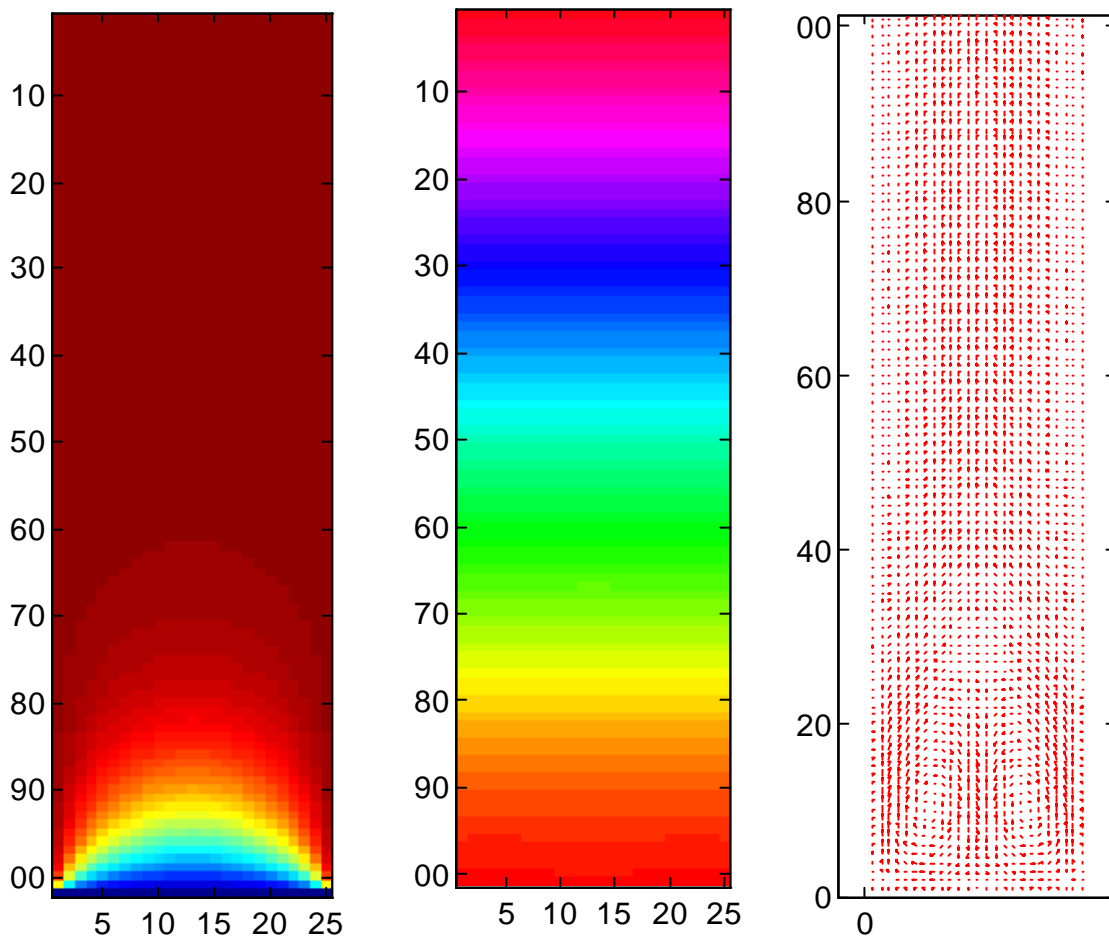
**Figura 5.10** Zoom del Campo Vectorial de Velocidad, CASO CINCO

En la figura 5.10 se observa la distribución de velocidad, en el centro de la imagen los vectores son descendentes y cambian de sentido hacia las fronteras laterales del conducto.

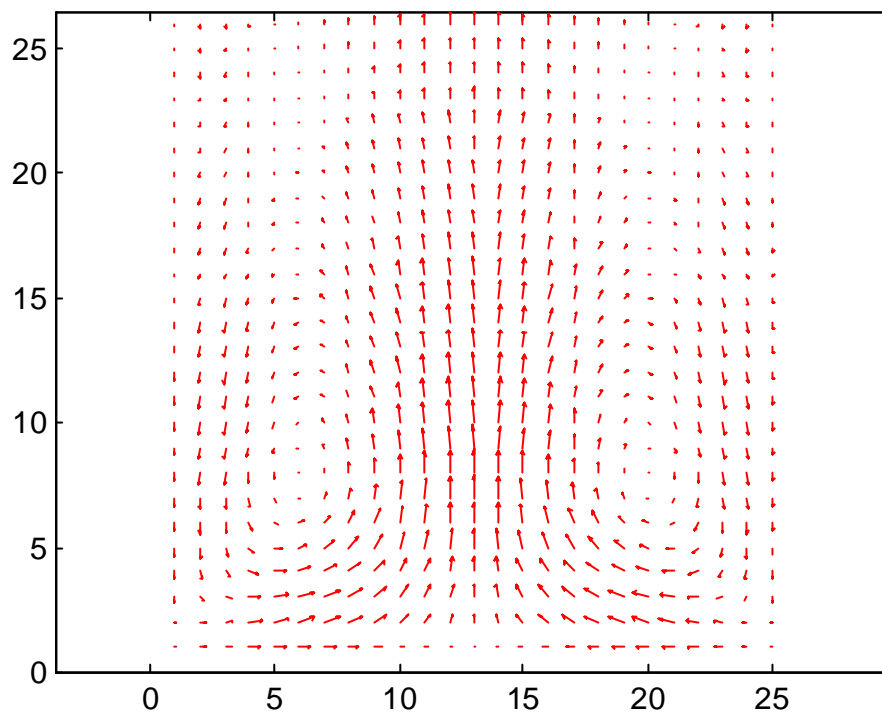
En este sistema no se presenta perturbaciones en la presión, ésta varía poco longitudinalmente y mucho menos transversalmente. En cuanto a la temperatura se alcanza flujo térmicamente desarrollado cerca de la sección de entrada.

El caso seis corresponde a convección natural en la cual las temperaturas de las paredes del conducto son iguales entre sí pero menores que la temperatura del fluido.

<b>CASO SEIS</b>						convección libre		
No. Filas	No. Col.	dx (m)	dy (m)	Re	Pr	$\mu$ (N*s/m <sup>2</sup> )	cp (kJ/kg*K)	k (W/m*K)
100	25	1D-4	1D-4	1e <sup>-5</sup>	0.707	190.8e <sup>-7</sup>	1.007	26.9e <sup>-3</sup>
Ti (K)	Te (K)	To (K)	$\epsilon_{P,u,v}$	$\epsilon_T$	Ite. Max.	R1	R2	g (m/s <sup>2</sup> )
283.15	1000	1000	5D-15	5D-12	1000000	0.3	0.5	9.80556



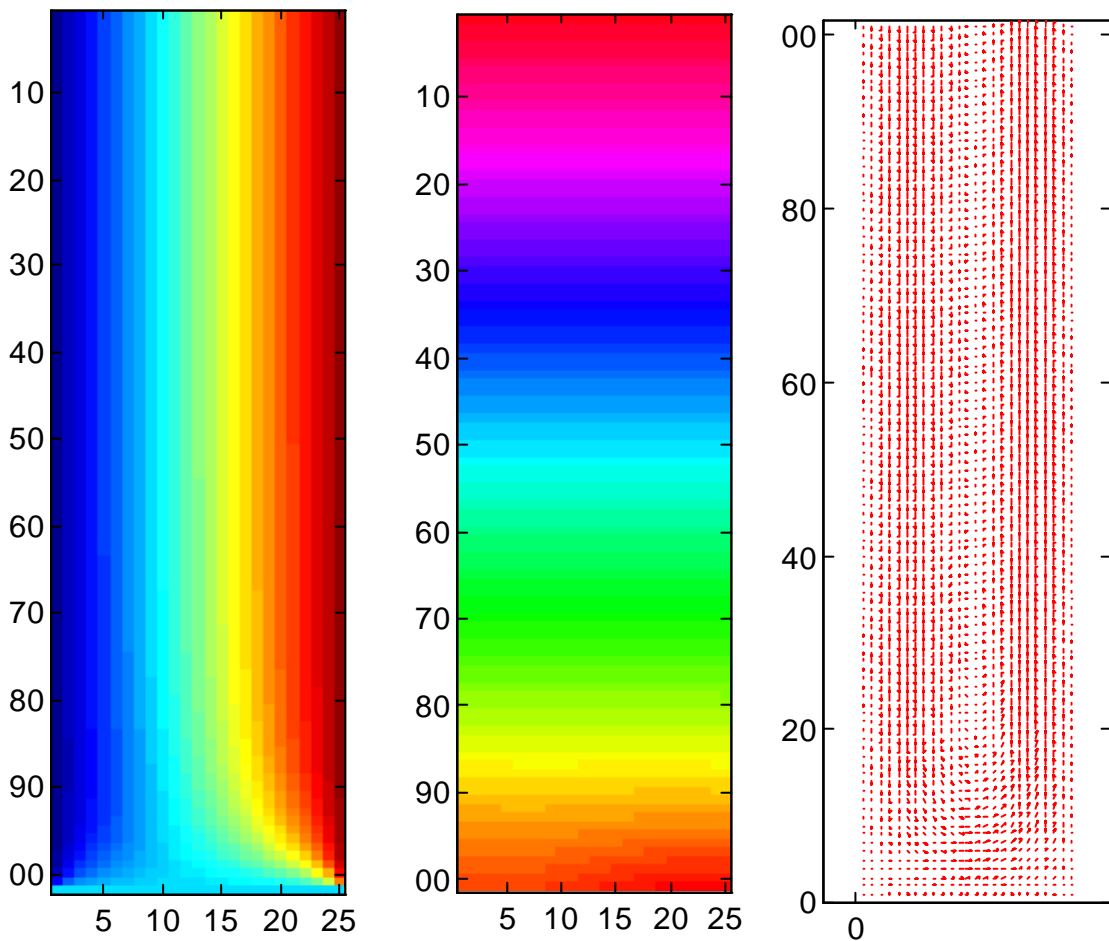
<b>RESULTADOS</b>		
	Valor máximo	-2.91502989906e-10 Valor máximo
	Valor mínimo	-3.30601179994e-08 Valor mínimo
		<b>FIGURA 5.11</b>
TEMPERATURA (K)	PRESIÓN (Pa)	VELOCIDAD (m/s)



