UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA

FACULTAD DE CIENCIAS

POSTGRADO EN MATEMÁTICA

ALGUNAS GENERALIZACIONES DE LA NOCIÓN VARIACIÓN ACOTADA EN EL SENTIDO DE REISZ Y UN TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE RIESZ

Tesis Doctoral presentada ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el Magister Scientiarum Sergio Tulio Rivas A, para optar al título de Doctor en Ciencias mención Matemática.

Tutor: Dr. Nelson J. Merentes

Caracas – Venezuela

Marzo 2012

A la memoria de mis padres.

A mis hijos.

A Isa.

Agradecimientos

A mi amigo Nelson Merentes, quien mantuvo una actitud persistente, durante varios años, para que culminara este trabajo; y quien me planteó los problemas que hemos abordado.

Gracias Nelson, por tus sugerencias y observaciones; y por mantenerme al día en el desarrollo de los temas que hemos abordado.

Al profesor José Luís Sánchez, quien siempre estuvo dispuesto a prestarme la colaboración, en todos los requerimientos que le hice. Gracias por las observaciones al trabajo.

Al Profesor Luís Antonio Azocar, por su invaluable labor, de rastreo, para la adquisición, de muchos de los trabajos, que sirvieron de base para la elaboración de este trabajo. Y por sus sugerencias en la redacción final de este material.

A los profesores Hugo Leiva y José Giménez, con quienes se elaboraron dos de los artículos fruto de esta investigación.

A Sergio, mi hijo, quien me prestó ayuda técnica, en el uso del software para de la escritura de este trabajo.

A la Licenciadas Odalys Mejias, quien siempre me prestó su colaboración en la obtención de muchas de las referencias bibliográficas utilizadas en esta tesis.

A todo el personal del Banco Central de Venezuela que me prestó su colaboración.

En fin, a todos aquellos que de una u otra manera, tuvieron algo que ver en el desarrollo de este trabajo.

Índice general

Resumen

Este trabajo lo iniciamos haciendo un recuento del desarrollo histórico, del clásico concepto de función de variación acotada introducido por Camille Jordan en 1881. Presentamos un listado de propiedades de las funciones de variación acotada, de segunda variación acotada, definidas por Charles De La Valleé Pousin en 1908 y de k-variación estudiadas por Tiberiu Popoviciu.

Posteriormente, pasamos a exponer varios resultados sobre los conceptos de función de p-variación de Riesz de 1910 y de segunda p-variación de Riesz, introducido por Nelson Merentes en 1992 ($p > 1$); para dar paso a un nuevo concepto de variación de funciones que denominamos (p, k)-variación en el sentido de Riesz-Popoviciu ($p > 1$ y k entero positivo), combinando las variaciones de Riesz y Popoviciu, generalizando así las nociones de primera y segunda p-variación de Riesz.

Sobre el espacio $RV_{(p,k)}[a, b]$, de las funciones con (p, k)-variación acotada, demostramos varias propiedades de relevancia. En primer lugar, se presenta una caracterización tipo lema de Riesz. Más precisamente, se demuestra que una función tiene (p, k)-variación acotada si su derivada de orden $k-1$ es absolutamente continua y la derivada de orden k está en $L_p[a, b]$. Además se presenta una forma de calcular la (p, k)-variación de una función. Usando esta caracterización, dotamos al espacio $RV_{(p,k)}[a, b]$ de una estructura de espacio de Banach. Estos resultados serán publicados próximamente en Journal of Function Spaces and Applications.

Además, demostramos que la condición de lipschitzidad global del operador de composición, en la condición de Matkowski sobre este espacio, se puede sustituir por una condición de acotación uniforme de este operador.

Proseguimos, exponiendo un conjunto de resultados sobre las noción de φ-variación en el sentido de Riesz, introducida en 1953 por Yu. T. Medve'ed y segunda φ-variación en el sentido de Riesz, estudiada por N. Merentes en 1991. Para luego, construir otro concepto

de variación, denominado (φ, k)-variación en el sentido de Riesz-Popoviciu (φ es una φ-función y k un entero positivo), el cual combina las idea de Merentes, para la segunda φ-variación y las de T. Popoviciu de k-variación. Sobre la clase $\hat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$, de estas funciones, presentamos una nueva versión del Lema de Riesz-Medve'ed, demostrando que toda función de esta clase, tiene derivada de orden $k-1$ absolutamente continua y la derivada de orden k está en $L_\varphi[a,b]$ y dando de una manera explícita una fórmula para calcular la (φ, k)-variación. Usando este resultado presentamos condiciones sobre φ para que la clase $\hat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$ sea un espacio vectorial o condiciones sobre dos φ-funciones φ_1 y φ_2 para que $\hat{V}^R_{(\varphi_1,k)}[a,b] \subset \hat{V}^R_{(\varphi_2,k)}[a,b]$ o para que $\hat{RV}^R_{(\varphi_1,k)}[a,b] \subset \hat{RV}^R_{(\varphi_2,k)}[a,b]$, donde $\hat{RV}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$ denota el espacio vectorial generado por la clase $\hat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$. Además introducimos una norma sobre $\hat{RV}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$ que lo dota de una estructura de espacio de Banach.

Por último, generalizamos la noción de ϕ-variación introducida por M. Schramm en 1985, presentando el concepto de segunda ϕ-variación en el sentido de Schramm para un función $u : [a,b] \to \mathbb{X}$, donde $\mathbb{X}$ es un espacio normado y demostramos que si $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach reflexivo, toda función con segunda ϕ-variación acotada en el sentido de Schramm, es la integral indefinida de una función de ϕ-variación en el sentido de Schramm. Este resultado fue publicado en Opuscula Mathematica a principios de este año.

Introducción [1]

A finales de la tercera década del siglo XIX, el matemático alemán J. P. G. L. Dirichlet, quien vivió escasamente 54 años, demostró el hoy conocido *Criterio de Dirichlet,* que afirma que toda función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por medio de un número finito de trozos monótonos, tiene serie de Fourier puntualmente convergente [**61**]. De esta manera se presenta por primera vez, una demostración de la conjetura del francés Joseph. Fourier sobre la representación de una función por una serie trigonométrica [**66**].

En 1881, el matemático francés Marie Ennemond Camille Jordan [**84**], haciendo un estudio sobre el Criterio de Dirichlet, introduce el concepto de función de variación acotada, como aquellas funciones $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, tales que:

$$V(u; [a, b]) := \underset{\pi}{sup} \sum_{j=1}^{n-1} |u(t_{j+1}) - u(t_j)| < \infty, \tag{0.0.1}$$

donde el supremo se toma sobre las particiones $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$, del intervalo $[a, b]$. Esta clase de funciones se denota por $BV[a, b]$ y tiene una estructura de álgebra de Banach (ver [**18, 37**]) con la norma:

$$\|u\| = |u(a)| + V(u; [a, b]), \quad u \in BV[a, b].$$

En [**84**], C. Jordan caracteriza el espacio $BV[a, b]$, como aquellas funciones que se pueden descomponer como diferencia de dos funciones monótonas (*Teorema de Representación de Jordan*). De esta manera queda establecido que el espacio de funciones de variación acotada en un intervalo, se le puede aplicar el Criterio de Dirichlet.

La noción de variación de Jordan de una función se ha generalizado siguiendo varias direcciones, dependiendo de la utilidad donde se desarrolla. Pero básicamente hay cuatro direcciones.

[1] *El desarrollo de esta investigación estuvo financiada por el Banco Central de Venezuela*

1. Cambiando el conjunto donde toma valores la función. Por ejemplo, considerando un espacio métrico $(\mathbb{X}, d)$ o normado $(\mathbb{X}, \|\,.\,\|)$ (ver [**50**]) o en el caso de multifunciones (ver [**40, 49, 155, 172**]) el espacio $(P(\mathbb{X}), d_H)$, donde d_H es la métrica de Pompeu-Hausdorff (ver [**30, 76, 77**]).
2. Modificando el dominio de la función. Se ha considerando un subconjunto E de $\mathbb{R}$ o un rectángulo en el plano o más general en $\mathbb{R}^n$.
3. Modificando la estructura de la suma (0.0.1) que aparece en la definición.
4. Haciendo combinaciones de las tres anteriores.

En el primer caso cambiamos la suma $\sum\limits_j |u(t_{j+1}) - u(t_j)|$ que aparece en la definición de Jordan por sumas de la forma:

$$\sum_j d(u(t_{j+1}), u(t_j)) \quad o \quad \sum_j \|u(t_{j+1}) - u(t_j)\|\,,$$

según que el espacio $\mathbb{X}$, sea un espacio métrico o normado.

El caso particular $\mathbb{X} = \mathbb{C}$, es considerado en libros clásicos de Análisis o Variable Compleja como [**53, 80**]. Cuando $X = \mathbb{R}^n$, puede revisarse en el libro de T. M. Apostol [**5**] donde se demuestra que:

$$u = (u_1, \ldots, u_2) \in BV([a, b], \mathbb{R}^n) \text{ si y sólo si } u_i \in BV[a, b],\ i = 1, \ldots, n.$$

En el segundo caso, cuando modificamos el dominio de la función, una primera instancia es colocar como dominio a $\mathbb{R}$ (ver [**5, 146**]). También se puede estudiar el artículo [**40**], donde V. V. Chistyakov considera como dominio un subconjunto $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$. En estas dos situaciones la suma (0.0.1) se considera sobre familias

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$$

de puntos del dominio de la función, que podemos considerar como una generalización del concepto de partición de un intervalo, para el conjunto E.

Para el caso de funciones definidas en un rectángulo del plano, en los años 1905-1906 G. Vitali [**164**] y G. H Hardy [**75**] exponen generalizaciones. Además, M. Fréchet [**67, 68**], C Arzelà [**13**], J. Pierpoint [**131**], L. Tonelli [**163**] y H. Hahn [**74**] presentan otras definiciones. En este sentido, es interesante revisar los trabajos de C. R. Adams y J. A. Clarkson publicados en los años 1933-34 donde hacen un estudio comparativo de estas definiciones en [**2, 3**].

En cuanto a las definiciones de variación de una función, haciendo modificaciones de la suma (0.0.1) en la definición dada por Jordan, existen varias definiciones estudiadas, a lo largo de la historia; entre las que podemos mencionar varias que agrupamos como: *Variaciones tipo Riesz, tipo Wiener y tipo De la Vallée Poussin* (ver [**7, 118**]) .

Variaciones tipo Riesz. La primera de ellas, son las denominadas funciones de *p-variación en el sentido de Riesz* $(1 < p, < \infty)$, introducida por Frigyes Riesz en 1910 [**136**]. Riesz define la p-variación de una función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ como:

$$V^R_{(p,1)}(u; [a, b]) = sup \sum_j \left(\frac{|u(t_{j+1}) - u(t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|} \right)^p |t_{j+1} - t_j| ,$$

donde $1 < p < \infty$.

Riesz expone una caracterización de estas funciones, con el hoy denominado *Lema de Riesz.*

Lema de Riesz [**136**].
Sean $1 < p < \infty$ y $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces:

$$V^R_{(p,1)}(u; [a, b]) < \infty \textit{ si y sólo si } u \in AC[a, b] \text{ y } u' \in L_p[a, b] \textit{ y además}$$
$$V^R_{(p,1)}(u; [a, b]) = \int_a^b |u'(t)|^p \, dt.$$

Es de hacer notar que en el trabajo a que hemos hecho mención es donde Riesz demuestra el celebre resultado que el dual de $L_p[a, b]$ es $L_q[a, b]$, $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

En [**18**] L. Avila realiza un estudio detallado de las propiedades y caracterizaciones de este tipo de funciones. También se puede revisar [**138**].

En 1953, Yu. T. Medved'ed en [**112**] extiende este concepto, considerando sumas de la forma

$$\sum_j \varphi \left(\frac{|u(t_{j+1}) - u(t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|} \right) |t_{j+1} - t_j| ,$$

donde $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es lo que se conoce hoy como una *φ-función* o como las llamó Orlicz en sus trabajos *$\mathcal{N}$-función.* Es decir, φ es una función creciente, continua, $0 =$

$\varphi(0) < \varphi(t)$, $t > 0$ y $\varphi(t) \to \infty$, cuando $t \to \infty$. Este concepto se conoce en la literatura como *φ-variación acotada en el sentido de Riesz* y la φ-variación de una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ la denotaremos a lo largo de este trabajo por $V^R_{(\varphi,1)}(u; [a.b])$.

Si φ verifica la denominada condición ∞_1 $\left(\lim\sup_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty \right)$, condición que se impone para que la clase $V^R_{(\varphi,1)}[a,b] = \left\{ u \in \mathbb{R}^{[a,b]} : V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]) < \infty \right\}$ no sea el espacio de las funciones de variación acotada (ver [**97**]); los matemáticos en Yu. T. Medved'ed, Cybertowiscz y Matuszewska demuestran en [**56, 112**] la siguiente generalización del Lema de Riesz .

Lema de Riesz (Medved'ed).
Sean φ una φ-función que verifica la condición ∞_1 y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, entonces:

$$V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]) < \infty \text{ si y sólo si } u \in AC[a,b] \text{ y } u' \in L_\varphi[a,b] \text{ y además}$$
$$V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]) = \int_a^b \varphi\left(|u'(t)|\right) dt.$$

Para ver un estudio con detalles de las funciones con este tipo de variación finita, se puede revisar el trabajo realizado por M. T. Neves en 1994 [**126**]. También es de uso frecuente los resultados obtenidos en 1987, por M. Maligranda y W. Orlicz en [**97**].

A principios de la década del 90, del siglo pasado, N. Merentes presenta en [**113, 115**], dos nuevas generalizaciones de los conceptos estudiados por F. Riesz y Yu. T. Medved'ed, considerando el supremo sobre sumas del tipo:

$$\sum_j \left(\frac{\left| \frac{u(t_{j+2})-u(t_{j+1})}{t_{j+2}-t_{j+1}} - \frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}} \right|}{|t_{j+2}-t_{j-1}|} \right)^p |t_{j+2}-t_j|, \quad p > 1$$

o de la forma:

$$\sum_j \varphi \left(\frac{\left| \frac{u(t_{j+2})-u(t_{j+1})}{t_{j+2}-t_{j+1}} - \frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{t_j-t_{j-1}} \right|}{|t_{j+2}-t_{j-1}|} \right) |t_{j+2}-t_j|,$$

siendo φ una φ-función.

Si existe el supremo de la primera suma, al variar la suma, sobre las particiones del intervalo $[a,b]$, se dice que la función u tiene $(p,2)$-variación acotada en el sentido de Riesz, mientras que en el segundo caso se dice que la función u tiene $(\varphi,2)$-variación acotada en el sentido de Riesz y la variación (el supremo de las sumas del segundo tipo) se denota por $V^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b])$.

En estos trabajos N. Merentes [**113, 115**], generaliza el lema de Riesz. En particular para el caso de $(\varphi,2)$-variación, tenemos:

Generalización del Lema de Riesz (Merentes).
Sean φ una φ-función que verifica la condición ∞_1 y $u:[a,b]\to\mathbb{R}$, entonces

$$V^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b])<\infty,\text{ si y sólo si } u'\in AC[a,b] \text{ y } \mathrm{u}''\in L_\varphi[a,b].$$

Además

$$V^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b])=\int_a^b\varphi\left(|u''(t)|\right)dt.$$

Recientemente, en el año 2009, en su Tesis Doctoral, W. Aziz [**19**] extiende las definiciones de Riesz-Medved'ed para funciones definidas en un rectángulo del plano.

En el estudio de esta generalización, también se puede revisar los trabajos de W. Aziz, H. Leiva, N. Merentes y B. Rzepka [**22**] y W. Aziz, H. Leiva, N. Merentes y J. L. Sánchez [**23**].

En estas investigaciones se asume que $a=(a_1,a_2)$ y $b=(b_1,b_2)$ son puntos del plano, $u: I_a^b=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\to\mathbb{R}$ y φ es una φ-función; y la φ-variación en el sentido de Riesz de u en el rectángulo I_a^b , denotada por $TV^R_\varphi(u;I_a^b)$, se define como la suma de los supremos de las sumas del tipo:

$$\sum_i\varphi\left(\frac{|\triangle_{10}u(t_{i+1},c)|}{|t_{i+1}-t_i|}\right)|t_{i+1}-t_i| \quad , \quad \sum\varphi\left(\frac{|\triangle_{01}u(a,s_{j+1})|}{|s_{j+1}-s_i|}\right)|s_{j+1}-s_j|$$

y

$$\sum_{i,j}\varphi\left(\frac{|\triangle_{11}u(t_i,s_j)|}{|\triangle t_i||\triangle s_j|}\right)|\triangle t_i|\,|\triangle s_j|\,,$$

donde

$$a_1<t_1<\cdots<t_m<b_1,\ a_2<s_1<\cdots<s_n<b_2,$$

son sendas particiones de los intervalos $[a_1,b_1]$ y $[a_2,b_2]$, respectivamente; y

$\triangle t_i=t_{j+1}-t_i,\quad \triangle s_j=s_{j+1}-s_j,$

$\triangle_{10}u(t_{i+1},b_1)=u(t_{i+1},b_1)-u(t_i,b_1),$

$\triangle_{01}u(a_1,s_{j+1})=u(a_1,s_{j+1})-u(a_1,s_j),$

$\triangle_{11}u(t_i,s_j)=u(t_i,s_j)-u(t_{i+1},s_{j+1})-u(t_i,s_{j+1})-u(t_{i+1},s_j).$

Si φ cumple la conocida condición ∞_1, estos investigadores, demuestran la siguiente generalización del lema de Riesz.

G*eneralización del Lema de Riesz para funciones definidas en un rectángulo.*
Sean φ una φ-función que verifica la condición ∞_1 y $u : I_a^b \to \mathbb{R}$, entonces:

$$TV_\varphi^R(u; I_a^b) < \infty, \text{ si y sólo si } u \text{ es absolutamente continua en } I_a^b$$

$$\text{en el sentido de Carathéodory y}$$

$$\int_{a_1}^{b_1} \varphi\left(\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t,s)\right|\right) dt + \int_{a_2}^{b_2} \varphi\left(\left|\frac{\partial u}{\partial s}(t,s)\right|\right) ds + \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \varphi\left(\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}(t,s)\right|\right) dtds < \infty.$$

Además la suma de las tres integrales es igual a $TV_\varphi^R(u; I_a^b)$.

W. Aziz también demuestra que el espacio vectorial $BV_\varphi^R(I_a^b)$ generado por la clase de funciones que tienen φ-variación total en el sentido de Riesz finita, tiene una estructura de álgebra de Banach con la norma:

$$\|u\|_\varphi^R := \|u\|_\infty + inf\left\{\varepsilon > 0 : TV_\varphi^R\left(\frac{u-u(a)}{\epsilon}; [a,b]\right) \leq 1\right\}.$$

Mas recientemente, en el 2011, M. Bracamonte, J. Giménez y N. Merentes en [**33**], obtienen la generalización para funciones definidas en un rectángulo $\overset{n}{\underset{i=1}{X}}[a_i, b_i]$ en $\mathbb{R}^n$. Más información sobre este tema puede verse en [**34, 35, 36, 63**]o [**32**].

Variaciones Tipo Wiener. Otra manera de generalizar el concepto de variación acotada fue concebido en 1924 por el norteamericano Norbert Wiener, con lo que denominaremos *Variaciones tipo Wiener.* En [**169**] N. Wiener considera expresiones de la forma:

$$\sum_j |u(t_{j+1}) - u(t_j)|^p, \quad 1 < p < \infty.$$

El caso $0 < p \leq 1$ es estudiado por F. W. Gehring en 1954 en [**69**], para funciones a valores complejos.

Trece años después de introducido el concepto de variación tipo Wiener, el matemático alemán, L. C. Young [**171**], hace una generalización, usando φ-funciones, al estudiar expresiones de la forma:

$$\sum_{j} \varphi\left(|u(t_{j+1}) - u(t_j)|\right).$$

Un estudio completo de estas funciones fue realizado en 1959, por los matemáticos polacos J. Musielak y W. Orlicz en ([**123, 124**]). También se puede revisar [**97, 126**]. En [**126**] se presentan las demostraciones en detalle.

En el año 2010 A. J. Guerrero en su Tesis Doctoral [**72**] estudia una generalización de esta noción, para funciones reales, definidas en un rectángulo del plano, considerando el supremo de sumas como las siguientes

$$\sum_{i} \varphi\left(|\triangle_{10} u(t_{i+1}, c)|\right),$$

$$\sum \varphi\left(|\triangle_{01} u(a, s_{j+1})|\right),$$

$$\sum \varphi\left(|\triangle_{11} u(t_i, s_j)|\right).$$

En este caso la φ-variación total en el sentido de Wiener de una función $u : I_a^b \to \mathbb{R}$ se denota por $TV_\varphi^W(u; I_a^b)$. Guerrero demuestra que el espacio vectorial $BV_\varphi^W(I_a^b)$ generado por la clase de funciones tales que $TV_\varphi^W(u; I_b^a) < \infty$ es un espacio de Banach con la norma:

$$\|u\|_\varphi^W = \|u\|_\infty + inf\left\{\varepsilon > 0 : TV_\varphi^W\left(\frac{u - u(a)}{\varepsilon}; I_a^b\right) \leq 1\right\}.$$

Otra generalización de la noción dada por Jordan, la realiza en 1972, Daniel Waterman en [**165**]. En este caso, se consideran expresiones del tipo:

$$\sum_{n} \frac{|u(b_n) - u(a_n)|}{\lambda_n},$$

donde $\{[a_n, b_n]\}_{n\geq 1}$ es una familia de subintervalos del intervalo $[a, b]$, no solapados y $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de números reales positivos, tal que la serie $\sum_n \frac{1}{\lambda_n}$ es divergente. Este tipo de sucesiones es lo que se conoce como una Λ-sucesión o Λ-sucesión en el sentido de Waterman. Las funciones con esta variación y sus propiedades son estudiadas por S. Perlman y D. Waterman en [**129, 130, 165, 166, 167**]. En 1995 L.

De Jesús hace un estudio detallado de las funciones de Λ-variación acotada, introducida por Waterman, en su Tesis de Grado [**58**]. También puede verse el artículo de F. Prus-Wisniowski [**134**] donde se expone una recopilación de resultados y problemas abiertos sobre este tema. También M. Avdispahič ha escrito varios trabajos sobre este tema (ver [**16, 17**]).

La funciones de Λ-variación acotada en el sentido de Waterman, en el caso de dos variables, son introducidas por A. A. Saakyan y A. I. Sabblin en 1986/87 en [**153, 154**] y M. I. Dyachenko y D. Waterman hacen un estudio de las mismas el año 2004 [**62**]. Estos autores consideran una Λ- sucesión $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ y toman sumas del tipo

$$\sum_{i,j} \frac{|\Delta_{11} u(t_i, t_j)|}{\lambda_i \lambda_j}.$$

En las XXIV Jornadas Venezolana de Matemáticas L. Anzola presenta una ponencia sobre este tema (ver [**4**]).

Otra manera de generalizar los conceptos de variación de Jordan-Wiener-Young-Waterman [**84, 169, 171, 165**], lo hace M. Schramm en [**158**] a mediados de la década de los años 80 del siglo pasado. En esta ocasión las sumas empleadas por D. Waterman en [**165**] son transformadas en

$$\sum_{n} \varphi_n \left(\left| u(b_n) - u(a_{n)} \right| \right),$$

donde $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ es una ϕ-sucesión; es decir, cada función φ_n, $n \geq 1$ es una φ-función convexa y adicionalmente $\sum_{n\geq 1} \varphi(t)$, diverge, para cada $t > 0$.

Para revisar con detalles, las demostraciones de los resultados relacionados con esta clase de funciones, puede verse el Trabajo de Ascenso presentado por Angela Hernández en 1996 [**78**]. Un resumen de este trabajo se presentó en las IX Jornadas Venezolana de Matemática en 1996, por A. Hernández y S. Rivas [**79**]. El caso de dos variables ha sido estudiado por T. Ereu, N. Merentes y J. L. Sánchez en [**64**]).

Un caso similar a la variación estudiada por Schramm, lo tenemos cuando se considera una sucesión $\phi = \left\{ \frac{\varphi}{\lambda_n} \right\}_{n\geq 1}$, donde $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ convexa verificando la condición

$\frac{\varphi(t)}{t} \to 0$, cuando $t \to 0$ y $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ es una Λ-sucesión. Esta situación la estudia Hwa-Jun Kim el 2004 y 2006 en [**85, 86**] y se conoce como $\phi\Lambda$-variación.

También es importante mencionar otra generalización del concepto de variación acotada, denominado κ-variación, introducido por Boris Koremblum en 1975 (ver [**90**]). En esta oportunidad se considera el supremo de expresiones del tipo:

$$\frac{\sum\limits_j |u(t_{j+1}) - u(t_j)|}{\sum\limits_j \kappa\left(\frac{t_{j+1}-t_j}{b-a}\right)}, \tag{0.0.2}$$

donde $\kappa : [0,1] \to [0,1]$ es continua, cóncava, creciente y $\kappa(0) = 0$, $\kappa(1) = 1$, $\frac{k(x)}{x} \to \infty$, cuando $x \to 0$. Las funciones κ con estas propiedades se conocen con la denominación de κ- función. A mediados del año 2011, M. Sanoja recopila varios resultados relacionados con estas funciones en su Tesis de Grado de licenciatura [**157**].

Combinando el concepto de variación de B. Koremblum [**90**] con el dado por M. Schramm [**158**], en 1989, Y-H. Sok y J-K. Park [**162**] presentan una nueva generalización, considerando una ϕ-sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ y modificando el numerador de la suma (0.0.2) por:

$$\sum_j \varphi_n\left(|u(b_n) - u(a_n)|\right).$$

Este tipo de variación se conoce como $\kappa\phi$-variación. Los trabajos desarrollados por D. S. Cyphert y A. Kelingos en 1985 [**54**], S. K. Kim y J. Kim en 1986 [**87**], Y-H. Sok y J-K Park en 1989 [**162**], S. K. Kim y J. Yoon en 1990 [**88**], J. Park y S. H. Choo en 2003 [**128**], H. J. Kim en los años 2004 y 2006 [**85, 86**], J. Park en el 2010 [**127**] y W. Aziz, J. A. Guerrero, N. Merentes y J. Sánchez en el 2011 en [**21**], hacen una exposición de las investigaciones desarrolladas sobre estas funciones.

Variación Tipo De la Vallée Poussin. Otro forma de generalizar el concepto de variación acotada es considerar las *Variaciones tipo De la Vallée Poussin,* introducidas en 1908 en [**59**] por Charles Jean de la Valleé Poussin. Para esto se consideran sumas de las variaciones de cocientes incrementales, es decir sumas del tipo

$$\sum_j \left| \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{t_{j+1} - t_j} - \frac{u(t_j) - u(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right|.$$

Cuando todas estas sumas están acotadas, decimos que la función u tiene segunda variación acotada y el espacio vectorial de estas funciones se denota por $BV_2[a,b]$. Este tipo de funciones admite una descomposición tipo Jordan, pero como diferencia de funciones convexas (ver [**133, 148**]).

Hay varias maneras de generalizar este concepto, una de ellas fue estudiada en 1930 por T. Popoviciu en [**132**] y A. M Russell en [**148**] en 1973, al introducir las funciones de *k-variación acotada*. Para aclarar en qué consiste esta variación, se considera una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y se definen las diferencias divididas, por:

$u[t_1, t_2] = \frac{u(t_2)-u(t_1)}{t_2-t_1}\, , t_1 \neq t_2,$

$u[t_1, \ldots, t_k, t_{k+1}] := \frac{u[t_2,\ldots,t_{k+1}]-u[t_1,\ldots,t_k]}{t_k-t_1}, t_k \neq t_1.$

Ahora se generaliza el concepto estudiado por De La Vallée Poussin tomando las sumas

$$\sum_{j=1}^{n-k} |u[t_{j+1}, \ldots, t_{j+k}] - u[t_j, \ldots, t_{j+k-1}]|\, .$$

Además Popoviciu demuestra un teorema de descomposición tipo Jordan (ver [**132, 133**]). Otros artículos que pueden revisarse sobre este tema son [**122, 151, 156**].

Otra manera de generalizar la variación tipo De La Vallée Poussin fue estudiada por J. R. Webb en [**168**] en 1969 y por A. M. Russell en 1970 [**147**] y F. N. Huggins en 1971 [**81**], considerando una función creciente $m : [a,b] \to \mathbb{R}$ y trasformar las sumas estudiadas por De La Vallée Poussin por

$$\sum_j \left| \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{m(t_{j+1}) - m(t_j)} - \frac{u(t_j) - u(t_{j-1})}{m(t_j) - m(t_{j-1})} \right|.$$

En este caso, si las sumas anteriores son acotadas, decimos que la función u tiene segunda variación acotada respecto a la función creciente m.

Otra referencia que no debemos dejar de mencionar, es el estudio que hacen M. Bracamonte, J. Giménez y N. Merentes en [**35**]. Estos autores consideran una φ-función φ y generalizan el concepto de segunda variación de De La Vallée Poussin, para funciones $u : [a, b] \to \mathbb{X}$, donde $(\mathbb{X}, \|\,.\,\|)$ es un espacio normado, tomando sumas del tipo

$$\sum_j \varphi\left(\|u[t_j, t_{j+1}] - u[t_{j-1}, t_j]\|\right).$$

Otras generalizaciones del concepto de variación acotada. Para concluir este recuento histórico, debemos hacer mención al punto 4. de nuestra clasificación inicial, referido a las combinaciones de las diferentes formas de definir la variación de una función.

Las funciones que trataremos ahora son del tipo $u : E \to \mathbb{X}$, donde $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{X}$ es un espacio métrico o normado. En este tema, los grandes aportes han sido realizados por el matemático de origen ruso, Vyacheslav. V. Chistyakov y algunos de sus colaboradores.

El primero de ellos fue publicado por V. V. Chystiakov, en el año 1997 [**40**], donde se generaliza el concepto de variación introducido por C. Jordan en 1881. Es importante resaltar que el teorema de representación de Jordan garantiza que muchas de las propiedades de las funciones monótonas sean verificadas por las funciones de variación acotada (por ejemplo, existencia de límites laterales, conjunto de discontinuidades numerable, existencia de derivadas c.s, Riemann integrabilidad). Sin embargo, para el caso de las funciones consideradas por Chistyakov no puede plantearse el teorema de representación de Jordan, pues para este tipo de funciones no tiene sentido el concepto de monotonía. De esta manera, en principio no podemos garantizar que estas nuevas funciones, verifique las propiedades de las funciones de variación acotadas a valores reales. Pero en contrapartida, se presenta el siguiente teorema de representación (teorema 3.1 de [**40**]).

Teorema de Descomposición (Chistyakov). $u \in BV(E, \mathbb{X})$ si y sólo $u = g \circ \varphi$, donde $\varphi : E \to \mathbb{R}$ es creciente y $g : \varphi(E) \to \mathbb{X}$ es una función Lipschitz, con constante de lipschitzidad menor o igual a 1.

Este resultado generaliza el *Teorema de Descomposición* del matemático de origen austriaco, H. Federer del año 1966 (ver [**65**]) quien demuestra:

Teorema de Descomposición (Federer). $u \in BV[a,b]$ si y sólo si $u = u = g \circ m$, donde m es monótona y $g : m([a,b]) \to \mathbb{R}$ es Lipschiz, con constante de lipschitzidad menor o igual que 1.

Este último resultado, en cierta forma generaliza otro teorema de descomposición planteado por el polaco W. Sierpiński en [**160**] en 1933, que garantiza que toda función regular $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ se puede descomponer de la forma $u = g \circ m$, donde $m : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótono y $g : m([a,b]) \to \mathbb{R}$ es continua.

En el año 1998, V. V. Chystiakov junto con O. E. Galkin (ver [**48, 49**]) generalizan los conceptos variación de Wiener [**169**] y de Young [**171**]. En estos trabajos también se presentan versiones del teorema de descomposición mencionado arriba.

A comienzos de este siglo, en el año 2000, V. V. Chistyakov en [**42**] generaliza el concepto de variación de Riesz considerada por Yu. T Medved'ed en [**112**] para funciones $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, agregando un peso. Más específicamente, se consideran sumas del tipo

$$\sum_j \varphi\left(\frac{|u(t_{j+1}) - u(t_j)|}{\sigma(t_{j+1}) - \sigma(t_j)}\right)(\sigma(t_{j+1}) - \sigma(t_j)),$$

donde $\sigma : [a,b] \to \mathbb{R}$ es un función creciente, que denomina peso.

El mimo año, Chistyakov publica otro artículo [**43**], donde generaliza este concepto para funciones $u : E \to \mathbb{X}$, donde $\mathbb{X}$ es un espacio métrico y $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$. Además en el Teorema 7, pag. 2708, de este mismo trabajo demuestra una generalización del lema de Riesz-Medved'ev (ver [**112, 136**]), cuando la función peso σ es continuamente diferenciable con derivada positiva y $\mathbb{X}$ es un espacio de Banach reflexivo.

En el año 2002 el mismo autor con M. Balcerzak consideran la variación tipo Hardy-Vitali [**75, 164**] para funciones de dos variables en [**26**]; y en [**45**] V. V. Chistyakov da una estructura de álgebra de Banach tales funciones. Para el año 2005 V. V. Chistyakov considera funciones de varias variables [**46, 47**] y en el año 2010, V. V. Chistyakov y Y. V. Tretyschenco escriben otro artículo sobre el tema (ver[**52**]).

Por otra parte, en 2003 V. V. Chistyakov y O. M. Solycheva [**51**] consideran el caso de variación tipo Waterman [**166**].

En en los años 2009/2010 C. Maniscalco en [**98**] presenta una generalización para el caso de funciones de variación acotada tipo Schramm [**158**]. Además expone el teorema de representación de Chistyakov para este tipo de funciones. Y en el 2011 J. Giménez,

N. Merentes y S. Rivas [**70**], combinan los conceptos de segunda variación de De La Vallée Poussin [**59**] y de Schramm [**158**], para obtener otra generalización.

En el caso de multifunciones ([**14, 15, 31, 39**]), es decir funciones del tipo $u : E \subset \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{X}}$, donde $\mathbb{X}$ es un espacio métrico o normado, se puede revisar los trabajos de 1997 de V. V. Chistyakov [**40**], S. A. Belov, V. V. Chistyakov del 2000 [**29**] y V. V. Chystyakov, O. M. Solycheva del 2002 [**51**] .

Como una contribución al tema de variaciones de funciones, en esta tesis hacemos tres aportes. En primer lugar, combinamos las nociones de de p-variación en el sentido de Riesz ([**136**]) y de k-variación en el sentido de Popoviciu ([**132, 133, 148**]) para crear un nuevo concepto de variación que denominamos (p, k)-variación acotada, construyendo el espacio $RV_{(p,k)}[a, b]$ de las funciones con este tipo de variación y presentamos una caracterización de estas funciones, mediante una generalización del lema de Riesz. Estos resultados serán publicados en [**119**]. En el año 2011 presentamos una ponencia sobre estos tópicos en la XXIV Jornadas Venezolana de Matemática [**120**].

En segundo lugar, siguiendo las ideas de Yu T. Medved'ed en [**112**] y N. Merentes en [**113**] generalizando el concepto de (p, k)-variación acotada, señalado en el párrafo anterior, al concepto de (φ, k)-variación acotada, donde φ es una φ-función convexa. Para este tipo de funciones exponemos una caracterización demostrando un teorema tipo lema de Riesz-Medved'ed-Merentes (ver [**112, 113, 136**]). Los resultados obtenidos han sido expuestos en [**95**].

Finalmente, combinado los conceptos de ϕ-variación de M. Schramm de [**158**] y de De La Vallée Poussin de [**59**] introducimos la noción de segunda variación en el sentido de Schramm y demostramos un teorema de representación de estas funciones. Estos resultado has sido expuestos en una artículo publicado este año (ver [**70**]).

Representación integral de funciones con 2da variación acotada y sus generalizaciones. Además de referirnos al tema de la variación de una función introducida por C. Jordan y sus generalizaciones, haremos mención a un tipo de descomposición o representación de las funciones con algún tipo de variación; algunas de las cuales hemos mencionado en los párrafos anteriores.

Tres tipo de descomposición:

1. Descomposiciones tipo Jordan (ver [**84, 148**]).
2. Descomposiciones mediante un integral indefinida (ver [**80, 81, 125, 137**]).

3. Descomposiciones tipo Serpiński-Federer-Chistyakov (ver [**160, 65, 40**]) .

Nosotros haremos referencia a la segunda de estas representaciones. Un resultado clásico, que aparece en libros de análisis de uso tradicional como [**80, 125**], afirma que toda función absolutamente continua es la integral indefinida de su derivada. Una conclusión similar es obtenida, al inicio de la segunda década del siglo pasado por F. Riesz [**137**], quien demuestra que toda función que tiene variación acotada en el sentido de De La Vallée Poussin [**59**] se puede escribir como la integral de una función de variación acotada en el sentido de Jordan. Más específicamente: $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene segunda variación acotada si y sólo si

$$\exists v \in BV[a, b], \text{ tal que } u(t) = u(a) + \int_a^t v(s)ds.$$

Posteriormente, una conclusión similar ha sido generalizada por varios autores. Por ejemplo, en 1975, F. N. Huggins presenta un teorema análogo para las funciones que tienen segunda variación acotada respecto a una función m (ver [**81**]).

En 1983 A. M. Russell y C. J. F. Upton en [**152**]) generalizan los resultados anteriores para las funciones que tienen segunda variación acotada en el sentido de Wiener.

Más recientemente, en el año 2011, M. Bracamonte, J. Giménez y N. Merentes, en [**35**], generalizan el teorema de representación de F. Riesz [**137**], para funciones $u : [a, b] \to \mathbb{X}$, donde $\mathbb{X}$ es un espacio normado y u tiene variación finita del tipo De La Vallé Poussin.

Mientras que J. Giménez, N. Merentes y S. Rivas en [**70**] logramos obtener, lo propio para la clase de funciones que tienen segunda variación finita en el sentido de Schramm, siendo este un aporte nuestro a este tema.

El operador de composición y la condición de Matkowski. Dados dos intervalos I, J y una función $h : I\text{x}J \to \mathbb{R}$, el operador $H : J^I \to \mathbb{R}^I$ definido por $H(u)(t) := h(t, u(t)), u \in J^I, t \in I$ se denomina operador de composición, superposición o Nemystkij, asociado a la función h. Si este operador transforma un espacio $\mathbb{X}$ en sí mismo se dice que el operador H actúa en el espacio $\mathbb{X}$.

Este operador juega un papel importante en la Teoría de Ecuaciones Diferenciales, integrales y funcionales (ver por ejemplo [**6, 10, 118**]). Algunos de los puntos que se tratan sobre este operador es dar condiciones necesarias y suficientes sobre la función generadora para que el operador actúe en un espacio determinado o asumiendo que actúe qué información podemos obtener de la función generadora si el operador es localmente o globalmente Lischitziano.

En cuanto a la lipschitzidad global, en 1982 el matemático polaco J. Matkwoski demostró en [**101**] que el operador H actúa en el espacio de las funciones lipschitzianas $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($Lip[a,b]$) y es globalmente lipschitziano, es decir, existe una constante L, tal que:

$$\|H(u) - H(v)\|_{Lip[a,b]} \leq L \|u - v\|_{Lip[a,b]}, \ u, v \in Lip[a,b],$$

si y sólo si existen funciones $a, b \in Lip[a,b]$, tales que:

$$h(t,x) = a(t)x + b(t), \ t \in [a,b], \ x \in \mathbb{R}.$$

En otra palabras, la función h es una función afín en la segunda variable.

Existe una amplia variedad de espacios donde se verifica este resultado, también conocido como *Condición o Propiedad de Matkowski* (ver [**8, 118**]), en tal sentido se puede revisar los trabajos [**7, 9, 10, 44, 89, 91, 96, 99, 100, 102, 103, 108, 109, 110, 116, 118, 139, 140, 159**] y para el caso de multifunciones pueden revisarse [**117, 121, 161, 172**].

En vista de la gran variedad de espacios donde se verifica el resultado de Matkowski en [**118**] presentamos la siguiente definición.

Propiedad de Matkowski.
Un espacio de Banach $(\mathbb{X}, \|\,.\,\|)$ de funciones de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ tiene la *propiedad de Matkowski* si el operador de composición H generado por una función h, actúa en $\mathbb{X}$ y es globalmente Lipschitz, entonces existe $\alpha, \beta \in \mathbb{X}$, tales que la función h tiene la forma

$$h(t,x) = a(t)x + b(t), \ t \in [a,b], \ x \in \mathbb{R},$$

En el caso que la función h no dependa de la variable t, la relación anterior garantiza que la función h es una función afín.

Desde el año 2008 se han escrito varios artículos donde se sustituye la condición de lipschitzidad global de la Propiedad de Matkowski por continuidad uniforme del operador de composición (ver [**1, 20, 24, 72, 73, 104, 105, 106, 107**]) y para el caso de multifunciones se puede revisar [**25**].

Más recientemente, se han enviado varios trabajos para su posible publicación, donde se sustituye la condición de continuidad uniforme del operador por una condición de acotación uniforme (ver [**12, 71, 83, 111, 170**]). En esta tesis presentamos nuestra contribución expuesta en [**12**].

Estructura del trabajo. Para concluir esta introducción, hacemos referencia a la organización de este trabajo.

En primer lugar hacemos un extensa introducción donde exponemos el desarrollo del concepto de variación introducido por C. Jordan en 1881 [**84**] hasta nuestros días.

El trabajo lo hemos dividido en cuatro capítulos. El primero de ellos lo dedicamos ha exponer los conceptos de funciones de variación acotada, segunda variación acotada y k-variación acotada y propiedades de estas funciones.

El segundo capítulo lo hemos destinado al estudio de una nueva noción de variación de funciones; las funciones de (p, k)-variación acotada y sus propiedades, pasando por un recuento de las propiedades de las funciones de p-variación acotada en el sentido de Riesz y $(p, 2)$-variación acotada en el sentido de Riesz. Finalizamos el capítulo presentando una generalización del lema de Riesz [**136**], así como algunas consecuencias de éste y exponiendo un resultado que garantiza que en la condición de Matkwoski podemos cambiar la condición de lipschitziad global del operador de composición por una condición más débil, de acotamiento uniforme.

El tercer capítulo lo iniciamos con las nociones y propiedades de las funciones de φ-acotada y $(\varphi, 2)$-variación acotada en el sentido de Riesz presentado en detalle las demostraciones de muchas de las propiedades de estas funciones, la clase conformada por ellas y del espacio vectorial generado; y en particular del lema de Riesz y sus consecuencias. Finalizamos el capítulo, introduciendo un concepto original, que generaliza el concepto de (p, k)-variación acotada, considerando ahora la noción de (φ, k)-variación acotada, donde φ es una φ-función y k un número entero positivo. Siguiendo el esquema desarrollado para los casos $k = 1$ y $k = 2$, procedemos a demostrar un conjunto de propiedades de la clase de estas funciones y del espacio vectorial generado por la misma. Concluimos demostrando una generalización del lema de Riesz y algunas de sus consecuencias y enunciando un teorema que garantiza que la lipschitzidad global del operador de composición puede remplazarse por una condición de acotación uniformen, del operador de composición, en la condición de Matkowski.

Por último, el cuarto capítulo, lo iniciamos presentado la definición de ϕ-variación en el sentido de Schramm (ver [**158**]) y algunas propiedades relevantes de estas funciones. Luego pasamos a introducir el concepto de segunda variación en el sentido de Schramm para funciones $u : [a, b] \to (\mathbb{X}, \| \, . \, \|)$, donde $(\mathbb{X}, \| \, . \, \|)$ es un espacio normado; exponiendo algunas de las propiedades de estas funciones y del espacio generado por ellas; y culminando con un teorema de representación de las funciones que segunda variación acotada en el sentido de Schramm, como la integral indefinida de funciones con ϕ-variación en el sentido de Schramm.

Además, al final de cada capítulo presentamos algunos problemas que pueden ser objeto de investigaciones futuras.

Finalmente, es importante resaltar que como resultado de la investigación desarrollada para la conclusión de este trabajo, se han producido cuatro artículos, uno de ellos, elaborado con la colaboración de los profesores José Giménez y Nelson Merentes fue publicado recientemente [**70**]; otro, aceptado para su publicación, escrito con los profesores Nelson Merentes y José Luís Sánchez [**119**]. Los otros dos trabajos están en proceso de arbitraje, uno con los profesores Hugo Leiva, Nelson Merentes y José Luís Sánchez [**95**] y otro con las licenciadas Francis Armao y Jésica Rojas y la profesora Dorota. Głazowska [**12**].

Capítulo 1

Funciones de k-variación acotada

Este capítulo lo hemos dividido en tres secciones, la primera la dedicamos a exponer algunos resultados sobre las funciones variación acotada; concepto introducido por C. Jordan, a finales del siglo XIX en [**84**]. Damos inicio, presentando la definición, para luego pasar a exponer algunas propiedades de la misma y en particular, el teorema de descomposición de Jordan, que nos permite transferir propiedades de las funciones monótonas a las funciones de variación acotada. Finalizamos la sección, presentando varias definiciones alternativas del concepto dado por Jordan.

En la segunda sección, exponemos la primera de una serie de generalizaciones del concepto de variación acotada, que estudiamos a lo largo de este trabajo. Nos referimos a la noción de segunda variación acotada, estudiada por el matemático Belga, Charles De la Vallée Poussin [**59**], quien tuvo un larga vida de 96 años. La idea de este concepto es presentar la noción de variación dado por Jordan, para la derivada de una función, en forma discreta.

También, exponemos dos teoremas de representación de estas funciones. El primero garantiza que tales funciones se pueden descomponer como la diferencia de funciones convexas (ver [**147**]); y el segundo, como la integral de una función de variación acotada. Este resultado fue demostrado por F. Riesz en el año 1911 (ver [**137**]). En [**81**] F. N. Huggins expone una generalización de este último resultado.

Luego damos una definición alternativa de este concepto, demostrando que la segunda variación de una función es la misma con cualquiera de las dos definiciones.

En la última sección presentamos otra generalización, introducida por el rumano T. Popoviciu al final de la década de los treinta del siglo XX (ver [**132, 133**]). Nos referimos a la noción de k-variación acotada. Sobre las funciones con este tipo de variación presentamos varios resultados que hemos tomado de una trabajo de A. M. Russell ([**148**]), quien además demuestra un teorema de representación tipo Jordan en [**148**] y otro que determinar como calcular la $k-$variación de una función, cuando la derivada de orden $k-1$ es absolutamente continua (ver [**150**]).

Todos los resultados expuestos son conocidos en la literatura del tema, salvo la definición alternativa del concepto de k-variación, que se presenta al final del capítulo; y un un resultado que exhibe las relaciones entre las k-variaciones de una función, usando el concepto dado por T. Popoviciu [**132**] y el expuesto por nosotros. La utilidad de esta definición alternativa la veremos en los capítulos posteriores.

1.1. Funciones de variación acotada.

Denotaremos por $\Pi_{a,1}^{b}$ o $\prod_{a}^{b}$ a la familia de todas las particiones $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ del intervalo $[a, b]$.

En el año 1881 C. Jordan [**84**] introduce el concepto de variación acotada como sigue:

Definición 1.1.1. (*Variación Jordan*) Dada una función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ y una partición $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ del intervalo $[a, b]$, Se definen:

$$\sigma_1(u) = \sigma_1(u, \pi) := \sum_{j=1}^{n-1} |u(t_{j+1}) - u(t_j)| \tag{1.1.1}$$

y

$$V_1(u) = V_1(u; [a, b]) := \sup_{\pi \in \Pi_a^b} \sigma_1(u, \pi).$$

El número $V_1(u; [a, b])$ se denomina *variación en el sentido de Jordan (o simplemente variación) de la función u en el intervalo* $[a, b]$. Si $V_1(u; [a, b]) < \infty$, decimos que la función *u tiene variación acotada o finita en el intervalo* $[a, b]$.

La clase de las funciones de variación acotada se denota por $BV([a, b], \mathbb{R})$ o de una manera más abreviada $BV[a, b]$. Algunas propiedades de estas funciones las describimos en la siguiente proposición (los detalles de las demostraciones se pueden ver en [**18, 125**]).

PROPOSICIÓN 1.1.1. *(Propiedades de las funciones de variación acotada).*

Sea $u \in BV[a,b]$*, entonces:*

1. $V_1(u) = 0 \;\Leftrightarrow\; u = cte.$

2. $V_1(u) < \infty$*, entonces* u *es acotada y* $\|u\|_\infty \leq |u(a)| + V_1(u)$.

3. *Si* u *es monótona, entonces* $V_1(u) = |u(b) - u(a)|$.

4. *Si* $[c,d] \subset [a,b]$*, entonces* $V_1(u;[c,d]) \leq V_1(u;[a,b])$.

5. *Si* $t \in [a,b]$*, entonces* $V_1(u;[a,b]) = V_1(u;[a,t]) + V_1(u;[t,b])$.

Adicionalmente, tenemos

6. $Lip[a,b] \subset BV[a,b]$.

7. $C^1[a,b] \subset BV[a,b]$.

8. $AC[a,b] \subset BV[a,b]$.

Además $BV[a,b]$ tiene una estructura de álgebra de Banach (ver **[18, 37]**) con la norma:

$$\|u\|_1 := |u(a)| + V_1(u), \quad u \in BV[a,b].$$

Por otra parte, en **[125]** se presenta una forma de calcular la variación de una función si ésta es absolutamente continua, más precisamente se demuestra:

PROPOSICIÓN 1.1.2. *Sea* $u \in BV[a,b]$ *una función absolutamente continua, entonces* $V_1(u;[a,b]) = \int_a^b |u'(t)|\, dt$.

Otra manera de calcular la variación, para el caso de funciones continuas es utilizando la función Indicatriz de Banach (Ver **[27, 125]**). Para una función continua $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, se define la Indicatriz de Banach $\mathcal{N} : [min\, u\,,\, máx\, u] \to [0,\infty)$, como $\mathcal{N}(y)$ igual a número de raíces de la ecuación $u(x) = y$, es decir $\mathcal{N}(y)$ es el número de valores $x \in [a,b]$ que verifican la relación $u(x) = y$.

En **[27]** también se puede ver VIII-5 teorema 3 de **[125]** se demuestra el siguiente teorema.

Teorema 1.1.1. *Si* $u \in BV[a,b] \cap C[a,b]$, *entonces*

$$V(u;[a,b]) = \int_{min\,u}^{máx\,u} \mathcal{N}(y)\,dy.$$

Además, C. Jordan en [**84**] da una caracterización de las funciones de variación acotada, demostrando que toda función de variación acotada se puede escribir como diferencia de dos funciones monótonas. Más precisamente, Jordan demuestra que:

Teorema 1.1.2. (*Teorema de Representación de Jordan*). *Sea* $u \in BV[a,b]$, *entonces* u *se puede escribir como diferencia de funciones monótonas. Una de esas descomposiciones es* $u = u_1 - u_2$, *donde* $u_1(t) = V(u;[a,t])$ *y* $u_2 = V(u;[a,t]) - u$.

Este resultado es de gran importancia, porque nos permite extrapolar propiedades de las funciones monótonas (ver VII.1-2 de [**125**]) a las funciones de variación acotada, como se muestra a continuación.

Proposición 1.1.3. *Sea* $u \in BV[a,b]$, *entonces:*

1. u *tiene límites laterales.*
2. u *es acotada.*
3. *El conjunto de discontinuidades de* u *es numerable.*
4. u *posee derivada c.s. en* $[a,b]$.
5. u *es Riemann integrable.*
6. u *tiene serie de Fourier convergente.*

Otra forma de caracterizar estas funciones es el siguiente resultado demostrado por H. Federer en [**65**] en 1969.

Teorema 1.1.3. (*Teorema de Descomposición de Federer*). $u \in BV[a,b]$ *si y sólo si* $u = g \circ m$, *donde* m *es monótona y* $g : m([a,b]) \to \mathbb{R}$ *es Lipschitz, con constante de lipschitzidad menor o igual que 1.*

Otro resultado de interés en relación a estas funciones es el conocido Principio de Helly (ver VIII-4 de [**125**]), que nos permite determinar cuándo una sucesión de funciones con variación acotada, poseen una subsucesión convergente.

TEOREMA 1.1.4. *Dada una familia $\mathcal{F}$ de funciones de $\mathbb{R}^{[a,b]}$, tales que existe una constate K, verificando:*

$$\|u\|_\infty \leq K \ , \ V(u;[a,b]) \leq K, \ \ u \in \mathcal{F}.$$

Entonces existe una sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ de la familia $\mathcal{F}$ que converge puntualmente a una función de $BV[a,b]$.

Hay otras maneras equivalentes de presentar el concepto de variación introducido por Jordan, siguiendo las ideas desarrolladas por M. Schramm en [**158**].

En primer lugar denotemos por $I(a,b)$ la clase de las sucesiones de intervalos cerrados $I = \{I_k = [a_k, b_k]\}_{k\geq 1}$ contenidos en $[a,b]$, tales que la intersección de dos de ellos es vacía o un punto. Denotemos por $I_F(a,b)$ la clase de colecciones finitas de elementos de $I(a,b)$.

Además convenimos que si $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $I = [s,t] \subset [a,b]$, denotamos

$$u(I) := u(t) - u(s).$$

DEFINICIÓN 1.1.2. (*Definición alternativa de Variación Acotada*) Una función u : $[a,b] \to \mathbb{R}$ tiene variación acotada en el intervalo $[a,b]$ si:

$$\underset{\{I_k\}_{k\geq 1} \in I(a,b)}{sup} \sum_{k\geq 1} |u(I_k)| < \infty.$$

Si en la Definición 1.1.2 sólo consideramos el supremo de las sumas sobre colecciones finitas de intervalos $\{I_k\}_{k=1}^m \in I_F(a,b)$, entonces:

$$\underset{\{I_k\} \in I_F(a,b)}{sup} \sum_k |u(I_k)| \leq \underset{\{I_k\} \in I(a,b)}{sup} \sum_k |u(I_k)| \, .$$

Y si $\{I_k\}_{k\geq 1} \in I(a,b)$, entonces:

$$\sum_{k\geq 1} |u(I_k)| = \underset{m\to\infty}{lím} \sum_{k=1}^m |u(I_k)| \leq \underset{\{I_k\} \in I(a,b)}{sup} \sum_k |u(I_k)| \, .$$

De esta manera tenemos que en la Definición 1.1.2 podemos considerar la suma sobre sucesiones de intervalos de $I(a,b)$ o de $I_F(a,b)$.

Por otra parte si $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ es una partición del intervalo $[a,b]$, entonces considerando

$$I_k = [t_k, t_{k+1}],\ k = 1, \ldots, n-1,$$

tenemos que:

$$\sum_{k=1}^{n-1} |u(t_{k+1}) - u(t_k)| = \sum_{k=1}^{n-1} |u(I_k)| \leq \underset{\{I_k\} \in I_F(a,b)}{sup} \sum_{k} |u(I_k)|\,.$$

Además si $\{I_k\}_{k=1}^{n} \in I_F(a,b)$ y hacemos un reordenamiento de estos intervalos de la forma

$$J_k = [s_k, t_k],\ k = 1, \ldots, n,$$

y $s_1 \leq t_1 \leq \cdots \leq s_n \leq t_n$, obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} |u(I_k)| = \sum_{k=1}^{n} |u(J_k)| = \sum_{k=1}^{n} |u(t_k) - u(s_k)| \leq 1(u; [a,b]).$$

En consecuencia la definición alternativa de variación es equivalente a la definición de variación clásica dada por Camille Jordan en 1881.

1.2. Funciones con segunda variación acotada.

En 1908 de la Vallée Poussin introduce el concepto de segunda variación de una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ (ver [**59**]). La idea es definir la variación de Jordan de la “derivada de una función en forma discreta”.

Para simplificar la notación, hacemos la siguiente convención. Si $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $s, t \in [a,b], s \neq t$; definimos la diferencia dividida de orden 1, como

$$u[s,t] = \frac{u(t) - u(s)}{t - s}.$$

Es claro que $u[s,t] = u[t,s]$.

Definición 1.2.1. (*Segunda Variación acotada*). Dadas $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y una partición $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ del intervalo $[a,b]$, con al menos tres puntos, se definen:

$$\sigma_2(u,\pi) := \sum_{j=1}^{n-2} \left| \frac{u(t_{j+2}) - u(t_{j+1})}{t_{j+2} - t_{j+1}} - \frac{u(t_{j+1}) - u(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right|$$

$$= \sum_{j=1}^{n-2} |u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]|$$

y

$$V_2(u;[a,b]) = \sup_{\pi \in \Pi_a^b} \sigma_2(u,\pi).$$

El número $V_2(u,[a,b])$ *es llamado variación en el sentido De la Vallée Poussin de* u *en* $[a,b]$. Si $V_2(u;[a,b]) < \infty$, decimos que la función u *tiene segunda variación acotada o finita en el intervalo* $[a,b]$ y las clase de tales funciones se denota por $BV_2[a,b]$.

De la definición de diferencia dividida de orden 1, se obtienen que si $u, v \in \mathbb{R}^{[a,b]}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $s, t \in [a,b]$, entonces:

$$(u+v)[s,t] = u[s,t] + v[s,t] \quad , \quad (\alpha u)[s,t] = \alpha\,(u[s,t])\,.$$

Estas relaciones y la definición de segunda variación acotada, garantizan que si $u, v \in \mathbb{R}^{[a,b]}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$$V_2(u+v;[a,b]) \leq V_2(u;[a,b] + V_2(v;[a,b]) \quad y \quad V_2(\alpha u;[a,b]) = |\alpha|\, V_2(u;[a,b]).$$

Lo que permite afirmar que $BV_2[a,b]$ es un espacio vectorial.

En el lema 1.2 de **[147]** A. M. Russell demuestra que:

Proposición 1.2.1. *$u \in BV_2[a,b]$, entonces $|u[s,t]|$ es acotado, $s, t \in [a,b], s \neq t$.*

Es decir $BV_2[a,b] \subset Lip[a,b]$ y en consecuencia toda función de $BV_2[a,b]$ es continua. Además $BV_2[a,b] \subset BV[a,b]$.

Por otra parte, existen funciones con segunda variación acotada que no son derivables en algún punto. Por ejemplo, si $a < c < b$ y tomamos $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por:

$$u(t) := \begin{cases} m_1 t + d_1 & , \quad a \leq t \leq c \\ m_2 t + d_2 & , \quad c \leq t \leq b \end{cases} ,$$

donde m_1, m_2, d_1 y d_2 son números tales que:

$$m_1 \neq m_2 \quad , \quad c = -\frac{d_2 - d_1}{m_2 - m_1}.$$

Entonces u es continua y no es derivable en $t = c$ ya que $u'_-(c) = m_1 \neq m_2 = u'_+(c)$ y $V_2(u; [a, b]) = |m_2 - m_1|$.

Además, como consecuencia del teorema 1.1 de [**147**] obtenemos un teorema de representación tipo Jordan, para las funciones de $BV_2[a, b]$. Más precisamente, tenemos

PROPOSICIÓN 1.2.2. *$u \in BV_2[a, b]$, entonces u es la diferencia de dos funciones convexas.*

Intuitivamente esto era de esperarse, ya que si u es suficientemente suave, por ejemplo, derivable y tiene segunda variación acotada, entonces la derivada de u tiene variación acotada y por el teorema de descomposición de Jordan, la función derivada u', se puede escribir como diferencia de dos funciones monótonas crecientes. Al integrar nos queda la descomposición de u como diferencia de funciones convexas.

Otro resultado interesante, que relaciona las funciones que tienen segunda variación acotada con las funciones de variación acotada, fue dado por F. Riesz hace exactamente un siglo en [**137**], donde demuestra que una función tiene segunda variación acotada si y sólo si es la integral de una función de variación acotada. Más precisamente, Riesz demostró el siguiente teorema:

TEOREMA 1.2.1. (*Teorema de Representación de Riesz* [**137**]) *$u \in BV_2[a, b]$ si y sólo si existe $v \in BV[a, b]$, tal que*

$$u(t) = v(a) + \int_a^t v(s) ds.$$

Una generalización del concepto de segunda variación acotada fue estudiado por A. M. Russell en [**147**] y F. N. Huggins en [**81**]. Ambos autores modifican el la primera suma que aparece en la Definición 1.2.1 por:

$$\sum_{j=1}^{n-2}\left|\frac{u(t_{j+2})-u(t_{j+1})}{m(t_{j+2})-m(t_{j+1})}-\frac{u(t_{j+1})-u(t_j)}{m(t_{j+1})-m(t_j)}\right|,$$

donde $m : [a,b] \to \mathbb{R}$, es una función estrictamente creciente.

En 1971, F. N. Huggins en **[81]** presenta una generalización del teorema de representación de Riesz.

También podemos hacer una generalización del concepto de segunda variación acotada haciendo una pequeña modificación de la Definición 1.2.1.

Denotamos por $\Pi_{a,2}^b$ a la clase de todas la particiones del intervalo $[a,b]$ de la forma:

$$\pi : a \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \leq \cdots < t_{2n} \leq b. \tag{1.2.1}$$

Definición 1.2.2. (*Segunda Variación Acotada. Definición Alternativa*). Dada una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y una partición π del tipo (1.2.1) del intervalo $[a,b]$, con al menos tres puntos, definimos:

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma}_2(u,\pi) &:= \sum_{j=1}^{n-1}\left|\frac{u(t_{2(j+1)})-u(t_{2j+1})}{t_{2(j+1)}-t_{2j+1}}-\frac{u(t_{2j})-u(t_{2j-1})}{t_{2j}-t_{2j-1}}\right| \\ &= \sum_{j=1}^{n-1}\left|u[t_{2j+1},t_{2(j+1)}]-u[t_{2j-1},t_{2j}]\right|\end{aligned}$$

y

$$\widehat{V}_2(u;[a,b]) = \underset{\pi\in\Pi_{a,2}^b}{sup}\ \widehat{\sigma}_2(u,\pi).$$

Además se denota:

$$B\hat{V}_2[a,b] = \left\{u \in \mathbb{R}^{[a,b]} : \widehat{V}_2(u;[a,b]) < \infty\right\}.$$

Usando la misma argumentación que en el caso $BV_2[a,b]$ se demuestra que $\hat{BV}_2[a,b]$ es un espacio vectorial.

La siguiente proposición garantiza que la segunda variación de una función no cambia utilizado cualquiera de la dos definiciones que hemos dado, y por lo tanto los resultados que hemos mencionado para la funciones del espacio $BV_2[a,b]$, también son valederos para las funciones de $\hat{BV}_2[a,b]$.

Teorema 1.2.2. *Sea* $u:[a,b]\to\mathbb{R}$, *entonces:*

1. $\widehat{V}_2(u;[a,b]=V_2(u;[a,b])$, $u\in\mathbb{R}^{\{a,b]}$.

2. $BV_2[a,b]=\hat{BV}_2[a,b]$.

Demostración. 1. Sea $u\in\hat{BV}_2[a,b]$ y $\pi\in\Pi_{a,1}^{b}$ De las definiciones de las sumas tipo $\sigma(u,\,.\,)$ y $\widehat{\sigma}(u,\,.\,)$ se observa que $\widehat{\sigma}_2(u,\pi)=\sigma_2(u,\pi)$ y así resulta que:

$$V_2(u;[a,b])\leq\hat{V}_2(u;[a,b]),\quad u\in\mathbb{R}^{[a,b]}.$$

En consecuencia $\hat{BV}_2[a,b]\subset BV_2[a,b]$.

Por otra parte, consideremos $u\in BV_2[a,b]$ y una partición $\pi:a\leq t_1<t_2\leq t_3<t_4\leq\cdots<t_{2n}\leq b$ del intervalo $[a,b]$. Denotemos por

$$\Gamma=\{j=1,\ldots,n-1:t_{2j}<t_{2j+1}\},$$

entonces si $j\in\Gamma$, podemos escribir:

$$u[t_{2j+1},t_{2(j+1)}]-u[t_{2j-1},t_{2j}]=u[t_{2j},t_{2j+1}]-u[t_{2j-1},t_{2j}]+u[t_{2j+1},t_{2(j+1)}]-u[t_{2j},t_{2j+1}].$$

De esta manera

$$\widehat{\sigma}_2(u,\pi)=\sum_{j=1}^{n-1}\left|u[t_{2j+1},t_{2(j+1)}]-u[t_{2j-1},t_{2j}]\right|\leq$$

$$\sum_{j\notin\Gamma}\left|u[t_{2j},t_{2(j+1)}]-u[t_{2j-1},t_{2j}]\right|+$$

$$+\sum_{j\in\Gamma}\left(\left|u[t_{2j},t_{2j+1}]-u[t_{2j-1},t_{2j}]\right|+\left|u[t_{2j+1},t_{2(j+1)}]-u[t_{2j},t_{2j+1}]\right|\right)=\sigma_2(u,\pi).$$

De donde resulta que $\widehat{V}_2(u,[a,b]) \leq V_2(u,[a,b])$ y por lo tanto $\hat{BV}_2[a,b] \subset BV_2[a,b]$.

Además el espacio $BV_2[a,b]$ tiene una estructura de álgebra de Banach (ver **[11, 143]**) con la norma $\|\cdot\|_{BV_2} : BV_2[a,b] \to [0,\infty)$, definida por:

$$\|u\|_{BV_2} := |u(a)| + \left|u'_+(a)\right| + V_2(u),\ \ u \in BV_2[a,b].$$

$\square$

1.3. Funciones con k-variación acotada.

El concepto de k-variación acotada fue introducido en 1930 por T. Popoviciu en **[132]**, generalizando la noción de segunda variación acotada dada por De la Vallé Poussin **[59]**. Antes de presentar algunos resultado relacionados con este nuevo concepto, consideramos la definición de k-diferencia dividida.

Definición 1.3.1. (ver **[38, 82]**) Si $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $t_1, \ldots, t_{k+1}$ son puntos distintos de $[a,b]$, definimos las diferencias divididas de orden $0, 1$ y k, respectivamente, como:

- $u[t_1] = u(t_1)$.
- $u[t_1,t_2] := \frac{u(t_2)-u(t_1)}{t_2-t_1}, t_2 \neq t_1$.
- $u[t_1,\ldots,t_k,t_{k+1}] := \frac{u[t_2,\ldots,t_{k+1}]-u[t_1,\ldots,t_k]}{t_k-t_1}, t_k \neq t_1$.

Algunas propiedades de las diferencias divididas se resumen en la siguiente proposición:

Proposición 1.3.1. (*ver* **[38, 82]**) *Sean $k \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_{k+1}$, puntos distintos del intervalos $[a,b]$, $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:*

1. $u[t_1,\ldots,t_{k+1}] = \sum\limits_{j=1}^{k+1} \frac{u(t_j)}{\prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k+1}(t_j-t_i)}$.

2. El valor de $u[t_1,\ldots,t_{k+1}]$ es independiente del orden en que se tomen los puntos $t_1,\ldots,t_{k+1}$.

3. $(u+v)[t_1,\ldots,t_{k+1}] = u[t_1,\ldots,t_{k+1}] + v[t_1,\ldots,t_{k+1}]$.

4. $(\alpha u)[t_1,\ldots,t_{k+1}] = \alpha\, u[t_1,\ldots,t_{k+1}]$.

5. Si $u(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_k t^k$ *, entonces*

$$u[t_1, \ldots, t_{n+1}] = \begin{cases} a_k & , \quad n = k \\ 0 & , \quad n > k. \end{cases}$$

6. Si $u \in C^k[a,b]$*, entonces:*

$$u[t_1, \ldots, t_{k+1}] =$$
$$\int_0^1 \int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_k} u^{(k)} \left(x_k(t_{k+1} - t_k) + \ldots + x_1(t_2 - t_1) + t_1\right) dx_k \ldots dx_1.$$

7. Si $u \in C^k[a,b]$*, entonces existe* ξ *en la cápsula convexa de los puntos* $t_1, \ldots, t_{k+1}$*, tal que:*

$$u[t_1, \ldots, t_{k+1}] = \frac{u^{(k)}(\xi)}{k!}. \tag{1.3.1}$$

Observación 1.3.1. Tomando límite cuando $\xi \to t$ en la ecuación (1.3.1), nos permite definir la diferencia dividida de $k+1$ puntos iguales. De forma precisa, tenemos que si $u \in C^{(k)}[a,b]$, entonces:

$$u[t, \underbrace{k+1\, veces}, t] = \frac{u^{(k)}(t)}{k!}, \; t \in [a,b].$$

Por otra parte, dada $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, entonces:

1. Si u es derivable en $t_1 \in [a,b]$, entonces:
$$u'[t_1] = \lim_{h \to 0} u[t_1, t_1 + h] = u[t_1, t_1].$$
2. Si u es derivable en $t_1, t_2 \in [a,b]$, entonces:
$$u'[t_1, t_2] = \frac{u'[t_2] - u'[t_1]}{t_2 - t_1} = \frac{u[t_2, t_2] - u[t_1, t_1]}{t_2 - t_1} =$$
$$\frac{u[t_2, t_2] - u[t_1, t_2]}{t_2 - t_1} + \frac{u[t_1, t_2] - u[t_1, t_1]}{t_2 - t_1} = u[t_1, t_2, t_2] + u[t_1, t_1, t_2].$$

En general tenemos la siguiente resultado.

Proposición 1.3.2. (*teorema 7 de* **[148]**) *Sea* $u : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Si* u *es derivable en* $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [a,b]$*, entonces:*

$$u'[t_1, t_2, \ldots, t_n] = u[t_1, t_1, t_2, \ldots, t_n] + \ldots + u[t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}, t_n, t_n].$$

Ahora presentamos la definición de *k-variación*, dada en 1930 por T. Popoviciu en [**132**] y que en 1973, estudia A. M. Russell en [**148**].

Definición 1.3.2. (*k-variación acotada*). Sea $k \geq 1$ un entero. Dadas una partición $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ con al menos $k+1$ puntos y $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, se definen:

$$\sigma_k(u, \pi) := \sum_{j=1}^{n-k} |u[t_{j+1}, \ldots, t_{j+k}] - u[t_j, \ldots, t_{j+k-1}]| = \sum_{j=1}^{n-k} (t_{j+k} - t_j) \, |u[t_j, \ldots, t_{j+k}]|$$

y

$$V_k(u; [a, b]) = V_k(u) := \sup_{\pi \in \prod_a^b} \sigma_k(u, \pi).$$

Si $V_k(u; [a, b]) < \infty$ diremos que la función u tiene *k-variación acotada o finita en el intervalo* $[a, b]$*; y* a la clase de tales funciones la denotamos por $BV_k[a, b]$.

De las propiedades de las diferencias dividida (ver Proposición 1.3.1) se tiene que:

Proposición 1.3.3. *$BV_k[a, b]$ es un espacio vectorial, para cualquier entero $k \geq 1$.*

Además de la definición de k-variación y de las propiedades de las diferencias dividida (Proposición 1.3.1) de se desprende la siguiente proposición, que relaciona la k-variación de una función en un intervalo con la k-variación en subintervalos.

Proposición 1.3.4. *(ver [**148**]). Sean $k \geq 1$ un entero y $u \in BV_k[a, b]$, entonces para cada número $t \in (a, b)$, tenemos que $u \in BV_k[a, t] \cap BV_k[t, b]$ y*

$$V_k(u; [a, b]) \geq V_k(u; [a, t]) + V_k(u; [t, b]).$$

Siendo cierta la igualdad para el caso $k = 1$.

Demostración. Sean $u \in BV_k[a, b]$ y $a < t < b$. Como $\Pi_{a,1}^t \subset \Pi_{a,1}^b$ y $\Pi_{t,1}^a \subset \Pi_{a,1}^b$ de la definición de k-variación se obtiene que $u \in BV_k[a, t] \cap BV_k[t, b]$.

Por otra parte, consideremos particiones

$$\pi_1 : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq t \quad , \quad \pi_2 : t \leq s_1 < \cdots < s_m \leq b$$

de los intervalos $[a, t]$ y $[t, b]$, respectivamente. Entonces de la definición de las suma tipo $\sigma(u, \, .\,)$ y de k-variación, tenemos

$$\sigma(u, \pi_1) + \sigma(u, \pi_2) \leq \sigma(u, \pi_1 \cup \pi_2) \leq V_k(u; [a, b]).$$

Al tomar supremo sobre la familias $\Pi_{a,1}^t$ y $\Pi_{t,1}^b$ se obtiene la desigualdad buscada. $\square$

Observación 1.3.2. En [**148**] A. M. Russell demuestra que la igualdad es cierta si existe la Riemann $*$-derivada k-ésima definida por:

$$\lim_{h_k \to 0} \cdots \lim_{h_1 \to 0} u[t, x + h_1, \ldots, x + h_k].$$

Procediendo como en el caso de segunda variación acotada podemos dar una definición alternativa de k-variación, la cual es introducida en [**95**]. Dado un número entero positivo k, denotamos por $\prod_{a,k}^b$ las particiones del intervalo $[a, b]$ de la forma:

$$\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_k \leq t_{k+1} < \cdots < t_{2k} \leq t_{2k+1} < \cdots < t_{kn} \leq b. \tag{1.3.2}$$

Definición 1.3.3. (*k-variación. Definición Alternativa)* Sean k un entero positivo, $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ y

$$\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_k \leq t_{k+1} < \cdots < t_{2k} \leq t_{2k+1} < \cdots < t_{kn} \leq b$$

una partición del intervalo $[a, b]$, con al menos $2k - 1$ puntos. Se definen:

$$\widehat{\sigma}_k(u, \pi) = \widehat{\sigma}_k(u) := \sum_{j=1}^{n-1} \left| u[t_{jk+1}, \ldots, t_{(j+1)k}] - u[t_{(j-1)k+1}, \ldots, t_{jk}] \right|$$

y

$$\widehat{V}_k(u; [a, b]) = \widehat{V}_k(u) := \underset{\pi \in \Pi_{a,k}^b}{sup}\; \widehat{\sigma}_k(u, \pi),$$

donde el supremo se toma sobre las particiones del intervalo $[a,b]$, con al menos $2k-1$ puntos del tipo (1.3.2) .

De manera similar que en el caso de las funciones de k-variación acotada, tenemos que el conjunto $B\hat{V}_k[a,b]$ de las funciones $u:[a,b]\to\mathbb{R}$, tales que $\widehat{V}_k(u;[a,b])<\infty$, tiene una estructura de espacio vectorial. Además de la Definición 1.3.3, se deduce la siguiente proposición:

Proposición 1.3.5. *Sean $k\geq 1$ un entero y $u\in B\hat{V}_k[a,b]$, entonces para todo número $t\in(a,b)$, tenemos que $u\in B\hat{V}_k[a,t]\cap B\hat{V}_k[t,b]$ y*

$$\widehat{V}_k(u;[a,b])\geq \widehat{V}_k(u;[a,t])+\widehat{V}_k(u;[t,b]).$$

Además si $k=1$, se cumple la igualdad.

Demostración. Sean $u\in B\hat{V}_k[a,b]$ y $a<t<b$. Como $\Pi^t_{a,k}\subset\Pi^b_{a,k}$ y $\Pi^a_{t,k}\subset\Pi^b_{a,1}$, de la definición alternativa de k-variación, se obtiene que $u\in B\hat{V}_k[a,t]\cap B\hat{V}_k[t,b]$.

Ahora consideremos particiones $\pi_1\in\Pi^t_{a,k}$,$\pi_2\in\Pi^b_{t,k}$. Entonces de la definición de las sumas del tipo $\widehat{\sigma}(u,\,.\,)$ y de k-variación alternativa, tenemos

$$\widehat{\sigma}(u,\pi_1)+\widehat{\sigma}(u,\pi_2)\leq\widehat{\sigma}(u,\pi_1\cup\pi_2)\leq\widehat{V}_k(u;[a,b]).$$

Al tomar supremo sobre la familias $\Pi^t_{a,k}$ y $\Pi^b_{t,k}$ se concluye la relación buscada. □

En el siguiente teorema presentamos las relaciones entre estos dos conceptos de k-variación acotada.

Teorema 1.3.1. (*ver* **[95]**) *Sea $k\geq 1$ un entero, entonces*

$$\widehat{V}_k(u;[a,b])\leq V_k(u;[a,b])\leq 3k\widehat{V}_k(u;[a,b]),$$

y por tanto $BV_k[a,b]=B\hat{V}_k[a,b]$. Además en los casos $k=1,2$, la desigualdades se transforman en igualdades.

Demostración. Sea $u\in B\hat{V}_k[a,b]$. Si $a\leq t_1<\cdots<t_{k+1}\leq b$ y consideremos números $b_1,\ldots b_k,c_1,\ldots,c_k$, tales que:

$$t_1<b_1<\cdots<b_k\leq t_2\quad,\quad t_k<c_1<\cdots<c_k\leq t_{k+1}.$$

Entonces:

$$|u[t_2,\ldots,t_{k+1}]-u[t_1,\ldots,t_k]|\leq$$

$$|u[t_2,\ldots,t_{k+1}]-u[b_1,\ldots,b_k|+|u[b_1,\ldots,b_k]-u[c_1,\ldots,c_k|+|u[c_1,\ldots,c_k]-u[t_1,\ldots,t_k]|\leq$$

$$3\widehat{V}_k(u;[t_1,t_{k+1}]).$$

De esta manera tenemos que si $\pi : a\leq t_1<\cdots<t_n\leq b$ es una partición de $[a,b]$, con al menos $k+1$ puntos, entonces:

$$\sigma_k(u,\pi)=\sum_{j=1}^{n-k}|u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}]-u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}]|\leq\sum_{j=1}^{n-k}3\widehat{V}_k\left(u;[t_j,t_{j+k}]\right).$$

Ahora agrupamos los miembros de la última suma en grupos de k sumandos, en el orden que aparecen, hasta donde sea posible. A continuación hemos colocado esto sumandos en una matriz. En la primera columna de la matriz ubicamos los primeros k sumandos ($j=1,\ldots,k$). En la segunda columna, el segundo grupo de k sumandos ($j=k+1,\ldots,2k$), hasta que obtenemos la columna donde está el último sumando, que completamos con ceros si es necesario, para culminar la última columna de matriz.

$$\begin{array}{cccc}
\widehat{V}_k\left(u;[t_1,t_{1+k}]\right) & \widehat{V}_k(u;[t_{2+k},t_{2+2k}) & \cdots & . \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
. & . & . & \widehat{V}_k(u;[t_{n-k},t_n]) \\
. & . & . & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\widehat{V}_k\left(u;[t_{1+k},t_{1+2k}]\right) & \widehat{V}_k(u;[t_{2+k},t_{2+2k}) & \cdots & 0
\end{array} .$$

Esta matriz tiene k filas y en cada fila las variaciones que aparecen son tomadas en intervalos disjuntos. De esta manera al aplicar la Proposición 1.3.5 resulta que la suma de las entradas de cada fila está acotada por $\hat{V}_k(u;[a,b])$. Como tenemos k filas, resulta

$$\sigma_k(u,\pi) \leq 3k\widehat{V}(u;[a,b]).$$

Al tomar supremo de $\sigma_k(u,\pi)$ sobre $\Pi^b_{a,1}$ concluimos que:

$$V_k(u;[a,b]) \leq 3k\hat{V}_k\,(u;[a,b])\,;$$

y en consecuencia $u \in BV_k[a,b]$. De esta manera se obtiene que $B\hat{V}_k[a,b] \subset BV_k[a,b]$.

Por otra parte, si $u \in BV_k[a,b]$ y

$$\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_k \leq t_{k+1} \cdots < t_{2k} \leq t_{2k+1} < \cdots < t_{nk} \leq b$$

es una partición del intervalo $[a,b]$, entonces de la desigualdad triangular, resulta:

$$\left|u[t_{jk+1},\ldots,t_{(j+1)k}] - u[t_{(j-1)k+1},\ldots,t_{jk}]\right| \leq$$

$$\left|u[t_{jk+1},\ldots,t_{(j+1)k}] - u[t_{jk},t_{jk+1}\ldots,t_{jk+k-1}]\right| +$$

$$|u[t_{jk},t_{jk+1}\ldots,t_{jk+k-1}] - u[t_{jk-1},t_{jk},t_{jk+1},\ldots,t_{jk+k-2}]| + \ldots$$

$$\ldots + \left|u[t_{(j-1)k+2},t_{k(j-1)k+3}\ldots,t_{jk,}t_{jk+1}] - u[t_{(j-1)k+1},\ldots,t_{jk}]\right| =$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}\left|u[t_{jk-i+1},\ldots,t_{(j+1)k-i}] - u[t_{jk-i},\ldots,t_{(j+1)k-i-1}\right|.$$

De esta forma tenemos:

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left|u[t_{jk},\ldots,t_{(j+1)k-1}] - u[t_{(j-1)k+1},\ldots,t_{jk}]\right| \leq$$

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{k-1}\left|u[t_{(j-1)k+i+1},\ldots,t_{(j+1)k-i}] - u[t_{jk-i},\ldots,t_{(j+1)k-ii-1}\right| \leq V_k(u;[a,b]).$$

Así obtenemos que $\hat{V}_k(u;[a,b]) \leq V_k(u;[a,b])$ y por lo tanto $u \in B\hat{V}_k[a,b]$. En consecuencia $BV_k[a,b] \subset B\hat{V}_k[a,b]$. $\square$

De este resultado se obtiene que todas las propiedades que tiene el espacio $BV_k[a,b]$ también las cumple el espacio $B\hat{V}_k[a,b]$. En el siguiente teorema presentamos un resumen de algunas de estas propiedades:

Teorema 1.3.2. (*ver* **[148]**) *Sea k un entero positivo, entonces:*

1. Si $V_k(u,[a,b]) < \infty$, entonces $u[t_1,\dots,t_k]$ es acotada, donde $t_1,\dots,t_k \in [a,b]$.
2. $B_{k+1}[a,b] \subset BV_k[a,b]$.
3. Si $u \in B_k[a,b]$, entonces

$$\begin{cases} k = 1, \mathit{existe}\, u'\, c.s\, en\, [a,b] \\ k = 2,\ \mathit{si\, existe}\, u', u' \in BV[a,b] \\ k \geq 3,\ \mathit{existe}\ u^{(r)},\ r = 1,\dots,k-2\ y\ u^{(r)} \in BV_{k-r}[a,b] \\ \qquad y\, \mathit{existe}\, u^{(k-1)}\, c.s.en\, [a,b]. \end{cases}$$

Además Russell en **[149]** demuestra que $BV_k[a,b], k \in \mathbb{N}$, es un espacio de Banach con la norma:

$$\|u\|_k := |u(a)| + \left|u'_+(a)\right| + \cdots + \left|u_+^{(k-1)}(a)\right| + V_k(u), \quad u \in BV_k[a,b]. \tag{1.3.3}$$

Del Teorema 1.3.1 se deduce que si en esta definición sustituimos $V_k(u)$ por $\hat{V}_k(u)$ se obtiene una norma equivalente.

Por otra parte, A. M. Russell en **[148]** generaliza el concepto de función convexa de la manera siguiente:

Definición 1.3.4. Sea $k \geq 0$ un entero. Una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ es k-convexa si $u[t_1,\dots,t_{k+1}] \geq 0$, para cualesquiera $k+1$ puntos distintos $t_1,\dots,t_{k+1} \in [a,b]$.

Para el caso $k = 0$ este concepto nos indica que $u(t) \geq 0$, $t \in [a,b]$. Para $k = 1$ es la definición de función creciente y para $k = 2$ es la clásica definición de función convexa.

En **[148]** generaliza el Teorema de descomposición de Jordan con el siguiente teorema.

Teorema 1.3.3. (*Generalización del Teorema de Descomposición de Jordan*) *Sea $k \geq 1$ un entero y $u \in BV_k[a,b]$, entonces u se puede descomponer como diferencia de dos funciones k-convexa.*

Para concluir esta parte, recordemos que la Proposición 1.1.2 nos asegura que la variación de Jordan de una función $u \in AC[a,b]$ se calcula con la integral

$$\int_a^b |u'(t)|\, dt.$$

Russell generaliza este resultado para funciones que tienen k-variación acotada. De manera más precisa, se tiene:

Teorema 1.3.4. (*ver* [**150**]) *Sean $k \geq 1$ un número entero y $u \in \mathbb{R}^{[a,b]}$, tal que $u^{(k-1)}$ es absolutamente continua, entonces:*

$$V_k(u;[a,t]) = \frac{1}{(k-1)!}\int_a^t \left|u^{(k)}(s)\right| ds, \quad a \leq s \leq b.$$

Usando este teorema podemos calcular la k-variación de varias funciones. Por ejemplo:

1. Para $u(t) = \alpha t^m, m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que:

$$V_k(u;[a,b]) = \begin{cases} 0 & , \quad k > m \\ k\,|\alpha|\,(b-a) & , \quad k = m \\ \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{(k-1)!}\,|\alpha|\left(b^{m-k} - a^{m-k}\right) & , \quad 1 \leq k < m. \end{cases}$$

2. Si $u(t) = e^{\alpha t}, \alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

$$V_k(u;[a,b]) = \frac{|\alpha|^k}{(k-1)!}\left(e^b - e^a\right), k \in \mathbb{N}.$$

1.4. Algunos problemas para investigar.

Aquí presentamos algunos problemas para futuras investigaciones.

1. Generalizar el concepto de k-variación acotada, en cualquiera de sus dos formas, para funciones $u : E \to \mathbb{X}$, donde $\mathbb{X}$ es un espacio normado, en particular para multifunciones.
2. Determinar cuáles de las propiedades del Teorema 1.3.2 son ciertas.

3. Determinar si es posible demostrar un teorema de representación para estas nuevas funciones, tipo Jordan (Teorema 1.3.3), tipo Riesz a través de una integral tipo Serpiński-Federer-Chistyakov, como composición de funciones.
4. Demostrar un teorema para el calculo de la k-variación, similar al Teorema 1.3.4.
5. Estudiar algunos problemas relacionados con el operador de composición, como actuación, lipschitzidad local o global, acotación uniforme.

Capítulo 2

El concepto de (p, k)-variación acotada en el sentido de Riesz

Otra generalización del concepto de variación acotada, fue estudiado por el mayor de los dos hermanos Riesz, quienes vivieron entre finales del siglo XIX y mediados del XX. Ambos de origen húngaro y matemáticos. Frigyes Riesz introduce este concepto de f*unción de p-variación* al final de la primera década del siglo XX en [**136**]; y caracteriza a tales funciones con, el hoy conocido *Lema de Riesz*, donde se garantiza que una función tiene p-variación acotada en el sentido de Riesz si es absolutamente continua y su derivada está en L_p. Además presenta un relación que permite calcular la p-variación, a través de una integral.

Posteriormente se hacen varias generalizaciones de este concepto, como mencionamos en la introducción de este trabajo. Una de esas generalizaciones la hace el matemático venezolano, N. Merentes al principio de la década de los noventa del siglo XX, en [**113**].

Merentes combina los conceptos de p-variación dado por Riesz en [**136**] y el de segunda variación, introducido por De La Vallée Poussin en [**59**], dos años antes que la variación de Riesz.

De esta manera Merentes introduce un nuevo concepto de variación de funciones, denominado $(p, 2)$-*variación en el sentido de Riesz*. Además. N. Merentes en [**115**] generaliza el lema de Riesz, demostrando que una función tiene $(p, 2)$-variación acotada en el sentido de Riesz si su derivada es absolutamente continua y su segunda derivada está en $L_{p.}$ Presentando adicionalmente una forma de calcular la $(p, 2)$-variación, mediante una integral.

En este capítulo, siguiendo las ideas de Merentes en [**115**], hacemos un aporte a este tema, presentando una nueva generalización de la variación de funciones dada por Riesz, combinando los conceptos de Riesz y el de k-variación acotada, introducido en 1930, por el rumano T. Popoviciu (ver [**132**]) en su tesis doctoral. Esta noción de k-variación de una función, es a su vez una generalización de la noción de segunda variación de De La Vallée Poussin [**59**].