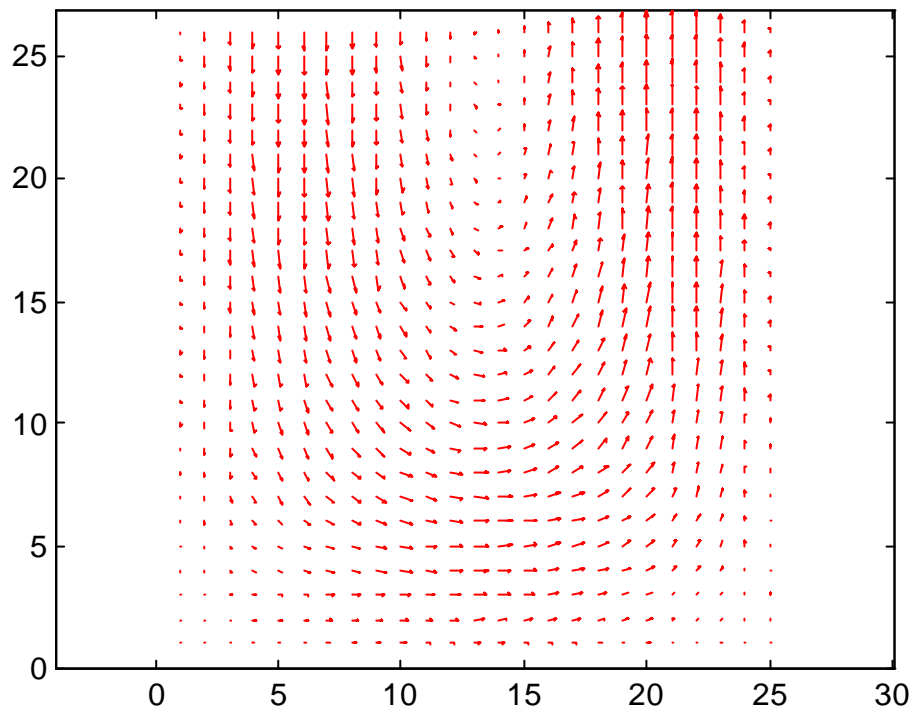
**Figura 5.12** Zoom del Campo Vectorial de Velocidad, CASO SEIS

En el caso siete se representa un flujo en convección natural en el cual la pared oeste se encuentra a una temperatura mayor que la temperatura del fluido y esta a su vez es mayor que la temperatura de la pared este.

<b>CASO SIETE</b>						convección libre		
No. Filas	No. Col.	dx (m)	dy (m)	Re	Pr	$\mu$ (N*s/m <sup>2</sup> )	cp (kJ/kg*K)	k (W/m*K)
100	25	1D-4	1D-4	0	0.707	290.5e-7	1.057	47.2e-3
Ti (K)	Te (K)	To (K)	$\epsilon_{P,u,v}$	$\epsilon_T$	Ite. Max.	R1	R2	g (m/s <sup>2</sup> )
560	280	1120	5D-15	5D-12	1000000	0.3	0.5	9.80556



<b>RESULTADOS</b>		
	Valor máximo	2.1058675e-09 Valor máximo
	Valor mínimo	-1.378327e-08 Valor mínimo
TEMPERATURA (K)	PRESIÓN (Pa)	VELOCIDAD (m/s)



**Figura 5.14** Zoom del Campo Vectorial de Velocidad, CASO SIETE

Al observar la distribución de velocidades del fluido que circula entre dos placas paralelas en los diferentes casos, se observa que los efectos viscosos son claramente reproducidos por la simulación, obteniendo bajas velocidades hacia las paredes del conducto y mayores distanciadas de ellas. El método de simulación también reproduce los efectos de entrada del flujo al demarcarse dos zonas: una cercana a las paredes donde el gradiente de velocidad en la dirección “x” es apreciable y otra en el centro del conducto donde estos gradientes prácticamente no existen.

La condición de desarrollo fluido dinámica también se verifica en la solución obtenida, al tener que los perfiles de velocidad mantienen una forma parabólica constante en la dirección “y” luego de cierta longitud vertical recorrida al establecer las condiciones enmarcadas en el primer ejemplo.

Para todos los casos se representa el campo de presiones relativas que se obtiene de la aplicación del modelo de simulación numérica. Observando que los resultados predicen una disminución prácticamente uniforme de la presión en la dirección del flujo, y que los valores de presión evaluados para una sección transversal del conducto permanecen constantes.

La distribuciones de temperatura a lo largo de todo el conducto, representadas en las figuras precedentes, muestran los efectos producidos en el fluido debido a la transferencia de calor.

## CAPITULO VI

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

De los resultados obtenidos se puede concluir que el método de volúmenes finitos para discretizar el modelo matemático que describe el fenómeno físico en estudio es adecuado, debido a que se obtiene la solución del problema planteado, lo cual verifica el uso del esquema híbrido en problemas de convección mixta entre placas paralelas y verticales, permitiendo su aplicación en algunos problemas de ingeniería.

La confiabilidad del programa varia según el rango de aplicación debido a los errores incurridos por los métodos iterativos que recrean condiciones físicas por medio de arreglos matemáticos. Dependiendo del método seleccionado estos errores afectan de distinta manera los resultados.

De los resultados obtenidos se verifica el comportamiento de un flujo de aire bajo ciertas condiciones, es decir, se predice la dirección de las líneas de corriente en el sistema. Se evidencian las diferencias entre fenómenos que pueden ocurrir en convección natural y mixta, lo que permite mejorar diseños en desarrollo, siendo esta la meta fundamental de trabajos de simulación numérica.

La distribución de temperatura a lo largo de todo el conducto muestra los efectos producidos en el fluido debido a la transferencia de calor. Estos efectos se manifiestan por una diferencia entre la temperatura del fluido y de las paredes del conducto. Para los casos donde ambas placas poseen la misma temperatura, esta diferencia se reduce al ir avanzando a lo largo del conducto, hasta llegar a una región donde los gradientes de temperatura en la dirección “y” son prácticamente nulos, y la temperatura de todo el fluido es igual a la temperatura superficial de las placas y en ambas direcciones “x” y “y”

A la entrada del conducto se observa una variación en la forma de los perfiles de temperatura pero con una tendencia a tomar una forma relativa constante al avanzar corriente abajo. Es esta tendencia que presentan los perfiles de temperatura (tomar una forma constante) la que establece una condición de desarrollo térmico, lo cual conlleva a la convergencia del programa.

Debido a que el programa aquí desarrollado es consistente con el trabajo realizado por Gil (1998) se recomienda desarrollar un módulo único, el cual unifique ambos programas, lo que permitirá al usuario visualizar las simulaciones del flujo en canales verticales y horizontales. De aquí se desprende la inquietud de realizar el estudio en canales inclinados, la que completaría el módulo propuesto.

Por lo expuesto en los párrafos anteriores se recomienda trabajar en problemas similares de transferencia de calor para casos tridimensionales, aplicando tecnología de punta, lo cual permitirá resolver problemas de mayor complejidad.



## BIBLIOGRAFÍA

Coello, L. Y Jaramillo, J., 1993, “Modelo Matemático para Tubos de Calor y Desarrollo del Algoritmo de Solución”. Tesis Ing. Mecánico, Prof. Julio Segura. Caracas. Escuela de Ingeniería Mecánica. UCV. 161 P.

Gil, A., 1998, “Modelo de Simulación para Convención Forzada Laminar entre Placas Paralelas”. Tesis Ing. Mecánico, Prof. Francisco García. Caracas. Escuela de Ingeniería Mecánica. UCV. 122 P.

Bar-Cohen, A., y Rohsenow, W. M. “Thermally Optimum Spacing of Vertical Natural Convection Cooled, Parallel Plates” *J. Heat Transfer.*, 1984, Vol 106, No. 1, pp. 116-123.

Shih, T., 1984, *Numerical Heat Transfer*, Washington D.C.: Hemisphere Publishing Corporation. 563 p.

Versteeg, H. and Malalasekera, W. 1995, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*, London, Longman Scientific & Technical. 257 p.

Fox, R. W. y Mac Donald, 1989, *Introducción a la Mecánica de los Fluidos*, México, McGraw Hill. 750 p.

Incropera, F. and DeWitt, D. 1996, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, Singapore, John Wiley and Sons, Inc. 4ta Ed. 919 p.

Rocca Villa, R., 1978, *Introducción a la Mecánica de los Fluidos*, México, Limusa. 492 p.

Kays, W. M. and Craeford, M. E. 1980, *Conceccion Heat and Mass Transfer*, New York, Mc Graw Hill. 756 p.

Mills, A., 1994, *Transferencia de Calor*, Barcelona (España), Addison-Wesley Iberoamericana. 932 p.

Patankar, S., 1980, *Numerical Heat Transfer and Flud Flow*, Washington D.C., Hemisphere. 197 p.

Rohsenow, W. M., y Choi, H. 1961, *Heat, Mass and Momentum Transfer*, Prentice Hall, New Jersey,

Churchill, S. W., and Usagi, R., "A General Expression for the Correlation of Rates of Transfer and Other Phenomena," *AIChE Journal*, Vol. 18, No. 6, 1972, pp. 1121-1128.

Mc Adams, W.H., *Heat Transmission*, McGraw Hill, New York.

Elenbaas, W., "Heat Dissipation of Parallel Plates by Free Convection" *Physical*, 1942, Vol. 9, No. 1, pp. 37-41, Holland.

Bodoia, J.R., and Osterle, J.F., "The Development of Free Convection between Heated Vertical Plates" *ASME Journal of Heat Transfer*, 1964, Vol. 84, No. 1, pp. 40-44.

Aung, W., "Fully Developed Laminar Free Convection between Vertical Plates Heated Asymmetrically", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1972, Vol. 15, No. 1, pp. 1577-1580.

## ANEXO

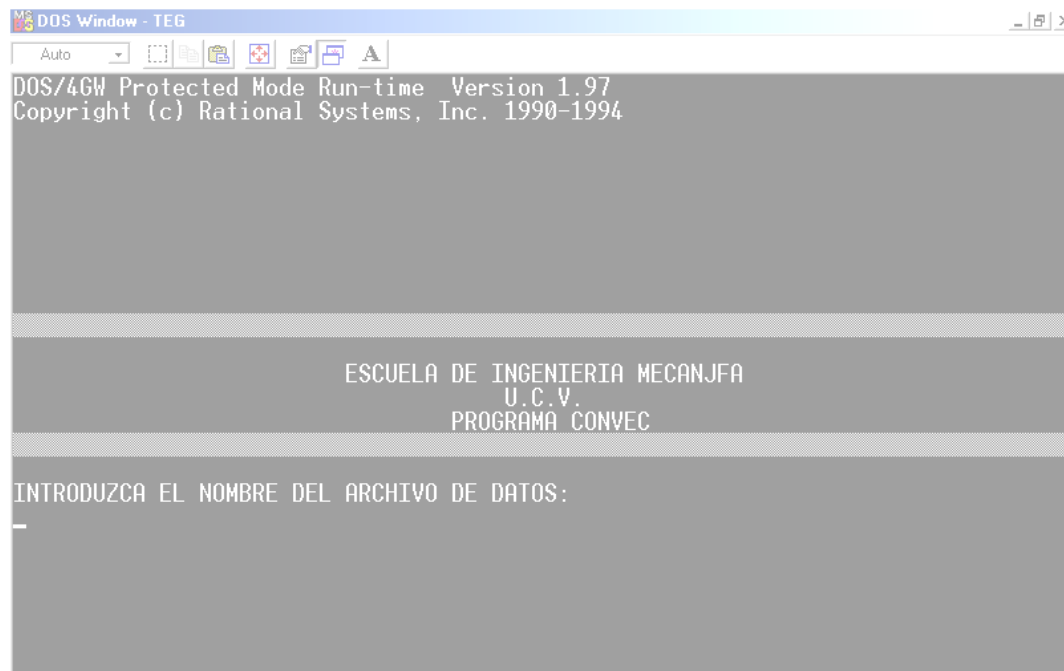
El programa se ejecuta desde MATLAB con solo escribir su nombre “Teg” (ver figura A.1) este comando ejecuta a su vez un archivo (.exe) creado en FORTRAN 77 que realiza todos los cálculos y guarda los resultados en archivos de texto que a su vez son utilizados por MATLAB para la representación gráfica.



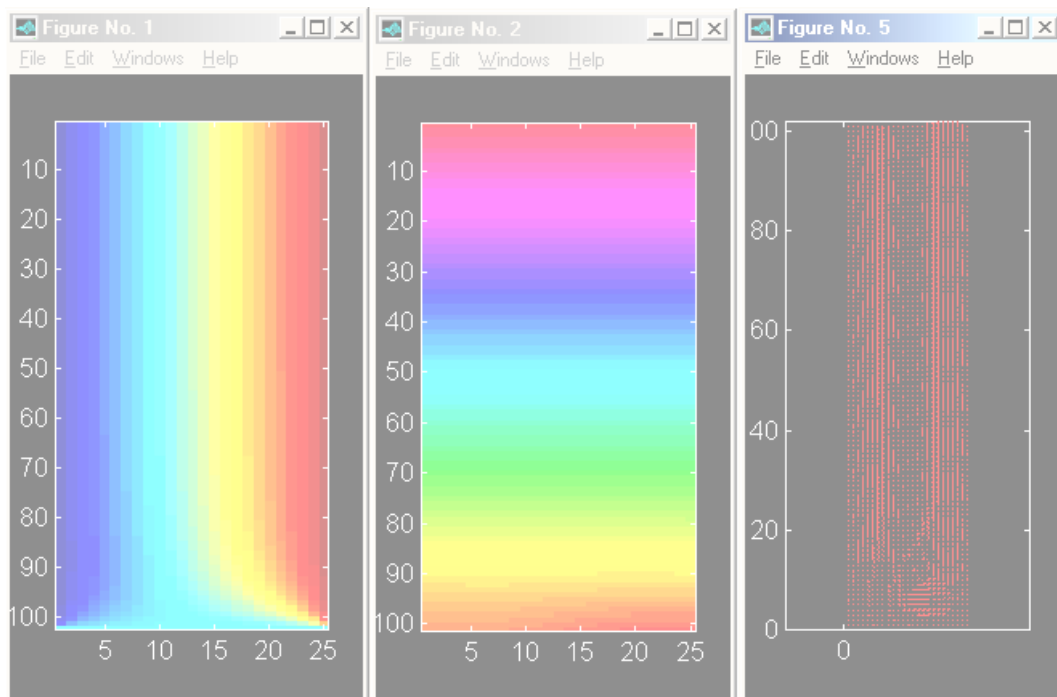
**Fig. A.1** Ventana de MATLAB

Al ejecutar este primer comando “**teg**” inmediatamente se enlaza el entorno de MATLAB con FORTRAN 77 a través del programa teg.exe (Figura A.2), donde se solicita al usuario el nombre del archivo de datos (\*.dat) creado previamente con las características del sistema que se requiere simular. Este archivo contendrá los valores del número de filas, columnas, temperatura de entrada del fluido, etc., como se expresa en el capítulo V “Resultados”. El programa también solicitará el nombre del archivo de resultados (\*.res), el cual recopilará la información calculada por el programa.

Finalmente al terminar de ejecutar “**teg.exe**” se regresa al entorno MATLAB, y este generará ventanas de visualización de las distribuciones de temperatura, presión y velocidad (Figura A.3).



**Fig. A.2** Ventana de DOS



**Fig. A.3** Ventanas con los resultados de MATLAB

La rutina de MATLAB se describe a continuación:

```
dos('c:\utils\matlab\bin\teg.exe');
t;
p;
u;
v;
```

donde t, p, u y v ejecutan las siguientes subrutinas:

t
<pre>load tt.m; colormap(jet); figure(1); imagesc(tt)</pre>
p
<pre>load pp.m; colormap(jet); figure(2); imagesc(pp)</pre>
u
<pre>load uux.m;load uuy.m;load uu0.m;load uu.m; figure(3); quiver(uux,uuy,uu0,uu);</pre>
v
<pre>load vvx.m;load vvy.m;load vv0.m;load vv.m; figure(4); quiver(vvx,vvy,vv,vv0);</pre>

**Tabla A.1** Rutinas en MATLAB

Los comandos utilizados en FORTRAN 77 se listan a continuación en orden de ejecución.