Iniciamos, el capítulo, con una sección donde recopilamos los resultados más importantes de las funciones con p-variación acotada en el sentido de Riesz. En la siguiente sección, hacemos lo propio con el concepto de $(p, 2)$-variación acotada en el sentido de Riesz, para luego presentar una variante de la definición, que corresponde al concepto estudiado por N. Merentes en [**115**]. Finalizamos demostrando, que a pesar de que la $(p, 2)$-variación de una función puede variar, dependiendo de la definición que se considere (ver Ejemplos 2.2.2y 2.2.3) los espacio de tales funciones son los mismos. Concluimos, enunciando la generalización del lema de Riesz de Merentes y exponiendo algunos resultados que se derivan de éste.

Proseguimos, generalizamos los conceptos de $(p, 2)$-variación, introduciendo dos nociones de (p, k)-variación en el sentido de Riesz, donde $k > 0$ es un número entero; demostrando las relaciones entre estos conceptos y exhibiendo una versión más general del lema de Riesz, de Merentes y las consecuencias que se derivan del mismo, lo que corresponde a unas de las partes más importante de este capítulo. Estos resultados, están expuestos en un artículo aceptado para su publicación en colaboración con los profesores Nelson Merentes y José Luís Sánchez (ver [**119**]).

Otro punto que aludimos al final del capítulo, se refiere a la verificación de la Condición de Matkowski (ver [**8, 118**]) del espacio $RV_{(p,k)}[a, b]$ de las funciones con (p, k)-variación acotada en el sentido de Riesz. Existen una variedad de espacios que verifican esta condición, como se refleja en [**89, 96, 99, 100, 101, 102, 103, 108, 109, 110, 114, 116, 117, 121, 140, 159, 161, 172**].

Como aporte a este tema, sustituimos la condición de Lispchitzidad global del operador de composición H, generado por una función $h : [a, b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, por una condición más débil de acotación uniforme, obteniendo la misma conclusión de la Condición de Matkowski. Más precisamente, si el operador de composición H, generado por una función $h : [a, b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, transforma el espacio $RV_{(p,k)}[a, b]$ en sí mismo y es uniformemente acotado, entonces la función generadora, tiene la forma:

$$h(t, x) = \alpha(t)x + \beta(t), t \in [a, b],$$

donde α y β son funciones de $RV_{(p,k)}[a, b]$.

Los resultados obtenidos en esta última parte, están desarrollados en un artículo, que se encuentra en proceso de arbitraje, y que fue elaborado con la colaboración de las profesoras Francis Armao, Dorota Głazowska y Jéssica Rojas (ver [**12**]).

2.1. Funciones con p-variación acotada en el sentido de Riesz.

A continuación presentamos el concepto introducido por Riesz y algunas propiedades de las funciones con este tipo de variación finita.

Definición 2.1.1. (*p-variación de Riesz*). Dados $p \geq 1$, $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y una partición $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ del intervalo $[a,b]$, consideramos la expresión:

$$\sigma^R_{(p,1)}(u,\pi) := \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{|u(t_{j+1}) - u(t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|} \right)^p |t_{j+1} - t_j|$$

y se define:

$$V^R_{(p,1)}(u;[a,b]) = V^R_p(u) := \sup_{\pi \in \Pi^b_a} \sigma^R_{(p,1)}(u,\pi).$$

El número $V^R_{(p,1)}(u;[a,b])$ se denomina *variación en el sentido de Riesz de la función u en el intervalo* $[a,b]$. Si $V^R_{(p,1)}(u;[a,b]) < \infty$, decimos que la función *u tiene p-variación o $(p,1)$-variación acotada o finita en el sentido de Riesz, en el intervalo* $[a,b]$.

La clase de las funciones con p-variación acotada se denota por $RV_{(p,1)}[a,b]$ o simplemente $RV[a,b]$.

Podemos observar que si tomamos $p = 1$, $RV_{(p,1)}[a,b] = BV[a,b]$ y por esta razón se considera en general que $p > 1$.

El siguiente teorema garantiza que toda función Lipschitz tiene p-variación acotada y estas a su vez tienen variación acotada.

Teorema 2.1.1. *Sea $p > 1$, entonces:*

1. Si $u \in Lip[a,b]$ entonces

$$V^R_{(p,1)}(u;[a,b]) \leq K^p(b-a),$$

donde K es la constante de lipschitzidad asociada a u.

2. Si $u \in RV_{(p,1)}[a,b]$, *entonces*

a. $V(u;[a,b]) \le b-a+V^R_{(p,1)}(u;[a,b])$.

b. $V(u;[a,b]) \le (b-a)^{1-1/p}\left(V^R_{(p,1)}(u;[a,b])\right)^{1/p}$.

3. $Lip[a,b] \subset RV_{(p,1)}[a,b] \subset BV[a,b]$.

Demostración. 1. Sea $\pi : a \le t_1 < \cdots < t_n \le b$ una partición del intervalo $[a,b]$. Si $u \in Lip[a,b]$, entonces existe una constante $K>0$, tal que:

$$|u(t)-u(s)| \le K\,|s-t|\,, \quad s,t \in [a,b].$$

Entonces:

$$\sigma^R_{(p,1)}(u,\pi) := \sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{|u(t_{j+1})-u(t_j)|}{|t_{j+1}-t_j|}\right)^p |t_{j+1}-t_j| \le$$
$$\sum_{j=1}^{n-1} K^p\,|t_{j+1}-t_j| \le K^p(b-a).$$

De donde resulta $V^R_{(p,1)}(u;[a,b]) \le K^p(b-a)$.

2a. Si $u \in RV_{(p,1)}[a,b]$ y denotamos por:

$$\Gamma = \left\{ j=1,\ldots,n-1 : \frac{|u(t_{j+1})-u(t_j)|}{|t_{j+1}-t_j|} \le 1 \right\},$$

entonces:

$$\sum_{j=1}^{n-1}|u(t_{j+1})-u(t_j)| = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{|u(t_{j+1})-u(t_j)|}{|t_{j+1}-t_j|}\,|t_{j+1}-t_j| \le$$
$$\sum_{j\in\Gamma}|t_{j+1}-t_j| + \sum_{j\notin\Gamma}\left(\frac{|u(t_{j+1})-u(t_j)|}{|t_{j+1}-t_j|}\right)^p |t_{j+1}-t_j| \le$$
$$b-a+V^R_{(p,1)}(u;[a,b]).$$

En conclusión $V(u;[a,b]) \le b-a+V^R_{(p,1)}(u;[a,b])$.

2.b Usando la desigualdad de Hölder, con $q=\frac{p}{p-1}$, tenemos:

$$\sum_{j=1}^{n-1}|u(t_{j+1})-u(t_j)| = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{|u(t_{j+1})-u(t_j)|}{|t_{j+1}-t_j|^{1-1/p}}\,|t_{j+1}-t_j|^{1-1/p} \le$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{|u(t_{j+1}) - u(t_j)|^p}{|t_{j+1} - t_j|^{p-1}}\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n-1} |t_{j+1} - t_j|\right)^{1-1/p}.$$

Al tomar supremo se concluye que

$$V(u) \leq (b-a)^{1-1/p} \left(V^R_{(p,1)}(u; [a,b])\right)^{1/p}.$$

3. es consecuencia de 1. 2.a. o 1.2.b. □

De la segunda inclusión de la parte 3. de la proposición que acabamos de demostrar se infiere que las funciones que tiene $(p,1)$-variación acotada tienen las mismas propiedades que las funciones de variación acotada (ver sección 1.1 del capítulo).

En la siguiente proposición demostramos que la clase $RV_{(p,1)}[a,b]$, tiene una estructura de álgebra.

PROPOSICIÓN 2.1.1. *Sean* $p > 1$, $u, v \in \mathbb{R}^{[a,b]}, \alpha \in \mathbb{R}$, *entonces:*

1. $\left(V^R_{(p,1)}(u+v)\right)^{1/p} \leq \left(V^R_{(p,1)}(u)\right)^{1/p} + \left(V^R_{(p,1)}(u)\right)^{1/p}.$

2. $V^R_{(p,1)}(\alpha u) = |\alpha|^p \, V^R_{(p,1)}(u).$

3. $\left(V^R_{(p,1)}(uv)\right)^{1/p} \leq \|v\|_\infty \left(V^R_{(p,1)}(u)\right)^{1/p} + \|u\|_\infty \left(V^R_{(p,1)}(v)\right)^{1/p}.$

4. $RV_{(p,1)}[a,b]$ *es un álgebra.*

DEMOSTRACIÓN. Las partes 1. y 3. son consecuencia de la definición de $(p,1)$-variación y de la desigualdad de Minkowski. Mientras que 2. se desprende directamente de la definición. Para los detalles ver [**18**]. La parte 4. se desprende de 1., 2. y 3. □

De las relaciones 1. y 2. de la Proposición 2.1.1 se deduce que el espacio $RV_{(p,1)}[a,b]$ tiene una estructura de espacio normado con la norma (ver detalles en [**18**]).

$$\|u\|^R_{(p,1)} := |u(a)| + \left(V^R_{(p,1)}(u; [a,b])\right)^{1/p}, \quad u \in RV_{(p,1)}[a,b].$$

En el siguiente lema presentamos algunas propiedades relacionadas con la convergencia de esta norma.

Lema 2.1.1. *Sean $p > 1$ y $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, entonces:*

1. $\|u\|^R_{(p,1)} < \varepsilon$ implica $\|u\|_\infty < \left((b-a)^{1-1/p} + 1\right)\varepsilon$.

2. Si $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en la norma $\| \, . \, \|^R_{(p,1)}$, entonces también es una sucesión de Cauchy con la norma $\| \, . \, \|_\infty$.

3. Si $\{u_n\}_{n\geq 1} \xrightarrow{\|\cdot\|^R_{(p,1)}} u$, entonces $\{u_n\}_{n\geq 1} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u$.

Demostración. 1. es consecuencia de la definición de la norma $\| \cdot \|^R_{(p,1)}$. Las partes 2. y 3. se deducen de 1. □

Como consecuencia de este lema se puede demostrar la siguiente proposición cuya demostración en detalle se puede revisar en [**18**]

Proposición 2.1.2. *El espacio $RV_{(p,1)}[a, b]$ es un espacio de Banach.*

En 1987, los polacos L. Maligranda y W. Orlicz en [**97**] dan condiciones para que un espacio de Banach de funciones acotadas sea un álgebra de Banach. El enunciado de este resultado lo exponemos a continuación.

Lema 2.1.2. (*Maligranda-Orlicz* [**97**]). *Sea $(\mathbb{X}, \| \cdot \|)$ un espacio de Banach de funciones acotadas $u \in \mathbb{R}^{[a,b]}$, tales que:*

$$\|uv\| \leq \|u\|_\infty \|v\| + \|u\| \|v\|_\infty \, , \; u, v \in \mathbb{X}. \tag{2.1.1}$$

Entonces $\mathbb{X}$ es un álgebra de Banach con la norma $\| \cdot \|_\infty + \| \cdot \|$. Si además $\|u_n\|_\infty \to 0$, cuando $\|u_n\| \to 0$, las normas $\| \, . \, \|$ y $\| \cdot \|_\infty + \| \cdot \|$ son equivalentes. Si existe $c > 0$, tal que $\|u\|_\infty \leq c \|u\|$, $u \in \mathbb{X}$, con la norma $2c \| \cdot \|$ es también un álgebra de Banach.

Usando el lema anterior podemos demostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.1.3. *Sea $p > 1$, entonces el espacio $\left(RV_{(p,1)}[a, b], \| \cdot \|^R_{(p,1)}\right)$ es un álgebra de Banach.*

Demostración. Como consecuencia de la desigualdad 3. de la Proposición 2.1.1 se deduce que la norma $\| \cdot \|^R_{(p,1)}$ verifica la desigualdad (2.1.1) del Lema 2.1.2 y así se cumplen las condiciones del lema de Maligranda-Orlicz. □

En el año 1910 F. Riesz en [**136**], presenta una caracterización de las funciones que tienen $(p,1)$-variación acotada, demostrando el siguiente lema, que es de vital importancia en el estudio de estas funciones.

Lema 2.1.3. (*Lema de Riesz* [**136**]) *Sean* $p>1$, $u \in RV_{(p,1)}[a,b]$ *si y sólo si* $u \in AC[a,b]$ *y* $u' \in L_p[a,b]$ *y además*

$$V^R_{(p,1)}(u;[a,b]) = \int_a^b |u'(t)|^p \, dt.$$

Este lema presenta una caracterización de las funciones de $(p,1)$-variación acotada y da una manera de calcular la $(p,1)$-variación de una función. Además permite reescribir la norma $\|\cdot\|^R_{(p,1)}$, como sigue:

$$\|u\|^R_{(p,1)} := |u(a)| + \left(\int_a^b |u'(t)|^p\right)^{1/p}, \quad u \in RV_{(p,1)}[a,b].$$

Una demostración detallada del lema de Riesz puede verse en [**138**].

Por otra parte, como

$$L_p[a,b] \subset L_q[a,b], \quad p>q>1,$$

del lema de Riesz tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1.1. *Sea* $p>q>1$, *entonces:*

$$RV_{(p,1)}[a,b] \subset RV_{(q,1)}[a,b] \subset AC[a,b].$$

2.2. Funciones de $(p,2)$-variación acotada en el sentido de Riesz.

Otra manera de generalizar el concepto de $(p,1)$-variación de Riesz es de la siguiente forma:

Definición 2.2.1. (*(p,2)-variación de Riesz*). Dados $p \geq 1$, $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y una partición $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ del intervalo $[a,b]$, con al menos tres puntos, se definen:

$$\sigma^R_{(p,2)}(u,\pi) := \sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{|u[t_{j+1},t_{j+2}] - u[t_j,t_{j+1}]|}{|t_{j+2}-t_j|} \right)^p |t_{j+2}-t_j| \tag{2.2.1}$$

y

$$V^R_{(p,2)}(u;[a,b]) := \sup_{\pi\in\Pi^b_a} \sigma^R_{(p,2)}(u,\pi).$$

El número $V^R_{(p,2)}(u;[a,b])$ se denomina *(p,2)-variación en el sentido de Riesz de la función u en el intervalo* $[a,b]$. Si $V^R_{(p,2)}(u;[a,b]) < \infty$, decimos que la función u *tiene (p,2)-variación acotada o finita en el sentido de Riesz, en el intervalo* $[a,b]$ *.*

La clase de las funciones $u:[a,b]\to\mathbb{R}$, *tales que* $V^R_{(p,2)}(u;[a,b]) < \infty$ *se denota por* $RV_{(p,2)}[a,b]$ *.*

Ejemplo 2.2.1. Supongamos que la función $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función afín. Es decir, existen números $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, tales que $u(t)=\alpha t+\beta, t\in[a,b]$. Entonces

$$u[s,t]=\alpha, \quad s,t\in[a,b].$$

De esta manera $V^R_{(p,2)}(u;[a,b])=0$ y así $RV_{(p,2)}[a,b]$ no es vacío.

Ejemplo 2.2.2. Si u es una parábola, existen $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, tales que

$$u(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma, \quad t\in[a,b].$$

Entonces de las propiedades de las diferencias divididas (ver Proposición 1.3.1), si $t_1 < t_2 < t_3$

$$\frac{u[t_2,t_3]-u[t_1,t_2]}{t_3-t_1} = u[t_1,t_2,t_3]=\alpha.$$

Así resulta, que para una partición $\pi: a\le t_1<\cdots<t_n\le b$ del intervalo $[a,b]$,

$$\sigma^R_{(p,2)}(u,\pi) =$$

$$|\alpha|^p\sum_{j=1}^{n-2}(t_{j+2}-t_j) = \alpha^p\left[(t_2-t_1)+2(t_{n-1}-t_2)+(t_n-t_{n-1})\right].$$

Considerando particiones con $|t_2-t_1|$ y $|t_n-t_{n-1}|$ suficientemente pequeño, al tomar supremo, resulta: $V^R_{(p,2)}(u;[a,b]) = 2(b-a)\,|\alpha|^p$.

En el siguiente teorema se demuestra que toda función que tiene $(p,2)$-variación acotada tiene segunda variación acotada.

Teorema 2.2.1. *Sea* $p>1$, *entonces:*

1. $V_2(u)\le 2(b-a)+V^R_{(p,2)}(u), \quad u\in\mathbb{R}^{[a,b]}$.

2. $V_2(u) \leq (b-a)^{1-1/p}\left(V^R_{(p,2)}(u)\right)^{1/p}, \quad u \in \mathbb{R}^{[a,b]}$.

3. $RV_{(p,2)}[a,b] \subset BV_2[a,b]$ *y por lo tanto* $RV_{(p,2)}[a,b] \subset Lip[a,b]$.

Demostración. 1. Sean $u \in RV_{(p,2)}[a,b]$ y $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ una partición del intervalo $[a,b]$. Denotemos por

$$\Gamma = \left\{ j = 1, \ldots, n-1 : \frac{|u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]|}{|t_{j+2} - t_j|} \leq 1 \right\}.$$

Entonces:

$$\sigma_2(u,\pi) = \sum_{j=1}^{n-2} |u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]| = \sum_{j=1}^{n-2} \frac{|u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]|}{|t_{j+2} - t_j|} |t_{j+2} - t_j| =$$

$$\sum_{j\in\Gamma} |t_{j+2} - t_j| + \sum_{j\notin\Gamma} \left(\frac{|u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]|}{|t_{j+2} - t_j|} \right)^p |t_{j+2} - t_j| \leq$$

$$\sum_{j\in\Gamma} |t_{j+2} - t_{j+1}| + \sum_{j\in\Gamma} |t_{j+1} - t_j| + V^R_{(p,2)}(u) \leq 2(b-a) + V^R_{(p,2)}(u).$$

Para la demostración de la parte 2. se procede de manera similar al Lema 2.1 de [**115**] o a 2. de la Proposición 2.1.1, usando la desigualdad de Hölder.

Igualmente, la parte 3. es consecuencia inmediata de 1. o 2. y del hecho que $BV_2[a,b] \subset Lip[a,b]$ (Proposición 1.2.1). □

Corolario 2.2.1. *Sea* $p > 1$, *entonces* $RV_{(p,2)}[a,b] \subset RV_{(p,1)}[a,b]$.

Demostración. Sea $u \in RV_{(p,2)}[a,b]$. Por el Teorema 2.2.1 $u \in BV_2[a,b]$, entonces existe una constante K, tal que $|u[s,t]| \leq K$, $s,t \in [a,b]$ (ver (1.2.1)).

Sea $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$, entonces:

$$\sigma^R_{(p,1)}(u,\pi) \leq K^p \sum_{j=1}^{n-1} |t_{j+1} - t_j| \leq K^p(b-a).$$

Y así $u \in RV_{(p,1)}[a,b]$. □

En el siguiente teorema demostramos que $RV_{(p,2)}[a,b]$ es un espacio vectorial.

TEOREMA 2.2.2. *Sean* $p>1$, $u,v\in RV_{(p,2)}[a,b]$, $\alpha\in\mathbb{R}$, *entonces:*

1. $\left(V^R_{(p,2)}(u+v)\right)^{1/p}\le\left(V^R_{(p,2)}(u)\right)^{1/p}+\left(V^R_{(p,2)}(v)\right)^{1/p}$.

2. $V^R_{(p,2)}(\alpha u)=|\alpha|^p\,V^R_{(p,2)}(u)$.

3. $RV_{(p,2)}[a,b]$ *es un espacio vectorial.*

DEMOSTRACIÓN. 1. Sea $\pi: a\le t_1<\cdots<t_n\le b$ una partición del intervalo $[a,b]$, con al menos tres puntos.

Por propiedades de las diferencias divididas y la desigualdad de Minkowski, tenemos que:

$$\left(\sigma^R_{(p,2)}(u+v,\pi)\right)^{1/p}=$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n-2}\left(\frac{|(u+v)[t_{j+1},t_{j+2}]-(u+v)[t_j,t_{j+1}]|}{|t_{j+2}-t_j|^{\frac{p-1}{p}}}\right)^p\right)^{1/p}\le$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n-2}\left(\frac{|u[t_{j+1},t_{j+2}]-u[t_j,t_{j+1}]|}{|t_{j+2}-t_j|^{\frac{p-1}{p}}}+\frac{|v[t_{j+1},t_{j+2}]-v[t_j,t_{j+1}]|}{|t_{j+2}-t_j|^{\frac{p-1}{p}}}\right)^p\right)^{1/p}\le$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n-2}\left(\frac{|u[t_{j+1},t_{j+2}]-u[t_j,t_{j+1}]|}{|t_{j+2}-t_j|^{\frac{p-1}{p}}}\right)^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{n-2}\left(\frac{|v[t_{j+1},t_{j+2}]-v[t_j,t_{j+1}]|}{|t_{j+2}-t_j|^{\frac{p-1}{p}}}\right)^p\right)^{1/p}.$$

De esta manera tenemos que:

$$\left(\sigma_{(p,2)}(u+v,\pi)\right)^{1/p}\le\left(\sigma_{(p,2)}(u,\pi)\right)^{1/p}+\sigma_{(p,2)}(v,\pi)^{1/p}.$$

Al tomar supremos resulta:

$$\left(V^R_{(p,2)}(u+v;[a,b])\right)^{1/p}\le\left(V^R_{(p,2)}(u;[a,b]\right)^{1/p}+\left(V^R_{(p,2)}(v;[a,b])\right)^{1/p}. \tag{2.2.2}$$

De la ecuación (2.2.1) y de la Definición 2.2.1 se tiene que:

$$\sigma^R_{(p,2)}(\alpha u,\pi)=|\alpha|^p\,\sigma^R_{(p,2)}(u,\pi)$$

y por lo tanto

$$V^R_{(p,2)}(\alpha u;[a,b])=|\alpha|^p\,V^R_{(p,2)}(u;[a,b]). \tag{2.2.3}$$

La demostración de la parte 3. es consecuencia de 1. y 2. □

PROPOSICIÓN 2.2.1. *Sean* $p > q > 1$ *y* $k > 0$*, entonces* $RV_{(p,2)}[a,b] \subset RV_{(q,2)}[a,b]$*. Más aún, si* $u \in RV_{(p,2)}[a,b]$*, entonces:*

$$V^R_{(q,2)}(u) \leq 2(b-a) + V^R_{(p,2)}(u).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $u \in RV_{(p,2)}[a,b]$ y $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ una partición del intervalo $[a,b]$. Denotemos por:

$$\Gamma = \{j = 1, \ldots, n-2 : |u[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]|^q \leq 1\},$$

entonces

$$\sigma^R_{(q,2)}(u,\pi) = \sum_{j=1}^{n-2} |u[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]|^q \, |t_{j+2} - t_j| \leq$$
$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\in\Gamma}}^{n-2} |t_{j+2} - t_j| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\notin\Gamma}}^{n-2} |u[t_j, t_{j+1}, t_{j+2}]|^p \, |t_{j+2} - t_j| \leq$$
$$2(b-a) + V_{(p,2)}(u;[a,b]).$$

Por lo tanto $V^R_{(q,2)}(u) \leq 2(b-a) + V^R_{(p,2)}(u)$ y así $u \in RV_{(q,2)}[a,b]$. □

En 1992, N. Merentes ([**115**]) generaliza el concepto de $(p,1)$-variación, usando la ideas sobre la noción de segunda variación acotada introducida por De la Vallée Poussin en [**59**], como describimos a continuación.

DEFINICIÓN 2.2.2. (*(p,2)-variación de Riesz. Definición Alternativa*). Dados $p > 1$, $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y una partición $\pi \in \Pi^b_{a,2}$:

$$\pi : a \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \leq t_5 < \cdots < t_{2n} \leq b,$$

con al menos tres puntos, se definen:

$$\widehat{\sigma}^R_{(p,2)}(u,[a,b]) := \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{|u[t_{2j+1},t_{2j+2}] - u[t_{2j-1},t_{2j}]|}{|t_{2j+2}-t_{2j-1}|} \right)^p |t_{2j+2}-t_{2j-1}|$$

y

$$\widehat{V}^R_{(p,2)}(u,[a,b]) = \underset{\pi\in\Pi^b_{a,2}}{sup}\, \widehat{\sigma}^R_{(p,2)}(u,\pi).$$

La clase de las funciones $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, *tales que* $\widehat{V}^R_{(p,2)}(u;[a,b]) < \infty$ *se denota por* $R\hat{V}_{(p,2)}[a,b]$.

EJEMPLO 2.2.3. De manera similar al ejemplo 2.2.1 si u es una función afín, entonces $\widehat{V}^R_{(p,2)}(u;[a,b]) = 0$ y así $R\hat{V}_{(p,2)}[a,b]$ no es vacío.

EJEMPLO 2.2.4. Si u es una parábola ($u(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma, t \in [a,b]$). Entonces, para $a \leq r < s \leq b$, tenemos:

$$u[r,s] = \alpha(r+s) + \beta.$$

De esta manera resulta que si $a \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \leq b$, entonces:

$$\left| \frac{u[t_3,t_4] - u[t_1,t_2]}{t_4 - t_1} \right|^p = |\alpha|^p \left(1 + \frac{t_3 - t_2}{t_4 - t_1} \right)^p.$$

Así resulta, que para una partición $\pi : a \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \leq t_5 < \cdots < t_{2n} \leq b$, de la familia $\Pi^b_{a,2}$,

$$\widehat{\sigma}^R_{(p,2)}(u,\pi) = |\alpha|^p \sum_{j=1}^{n-2} \left(1 + \frac{t_{2j+1} - t_{2j}}{t_{2j+2} - t_{2j-1}} \right)^p (t_{2j+2} - t_{2j-1}).$$

Esta suma tomar su mayor valor, cuando $\frac{t_{2j+1}-t_{2j}}{t_{2j+2}-t_{2j-1}} = 1, j = 1,\ldots,n-2$; lo que se logra tomando límite, de la suma anterior cuando $t_{2j+1} \uparrow t_{2j+2}$ y $t_{2j} \downarrow t_{2j-1}$, $j = 1,\ldots,n-2$. De esta manera considerando $\underset{\pi\in\Pi^b_{a,2}}{sup}\, \widehat{\sigma}^R_{(p,2)}(u,\pi)$, resulta:

$$\widehat{V}^R_{(p,2)}(u;[a,b]) = 2^p(b-a)\,|\alpha|^p\,.$$

Comparando con el resultado obtenido en el ejemplo 2.2.2, podemos observar que para esta función u: $V^R_{(p,2)}(u) < \widehat{V}^R_{(p,2)}(u)$.

Siguiendo las ideas desarrolladas para el caso de la $(p,2)$-variación, podemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 2.2.3. (*Propiedades de la variación* $\widehat{V}^R_{(p,2)}(\,\cdot\,)$*y de* $R\hat{V}_{(p,2)}[a,b]$) *Sea* $p>1$, *entonces:*

1. Si $u,v \in R\hat{V}_{(p,2)}[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *entonces:*

a. $\left(\widehat{V}^R_{(p,2)}(u+v)\right)^{1/p} \leq \left(\widehat{V}^R_{(p,2)}(u)\right)^{1/p} + \left(\widehat{V}^R_{(p,2)}(v)\right)^{1/p}.$

b. $\widehat{V}^R_{(p,2)}(\alpha u) = |\alpha|^p\, \widehat{V}^R_{(p,2)}(u).$

2. $R\hat{V}_{(p,2)}[a,b]$ *es un espacio vectorial.*

3. $\widehat{V}_2(u) \leq 2(b-a) + \widehat{V}^R_{(p,2)}(u).$

4.$\widehat{V}_2(u) \leq (b-a)^{1-1/p}\left(\widehat{V}^R_{(p,2)}(u)\right)^{1/p}.$

5. $R\hat{V}_{(p,2)}[a,b] \subset B\hat{V}_2[a,b]$ *y por lo tanto* $R\hat{V}_{(p,2)}[a,b] \subset Lip[a,b].$

6. $R\hat{V}_{(p,2)}[a,b] \subset R\hat{V}_{(p,1)}[a,b].$

Demostración. Para la parte 1. se procede en forma similar a 1. del Teorema 2.2.2. La parte 2. es consecuencia de las relaciones de la parte 1. Para la demostración de las relaciones 3. y 4. se procede como en 1. y 2. del Teorema 2.2.1.

La inclusión 5. es consecuencia inmediata de 3. o 4. y del hecho que

$$B\hat{V}_2[a,b] = BV_2[a,b] \subset Lip[a,b].$$

Para la parte 6. se procede de manera similar al Corolario 2.2.1 . □

Observación 2.2.1. Anteriormente, en los Ejemplos 2.2.2 y 2.2.4 verificamos que para $u \in \mathbb{R}^{[a,b]}$, definida por $u(t)=t^2$, $t\in[a,b]$, se tiene que $V^R_{(p,2)}(u) = 2(b-a)$, mientras que $\widehat{V}^R_{(p,2)}(u) = 2^p(b-a)$. De esta manera tenemos que en general $V^R_{(p,2)}(u) \neq \widehat{V}^R_{(p,2)}(u)$. Sin embargo, en el siguiente teorema demostramos que los espacios $RV_{(p,2)}[a,b]$ y $R\hat{V}_{(p,2)}[a,b]$ son iguales.

Teorema 2.2.4. *Sea* $p>1$, *entonces:*

1. Si $\widehat{V}^R_{(p,2)}(u;[a,b]) < \infty$, *entonces* $V^R_{(p,2)}(u;[a,b]) \leq 2\,.\,3\widehat{V}_{(p,2)}\,(u;[a,b])\,.$

2. Si $V^R_{(p,2)}(u;[a,b]) < \infty$, *entonces* $\widehat{V}^R_{(p,2)}(u;[a,b]) \leq 2^p V^R_{(p,2)}(u;[a,b]).$

3. $\hat{RV}_{(p,2)}[a,b] = RV_{(p,2)}[a,b]$.

Demostración. Sea $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, tal que $\widehat{V}^R_{(p,2)}(u;[a,b]) < \infty$ y consideremos tres puntos t_1, t_2, t_3, tales que $a \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq b$. Ahora escojamos números a_1, a_2, b_1, b_2, tales que:

$$t_1 < a_1 < a_2 \leq t_2 < b_1 < b_2 \leq t_3.$$

Entonces:

$$\left(\frac{|u[t_2,t_3]-u[t_1,t_2]|}{|t_3-t_1|}\right)^p |t_3-t_1| = \left(\frac{|u[t_2,t_3]-u[t_1,t_2]|}{|t_3-t_1|^{1-1/p}}\right)^p.$$

Utilizando la desigualdad triangular resulta:

$$\frac{|u[t_2,t_3]-u[t_1,t_2]|}{|t_3-t_1|^{1-1/p}} \leq$$

$$\frac{|u[t_2,t_3]-u[a_1,a_2]|}{|t_3-a_1|^{1-1/p}} + \frac{|u[a_1,a_2]-u[b_1,b_2]|}{|b_2-a_1|^{1-1/p}} + \frac{|u[b_1,b_2]-u[t_1,t_2]|}{|b_2-t_1|^{1-1/p}}.$$

Al usar la desigualdad de Hölder, con $q = \frac{p}{p-1}$, obtenemos:

$$\left(\frac{|u[t_2,t_3]-u[t_1,t_2]|}{|t_3-t_1|^{1-1/p}}\right)^p \leq$$

$$3^{p-1}\left[\left(\frac{|u[t_2,t_3]-u[a_1,a_2]|}{|t_3-a_1|^{1-1/p}}\right)^p + \left(\frac{|u[a_1,a_2]-u[b_1,b_2]|}{|b_2-a_1|^{1-1/p}}\right)^p + \left(\frac{|u[b_1,b_2]-u[t_1,t_2]|}{|b_2-t_1|^{1-1/p}}\right)^p\right] =$$

$$3^{p-1}\left[\left(\frac{|u[t_2,t_3]-u[a_1,a_2]|}{|t_3-a_1|}\right)^p |t_3-a_1| + \left(\frac{|u[a_1,a_2]-u[b_1,b_2]|}{|b_k-a_1|}\right)^p |b_2-a_1| +\right.$$

$$\left.\left(\frac{|u[b_1,b_2]-u[t_1,t_2]|}{|b_2-t_1|}\right)^p |b_2-t_1|\right] \leq 3^{p-1}\widehat{V}^R_{(p,2)}(u;[t_1,t_3]).$$

De esta manera tenemos que si $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ es una partición del intervalo $[a, b]$ y procedemos de forma similar a la demostración del Teorema 1.3.1, concluimos que:

$$\sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{|u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]|}{|t_{j+2} - t_j|} \right)^p |t_{j+2} - t_j| \leq 2 \, . \, 3\widehat{V}^R_{(p,2)}(u; [a, b]).$$

Así resulta que:

$$V^R_{(p,2)}(u; [a, b]) \leq 2 \, . \, 3\widehat{V}^R_{(p,2)}\,(u; [a, b])\,.$$

Por lo tanto $\hat{RV}_{(p,2)}[a, b] \subset RV_{(p,2}[a, b]$.

Por otra parte, supongamos que $V^R_{(p,2)}(u; [a, b]) < \infty$ y consideremos una partición del intervalo $[a, b]$,

$$\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_k \leq t_{k+1} < \cdots < t_{2k} \leq t_{2k+1} < \cdots < t_{nk} \leq b.$$

De la desigualdad triangular, resulta que para cada $j = 1, \ldots n - 1$,

$$\left(\frac{|u[t_{2j+1}, t_{2j+2}] - u[t_{2j-1}, t_{2j}]|}{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|} \right)^p \leq$$

$$\Bigg(\frac{|u[t_{2j+1}, t_{2j+2}] - u[t_{2j}, t_{2j+1}]|}{|t_{2j+2} - t_{2j}|} \frac{|t_{2j+2} - t_{2j}|}{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|}$$

$$\frac{|u[t_{2j}, t_{2j+1}] - u[t_{2j-1}, t_{2j}]|}{|t_{2j+1} - t_{2j-1}|} \frac{|t_{2j+1} - t_{2j-1}|}{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|} \Bigg)^p.$$

Usando la desigualdad de Hölder, con $q = \frac{p}{p-1}$ y que

$$\frac{|t_{2j+2} - t_{2j}|}{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|} \leq 1 \quad y \quad \frac{|t_{2j+1} - t_{2j-1}|}{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|} \leq 1, \quad j = 1, \ldots, n - 1,$$

se tiene:

$$\left(\frac{|u[t_{2j+1}, t_{2j+2}] - u[t_{2j-1}, t_{2j}]|}{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|} \right)^p \leq$$

$$2^{p-1} \Bigg[\left(\frac{|u[t_{2j+1}, t_{2j+2}] - u[t_{2j}, t_{2j+1}]|}{|t_{2j+2} - t_{2j}|} \frac{|t_{2j+2} - t_{2j}|}{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|} \right)^p +$$

$$\left(\frac{|u[t_{2j},t_{2j+1}]-u[t_{2j-1},t_{2j}]|}{|t_{2j+1}-t_{2j-1}|}\frac{|t_{2j+1}-t_{2j-1}|}{|t_{2j+2}-t_{2j-1}|}\right)^p\Bigg] \leq$$

$$2^{p-1}\left[\left(\frac{|u[t_{2j+1},t_{2j+2}]-u[t_{2j},t_{2j+1}]|}{|t_{2j+2}-t_{2j}|}\right)^p\frac{|t_{2j+2}-t_{2j}|}{|t_{2j+2}-t_{2j-1}|}+\right.$$

$$\left.\left(\frac{|u[t_{2j},t_{2j+1}]-u[t_{2j-1},t_{2j}]|}{|t_{2j+1}-t_{2j-1}|}\right)^p\frac{|t_{2j+1}-t_{2j-1}|}{|t_{2j+2}-t_{2j-1}|}\right],$$

$j=1,\ldots,n-1$.

De esta manera resulta

$$\left(\frac{|u[t_{2j+1},t_{2j+2}]-u[t_{2j-1},t_{2j}]|}{|t_{2j+2}-t_{2j-1}|}\right)^p|t_{2j+2}-t_{2j-1}| \leq$$

$$2^{p-1}\left[\left(\frac{|u[t_{2j+1},t_{2j+2}]-u[t_{2j},t_{2j+1}]|}{|t_{2j+2}-t_{2j}|}\right)^p|t_{2j+2}-t_{2j}|+\right.$$

$$\left.\left(\frac{|u[t_{2j},t_{2j+1}]-u[t_{2j-1},t_{2j}]|}{|t_{2j+1}-t_{2j-1}|}\right)^p|t_{2j+1}-t_{2j-1}|\right] \leq$$

$$2^{p-1}V^R_{(p,2)}(u;[t_{2j-1},t_{2j+2}],$$

$j=1,\ldots,n-1$.

Por lo tanto:

$$\widehat{\sigma}^R_{(p,2)}(u,\pi):=2^{p-1}\sum_{j=1}^{n-1}V^R_{(p,2)}(u;[t_{2j-1},t_{2j+2}]\leq 2^pV^R_{(p,2)}(u;[a,b])$$

$$y$$

$$\widehat{V}^R_{(p,2)}(u;[a,b])\leq 2^pV^R_{(p,2)}(u;[a,b]).$$

De la re1aciones 1. y 2. se concluye que $RV_{(p,k)}[a,b]=R\hat{V}_{(p,k)}[a,b]$. $\square$

En 1992, N. Merentes (ver [**115**]) generaliza el Lema de Riesz para el espacio $\hat{RV}_{(p,2)}[a,b]$, como se muestra en el siguiente lema:

Lema 2.2.1. (*Generalización lema de Riesz caso* $\hat{RV}_{(p,2)}[a,b]$) *Sea* $p > 1$. *Entonces* $u \in \hat{RV}_{(p,2)}[a,b]$ *si sólo si* $u' \in AC[a,b]$ *y* $u'' \in L_p[a,b]$ *y ademas:*

$$\hat{V}^R_{(p,2)}(u;[a,b]) = \int_a^b |u''(t)|^p \, dt.$$

De este lema, obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 2.2.2. *Sea* $p > 1$, *entonces* $u \in \hat{RV}_{(p,2)}[a,b]$ *si y sólo si* $u' \in \hat{RV}_{(p,1)}[a,b]$. *Además* $\hat{V}^R_{(p,2)}(u) = \hat{V}^R_{(p,1)}(u')$.

Corolario 2.2.3. *Sean* $q > p > 1$, *entonces* $\hat{RV}_{(q,2)}[a,b] \subset \hat{RV}_{(p,2)}[a,b]$.

Corolario 2.2.4. *Sea* $p > 1$, *entonces* $\hat{RV}_{(p,2)}[a,b]$ *es un álgebra.*

Demostración. Sean $u, v \in \hat{RV}_{(p,2)}[a,b]$. Del corolario anterior se obtiene la inclusión $\hat{RV}_{(p,2)}[a,b] \subset \hat{RV}_{(p,1)}[a,b]$. Como $\hat{RV}_{(p,1)}[a,b]$ es un álgebra y

$$(uv)' = u'v + v'u,$$

y $u', v, v', u \in RV_{(p,1)}[a,b]$, del lema de Riesz se obtiene la tesis. $\square$

Consideremos la función $\|\cdot\|^R_{(p,2)} : \hat{RV}_{(p,2)}[a,b] \to \mathbb{R}$, definida por:

$$\|u\|^R_{(p,2)} := |u(a)| + \|u'\|^R_{(p,1)}$$

o equivalentemente (usando la generalización del lema de Riesz que acabamos de enunciar)

$$\|u\|^R_{(p,2)} = |u(a)| + |u'(a)| + \left(\widehat{V}^R_{(p,2)}(u)\right)^{1/p} \quad o \quad \|u\|^R_{(p,2)} = |u(a)| + |u'(a)| + \left(\int_a^b |u''(t)|^p \, dt\right)^{1/p}.$$

Corolario 2.2.5. *Sea* $p > 1$, *entonces* $\left(\hat{RV}_{(p,2)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(p,2)}\right)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. El hecho que $\|\cdot\|^R_{(p,2)}$ es una norma sobre $\hat{RV}_{(p,2)}[a,b]$ es consecuencia de que $\|\cdot\|^R_{(p,1)}$ es una norma sobre $RV_{(p,1)}[a,b]$.

Por otra parte, sea $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $\left(\hat{RV}_{(p,2)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(p,2)}\right)$, entonces de la definición de $\|\cdot\|^R_{(p,2)}$ tenemos que $\{u_n(a)\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y $\{u'_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesiones de Cauchy en $\left(RV_{(p,1)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(p,1)}\right)$. De esta manera, existen $u_0 \in \mathbb{R}$ y $\overline{u} \in RV_{(p,1)}[a,b]$ tal que $\{u_n(a)\}_{n\geq 1}$ converge a u_0 y $u'_n \xrightarrow{\|\cdot\|^R_{(p,1)}} \overline{u}$.

Si consideramos $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $u(t) = u_0 + \int_a^t \overline{u}(x)dx$, entonces:

a. $u \in \hat{RV}_{(p,2)}[a,b]$, ya que $u' = \overline{u} \in RV_{(p,1)}[a,b]$.

b. Como $\|u_n - u\|^R_{(p,2)} = |u_n(a) - u_0| + \|u_n - \overline{u}\|^R_{(p,2)}$, $n \geq 1$, se tiene que $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|^R_{(p,2)}} u$. $\square$

2.3. Funciones de (p,k)-variación acotada en el sentido de Riesz.

Ahora generalizamos la noción de *(p,2)*-variación acotada introduciendo un nuevo concepto denominado (p,k)-variación. Los resultados de esta sección están expuesto en un artículo escrito con la colaboración de los profesores N. Merentes y J. L. Sánchez; y serán publicados próximamente en Journal of Function Spaces and Applications [**119**].

Definición 2.3.1. Sean $p > 1$, $k > 0$ un número entero y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dada una partición $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ del intervalo $[a,b]$, con al menos $k+1$ puntos; definimos:

$$\sigma^R_{(p,k)}(u,\pi) := \sum_{j=1}^{n-k} \left(\frac{|u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}] - u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}]|}{|t_{j+k} - t_j|} \right)^p |t_{j+k} - t_j| \,. \tag{2.3.1}$$

y

$$V^R_{(p,k)}(u;[a,b]) = V^R_{(p,k)}(u) := \sup_{\pi} \sigma^R_{(p,k)}(u,\pi),$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones π del intervalo $[a,b]$, con al menos $k+1$ puntos. Si $V^R_{(p,k)}(u;[a,b]) < \infty$ diremos que la función u *tiene* (p,k)*-variación acotada o finita en el intervalo* $[a,b]$ y la clase de tales funciones la denotamos por $RV_{(p,k)}[a,b]$.

Observación 2.3.1. Si $k = 1$, ésta definición es la clásica definición de p-variación en el sentido de Riesz, considerada por F. Riesz en 1910 [**136**]. Si $k = 2$, este concepto es la noción de $(p, 2)$-variación tratada en la sección anterior, introducida por N. Merentes en 1992 [**115**].

OBSERVACIÓN 2.3.2. Como

$$u[t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+k}] = \frac{u[t_{j+1}, t_{j+2}, \ldots, t_{j+k}] - u[t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+k-1}]}{t_{j+k} - t_j},$$

entonces la suma (2.3.1) de la Definición 2.3.1 la podemos escribir de la forma:

$$\sum_{j=1}^{n-k} (|u[t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+k}]|)^p \, |t_{j+k} - t_j| \,.$$

OBSERVACIÓN 2.3.3. Por otra parte de las propiedades de k diferencias divididas (ver (1.3.1)) resulta que si u es un polinomio de grado n ($p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots a_0$), entonces:

$$\sigma_{(p,k)}(p) = \begin{cases} 0, & n < k \\ |a_n|^p \sum\limits_{j=1}^{n-k} (t_{j+k} - t_j), & n = k. \end{cases}$$

Como cada sumando $t_{j+k} - t_k$, $j = 1, \ldots, n-k$ de la suma $\sum\limits_{j=1}^{n-k} (t_{j+k} - t_j)$ lo podemos descomponer como suma de k factores

$$t_{j+k} - t_j = t_{j+1} - t_j + t_{j+2} - t_2 + \cdots + t_{j+k} - t_{j+k-1}, \quad j = 1, \ldots, n-k.$$

Los factores de estas descomposiciones, las colocamos en una matriz de $(n-k)$xk, como se indica a continuación.

$$\begin{array}{cccccc}
t_2 - t_1 & t_3 - t_2 & t_4 - t_3 & \cdots & t_k - t_{k-1} & t_{k+1} - t_k \\
t_3 - t_2 & t_4 - t_3 & t_5 - t_4 & \cdots & t_{k+1} - t_k & t_{k+2} - t_{k+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
t_{k+1} - t_k & t_{k+2} - t_{k+1} & t_{k+3} - t_{k+2} & \cdots & t_{2k-1} - t_{2k-2} & t_{2k} - t_{2k-1} \\
t_{k+2} - t_{k+1} & t_{k+3} - t_{k+2} & t_{k+4} - t_{k+2} & \cdots & t_{2k} - t_{2k-1} & t_{2k+1} - t_{2k} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
t_{n-k-1} - t_{n-k} & t_{n-k} - t_{n-k+1} & t_{n-k+1} - t_{n-k-2} & \cdots & t_{n-1} - t_{n-2} & t_n - t_{n-1}
\end{array} .$$

Al observar esta matriz, podemos notar que los factores aparecen la siguiente cantidad de veces.