PROGRAM CONVEC

El propósito de este trabajo fue determinar la distribución de temperatura de un fluido bajo la acción de convección mixta, entre placas paralelas verticales con temperaturas superficiales uniformes. El régimen del fluido es laminar y se consideran propiedades termo físicas constantes (a excepción de la densidad). El modelo matemático esta constituido por las ecuaciones de continuidad, de cantidad de movimiento y de energía. Las ecuaciones que constituyen el modelo matemático fueron discretizadas mediante el método de Volúmenes Finitos con Esquema Híbrido. Se obtuvo la solución del planteamiento utilizando una modificación del algoritmo SIMPLER (Patankar, 1980), y por medio de la aplicación del algoritmo de matriz tridiagonal se resolvió el sistema discreto de ecuaciones resultantes, mediante el recorrido alterno en dirección horizontal y vertical de la malla de cálculo. Los parámetros adimensionales utilizados fueron los números de: Reynolds (Re), Prandtl (Pr), Grashof (Gr) y Eckert (Ec). El algoritmo de cálculo desarrollado fue codificado mediante el lenguaje de computación FORTRAN 77. Para la implantación del código computacional se desarrolló una interfase aplicando el programa MATLAB que permite automatizar la representación gráfica de los resultados obtenidos. Para la validación de los resultados numéricos, se compararon los resultados obtenidos con una correlación semi empírica establecida en iguales condiciones y características a las usadas en este trabajo. Lo resultados obtenido muestran que el modelo desarrollado describe adecuadamente la convección mixta laminar entre placas paralelas verticales.

C-----

DECLARACION DE VARIABLES

```

INTEGER          I,J,Y,JF,IC,Z,ZMAX
INTEGER          HI,MI,SI,HF,MF,SF,M,D,AN
CHARACTER*12     FILERES,FILEDAT
DOUBLEPRECISION G,DX,DY,R1,R2,TI,T1,T2,DIF,RE,TOLP,TOLT
DOUBLEPRECISION PRO(2,25),VIS,CP,K,VAPROX
DOUBLEPRECISION ERRT,ERVEL,ERRO,RA,SNU,NUP
DOUBLEPRECISION UVP(0:1017,0:217),UVPO(0:1017,0:217)
DOUBLEPRECISION UVPP(0:1017,0:217),TYD (0:1017,0:217)
DOUBLEPRECISION A (0:1017,0:217)

```

ANEXO

```

C-----
COMIENZO DEL PROGRAMA
      G=DX=DY=R1=R2=TI=T1=T2=DIF=RE=TOLP=TOLT=0.0D0
      I=J=Y=JF=IC=Z=ZZ=ZMAX=I=J=HI=MI=SI=HF=MF=SF=M=D=AN=0.0D0
      VIS=CP=K=VAPROX=0.0D0
      ERRT=ERVEL=ERRO=RA=SNU=NUP=0.0D0
      CALL DATO(G,DX,DY,R1,R2,TI,T1,T2,DIF,RE,TOLP,TOLT,JF,IC,ZMAX
& ,FILERES,FILEDAT,PRO,VIS,CP,K,VAPROX,UVP,UVPP,TYD,A)
      CALL GETDAT(AN,M,D)
      CALL GETTIM(HI,MI,SI)
C-----
CONIENZO DEL LAZO ITERATIVO
      Y=-1
      DO 1000 Z=0,ZMAX
      Y=1+Y
      DO 100 I=0,JF+1
      DO 110 J=0,IC+1
      UVPO(2*I,2*J)=UVP(2*I,2*J)
      UVPO(2*I+1,2*J)=UVP(2*I+1,2*J)
      UVPO(2*I,2*J+1)=UVP(2*I,2*J+1)
      TYD(2*I+1,2*J+1)=TYD(2*I+1,2*J)
110  CONTINUE
100  CONTINUE
      CALL PSED(DX,DY,TYD,VIS,JF,IC,UVP,UVPP,A)
      CALL PRES(UVP,A,JF,IC,R1,DX,DY)
      CALL VELU(JF,IC,DX,DY,R2,G,VIS,UVP,A,TYD,VAPROX)
      CALL VELV(JF,IC,DX,DY,R1,VIS,UVP,A,TYD)
      CALL PRES2(UVP,UVPP,A,JF,IC,R1,DX,DY)
      CALL CRRV(UVP,A,DX,DY,JF,IC)
      CALL ENER(UVP,DX,DY,DIF,JF,IC,T1,T2,R1,TYD)
      CALL CVRG(JF,IC,UVP,UVPO,TYD,ERRO,ERVEL,ERRT)
      CALL ACTMAT(JF,IC,PRO,TYD)
      I=Y/200
      IF(I.EQ.1)THEN
      WRITE(*,*)'ITERANDO LA ECUACION DE MOMENTUM ->'
      WRITE(*,222)ERRO
      WRITE(*,223)ERVEL
      WRITE(*,224)ERRT,Z
222  FORMAT('ERROR P:',E10.3,2X)
223  FORMAT('ERROR V:',E10.3,2X)

```

ANEXO

```

224  FORMAT('ERROR T: ',E10.3,2X,'ITE:',I7,/)
      Y=0
      ENDIF
      IF(ERRO.LT.TOLP.AND.ERVEL.LT.TOLP.AND.ERRT.LT.TOLT) GOTO 33
1000  CONTINUE
C-----
FIN DEL LAZO ITERATIVO
33    IF(Z.GT.ZMAX) GOTO 44
      WRITE(*,*) 'CONVERGENCIA LOGRADA EN ',Z,' ITERACIONES'
      CALL GETTIM(HF,MF,SF)
      PAUSE
44    IF(Z.GT.ZMAX) THEN
      WRITE(*,*) 'NO SE LOGRO LA CONVERGENCIA'
      WRITE(*,*) 'LUEGO DE ',ZMAX,' ITERACIONES'
      READ(*,*)
      END IF
      WRITE(8,*) ' ARCHIVO DE RESULTADOS--->[PROGRAMA CONVEC]'
      WRITE(8,440)D,M,AN
440   FORMAT(1X,'FECHA DD/MM/AA: ',I2,'/',I2,'/',I4)
      WRITE(8,444)IC,JF,DX,DY
444   FORMAT(1X,'MALLA:',I3,' COLUMNAS', ' X ',I3, ' FILAS'
&      ,4X,' DELTA X=',2X,F7.4,2X,' DELTA Y=',F7.4)
      WRITE(8,555)RE,VIS,TYD(2,2)
555   FORMAT(1X,'FLUIDO: ', ' REYNOLDS=',
&      F6.2,' VISCOCIDAD= ',E10.3,' DENSIDAD=',F8.3)
      WRITE(8,666)Z
666   FORMAT(1X,'NUMERO DE ITERACIONES:',I7)
      WRITE(8,777)HI,MI,SI
777   FORMAT(1X,'HORA DE INJFIO      : ',I2,': ',I2,': ',I2)
      WRITE(8,888)HF,MF,SF
888   FORMAT(1X,'HORA DE CULMINACION : ',I2,': ',I2,': ',I2)
999   FORMAT(12X,1000I24)
998   FORMAT(' ',1000F24.15)
997   FORMAT(305I4)
990   FORMAT(/)
C-----
---GUARDA RESULTADOS
      OPEN(10,FILE='tt.m',STATUS='OLD')
      OPEN(11,FILE='pp.m',STATUS='OLD')
      OPEN(12,FILE='uu.m',STATUS='OLD')

```

ANEXO



```

OPEN(13,FILE='vv.m',STATUS='OLD')
OPEN(14,FILE='uu0.m',STATUS='OLD')
OPEN(15,FILE='uux.m',STATUS='OLD')
OPEN(16,FILE='uuy.m',STATUS='OLD')
OPEN(17,FILE='vv0.m',STATUS='OLD')
OPEN(18,FILE='vvx.m',STATUS='OLD')
OPEN(19,FILE='vvy.m',STATUS='OLD')

WRITE(8,990)
WRITE(8,*) 'VELOCIDAD U (m/s)'
WRITE(8,999)(2*J,J=1,IC)
WRITE(15,997)(J,J=1,IC)
WRITE(16,997)(I,I=1,JF+1)
DO I=0,JF
WRITE(8,*)2*I+1,(UVP(2*I+1,2*J),J=1,IC)
WRITE(12,998)(UVP(2*I+1,2*J),J=1,IC)
WRITE(14,*)(0,J=1,IC)
END DO
WRITE(8,990)
WRITE(8,*) 'VELOCIDAD V (m/s)'
WRITE(8,999)(2*J+1,J=0,IC+4)
WRITE(18,997)(j,j=1,IC+1)
WRITE(19,997)(i,i=1,JF+1)
DO I=1,JF+1
WRITE(8,*)2*I,(UVP(2*I,2*J+1),J=0,IC+4)
WRITE(13,998)(UVP(2*I,2*J+1),J=0,IC)
WRITE(17,*)(0,J=0,IC)
END DO
WRITE(8,990)
WRITE(8,*) 'PRESION P (Pa)'
WRITE(8,999)(2*J,J=1,IC)
DO I=JF+1,1,-1
WRITE(8,*)2*I,(UVP(2*I,2*J),J=1,IC)
WRITE(11,998)(UVP(2*i,2*j),j=1,IC)
END DO
WRITE(8,990)
WRITE(8,*) 'TEMPERATURA T (K)'
WRITE(8,999)(2*J,J=1,IC)
DO I=JF+1,0,-1
WRITE(8,*)2*I,(TYD(2*I+1,2*J),J=1,IC)

```

```

WRITE(10,*) (TYD(2*i+1,2*j), j=1, IC)
END DO
WRITE(8,990)