$t_2 - t_1$: una vez.

$t_3 - t_2$: a lo sumo dos veces.

$t_4 - t_3$: no más de tres veces.

$\vdots$

$t_{k+1} - t_k$: a lo sumo k veces.

$t_{k+2} - t_{k+1}$: no más de k veces.

$\vdots$

$t_{n-1} - t_{n-2}$: a lo sumo dos veces.

$t_n - t_{n-1}$: una vez.

Como estas longitudes corresponden a intervalos que no se superponen, tenemos que:

$$\sigma^R_{(p,k)}(u, \pi) \leq |a_n|^p \, k \, (b - a).$$

Si las longitudes de los intervalos, que no se repiten k-veces, tienden a cero, se obtiene que:

$$V^R_{(p,k)}(u; [a, b]) = |a_n|^p \, k \, (b - a).$$

De esta forma:

$$\sigma_{(p,k)}(u) = \begin{cases} 0, & n < k \\ |a_n|^p \, k \, (b - a), & n = k. \end{cases}$$

El siguiente teorema, garantiza que $RV_{(p,k)}[a, b]$ es un espacio vectorial y su demostración es similar a la del Teorema 2.2.2.

Teorema 2.3.1. *Sean $p > 1$ y $k > 0$ un número entero, $u, v \in RV_{(p,k)}[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:*

1. $\left(V^R_{(p,k)}(u + v)\right)^{1/p} \leq \left(V^R_{(p,k)}(u)\right)^{1/p} + \left(V^R_{(p,k)}(v)\right)^{1/p}$.

2. $V^R_{(p,k)}(\alpha u) = |\alpha|^p \, V^R_{(p,k)}(u)$.

3. $RV_{(p,k)}[a, b]$ *es un espacio vectorial.*

En el siguiente teorema demostramos que toda función con (p,k)-variación acotada también tiene k-variación acotada, lo que generaliza las partes 2 a. y 2 b. del Teorema 2.1.1.

TEOREMA 2.3.2. *Sean $p > 1$ y $k > 0$ un número entero, entonces:*

1. $V_k(u) \leq k(b-a) + V^R_{(p,k)}(u)$.

2. $V_k(u) \leq (k(b-a))^{1-1/p} \left(V^R_{(p,k)}(u)\right)^{1/p}$.

3. $RV_{(p,k)}[a,b] \subset BV_k[a,b]$.

DEMOSTRACIÓN. 1. Sean $u \in RV_{(p,k)}[a,b]$ y $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ una partición del intervalo $[a,b]$. Demostremos la parte 1. Denotemos por

$$\Gamma = \left\{ j = 1, \ldots, n-k : \frac{|u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}] - u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}]|}{|t_{j+k}-t_j|} \leq 1 \right\}.$$

Entonces

$$\sigma_k(u,\pi) = \sum_{j=1}^{n-k} |u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}] - u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}]| =$$

$$\sum_{j=1}^{n-k} \frac{|u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}] - u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}]|}{|t_{j+k}-t_j|} |t_{j+k}-t_j| =$$

$$\sum_{j\in\Gamma} |t_{j+k}-t_j| + \sum_{j\notin\Gamma} \left(\frac{|u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}] - u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}]|}{|t_{j+k}-t_j|} \right)^p |t_{j+k}-t_j| \leq$$

$$\sum_{j\in\Gamma} (|t_{j+k}-t_{j+k-1}| + \ldots + |t_{j+1}-t_j|) + V^R_{(p,k)}(u) \leq k(b-a) + V^R_{(p,k)}(u).$$

Para la desigualdad 2., se utiliza la desigualdad de Hölder, para obtener:

$$\sum_{j=1}^{n-k} |u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}] - u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}]| =$$

$$\sum_{j=1}^{n-k} \frac{|u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}]-u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}]|}{|t_{j+k}-t_j|^{\frac{p-1}{p}}} |t_{j+k}-t_j|^{\frac{p-1}{p}} \leq$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n-k} \frac{|u[t_{j+1},\ldots,t_{j+k}]-u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}]|^p}{|t_{j+k}-t_j|^{p-1}}\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n-k} |t_{j+k}-t_j|\right)^{1-1/p} \leq$$

$$\left(V^R_{(p,k)}(u)\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{n-k} (|t_{j+k}-t_{j+k-1}|+\ldots+|t_{j+1}-t_j|)\right)^{1-1/p} \leq$$

$$(k(b-a))^{1-1/p} \left(V^R_{(p,k)}(u)\right)^{1/p}.$$

Tomando supremo sobre $\underset{\pi\in\Pi_a^b}{sup}\,\sigma_k(u,\pi)$ se obtiene la desigualdad buscada.

La parte 3. es consecuencia inmediata de 1. o 2. □

En el siguiente corolario se asegura que los espacio $RV_{(p,k)}[a,b]$, $p>1$, $k\in\mathbb{N}$, se reducen a medida que incrementamos el valor del entero $k>0$ y dejamos fijo el número $p>1$.

Corolario 2.3.1. *Sean $p>1$ y $k>0$ un entero, entonces $RV_{(p,k+1)}[a,b]\subset RV_{(p,k)}[a,b]$. Además si $u\in RV_{(p,k+1)}[a,b]$, entonces existe u' en cada punto de $[a,b]$ y $u'\in RV_{(p,k)}[a,b]$ y*

$$V^R_{(p,k)}(u') \leq \left((k+1)V^R_{(p,k+1)}(u)\right)^{1/p}.$$

Demostración. Sea $u\in RV_{(p,k+1)}[a,b]$, entonces el Teorema 2.3.2 garantiza que $u\in BV_{k+1}[a,b]$, y por Teorema 1.3.2, existe una constante K, tal que $|u[t_1,\ldots,t_{k+1}]|\leq K$, $t_i\in[a,b]$, $i=1,\ldots,k+1$.

Sea $\pi : a\leq t_1<\cdots<t_n\leq b$, una partición del intervalo $[a,b]$, entonces:

$$\sigma^R_{(p,k)}(u,\pi) = \sum_{j=1}^{n-k} |u[t_j,t_{j+1},\ldots,t_{j+k}]|^p\,|t_{j+k}-t_j| \leq K^p k(b-a).$$

Y así $u\in RV_{(p,k)}[a,b]$.

Por otra parte si $u\in RV_{(p,k+1)}[a,b]$, entonces como $k\geq 1$, tenemos que $u\in BV_2[a,b]$ y por el Teorema 1.3.2, existe u' en $[a,b]$.

Sea $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ una partición de $[a,b]$. De la Proposición 1.3.2 y de la desigualdad de Minkowski, resulta:

$$\sigma_{(p,k)}(u,\pi) =$$

$$\sum_{j=1}^{n-k} (|u'[t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+k+1}]|)^p \, |t_{j+k} - t_j| =$$

$$\sum_{j=1}^{n-k} \left(\sum_{h=j}^{j+k} |u[t_j, t_{j+1}, \dots t_{h-1}, t_h, t_h, t_{h+1}, \dots, t_{j+k}]| \right)^p |t_{j+k} - t_j| =$$

$$\sum_{j=1}^{n-k} \left(\sum_{h=j}^{j+k} |u[t_j, t_{j+1}, \dots t_{h-1}, t_h, t_h, t_{h+1}, \dots, t_{j+k}]| \, |t_{j+k} - t_j|^{1/p} \right)^p =$$

$$\left(\sum_{h=j}^{j+k} \left(\sum_{j=1}^{n-k} (|u[t_j, t_{j+1}, \dots t_{h-1}, t_h, t_h, t_{h+1}, \dots, t_{j+k}]|)^p \, |t_{j+k} - t_j| \right) \right)^{1/p} \leq$$

$$\left((k+1) V^R_{(p,k+1)}[a,b] \right)^{1/p}.$$

$\square$

En la siguiente proposición veremos qué ocurre con el espacio $RV_{(p,k)}[a,b]$ dejando fijo el entero k e incrementamos el valor número p.

Proposición 2.3.1. *Sean $p > q > 1$ y $k > 0$ un número entero, entonces $RV_{(p,k)}[a,b] \subset RV_{(q,k)}[a,b]$. Más aún, si $u \in RV_{(p,k)}[a,b]$, entonces:*

$$V^R_{(q,k)}(u) \leq k(b-a) + V^R_{(p,k)}(u).$$

Demostración. Sean $u \in RV_{(p,k)}[a,b]$ y $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ una partición del intervalo $[a,b]$. Denotemos por:

$$\Gamma = \{ j = 1, \dots, n-k : |u[t_j, t_{j+1}, \dots, t_{j+k}]|^q \leq 1 \},$$

entonces

$$\sigma^R_{(q,k)}(u,\pi) = \sum_{j=1}^{n-k} |u[t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+k}]|^q \, |t_{j+k} - t_j| \leq$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\in\Gamma}}^{n-k} |t_{j+k} - t_j| + \sum_{\substack{j=1 \\ j\notin\Gamma}}^{n-k} |u[t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+k}]|^p \, |t_{j+k} - t_j| \leq$$

$$k(b-a) + V^R_{(p,k)}(u;[a,b]).$$

Por lo tanto $V^R_{(q,k)}(u) \leq k(b-a) + V^R_{(p,k)}(u)$ y así $u \in RV_{(q,k)}[a,b]$. $\square$

2.4. Variación del concepto de (p,k)-variación.

Haciendo un símil con la definición de la variación $\hat{V}^R_{(p,2)}$ de la Definición 2.2.2 realizando una modificación en la suma (2.3.1) de la Definición 2.3.1, podemos considerar la siguiente definición alternativa de la (p,k)-variación en el sentido de Riesz, que generaliza el concepto de $(p,2)$-variación estudiado por N. Merentes en **[115]**.

Definición 2.4.1. Dados $p > 1$, $k > 0$ un número entero, $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y una partición:

$$\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_k \leq t_{k+1} < \cdots < t_{2k} \leq t_{2k+1} < \cdots < t_{kn} \leq b$$

del intervalo $[a,b]$, definimos:

$$\hat{\sigma}^R_{(p,k)}(u,\pi) :=$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\left| u[t_{jk+1}, \ldots, t_{(j+1)k}] - u[t_{(j-1)k+1}, \ldots, t_{jk}] \right|}{\left| t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1} \right|} \right)^p \left| t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1} \right|$$

y

$$\hat{V}^R_{(p,k)}(u;[a,b]) = \hat{V}^R_{(p,k)}(u) := \sup_{\pi\in\Pi^b_{a,k}} \hat{\sigma}^R_{(p,k)}(u,\pi).$$

La clase de las funciones $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, tales que $\hat{V}^R_{(p,k)}(u;[a,b]) < \infty$, la denotaremos por $\hat{RV}_{(p,k)}[a,b]$.

Observación 2.4.1. De las propiedades de diferencias divididas (Proposición 1.3.1) se tiene que si u es un polinomio de grado menor o igual a $k-1$, entonces $\hat{\sigma}^R_{(p,k)}(u,\pi) = 0, \pi \in \Pi^b_{a,k}$ y así $\hat{V}^R_{(p,k)}(u;[a,b]) = 0$ en cualquier intervalo $[a,b]$.

En el siguiente teorema presentamos en 1. la relación que existe entre la variación $\widehat{V}^R_{(p,k)}$ de una función en un intervalo y subintervalos. Además se presentan desigualdades que garantizan que $R\hat{V}_{(p,k)}[a,b]$ es un espacio vectorial.

Teorema 2.4.1. *Sean $p>1$ y $k>0$ un número entero. Entonces:*

1. Si $\widehat{V}^R_{(p,k)}(u;[a,b]) < \infty$ y $a \le t \le b$, entonces:

$$\widehat{V}^R_{(p,k)}(u;[a,t]) < \infty \quad , \quad \widehat{V}^R_{(p,k)}(u;[t,b]) < \infty$$

y

$$\widehat{V}^R_{(p,k)}(u;[a,t]) + \widehat{V}^R_{(p,k)}(u;[t,b]) \le \widehat{V}^R_{(p,k)}(u;[a,b]).$$

2. Si $u,v \in R\hat{V}_{(p,k)}[a,b]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces: *a.* $\widehat{V}^R_{(p,k)}(u+v) \le \widehat{V}^R_{(p,k)}(u) + \widehat{V}^R_{(p,k)}(u)$.

b. $\widehat{V}^R_{(p,k)}(\alpha u) = |\alpha|^p\, \widehat{V}^R_{(p,k)}(u)$.

3. $R\hat{V}_{(p,k)}[a,b]$ es un espacio vectorial.

Demostración. 1. es consecuencia de la definición de $\widehat{V}^R_{(p,k)}$, siguiendo las ideas de la demostración de la Proposición 1.3.5. La demostración de 2. es similar a la proposición 2.2.2 y la parte 3. es consecuencia inmediata de 2. $\square$

En el siguiente teorema presentamos la relaciones entre las variaciones $\widehat{V}_k$ y $\widehat{V}^R_{(p,k)}$, lo que representa un generalización de los resultados obtenidos, para el caso $k=2$ del Teorema 2.2.3.

Teorema 2.4.2. *Sean $p>1$ y $k>0$ un entero, entonces:*

1. $\widehat{V}_k(u) \le 2(b-a) + \widehat{V}^R_{(p,k)}(u)$.

2. $\widehat{V}_k(u) \le (2\,(b-a))^{1-1/p} \left(\widehat{V}^R_{(p,k)}(u)\right)^{1/p}$.

3. $R\hat{V}^R_{(p,k)}[a,b] \subset B\hat{V}_k[a,b]$.

Demostración. Sea $u \in \hat{RV}_{(p,k)}[a,b]$ y

$$\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_k \leq t_{k+1} < \cdots < t_{2k} \leq t_{2k+1} < \cdots < t_{nk} \leq b$$

una partición del intervalo.

Para la parte 1., se denota:

$$\Gamma = \left\{ j = 1, \ldots, n-k : \frac{\left| u[t_{jk+1}, \ldots, t_{(j+1)k}] - u[t_{(j-1)k+1}, \ldots, t_{jk}] \right|}{\left| t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1} \right|} \leq 1 \right\}.$$

Entonces procediendo como en la demostración de 1. del Teorema 2.3.2, obtenemos

$$\widehat{\sigma}_k(u,\pi) \leq \sum_{j\in\Gamma} \left| t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1} \right| + \widehat{V}^R_{(p,k)}(u).$$

Como:

$$\sum_{j\in\Gamma} \left| t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1} \right| \leq 2(b-a),$$

concluimos que:

$$\widehat{V}_k(u) \leq 2(b-a) + V^R_{(p,k)}(u).$$

Para la parte 2. procedemos de manera similar a la demostración de 4. del Teorema 2.2.3

La parte 3. es consecuencia de 1. o 2. □

Ahora pasamos a demostrar el teorema más importante de esta sección, donde se exhiben las relaciones entre $V^R_{(p,k)}$ y $\hat{V}^R_{(p,k)}$, que nos permitirá asegurar que $\hat{RV}_{(p,k)}[a,b] = RV_{(p,k)}[a,b]$.

Teorema 2.4.3. *Sean $p > 1$ y k un entero positivo, entonces:*

1. Si $\hat{V}^R_{(p,k)}(u;[a,b]) < \infty$, entonces $V^R_{(p,k)}(u;[a,b]) \leq k3^{p-1}\hat{V}^R_{(p,k)}(u;[a,b])$.

2. Si $V^R_{(p,k)}(u;[a,b]) < \infty$, entonces $\hat{V}^R_{(p,k)}(u;[a,b]) \leq k^p V^R_{(p,k)}(u;[a,b])$.

3. $\hat{RV}_{(p,k)}[a,b] = RV_{(p,k)}[a,b]$.

Demostración. Para la parte 1., consideramos $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $a \leq t_1 < \cdots < t_{k+1} \leq b$. Ahora escogemos números $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_k$, tales que:

$$t_1 < a_1 < \cdots < a_k \leq t_2 \quad , \quad t_k < b_1 < \cdots < b_k \leq t_{k+1}.$$

Siguiendo las ideas desarrolladas en la demostración de 1. del Teorema 2.2.4, obtenemos que:

$$\left(\frac{|u[t_2, \ldots, t_{k+1}] - u[t_1, \ldots, t_k]|}{|t_{k+1} - t_k|}\right)^p |t_{k+1} - t_k| \leq 3^{p-1} \widehat{V}^R_{(p,k)}(u; [t_1, t_{k+1}].$$

De esta forma si $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ es una partición del intervalo $[a,b]$, resulta:

$$\sigma^R_{(p,k)}(u, \pi) \leq k 3^{p-1} \widehat{V}^R_{(p,k)}(u; [a,b]).$$

Al tomar supremo $\underset{\pi \in \Pi^b_{a,1}}{sup}\ \sigma^R_{(p,k)}(u, \pi)$ se obtiene la desigualdad

$$V^R_{(p,k)}(u; [a,b]) \leq k\, 3^{p-1} \widehat{V}^R_{(p,k)}(u; [a,b]).$$

Para la parte 2. consideremos una partición

$$\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_k \leq t_{k+1} < \cdots < t_{2k} \leq t_{2k+1} < \cdots < t_{nk} \leq b$$

y procedemos de manera similar a la demostración de 2. del Teorema 2.2.4. Así para cada $j = 1, \ldots, n-1$, tenemos:

$$\frac{\left|u[t_{jk+1}, \ldots, t_{(j+1)k}] - u[t_{(j-1)k+1}, \ldots, t_{jk}]\right|}{\left|t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1}\right|} \leq$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\left|u[t_{jk-i+1}, \ldots, t_{(j+1)k-i}] - u[t_{jk-i}, \ldots, t_{(j+1)k-i-1}\right|}{\left|t_{(j+1)k-i} - t_{jk-i}\right|} =$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\left|u[t_{jk-i+1}, \ldots, t_{(j+1)k-i}] - u[t_{jk-i}, \ldots, t_{(j+1)k-i-1}\right|}{\left|t_{(j+1)k-i} - t_{jk-i}\right|} \frac{\left|t_{(j+1)k-i} - t_{jk-i}\right|}{\left|t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1}\right|}.$$

Aplicando la desigualdad de Hölder.

$$\left(\frac{\left|u[t_{jk+1},\ldots,t_{(j+1)k}]-u[t_{(j-1)k+1},\ldots,t_{jk}]\right|}{\left|t_{(j+1)k}-t_{(j-1)k+1}\right|}\right)^p \leq$$

$$k^{p-1}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{\left|u[t_{jk-i+1},\ldots,t_{(j+1)k-i}]-u[t_{jk-i},\ldots,t_{(j+1)k-i-1}]\right|}{\left|t_{(j+1)k-i}-t_{jk-i}\right|}\frac{\left|t_{(j+1)k-i}-t_{jk-i}\right|}{\left|t_{(j+1)k}-t_{(j-1)k+1}\right|}\right)^p.$$

Como $\frac{\left|t_{(j+1)k-i}-t_{jk-i}\right|}{\left|t_{(j+1)k}-t_{(j-1)k+1}\right|} \leq 1, j = 1, \ldots, n-1$, se concluye que:

$$\left(\frac{\left|u[t_{jk+1},\ldots,t_{(j+1)k}]-u[t_{(j-1)k+1},\ldots,t_{jk}]\right|}{\left|t_{(j+1)k}-t_{(j-1)k+1}\right|}\right)^p \left|t_{(j+1)k}-t_{(j-1)k+1}\right| \leq$$

$$k^{p-1}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{\left|u[t_{jk-i+1},\ldots,t_{(j+1)k-i}]-u[t_{jk-i},\ldots,t_{(j+1)k-i-1}]\right|}{\left|t_{(j+1)k-i}-t_{jk-i}\right|}\right)^p \left|t_{(j+1)k-i}-t_{jk-i}\right| \leq$$

$$k^{p-1}V^R_{(p,k)}(u;[t_{jk},t_{(j+1)k}]).$$

De esta manera tenemos:

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\left|u[t_{jk+1},\ldots,t_{(j+1)k}]-u[t_{(j-1)k+1},\ldots,t_{jk}]\right|}{k\left|t_{(j+1)k}-t_{(j-1)k+1}\right|}\right)^p \left|t_{(j+1)k}-t_{(j-1)k+1}\right| \leq$$

$$k^p V^R_{(\varphi,k)}(u,[a,b]).$$

Al tomar supremo sobre $\Pi^b_{a,k}$ obtenemos que

$$\hat{V}^R_{(p,k)}(u,[a,b]) \leq k^p V^R_{(p,k)}(u,[a,b]).$$

La parte 3. se sigue de 1. y 2. □

Observación 2.4.2. Concluida la demostración de este teorema, de ahora en adelante podemos referirnos indiferentemente a cualquiera de los espacios $RV_{(p,k)}[a,b]$ o $\hat{RV}_{(p,k)}[a,b]$.

Corolario 2.4.1. *Sean* $p > 1$, $k > 0$ *un entero entonces* $\hat{RV}_{(p,k+1)}[a,b] \subset \hat{RV}_{(p,k)}[a,b]$.

2.5. Generalización del lema de Riesz para funciones de (p,k)-variación acotada.

En esta sección demostraremos, en nuestro criterio, uno de los teorema de mayor relevancia de este capítulo "*Generalización del lema de Riesz para el espacio* $RV_{(p,k)}[a,b]$". Iniciamos la sección, demostrando que toda función del espacio $\hat{RV}_{(p,k)}[a,b]$ tiene derivada de orden $k-1$, absolutamente continua.

PROPOSICIÓN 2.5.1. *Sean* $p>1$, $k>0$ *un entero y* $u \in \hat{RV}_{(p,k)}[a,b]$, *entonces* $u^{(k-1)}$ *existe y es absolutamente continua en* $[a,b]$ *.*

DEMOSTRACIÓN. El caso $k=1$, es consecuencia del lema de Riesz [**136**]. Para $k=2$ (ver [**115**]). Sean $k \geq 3$ un entero y $u \in \hat{RV}_{(p,k)}[a,b]$. Del teorema anterior tenemos que $u \in RV_{(p,k)}[a,b]$. Y por aplicación del corolario 2.3.1 se concluye que $u^{(k-1)} \in RV_{(p,1)}[a,b]$ entonces por el lema de Riesz (Teorema 2.1.3) resulta que la derivada $u^{(k-1)}$ es absolutamente continua en $[a,b]$.

□

En 1910 F. Riesz [**136**] presentó una caracterización de la funciones que tienen p-variación acotada, demostrando que $u \in RV_{(p,1)}[a,b]$ si y sólo si u es absolutamente continua en $[a,b]$ y $u' \in L_p[a,b]$ y además:

$$V_{(p,1)}(u,[a,b]) = \int_a^b |u'(t)|^p \, dt.$$

En 1992 N. Merentes en [**115**] generaliza este resultado para el espacio $\hat{RV}_{(p,2)}[a,b]$, al verificar que $u \in \hat{RV}_{(p,2)}[a,b]$ si y sólo si u' es absolutamente continua en $[a,b]$ y $u^{(2)} \in L_\varphi[a,b]$. Además

$$\hat{V}^R_{(p,2)}(u) = \int_a^b \left(\left|u^{(2)}(t)\right|\right)^p dt.$$

En el siguiente teorema generalizamos estos resultados para el espacio $RV_{(p,k)}[a,b]$.

Teorema 2.5.1. (*Generalización del lema de Riesz para $RV_{(p,k)}[a,b]$*) *Sean $p > 1$ y $k > 0$ un entero, entonces $u \in RV_{(p,k)}[a,b]$ si y sólo si $u^{(k-1)}$ es absolutamente continua en $[a,b]$ y $u^{(k)} \in L_p[a,b]$ y además:*

$$\hat{V}^R_{(p,k)}(u;[a,b]) = \int_a^b \left(\left|\frac{u^{(k)}(t)}{(k-1)!}\right|\right)^p dt.$$

Demostración. Sea $u \in RV_{(p,k)}[a,b]$, entonces por la proposición anterior existe $u^{(k-1)}$ y es absolutamente continua en $[a,b]$. Consideremos una partición $\pi : a \le t_1 < \cdots < t_n \le b$ del intervalo $[a,b]$ y los puntos

$$s_{1,1},\ldots,s_{1,k},s_{2,1},\ldots,s_{2,k},\ldots,s_{n,1},\ldots,s_{n,k} \in [a,b],$$

tales que:

$$t_1 = s_{1,1} < \cdots < s_{1,k} < t_2 = s_{2,1} < \cdots < s_{2,k} < t_3 = s_{3,1} < \cdots$$

$$\cdots < t_{n-1} = s_{(n-1),1} < \cdots < s_{(n-1),k} < s_{n,1} < \ldots < s_{n,k} = t_n$$

Por las propiedades de las diferencias divididas (Proposición 1.3.1) existen

$$\xi_j \in (s_{j,1}, s_{j,k}), j = 1,\ldots,n,$$

tales que:

$$\frac{u^{(k-1)}(\xi_j)}{(k-1)!} = u[s_{j,1},\ldots,s_{j,k}], j = 1,\ldots,n.$$

De esta relación y como $u \in RV_{(p,k)}[a,b]$, tenemos:

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{\left|u^{(k-1)}(t_{j+1}) - u^{(k-1)}(t_j)\right|}{(k-1)!\,|t_{j+1}-t_j|}\right)^p |t_{j+1}-t_j| =$$

$$\lim_{\substack{s_{j,k}\to s_{j,1}=t_j\\ k=1,\ldots,n-1}} \sum_{j=1}^{n-2}\left(\frac{\left|u^{(k-1)}(\xi_{j+1}) - u^{(k-1)}(\xi_j)\right|}{(k-1)!\,|t_{j+1}-t_j|}\right)^p |t_{j+1}-t_j| +$$

$$\lim_{s_{n,1}\to s_{n,k}=t_n}\left(\frac{\left|u^{(k-1)}(\xi_n)-u^{(k-1)}(\xi_{n-1})\right|}{(k-1)!\,|t_n-t_{n-1}|}\right)^p|t_n-t_{n-1}|=$$

$$\lim_{\substack{s_{j,k}\to t_j\\ k=1,\ldots,n-1}}\sum_{j=1}^{n-2}\left(\frac{|u[s_{j+1,1},\ldots,s_{j+1,k}],-u[s_{j,1},\ldots,s_{j,k}],|}{|t_{j+1}-t_j|}\right)^p|t_{j+1}-t_j|+$$

$$\lim_{s_{n,1}\to t_n}\left(\frac{\left|u[s_{n,1},\ldots,s_{n,k}]-u[s_{(n-1),1},\ldots,s_{(n-1),k}]\right|}{|t_n-t_{n-1}|}\right)^p|t_n-t_{n-1}|\leq$$

$$\hat{V}^R_{(p,k)}(u,[a,b]).$$

De esta manera concluimos que $u^{(k-1)}\in RV_{(p,1)}[a,b]$ y :

$$\int_a^b\left(\frac{u^{(k)}(t)}{(k-1)!}\right)^p dt=V^R_{(p,1)}\left(\frac{u^{(k-1)}}{(k-1)!};[a,b]\right)\leq\hat{V}^R_{(p,k)}(u;[a,b]).$$

Recíprocamente, supongamos que $u^{(k-1)}$ es absolutamente continua en $[a,b]$ y $u^{(k-1)}\in L_p[a,b]$. Sea

$$\pi: a\leq t_1<\cdots<t_k\leq t_{k+1}<\cdots<t_{2k}\leq t_{2k+1}<\cdots<t_{nk}\leq b$$

una partición del intervalo $[a,b]$. Por propiedades de diferencias divididas (Proposición 1.3.1) existen

$$\xi_j\in\left(t_{(j-1)k+1},t_{jk}\right),j=1,\ldots,n,$$

tales que:

$$\frac{u^{(k-1)}(\xi_j)}{(k-1)!}=u[t_{(j-1)k+1},\ldots,t_{jk}],j=1,\ldots,n.$$

Entonces, usando la relación anterior, que $u^{(k-1)}$ es absolutamente continua en $[a,b]$, tenemos:

$$\left(\frac{\left|u[t_{jk+1},\ldots,t_{(j+1)k}]-u[t_{(j-1)k+1},\ldots,t_{jk}]\right|}{\left|t_{(j+1)k}-t_{(j-1)k+1}\right|}\right)^p\left|t_{(j+1)k}-t_{(j-1)k+1}\right|=$$

$$\int_{t_{(j-1)k+1}}^{t_{(j+1)k}} \left(\frac{\left|u^{(k-1)}(\xi_{j+1}) - u^{(k-1)}(\xi_j)\right|}{(k-1)!\left|t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1}\right|} \right)^p d\xi =$$

$$\int_{t_{(j-1)k+1}}^{t_{(j+1)k}} \left(\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\left|u^{(k)}(t)\right|}{(k-1)!\left|t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1}\right|} dt \right)^p d\xi \leq$$

$$\int_{t_{(j-1)k+1}}^{t_{(j+1)k}} \left(\int_{t_{(j-1)k+1}}^{t_{(j+1)k}} \frac{\left|u^{(k)}(t)\right|}{(k-1)!\left|t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1}\right|} dt \right)^p d\xi.$$

De la desigualdad de Jensen resulta que:

$$\int_{t_{(j-1)k+1}}^{t_{(j+1)k}} \left(\int_{t_{(j-1)k+1}}^{t_{(j+1)k}} \frac{\left|u^{(k)}(t)\right|}{(k-1)!\left|t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1}\right|} dt \right)^p d\xi \leq$$

$$\int_{t_{(j-1)k+1}}^{t_{(j+1)k}} \frac{1}{\left|t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1}\right|} \int_{t_{(j-1)k+1}}^{t_{(j+1)k}} \left(\frac{\left|u^{(k)}(t)\right|}{(k-1)!} \right)^p dt\, d\xi =$$

$$\int_{t_{(j-1)k+1}}^{t_{(j+1)k}} \left(\frac{\left|u^{(k)}(t)\right|}{(k-1)!} \right)^p dt.$$

Por lo tanto:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\left|u[t_{jk+1}, \ldots, t_{(j+1)k}] - u[t_{(j-1)k+1}, \ldots, t_{jk}]\right|}{\left|t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1}\right|} \right)^p \left|t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1}\right| \leq$$

$$\int_a^b \left(\frac{\left|u^{(k)}(t)\right|}{(k-1)!} \right)^p dt.$$

Y así, resulta que $\hat{V}^R_{(p,k)}(u; [a, b]) \leq \infty$ y

$$\hat{V}^R_{(p,k)}(u; [a, b]) \leq \int_a^b \left(\frac{\left|u^{(k)}(t)\right|}{(k-1)!} \right)^p dt.$$

$\square$

2.6. Consecuencias del Lema de Riesz para las funciones de $RV_{(p,k)}[a,b]$.

En esta sección veremos que tan importante es el lema de Riesz para obtener una variedad de resultados del espacio $RV_{(p,k)}[a,b]$.

COROLARIO 2.6.1. *Sean $p > 1$, $k > 0$ un entero. Entonces $u \in RV_{(p,k+1)}[a,b]$ si y sólo si $u' \in RV_{(p,k)}[a,b]$ y*

$$\hat{V}^R_{(p,k+1)}(u;[a,b])) = \frac{1}{k^p}\hat{V}^R_{(p,k)}(u';[a,b])).$$

En general, tenemos que $u \in RV_{(p,k)}[a,b]$ si y sólo si $u^{(r)} \in RV_{(p,k-r)}[a,b]$,$r = 0,\dots,k-1$ y

$$\hat{V}^R_{(p,k)}(u;[a,b])) = \frac{1}{((k-1)\dots(k-r))^p}\hat{V}^R_{(p,k-r)}(u^{(r)};[a,b])).$$

DEMOSTRACIÓN. La primera parte de este corolario es el mismo Corolario 2.3.1; mientrás que la segunda parte es consecuencia de la generalización del lema de Riesz (Teorema 2.5.1). □

COROLARIO 2.6.2. *Sean $p > 1$ y $k \geq 1$ un número entero, entonces si $q > p$,*

$$RV_{(q,k)}[a,b] \subset RV_{(p,k)}[a,b].$$

COROLARIO 2.6.3. *Sean $p > 1$ y $k \geq 1$, entonces el espacio $RV_{(p,k)}[a,b]$ es un álgebra.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $u, v \in RV_{(p,k)}[a,b]$, entonces:

$$(uv)^{(k-1)} = \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}u^{(k-1-j)}v^{(j)}$$

y por el Corolario 2.6.1

$$u^{(k-1-j)}, v^{(j)} \in RV_{(p,1)}[a,b], j = 0,\dots,k-1$$

y como $RV_{(p,1)}[a,b]$ es un álgebra, resulta que $(uv)^{(k-1)} \in RV_{(p,1)}[a,b]$ y así $uv \in RV_{(p,k)}[a,b]$. □

COROLARIO 2.6.4. *Sean $p > 1$ y $k > 0$ un entero, entonces:*

1. $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} RV_{(p,k)}[a,b] = C_\infty[a,b]$.
2. $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} RV_{(p,k)}[a,b] = RV_{(p,1)}[a,b]$.
3. $\bigcap\limits_{p=1}^{\infty} RV_{(p,k)}[a,b] = \left\{u \in \mathbb{R}^{[a,b]} : u^{(k-1)} \in AC[a,b], u^{(k)} \in L_p,\ p \geq 1\right\}$.
4. $\bigcup\limits_{p=1}^{\infty} RV_{(p,k)}[a,b] = RV_{(1,k)}[a,b] = BV_k[a,b]$.

2.7. $RV_{(p,k)}[a,b]$ como espacio normado.

En el espacio $RV_{(p,1)}[a,b]$ consideramos la norma $\|\cdot\|^R_{(p,1)}$, definida por

$$\|u\|^R_{(p,1)} = |u(a)| + \left(\int_a^b |u'(t)|^p\, dt\right)^{1/p}, \quad u \in RV_{(p,1)}[a,b].$$

De manera similar, se considera la norma $\|\,.\,\|^R_{(p,2)}$ sobre el espacio $RV_{(p,2)}[a,b]$, como

$$\|u\|^R_{(p,2)} = |u(a)| + \|u'\|^R_{(p,1)} = |u(a)| + |u'(a)| \left(\int_a^b |u''(t)|^p\, dt\right)^{1/p}, \ u \in RV_{(p,2)}[a,b].$$

Inductivamente, podemos definir una norma para $RV_{(p,k)}[a,b]$, $p > 1$, $k \geq 1$, entero, como:

$$\|u\|^R_{(p,k)} := |u(a)| + \|u'\|^R_{(p,k-1)}\, ,\ u \in RV_{(p,k)}[a,b]$$

o equivalentemente de las dos maneras siguiente:

$$\|u\|^R_{(p,k)} := |u(a)| + |u'(a)| + \cdots + \left|u^{(k-1)}(a)\right| + \left(\hat{V}^R_{(p,k)}(u)\right)^{1/p}, \quad u \in RV_{(p,k)}[a,b]$$

o

$$\|u\|^R_{(p,k)} = |u(a)| + |u'(a)| + \cdots + \left|u^{(k-1)}(a)\right| + \left(\int_a^b \left(\frac{\left|u^{(k)}(t)\right|}{(k-1)!}\right)^p dt\right)^{1/p}, \ u \in RV_{(p,k)}[a,b].$$

TEOREMA 2.7.1. *Sean $p > 1$ y $k > 0$ un entero, entonces el espacio $\left(RV_{(p,k)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(p,k)}\right)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Procedemos inductivamente, sobre k. Para $k = 1$, es conocido que $RV_{(p,1)}[a,b]$es un espacio de Banach (Proposición 2.1.2). Supongamos que

$$\left(RV_{(p,k)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(p,k)}\right)$$

es un espacio de Banach, para algún número entero $k \geq 1$. Sea $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $\left(RV_{(p,k+1)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(p,k+1)}\right)$, entonces dado un número $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$, tal que:

$$|(u_n - u_m)(a)| \leq \varepsilon \quad , \quad \|u'_n - u'_m\|^R_{(p,k)} \leq \varepsilon, \qquad n, m > N.$$

De esta manera, tenemos que $\{u_n(a)\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ y $\{u'_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesiones de Cauchy en $\left(RV_{(p,k)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(p,k)}\right)$. Así, por hipótesis, existen $u_0 \in \mathbb{R}$ y $\overline{u} \in RV_{(p,k)}[a,b]$ tal que $\{u_n(a)\}_{n\geq 1}$ converge a u_0 y $u'_n \xrightarrow{\|\cdot\|^R_{(p,k)}} \overline{u}$.

Consideremos $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $u(t) = u_0 + \int_a^t \overline{u}(x)dx$, entonces:

a. $u \in RV_{(p,k+1)}[a,b]$, ya que $u' = \overline{u} \in RV_{(p,k)}[a,b]$ (ver Corolario2.2.1)

b. como $\|u_n - u\|^R_{(p,k+1)} = |u_n(a) - u_0| + \|u_n - \overline{u}\|^R_{(p,k)}$, $n \geq 1$, se tiene que $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|^R_{(p,k+1)}} u$.

□

2.8. La Condición de Matkowski.

En esta sección hacemos algunas consideraciones sobre la denominada condición de Matkowski.

Dada una función $h : [a,b]\mathrm{x}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, el operador $H : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}^I, I = [a,b]$, definido por

$$H(u)(t) := h(t, u(t)), u \in \mathbb{R}^I, \quad t \in I$$

se denomina operador de composición, superposición o Nemystkij, asociado o generado por la función h. Este caso general es conocido como caso no autónomo. Si la función h no depende de la segunda variable se denomina caso autónomo. Si $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces:

$$H(u)(t) = (h \circ u)(t), \quad t \in [a,b];$$

y H no es más que la composición de las funciones h y u.

Si el operador H transforma un espacio $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^I$ en sí mismo se dice que el operador H actúa en el espacio $\mathbb{X}$.

En el año 1982 el matemático polaco, Januz Matkowski, quien ya ha realizado varias visitas al país, demostró el siguiente resultado (ver [**101**]).

Teorema 2.8.1. *Si el operador de composición H generado por una función $h : [a,b]\text{x}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, actúa en el espacio $Lip[a,b]$ en sí mismo y es globalmente Lipschitz, es decir existe una constante K, tal que:*

$$\|H(u) - H(v)\|_{Lip[a,b]} \leq K \|u - v\|_{Lip[a,b]}, \quad u, v \in Lip[a,b],$$

entonces existen funciones $\alpha, \beta \in Lip[a,b]$, tales que:

$$h(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t), \quad t \in [a,b],\ x \in \mathbb{R}.$$

En otra palabras, la función h es una a función afín en la segunda variable.

Existe una amplia variedad de espacios donde se verifica este resultado, también conocido como *Condición o Propiedad de Matkowski* (ver [**8, 118**]), en tal sentido se puede revisar los trabajos [**7, 9, 10, 42, 44, 89, 91, 96, 99, 100, 102, 103, 108, 109, 110, 116, 118, 139, 140, 159**] y para el caso de multifunciones pueden revisarse [**41, 117, 121, 161, 172**].

En vista de la gran variedad de espacios donde se verifica el resultado de Matkowski en [**118**] presentamos la siguiente definición.

Propiedad de Matkowski.
Un espacio de Banach $(\mathbb{X}, \|\,.\,\|)$ de funciones $\mathbb{R}^{[a,b]}$ tiene la *propiedad de Matkowski* si el operador de composición H generado por una función h, actúa en $\mathbb{X}$ y es globalmente Lipschitz, entonces existen funciones $\alpha, \beta \in \mathbb{X}$, tales que la función h tiene la forma

$$h(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t),\ t \in [a,b],\ x \in \mathbb{R}.$$

En el caso que la función h no dependa de la variable t, la relación anterior garantiza que la función h es una función afín.

Desde el año 2008 se han escrito varios artículos donde se sustituye la condición de lipschitzidad global de la Propiedad de Matkowski por una condición más débil, como por ejemplo, pedir que el operador de composición sea *Uniformemente Continuo*, es decir, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que:

$$u, v \in \mathbb{X}, \quad \|u - v\|_{\mathbb{X}} < \delta \Rightarrow \|H(u) - H(v)\|_{\mathbb{X}} < \varepsilon.$$

Suponiendo esta hipótesis se considera el módulo de continuidad de H, que se define como $\gamma : [0, \infty) \to [0, \infty)$, por:

$$\gamma(t) := sup \left\{ \|H(u) - H(v)\|_{\mathbb{X}} : \|u - v\|_{\mathbb{X}} \leq t \right\}, \quad t \geq 0.$$

Entonces de esta definición se desprende automáticamente que $\gamma(t) \geq 0$, $t \geq 0$ y $\gamma(0) = 0$. Además si $t > 0$ y $\|u - v\|_{\mathbb{X}} \leq t$, se tiene que:

$$\|H(u) - H(v)\|_{\mathbb{X}} \leq \gamma(t).$$

En particular, si se considera $t = \|u - v\|_{\mathbb{X}}$, se obtiene la desigualdad

$$\|H(u) - H(v)\|_{\mathbb{X}} \leq \gamma\left(\|u - v\|_{\mathbb{X}}\right), \quad u, v \in \mathbb{X}. \tag{2.8.1}$$

En el caso particular en que γ representa una semirecta que parte del origen con pendiente positiva, es decir $\gamma(t) = kt$, $t \geq 0$, para alguna constante $k > 0$; la relación (2.8.1) es exactamente la lipschitzidad global de la condición de Matkowski.

De esta manera, también es costumbre sustituir la condición continuidad uniforme del operador H por la condición más débil dada por la ecuación (2.8.1).

Estas consideraciones han sido tratatadas por J. Matkowski en el 2008 en el espacio $\mathbb{X}$ de las funciones diferenciables absolutamente continuas [**104**], en el 2009 con el espacio $\mathbb{X} = Lip^{\alpha}[a, b], 0 < \alpha \leq 1$, de las funciones Hölder de orden α [**105**] y en el 2010 en el espacio $\mathbb{X} = BV[a, b]$ de las funciones de variación acotada [**106**]; y por A. Acosta, W. Aziz, J. Matkowski y N. Merentes para el espacio $RV_{\varphi}[a, b]$ generado por las funciones de $\varphi-$variación acotada en el sentido de Riesz (ver [**1**]) y en [**20**] por A. Aziz, A. Azócar, A. Gurrero y N. Merentes para el espacio $RV_{\varphi,\lambda}[a, b]$ de las funciones con φ-variación acotada con peso, en el sentido de Riesz. También se puede ver **[25]** para el caso de multifunciones de variación acotada en el sentido de Wiener.

2.9. Acotación Uniforme del Operador de Composición en $RV_{(p,k)}[a,b]$.

Los resultado expuestos en esta sección son originales y los mismos están en un trabajo enviado para el arbitraje para su publicación (ver [**12**]).

En esta sección demostramos los resultados obtenidos M. Wróbel en **[170]** para el espacio $BV_k[a,b]$, de las funciones de $k-$variación acotada, para el espacio $RV_{(p,k0}[a,b]$, sustituyendo la lipschitzdad global de la condición Matkowski por otra condición.

En el lema 3 **[170]** M. Wróbel demuestra el siguiente lema.

Lema 2.9.1. *Sea $k \geq 2$ un entero. Entonces existe una constante positiva $s(k)$, tal que:*

$$\|u\|_{Lip} \leq s(k)\,\|u\|_k\,, \quad u \in BV_k[a,b].$$

De este lema, de la definición de la norma $\|\cdot\|_k$ (ecuación 1.3.3) y de la parte 2 del Teorema 2.3.2 obtenemos el siguiente lema.

Lema 2.9.2. *Sean $k \geq 2$ un entero y $p > 1$. Entonces existe una constante positiva $s(k,p)$, tal que:*

$$\|u\|_{Lip} \leq s(k,p)\,\|u\|^R_{(p,k)}\,, \quad u \in RV_{(p,k)}[a,b].$$

En el siguiente teorema demostramos que si una función $h : [a,b]\text{x}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es continua en la segunda variable podemos cambiar la lipschitzidad global de la condición Matkowski por la relación (2.8.1) para el espacio $RV_{(p,k)}[a,b]$ y la continuidad de la función $h(t,\cdot)$, $t \in [a,b]$.

Teorema 2.9.1. *Sean $a,b \in \mathbb{R}\,(a<b)$, $p>1$, $k \geq 2$ un número entero y $h : [a,b]\text{x}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que para cada $t \in [a,b]$, la función $h : (t,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua respecto a la segunda variable. Si el operador de composición H generado por h aplica el espacio $RV_{(p,k)}[a,b]$ en sí mismo y verifica la desigualdad:*

$$\|H(u)-H(v)\|^R_{(p,k)} \leq \gamma\left(\|u-v\|^R_{(p,k)}\right), \quad u,v \in RV_{(p,k)}[a,b],$$

para alguna función $\gamma : [0,\infty) \to [0,\infty)$, *entonces existen funciones* $\alpha, \beta \in RV_{(p,k)}[a,b]$, *tales que:*

$$h(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t), \quad t \in [a,b], x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Por hipótesis, para $x \in \mathbb{R}$ fijo la función constante $u(t) = x, t \in [a,b]$, está en $RV_{(p,k)}[a,b]$ y por tanto $H(u) = h(\cdot, x) \in RV_{(p,k)}[a,b]$ y así $h(\cdot, x)$ es continua para cada $x \in \mathbb{R}$.

Sean $s, \overline{s} \in [a,b]$, $s < \overline{s}, x_1, x_2, \overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \mathbb{R}$ y consideremos las funciones:

$$u_i(t) = \frac{x_i - \overline{x}_i}{s - \overline{s}}\,(t-s) + x_i, i = 1,2.$$

Estas funciones son segmentos de rectas que pasan por los puntos (s, x_1) y $(\overline{s}, \overline{x}_1)$, en el caso de u_1 y por los puntos (s, x_2) y $(\overline{s}, \overline{x}_2)$ en el caso de u_2. De esta manera, resulta que ambas funciones tienen (p,k)-variación acotada. Además:

$$\|u_1 - u_2\|^R_{(p,k)} = \left\| \frac{x_1 - \overline{x}_1 - x_2 + \overline{x}_2}{s - \overline{s}}(t-s) + x_1 - x_2 \right\|^R_{(p,k)}.$$

Por otra parte como $H(u_i) \in RV_{(p,k)}[a,b], i = 1,2$, entonces por el Lema 2.9.2 resulta que

$$\|H(u_1) - H(u_2)\|_{Lip} \leq K \, \|H(u_1) - H(u_2)\|^R_{(p,k)},$$

donde $K = s(k,p)$.

De esta manera por hipótesis, resulta que:

$$\frac{|h(s,x_1) - h(s,x_2) - h(\overline{s},\overline{x}_1) + h(\overline{s},\overline{x}_2)|}{|s - \overline{s}|} \leq K\gamma\left(\|u_1 - u_2\|^R_{(p,k)}\right).$$

Fijemos constantes $p, q \in \mathbb{R}$ y pongamos $x_1 = \overline{x}_2 = \frac{p+q}{2}$, $\overline{x}_1 = p$, $x_2 = q$, entonces de la desigualdad anterior, se concluye que:

$$\left| h\left(s, \frac{p+q}{2}\right) - h(s,q) - h(\overline{s},p) + h\left(\overline{s}, \frac{p+q}{2}\right) \right| \leq K\gamma\left(|x_1 - x_2|\right).|s - \overline{s}|.$$

Por la continuidad de h en la primera variable, tomando límite cuando $\overline{s} \to s$, resulta:

$$2h\left(s, \frac{p+q}{2}\right) = h(s,p) + h(s,q), s \in [a,b].$$

Como la función $h(t,.)$ es continua y verifica la ecuación de Jensen (ver [**93**], p. 315) existen funciones $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$, tales que:

$$h(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t), \quad t \in [a,b], x \in \mathbb{R}. \tag{2.9.1}$$

Puesto que para cada $x \in \mathbb{R}$,la función $h(.,x) \in \mathbb{X}$, entonces:

$$\beta(t) = h(s,0) \quad , \quad \alpha(s) = h(t,1) - \beta(t), \quad s \in [a,b].$$

De donde resulta que $\alpha, \beta \in RV_{(p,k)}[a,b]$. □

Siguiendo las ideas desarrolladas en la observación 1 de [**170**] obtenemos el siguiente corolario de este teorema, cambiando la condición de continuidad de la función h en la segunda variable por la hipótesis de continuidad por la derecha en 0 de la función γ y $\gamma(0) = 0$.

Por supuesto, que podemos suponer la continuidad uniforme del operador de composición para obtener el siguiente resultado.

Corolario 2.9.1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}\,(a < b)$, $p > 1$, $k \geq 2$ un número entero y $h : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si el operador de composición H generado por h aplica el espacio $RV_{(p,k)}[a,b]$ en sí mismo y se verifica la desigualdad:*

$$\|H(u) - H(v)\|^R_{(p,k)} \leq \gamma\left(\|u - v\|^R_{(p,k)}\right), \quad u, v \in RV_{(p,k)}[a,b],$$

para alguna función $\gamma : [0,\infty) \to [0,\infty)$, tal que $\gamma(t) \to \gamma(0) = 0$, cuando $t \downarrow 0$, entonces existen funciones $\alpha, \beta \in RV_{(p,k)}[a,b]$, tales que:

$$h(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t), \quad t \in [a,b], x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Fijemos $x, \overline{x} \in \mathbb{R}$ y consideremos la funciones constantes $u, \overline{u} : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $u(t) = x$, $\overline{u}(t) = \overline{x}, t \in [a,b]$. Entonces:

$$\|u - \overline{u}\|_{(p,k)}^{R} = |x - \overline{x}| \, .$$

Como $H(u) = h(\,\cdot\,, x)$ y $H(\overline{u}) = h(\,\cdot\,, \overline{x})$ están en $RV_{(p,k)}[a,b]$, del Lema 2.9.2, existe una constante $K > 0$, tal que:

$$\frac{|h(t,x) - h(t,\overline{x}) - h(a,x) + h(a,\overline{x})|}{|t-a|} \leq K\gamma\left(|x - \overline{x}|\right)$$

$$y$$

$$|h(a,x) + h(a,\overline{x})| \leq K\gamma\left(|x - \overline{x}|\right), \quad t \in [a,b].$$

Así resulta que:

$$|h(t,x) - h(t,\overline{x})| \leq +K\gamma\left(|x - \overline{x}|\right)\left(|t-a| + 1\right), \quad t \in [a,b].$$

De la continuidad de γ en 0 y la igualdad $\gamma(0) = 0$, resulta que la función $h(t,\,\cdot\,)$ es continua en la segunda variable y por tanto estamos en las condiciones del teorema anterior. □

Corolario 2.9.2. *Sean $a, b \in \mathbb{R}\,(a < b)$, $p > 1$, $k \geq 2$ un número entero. Si el operador de composición H generado por h, aplica el espacio $RV_{(p,k)}[a,b]$ en sí mismo y es uniformemente continuo, respecto a la norma $\|\cdot\|_{(p,k)}^{R}$, entonces existen $\alpha, \beta \in RV_{(p,k)}[a,b]$, tales que:*

$$h(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t), t \in [a,b], x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Al tomar γ como el módulo de continuidad del operador H, estamos en las condiciones del corolario anterior. □

En **[107]** J. Matkowski introduce la siguiente definición.

Definición 2.9.1. *(Operador acotado uniformemente)* Sean $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ espacios métricos (o normados). Un operador $H : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ es *acotado uniformemente* si dado un número $t > 0$, existe $\gamma(t) \geq 0$, tal que para cualquier conjunto $B \subset \mathcal{Y}$, tenemos:

$$diam\, B \leq t \Rightarrow diam\, H(B) \leq \gamma(t).$$

Directamente de esta definición tenemos que todo operador globalmente Lipschitz o uniformemente continuo es acotado uniformemente.

Por otra parte, si el operador de composición H, generado por una función $h : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es acotado uniformemente, entonces si $u, v \in RV_{(p,k)}[a,b]$ y $\|u - v\|^R_{(p,k)} < t$. Entonces si $diam \{u, v\} < t$, de la acotación uniforme resulta que $diam\, H \{u, v\} \leq \gamma(t)$. Así:

$$\|H(u) - H(v)\|^R_{(p,k)} = diam\, H\{u, v\} \leq \gamma \left(\|u - v\|^R_{(p,k)} \right)$$

y se verifica el Corolario 2.9.1, lo que permite enunciar el siguiente teorema.

TEOREMA 2.9.2. *Sean $a, b \in \mathbb{R}\, (a < b)$, $p > 1$, $k \geq 2$ un número entero. Si el operador de composición H generado por h aplica el espacio $RV_{(p,k)}[a,b]$ en sí mismo y es uniformemente acotado, respecto a la norma $\| \cdot \|^R_{(p,k)}$, entonces existen $\alpha, \beta \in RV_{(p,k)}[a,b]$, tales que:*

$$h(t, x) = \alpha(t)x + \beta(t), t \in [a, b], x \in \mathbb{R}.$$

2.10. Algunos problemas para investigar.

Aquí presentamos algunos problemas para futuras investigaciones.

1. Generalizar el concepto de (p, k)-variación acotada, en cualquiera de sus dos formas, para funciones $u : E \to \mathbb{X}$, donde $\mathbb{X}$ es un espacio normado, en particular para multifunciones.
2. Determinar cuáles de las propiedades de los Teoremas 2.3.2 y 2.3.1 son ciertas.
3. Determinar si es posible demostrar un teorema de representación para estas nuevas funciones, tipo Jordan (Teorema 1.3.3), tipo Riesz a través de una integral tipo Sierpiński-Federer-Chistyakov, como composición de funciones.
4. Demostrar un teorema tipo lema de Riesz (Teorema 2.5.1) y sus consecuencias.
5. Estudiar algunos problemas relacionados con el operador de composición, como actuación, lipschitzidad local o global, acotación uniforme.

Capítulo 3

(φ, k)-variación acotada en el sentido de Riesz

Continuando con las generalizaciones del concepto de p-variación de Riesz [**136**], existen otras generalizaciones utilizando las denominadas φ-funciones. Es así como, hace casi 60 años, el ruso Yu. T. Medve'ed, introduce la noción de φ-variación acotada en el sentido de Riesz-Medved'ed en [**112**]. Además en trabajo conjuntamente con una publicación del año 1977, de los polacos Z. Cybertowicz y W. Matuzewska [**56**] se demuestra una nueva versión del lema de Riesz para este tipo de funciones.

Nuestro objetivo, en este capítulo es construir un espacio de funciones, mucho más general que los estudiado por Medved'ed, Cybertowicz y Matuzewska. Esto lo logramos combinando las nociones de φ-variación en el sentido de Riesz, de Medved'ed [**112**], con el concepto de k-variación de Popoviciu [**132**], siguiendo las ideas desarrolladas en el capítulo 2, con el concepto de (p, k)-variación.

La primera sección la dedicamos al estudio de propiedades de las φ-funciones. Proseguimos presentado el concepto de variación de Medved'ed que denotamos $(\varphi, 1)$-variación. Presentamos un conjunto de propiedades de estas funciones, con bastante detalles en las demostraciones. Concluimos exponiendo la generalización del lema de Riesz para estas funciones y propiedades que se derivan de éste.

Proseguimos, estudiando las funciones de $(\varphi, 2)$-variación que define N. Merentes en [**113**], a principios de la década de los 90 del siglo XX. De manera similar al caso de $(p, 2)$-variación, exponemos dos definiciones de $(\varphi, 2)$-variación y demostramos varias propiedades similares de las clase de tales funciones. Además demostramos que los espacios generados por dichas clases son los mismos. Finalmente, presentamos en detalle la generalización del lema de Riesz y consecuencias del mismo.

Por último, introducimos dos conceptos nuevos de (φ, k)-variación así como propiedades de las mismas. Las clases de funciones con estas diferentes variaciones las denotamos por $V^R_{(\varphi,k)}[a, b]$ y $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a, b]$, donde $k > 0$ es un número entero y φ es una φ-función, que para nuestros resultados más importantes, debe ser convexa y cumplir la denominada condición ∞_1.

Demostramos que los espacios vectoriales generados por cada una de estas clase de funciones, denotados por $RV_{(\varphi,k)}[a,b]$ y $\hat{RV}_{(\varphi,k)}[a,b]$, respectivamente, son iguales. La idea de construir dos tipos de variación es que la clase de funciones $V^R_{(\varphi,k)}[a,b]$, está contenida en el espacio de las funciones de k-variación acotada, estudiado por Popoviciu en 1930. Y las propiedades de estas funciones, las requerimos para demostrar la generalización del lema de Riesz, para la clase $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$, el cual, junto con la construcción de un nuevo espacio de funciones, es uno de los objetivos principales de este capítulo.

Para finalizar, presentamos algunas consecuencias de la generalización del lema de Riesz, como condiciones necesarias y suficientes sobre dos φ-funciones φ_1, φ_2, para que $\widehat{V}^R_{(\varphi_1,k)}[a,b] \subset \widehat{V}^R_{(\varphi_2,k)}[a,b]$ o se verifique la inclusión entre los respectivos espacios, generados por estas clases. También demostramos que $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$ es un espacio vectorial si y sólo si φ verifica la condición $\triangle_2$, para valores grandes de t. También se deriva de la generalización del lema de Riesz, que el espacio $\hat{RV}_{(\varphi,k)}[a,b]$ tiene una estructura de álgebra y de espacio de Banach.

Por último, exponemos un resultado donde se sustituye la condición de lipschitzidad global del operador composición, en la condición de Matkowski.de por la condición de acotación uniforme,

La mayor parte de los resultados más importantes de este capítulo están expuestos en el artículo [**95**], que elaboramos conjuntamente por los profesores José Luis Sánchez, Hugo Leiva, Nelson Merentes.

3.1. φ-funciones.

Iniciamos esta sección presentando el concepto de φ-función también conocidas como $\mathcal{N}-$función o función de Young. El termino de $\mathcal{N}$- función es frecuentemente utilizado en libros sobre Espacios de Orlicz (ver por ejemplo [**92, 94, 135**]). La denominación de función de Young se debe a que L. C. Young fue el primero en tratar este tipo de funciones en [**171**].

Definición 3.1.1. (φ-función) Una $\varphi-$función es una función $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes condiciones:

1. $\varphi(t) = 0$ sólo para $t = 0$.

2. φ es estrictamente creciente.

3. φ es continua.

4. $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$.

Observación 3.1.1. Si φ es una φ-función y $s, t \in [0, \infty)$ y $\alpha, \beta \in [0, 1]$, tales que $\alpha + \beta = 1$, entonces como φ es creciente, no negativa y $\alpha s + \beta t$ está entre s y t, tenemos:

$$\varphi(\alpha s + \beta t) \leq max\ \{\varphi(s), \varphi(t)\} \leq \varphi(s) + \varphi(t).$$

Como toda función convexa $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, es continua en $(0, \infty)$, entonces para una φ- función convexa podemos sustituir la condición de continuidad en $[0, \infty)$ por continuidad en 0.

La clase de las φ-funciones la denotamos en esta tesis por Φ. Las propiedades de esta clase la resumimos en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.1. *Sean $\varphi, \psi \in \Phi$ y $c > 0$, entonces las funciones:*

$$\varphi + \psi\ ,\ \varphi.\psi\ ,\ \varphi \circ \psi\ ,\ \varphi^{-1}\ ,\ c\varphi,\ c > 0$$

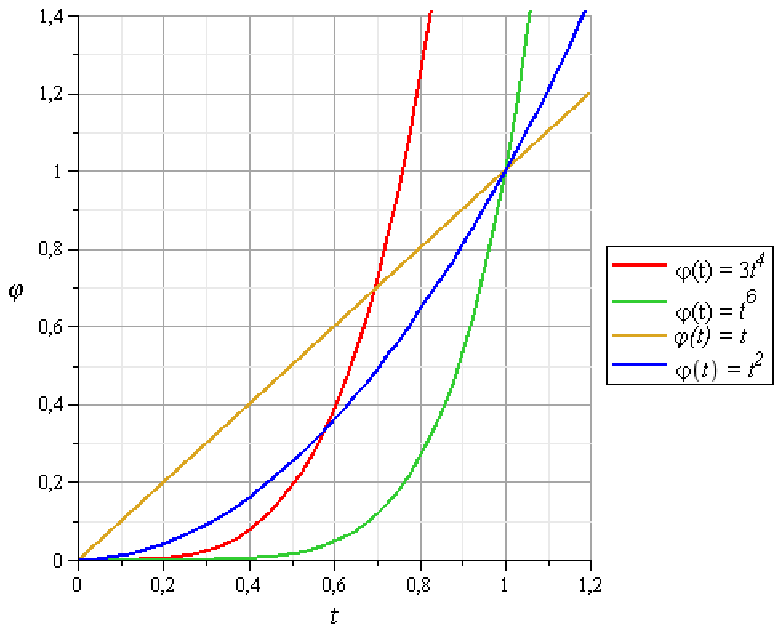
$$y$$

$$\varphi \wedge \psi = min\,\{\varphi, \psi\}\ ,\ \varphi \vee \psi = max\,\{\varphi, \psi\}$$

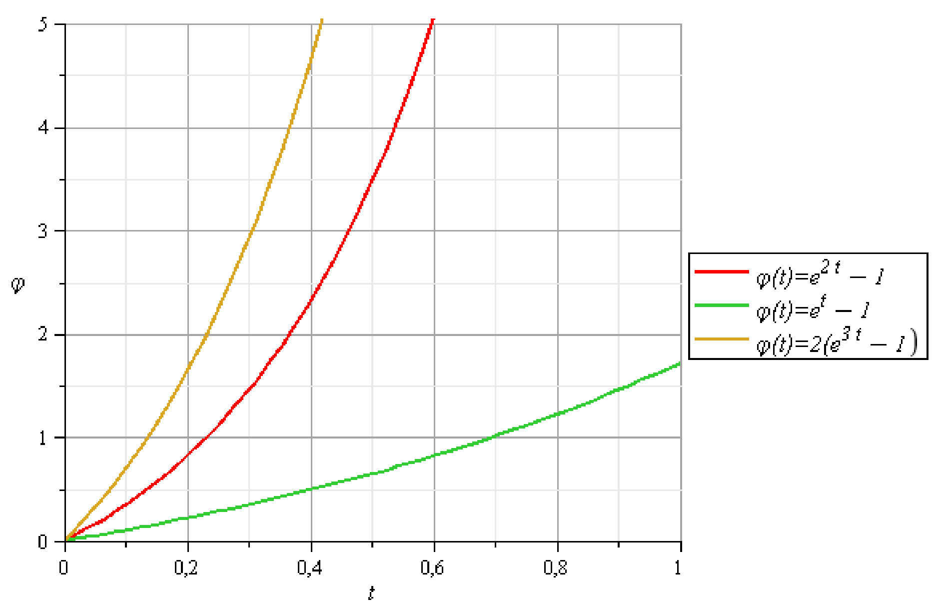
están en Φ.

Algunos ejemplos de funciones φ- funciones usados frecuentemente son:

$$\varphi(t) = at^p,\ p > 0,\ a > 0.$$



$$\varphi(t) = a(e^{bt} - 1),\ a, b > 0$$



Al tratar con muchos espacios donde intervienen las φ-funciones se le exige la condición adicional que sean convexas. Otras condiciones de uso frecuentes la exponemos en la siguiente definición.

Definición 3.1.2. (*Condiciones* ∞_1 y $\triangle_2$) Sea φ una φ-función convexa, entonces:

1. φ cumple la condición ∞_1 si $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \infty$.

2. φ cumple la condición $\triangle_2(0)$ si existen números $\eta > 0$, $t_0 > 0$ tales que

$$\varphi(2t) \leq \eta\varphi(t), \quad t \leq t_0.$$

.

3. φ cumple la condición $\triangle_2(\infty)$ si existen números $\eta > 0$, $t_0 > 0$ tales que

$$\varphi(2t) \leq \eta\varphi(t), \quad t \geq t_0.$$

.

Geométricamente la condición ∞_1 significa que para valores "grandes" de t la gráfica de la función φ está por encima de las rectas que pasan por el origen.

En la siguiente proposición exponemos algunas relaciones equivalentes con los conceptos de la definición anterior y que son consecuencia de la definición de límite superior.

Proposición 3.1.2. *Sea φ una φ-función convexa, entonces:*

1. φ cumple la condición ∞_1 si y sólo si para todo $\eta > 0$, existe t_0, tal que $\varphi(t) \geq \eta t$, $t \geq t_0$.
2. φ cumple la condición $\triangle_2(0)$ si y sólo si $\lim\limits_{t\to 0} sup\, \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} < \infty$.
3. φ cumple la condición $\triangle_2(\infty)$ si y sólo si $\lim\limits_{t\to\infty} sup \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} < \infty$.

En la siguiente proposición demostramos dos propiedades de las funciones convexas, de uso frecuente.

Proposición 3.1.3. *Sea $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ función convexa entonces:*

1. Si $\varphi(0) = 0$, entonces:

$$\begin{cases} \varphi(\alpha t) \leq \alpha\varphi(t), & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \varphi(\alpha t) \geq \alpha\varphi(t), & 1 \leq \alpha \end{cases}$$

2. Si $\varphi(0) = 0$, la función $t \in (0, \infty) \to \frac{\varphi(t)}{t}$ es creciente.

3. Si φ es una φ- función que cumple la condición ∞_1, entonces

$$\lim_{t\to 0} \varphi^{-1}\left(\frac{k}{t}\right) t = 0, \quad k > 0.$$

Demostración. 1. Sea $0 \leq \alpha < 1$, entonces de la convexidad de φ, resulta

$$\varphi(\alpha t) \leq \alpha\varphi(t) + (1-\alpha)\varphi(0) = \alpha\varphi(t), \quad t \geq 0.$$

La segunda parte de 1. se obtiene aplicando la relación anterior a $\varphi\left(\frac{t}{\alpha}\right)$, para $\alpha > 1$.

2. Sean $0 < s < t$, entonces como φ es convexa y $0 < \frac{s}{t} < 1$, tenemos:

$$\varphi(s) = \varphi\left(\frac{s}{t}t\right) \leq \frac{s}{t}\varphi(t) + \left(1 - \frac{s}{t}\right)\varphi(0) \leq \frac{s}{t}\varphi(t).$$

De donde resulta:

$$\frac{\varphi(s)}{s} \leq \frac{\varphi(t)}{t}, \quad 0 < s < t.$$

3. Haciendo el cambio de variable $s = \varphi^{-1}\left(\frac{k}{t}\right)$, tenemos que:

$$\lim_{t\to 0} \varphi^{-1}\left(\frac{k}{t}\right) t = \lim_{t\to 0} \frac{sk}{\varphi(s)} = 0.$$

□

3.2. Funciones de $(\varphi, 1)$-variación acotada.

El concepto de p-variación acotada presentado en 1910 por F. Riesz en **[136]** fué generalizado en 1953 por por Yu. T. Medved'ed en **[112]**, de la siguiente manera.

Definición 3.2.1. (*φ-variación de Riesz*). Dadas una φ-función φ, $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y una partición $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ del intervalo $[a,b]$, se definen:

$$\sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\pi) := \sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{|u(t_{j+1}) - u(t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|}\right) |t_{j+1} - t_j|$$

y

$$V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]) = V^R_\varphi(u) := \sup_{\pi\in\Pi^b_a} \sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\pi).$$

El número $V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b])$ se denomina *φ-variación en el sentido de Riesz de la función u en el intervalo* $[a,b]$. Si $V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]) < \infty$, decimos que la función *u tiene φ-variación o $(\varphi,1)$-variación acotada o finita en el sentido de Riesz, en el intervalo $[a,b]$* .

La clase de las funciones con φ-variación acotada se denota por $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$. Algunas propiedades en relación con esta clase de funciones las exponemos en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. *Sea φ una φ-función, entonces:*

1. $V^R_{(\varphi,1)}(u) = 0$ si y sólo si u=cte.

2. Si $[s,t] \subset [a,b]$, entonces $V^R_{(\varphi,1)}(u;[s,t]) \leq V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b])$.

3. Si $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ es una partición del intervalo $[a,b]$ y $t \in [a,b]-\pi$, entonces

$$\sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\pi) \leq \sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\pi\cup\{t\}).$$

4. Si $t \in [a,b]$, entonces $V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]) = V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,t]) + V^R_{(\varphi,1)}(u;[t,b])$.

5. $Lip[a,b] \subset V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$.

6. Si φ es convexa $V^R_{(\varphi,1)}[a,b] \subset BV[a,b]$ y

$$V(u;[a,b]) \leq b-a+V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]), \quad u \in V^R_{(\varphi,1)}[a,b].$$

7. $V^R_{(\varphi,1)}[a,b] = BV[a,b]$ si φ no cumple la condición ∞_1.

8. Si φ cumple la condición ∞_1 y $V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]) < \infty$, entonces u es acotada y

$$\|u\|_\infty \leq |u(a)| + \sup_{t\in(a,b]} \varphi^{-1}\left(\frac{V^R_{(\varphi,1)}(u)}{t-a}\right)(t-a).$$

9. $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ es un conjunto simétrico y convexo.

10. φ es convexa si y sólo si la función $V^R_{(\varphi,1)} : V^R_{(\varphi,1)}[a,b] \to [0,\infty)$, definida por:

$$V^R_{(\varphi,1)}(u) := V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]), \quad u \in V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$$

es convexa.

DEMOSTRACIÓN. 1. es consecuencia de la siguiente relación:

$$\varphi\left(\frac{|u(t)-u(a|}{|t-a|}\right)|t-a|=0, a<t\leq b \Longleftrightarrow u(t)=u(a).$$

2. es inmediata, pues la familia de las particiones del intervalo $[s,t]$ está contenida en la familia de las particiones del intervalo $[a,b]$.

Demostremos la parte 3. Sea $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ una partición de $[a,b]$ y $t \in [a,b]-\pi$. Supongamos que existe $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, tal que $t_i < t < t_{i+1}$, entonces:

$$\sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\pi) =$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n-1}\varphi\left(\frac{|u(t_{j+1})-u(t_j)|}{|t_{j+1}-t_j|}\right)|t_{j+1}-t_j| + \varphi\left(\frac{|u(t_{i+1})-u(t_i)|}{|t_{i+1}-t_i|}\right)|t_{i+1}-t_i|\,.$$

Por desigualdad triangular y convexidad de φ, tenemos:

$$\varphi\left(\frac{|u(t_{i+1})-u(t_i)|}{|t_{i+1}-t_i|}\right)|t_{i+1}-t_i| \leq$$

$$\varphi\left(\frac{|u(t)-u(t_i)|}{|t-t_i|}\frac{|t-t_i|}{|t_{i+1}-t_i|}+\frac{|u(t_{i+1})-u(t)|}{|t_{i+1}-t|}\frac{|t_{i+1}-t|}{|t_{i+1}-t_i|}\right)|t_{i+1}-t_i| \leq$$
$$\varphi\left(\frac{|u(t)-u(t_i)|}{|t-t_i|}\right)|t-t_i| + \varphi\left(\frac{|u(t_{i+1})-u(t)|}{|t_{i+1}-t|}\right)|t_{i+1}-t|\,.$$

De esta manera, se obtiene:

$$\sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\pi) \leq \sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n-1}\varphi\left(\frac{|u(t_{j+1})-u(t_j)|}{|t_{j+1}-t_j|}\right)|t_{j+1}-t_j| +$$

$$\varphi\left(\frac{|u(t)-u(t_i)|}{|t-t_i|}\right)|t-t_i| + \varphi\left(\frac{|u(t_{i+1})-u(t)|}{|t_{i+1}-t|}\right)|t_{i+1}-t| =$$

$$= \sigma^R_{(\varphi,1)}(u, \pi \cup \{t\}).$$

Si $a \leq t < t_1$, tenemos:

$$\sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\pi) \leq \sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\pi) + \varphi\left(\frac{|u(t_1) - u(t)|}{|t_1 - t|}\right)|t_1 - t| = \sigma^R_{(\varphi,1)}(u, \pi \cup \{t\}).$$

Si $t_n < t \leq b$. se procede de forma similar.

4. Si π_1 es una partición de $[a,t]$ y π_2 es una partición de $[t,b]$, entonces $\pi_1 \cup \pi_2$ es una partición del intervalo $[a,b]$ y de la definición de $\sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\,.\,)$, se tiene que:

$$\sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\pi_1) + \sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\pi_2) \leq \sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\pi_1 \cup \pi_2).$$

Al tomar supremo, resulta:

$$V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,t]) + V^R_{(\varphi,1)}(u;[t,b]) \leq V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]).$$

Por otra parte, sea $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ una partición del intervalo $[a,b]$ y $t \in [a,b]$. Podemos suponer, sin perdida de generalidad que $t \in [a,b] - \pi$.

Consideremos $j \in \{1,\ldots,n-1\}$, tal que $t_j < t < t_{j+1}$. Entonces usando la desigualdad, resulta:

$$\sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\pi) \leq$$

$$\sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\{t_1,\ldots,t_j,t\}) + \sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\{t,t_{j+1},\ldots,t_n\}) \leq$$

$$V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,t]) + V^R_{(\varphi,1)}(u;[t,b]).$$

Finalmente tomando $\sup\limits_{\pi \in \Pi_a^b} \sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\pi)$ se obtiene la desigualdad requerida.

Para los casos $a \leq t < t_1$ o $t_n < t \leq b$ se procede de manera análoga.

5. Siguiendo las ideas desarrolladas para demostrar que $Lip[a,b] \subset RV_{(p,1)}[a,b]$ (Proposición 2.1.1) se concluye que si $u \in Lip[a,b]$, entonces $V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]) \leq \varphi(K)(b-a)$, donde

$$K = \sup_{x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|}.$$

6. Sea $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ una partición de $[a,b]$ y consideremos

$$\Gamma = \left\{ j=1,\ldots,n-1 : \frac{|u(t_{j+1})-u(t_j)|}{|t_{j+1}-t_j|} \leq 1 \right\},$$

entonces usando la convexidad de φ :

$$\sigma(u,\pi) = \sum_{j=1}^{n-1} |u(t_{j+1})-u(t_j)| \leq$$

$$\sum_{j\in\Gamma} |t_{j+1}-t_j| + \frac{1}{\varphi(1)}\sum_{j\notin\Gamma}\varphi\left(\frac{|u(t_{j+1})-u(t_j)|}{|t_{j+1}-t_j|}\right)|t_{j+1}-t_j| \leq$$

$$b-a+\frac{1}{\varphi(1)}V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]).$$

Al tomar supremo, resulta: $V(u) \leq b-a+V^R_{(\varphi,1)}(u)$.

7. En 6. se demostró una de las inclusiones. Para la otra inclusión ver **[97]** o con lujo de detalles en **[126]**.

8. De la definición de $(\varphi,1)$-variación, obtenemos que:

$$\varphi\left(\frac{|u(t)-u(a)|}{t-a}\right)(t-a) \leq V^R_{(\varphi,1)}(u), \quad a<t\leq b.$$

De donde resulta que

$$|u(t)| \leq |u(a)| + \varphi^{-1}\left(\frac{V^R_{(\varphi,1)}(u)}{t-a}\right)(t-a), \quad a<t\leq b.$$

Como φ cumple la condición ∞_1, entonces $\varphi^{-1}\left(\frac{V^R_{(\varphi,1)}(u)}{t-a}\right)(t-a)$ es acotado en $(a,b]$. De donde se concluye:

$$\|u\|_\infty \leq |u(a)| + \sup_{t\in(a,b]}\varphi^{-1}\left(\frac{V^R_{(\varphi,1)}(u)}{t-a}\right)(t-a).$$

9. Que $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ es un conjunto simétrico, se deriva de la definición de $(\varphi,1)$-variación. Por otra parte, de la Observación 3.1.1, sobre φ-funciones, tenemos que si $s,t \in [0,\infty)$ y $\alpha,\beta \in [0,1]$, tales que $\alpha+\beta=1$, entonces:

$$\varphi(\alpha s + \beta t) \leq max\ \{\varphi(s), \varphi(t)\} \leq \varphi(s) + \varphi(t).$$

De esta manera, si $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ del intervalo $[a,b]$, $u,v \in V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ y $\alpha,\beta \in [0,1]$, $\alpha+\beta=1$, entonces:

$$\sigma^R_{(\varphi,1)}(\alpha u + \beta v, \pi) =$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\alpha \frac{|u(t_{j+1}) - u(t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|} + \beta \frac{|v(t_{j+1}) - c(t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|}\right) |t_{j+1} - t_j| \leq$$

$$\sigma^R_{(\varphi,1)}(u,\pi) + \sigma^R_{(\varphi,1)}(v,\pi).$$

De esta relación, se concluye que:

$$V^R_{(\varphi,1)}(\alpha u + \beta v) \leq V^R_{(\varphi,1)}(u) + V^R_{(\varphi,1)}(v).$$

Y por tanto $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ es convexo.

10. La implicación $(\Longrightarrow)$ se obtiene del hecho que la convexidad de la función φ garantiza que:

$$\varphi\left(\frac{|(\alpha u + \beta v)(t) - (\alpha u + \beta v)(s)|}{|t-s|}\right)|t-s| \leq$$

$$\alpha\varphi\left(\frac{|u(t) - u(s)|}{|t-s|}\right)|t-s| + \beta\varphi\left(\frac{|v(t) - v(s)|}{|t-s|}\right)|t-s|,$$

$u,v \in \mathbb{R}^{[a,b]}, \alpha,\beta \in [0,1], \alpha+\beta=1$.

Para la demostración de la implicación $(\Longleftarrow)$, observemos que si $p,q \in [0,\infty)$ y se consideran $u,v : [a,b] \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$u(t) := pt, \quad v(t) := qt, \quad t \in [a, b].$$

Entonces

$$V^R_{(\varphi,1)}(u) = \varphi(p)(b-a), \quad V^R_{(\varphi,1)}(v) = \varphi(q)(b-a).$$

De esta manera, como la función $V^R_{(\varphi,1)}(\cdot)$es convexa, resulta que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = 1$,

$$\varphi(\alpha p + \beta q)(b-a) =$$

$$V^R_{(\varphi,1)}(\alpha u + \beta v) \leq \alpha V^R_{(\varphi,1)}(u) + \beta V^R_{(\varphi,1)}(v) =$$

$$\alpha\varphi(p)(b-a) + \beta\varphi(q)(b-a).$$

De donde se concluye la convexidad de φ. □

Observación 3.2.1. Usando la conclusión de la parte 5, del teorema que venimos de demostrar, nos permite exhibir una amplia gama de funciones de $V^R_{(\varphi,1)}[a, b]$, por ejemplo toda función con derivada continua tiene $(\varphi, 1)$-variación acotada.

Observación 3.2.2. En vista de que la parte 7. asegura que $V^R_{(\varphi,1)}[a, b] \underset{\neq}{\subset} BV[a, b]$ si φ es una φ-función que verifica la condición ∞_1, es usual imponer a φ esta condición, cuando se trata con este tipo de funciones.

En el siguiente lema se presentan las posibilidades del valor del límite $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)}$, para dos φ-funciones φ_1 y φ_2 ; y su demostración es consecuencia directa de la definición de límite superior.

Lema 3.2.1. *Sean φ_1 y φ_2 φ-funciones, entonces se verifica una de las dos siguientes condiciones.*

1. $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} < \infty$ *si y sólo si existen* $\eta > 0, t_0 > 0$, *tal que*

$$\varphi_1(t) \leq \eta\varphi_2(t), \quad t \geq t_0.$$

2. $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} = \infty$ *si y sólo si existen* $\eta > 0, t_0 > 0$, *tal que*

$$\varphi_2(t) \leq \eta\varphi_1(t), \quad t \geq t_0.$$

En el siguiente teorema, presentamos una adaptación del Teorema 8.1 de **[92]** o del Lema 2 de **[42]**, para dar condiciones necesarias y suficientes sobre las φ-funciones φ_1 y φ_2 para que $V^R_{(\varphi_1,1)}[a,b] \subset V^R_{(\varphi_2,1)}[a,b]$.

TEOREMA 3.2.2. *Sean φ_1 y φ_2 φ-funciones convexas, entonces $V^R_{(\varphi_1,1)}[a,b] \subset V^R_{(\varphi_2,1)}[a,b]$ si y sólo si $\limsup_{t\to\infty} \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} < \infty$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\limsup_{t\to\infty} \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} < \infty$,entonces por el Lema 3.2.1 existen $\eta > 0, t_0 > 0$, tal que $\varphi_2(t) \leq \eta\varphi_1(t), t \geq t_0$.

Sean $u \in V^R_{(\varphi_1,1)}[a,b]$ y $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ una partición del intervalo $[a,b]$. Tomemos

$$\Gamma = \left\{ j = 1, \ldots, n-1 : \frac{|u(t_{j+1}) - u(t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|} < t_0 \right\}.$$

Entonces:

$$\sigma^R_{(\varphi_2,1)}(u,\pi) := \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_2\left(\frac{|u(t_{j+1}) - u(t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|}\right)|t_{j+1} - t_j| = \sum_{j\in\Gamma} + \sum_{j\notin\Gamma} \leq$$

$$\sum_{j\in\Gamma} \varphi_2(t_o)\,|t_{j+1} - t_j| + \sum_{j\notin\Gamma} \eta\varphi_1\left(\frac{|u(t_{j+1}) - u(t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|}\right)|t_{j+1} - t_j| \leq$$

$$\varphi_2(t_0)(b-a) + \eta V^R_{(\varphi_1,1)}(u).$$

Tomando supremo, se infiere que $V^R_{(\varphi_1,1)}[a,b] \subset V^R_{(\varphi_2,1)}[a,b]$.

Recíprocamente, procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que

$$V^R_{(\varphi_1,1)}[a,b] \subset V^R_{(\varphi_2,1)}[a,b] \quad y \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} = \infty.$$

Entonces existen $N_1 > 0$ y $p_1 > N_1$, tal que $\varphi_2(p_1) > 2\varphi_1(p_1)$. Por el mismo argumento, existen $N_2 > N_1 + 1$ y $p_2 > máx\,\{p_1, N_2\}$, tal que $\varphi_2(p_2) > 2^2\varphi_1(p_2)$.

De esta forma, inductivamente, podemos construir una sucesión creciente de números positivos $\{p_n\}_{n\geq 1}$, tales que:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \infty \quad y \quad \varphi_2(p_n) > 2^n\varphi_1(p_n), \quad n \geq 1.$$

Consideremos $t_0 = a$. Como $0 < p_1 < p_n, n \geq 1$, tenemos que $0 < \frac{\varphi_1(p_1)}{\varphi_1(p_n)} < 1$, $n \geq 1$, y de esta manera, la sucesión $\{t_n\}_{n\geq 1}$, definida recursivamente por la fórmula:

$$t_n = t_{n-1} + \frac{b-a}{2^n}\frac{\varphi_1(p_1)}{\varphi_1(p_n)}, \quad n \geq 1,$$

es creciente y está contenida en $[a,b]$.

Denotemos por t_∞ el elemento del intervalo $[a,b]$ definido por $t_\infty := \lim_{n\to 0} t_n$ y consideremos la función $w : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por:

$$w(t) := \begin{cases} p_{n+1}, & t_n \leq t < t_{n+1} \\ 0, & t_\infty \leq t \end{cases}$$

y definamos $u(t) := \int_a^t w(s)ds, t \in [a,b]$. Entonces en cada intervalo $[t_n, t_{n+1}], n \geq 0$, la función u es un segmento de recta con pendiente p_{n+1}, $n \geq 1$. Así

$$V^R_{(\varphi_1,1)}(u;[t_n,t_{n+1}]) = \varphi_1(p_{n+1})(t_{n+1}-t_n) = \frac{b-a}{2^{n+1}}\varphi_1(p_1), \quad n \geq 1.$$

De esta manera, usando la Proposición 3.2.1 resulta:

$$V^R_{(\varphi_1,1)}(u;[a,b]) = \sum_{n=0}^{\infty} V^R_{(\varphi_1,1)}(u;[t_n,t_{n+1}]) = (b-a)\varphi_1(p_1).$$

Además

$$V^R_{(\varphi_2,1)}(u;[t_n,t_{n+1}]) = \varphi_2(p_{n+1})\frac{b-a}{2^n}\frac{\varphi_1(p_1)}{\varphi_1(p_{n+1})} \geq (b-a)\varphi_1(p_1), \quad n \geq 1.$$

De donde se concluye el absurdo $u \in V^R_{(\varphi_1,1)}[a,b]$ y $u \notin V^R_{(\varphi_2,1)}[a,b]$. $\square$

Siguiendo las ideas desarrolladas en la demostración del Teorema 8.2 de **[92]** obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.2.1. *Sea φ una φ-función convexa, entonces $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ es un espacio vectorial si y sólo si φ cumple la condición $\triangle_2(\infty)$.*

Demostración. Supongamos que $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ es un espacio vectorial, entonces si u está en $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$, también está $2u$. De está manera, si consideramos $\varphi_1(t) := \varphi(2t), t \geq$

0, tenemos que $V^R_{(\varphi,1)}[a,b] \subset V^R_{(\varphi_1,1)}[a,b]$. En consecuencia, el teorema anterior nos permite asegurar que φ cumple la condición $\triangle_2(\infty)$.

Recíprocamente, supongamos que φ cumple la condición $\triangle_2(\infty)$, entonces existe números $\eta > 0$, $t_0 > 0$ tales que $\varphi(2t) \leq \eta\varphi(t), t \geq t_0$.

Sea $\alpha > 0$. Escogiendo n como el menor número entero positivo tal que $\frac{\alpha}{2^n} \leq 1$, obtenemos:

$$\varphi(\alpha t) = \varphi\left(2^n \frac{\alpha}{2^n} t\right) \leq \frac{\alpha}{2^n}\,\varphi\left(2^n t\right) \leq \frac{\alpha}{2^n}\eta^n\varphi(t), \quad t \geq t_0.$$

De este resultado y del Teorema 3.2.2, se obtiene que si consideramos la φ-función $\varphi_1(t) := \varphi(\alpha t)$, $t \in [0,\infty)$, entonces $V^R_{(\varphi,1)}[a,b] \subset V^R_{(\varphi_1,1)}[a,b]$; y por tanto si u está en $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$, también está $au, a > 0$. Así, de la definición de $(\varphi,1)$-variación se concluye que $au \in V^R_{(\varphi,1)}[a,b], a \in \mathbb{R}$.

La otra parte de la demostración se deduce de la desigualdad:

$$\varphi(s+t) = \varphi\left(\frac{2(s+t)}{2}\right) \leq \frac{\varphi(2s)+\varphi(2t)}{2}, \quad s,t \in [0,\infty).$$

□

De acuerdo a la proposición que acabamos de demostrar, la clase $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ no siempre es un espacio vectorial. Por esta razón introducimos la siguiente notación.

Definición 3.2.2. Dada una φ-función φ, denotamos por $RV_{(\varphi,1)}[a,b]$ al espacio vectorial generado por la clase $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$.

El siguiente lema nos permite dar una caracterización del espacio $RV_{(\varphi,1)}[a,b]$.

Lema 3.2.2. *Sea $A \neq 0$ un subconjunto convexo y simétrico de un espacio vectorial $\mathbb{X}$, entonces:*

1. $0 \in A$.

2. El espacio vectorial generado por A es igual a:

$$< A >= \{x \in \mathbb{X} : \exists\lambda > 0, \lambda x \in A\} = \bigcup_{\lambda>0} \lambda A.$$

DEMOSTRACIÓN. 1. Si $x \in A$, entonces por hipótesis $0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x) \in A$.