```

```

C-----SUBROUTINAS-----
C-----LEE DATOS

```

```

SUBROUTINE DATO(G,DX,DY,R1,R2, TI, T1, T2, DIF, RE, TOLP, TOLT, JF, IC, ZMAX
&, FILERES, FILEDAT, PRO, VIS, CP, K, VAPROX, UVP, UVPP, TYD, A)
    INTEGER          I, J, JF, IC, ZMAX
    CHARACTER*12     FILERES, FILEDAT
    CHARACTER*1      S
    DOUBLEPRECISION G, DX, DY, R1, R2, TI, T1, T2, DIF, RE, PR, TOLP, TOLT
    DOUBLEPRECISION PRO(2,25), VIS, CP, K, VAPROX
    DOUBLEPRECISION UVP(0:1017,0:217), UVPP(0:1017,0:217)
    DOUBLEPRECISION A (0:1017,0:217), TYD (0:1017,0:217)
    S=CHAR(178)
    WRITE(*,33)
    WRITE(*,33)
33  FORMAT(/,/,/)
    WRITE(*,*) (S,K=1,80)
    WRITE(*,11)
11  FORMAT(25X, 'ESCUELA DE INGENIERIA MECANICA',/,37X, 'U.C.V. ')
    WRITE(*,22)
22  FORMAT(33X, 'PROGRAMA CONVEC')
    WRITE(*,*) (S,K=1,80)
    WRITE(*,*) 'INTRODUZCA EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE DATOS:'
    READ(*, '(A)') FILEDAT
    WRITE(*,*) 'INTRODUZCA EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE RESULTADOS:'
    READ(*, '(A)') FILERES
    OPEN(5, FILE=FILEDAT, STATUS='OLD')
    OPEN(8, FILE=FILERES, STATUS='NEW', RECL=5000)
    READ(5,*) JF, IC, DX, DY, RE, PR, VIS, CP, K, TI,
&T1, T2, TOLP, TOLT, ZMAX, R1, R2, G
    DO J=1,25
    READ(5,*) (PRO(I,J), I=1,2)
    ENDDO
    DO 300 I=0,1017
    DO 310 J=0,217
    TYD (I,J)=TI
    UVP (I,J)=0.0D0

```

ANEXO

```

      UVPP(I,J)=0.0D0
      A   (I,J)=0.0D0
310    CONTINUE
300    CONTINUE
      CALL ACTMAT(JF,IC,PRO,TYD)
      DIF=VIS/PR/TYD(2,2)
      VAPROX=RE*VIS/(TYD(2,2)*2*IC*DY)
      DO J=1,IC
      UVP(1,2*J)=VAPROX
      END DO
      RETURN
      END
C-----VALORES DE DENSIDAD
      SUBROUTINE ACTMAT(JF,IC,PRO,TYD)
      INTEGER I,J,JF,IC,K
      DOUBLEPRECISION TYD(0:1017,0:217)
      DOUBLEPRECISION PRO(2,25)
      DO 200 I=0, JF+1
      DO 210 J=0, IC+1
      PNF=24
      K=1
      IF (TYD(2*I+1,2*J).LT.PRO(1,K)) THEN
      TYD(2*I,2*J)=(TYD(2*I+1,2*J)-PRO(1,K+1))*(PRO(2,K+1)
&-PRO(2,K))/(PRO(1,K+1)-PRO(1,K))+PRO(2,K+1)
      END IF
      DO K=1, PNF
      IF (TYD(2*I+1,2*J).EQ.PRO(1,k)) THEN
      TYD(2*I,2*J)=PRO(2,K)
      END IF
      IF(TYD(2*I+1,2*J).GT.PRO(1,k).AND.TYD(2*I+1,2*J)
&.LT.PRO(1,K+1))THEN
      TYD(2*I,2*J)=(TYD(2*I+1,2*J)-PRO(1,K+1))*(PRO(2,K+1)
&-PRO(2,K))/(PRO(1,K+1)-PRO(1,K))+PRO(2,K+1)
      ENDIF
      IF (TYD(2*I+1,2*J).GT.PRO(1,k).AND.K.EQ.PNF) THEN
      TYD(2*I,2*J)=(TYD(2*I+1,2*J)-PRO(1,K))*(PRO(2,K)
&-PRO(2,K-1))/(PRO(1,K)-PRO(1,K-1))+PRO(2,K)
      ENDIF
      ENDDO
210    CONTINUE

```

ANEXO

```

200  CONTINUE
      RETURN
      END
C-----CALCULA SEUDO-VELOCIDADES
      SUBROUTINE PSED(DX,DY,TYD,VIS,JF,IC,UVP,UVPP,A)

      DOUBLEPRECISION DX,DY,VIS
      DOUBLEPRECISION TYD(0:1017,0:217),A(0:1017,0:217)
      DOUBLEPRECISION UVP(0:1017,0:217),UVPP(0:1017,0:217)
      DOUBLEPRECISION F(4),D(4),B(4)
      INTEGER JF,IC,I,J,K
      DO 500 J=1,IC
      DO 510 I=1,JF
      F(1)=-0.5*DY*TYD(2*I+2,2*J)*(UVP(2*I+1,2*J)+UVP(2*I+3,2*J))
      F(2)= 0.5*DY*TYD(2*I,2*J)*(UVP(2*I+1,2*J)+UVP(2*I-1,2*J))
      F(3)=-0.5*DX*(UVP(2*I,2*J+1)+UVP(2*I+2,2*J+1))*(TYD(2*I,2*J)+
&TYD(2*I+2,2*J)+TYD(2*I,2*J+2)+TYD(2*I+2,2*J+2))*0.25
      F(4)= 0.5*DX*(UVP(2*I,2*J-1)+UVP(2*I+2,2*J-1))*(TYD(2*I,2*J)+
&TYD(2*I+2,2*J)+TYD(2*I,2*J-2)+TYD(2*I+2,2*J-2))*0.25
      D(1)=VIS*DY/DX
      D(2)=VIS*DY/DX
      D(3)=VIS*DX/DY
      D(4)=VIS*DX/DY
      DO 511 K=1,4
      B(K)=DMAX1(0.0D0,F(K),(D(K)+0.5*F(K)))
511  CONTINUE
      A(2*I+1,2*J)=B(1)+B(2)+B(3)+B(4)
      UVPP(2*I+1,2*J)=(B(1)*UVP(2*I+3,2*J)+B(2)*UVP(2*I-1,2*J)
&+B(3)*UVP(2*I+1,2*J+2)+B(4)*UVP(2*I+1,2*J-2))
&/A(2*I+1,2*J)
      UVPP(1,2*J)=UVP(1,2*J)
      UVPP(2*JF+3,2*J)=UVPP(2*JF-1,2*J)
510  CONTINUE
500  CONTINUE
      DO 700 J=1,IC-1
      DO 710 I=1,JF+1
      F(1)=-0.5*DY*(UVP(2*I+1,2*J)+UVP(2*I+1,2*J+2))*(TYD(2*I,2*J)+
&TYD(2*I+2,2*J)+TYD(2*I,2*J+2)+TYD(2*I+2,2*J+2))*0.25
      F(2)= 0.5*DY*(UVP(2*I-1,2*J)+UVP(2*I-1,2*J+2))*(TYD(2*I,2*J)+
&TYD(2*I-2,2*J)+TYD(2*I,2*J+2)+TYD(2*I-2,2*J+2))*0.25

```

ANEXO

```

F(3)=-0.5*DX*TYD(2*I,2*J+2)*(UVP(2*I,2*J+1)+UVP(2*I,2*J+3))
F(4)= 0.5*DX*TYD(2*I,2*J)*(UVP(2*I,2*J+1)+UVP(2*I,2*J-1))
D(1)=VIS*DY/DX
D(2)=VIS*DY/DX
D(3)=VIS*DX/DY
D(4)=VIS*DX/DY
DO 711 K=1,4
B(K)=DMAX1(0.0D0,F(K),(D(K)+0.5*F(K)))
711  CONTINUE
A(2*I,2*J+1)=B(1)+B(2)+B(3)+B(4)
UVPP(2*I,2*J+1)=(B(1)*UVP(2*I+2,2*J+1)+B(2)*UVP(2*I-2,2*J+1)
&+B(3)*UVP(2*I,2*J+3)+B(4)*UVP(2*I,2*J-1))
&/A(2*I,2*J+1)
710  CONTINUE
700  CONTINUE
      RETURN
      END
C-----CALCULO DEL CAMPO DE PRESIONES
SUBROUTINE PRES(UVP,A,JF,IC,R1,DX,DY)
  INTEGER I,J,IC,JF
  DOUBLEPRECISION UVP(0:1017,0:217),A(0:1017,0:217),G(0:1017,0:217)
  DOUBLEPRECISION R1,DX,DY, X(0:1017),AP(0:1017),RA(0:1017)
  DOUBLEPRECISION AN(0:1017),AS(0:1017),AE(0:1017),AW(0:1017)
C-----BARRIDO OESTE-ESTE
  DO 109 I=1,JF
    X(I)=0.0D0
109  CONTINUE
    DO 100 J=1,IC
      DO 110 I=1,JF
        G(2*I,2*J)= (UVP(2*I-1,2*J)-UVP(2*I+1,2*J))*DY+
&(UVP(2*I,2*J-1)-UVP(2*I,2*J+1))*DX
110  CONTINUE
100  CONTINUE
      DO 900 J= 1 , IC
        DO 910 I= 1 , JF
          IF (I.EQ.1) THEN
            AW (I)= 0.0D0
            AE (I)=-DY*DY/A(2*I+1,2*J)
          ELSE
            AW(I)=-DY*DY/A(2*I-1,2*J)

```

ANEXO

```

AE(I)=-DY*DY/A(2*I+1,2*J)
END IF
IF (J.EQ.1) THEN
AN(I)=DX*DX/A(2*I,2*J+1)
AS(I)=0.0D0
RA(I)=G(2*I,2*J)+AN(I)*UVP(2*I,2*J+2)
ELSE IF(J.EQ.IC) THEN
AN(I)=0.0D0
AS(I)=DX*DX/A(2*I,2*J-1)
RA(I)=G(2*I,2*J)+AS(I)*UVP(2*I,2*J-2)
ELSE IF(J.GT.1.AND.J.LT.IC) THEN
AN(I)=DX*DX/A(2*I,2*J+1)
AS(I)=DX*DX/A(2*I,2*J-1)
RA(I)=G(2*I,2*J)+AS(I)*UVP(2*I,2*J-2)+AN(I)*UVP(2*I,2*J+2)
END IF
AP(I)=AN(I)+AS(I)-AE(I)-AW(I)
910 CONTINUE
CALL TRIDIAG(JF,AW,AP,AE,RA,X)
DO 920 I=1,JF
UVP(2*I,2*J)=UVP(2*I,2*J)+R1*(X(I)-UVP(2*I,2*J))
920 CONTINUE
900 CONTINUE
C-----BARRIDO SUR-NORTE
DO 1000 I=1,JF
DO 1010 J=1, IC
IF(J.EQ.1) THEN
AN(J)=-DX*DX/A(2*I,2*J+1)
AS(J)=0.0D0
ELSE IF(J.EQ.IC) THEN
AN(J)=0.0D0
AS(J)=-DX*DX/A(2*I,2*J-1)
ELSE IF(J.GT.1.AND.J.LT.IC) THEN
AN(J)=-DX*DX/A(2*I,2*J+1)
AS(J)=-DX*DX/A(2*I,2*J-1)
END IF
IF(I.EQ.1) THEN
AE(J)=DY*DY/A(2*I+1,2*J)
AW(J)=0.0D0
RA(J)=G(2*I,2*J)+AE(J)*UVP(2*I+2,2*J)
ELSE

```

```

    AE(J)=DY*DY/A(2*I+1,2*J)
    AW(J)=DY*DY/A(2*I-1,2*J)
    RA(J)=G(2*I,2*J)+AE(J)*UVP(2*I+2,2*J)+AW(J)*UVP(2*I-2,2*J)
    END IF
    AP(J)=-AN(J)-AS(J)+AE(J)+AW(J)
1010 CONTINUE
    CALL TRIDIAG(IC,AS,AP,AN,RA,X)
    DO 1020 J=1,IC
    UVP(2*I,2*J)=UVP(2*I,2*J)+R1*(X(J)-UVP(2*I,2*J))
1020 CONTINUE
1000 CONTINUE
    RETURN
    END

C-----CALCULO DEL CAMPO DE PRESIONES
    SUBROUTINE PRES2(UVP,UVPP,A,JF,IC,R1,DX,DY)
    INTEGER I,J,IC,JF
    DOUBLEPRECISION UVPP(0:1017,0:217)
    DOUBLEPRECISION UVP(0:1017,0:217),A(0:1017,0:217),G(0:1017,0:217)
    DOUBLEPRECISION R1,DX,DY, X(0:1017),AP(0:1017),RA(0:1017)
    DOUBLEPRECISION AN(0:1017),AS(0:1017),AE(0:1017),AW(0:1017)

C-----BARRIDO OESTE-ESTE
    DO 109 I=1,JF
    X(I)=0.0D0
109 CONTINUE
    DO 100 J=1,IC
    DO 110 I=1,JF
    G(2*I,2*J)=(UVP(2*I-1,2*J)-UVP(2*I+1,2*J))*DY+
&(UVP(2*I,2*J-1)-UVP(2*I,2*J+1))*DX
110 CONTINUE
100 CONTINUE
    DO 900 J= 1 , IC
    DO 910 I= 1 , JF
    IF (I.EQ.1) THEN
    AW (I)= 0.0D0
    AE (I)=-DY*DY/A(2*I+1,2*J)
    ELSE
    AW(I)=-DY*DY/A(2*I-1,2*J)
    AE(I)=-DY*DY/A(2*I+1,2*J)
    END IF
    IF (J.EQ.1) THEN

```

ANEXO

```

AN(I)=DX*DX/A(2*I,2*J+1)
AS(I)=0.0D0
RA(I)=G(2*I,2*J)+AN(I)*UVPP(2*I,2*J+2)
ELSE IF(J.EQ.IC) THEN
AN(I)=0.0D0
AS(I)=DX*DX/A(2*I,2*J-1)
RA(I)=G(2*I,2*J)+AS(I)*UVPP(2*I,2*J-2)
ELSE IF(J.GT.1.AND.J.LT.IC) THEN
AN(I)=DX*DX/A(2*I,2*J+1)
AS(I)=DX*DX/A(2*I,2*J-1)
RA(I)=G(2*I,2*J)+AS(I)*UVPP(2*I,2*J-2)+AN(I)*UVPP(2*I,2*J+2)
END IF
AP(I)=AN(I)+AS(I)-AE(I)-AW(I)
910 CONTINUE
CALL TRIDIAG(JF,AW,AP,AE,RA,X)
DO 920 I=1,JF
UVPP(2*I,2*J)=UVPP(2*I,2*J)+R1*(X(I)-UVPP(2*I,2*J))
920 CONTINUE
900 CONTINUE
C-----BARRIDO SUR-NORTE
DO 1000 I=1,JF
DO 1010 J=1, IC
IF(J.EQ.1) THEN
AN(J)=-DX*DX/A(2*I,2*J+1)
AS(J)=0.0D0
ELSE IF(J.EQ.IC) THEN
AN(J)=0.0D0
AS(J)=-DX*DX/A(2*I,2*J-1)
ELSE IF(J.GT.1.AND.J.LT.IC) THEN
AN(J)=-DX*DX/A(2*I,2*J+1)
AS(J)=-DX*DX/A(2*I,2*J-1)
END IF
IF(I.EQ.1) THEN
AE(J)=DY*DY/A(2*I+1,2*J)
AW(J)=0.0D0
RA(J)=G(2*I,2*J)+AE(J)*UVPP(2*I+2,2*J)
ELSE
AE(J)=DY*DY/A(2*I+1,2*J)
AW(J)=DY*DY/A(2*I-1,2*J)
RA(J)=G(2*I,2*J)+AE(J)*UVPP(2*I+2,2*J)+AW(J)*UVPP(2*I-2,2*J)

```

ANEXO



```

      END IF
      AP(J)=-AN(J)-AS(J)+AE(J)+AW(J)
1010  CONTINUE
      CALL TRIDIAG(IC,AS,AP,AN,RA,X)
      DO 1020 J=1,IC
      UVPP(2*I,2*J)=UVPP(2*I,2*J)+R1*(X(J)-UVPP(2*I,2*J))
1020  CONTINUE
1000  CONTINUE
      RETURN
      END
C-----SOLUCION DE LA ECUACION DE MOMENTUM EN X
      SUBROUTINE VELU(JF,IC,DX,DY,R2,G,VIS,UVP,A,TYD,VAPROX)
      INTEGER I,J,IC,JF,K
      DOUBLEPRECISION DX,DY,VIS,VAPROX,R2,G
      DOUBLEPRECISION AW(0:1017),AE(0:1017),AN(0:1017)
      DOUBLEPRECISION AS(0:1017),AP(0:1017),RA(0:1017)
      DOUBLEPRECISION F(4),D(4),FA(4),TF(0:1017),X(0:1017)
      DOUBLEPRECISION UVP(0:1017,0:217),A(0:1017,0:217)
      DOUBLEPRECISION TYD(0:1017,0:217)
C-----BARRIDO
OESTE-ESTE
      DO 500 J=1,IC
      DO 510 I=1,JF
      F(1)=-0.5*DY*TYD(2*I+2,2*J)*(UVP(2*I+1,2*J)+UVP(2*I+3,2*J))
      F(2)= 0.5*DY*TYD(2*I,2*J)*(UVP(2*I+1,2*J)+UVP(2*I-1,2*J))
      F(3)=-0.5*DX*(UVP(2*I,2*J+1)+UVP(2*I+2,2*J+1))*(TYD(2*I,2*J)+
&      TYD(2*I+2,2*J)+TYD(2*I,2*J+2)+TYD(2*I+2,2*J+2))*0.25
      F(4)= 0.5*DX*(UVP(2*I,2*J-1)+UVP(2*I+2,2*J-1))*(TYD(2*I,2*J)+
&      TYD(2*I+2,2*J)+TYD(2*I,2*J-2)+TYD(2*I+2,2*J-2))*0.25
      D(1)=VIS*DY/DX
      D(2)=VIS*DY/DX
      D(3)=VIS*DX/DY
      D(4)=VIS*DX/DY
      DO 511 K= 1 , 4
      FA(K)=DMAX1(0.0D0,F(K),D(K)+0.5*F(K))
511  CONTINUE
      AE(I)      =-FA(1)
      AW(I)      =-FA(2)
      AN(I)      =-FA(3)
      AS(I)      =-FA(4)