2. Por definición $A \subset \underset{\lambda>0}{\cup} \lambda A \subset < A >$. Para demostrar que $< A > \subset \underset{\lambda>0}{\cup} \lambda A$, basta verificar que $\underset{\lambda>0}{\cup} \lambda A$ es un espacio vectorial. En efecto, sean $x, y \in A$ y $\alpha > 0, \beta > 0$, entonces:

$$\alpha x + \beta y = (\alpha + \beta)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y\right) \in (\alpha+\beta)A.$$

Además si $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\lambda > 0$, entonces:

$$\begin{cases} \gamma(\lambda x) = (\gamma\lambda)x \in \underset{\lambda>0}{\cup} \lambda A, & \gamma > 0 \\ \gamma(\lambda x) = 0 \in \underset{\lambda>0}{\cup} \lambda A, & \gamma = 0 \\ \gamma(\lambda x) = (-\gamma\lambda)(-x) \in \underset{\lambda>0}{\cup} \lambda A, & \gamma < 0\,. \end{cases}$$

De esta manera obtenemos que $\underset{\lambda>0}{\cup} \lambda A$ es un espacio vectorial.

Veamos que $\underset{\lambda>0}{\cup} \lambda A = \{x \in \mathbb{R} : \exists \lambda > 0, \lambda x \in A\}$.

En efecto, si $z = \lambda x, x \in A, \lambda > 0$, entonces $\frac{1}{\lambda}z = x \in A$. Por otra parte, si $\lambda x \in A, \lambda > 0$, entonces $x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x) \in \frac{1}{\lambda}A$. $\square$

Como consecuencia de esta lema y 9. del Teorema 3.2.1 tenemos el siguiente corolario.

COROLARIO 3.2.2. *Sea φ una φ-función, entonces el espacio vectorial generado por $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ es igual a*

$$RV_{(\varphi,1)}[a,b] = \left\{u \in \mathbb{R}^{[a,b]} : \exists \lambda > 0, V^R_{(\varphi,1)}(\lambda u) < \infty\right\}.$$

Ahora verificamos que el espacio $RV_{(\varphi,1)}[a,b]$ tiene una estructura de álgebra.

PROPOSICIÓN 3.2.1. *Sea φ una φ-función convexa, entonces $RV_{(\varphi,1)}[a,b]$ es un álgebra, con el producto usual de funciones.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $u, v \in RV_{(\varphi,1)}[a,b]$, entonces existen números positivos λ_u, λ_v, tales que $\lambda_u u\,,\ \lambda_v v \in V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$. Sin perdida de generalidad podemos asumir que ni u, ni v son la función nula. Consideremos $\lambda = \frac{\lambda_u \lambda_v}{\lambda_u \|u\|_\infty + \lambda_v \|v\|_\infty}$. Entonces si $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ es una partición de $[a,b]$, resulta:

$$\sigma^R_{(\varphi,1)}(\lambda\, u\, v) = \sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{|\lambda(uv)(t_{j+1}) - \lambda(uv)(t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|}\right) |t_{j+1} - t_j| \leq$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\lambda \|v\|_\infty \frac{|u(t_{j+1}) - u(t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|} + \lambda \|u\|_\infty \frac{|v(t_{j+1}) - v(t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|}\right) |t_{j+1} - t_j|\,.$$

Denotando:

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_v \|v\|_\infty}{\lambda_u \|u\|_\infty + \lambda_v \|v\|_\infty} \quad y \quad \lambda_2 = \frac{\lambda_u \|u\|_\infty}{\lambda \|u\|_{u\infty} + \lambda_v \|v\|_\infty}$$

tenemos que $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Y de la convexidad de φ se obtiene que:

$$\sigma^R_{(\varphi,1)}(\lambda\, u\, v) \leq$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\lambda_u \lambda_1 \frac{|u(t_{j+1}) - u(t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|} + \lambda_v \lambda_2 \frac{|v(t_{j+1}) - (t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|}\right) |t_{j+1} - t_j \leq| \leq$$

$$\lambda_1 \sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\lambda_u \frac{|u(t_{j+1}) - u(t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|}\right) |t_{j+1} - t_j| + \lambda_2 \sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\lambda_v \frac{|v(t_{j+1}) - v(t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|}\right) |t_{j+1} - t_j| \leq$$

$$\lambda_1 V(\lambda_u u) + \lambda_2 V^R_{(\varphi,1)}(\lambda_v v) < \infty.$$

De donde se deduce que $V^R_{(\varphi,1)}(\lambda(uv)) \leq V^R_{(\varphi,1)}(\lambda_1 u) + V^R_{(\varphi,1)}(\lambda_2 v)$ y por tanto $uv \in RV_{(\varphi,1)}[a,b]$. $\square$

En la sección 3 de **[92]** se introduce la siguiente definición.

Definición 3.2.3. Sean φ_1 y φ_2 φ-funciones. Se dice que $\varphi_2 \prec \varphi_1$ si existen números positivos η y t_0, tales que $\varphi_2(t) \leq \varphi_1(\eta t), t \geq t_0$.

Ahora hacemos una adaptación del teorema 5 de **[42]** para dar condiciones necesarias y suficientes sobre las φ-funciones φ_1 y φ_2 para que $RV_{(\varphi_1,1)}[a,b] \subset RV_{(\varphi_2,1)}[a,b]$.

Proposición 3.2.2. *Sean φ_1 y φ_2 φ-funciones, entonces $RV_{(\varphi_1,1)}[a,b] \subset RV_{(\varphi_2,1)}[a,b]$ si y sólo si $\varphi_2 \prec \varphi_1$.*

Demostración. Supongamos que $\varphi_2 \prec \varphi_1$ y sea $u \in RV_{(\varphi_1,1)}[a,b]$, entonces existe $\lambda > 0$, tal que $V^R_{(\varphi_1,1)}(\lambda u) < \infty$. Usando la definición de la relación $\prec$ y un argumento similar al desarrollado en la primera parte de la demostración del Teorema 3.2.2, considerando

$$\Gamma = \left\{ j = 1, \ldots, n-1 : \frac{\lambda}{\eta} \frac{|u(t_{j+1}) - u(t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|} < t_0 \right\},$$

obtenemos:

$$V^R_{(\varphi_2,1)}\left(\frac{\lambda}{\eta} u\right) \leq \varphi_2(t_0)(b-a) + V^R_{(\varphi_1,1)}(\lambda u).$$

Y así $u \in RV_{(\varphi_1,1)}[a,b]$.

Recíprocamente, procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que se verifica la inclusión $RV_{(\varphi_1,1)}[a,b] \subset RV_{(\varphi_2,1)}[a,b]$ y no se cumple la relación $\varphi_1 \prec \varphi_2$.

Ahora procedemos de manera similar a la demostración de la segunda parte del Teorema 3.2.2, obtenemos que para $\eta = 1$, existen $N_1 > 0$ y $p_1 > N_1$, tal que $\varphi_2(p_1) > 2\varphi_1(p_1)$. Considerando $\eta = 2$, existen $N_2 > N_1 + 1$ y $p_2 > máx\, \{p_1, N_2\}$, tal que $\varphi_2(p_2) > 2^2\, \varphi_1(2t)$. De esta forma, construimos, inductivamente, una sucesión creciente $\{p_n\}_{n\geq 1}$ de números positivos, tales que:

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \infty \quad y \quad \varphi_2(p_n) > 2^n \varphi_1(np_n), n \geq 1.$$

Ahora se considera la sucesión creciente de elementos del intervalo $[a,b]$, construida por recurrencia mediante la fórmula:

$$t_0 = a, \quad t_{n+1} = t_n + \frac{b-a}{2^n} \frac{\varphi_1(p_1)}{\varphi_1(np_n)}, n \geq 0.$$

Definimos $t_\infty := \lim_{n\to\infty} t_n$, y consideremos las funciones:

$$w(t) := \begin{cases} p_{n+1}, & t_n \leq t < t_{n+1} \\ 0, & t_\infty \leq t \end{cases} \qquad y \quad u(t) := \int_a^t w(s)ds, t \in [a,b].$$

Para concluir se comprueba que:

$$V^R_{(\varphi_1,1)}(u;[a,b]) = (b-a)\,\varphi_1(p_1) \quad y \quad V^R_{(\varphi_2,1)}(u;[a,b]) = \infty.$$

$\square$

3.3. Norma sobre $RV_{(\varphi,1)}[a,b]$.

En esta sección, usamos el funcional de Minkowski para dotar al espacio $RV_{(\varphi,1)}[a,b]$ de una norma $\|\cdot\|^R_{(\varphi,1)}$ que le dará una estructura de álgebra de Banach.

Dada una φ-función convexa φ, consideramos el conjunto:

$$A_{(\varphi,1)} := \left\{u \in RV_{(\varphi,1)}[a,b] : V^R_{(\varphi,1)}(u) \le 1\right\}.$$

De las propiedades de la clase $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ (Teorema 3.2.1) y de la definición de $RV_{(\varphi,1)}[a,b]$, resulta que $A_{(\varphi,1)}$ es convexo, simétrico y absorbente. Entonces el funcional de Minkowski asociado al conjunto $A_{(\varphi,1)}$ viene definido por:

$$\mu_{A_{(\varphi,1)}}(u) = \mu_{(\varphi,1)} = inf\left\{\lambda > 0 :\ V^R_{(\varphi,1)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) < 1\right\}$$

es una seminorma sobre el espacio $RV_{(\varphi,1)}[a,b]$. (ver, por ejemplo [**55**]o [**145**]).

En la siguiente proposición presentamos algunas propiedades del funcional $\mu_{(\varphi,1)}$.

PROPOSICIÓN 3.3.1. (*ver* [**95**]) *Sea φ una φ-función convexa, entonces:*

1. Si $\mu_{(\varphi,1)}(u) \neq 0$, entonces $V^R_{(\varphi,1)}\left(\frac{u}{\mu_{(\varphi,1)}(u)}\right) \le 1$.

2. Si $\lambda > \mu_{(\varphi,1)}(u)$, entonces $V^R_{(\varphi,1)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \le 1$.

3. Si $0 \le \mu_{(\varphi,1)}(u) \le 1$, entonces $V^R_{(\varphi,1)}(u) \le \mu_{(\varphi,1)}(u)$.

4. $\left\{\lambda > 0 : V^R_{(\varphi,1)}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \le 1\right\} = \begin{cases} \left[\mu_{(\varphi,1)}(u)\,,\,\infty\right), & \mu_{(\varphi,1)}(u) \neq 0 \\ (0\,,\,\infty), & \mu_{(\varphi,1)}(u) = 0. \end{cases}$

DEMOSTRACIÓN. 1. Sea $\lambda > 0$, tal que $V^R_{(\varphi,1)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \le 1$. De la continuidad de φ, resulta:

$$1 \ge \lim_{\lambda \to \mu_{(\varphi,1)}(u)} V^R_{(\varphi,1)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) = V^R_{(\varphi,1)}\left(\frac{u}{\mu_{(\varphi,1)}(u)}\right).$$

2. Es consecuencia de la definición de $\mu_{(\varphi,1)}$.

3. Si $\mu_{(\varphi,1)}(u) = 0$, entonces de 2. y la convexidad de φ, dado $0 < \lambda < 1$, se tiene:

$$\frac{1}{\lambda} V^R_{(\varphi,1)}(u) \leq V^R_{(\varphi,1)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1.$$

Y así, $V^R_{(\varphi,1)}(u) \leq \lambda, \lambda \in (0,1)$, lo que asegura que $V^R_{(\varphi,1)}(u) = 0 = \mu_{(\varphi,1)}(u)$.

Si $0 < \mu_{(\varphi,1)}(u) \leq 1$, el resultado se desprende de la parte 1. y de la convexidad de $V^R_{(\varphi,1)}(\,\cdot\,)$.

La parte 4. es consecuencia de 1. y 2. $\square$

Consideremos la función $\|\cdot\|^R_{(\varphi,1)} : RV_{(\varphi,1)}[a,b] \to [0,\infty)$ definida por:

$$\|u\|^R_{(\varphi,1)} := |u(a)| + \mu_{(\varphi,1)}(u), \quad u \in RV_{(\varphi,1)}[a,b].$$

Veamos que $\left(RV_{(\varphi,1)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(\varphi,1)}\right)$ es un espacio normado.

PROPOSICIÓN 3.3.2. *Sea φ una φ-función convexa, entonces $\left(RV_{(\varphi,1)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(\varphi,1)}\right)$ es un espacio normado.*

DEMOSTRACIÓN. Como el funcional $\mu_{(\varphi,1)}$ es una seminorma sobre $RV_{(\varphi,1)}[a,b]$, sólo debemos demostrar que:

$$\mu_{(\varphi,1)}(u) = 0 \Longleftrightarrow u = ctte.$$

En efecto, sea $u \in RV_{(\varphi,1)}[a,b]$, tal que $\mu_{(\varphi,1)}(u) = 0$. Entonces necesariamente $V^R_{(\varphi,1)}(u) = 0$, porque de no ser así, considerando $0 < \lambda < min\left\{1\,,\, V^R_{(\varphi,1)}(u)\right\}$, tenemos:

$$V^R_{(\varphi,1)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \geq \frac{1}{\lambda} V^R_{(\varphi,1)}(u) > 1$$

y entonces $\mu_A(u) \geq min\left\{1\,,\, V^R_{(\varphi,1)}(u)\right\} > 0$, lo cual contradictorio.

Como $V^R_{(\varphi,1)}(u) = 0$ del Teorema 3.2.1 se concluye que $u = ctte$.

La parte recíproca es trivial. $\square$

Observación 3.3.1. Con el mismo razonamiento podemos demostrar

$$|||u|||^R_{(\varphi,1)} := \|u\|_\infty + \mu_{(\varphi,1)}(u), \quad u \in RV_{(\varphi,1)}[a,b]$$

es un norma sobre $RV_{(\varphi,1)}[a,b]$.

En el siguiente lema se exponen algunas propiedades de la convergencia en la norma $\|\cdot\|^R_{(\varphi,1)}$.

Lema 3.3.1. *Sean φ una φ-función convexa y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, entonces:*

1. $\|u\|^R_{(\varphi,1)} < \varepsilon$ *implica* $\|u\|_\infty < \left(\underset{t\in(a,b]}{sup} \left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{t-a}\right)\right)(t-a)+1 \right)\varepsilon.$

2. Si $\{u_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en con la norma $\|\,.\,\|^R_{(\varphi,1)}$, entonces también es una sucesión con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

3. Si $\{u_n\}_{n\geq 1} \xrightarrow{\|\cdot\|^R_{(\varphi,1)}} u$, entonces $\{u_n\}_{n\geq 1} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u.$

Demostración. 1. Si $\|u\|^R_{(\varphi,1)} < \varepsilon$ de la definición de la norma $\|\cdot\|^R_{(\varphi,1)}$ y de las propiedades del funcional $\mu_{(\varphi,1)}$ (Proposición 3.3.1) resulta $V^R_{(\varphi,1)}\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) \leq 1$. Entonces de la definición de $(\varphi,1)$-variación.

$$|u(t)| \leq \left(\underset{t\in(a,b]}{sup} \left(\varphi^{-1}\left(\frac{1}{t-a}\right)\right)(t-a)+1 \right)\varepsilon, \quad t \in [a,b].$$

De donde se obtiene la desigualdad buscada.

2. y 3. se deducen de 1. □

Como consecuencia del lema anterior tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.3.3. (*ver* **[18]**) *El espacio $RV_{(\varphi,1)}[a,b]$ es un espacio de Banach.*

Mas aún L. Maligranda y W. Orlicz en **[97]** usan el Lema 2.1.2 para demostrar que:

Proposición 3.3.4. *Sean φ una φ-función convexa que verifica la condición ∞_1, entonces el espacio $\left(RV_{(p\varphi 1)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(\varphi,1)}\right)$ es un álgebra de Banach.*

Para ver los detalles de la demostración de este resultado, se puede revisar la tesis de grado de M. T. Neves **[126]**.

3.4. Generalización del Lema de Riesz para la Clase $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$.

En [**112**] Medved'ed generaliza el lema de Riesz (ver también [**56**]) para clase $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ en el teorema que exponemos a continuación.

Para una φ-función φ, $L\varphi[a,b]$ denota la clase de Orlicz de las funciones $u \in \mathbb{R}^{[a,b]}$, tales que $\int_a^b \varphi(|u(t)|)\,dt < \infty$.

Teorema 3.4.1. (*Generalización del Lema de Riesz para la clase* $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$). *Sea* φ *una* φ*-función convexa que cumple la condición* ∞_1. *Entonces* $u \in V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ *si sólo si* $u \in AC[a,b]$ *y* $u' \in L_\varphi[a,b]$ *y ademas:*

$$V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]) = \int_a^b \varphi(|u'(t)|)\,dt.$$

Los detalles de la demostración pueden verse en [**126**].

Con el resultado de este lema podemos reescribir el funcional de Minkowski $\mu_{(\varphi,1)}$ como

$$\mu_{(\varphi,1)}(u) = inf\left\{\lambda > 0 : \int_a^b \varphi\left(\frac{|u'(t)|}{\lambda}\right) < 1\right\}, \quad u \in RV_{(\varphi,1)}[a,b];$$

y la norma de la forma

$$\|u\|^R_{(\varphi,1)} := |u(a)| + inf\left\{\lambda > 0 : \int_a^b \varphi\left(\frac{|u'(t)|}{\lambda}\right) < 1\right\}, \quad u \in RV_{(\varphi,1)}[a,b].$$

3.5. Funciones de $(\varphi, 2)$-variación acotada en el sentido de Riesz.

Imitando el proceso para pasar del concepto $(p,1)$-variación en el sentido de Riesz a la noción de $(p,2)$-variación en el sentido de Riesz, podemos introducir el concepto de $(\varphi,2)$-variación en el sentido de Riesz. Esta nueva definición la introduce N. Merentes el año 1991 en [**113**].

Definición 3.5.1. ([**113**]$(\varphi,2)$*-variación de Riesz*). Sean φ una φ-función, $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y una partición $\pi : a \le t_1 < \cdots < t_n \le b$ del intervalo $[a,b]$, con al menos tres puntos. Se define:

$$\sigma^R_{(\varphi,2)}(u,\pi) := \sum_{j=1}^{n-2} \varphi\left(\frac{|u[t_j,t_{j+1}] - u[t_{j-1},t_j]|}{|t_{j+2}-t_j|}\right)|t_{j+2}-t_j| \tag{3.5.1}$$

y

$$V^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b]) := V(u) := \sup_{\pi\in\Pi_a^b} \sigma^R_{(\varphi,2)}(u,\pi).$$

El número $V^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b])$ se denomina $(\varphi,2)$-*variación en el sentido de Riesz de la función* u *en el intervalo* $[a,b]$. Si $V^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b]) < \infty$, decimos que la función u *tiene* $(\varphi,2)$-*variación acotada o finita en el sentido de Riesz, en el intervalo* $[a,b]$.

La clase de las funciones $u:[a,b]\to\mathbb{R}$, *tales que* $V^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b]) < \infty$ *se denota por* $V^R_{(\varphi,2)}[a,b]$.

Ejemplo 3.5.1. Procediendo de manera similar a los ejemplos de funciones con $(p,2)$-variación acotada en el sentido de Riesz (Ejemplo 2.2.1) tenemos que si $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función afín, $V^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b]) = 0$.

Ejemplo 3.5.2.

Si u es una parábola

$$u(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma, \qquad t\in[a,b],$$

usando las propiedades de las diferencias divididas (ver proposición 1.3.1), dados
$t_1 < t_2 < t_3$

$$\frac{u[t_2,t_3]-u[t_1,t_2]}{t_3-t_1} = u[t_1,t_2,t_3] = \alpha.$$

Así resulta, que para una partición $\pi : a\le t_1 < \cdots < t_n \le b$ del intervalo $[a,b]$,

$$\sigma^R_{(\varphi,2)}(u,\pi) =$$

$$\varphi(|\alpha|)\sum_{j=1}^{n-2}(t_{j+2}-t_j) = 2(b-a)\,\varphi(|\alpha|) = V^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b]).$$

En el siguiente teorema exponemos algunas propiedades de las funciones con $(\varphi,2)$-variación acotada.

TEOREMA 3.5.1. *Sea φ una φ-función, entonces:*

1. Si $[s,t] \subset [a,b]$, entonces $V^R_{(\varphi,2)}(u;[s,t]) \leq V^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b])$.

2. Si $t \in [a,b]$, entonces $V^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b]) \geq V^R_{(\varphi,2)}(u;[a,t]) + V^R_{(\varphi,2)}(u;[t,b])$.

3.Si φ es convexa, $V^R_{(\varphi,2)}[a,b] \subset BV_2[a,b]$ y

$$V_2(u;[a,b]) \leq 2(b-a) + \frac{1}{\varphi(1)} V^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b]), \quad u \in V^R_{(\varphi,2)}[a,b].$$

4.$V^R_{(\varphi,2)}[a,b] = BV_2[a,b]$ si φ no se cumple la condición ∞_1.

5. $V^R_{(\varphi,2)}[a,b] \subset V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$.

6. $V^R_{(\varphi,2)}[a,b]$ es un conjunto simétrico y convexo.

7. φ es convexa si y sólo si la función $V^R_{(\varphi,2)} : V^R_{(\varphi,2)}[a,b] \to [0,\infty)$, que asocia a cada función $u \in V^R_{(\varphi,2)}[a,b]$, su $(\varphi,2)$-variación, es convexa.

DEMOSTRACIÓN. 1. y 6. son consecuencia de la definición de $(\varphi,2)$-variación.

Para 2. se procede de forma similar a la Proposiión1.3.5 .

3. Sea $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ una partición de $[a,b]$ con al menos tres puntos y denotemos por

$$\Gamma = \left\{ j = 1, \ldots, n-2 : \frac{|u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]|}{|t_{j+2} - t_j|} \leq 1 \right\},$$

entonces:

$$\sigma_2(u,\pi) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{|u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]|}{|t_{j+2} - t_j|} |t_{j+2} - t_j| \leq$$

$$\sum_{j \in \Gamma} |t_{j+2} - t_j| + \frac{1}{\varphi(1)} \sum_{j \notin \Gamma} \varphi\left(\frac{|u(t) - u(t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|} \right) |t_{j+1} - t_j| \leq$$

$$2(b-a) + \frac{1}{\varphi(1)} V^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]).$$

Al tomar supremo, resulta: $V(u) \leq 2b - a + \frac{1}{\varphi(1)} V^R_{(k,1)}(u)$.

4. En 3. demostramos una de las inclusiones. Para demostrar que $BV_2[a,b] \subset V^R_{(\varphi,2)}[a,b]$ procedemos como sigue:

Como φ no cumple la condición ∞_1, entonces $\underset{t\to\infty}{\mathit{lím}\,\mathit{sup}}\,\frac{\varphi(t)}{t}$ es finito. De esta manera, existen $t_0 > 0$ y $\eta > 0$, tal que $\varphi(t) \leq \eta t, t \geq t_0.$

Sean $u \in BV_2[a, b]$ y $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ una partición de $[a, b]$ con al menos tres puntos. Denotemos por

$$\Gamma = \left\{ j = 1, \ldots, n-2 : \frac{|u[t_{j+1}, t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]|}{|t_{j+2} - t_j|} \leq t_0 \right\},$$

entonces:

$$\sigma^R_{(\varphi,2)}(u, \pi) =$$

$$\sum_{j\in\Gamma} \varphi\left(\frac{|u[t_j, t_{j+1}] - u[t_{j-1}, t_j]|}{|t_{j+2} - t_j|}\right)|t_{j+2} - t_j| + \sum_{j\notin\Gamma} \varphi\left(\frac{|u[t_j, t_{j+1}] - u[t_{j-1}, t_j]|}{|t_{j+2} - t_j|}\right)|t_{j+2} - t_j| \leq$$

$$\sum_{j\in\Gamma} \varphi(t_0)\,|t_{j+2} - t_j| + \sum_{j\notin\Gamma} \eta\,|u[t_j, t_{j+1}] - u[t_{j-1}, t_j]| \leq$$

$$2\,\varphi(t_0)(b - a) + \eta\,V_2(u).$$

Y por tanto $V^R_{(\varphi,2)}(u; [a, b]) < \infty$.

5. Sea $u \in V^R_{(\varphi,2)}([a, b])$, entonces de 3. tenemos que $u \in BV_2[a, b]$ y por lo tanto u es Lipschitz en $[a, b]$ (Proposición 1.2.1). Sean $K > 0$, una constante de lipschitzidad de u y $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ una partición de $[a, b]$, entonces:

$$\sigma^R_{(\varphi,1)}(u, \pi) \leq \varphi(K) \sum_{j=1}^{n-1} |t_{j+1} - t_j| = \varphi(K)(b - a).$$

De esta manera obtenemos que $V^R_{(\varphi,1)}(u; [a, b]) \leq \varphi(K)(b - a)$ y por tanto $V^R_{(\varphi,2)}[a, b] \subset V^R_{(\varphi,1)}[a, b]$.

6. Se procede de manera similar a la parte 9. del Teorema 3.2.1.

7. La implicación $\Longrightarrow$ se obtiene del hecho que la convexidad de la función φ implica que:

$$\varphi\left(\frac{|(\alpha u+\beta v)[s,t]-(\alpha u+\beta v)[r,s]|}{|t-s|}\right)|t-s| \leq$$

$$\alpha\varphi\left(\frac{|u(t)-u(s)|}{|t-s|}\right)|t-s|+\beta\varphi\left(\frac{|v(t)-v(s)|}{|t-s|}\right)|t-s|,$$

$u, v \in \mathbb{R}^{[a,b]}, \alpha, \beta \in (0,1), \alpha+\beta=1, a \leq r < s < t \leq b$.

Para la demostración de la parte recíproca ($\Longleftarrow$), se observa que si $p, q \in [0,\infty)$ y se consideran $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$u(t) := pt^2, \quad v(t) := qt^2, \quad t \in [a,b].$$

Entonces

$$V^R_{(\varphi,2)}(u) = 2\varphi(p)(b-a), \quad V^R_{(\varphi,2)}(v) = 2\varphi(q)(b-a).$$

De esta manera, de la convexidad de la función $V^R_{(\varphi,2)}(\cdot)$, resulta que si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha+\beta = 1$,

$$2\varphi(\alpha p+\beta q)(b-a) =$$

$$V^R_{(\varphi,2)}(\alpha u+\beta v) \leq \alpha V^R_{(\varphi,2)}(u)+\beta V^R_{(\varphi,1)}(v) =$$

$$2\alpha\varphi(p)(b-a)+2\beta\varphi(q)(b-a).$$

De donde se concluye la convexidad de φ. □

Observación 3.5.1. En el lema 2.3 de **[113]**, N. Merentes presenta una demostración diferente de 3.

De forma similar al caso de las funciones de $(\varphi, 1)$-variación acotada, denotamos por $RV_{(\varphi,,2)}[a,b]$ al espacio vectorial generado por $V^R_{(\varphi,2)}[a,b]$. Según el Lema 3.2.2

$$RV_{(\varphi,2)}[a,b] = \left\{u \in \mathbb{R}^{[a,b]} : \exists\lambda > 0 \ni V^R_{(\varphi,2)}(\lambda u; [a,b]) < \infty\right\}.$$

Introducida esta notación, podemos enunciar el siguiente corolario, que se deduce de la parte 5. del Teorema 3.5.1

Corolario 3.5.1. *Sea φ una φ-función, entonces $RV_{(\varphi,2)}[a,b] \subset RV_{(\varphi,1)}[a,b]$.*

Siguiendo las ideas desarrolladas en el caso de $(p,2)$-variación, procedemos a dar una definición alternativa de $(\varphi,2)$-variación.

Definición 3.5.2. (*(φ,2)-variación de Riesz. Definición Alternativa*) Sean φ una φ-función, $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ y una partición $\pi \in \Pi^b_{a,2}$:

$$\pi : a \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \leq t_5 < \cdots < t_{2n} \leq b, \tag{3.5.2}$$

con al menos tres puntos. Se definen:

$$\widehat{\sigma}^R_{(\varphi,2)}(u,\pi) := \sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{|u[t_{2j+1},t_{2j+2}] - u[t_{2j-1},t_{2j}]|}{|t_{2j+2}-t_{2j-1}|}\right)|t_{2j+2}-t_{2j-1}|$$

$$y$$

$$\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b]) = \underset{\pi\in\Pi^b_{a,2}}{sup}\ \widehat{\sigma}^R_{(\varphi,2)}(u,\pi).$$

La clase de las funciones $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, tales que $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b]) < \infty$ se denota por $\widehat{V}_{(\varphi,2)}[a,b]$.

Ejemplo 3.5.3. De manera similar al Ejemplo 2.2.1 si u es una función afín, entonces $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b]) = 0$.

Ejemplo 3.5.4. Si u es una parábola $u(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma, t \in [a,b]$ y $a \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \leq b$, tenemos que:

$$\varphi\left(\left|\frac{u[t_3,t_4]-u[t_1,t_2]}{t_4-t_1}\right|\right) = \varphi\left(|\alpha|\left(1+\frac{t_3-t_2}{t_4-t_1}\right)\right).$$

Así resulta, que para una partición π del intervalo $[a,b]$ del tipo (3.5.2),

$$\widehat{\sigma}^R_{(\varphi,2)}(u,\pi) = \sum_{j=1}^{n-2} \varphi\left(|\alpha|\left(1+\frac{t_{2j+1}-t_{2j}}{t_{2j+2}-t_{2j-1}}\right)\right)(t_{2j+2}-t_{2j-1}).$$

Al considerar $\sup_{\pi\in\Pi^b_{a,2}} \widehat{\sigma}^R_{(\varphi,2)}(u,\pi)$, resulta: $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b]) = \varphi(2\,|\alpha|)(b-a)$ (ver Ejemplo 2.2.3). De esta manera, al comparar con el ejemplo 3.5.2, concluimos, que para esta función u,

$$V^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b]) < \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b]).$$

Ahora presentamos algunas de las propiedades de la clase de este tipo de funciones.

TEOREMA 3.5.2. *Sea φ una φ-función, entonces:*

1. Si $[s,t]\subset[a,b]$, entonces $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u;[s,t]) \leq \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b])$.

2. Si $t\in[a,b]$, entonces $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b]) \geq \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u;[a,t]) + \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u;[t,b])$.

3. Si φ es convexa, $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b]\subset B\hat{V}_2[a,b]$ y

$$\widehat{V}_2(u;[a,b]) \leq 2(b-a) + \frac{1}{\varphi(1)}\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b]), \quad u\in\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b].$$

4. $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b] = B\hat{V}_2[a,b]$ si φ no se cumple la condición ∞_1.

5. $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b]\subset V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$.

6. $\hat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b]$ es un conjunto simétrico y convexo.

7. φ es convexa si y sólo si la función

$$\widehat{V}^R_{(\varphi,2)} : \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b]\to[0,\infty)$$

que asocia a cada función de $\hat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b]$ su $(\varphi,2)$-variación alternativa, es convexa.

DEMOSTRACIÓN. 1. es consecuencia de la definición alternativa de $(\varphi,2)$-variación, pues la familia de las particiones del intervalo $[s,t]$ están contenidas en la familia de las particiones del intervalo $[a,b]$.

2. se desprende de la definición alternativa de $(\varphi,2)$-variación

3. Se procede de forma similar a 3. de la Proposición 3.5.1. Sea $\pi: a\leq t_1<t_2\leq t_3< t_4\leq t_5<\cdots<t_{2n}\leq b$, una partición de $[a,b]$ con al menos tres puntos y denotemos por

$$\Gamma = \left\{ j = 1, \ldots, n-1 : \frac{|u[t_{2j+1}, t_{2j+2}] - u[t_{2j-1}, t_{2j}]|}{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|} \leq 1 \right\},$$

entonces:

$$\widehat{\sigma}_2(u,\pi) \leq$$

$$\sum_{j\in\Gamma} |t_{2j+2} - t_{2j-1}| + \frac{1}{\varphi(1)} \sum_{j\notin\Gamma} \varphi\left(\frac{|u[t_{2j+1}, t_{2j+2}] - u[t_{2j-1}, t_{2j}]|}{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|} \right) |t_{2j+2} - t_{2j-1}| \leq$$

$$2(b-a) + \frac{1}{\varphi(1)} \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b]).$$

Al tomar supremo, resulta: $\widehat{V}(u) \leq 2(b-a) + \frac{1}{\varphi(1)} \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u)$.

4. Se imita el proceso de demostración para el caso de la variación $V^R_{(\varphi,2)}$.

5. Como $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b] \subset B\hat{V}_2[a,b] = BV_2[a,b] \subset Lip[a,b]$, se procede igual que en la demostración de 5. del Teorema 3.5.1.

Para demostrar la parte 6., se siguen las ideas desarrolladas en 9. del Teorema 3.2.1.

Para 7. se procede en forma similar a 7. del Teorema 3.5.1 □

Como en el caso de las funciones de $(\varphi,2)$-variación acotada, denotamos por $R\hat{V}_{(\varphi,,2)}[a,b]$ al espacio vectorial generado por $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b]$. Según el Lema 3.2.2

$$R\hat{V}_{(\varphi,2)}[a,b] = \left\{ u \in \mathbb{R}^{[a,b]} : \exists \lambda > 0 \ni \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(\lambda u) < \infty \right\}.$$

En el siguiente teorema se establecen las relaciones entre los dos tipos de $(\varphi,2)$-variaciones que hemos definido.

Teorema 3.5.3. *Sea φ una φ-función convexa, entonces:*

1. Si $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b]) < \infty$, entonces $V^R_{(\varphi,2)}(\frac{u}{3};[a,b]) \leq \frac{2}{3}\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b])$.

2. Si $V^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b]) < \infty$, entonces$\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(\frac{u}{2};[a,b]) \leq V^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b])$.

3. $R\hat{V}_{(\varphi,2)}[a,b] = RV_{(\varphi,2)}[a,b]$.

Demostración. 1. Sean $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, tal que $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u;[a,b]) < \infty$ y $a \leq t_1 < t_2 < t_3 \leq b$. Consideremos números a_1, a_2, b_1, b_2, tales que:

$$t_1 < a_1 < a_2 \leq t_2 < b_1 < b_2 \leq t_3.$$

Utilizando la desigualdad triangular resulta:

$$\frac{|u[t_2,t_3]-u[t_1,t_2]|}{|t_3-t_1|} \leq$$

$$\frac{|u[t_2,t_3]-u[a_1,a_2]|}{|t_3-a_1|}\frac{|t_3-a_1|}{|t_3-t_1|}+\frac{|u[a_1,a_2]-u[b_1,b_2]|}{|b_2-a_1|}\frac{|b_2-a_1|}{|t_3-t_1|}+\frac{|u[b_1,b_2]-u[t_1,t_2]|}{|b_2-t_1|}\frac{|b_2-t_1|}{|t_3-t_1|}.$$

Entonces de la convexidad de φ, tenemos:

$$\varphi\left(\frac{|u[t_2,t_3]-u[t_1,t_2]|}{3\,|t_3-t_1|}\right) \leq$$

$$\frac{1}{3}\left[\varphi\left(\frac{|u[t_2,t_3]-u[a_1,a_2]|}{|t_3-a_1|}\frac{|t_3-a_1|}{|t_3-t_1|}\right)+\varphi\left(\frac{|u[a_1,a_2]-u[b_1,b_2]|}{|b_2-a_1|}\frac{|b_2-a_1|}{|t_3-t_1|}\right)+\right.$$

$$\left.\varphi\left(\frac{|u[b_1,b_2]-u[t_1,t_2]|}{|b_2-t_1|}\frac{|b_2-t_1|}{|t_3-t_1|}\right)\right].$$

Como:

$$\frac{|t_3-a_1|}{|t_3-t_1|}<1, \frac{|b_2-a_1|}{|t_3-t_1|}<1, \frac{|b_2-t_1|}{|t_3-t_1|}<1,$$

se obtiene que:

$$\varphi\left(\frac{|u[t_2,t_3]-u[t_1,t_2]|}{3\,|t_3-t_1|}\right) \leq$$

$$\frac{1}{3}\left[\varphi\left(\frac{|u[t_2,t_3]-u[a_1,a_2]|}{|t_3-a_1|}\right)|t_3-a_1|+\varphi\left(\frac{|u[a_1,a_2]-u[b_1,b_2]|}{|b_2-a_1|}\right)|b_2-a_1|+\right.$$

$$\left.\varphi\left(\frac{|u[b_1,b_2]-u[t_1,t_2]|}{|b_2-t_1|}\right)|b_2-t_1|\right] \leq \frac{1}{3}\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u;[t_1,t_3]).$$

De esta manera tenemos que si $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ es una partición de $[a,b]$ y procedemos de forma similar a la demostración del Teorema 1.3.1

$$\sum_{j=1}^{n-2} \varphi\left(\frac{|u[t_{j+1},t_{j+2}] - u[t_j, t_{j+1}]|}{3\,|t_{j+2} - t_j|}\right)|t_{j+2} - t_j| \leq \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n-2} \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u; [t_j, t_{j+2}]) \leq$$

$$\frac{2}{3}\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u; [a, b]).$$

Así resulta que:

$$V^R_{(\varphi,2)}\left(\frac{u}{3}; [a, b]\right) \leq \frac{2}{3}\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}\,(u; [a, b])\,.$$

Por lo tanto $\hat{RV}_{(\varphi,2)}[a, b] \subset RV_{(\varphi,2)}[a, b]$.

2. Por otra parte supongamos que $V^R_{(\varphi,2)}(u; [a, b]) < \infty$ y consideremos una partición de $[a, b]$,

$$\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_k \leq t_{k+1} < \cdots < t_{2k} \leq t_{2k+1} < \cdots < t_{nk} \leq b.$$

De la desigualdad triangular resulta que para cada $j = 1, \ldots n - 1$,

$$\frac{|u[t_{2j+1}, t_{2j+2}] - u[t_{2j-1}, t_{2j}]|}{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|} \leq$$

$$\frac{|u[t_{2j+1}, t_{2j+2}] - u[t_{2j}, t_{2j+1}]|}{|t_{2j+2} - t_{2j}|}\frac{|t_{2j+2} - t_{2j}|}{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|} + \frac{|u[t_{2j}, t_{2j+1}] - u[t_{2j-1}, t_{2j}]|}{|t_{2j+1} - t_{2j-1}|}\frac{|t_{2j+1} - t_{2j-1}|}{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|}.$$

Usando la convexidad, se obtiene:

$$\varphi\left(\frac{|u[t_{2j+1}, t_{2j+2}] - u[t_{2j-1}, t_{2j}]|}{2\,|t_{2j+2} - t_{2j-1}|}\right)|t_{2j+2} - t_{2j-1}| \leq$$

$$\frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{|u[t_{2j+1}, t_{2j+2}] - u[t_{2j}, t_{2j+1}]|}{|t_{2j+2} - t_{2j}|}\right)|t_{2j+2} - t_{2j}| + \right.$$

$$\left.\varphi\left(\frac{|u[t_{2j}, t_{2j+1}] - u[t_{2j-1}, t_{2j}]|}{|t_{2j+1} - t_{2j-1}|}\right)|t_{2j+1} - t_{2j-1}|\right],$$

$j = 1, \ldots, n - 1$.

Por lo tanto:

$$\widehat{\sigma}^R_{(\varphi,2)}(\frac{u}{2}, \pi) \leq \frac{1}{2} V^R_{(\varphi,2)}[u; [a,b])$$

y así

$$\widehat{V}^R_{(p,2)}(\frac{u}{2}; [a,b]) \leq V^R_{(\varphi,2)}(u; [a,b]).$$

De 1. y 2. se concluye que $RV_{(\varphi,k)}[a,b] = R\hat{V}_{(\varphi,k)}[a,b]$. □

OBSERVACIÓN 3.5.2. Como $RV_{(\varphi,k)}[a,b] = R\hat{V}_{(\varphi,k)}[a,b]$, de ahora en adelante nos referiremos a este espacio utilizando, cualesquiera de estas dos notaciones.

COROLARIO 3.5.2. *Sea φ una φ-función convexa, entonces $R\hat{V}_{(\varphi,2)}[a,b] \subset RV_{(\varphi,1)}[a,b]$.*

3.6. Lema de Riesz para las funciones de $(\varphi, 2)$-variación acotada.

El siguiente lema nos será de utilidad para demostrar una generalización del lema de Riesz y el mismo garantiza que $\hat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b] \subset C^1[a,b]$.

LEMA 3.6.1. (*ver* **[113]**) *Sea φ una φ-función convexa que verifica la condición ∞_1 y $u \in \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b]$, entonces u es derivable y u' es continua en $[a,b]$.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b] \subset B\hat{V}_2[a,b] = BV_2[a,b]$, entonces por la Proposición 1.2.2, la función u se puede escribir como diferencia de funciones convexas y por tanto tiene derivadas laterales crecientes continuas, con $u'_+ > u'_-$; y el conjunto E donde la derivada de u no existe es numerable y u' es continua en $[a,b] - E$ (ver, por ejemplo **[141, 142, 144]**).

Sea $t_0 \in E$ y denotemos por $\alpha_{t_0} = u'_+(t_0) - u'_-(t_0) > 0$. Por definición de derivada laterales, tenemos

$$u'_+(t_0) = \lim_{h \to 0^+} u[t_0, t_0 + h] \quad , \quad u'_-(t_0) = \lim_{h \to 0^+} u[t_0, t_0 - h].$$

De donde resulta:

$$\alpha_{t_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{u[t_0, t_0 + h] - u[t_0, t_0 - h]}{h}.$$

Además de la definición alternativa de $(\varphi, 2)$-variación (Definición 1.2.2), se obtiene:

$$\varphi\left(2\frac{u[t_0, t_0+h] - u[t_0, t_0-h]}{h}\right) h \leq \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u).$$

Pero como φ cumple la condición ∞_1

$$\lim_{h\to 0^+} \varphi\left(2\frac{u[t_0, t_0+h] - u[t_0, t_0-h]}{h}\right) h = \infty,$$

lo que es contradictorio, pues $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u) < \infty$. De esta manera $E = \phi$ y u es derivable en $[a, b]$ y su derivada es continua. $\square$

Ahora demostramos una generalización del Lema de Riesz para la clase $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a, b]$.

Teorema 3.6.1. (*Generalización del Lema de Riesz para las funciones de* $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a, b]$) *Sea φ una φ-función convexa que verifica la condición ∞_1. $u \in \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a, b]$ si sólo si $u' \in AC[a, b]$ y $u'' \in L_\varphi[a, b]$ y ademas:*

$$V^R_{(\varphi,2)}(u; [a, b]) = \int_a^b \varphi\left(|u''(t)|\right) dt.$$

Demostración. Sean $u \in \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a, b]$ y $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ una partición de $[a, b]$. Escojamos puntos $s_1, \ldots, s_{2n}$ de $[a, b]$, tales que:

$$t_1 = s_1 < s_2 < t_2 = s_3 < \cdots < t_{n-1} = s_{2n-3} < s_{2n-2} < s_{2n-1} < s_{2n} = t_n.$$

Por el lema anterior u es derivable y $u' \in C^1[a, b]$. Aplicando el teorema del valor medio, podemos hallar

$$\xi_j \in \left(s_{2j-1}, s_{2j}\right), \quad j = 1, \ldots, n,$$

tales que $u'(\xi_j) = u[s_{2j-1}, s_{2j}], j = 1, \ldots, n$.

Además

$$\sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{|u'(\xi_{j+1}) - u'(\xi_j)|}{|s_{2j+2} - s_{2j}|}\right) |s_{2j+2} - s_{2j}| =$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{|u[s_{2j+1}, s_{2j+2}] - u[s_{2j-1}, s_{2j}]|}{|s_{2j+2} - s_{2j}|}\right) |s_{2j+2} - s_{2j}| \leq \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a, b].$$

Tomando límite cuando $s_{2j} \to s_{2j-1} = t_j, j = 1, \ldots, n-1$ y $s_{2n-1} \to s_{2n} = t_n$, se obtiene que $\xi_j \to t_j, j = 1, \ldots, n$. Y como $u' \in C[a, b]$, se concluye:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{|u'(t_{j+1}) - u'(t_j)|}{|t_{j+1} - t_j|}\right) |t_{j+1} - t_j|$$
$$\lim_{s_{2n-1}\to s_{2n}} \lim_{\substack{s_{2j}\to s_{2j-1}\\ j=1,\ldots,n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{|u'(\xi_{j+1}) - u'(\xi_j)|}{|s_{2j+2} - s_{2j}|}\right) |s_{2j+2} - s_{2j}| \leq \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u; [a, b]).$$

De esta forma resulta que $u' \in V^R_{(\varphi,1)}[a, b]$. Y del lema de Riesz para la clase $V^R_{(\varphi,1)}[a, b]$ (Teorema 3.4.1), tenemos que $u' \in AC[a, b]$, $u'' \in L_\varphi[a, b]$ y

$$\int_a^b \varphi\left(|u''(t)|\right) dt \leq \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}(u; [a, b]).$$

Recíprocamente, supongamos que $u' \in AC[a, b]$, $u'' \in L_\varphi[a, b]$ y sea

$$\pi : a \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4 \leq t_5 < \cdots < t_{2n} \leq b,$$

un elemento de $\Pi^b_{a,2}$. Por el teorema del valor medio, existen $\xi_j \in (t_{2j-1}, t_{2j})$, $j = 1, \ldots n$, tales que $u'(\xi_j) = u[t_{2j-1}, t_{2j}]$, $j = 1, \ldots, n$. Por tanto:

$$\varphi\left(\frac{|u[t_{2j+1}, t_{2j+2}] - u[t_{2j-1}, t_{2j}]|}{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|}\right) |t_{2j+2} - t_{2j-1}| =$$

$$\int_{t_{2j-1}}^{t_{2j+2}} \varphi\left(\frac{|u'(\xi_{j+1}) - u'(\xi_j)|}{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|}\right) d\xi \leq \int_{t_{2j-1}}^{t_{2j+2}} \varphi\left(\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{|u''(t)|}{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|} dt\right) d\xi \leq$$

$$\int_{t_{2j-1}}^{t_{2j+2}} \varphi\left(\int_{t_{2j-1}}^{t_{2j+2}} \frac{|u''(t)|}{|t_{2j+2} - t_{2j-1}|} dt\right) d\xi.$$

Usando la desigualdad de Jensen:

$$\int_{t_{2j-1}}^{t_{2j+2}} \varphi\left(\int_{t_{2j-1}}^{t_{2j+2}} \frac{|u''(t)|}{|t_{2j+2}-t_{2j-1}|}dt\right) d\xi \leq \int_{t_{2j-1}}^{t_{2j+2}} \frac{1}{|t_{2j+2}-t_{2j-1}|} \int \varphi\left(|u''(t)|\right) dt.$$

Como

$$\int_{t_{2j-1}}^{t_{2j+2}} \frac{1}{|t_{2j+2}-t_{2j-1}|} \int_{t_{2j-1}}^{t_{2j+2}} \varphi\left(|u''(t)|\right) dt = \int_{t_{2j-1}}^{t_{2j+2}} \varphi\left(|u''(t)|\right) dt,$$

concluimos que:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{|u[t_{2j+1},t_{2j+2}]-u[t_{2j-1},t_{2j}]|}{|t_{2j+2}-t_{2j-1}|}\right)|t_{2j+2}-t_{2j-1}| \leq \int_a^b \varphi\left(|u''(t)|\right) dt.$$

De esta manera, $u \in \widehat{V}^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ y

$$\widehat{V}^R_{(\varphi,1)}(u;[a,b]) \leq \int_a^b \varphi\left(|u''(t)|\right) dt.$$

$\square$

Observación 3.6.1. En **[113]** se presenta una demostración errónea de la parte recíproca de este teorema. Sin embargo, la conclusión es cierta como acabamos de demostrar.

3.7. Consecuencias del Lema de Riesz en $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b]$.

Esta sección la hemos dividido en varias subsecciones; cada una de ellas dedicadas a mostrar algunos resultados que se derivan de la generalización del lema de Riesz para las funciones de $(\varphi,2)$-variación acotada.

3.7.1. El álgebra $R\hat{V}_{(\varphi,2)}[a,b]$. El primer resultado se deduce inmediatamente del Teorema 3.6.1

Corolario 3.7.1. *Sea φ una φ-función que verifica la condición ∞_1, entonces:*

1. $u \in \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b]$ si y sólo si $u' \in \widehat{V}^R_{(\varphi,1)}[a,b]$.

2. $u \in R\hat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b]$ si y sólo si $u' \in RV_{(\varphi,1)}[a,b]$.

Otro corolario que se deriva del Teorema 3.6.1 es el siguiente.

Corolario 3.7.2. *Sea φ una φ-función que verifica la condición ∞_1, entonces $R\hat{V}_{(\varphi,2)}[a,b]$ es un álgebra, con el producto usual de funciones.*

Demostración. Sean $u,v \in R\hat{V}_{(\varphi,2)}[a,b]$, entonces existen números positivos, λ, β, tales que

$$\hat{V}^R_{(\varphi,2)}(\lambda u) < \infty \quad y \quad \hat{V}^R_{(\varphi,2)}(\beta v) < \infty.$$

De esta manera, por el Teorema 3.6.1, se tiene que $\lambda u'$, $\beta v' \in V_{(\varphi,1)}[a,b]$. Como

$$R\hat{V}_{(\varphi,2)}[a,b] \subset R\hat{V}_{(\varphi,1)}[a,b]$$

(Corolario 3.5.2), u , $v \in RV_{(\varphi,1)}$. Entonces $u, v, u', v' \in RV_{(\varphi,1)}[a,b]$. Siendo éste último espacio un álgebra resulta que

$$(uv)' = u'v + v'u \in RV_{(\varphi,1)}[a,b].$$

Es decir, existe $\eta > 0$, tal que $\eta(uv)' \in V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ y así $uv \in RV_{(\varphi,2)}[a,b]$. □

3.7.2. Sobre las clases $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b]$ y los espacios $R\hat{V}_{(\varphi,2)}[a,b]$. Los siguientes dos corolarios son adaptaciones de los teorema 3.8 y y 3.9 de **[95]**. En el primero de ellos, damos condiciones necesarias y suficientes sobre dos φ-funciones φ_1 y φ_1 para que $\widehat{V}^R_{(\varphi_1,2)}[a,b] \subset \widehat{V}^R_{(\varphi_2,2)}[a,b]$.

Corolario 3.7.3. *Sean φ_1, φ_2 φ-funciones convexas que verifican la condición ∞_1, entonces $\widehat{V}^R_{(\varphi_1,2)}[a,b] \subset \widehat{V}^R_{(\varphi_2,2)}[a,b]$ si y sólo si $\lim\limits_{t\to\infty} sup \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} < \infty$.*

Demostración. Supongamos que $\widehat{V}^R_{(\varphi_1,2)}[a,b] \subset \widehat{V}^R_{(\varphi_2,2)}[a,b]$ y demostremos que se cumple la inclusión $\widehat{V}^R_{(\varphi_1,1)}[a,b] \subset \widehat{V}^R_{(\varphi_2,1)}[a,b]$ (ver Teorema 3.2.2). Sea $u \in \widehat{V}^R_{(\varphi_1,1)}[a,b]$, entonces por las generalizaciones del lema de Riesz para las clases $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ y $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b]$ (Teoremas 3.4.1 y 3.6.1), la función $w : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por

$$w(t) := \int_a^t u(s)ds, \quad t \in [a,b]$$

está en $\widehat{V}^R_{(\varphi_1,2)}[a,b]$. Entonces aplicando nuevamente los Teoremas 3.4.1 y 3.6.1, se obtiene que $w' = u \in V^R_{(\varphi_1,1)}[a,b]$. De esta manera concluimos que $\widehat{V}^R_{(\varphi_1,1)}[a,b] \subset \widehat{V}^R_{(\varphi_2,1)}[a,b]$. Usando la Proposición 3.2.2 se obtiene la tesis.

Recíprocamente, asumamos que $\lim\sup_{t\to\infty}\frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}$, entonces existen números $\eta > 0$, $t_0 > 0$ tales que $\varphi_2(t) \leq \eta\varphi_1(t), t \geq t_0$, entonces del Teorema 8.1 de **[92]** $L_{\varphi_1}[a,b] \subset L_{\varphi_2}[a,b]$.

Sea $u \in \widehat{V}^R_{(\varphi_1,2)}[a,b]$. Del Teorema 3.6.1, $u' \in AC[a,b]$ y $u'' \in L_{\varphi_1}[a,b]$ y por tanto $u' \in AC[a,b]$ y $u'' \in L_{\varphi_2}[a,b]$. Aplicando nuevamente el Teorema 3.6.1 se tiene que $u \in \widehat{V}^R_{(\varphi_2,2)}[a,b]$. □

A continuación exponemos, condiciones necesarias y suficientes sobre una φ-función φ para que la clase $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b]$ sea un espacio vectorial.

Corolario 3.7.4. *Sea φ una φ-función convexa que verifica la condición ∞_1, entonces $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b]$ es un espacio vectorial si y sólo si φ cumple la condición $\triangle_2(\infty)$.*

Demostración. Si $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b]$ es un espacio vectorial, entonces si consideramos la φ-función φ_1, definida por $\varphi_1(t) = \varphi(2t)$, $t \geq 0$. Entonces de la definición alternativa de $(\varphi,2)$-variación (Definición 3.5.2) se concluye que $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b] \subset \widehat{V}^R_{(\varphi_1,2)}[a,b]$; y por el corolario anterior $\lim\sup_{t\to\infty}\frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}$ es finito y por tanto existen números positivos t_0 y η tales que $\varphi(2t) \leq \eta\varphi(t), t \geq t_0$. Es decir φ cumple la condición $\triangle_2(\infty)$ (Definición 3.1.2).

Por otra parte, supongamos que existan números positivos t_0 y η tales que $\varphi(2t) \leq \eta\varphi(t), t \geq t_0$, entonces por el teorema 8.2 de **[92]** $L_\varphi[a,b]$ es un espacio vectorial. Veamos que $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b]$ también lo es. Sean $u,v \in \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b]$, entonces por el Teorema 3.6.1

$$u',v' \in AC[a,b] \quad y \quad u'',v'' \in L_\varphi[a,b].$$

Como $AC[a,b]$ y $L_\varphi[a,b]$ son espacios vectoriales $\alpha u' + \beta v' \in AC[a,b]$ y $\alpha u'' + \beta v'' \in L_\varphi[a,b], \alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Aplicando nuevamente el Teorema 3.6.1, tenemos que $\alpha u + \beta v \in \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b], \alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Lo que garantiza que $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b]$ es un espacio vectorial. □

Como último resultado de esta parte, presentamos condiciones necesarias y suficientes sobre dos φ-funciones φ_1 y φ_1 para que $R\hat{V}_{(\varphi_1,2)}[a,b] \subset R\hat{V}_{(\varphi_2,2)}[a,b]$.

Corolario 3.7.5. *Sean φ_1 y φ_2 φ-funciones convexas que verifican la condición ∞_1, entonces $R\hat{V}_{(\varphi_1,2)}[a,b] \subset R\hat{V}_{(\varphi_2,2)}[a,b]$ si y sólo si $\varphi_2 \prec \varphi_1$.*

Demostración. De acuerdo a la Proposición 3.2.2 basta demostrar que la hipótesis $R\hat{V}_{(\varphi_1,2)}[a,b] \subset R\hat{V}_{(\varphi_2,2)}[a,b]$ es equivalente a $RV_{(\varphi_1,1)}[a,b] \subset RV_{(\varphi_2,1)}[a,b]$.

Asumamos que $\hat{RV}_{(\varphi_1,2)}[a,b] \subset \hat{RV}_{(\varphi_2,2)}[a,b]$ y sea $u \in RV_{(\varphi_1,1)}[a,b]$. De la definición del espacio $RV_{(\varphi_1,1)}[a,b]$ y por el lema de Riesz (Teorema 3.4.1), existe $\lambda > 0$, tal que $u \in AC[a,b]$ y $\lambda u' \in L_{\varphi_1}[a,b]$, entonces, considerando la integral indefinida de u; la función:

$$w(t) := \int_a^t u(s)ds, \quad t \in [a,b],$$

está en $\hat{RV}_{(\varphi_1,2)}[a,b]$; y por hipótesis, también está en $\hat{RV}_{(\varphi_2,2)}[a,b]$. Usando el Teorema 3.6.1 resulta que existe $\lambda > 0$, tal que $u \in AC[a,b]$ y $\lambda u' \in L_{\varphi_2}[a,b]$. De donde concluimos que $RV_{(\varphi_1,1)}[a,b] \subset RV_{(\varphi_2,1)}[a,b]$.

Recíprocamente, asumamos que $RV_{(\varphi_1,1)}[a,b] \subset RV_{(\varphi_2,2)}[a,b]$ y sea $u \in \hat{RV}_{(\varphi_1,2)}[a,b]$. Por el Teorema 3.6.1 existe $\lambda > 0$, tal que $u' \in AC[a,b]$ y $\lambda u'' \in L_{\varphi_2}[a,b]$. De esta manera tenemos que $u' \in RV_{(\varphi_1,1)}[a,b]$ y por tanto $u' \in RV_{(\varphi_1,1)}[a,b]$. Entonces, por el Teorema 3.4.1, existe $\lambda > 0$, tal que $u' \in AC[a,b]$ y $\lambda u'' \in L_{\varphi_2}[a,b]$. En consecuencia $\hat{RV}_{(\varphi_1,2)}[a,b] \subset \hat{RV}_{(\varphi_2,2)}[a,b]$. $\square$

3.7.3. El espacio de Banach $RV_{(\varphi,2)}[a,b]$. Otra consecuencia inmediata, de la generalización del lema de Riesz para las funciones con $(\varphi,2)$-variación acotada, es el dotar a el espacio $RV_{(\varphi,2)}[a,b]$ de una norma. En este espacio se define $\|\cdot\|^R_{(\varphi,2)} : RV_{(\varphi,2)}[a,b] \to [0,\infty)$, por:

$$\|u\|^R_{(\varphi,2)} := |u(a)| + \|u'\|^R_{(\varphi,1)}, \quad u \in RV_{(\varphi,2)}[a,b]$$

o equivalentemente

$$\|u\|^R_{(\varphi,2)} = |u(a)| + |u'(a)| + inf\left\{\lambda > 0 : \int_a^b \varphi\left(\frac{|u''(t)|}{\lambda}\right) < 1\right\}, \quad u \in RV_{(\varphi,2)}[a,b].$$

Corolario 3.7.6. *Sea φ una φ-función que verifica la condición ∞_1, entonces*

$$\left(RV_{(\varphi,2)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(\varphi,2)}\right)$$

es un espacio normado.

A continuación demostramos que el espacio $RV_{(\varphi,2)}[a,b]$ con la norma $\|\cdot\|^R_{(\varphi,2)}$ es un espacio de Banach.

COROLARIO 3.7.7. *Sea φ una φ-función que verifica la condición ∞_1, entonces*

$$\left(RV_{(\varphi,2)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(\varphi,2)}\right)$$

es un espacio de Banach.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\left(RV_{(\varphi,2)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(\varphi,2)}\right)$, entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$, tal que

$$|u_n(a) - u_m(a)| + \|u'_n - u'_m\|^R_{(\varphi,1)} < \varepsilon, \quad n, m \geq N.$$

De esta manera $\{u_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ es un sucesión de Cauchy de números reales y $\{u'_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\left(RV_{(\varphi,1)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(\varphi,1)}\right)$. Por completitud de $\mathbb{R}$ y del espacio $\left(RV_{(\varphi,1)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(\varphi,1)}\right)$, existen un número real u^* y una función $u \in RV_{(\varphi,1)}[a,b]$, tales que:

$$u_n(a) \to u^* \quad y \quad \{u'_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{\|\cdot\|^R_{(\varphi,1)}} v.$$

Definamos $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, como:

$$u(t) := u^* + \int_a^t v(s)ds, \quad t \in [a,b].$$

Entonces, por construcción de u, se tiene:

$$\|u_n - u\|^R_{(\varphi,2)} = |u_n(a) - u^*| + \|u'_n - v\|^R_{(\varphi,1)}, \quad n \geq 1.$$

Y por tanto $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{\|\cdot\|^R_{(\varphi,2)}} u.$ □

3.8. Funciones de (φ, k)-variación acotada.

Esta sección la dedicamos a generalizar las nociones de $(\varphi, 1)$, $(\varphi, 2)$ y (p, k) variación y algunas de sus propiedades. Todos los resultados aquí expuestos son originales (ver **[95]**) y están en proceso de arbitraje.

Definición 3.8.1. Sean $k \geq 1$, un número entero, φ una φ-función y $u : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dada una partición $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ del intervalo $[a, b]$, con al menos $k+1$ puntos; definimos:

$$\sigma^R_{(\varphi,k)}(u, \pi) := \sum_{j=1}^{n-k} \varphi \left(\frac{|u[t_{j+1}, \ldots, t_{j+k}] - u[t_j, \ldots, t_{j+k-1}]|}{|t_{j+k} - t_j|} \right) |t_{j+k} - t_j| \,. \tag{3.8.1}$$

y

$$V^R_{(\varphi,k)}(u; [a, b]) = V^R_{(\varphi,k)}(u) := \sup_{\pi} \sigma^R_{(\varphi,k)}(u, \pi),$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones π del intervalo $[a, b]$, con al menos $k+1$ puntos. Si $V^R_{(\varphi,k)}(u; [a, b]) < \infty$ diremos que la función *u tiene (φ, k)-variación acotada o finita en el intervalo* $[a, b]$ y la clase de tales funciones la denotamos por ${V^R}_{(\varphi,k)}[a, b]$.

Observación 3.8.1. Si $k = 1$, ésta definición es el clásico concepto de φ-variación en el sentido de Riesz, considerada por Yu. T. Medved'ed en 1953 en [**112**]. Si $k = 2$, esta noción es el concepto de $(\varphi, 2)$-variación tratada por N. Merentes en [**113**].

Observación 3.8.2. Usando propiedades de las diferencias divididas (ver proposición 1.3.1), podemos reescribir la suma (3.8.1), como:

$$\sum_{j=1}^{n-k} \varphi\left(|u[t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+k}]|\right) |t_{j+k} - t_j| \,.$$

Observación 3.8.3. Por otra parte, siguiendo las ideas desarrolladas en la observación 2.3.3 para el caso de (p, k)-variación, resulta que si $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a$ entonces:

$$\sigma^R_{(\varphi,k)}(p) = \begin{cases} 0, & n < k \\ \varphi\left(|a_k|\right)\, k\,(b-a), & n = k. \end{cases}$$

En el siguiente teorema exponemos algunas propiedades de la clase $V^R_{(\varphi,k)}[a, b]$.

Teorema 3.8.1. *Sean $k > 0$ un número entero y φ una φ- función, entonces:*

1. Si $[s, t] \subset [a, b]$, entonces $V^R_{(\varphi,k)}(u; [s, t]) \leq V^R_{(\varphi,k)}(u; [a, b])$.

2. Si $t \in [a,b]$, *entonces* $V^R_{(\varphi,k)}(u;[a,b]) \geq V^R_{(\varphi,k)}(u;[a,t]) + V^R_{(\varphi,k)}(u;[t,b])$.

3. Si φ *es convexa,* $V^R_{(\varphi,k)}[a,b] \subset BV_k[a,b]$ *y*

$$V_k(u;[a,b]) \leq k(b-a) + \frac{1}{\varphi(1)} V^R_{(\varphi,k)}(u;[a,b]), \quad u \in V^R_{(\varphi,k)}[a,b].$$

4. $V^R_{(\varphi,k)}[a,b] = BV_k[a,b]$ *si* φ *no cumple la condición* ∞_1.

5. $V^R_{(\varphi,k+1)}[a,b] \subset V^R_{(\varphi,k)}[a,b]$.

6. $V^R_{(\varphi,k)}[a,b]$ *es un conjunto simétrico y convexo.*

7. φ *es convexa si y sólo si la función* $V^R_{(\varphi,k)} : V^R_{(\varphi,k)}[a,b] \to [0,\infty)$, *definida por:*

$$V^R_{(\varphi,k)}(u) = V^R_{(\varphi,k)}(u;[a,b]), \quad u \in V^R_{(\varphi,k)}[a,b]$$

es convexa.

Demostración. Sólo demostraremos la parte 5. Para las demás se procede de manera similar a la demostración del teorema 3.5.1.

Sea $u \in V^R_{(\varphi,k+1)}[a,b]$. De la parte 3. tenemos que $V^R_{(\varphi,k+1)}[a,b] \subset BV_{k+1}[a,b]$, entonces por el Teorema 1.3.2 las diferencias divididas $|u[t_1,\ldots,t_{k+1}]|, t_1,\ldots,t_{k+1} \in [a,b]$ son acotadas. Denotemos por M una cota superior y sea $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ una partición del intervalo $[a,b]$, con al menos $k+1$ puntos, entonces:

$$\sigma^R_{(\varphi,k)}(u,\pi) \leq \varphi(M) \sum_{j=1}^{n-k} |t_{j+k} - t_j| \leq \varphi(M)k(b-a).$$

De aquí se infiere que $V^R_{(\varphi,k+1)}[a,b] \subset V^R_{(\varphi,k)}[a,b]$. □

De forma similar al caso de las funciones de $(\varphi,1)$ o $(\varphi,2)$ variación acotada, denotamos por $RV_{(\varphi,k)}[a,b]$ al espacio vectorial generado por $V^R_{(\varphi,k)}[a,b]$. Según el Lema 3.2.2

$$RV_{(\varphi,k)}[a,b] = \left\{ u \in \mathbb{R}^{[a,b]} : \exists \lambda > 0 \ni V^R_{(\varphi,k)}(\lambda u;[a,b]) < \infty \right\}.$$

De la parte 5. del Teorema 3.8.1 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.8.1. *Sean $k > 0$ un número entero y φ una φ-función, entonces:*

$$RV_{(\varphi,k+1)}[a,b] \subset RV_{(\varphi,k)}[a,b].$$

A continuación procedemos a dar una definición alternativa de (φ, k)-variación.

Definición 3.8.2. (*(φ,k)-variación de Riesz. Definición Alternativa*). Sean $k > 0$ un número entero, φ una φ-función, $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\pi \in \Pi^b_{a,k}$ una partición del intervalo $[a, b]$ del tipo

$$\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_k \leq t_{k+1} < \cdots < t_{2k} \leq t_{2k+1} < \cdots < t_{kn} \leq b.$$

Definimos:

$$\hat{\sigma}^R_{(\varphi,k)}(u, \pi) :=$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{\left|u[t_{jk+1}, \ldots, t_{(j+1)k}] - u[t_{(j-1)k+1}, \ldots, t_{jk}]\right|}{\left|t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1}\right|}\right)\left|t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1}\right|$$

$$y$$

$$\hat{V}^R_{(\varphi,k)}(u; [a, b]) = \hat{V}^R_{(\varphi,k)}(u) := \underset{\pi \in \Pi^b_{a,k}}{sup}\ \hat{\sigma}^R_{(\varphi,k)}(u, \pi).$$

La clase de las funciones $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, tales que $\hat{V}^R_{(\varphi,k)}(u; [a, b]) < \infty$, la denotamos por $\hat{V}^R_{(\varphi,k)}[a, b]$.

Ejemplo 3.8.1. De las propiedades de diferencias divididas (Proposición 1.3.1) se tiene que si u es un polinomio de grado menor o igual a $k - 1$, entonces $\hat{\sigma}^R_{(\varphi,k)}(u, \pi) = 0, \pi \in \Pi^b_{a,k}$ y así $\hat{V}^R_{(\varphi,k)}(u; [a, b]) = 0$ en cualquier intervalo $[a, b]$.

Lema 3.8.1. *Sea $v : [a, b] \to \mathbb{R}$ y consideremos la función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por $u(t) := tv(t), t \in [a, b]$. Entonces:*

$$u[t_1, \ldots, t_n] = t_n v[t_1, \ldots, t_n] + v[t_1, \ldots, t_{n-1}], \quad a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b.$$

En particular, si k es un entero positivo y $v(t) = \alpha t^{k-1}$ y $u(t) = \alpha t^k$, entonces:

$$u[t_1, \ldots, t_k] = \alpha(t_k + \cdots t_1), \quad a \leq t_1 < \cdots < t_k \leq b.$$

Demostración. Procedamos inductivamente. Para $n = 1$ el resultado es obvio. Para $n = 2$,

$$u[t_1, t_2] = \frac{t_2 v(t_2) - t_1 v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{t_2(v(t_2) - v(t_1))}{t_2 - t_1} + v(t_1) =$$

$$t_2 v[t_1, t_2] + v(t_1), \quad a \leq t_1 < t_2 \leq b.$$

Supongamos que la conclusión es cierta para algún valor de $n \geq 2$. Entonces

$$u[t_1, \ldots, t_{n+1}] = \frac{u[t_2, \ldots, t_{n+1}] - u[t_1, \ldots, t_n]}{t_{n+1} - t_1} =$$

$$\frac{t_{n+1} v[t_2, \ldots, t_{n+1}] + v[t_2, \ldots, t_n] - t_n v[t_1, \ldots, t_n] - v[t_1, \ldots, t_{n-1}]}{t_{n+1} - t_1} =$$

$$\frac{t_{n+1} \left(v[t_2, \ldots, t_{n+1}] - v[t_1, \ldots, t_n]\right) + v[t_1, \ldots, t_n](t_n - t_1) + (t_{n+1} - t_n) v[t_1, \ldots, t_n]}{t_{n+1} - t_1} =$$

$$t_{n+1} v[t, \ldots, t_{n+1}] + v[t_1, \ldots, t_n].$$

La otra parte es consecuencia directa del resultado que acabamos de demostrar. □

Ejemplo 3.8.2. Si k es un entero positivo y consideramos la función $u(t) = \alpha t^k, t \in [a, b]$ y la partición $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_k \leq t_{k+1} < \cdots < t_{2k} \leq t_{2k+1} < \cdots < t_{kn} \leq b$ de $[a, b]$, entonces del lema anterior, resulta:

$$\widehat{\sigma}^R_{(\varphi,k)}(u, \pi) =$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \varphi \left(\frac{\left|\alpha \left(t_{jk+1} + \cdots + t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1} - \cdots - t_{jk}\right)\right|}{\left|t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1}\right|} \right) \left|t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1}\right|.$$

El mayor valor de la suma anterior se toma cuando $t_{jk+1} \uparrow t_{(j+1)k}$ y $t_{jk} \downarrow t_{(j-1)k+1}$, $j = 1, \ldots, n-1$ igual a $\varphi(k\,|\alpha|)(b-a)$. Es decir,

$$\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}(\alpha t^k; [a,b]) = \varphi(k\,|\alpha|)(b-a).$$

En el siguiente teorema presentamos en 1. la relación que existe entre la variación $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}$ de una función en un intervalo y subintervalos.

TEOREMA 3.8.2. *Sea φ una φ- función, entonces:*

1. Si $[s,t] \subset [a,b]$, entonces $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}(u;[s,t]) \leq \widehat{V}^R_{(\varphi,k)}(u;[a,b])$.

2. Si $t \in [a,b]$, entonces $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}(u;[a,b]) \geq \widehat{V}^R_{(\varphi,k)}(u;[a,t]) + \widehat{V}^R_{(\varphi,k)}(u;[t,b])$.

3. Si φ es convexa, $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b] \subset B\hat{V}_k[a,b]$ y

$$\widehat{V}_k(u;[a,b]) \leq 2(b-a) + \frac{1}{\varphi(1)}\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}(u;[a,b]), \quad u \in \widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b].$$

4. $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b] = B\hat{V}_k[a,b]$ si φ no cumple la condición ∞_1.

5. $\hat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$ es un conjunto simétrico y convexo.

6. φ es convexa si y sólo si la función $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)} : \widehat{V}^R_{(\varphi,2)}[a,b] \to [0,\infty)$ que asocia a cada función $u \in \widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$ su (φ,k)-variación alternativa es convexa.

DEMOSTRACIÓN. 1. es consecuencia de la definición de $(\varphi,2)$-variación.

La parte 2. se desprende de la definición alternativa de $(\varphi,2)$-variación.

Para 3., se procede de forma similar a 3. de la Proposiciøn 3.5.2.

Para concluir 4., se imita el proceso de demostración para el caso de la variación $\widehat{V}^R_{(\varphi,2)}$ (Teorema 3.5.2)

Para 5. se procede como 6. del teorema 3.5.1

6. Se realiza de manera análoga a 7. del teorema 3.5.1, tomando $u(t) = pt^k$ y $v(t) = qt^k$ y usando resultado de ejemplo 3.8.2. □

Dados un número entero positivo k y una φ-función φ, denotamos por $R\hat{V}_{(\varphi,k)}[a,b]$ al espacio vectorial generado por la clase $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$. Según el Lema 3.2.2

$$\hat{RV}_{(\varphi,k)}[a,b] = \left\{ u \in \mathbb{R}^{[a,b]} : \exists \lambda > 0 \ni \widehat{V}^R_{(\varphi,k)}(\lambda u; [a,b]) < \infty \right\}.$$

En el siguiente teorema demostramos las relaciones entre las variaciones $V^R_{(\varphi,k)}$ y $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}$ que nos permiten afirmar que $\hat{RV}_{(\varphi,k)}[a,b] = RV_{(\varphi,k)}[a,b]$.

TEOREMA 3.8.3. (*ver* **[95]**) *Sean $k > 0$ un número entero y φ una φ-función convexa, entonces:*

1. Si $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}(u; [a,b]) < \infty$, entonces $V^R_{(\varphi,k)}(\frac{u}{3}; [a,b]) \leq \frac{k}{3}\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}(u; [a,b])$.

2. Si $V^R_{(\varphi,k)}(u; [a,b]) < \infty$, entonces $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}(\frac{u}{k}; [a,b]) \leq V^R_{(\varphi,k)}(u; [a,b])$.

3. $\hat{RV}_{(\varphi,k)}[a,b] = RV_{(\varphi,k)}[a,b]$.

DEMOSTRACIÓN. 1. Sea $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, tal que $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}(u; [a,b]) < \infty$ y $a \leq t_1 < \cdots < t_{k+1} \leq b$. Consideremos números $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ tales que:

$$t_1 < a_1 < \cdots < a_n \leq t_2 \quad y \quad t_k < b_1 < \cdots < b_n \leq t_{k+1}.$$

Utilizando la desigualdad triangular resulta:

$$\frac{|u[t_2, \ldots, t_{k+1}] - u[t_1, \ldots, t_k]|}{|t_{k+1} - t_1|} \leq$$

$$\frac{|u[t_2, \ldots, t_{k+1}] - u[a_1, \ldots, a_k]|}{|t_{k+1} - a_1|} \frac{|t_{k+1} - a_1|}{|t_{k+1} - t_1|} + \frac{|u[a_1, \ldots, a_k] - u[b_1, \ldots, b_k]|}{|b_k - a_1|} \frac{|b_k - a_1|}{|t_{k+1} - t_1|} +$$

$$\frac{|u[b_1, \ldots, b_k] - u[t_1, \ldots t_k]|}{|b_k - t_1|} \frac{|b_k - t_1|}{|t_{k+1} - t_1|}.$$

Entonces de la convexidad de φ, tenemos:

$$\varphi\left(\frac{|u[t_2, \ldots, t_{k+1}] - u[t_1, \ldots, t_k]|}{3\,|t_{k+1} - t_1|}\right) |t_{k+1} - t_1| \leq$$

$$\frac{1}{3}\left[\varphi\left(\frac{|u[t_2, \ldots, t_{k+1}] - u[a_1, \ldots, a_k]|}{|t_{k+1} - a_1|}\right) |t_{k+1} - a_1| +\right.$$

$$\varphi\left(\frac{|u[a_1, \ldots, a_k] - u[b_1, \ldots, b_k]|}{|b_k - a_1|}\right) |b_k - a_1|$$

$$\varphi\left(\frac{|u[b_1,\ldots,b_k]-u[t_1,\ldots t_k]|}{|b_k-t_1|}\right)|b_k-t_1|\Big] \leq$$

$$\frac{1}{3}\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}(u;[t_1,t_k]).$$

De esta manera tenemos que si $\pi: a\leq t_1<\cdots<t_n\leq b$ es una partición de $[a,b]$ y procedemos de forma similar a la demostración del Teorema 1.3.1

$$\sum_{j=1}^{n-k}\varphi\left(\frac{|u[t_{j+1,\ldots,}t_{j+k}]-u[t_j,\ldots,t_{j+k-1}]|}{3\,|t_{j+k}-t_j|}\right)|t_{j+k}-t_j|\leq\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n-k}\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}(u;[t_j,t_{j+k}])\leq$$

$$\frac{k}{3}\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}(u;[a,b]).$$

Así resulta que:

$$V^R_{(\varphi,k)}(\frac{u}{3};[a,b])\leq\frac{k}{3}\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}\left(u;[a,b]\right).$$

Por lo tanto $\hat{RV}_{(\varphi,k)}[a,b]\subset RV_{(\varphi,k)}[a,b]$.

2. Por otra parte supongamos que $V^R_{(\varphi,k)}(u;[a,b])<\infty$ y consideremos una partición

$$\pi: a\leq t_1<\cdots<t_k\leq t_{k+1}<\cdots<t_{2k}\leq t_{2k+1}<\cdots<t_{nk}\leq b.$$

De la desigualdad triangular resulta que para cada $j=1,\ldots n-1$,

$$\frac{\left|u[t_{jk+1},\ldots,t_{(j+1)k}]-u[t_{(j-1)k+1},\ldots,t_{jk}]\right|}{\left|t_{(j+1)k}-t_{(j-1)k+1}\right|}\leq$$

$$\frac{\left|u[t_{jk+1},\ldots,t_{(j+1)k}]-u[t_{jk},\ldots,t_{jk+k-1}]\right|}{\left|t_{(j+1)k}-t_{jk}\right|}\frac{\left|t_{(j+1)k}-t_{jk}\right|}{\left|t_{(j+1)k}-t_{(j-1)k+1}\right|}+$$

$$\frac{|u[t_{jk},\ldots,t_{jk+k-1}]-u[t_{jk-1},\ldots,t_{jk+k-2}]|}{\left|t_{(j+1)k-1}-t_{jk-1}\right|}\frac{\left|t_{(j+1)k-1}-t_{jk-1}\right|}{\left|t_{(j+1)k}-t_{(j-1)k+1}\right|}+\ldots+$$

$$\ldots+\frac{\left|u[t_{(j-1)k+2},\ldots,t_{jk,}t_{jk+1}]-u[t_{(j-1)k+1},\ldots,t_{jk}]\right|}{\left|t_{jk+1}-t_{(j-1)k+1}\right|}\frac{\left|t_{jk+1}-t_{(j-1)k+1}\right|}{\left|t_{(j+1)k}-t_{(j-1)k+1}\right|}.$$

Utilizndo la convexidad de la función φ, se obtiene:

$$\varphi\left(\frac{\left|u[t_{jk+1},\ldots,t_{(j+1)k}]-u[t_{(j-1)k+1},\ldots,t_{jk}]\right|}{k\left|t_{(j+1)k}-t_{(j-1)k+1}\right|}\right)\left|t_{(j+1)k}-t_{(j-1)k+1}\right| \leq$$

$$\frac{1}{k}\left[\varphi\left(\frac{|u[t_{jk},\ldots,t_{jk+k-1}]-u[t_{jk-1},\ldots,t_{jk+k-2}]|}{\left|t_{(j+1)k-1}-t_{jk-1}\right|}\right)\left|t_{(j+1)k-1}-t_{jk-1}\right|+\ldots+\right.$$

$$\left.\ldots+\varphi\left(\frac{\left|u[t_{(j-1)k+2},\ldots,t_{jk},t_{jk+1}]-u[t_{(j-1)k+1},\ldots,t_{jk}]\right|}{\left|t_{jk+1}-t_{(j-1)k+1}\right|}\right)\left|t_{jk+1}-t_{(j-1)k+1}\right|\right] \leq$$

$$\frac{1}{k}V^R_{(\varphi,k)}(u;[a,b]).$$

De esta forma tenemos:

$$\widehat{\sigma}^R_{(\varphi,k)}(\frac{u}{2},\pi) \leq \frac{1}{k}V^R_{(\varphi,k)}(u;[a,b])$$

y por lo tanto $RV_{(\varphi,k)}[a,b] \subset R\hat{V}_{(\varphi,k)}[a,b]$.

De 1. y 2. se concluye que $RV_{(\varphi,k)}[a,b] = R\hat{V}_{(\varphi,k)}[a,b]$. □

Corolario 3.8.2. *Sean $k>0$ un número entero y φ una φ-función, entonces:*

$$R\hat{V}_{(\varphi,k+1)}[a,b] \subset R\hat{V}_{(\varphi,k)}[a,b].$$

3.9. Lema de Riesz para las funciones de (φ, k)-variación acotada.

El siguiente lema nos será de utilidad para demostrar una generalización del lema de Riesz para las funciones de la clase $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$.

Lema 3.9.1. (*ver* **[95]**) *Sean $k>0$ un número entero, φ una φ-función convexa que verifica la condición ∞_1 y $u \in \widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$, entonces existe la derivada $u^{(k-1)}$ y es continua en $[a,b]$.*

Demostración. El caso $k = 1$ es consecuencia del lema de Riesz para funciones con $(\varphi, 1)$-variación acotada (Teorema 3.4.1). El caso $k = 2$ se demostró en el Lema 3.6.1. Supongamos $u \in \widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b], k \geq 3$. Como $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b] \subset \hat{BV}_k[a,b] = BV_k[a,b], k \geq 3$ (Teoremas 3.8.2 y 1.3.1), $u^{(k-2)} \in BV_2[a,b]$ y por lo tanto $u^{(k-2)}$ es continua y se puede escribir como diferencia de funciones convexas (Teorema 1.3.2). De esta manera, $u^{(k-2)}$ tiene derivadas laterales crecientes, con $u_+^{(k-1)} > u_-^{(k-1)}$ y son continuas; y el conjunto E donde la derivada de $u^{(k-1)}$ no existe es numerable y $u^{(k-1)}$ es continua en $[a,b] - E$ (ver, por ejemplo [**141, 142, 144**]).

Sea $t_0 \in E$ y denotemos por $\alpha_{t_0} = u_+^{(k-1)}(t_0) - u_-^{(k-1)}(t_0) > 0$. Por definición de derivada laterales, tenemos

$$u_+^{(k-1)}(t_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{u^{(k-2)}(t_0 + h) - u^{(k-2)}(t_0)}{h},$$

$$u_+^{(k-1)}(t_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{u^{(k-2)}(t_0 - h) - u^{(k-2)}(t_0)}{h}.$$

Utilizando la definición de diferencias divididas para puntos iguales (Observación 1.3.1), tenemos:

$$u_+^{(k-1)}(t_0) = (k-2)! \lim_{h \to 0^+} \frac{u[t_0 + h, \overbrace{}^{k-1 veces}, t_0 + h] - u[t_0, \overbrace{}^{k-1 veces}, t_0]}{h},$$

$$u_-^{(k-1)}(t_0) = (k-2)! \lim_{h \to 0^+} \frac{u[t_0 - h, \overbrace{}^{k-1 veces}, t_0 - h] - u[t_0, \overbrace{}^{k-1 veces}, t_0]}{h}.$$

Sean $t_1, \dots, t_{k-2}, s_1, \dots, s_{k-2} \in (a,b)$ y $h > 0$, tal que:

$$a \leq t_0 - h < t_1 < \cdots < t_{k-2} < s_1 < \cdots < s_{k-2} < t_0 + h \leq b.$$

Entonces:

$$\alpha_{t_0} = (k-2)!\,\underset{h\to 0^+}{lím}\left(\lim_{\substack{s_1\to t_0+h\\ t_1\to t_0-h}}\left|\frac{u[s_1,\dots,s_{k-2},t_0+h]-u[t_0-h,t_1,\dots,t_{k-2}]}{h}\right|\right).$$

Pero

$$\varphi\left(\left|\frac{u[s_1,\dots,s_{k-2},t_0+h]-u[t_0-h,t_1,\dots,t_{k-2}]}{h}\right|\right)h \leq \hat{V}^R_{(\varphi,k)}(u;[a,b]).$$

Y como φ cumple la condición ∞_1, resulta:

$$\underset{h\to 0^+}{lím}\,\varphi\left(\left|\frac{u[s_1,\dots,s_{k-2},t_0+h]-u[t_0-h,t_1,\dots,t_{k-2}]}{h}\right|\right)h = \infty.$$

De esta manera obtenemos la conclusión absurda:

$$\infty = \underset{h\to 0^+}{lím}\frac{\alpha_{t_0}}{(k-2)!}h \leq \frac{1}{(k-2)!}\hat{V}^R_{(\varphi,k)}(u[a,b]).$$

De esta manera $E=\phi$ y $u^{(k-1)}\in C[a,b]$. $\square$

Ahora presentamos el resultado más importante de este capítulo.

Teorema 3.9.1. (*Generalización del Lema de Riesz para las funciones de* $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$ *ver* **[95]**) *Sean $k>0$ un número entero y φ una φ-función convexa que verifica la condición ∞_1. Entonces $u\in\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$ si sólo si $u^{(k-1)}\in AC[a,b]$ y $\frac{u^{(k)}}{(k-1)!}\in L_\varphi[a,b]$ y ademas:*

$$\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}(u;[a,b]) = \int_a^b \varphi\left(\frac{\left|u^{(k)}(t)\right|}{(k-1)!}\right)dt.$$

Demostración. Sea $u\in\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$ y $\pi: a\leq t_1<\dots<t_n\leq b$ una partición de $[a,b]$. Escojamos puntos $s_1,\dots,s_{nk}$ de $[a,b]$, tales que:

$$t_1=s_1<\dots<s_k<t_2=s_{k+1}<\dots<s_{2k}<t_3=s_{2k+1}<\cdots$$

$$\cdots < t_{n-1} = s_{(n-2)k+1} < \cdots < s_{(n-1)k} < s_{(n-1)k+1} < \cdots < s_{nk} = t_{n.}$$

De propiedades de las diferencias divididas (Proposición1.3.1), existen

$$\xi_j \in \left(s_{(j-1)k+1}, s_{jk}\right), \quad j = 1, \ldots, n$$

tales que

$$\frac{u^{(k-1)}(\xi_j)}{(k-1)!} = u[s_{(j-1)k+1}, \ldots, s_{jk}], \quad j = 1, \ldots, n.$$

Como $u \in \widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$, tenemos:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{u^{(k-1}(\xi_{j+1}) - u^{(k-1)}(\xi_j)}{(k-1)!\left|s_{(j+1)k} - s_{jk}\right|}\right)\left|s_{(j+1)k} - s_{jk}\right| =$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{\left|u[s_{(j-1)k+1}, \ldots, s_{jk}] - u[s_{(j-1)k+1}, \ldots, s_{jk}]\right|}{(k-1)!\left|s_{(j+1)k} - s_{jk}\right|}\right)\left|s_{(j+1)k} - s_{jk}\right| \leq$$

$$\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}\left(\frac{u}{(k-1)!}; [a,b]\right) \leq \widehat{V}^R_{(\varphi,k)}\left(u; [a,b]\right).$$

Tomando límite, cuando $s_{jk} \downarrow s_{(j-1)k+1} = t_j, j = 1, \ldots n-1$ y $s_{(n-1)k+} \uparrow s_{nk} = t_n$, obtenemos que $\xi_j \to t_j, j = 1, , n$. Como $u^{(k-1)}$ es continua en $[a,b]$, concluimos que:

$$\sigma^R_{(\varphi,1)}\left(\frac{u^{(k-1)}}{(k-1)!}, \pi\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{u^{(k-1)}(t_{j+1}) - u^{(k-1)}(t_j)}{(k-1)!\left|t_{j+1} - t_j\right|}\right)\left|t_{j+1} - t_j\right| \leq \widehat{V}^R_{(\varphi,k)}\left(u; [a,b]\right).$$

En consecuencia $\frac{u^{(k-1)}}{(k-1)!} \in V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$. Por la generalización del lema de Riesz para la clase $V^R_{(\varphi,1)}[a,b]$ (Teorema 3.4.1), resulta

$$\frac{u^{(k-1)}}{(k-1)!} \in AC[a,b] \quad y \quad \frac{u^{(k)}}{(k-1)!} \in L_\varphi[a,b].$$

Además

$$V^R_{(\varphi,1)}\left(\frac{u^{(k-1)}}{(k-1)!}\right) = \int_a^b \varphi\left(\frac{\left|u^{(k)}(t)\right|}{(k-1)!}\right) dt.$$

De esta manera hemos demostrado que $u^{(k-1)} \in AC[a,b]$, $\frac{u^{(k)}}{(k-1)!} \in L_\varphi[a,b]$ y

$$\int_a^b \varphi\left(\frac{\left|u^{(k)}(t)\right|}{(k-1)!}\right) dt \leq \widehat{V}^R_{(\varphi,k)}\left(u;[a,b]\right).$$

Recíprocamente, supongamos que $u^{(k-1)} \in AC[a,b]$, $\frac{u^{(k)}}{(k-1)!} \in L_\varphi[a,b]$ y sea

$$\pi : a \leq t_1 < \cdots t_k \leq t_{k+1} < \cdots t_{2k} \leq t_{2k+} < \cdots < t_{2n} \leq b,$$

un elemento de $\Pi^b_{a,k}$. Por propiedades de las diferencias divididas (Proposición 1.3.1), existen $\xi_j \in \left(t_{(j-1)k+}, t_{jk}\right)$, $j = 1, \ldots n$, tales que

$$\frac{u^{(k-1)}(\xi_j)}{(k-1)!} = u[t_{(j-1)k_1}, t_{jk}], \quad j = 1, \ldots, n.$$

Usando propiedades de las integrales, tenemos:

$$\varphi\left(\frac{\left|u[t_{jk+1}, \ldots, t_{(j+1)k}] - u[t_{(j-1)k+1}, \ldots, t_{jk}\right|}{\left|t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1}\right|}\right)\left|t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1}\right| =$$

$$\int_{t_{(j-1)k+1}}^{t_{(j+1)k}} \varphi\left(\frac{\left|u^{(k-1)}(\xi_{j+1}) - u^{(k-1)}(\xi_j)\right|}{(k-1)!\left|t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1}\right|}\right) d\xi \leq$$

$$\int_{t_{(j-1)k+1}}^{t_{(j+1)k}} \varphi\left(\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\left|u^{(k)}(t)\right|}{(k-1)!\left|t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1}\right|} dt\right) d\xi \leq$$

$$\int_{t_{(j-1)k+1}}^{t_{(j+1)k}} \varphi\left(\int_{t_{(j-1)k+1}}^{t_{(j+1)k}} \frac{\left|u^{(k)}(t)\right|}{(k-1)!\left|t_{(j+1)k} - t_{(j-1)k+1}\right|} dt\right) d\xi,$$

$j = 1, \ldots, n-1$.