```

ANEXO

```

AP(I)          = -(AE(I)+AW(I)+AN(I)+AS(I))
A(2*I+1,2*J) = AP(I)
TF(I)          = (UVP(2*I,2*J)-UVP(2*I+2,2*J))*DY+G
&* (TYD(2*I,2*J)+TYD(2*I+2,2*J))*0.5*(DX*DY)**2
RA(I)=TF(I)-AN(I)*UVP(2*I+1,2*J+2)-AS(I)*UVP(2*I+1,2*J-2)
510  CONTINUE
RA(1)=RA(1)-AW(1)*UVP(1,2*J)
RA(JF-1)=RA(JF-1)-AE(JF-1)*UVP(2*JF+1,2*J)
CALL TRIDIAG(JF-1,AW,AP,AE,RA,X)
DO 520 I=1,JF-1
UVP(2*I+1,2*J)=UVP(2*I+1,2*J)+R2*(X(I)-UVP(2*I+1,2*J))
520  CONTINUE
UVP(2*JF+1,2*J)=UVP(2*JF-1,2*J)
UVP(2*JF+3,2*J)=UVP(2*JF-1,2*J)
500  CONTINUE
DO I=1,JF
UVP(2*I+1,0) = -UVP(2*I+1,2)
UVP(2*I+1,2*IC+2) = -UVP(2*I+1,2*IC)
END DO

C-----BARRIDO SUR-NORTE

DO 600 I=1,JF
DO 610 J=1,IC
F(1)=-0.5*DY*TYD(2*I+2,2*J)*(UVP(2*I+1,2*J)+UVP(2*I+3,2*J))
F(2)= 0.5*DY*TYD(2*I,2*J)*(UVP(2*I+1,2*J)+UVP(2*I-1,2*J))
F(3)=-0.5*DX*(UVP(2*I,2*J+1)+UVP(2*I+2,2*J+1))*(TYD(2*I,2*J)+
&TYD(2*I+2,2*J)+TYD(2*I,2*J+2)+TYD(2*I+2,2*J+2))*0.25
F(4)= 0.5*DX*(UVP(2*I,2*J-1)+UVP(2*I+2,2*J-1))*(TYD(2*I,2*J)+
&TYD(2*I+2,2*J)+TYD(2*I,2*J-2)+TYD(2*I+2,2*J-2))*0.25
D(1)= VIS*DY/DX
D(2)= VIS*DY/DX
D(3)= VIS*DX/DY
D(4)= VIS*DX/DY
DO 611 K= 1 , 4
FA(K)=DMAX1(0.0D0,F(K),D(K)+0.5*F(K))
611  CONTINUE
AE(J)          = -FA(1)
AW(J)          = -FA(2)
AN(J)          = -FA(3)
AS(J)          = -FA(4)
AP(J)          = -(AE(J)+AW(J)+AN(J)+AS(J))

```

ANEXO

```

A(2*I+1,2*J)=AP(J)
TF(J)=(UVP(2*I,2*J)-UVP(2*I+2,2*J))*DY+G
&*(TYD(2*I,2*J)+TYD(2*I+2,2*J))*0.5*(DX*DY)**2
RA(J)=TF(J)-AE(J)*UVP(2*I+3,2*J)-AW(J)*UVP(2*I-1,2*J)
610 CONTINUE
RA(1)=RA(1)+AS(1)*UVP(2*I+1,2)
RA(IC)=RA(IC)+AN(IC)*UVP(2*I+1,2*IC)
CALL TRIDIAG(IC,AS,AP,AN,RA,X)
DO 630 J=1,IC
UVP(2*I+1,2*J)=UVP(2*I+1,2*J)+R2*(X(J)-UVP(2*I+1,2*J))
630 CONTINUE
UVP(2*I+1,0)=-UVP(2*I+1,2)
UVP(2*I+1,2*IC+2)=-UVP(2*I+1,2*IC)
600 CONTINUE
DO J=1,IC
UVP(2*JF+1,2*J)=UVP(2*JF-1,2*J)
UVP(2*JF+3,2*J)=UVP(2*JF-1,2*J)
UVP(1,2*J)=VAPROX
END DO
RETURN
END
C-----SOLUCION DE LA ECUACION DE MOMENTUM EN Y
SUBROUTINE VELV(JF,IC,DX,DY,R1,VIS,UVP,A,TYD)
INTEGER I,J,IC,JF,K
DOUBLEPRECISION DX,DY,VIS,R1
DOUBLEPRECISION AW(0:1017),AE(0:1017),AN(0:1017)
DOUBLEPRECISION AS(0:1017),AP(0:1017),RA(0:1017)
DOUBLEPRECISION F(4),D(4),FA(4),TF(0:1017),X(0:1017)
DOUBLEPRECISION UVP(0:1017,0:217),A(0:1017,0:217)
DOUBLEPRECISION TYD(0:1017,0:217)
C-----BARRIDO OESTE-ESTE
DO 700 J=1,IC-1
DO 710 I=1,JF+1
F(1)=-0.5*DY*(UVP(2*I+1,2*J)+UVP(2*I+1,2*J+2))*(TYD(2*I,2*J)+
& TYD(2*I+2,2*J)+TYD(2*I,2*J+2)+TYD(2*I+2,2*J+2))*0.25
F(2)= 0.5*DY*(UVP(2*I-1,2*J)+UVP(2*I-1,2*J+2))*(TYD(2*I,2*J)+
& TYD(2*I-2,2*J)+TYD(2*I,2*J+2)+TYD(2*I-2,2*J+2))*0.25
F(3)=-0.5*DX*TYD(2*I,2*J+2)*(UVP(2*I,2*J+1)+UVP(2*I,2*J+3))
F(4)= 0.5*DX*TYD(2*I,2*J)*(UVP(2*I,2*J+1)+UVP(2*I,2*J-1))
D(1)= VIS*DY/DX

```

ANEXO

```

D(2)= VIS*DY/DX
D(3)= VIS*DX/DY
D(4)= VIS*DX/DY
DO 711 K= 1 , 4
FA(K)=DMAX1(0.0D0 , F(K) , D(K)+0.5*F(K))
711 CONTINUE
AE(I)      =-FA(1)
AW(I)      =-FA(2)
AN(I)      =-FA(3)
AS(I)      =-FA(4)
AP(I)      =-(AE(I)+AW(I)+AN(I)+AS(I))
A(2*I,2*J+1)= AP(I)
TF(I)      =(UVP(2*I,2*J)-UVP(2*I,2*J+2))*DX
RA(I)=TF(I)-AN(I)*UVP(2*I,2*J+3)-AS(I)*UVP(2*I,2*J-1)
710 CONTINUE
RA(1)=RA(1)-AW(1)*UVP(0,2*J+1)
RA(JF)=RA(JF)-AE(JF)*UVP(2*JF,2*J+1)
CALL TRIDIAG(JF,AW,AP,AE,RA,X)
DO 720 I=1,JF
UVP(2*I+1,2*J+1)=UVP(2*I,2*J+1)+R1*(X(I)-UVP(2*I,2*J+1))
UVP(1,2*J+1)=UVP(0,2*J+1)
720 CONTINUE
700 CONTINUE
DO I=0,JF
DO J=0,IC
UVP(2*I,2*J+1)=UVP(2*I+1,2*J+1)
END DO
END DO
C-----BARRIDO SUR-NORTE
DO 800 I=1,JF+1
DO 810 J=1,IC-1
F(1)=-0.5*DY*(UVP(2*I+1,2*J)+UVP(2*I+1,2*J+2))*(TYD(2*I,2*J)+
&TYD(2*I+2,2*J)+TYD(2*I,2*J+2)+TYD(2*I+2,2*J+2))*0.25
F(2)= 0.5*DY*(UVP(2*I-1,2*J)+UVP(2*I-1,2*J+2))*(TYD(2*I,2*J)+
&TYD(2*I-2,2*J)+TYD(2*I,2*J+2)+TYD(2*I-2,2*J+2))*0.25
F(3)=-0.5*DX*TYD(2*I,2*J+2)*(UVP(2*I,2*J+1)+UVP(2*I,2*J+3))
F(4)= 0.5*DX*TYD(2*I,2*J)*(UVP(2*I,2*J+1)+UVP(2*I,2*J-1))
D(1)= VIS*DY/DX
D(2)= VIS*DY/DX
D(3)= VIS*DX/DY

```

ANEXO

```

D(4)= VIS*DX/DY
DO 811 K= 1 , 4
FA(K)=DMAX1(0.0D0 ,F(K) ,D(K)+0.5*F(K))
811 CONTINUE
AE(J)      =-FA(1)
AW(J)      =-FA(2)
AN(J)      =-FA(3)
AS(J)      =-FA(4)
AP(J)      =-(AE(J)+AW(J)+AN(J)+AS(J))
A(2*I,2*J+1)= AP(J)
TF(J)=(UVP(2*I,2*J)-UVP(2*I,2*J+2))*DY
RA(J)=TF(J)-AE(J)*UVP(2*I+2,2*J+1)-AW(J)*UVP(2*I-2,2*J+1)
810 CONTINUE
CALL TRIDIAG(IC-1,AS,AP,AN,RA,X)
DO 830 J=1,IC-1
UVP(2*I+1,2*J+1)=UVP(2*I,2*J+1)+R1*(X(J)-UVP(2*I,2*J+1))
UVP(1,2*J+1)=UVP(0,2*J+1)
830 CONTINUE
800 CONTINUE
DO I=0,JF
DO J=0,IC
UVP(2*I,2*J+1)=UVP(2*I+1,2*J+1)
END DO
END DO
RETURN
END
C-----CORRECCION DEL CAMPO DE VELOCIDADES
SUBROUTINE CRRV(UVP,A,DX,DY,JF,IC)
  INTEGER JF,IC,I,J
  DOUBLEPRECISION DX,DY,UVP(0:1017,0:217),A(0:1017,0:217)
  DO 100 I=1, JF-1
  DO 110 J=1, IC
    UVP(2*I+1,2*J)=UVP(2*I+1,2*J)+(UVP(2*I,2*J)-UVP(2*I+2,2*J))*DY/
    &A(2*I+1,2*J)
    UVP(2*JF+1,2*J)=UVP(2*JF-1,2*J)
    UVP(2*JF+3,2*J)=UVP(2*JF-1,2*J)
  110 CONTINUE
  100 CONTINUE
  DO 200 I=1, JF
  DO 210 J=1, IC-1

```

ANEXO

```

      UVP(2*I,2*J+1)=UVP(2*I,2*J+1)+(UVP(2*I,2*J)-UVP(2*I,2*J+2))*DX/
&A(2*I,2*J+1)
210  CONTINUE
200  CONTINUE
      RETURN
      END
C-----SOLUCION DE LA ECUACION DE ENERGIA
      SUBROUTINE ENER(UVP,DX,DY,DIF,JF,IC,T1,T2,R1,TYD)
      INTEGER I,J,JF,IC,K
      DOUBLEPRECISION DX,DY,DIF,T1,T2,R1,F(4),D(4),FA(4)
      DOUBLEPRECISION AE(0:1017),AW(0:1017),AN(0:1017)
      DOUBLEPRECISION AS(0:1017),AP(0:1017),RA(0:1017)
      DOUBLEPRECISION UVP(0:1017,0:217),TYD(0:1017,0:217)
      DOUBLEPRECISION X(0:1017)
C-----BARRIDO OESTE-ESTE
      DO 400 I=1,JF
      DO 410 J=1,IC
      F(1)=-DY*UVP(2*I+1,2*J)
      F(2)= DY*UVP(2*I-1,2*J)
      F(3)=-DX*UVP(2*I,2*J+1)
      F(4)= DX*UVP(2*I,2*J-1)
      D(1)= DIF*DY/DX
      D(2)= DIF*DY/DX
      D(3)= DIF*DX/DY
      D(4)= DIF*DX/DY
      DO 411 K= 1 , 4
      FA(K)=DMAX1(0.0D0,F(K),D(K)+0.5*F(K))
411  CONTINUE
      AE(J)=-FA(1)
      AW(J)=-FA(2)
      AN(J)=-FA(3)
      AS(J)=-FA(4)
      AP(J)=- (AE(J)+AW(J)+AN(J)+AS(J))
      RA(J)=-AE(J)*TYD(2*I+3,2*J)-AW(J)*TYD(2*I-1,2*J)
410  CONTINUE
      RA(1) =RA(1 )-AS(1 )*(2*T2-TYD(2*I+1,2
      RA(IC)=RA(IC)-AN(IC)*(2*T1-TYD(2*I+1,2*IC))
      CALL TRIDIAG(IC,AS,AP,AN,RA,X)
      DO 430 J=1,IC
      TYD(2*I+1,2*J)=TYD(2*I+1,2*J)+R1*(X(J)-TYD(2*I+1,2*J))

```

ANEXO

```

430  CONTINUE
400  CONTINUE
     DO J=1, IC
     TYD(2*JF+3,2*J)=TYD(2*JF+1,2*J)
     END DO

C-----BARRIDO SUR-NORTE

     DO 500 J=1, IC
     DO 501 I=1, JF
     F(1)=-DY*UVP(2*I+1,2*J)
     F(2)= DY*UVP(2*I-1,2*J)
     F(3)=-DX*UVP(2*I,2*J+1)
     F(4)= DX*UVP(2*I,2*J-1)
     D(1)= DIF*DY/DX
     D(2)= DIF*DY/DX
     D(3)= DIF*DX/DY
     D(4)= DIF*DX/DY
     DO 510 K=1,4
     FA(K)=DMAX1(0.0D0,F(K),D(K)+0.5*F(K))
510  CONTINUE
     AE(I)=-FA(1)
     AW(I)=-FA(2)
     AN(I)=-FA(3)
     AS(I)=-FA(4)
     AP(I)=- (AE(I)+AW(I)+AN(I)+AS(I))
     RA(I)=-AN(I)*TYD(2*I+1,2*J+2)-AS(I)*TYD(2*I+1,2*J-2)
501  CONTINUE
     RA(1 )=RA(1 )-AW(1 )*TYD(1 ,2*J)
     RA(JF)=RA(JF)-AE(JF)*TYD(2*JF+1,2*J)
     CALL TRIDIAG(JF,AW,AP,AE,RA,X)
     DO 520 I=1, JF
     TYD(2*I,2*J)=TYD(2*I,2*J)+R1*(X(I)-TYD(2*I,2*J))
520  CONTINUE
     TYD(2*JF+3,2*J)=TYD(2*JF+1,2*J)
500  CONTINUE
     DO I=1, JF
     TYD(2*I+1,0 )=2*T2-TYD(2*I+1,2 )
     TYD(2*I+1,2*IC+2)=2*T1-TYD(2*I+1,2*IC)
     END DO
     RETURN
     END

```

ANEXO

```

C-----RESUELVE EL SISTEMA DE ECUACIONES DE MATRICES
TRIDIAGONALMETE DOMINANTES
      SUBROUTINE TRIDIAG(N,E,B,C,G,X)
      INTEGER N
      DOUBLEPRECISION E(0:1017),B(0:1017),BB(0:1017)
      DOUBLEPRECISION C(0:1017),G(0:1017),X(0:1017),T
C-----SUSTITUCION HACIA
ADELANTE
      DO 400 I=1,N
      BB(I)=B(I)
400   CONTINUE
      DO 410 I=2,N
      T   =E(I)/BB(I-1)
      BB(I)=BB(I)-C(I-1)*T
      G(I) =G(I)-G(I-1)*T
410   CONTINUE
C-----SUSTITUCION HACIA
ATRAS
      X(N)=G(N)/BB(N)
      DO 420 I=1, N-1
      J  =N-I
      X(J)=(G(J)-C(J)*X(J+1))/BB(J)
420   CONTINUE
      RETURN
      END
C-----VERIFICA LA CONVERGENCIA
      SUBROUTINE CVRG(JF,IC, UVP,UVPO,TYD,ERRO,ERVEL,ERRT)
      INTEGER I,J,JF,IC
      DOUBLEPRECISION UVP(0:1017,0:217),UVPO(0:1017,0:217)
      DOUBLEPRECISION TYD(0:1017,0:217)
      DOUBLEPRECISION ERRO,ERVEL,ERRT,ERRT1
      DOUBLEPRECISION ERRU,ERRU1,ERRV,ERRV1,ERRP,ERRP1
      ERV1=0.0D0
      ERRU1=0.0D0
      ERRP1=0.0D0
      ERVEL=0.0D0
      ERRT1=0.0D0
      DO 100 I=0,JF+1
      DO 110 J=0,IC+1
      ERRT =DABS(TYD(2*I+1,2*J)-TYD(2*I+1,2*J+1))

```

ANEXO



```
ERRT1=DMAX1 (ERRT,ERRT1)
ERRV =DABS(UVP(2*I,2*J+1) -UVPO(2*I,2*J+1))
ERRV1=DMAX1 (ERRV,ERRV1)
ERRU =DABS(UVP(2*I+1,2*J) -UVPO(2*I+1,2*J))
ERRU1=DMAX1 (ERRU,ERRU1)
ERVEL=DMAX1 (ERRU1,ERRV1,ERVEL)
ERRP=DABS(UVP(2*I,2*J) -UVPO(2*I,2*J))
ERRP1=DMAX1 (ERRP,ERRP1)
110 CONTINUE
100 CONTINUE
ERRO=ERRP1
ERVEL=ERVEL
ERRT=ERRT1
RETURN
END
```