Usando la desigualdad de Jensen:

$$\int_{t_{(j-1)k+1}}^{t_{(j+1)k}} \varphi\left(\int_{t_{(j-1)k+1}}^{t_{(j+1)k}} \frac{\left|u^{(k)}(t)\right|}{(k-1)!\left|t_{(j+1)k}-t_{(j-1)k+1}\right|}dt\right)d\xi \leq \int_{t_{(j-1)k+1}}^{t_{(j+1)k}} \varphi\left(\frac{\left|u^{(k)}(t)\right|}{(k-1)!}\right)dt.$$

Y concluimos que:

$$\widehat{\sigma}^R_{(\varphi,k)}(u,\pi) \leq \int_a^b \varphi\left(\frac{\left|u^{(k)}(t)\right|}{(k-1)!}\right)dt.$$

De esta manera tenemos que $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}(u;[a,b]) < \infty$ y

$$\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}(;[a,b]) \leq \int_a^b \varphi\left(\frac{\left|u^{(k)}(t)\right|}{(k-1)!}\right)dt.$$

□

3.10. Consecuencias del lema de Riesz en $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$.

Esta sección exponemos varios resultados que se derivan de la generalización del lema de Riesz para las funciones de (φ,k)-variación acotada.

3.10.1. El álgebra $RV_{(\varphi,k)}[a,b]$. El primer resultado se deduce inmediatamente del Teorema 3.9.1

COROLARIO 3.10.1. *Sean $k>0$ un número entero y φ una φ-función que verifica la condición ∞_1, entonces:*

1. $u \in \widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$ si y sólo si

$$\frac{u^{(r)}}{(k-1)(k-2)\cdots(k-r)} \in \widehat{V}^R_{(\varphi,k-r)}[a,b], \quad r=1,\ldots,k-1.$$

2. $u \in R\hat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$ si y sólo si $u^{(r)} \in RV_{(\varphi,k-r)}[a,b], r=1,\ldots,k-1$.

Otra corolario que se deriva del Teorema 3.6.1 es el siguiente.

COROLARIO 3.10.2. *Sean $k>0$ un número entero φ una φ-función que verifica la condición ∞_1, entonces $RV_{(\varphi,k)}[a,b]$ es un álgebra, con el producto usual de funciones.*

Demostración. Sean $u, v \in RV_{(\varphi,k)}[a,b]$, entonces existen números positivos, λ, β, tales que

$$\hat{V}^R_{(\varphi,k)}(\lambda u) < \infty \quad y \quad \hat{V}^R_{(\varphi,k)}(\beta v) < \infty.$$

Del Corolario 3.8.1, para cada entero positivo m, tenemos que $RV_{(\varphi,m)}[a,b] \subset RV_{(\varphi,1)}[a,b]$. Como

$$(uv)^{(k-1)} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k-1}{j} u^{(k-1-j)} v^{(j)},$$

del corolario anterior se concluye que $(uv)^{(k-1)} \in RV_{(\varphi,1)}[a,b]$y por lo tanto $uv \in RV_{(\varphi,k)}[a,b]$. $\square$

3.10.2. Sobre las clases $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$ y los espacios $R\hat{V}_{(\varphi,k)}[a,b]$. Los siguientes dos corolarios están expuestos en **[95]**. Iniciamos dando condiciones necesarias y suficientes sobre dos φ-funciones φ_1 y φ_2 para que $\widehat{V}^R_{(\varphi_1,k)}[a,b] \subset \widehat{V}^R_{(\varphi_2,k)}[a,b]$.

Corolario 3.10.3. *Sean $k > 0$ un número entero y φ_1 y φ_2 φ-funciones convexas que verifican la condición ∞_1 , entonces $\widehat{V}^R_{(\varphi_1,k)}[a,b] \subset \widehat{V}^R_{(\varphi_2,k)}[a,b]$ si y sólo si $\limsup_{t\to\infty} \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} < \infty$.*

Demostración. Supongamos que $\widehat{V}^R_{(\varphi_1,k)}[a,b] \subset \widehat{V}^R_{(\varphi_2,k)}[a,b]$. Sea $u \in \hat{V}^R_{(\varphi_1,k)}[a,b]$, entonces por cálculo de integrales indefinidas, consideramos la función la función $w : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por

$$w(t) := \int_a^t \left(\int_a^{t_{k-2}} \cdots \left(\int_a^{t_2} u(t_1)dt_1 \right) \ldots dt_{k-2} \right) dt_{k-1}.$$

Como $w^{(k-1)} = u \in V^R_{(\varphi_1,k)}[a,b]$, entonces por el Teorema 3.9.1 $w \in \widehat{V}^R_{(\varphi_1,k)}[a,b]$. De la hipótesis resulta que $w \in \widehat{V}^R_{(\varphi_2,k)}[a,b]$, y por tanto (Teorema 3.9.1) $u = w^{(k-1)} \in V^R_{(\varphi_2,1)}[a,b]$. Entonces aplicando el Teorema 3.2.2 obtenemos la tesis.

Recíprocamente, asumamos que $\limsup_{t\to\infty} \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}$, entonces existen números $\eta > 0$, $t_0 > 0$ tales que $\varphi_2(t) \leq \eta\varphi_1(t), t \geq t_0$, entonces del Teorema 8.1 de **[92]** $L_{\varphi_1}[a,b] \subset L_{\varphi_2}[a,b]$.

Sea $u \in \widehat{V}^R_{(\varphi_1,k)}[a,b]$. Del Teorema 3.9.1, $u^{(k-1)} \in AC[a,b]$ y $u^{(k)} \in L_{\varphi_1}[a,b] \subset L_{\varphi_1}[a,b]$. Usando nuevamente el Teorema3.9.1 se tiene que $u \in \widehat{V}^R_{(\varphi_2,k)}[a,b]$. $\square$

A continuación exponemos, condiciones necesarias y suficientes sobre una φ-función φ para que la clase $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$ sea un espacio vectorial.

Corolario 3.10.4. *Sean $k > 0$ un* número entero y *φ una φ-función convexa que verifica la condición ∞_1, entonces $\widehat{V}^R_{(\varphi,k)}[a,b]$ es un espacio vectorial si y sólo si φ cumple la condición $\triangle_2(\infty)$.*

Demostración. Se imita la demostración del Corolario 3.7.4 $\square$

En el siguiente corolario, exponemos condiciones necesarias y suficientes sobre dos φ-funciones φ_1 y φ_1 para que $\hat{RV}_{(\varphi_1,k)}[a,b] \subset \hat{RV}_{(\varphi_2,k)}[a,b]$.

Corolario 3.10.5. *Sean $k > 0$ un número entero y φ φ_1 y φ_2 φ-funciones convexas que verifican la condición ∞_1 , entonces $\hat{RV}_{(\varphi_1,k)}[a,b] \subset \hat{RV}_{(\varphi_2,k)}[a,b]$ si y sólo si $\varphi_2 \prec \varphi_1$.*

Demostración. Se procede como la demostración de Corolario 3.7.5 $\square$

3.10.3. El espacio de Banach $RV_{(\varphi,k)}[a,b]$. Otro resultado que se deriva de la generalización del lema de Riesz para las funciones con (φ,k)-variación acotada, es dotar a el espacio $RV_{(\varphi,k)}[a,b]$ de una norma. En este espacio se define $\|\cdot\|^R_{(\varphi,k)}$: $RV_{(\varphi,k)}[a,b] \to [0,\infty)$, por:

$$\|u\|^R_{(\varphi,k)} := |u(a)| + \cdots + \left|u^{(k-2)}(a)\right| + \left\|u^{(k-1)}\right\|^R_{(\varphi,1)}, \quad u \in RV_{(\varphi,k)}[a,b]$$

o equivalentemente

$$\|u\|^R_{(\varphi,k)} = |u(a)| + \cdots + \left|u^{(k-1)}(a)\right| + inf\left\{\lambda > 0 : \int_a^b \varphi\left(\frac{\left|u^{(k)}(t)\right|}{\lambda}\right) < 1\right\},$$

$u \in RV_{(\varphi,k)}[a,b]$.

Es de hacer notar que esta norma la podemos definir inductivamente, como:

$$\|u\|^R_{(\varphi,k)} := |u(a)| + \|u'\|^R_{(\varphi,k-1)}$$

Corolario 3.10.6. *Sean $k > 0$ un número entero y φ una φ-función que verifica la condición ∞_1, entonces* $\left(RV_{(\varphi,k)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(\varphi,k)}\right)$ *es un espacio normado.*

A continuación demostramos que el espacio $RV_{(\varphi,k)}[a,b]$ con la norma $\|\cdot\|^R_{(\varphi,k)}$ es un espacio de Banach.

Corolario 3.10.7. *Sean $k > 0$ un número entero y φ una φ-función que verifica la condición ∞_1, entonces* $\left(RV_{(\varphi,k)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(\varphi,k)}\right)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Procederemos inductivamente. Para $k = 1$ ver **[18, 97]**, Lema 3.3.1 y Corolario 3.3.3). Para acaso $k = 2$ ver corolario 3.7.6. Supongamos que el resultado es cierto para algún valor entero $k \geq 2$ y demostremos que también es cierto para $k + 1$.

Ahora seguimos las ideas de la demostración para el caso de $(\varphi, 2)$-variación (corolario 3.7.6). Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\left(RV_{(\varphi,k)+1}[a,b], \|\cdot\|^R_{(\varphi,k+1)}\right)$, entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$, tal que

$$|u_n(a) - u_m(a)| + \|u' - u'_m\|^R_{(\varphi,k)} < \varepsilon, \quad n, m \geq N.$$

Por tanto, la sucesión $\{u_n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy de números reales y $\left\{u_n^{'}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\left(RV_{(\varphi,k)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(\varphi,k)}\right)$. Por completitud de $\mathbb{R}$ y del espacio $\left(RV_{(\varphi,k)}[a,b], \|\cdot\|^R_{(\varphi,k)}\right)$, existen un número real u^* y una función $v \in RV_{(\varphi,k)}[a,b]$, tales que:

$$u_n(a) \to u^* \quad y \quad \{u'_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{\|\cdot\|^R_{(\varphi,k)}} v.$$

Definamos $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, como la integral indefinida:

$$u(t) := u^* + \int_a^t v(s)ds.$$

Entonces, por construcción de u, se tiene:

$$\|u_n - u\|^R_{(\varphi,k+1)} = |u_n(a) - u^*| + \|u'_n - v\|^R_{(\varphi,k)}, \quad n \geq 1.$$

Y por tanto $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{\|\cdot\|^R_{(\varphi,k)}} u.$

De esta manera concluimos que el espacio $\left(RV_{(\varphi,k)}[a,b], \|\cdot\|^{R}_{(\varphi,k)}\right)$ es completo. □

3.11. Acotación Uniforme del Operador de Composición en $RV_{(\varphi,k)}[a,b]$.

En la sección 2.9 del capítulo 2 (Teorema 2.9.2), demostramos que la lipschitzidad global en la Condición de Matkowski (ver sección 2.8) puede ser remplazada por una condición de acotación uniforme del operador de composición. Para el caso del espacio $RV_{(\varphi,k)}[a,b]$ este resultado también es cierto y está expuesto en [**71**].

A continuación enunciamos este resultado en un teorema.

Teorema 3.11.1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}\,(a < b)$, φ una φ-función convexa que verifica la condición ∞_1, $k \geq 2$ un número entero. Si el operador de composición H generado por h aplica el espacio $RV_{(\varphi,k)}[a,b]$ en sí mismo y es uniformemente acotado, respecto a la norma $\|\cdot\|^{R}_{(\varphi,k)}$, entonces existen $\alpha, \beta \in RV_{(\varphi,k)}[a,b]$, tales que:*

$$h(t,x) = \alpha(t)x + \beta(t), t \in [a,b], x \in \mathbb{R}.$$

3.12. Algunos problemas para investigar.

Aquí presentamos algunos problemas para futuras investigaciones.

1. Generalizar el concepto de (φ,k)-variación acotada, en cualquiera de sus dos formas, para funciones $u : E \to \mathbb{X}$, donde $\mathbb{X}$ es un espacio normado, en particular para multifunciones.
2. Determinar cuáles de las propiedades de los Teoremas 3.8.1 y 3.8.1 son ciertas.
3. Determinar si es posible demostrar un teorema de representación para estas nuevas funciones, tipo Jordan, tipo Riesz a través de una integral tipo Serpiński-Federer-Chistyakov, como composición de funciones.
4. Demostrar un teorema tipo lema de Riesz (Teorema 3.9.1) y sus consecuencias.
5. Estudiar algunos problemas relacionados con el operador de composición, como actuación, lipschitzidad local o global, acotación uniforme.

Capítulo 4

Representación integral de funciones con segunda variación acotada en el sentido de Schramm

Como ya indicamos en la introducción de este trabajo, el concepto de variación de una función definido por Jordan en [**84**] fue generalizado en 1908 por De la Vallée Poussin en [**59**] al considerar la noción de segunda variación estudiada en el capítulo 1 de esta tesis.

Hace un siglo F. Riesz en [**137**], demostró que una función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene segunda variación acotada si y sólo si se puede escribir como la integral indefinida de una función con variación acotada.

Por otra parte, en 1972 D. Waterman, quien este momento tiene 85 años, introduce el concepto de Λ-variación acotada (ver [**165**]). Un autobiografía de Waterman puede revisarse en [**57**], donde se recopilan las ponencias de las conferencias que se realizaron en la FAU, campus de Fort Lauderdale, el 30 marzo a 1 abril 2007, con motivo de la celebración del 80 aniversario de D. Waterman. Entre las que cabe destacar la de su discípulo F. Prus-Wiśnioski [**134**], quien hace un resumen de los resultados sobre este tipo de funciones.

En [**165**] Waterman considera lo que se conoce como una $\Lambda-$sucesión $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$. Es decir, una sucesión creciente de números positivos, tal que la serie $\sum_{n\geq 1} {}^{1}/_{\lambda_n}$ es divergente. Dada una sucesión de intervalos $I_n = (a, b_n) \subset [a, b], n \geq 1$, cuya intersección dos a dos es vacía; y un función $u : [a, b] \to \mathbb{R}$, se consideran las sumas

$$\sigma_\Lambda^W(u, I_n) := \sum_{j\geq 1} \frac{|u(b_n) - u(a_n|}{\lambda_n}$$

y se define la Λ-variación (nosotros agregamos en el sentido de Waterman) de la función u en $[a, b]$ al supremo $\underset{I_n}{sup}\ \sigma_\Lambda^W(u, I_n)$.

Posteriormente, en 1985, otro discípulo de Waterman; Michael Schramm en [**158**], generaliza este concepto introduciendo la noción de ϕ-variación, como el supremo de sumas del tipo :

$$\sigma^S_{(\phi,1)}(u, I_n) := \sum_{j\geq 1} \varphi_n\left(|u(b_n) - u(a_n|\right),$$

donde $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ es un sucesión decreciente de φ-funciones convexas, tales que la serie $\sum_{n\geq 1} \varphi_n(t)$ diverge para cada $t > 0$. Y se define la ϕ-variación en el sentido de Schramm al supremo de $\underset{I_n}{sup}\ \sigma^S_{(\phi,1)}(u, I_n)$.

En este capítulo de esta tesis, introducimos el concepto de ϕ-segunda variación en el sentido de Schramm, siguiendo las ideas de De La Vallée Poussin en [**59**]; concluimos demostrando un teorema de representación tipo Riesz. Más precisamente, demostramos que una función tiene ϕ-segunda variación acotada en el sentido de Schramm si y sólo si es la integral indefinida de una función que tiene ϕ-variación acotada en el sentido de Schramm. Estos resultados son originales y los obtuvimos, en colaboración con los profesores José Giménez y Nelson Merentes y fueron publicados este año [**70**].

4.1. ϕ-sucesiones.

Definición 4.1.1. Una sucesión de φ-funciones $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ convexas es una ϕ-sucesión si la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente y $\sum_{n\geq 1} \varphi_n(t)$ es divergente para cada $t > 0$.

Observación 4.1.1. M. Schramm en [**158**] denomina a este tipo de sucesiones como ϕ^*-sucesión.

Ejemplo 4.1.1. Algunos ejemplos de ϕ-sucesiones se obtienen al considerar las funciones $\varphi_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}, n \geq 1$, definidas por:

$$\varphi_n(t) = a_n\varphi(t),$$

donde $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una φ-función convexa y $\{a_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de números positivos, cuya serie $\sum a_n$ es divergente.

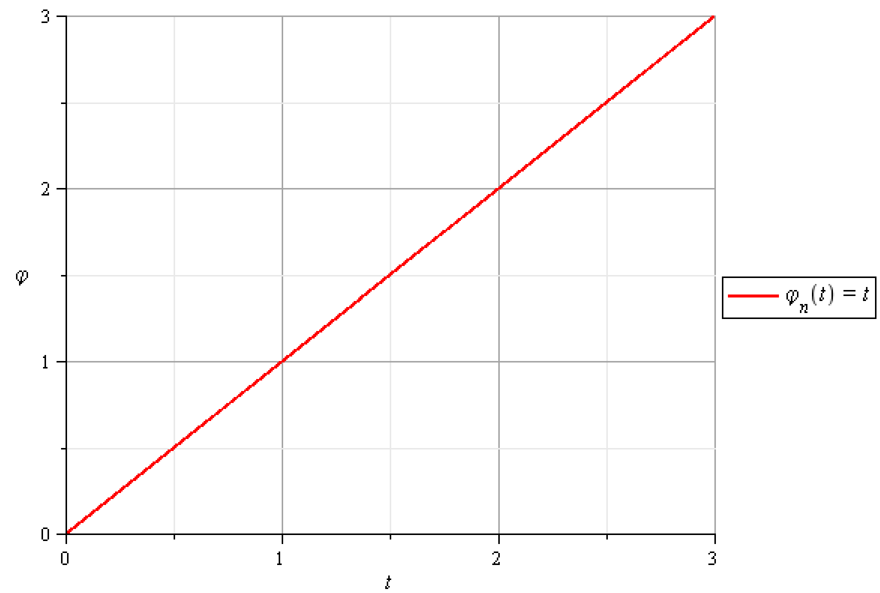
Algunos casos particulares son:

$\varphi_n(t) = t \quad , \quad \varphi_n(t) = at^p, p \geq 1.$

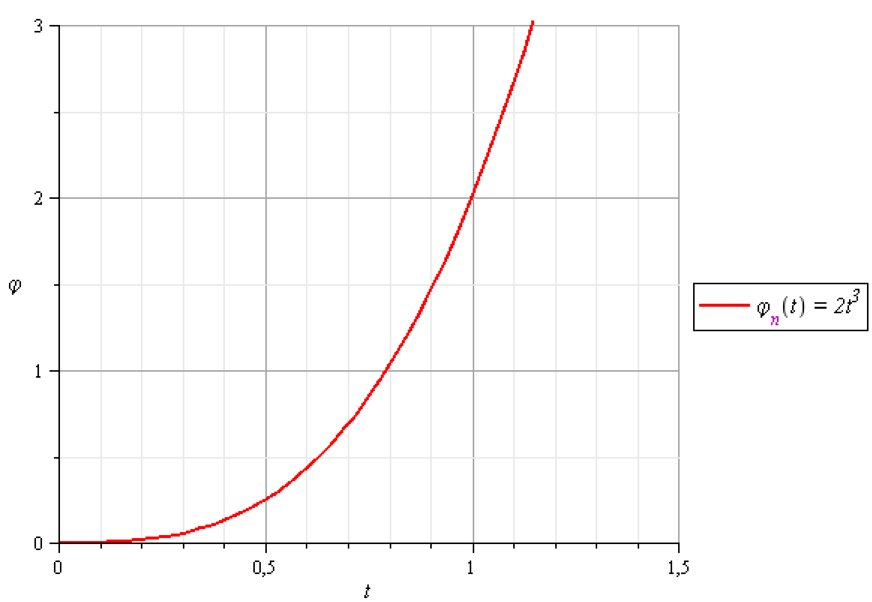
$\varphi_n(t) = \frac{t^p}{n}$, $\varphi_n(t) = \frac{e^t - 1}{\sqrt{n}}$.

A continuación presentamos la gráficas de algunas de las funciones de estas sucesiones.

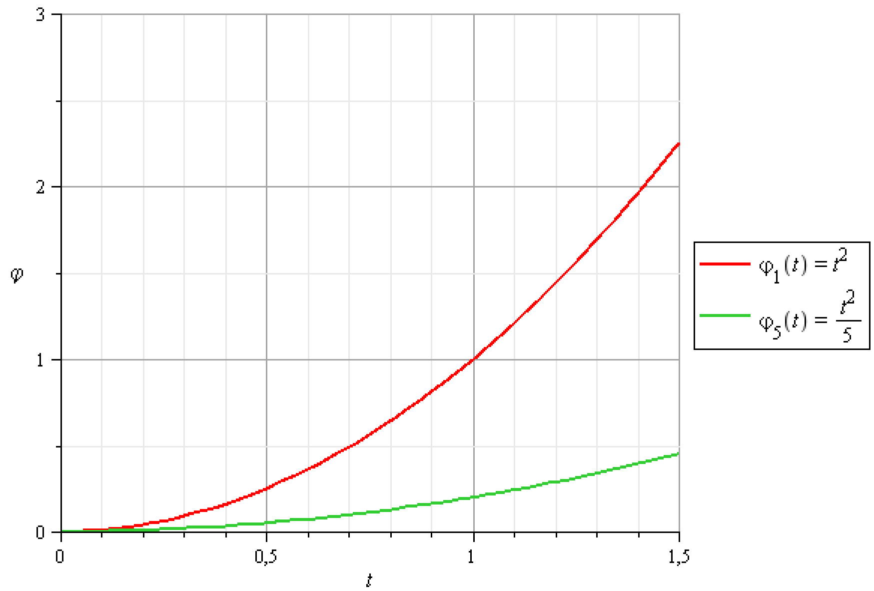
$$\varphi_n(t) = t,\ n \geq 1$$



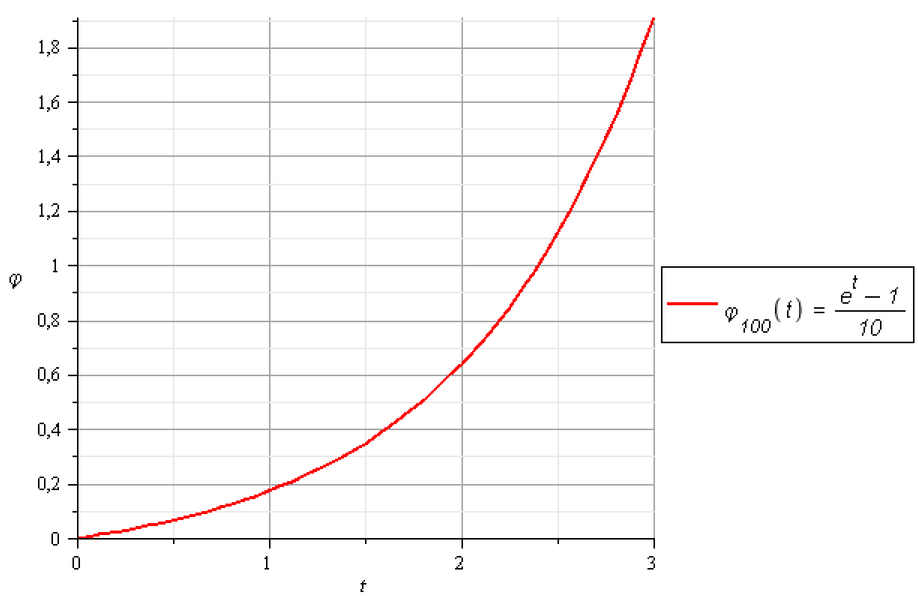
$$\varphi_n(t) = 2t^3,\ n \geq 1$$



$$\varphi_n(t) = \frac{t^2}{n},\ n \geq 1$$



$$\varphi_n(t) = \frac{e^t - 1}{\sqrt{n}},\ n \geq 1$$



4.2. Funciones de ϕ-variación acotada en el sentido de Schramm.

Antes de exponer el concepto de ϕ-variación de una función estudiado por M. Schramm en [**158**], introducimos algunas notaciones que utilizaremos en el capítulo.

Si $\mathbb{X}$ un espacio vectorial $u : [a,b] \to \mathbb{X}$, $I = [s,t] \subseteq [a,b]$, se definen:

$$|I| = |t-s|\,, \quad u(I) = u(t) - u(s) \quad y \quad u[I] = u[s,t] = \frac{u(t)-u(s)}{t-s}.$$

$I(a,b)$ denota la familia de todas las sucesiones numerables o finitas de intervalos cerrados $\{I_n = [a_n, b_n]\}_{n\geq 0}$ contenidos en $[a,b]$ cuya intersección de dos cualesquiera es vacía o un punto. Además denotamos por $I_F(a,b)$ las sucesiones finitas de $I(a,b)$. Si $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ es una partición del intervalo $[a,b]$, denotamos por I_π la familia de todas las sucesiones de $I(a,b)$ con extremos en π.

Definición 4.2.1. (ϕ-variación en el sentido de Schramm (ver [**158**])) Dadas una ϕ-sucesión $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$, $\{I_n\}_{n\geq 1} \in I(a,b)$ y una función $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ se definen:

$$\sigma^S_{(\phi,1)}(u, I_n) := \sum_{n\geq 1} \varphi_n\left(|u(I_n)|\right)$$

$$y$$

$$V^S_{(\phi,1)}(u,[a,b]) = V^S_{(\phi,1)}(u) := \underset{\{I_n\}\in I(a,b)}{sup} \sigma^S_{(\phi,1)}(u, I_n).$$

Si $V^S_{(\phi,1)}(u,[a,b]) < \infty$ se dice que u tiene *ϕ-variación finita o acotada en el sentido de Schramm* en el intervalo $[a,b]$ y la clase de tales funciones la denotamos por $V^S_{(\phi,1)}[a,b]$.

Observación 4.2.1. Si $\varphi_n(t) = t$, $n \geq 1$, entonces la ϕ-variación en el sentido de Schramm coincide con la variación clásica de Jordan.

Si $\varphi_n(t) = t^p$, $n \geq 1$, para algún $p > 1$, la ϕ-variación en el sentido de Schramm no es más que p-variación de Wiener (ver [**169**]).

Si $\varphi_n(t) = \frac{t}{\lambda_n}$, $n \geq 1$, donde $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ es una Λ-sucesión, entonces la variación de Schramm es la Λ-variación estudiada por D. Waterman en [**165**].

Observación 4.2.2. Si $u = ctte$, entonces de la Definición 4.2.1 es inmediato que $V^S_{(\phi,1)}(u) = 0$ y por tanto $V^S_{(\phi,1)}[a,b]$ es no vació.

También si consideramos $c \in (a,b)$ y $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por:

$$u(t) := \begin{cases} c_1, & t \leq c \\ c_2, & t > c \end{cases},$$

donde c_1 y c_2 son dos constantes cualesquiera, entonces $V^S_{(\phi,1)}(u) = \varphi_1\left(|c_2 - c_1|\right)$.

Observación 4.2.3. Una definición alterna de la variación de Schramm, es considerar en la definición 4.2.1, las suma sobre sucesiones finitas de intervalos de $\{I_n\}_{n=1}^m$ de $I(a,b)$ y modificar la definición considerando

$$VA^S_{(\phi,1)}(u;[a,b]) = \underset{\{I_n\}\in I_F(a,b)}{sup} \sum_{n=1}^{m} \varphi_n\left(|u(I_n)|\right).$$

Sin embargo, se puede notar que:

a. $VA^S_{(\phi,1)}(u;[a,b]) \leq V^S_{(\phi,1)}(u;[a,b])$.

b. si $VA^S_{(\phi,1)}(u;[a,b]) < \infty$ y $\{I_n\}_{n\geq 1}$ es una familia de intervalos de $I([a,b])$, entonces:

$$\sum_{n\geq 1} \varphi_n\left(|u(I_n)|\right) = \underset{m\to\infty}{lím} \sum_{n=1}^{m} \varphi_n\left(|u(I_n)|\right) \leq VA^S_{(\phi,1)}(u;[a,b])$$

y de esta manera, obtenemos que $V^S_{(\phi,1)}(u;[a,b]) \leq VA^S_{(\phi,1)}(u;[a,b])$.

Por tanto en la definición de la ϕ-variación en el sentido Schramm es indiferente si las sumas de la Definición 4.2.1 se toma sobre sucesiones finitas o numerables de miembros de $I(a,b)$.

Por otra parte, si $\pi : a \leq t_1 < \cdots < t_n \leq b$ es una partición de $[a,b]$ y consideramos la familia los intervalos $I_j : [t_j, t_{j+1}], j = 1, \ldots, n$ y definimos

$$\sigma^S_{(\phi,1)}(u,\pi) := \sum_{\{I_j\}\in I_\pi} \varphi_j\left(|u(I_j)|\right),$$

entonces $\sigma^S_{(\phi,1)}(u,\pi) \leq V^S_{(\phi,1)}(u;[a,b])$.

En el siguiente teorema exponemos algunas propiedades de la ϕ-variación de Schramm de una función y de la clase $V^S_{(\phi,1)}[a,b]$.

TEOREMA 4.2.1. *Sean $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una ϕ-sucesión y $u \in V^S_{(\phi,1)}[a,b]$, entonces*

1. Si $[s,t] \subset [a,b]$, entonces $V^S_{(\phi,1)}(u;[s,t]) \leq V^S_{(\phi,1)}(u;[a,b])$.

2. u es acotada y $\|u\|_\infty \leq |u(a)| + \varphi_1^{-1}\left(V^S_{(\phi,1)}(u)\right)$.

3. Si u es monótona, $V^S_{(\phi,1)}(u;[a,b]) = \varphi_1\left(|u(b)-u(a)|\right)$.

4. $V^W_{(\varphi_1,1)}[a,b] \subset V^S_{(\phi,1)}[a,b]$ y $BV[a,b] \subset V^S_{(\phi,1)}[a,b]$, donde $V^W_{(\varphi_1,1)}[a,b]$ es la clase de las funciones con φ_1-variación acotada en el sentido de Wiener (ver [**171**]*).*

5.$V^S_{(\phi,1)}[a,b]$ es un conjunto simétrico y convexo.

7. La función $V^S_{(\phi,1)} : V^S_{(\phi,1)}[a,b] \to [0,\infty)$, que asocia a cada función $u \in V^S_{(\phi,1)}[a,b]$ su ϕ-variación en el sentido de Schramm, es convexa.

DEMOSTRACIÓN. 1. se deducen directamente de la definición de la variación de Schramm.

2. es consecuencia de la desigualdad

$$\varphi_1\left(|u(t)-u(a)|\right) \leq V^S_{(\phi,1)}(u)$$

.

Para 3. ver proposición 2.2 de [**78**].

La primera parte de 4. se sigue porque la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente. Para la otra parte ver proposición 2.5 de [**78**].

6. La simetría de $V^S_{(\phi,1)}[a,b]$ es consecuencia directa de la definición. Y la convexidad se sigue de la convexidad de las funciones φ_n, $n \geq 1$.

7. Es consecuencia de la convexidad de las funciones de la sucesión ϕ. $\square$

OBSERVACIÓN 4.2.4. La parte 3. del teorema precedente nos presenta una manera para calcular la ϕ-variación de Schramm de una función monótona, por ejemplo:

a. $V^S_{(\phi,1)}(t^3;[a,b]) = \varphi_1\left(b^3 - a^3\right)$.

b. $V^S_{(\phi,1)}(Ln\, t;[a,b]) = \varphi_1\left(Ln\, a - Ln\, b\right)$, $a > 0$.

c. $V^S_{(\phi,1)}(\frac{1}{t};[a,b]) = \varphi_1\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$, $a > 0$.

Observación 4.2.5. La definición de variación de Schramm (Definición 4.2.1) la podemos adaptar para funciones $u : [a, b] \to \mathbb{X}$, donde $\mathbb{X}$ es un espacio métrico. En este caso la ϕ-variación en el sentido de Schramm de una función $u \in \mathbb{X}^{[a,b]}$ se denota por $V^S_{(\phi,1)}(u; [a, b], \mathbb{X})$ y la clase de las funciones que tiene ϕ-variación finita en el sentido de Schramm, por $V^S_{(\phi,1)}([a, b], \mathbb{X})$ En particular, si $\mathbb{X}$ es un espacio normado son válidas las conclusiones del Teorema 4.2.1, salvo la parte 3. porque se requiere una estructura de orden en $\mathbb{X}$.

Observación 4.2.6. Como la clase $V^S_{(\phi,1)}[a, b]$ es un conjunto convexo y simétrico, el Lema 3.2.2 asegura que el espacio vectorial $SV_{(\phi,1)}[a, b]$ o utilizando la notación de Schramm $\phi BV_{(\phi,1)}[a, b]$ generado por la clase $V^S_{(\phi,1)}[a, b]$ es igual a:

$$\left\{u : [a, b] \to \mathbb{R} : \exists \lambda > 0 \ni V^S_{(\phi,1)}(\lambda u) < \infty\right\}.$$

En [**158**] M. Schramm demuestra que este espacio tienen una estructura de espacio de Banach con la norma:

$$\|u|^S_{(\phi,1)} := |u(a)| + inf\left\{\lambda > 0 : V^S_{(\phi,1)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) < 1\right\}.$$

En la proposición 2.4 de [**78**] A. Hernández demuestra que $\phi BV[a, b]$ es un álgebra; y usando el Lema 2.1.2 (Maligranda-Orlicz) demuestra que $\phi BV[a, b]$ es un álgebra de Banach (corolario 2.3 de [**78**]).

4.3. Segunda variación en el sentido de Schramm.

Siguiendo las ideas desarrolladas por De la Vallée Poussin en [**59**] y por N. Merentes en 1991 en [**113**], podemos generalizar el concepto de ϕ-variación dado por Schramm a un nuevo concepto que denominamos segunda ϕ-segunda variación en el sentido de Schramm. En esta sección trataremos este concepto para funciones $u : [a, b] \to \mathbb{X}$, donde $\mathbb{X}$ es un espacio normado.

Denotamos por $I^*(a, b)$ la familia de sucesiones $\{I_n\}_{n\geq 1} \in I(a, b)$, tales que $|I_n| > 0, n \geq 1$.

Definición 4.3.1. Dados un espacio normado $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$, una ϕ-sucesión $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$, una sucesión de intervalos $\{I_n\}_{n\geq 1} \in I^*(a, b)$ y una función $u : [a, b] \to \mathbb{X}$ se definen:

$$\sigma^S_{(\phi,2)}(u, I_n) := \sum_{n\geq 1} \varphi_n \left(\|u[I_{n+1}] - u[I_n]\|\right)$$

$$y$$

$$V^S_{(\phi,2)}(u; [a,b], \mathbb{X}) = V^S_{(\phi,2)}(u; [a,b]) = V^S_{(\phi,2)}(u) := \sup_{\{I_n\}\in I^*(a,b)} \sigma^S_{(\phi,1)}(u, I_n).$$

Si $V^S_{(\phi,2)}(u; [a,b], \mathbb{X}) < \infty$ decimos que u tiene segunda φ-variación acotada o finita en el sentido de Schramm en el intervalo $[a,b]$ y la clase de tales funciones la denotamos por $V^S_{(\phi,2)}([a,b], \mathbb{X})$.

Observación 4.3.1. De igual manera al caso de $(\phi, 1)$-variación en el sentido de Schramm, podemos considerar las sumas del tipo $\sigma^S_{(\phi,2)}(u, I_n)$ sobre sucesiones finitas $\{I_n\}_{n=1}^m$ de $I^*(a,b)$ obteniendo que:

$$V^S_{(\phi,2)}(u) := \sup_{\{I_n\}\in I^*_F(a,b)} \sigma^S_{(\phi,1)}(u, I_n),$$

donde $I^*_F(a,b)$ denota las sucesiones finitas de $I(a,b)$.

Observación 4.3.2. Si para $x, y \in \mathbb{X}$ fijos, consideramos $u \in \mathbb{X}^{[a,b]}$, definida por $u(t) = tx + y$, $t \in [a,b]$, entonces $u[I] = x$, para cualquier intervalo cerrado $I \subset [a,b]$, con $|I| > 0$. De esta manera, $V^S_{(\phi,2)}(u) = 0$ y así $V^S_{(\phi,2)}([a,b], \mathbb{X}) \neq \emptyset$.

En la siguiente proposición presentamos algunas propiedades iniciales que podemos inferir de este tipo de funciones a partir de la Definición 4.3.1.

Proposición 4.3.1. *Sean $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una ϕ-sucesión y $u : [a,b] \to \mathbb{X}$, entonces:*

1. *Si $[c,d] \subseteq [a,b]$, entonces $V^S_{(\phi,2)}(u; [c,d], \mathbb{X}) \leq V^S_{(\phi,2)}(u; [a,b], \mathbb{X})$.*
2. *$V^S_{(\phi,2)}([a,b], \mathbb{X})$ es un conjunto convexo y simétrico.*
3. *La función $V^S_{(\phi,2)} : V^S_{(\varphi,,2)}([a,b], \mathbb{X}) \to [0,\infty)$ que asocia a cada $u \in V^S_{(\varphi,,2)}([a,b], \mathbb{X})$ su segunda ϕ- variación en el sentido de Scharmm, es convexa.*
4. *Si λ es un número complejo y $|\lambda| \leq 1$, entonces $V^S_{(\varphi,2)}(\lambda u; [a,b], \mathbb{X}) \leq |\lambda|\, V^S_{(\varphi,2)}(u; [a,b], \mathbb{X})$.*

En el siguiente lema demostramos que toda función que tiene segunda variación acotada en el sentido de Schramm es lipschitziana.

LEMA 4.3.1. *Sean* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio normado,* $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ *una* ϕ*-sucesión y* $u : [a,b] \to \mathbb{X}$ *una función con* ϕ*-variación acotada finita en el sentido de Schramm, entonces* $u \in Lip([a,b], \mathbb{X})$.

DEMOSTRACIÓN. Debemos demostrar que $\|u[s,t]\|$, $a \leq s < t \leq b$ es acotado. Sean $\{I, J\} \in I^*(a,b)$, entonces de la definición $V^S_{(\phi,2)}(u;[a,b])$, tenemos:

$$\varphi_1 (\|u[I] - u[J]\|) \leq V^S_{(\phi,2)}(u).$$

Fijemos un punto $c \in (a,b)$ y consideremos dos puntos $s,t \in [a,b]$, $s < t$. Examinemos las posibles ubicaciones de los puntos c, s, t y usaremos la convexidad de la función φ_1.

Caso1: $s < c < t$ y s o t es uno de los extremos del intervalo.

Si $a = s < c < t = b$: $\|u[s,t]\| = \|u[a,b]\|$.

Si $a = s < c < t < b$:

$$\varphi_1\left(\frac{\|u[s,t]\|}{3}\right) \leq \frac{1}{3}\varphi_1 (\|u[s,t] - u[t,b]\|) + \frac{1}{3}\varphi_1 (\|u[t,b] - u[a,c]\|) + \frac{1}{3}\varphi_1 (\|u[a,c]\|) \leq$$

$$\frac{2}{3}\, V^S_{(\phi,2)}(u;[a,b],\mathbb{X}) + \frac{1}{3}\varphi_1 (\|u[a,c]\|) \leq$$

$$V^S_{(\phi,2)}(u;[a,b],\mathbb{X}) + \varphi_1 (\|u[a,c]\|)$$

Si $a < s < c < t = b$:

$$\varphi_1\left(\frac{\|u[s,t]\|}{4}\right) \leq \frac{1}{4}\varphi_1 (\|u[s,t] - u[a,s]\|) + \frac{1}{4}\varphi_1 (\|u[a,s] - u[s,c]\|) +$$

$$\frac{1}{4}\varphi_1 (\|u[s,c] - u[a,c]\|) + \frac{1}{4}\varphi_1 (\|u[a,c]\|) \leq$$

$$V^S_{(\phi,2)}(u;[a,b],\mathbb{X}) + \varphi_1 (\|u[a,c]\|).$$

Caso 2: $a < s < c < t < b$, entonces:

$$\varphi_1\left(\frac{\|u[s,t]\|}{3}\right) \leq \frac{1}{3}\varphi_1\left(\|u[s,t]-u[t,b\|\right) + \frac{1}{3}\varphi_1\left(\|u[t,b]-u[a,c]\|\right) + \frac{1}{3}\varphi_1\left(\|u[a,c]\|\right) \leq$$

$$V^S_{(\phi,2)}(u;[a,b],\mathbb{X}) + \varphi_1\left(\|u[a,c]\|\right).$$

Caso 3: $a \leq s < t \leq c < b$, entonces:

$$\varphi_1\left(\frac{\|u[s,t]\|}{3}\right) \leq \frac{1}{3}\varphi_1\left(\|u[s,t]-u[c,b\|\right) + \frac{1}{3}\varphi_1\left(\|u[c,b]-u[a,c]\|\right) + \frac{1}{3}\varphi_1\left(\|u[a,c\|\right) \leq$$

$$V^S_{(\phi,2)}(u;[a,b],\mathbb{X}) + \varphi_1\left(\|u[a,c]\|\right).$$

Caso 4: $a < c \leq s < t \leq b$, entonces:

$$\varphi_1\left(\frac{\|u[s,t]\|}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\varphi_1\left(\|u[s,t]-u[a,c\|\right) + \frac{1}{2}\varphi_1\left(\|u[a,c]\|\right) \leq$$

$$V^S_{(\phi,2)}(u;[a,b],\mathbb{X}) + \varphi_1\left(\|u[a,c]\|\right).$$

En cualquier caso tenemos que:

$$\left|\frac{u(t)-u(s)}{t-s}\right| \leq max\left\{\|u[a,b]\|\ ,\ 4\varphi_1^{-1}\left(V^S_{(\phi,2)}(u;[a,b],\mathbb{X}) + \varphi_1\left(\|u[a,c]\|\right)\right)\right\}.$$

y así $u \in Lip([a,b],\mathbb{X})$. $\square$

Definición 4.3.2. (*Función absolutamente continua*). Sea $(\mathbb{X},\|\cdot\|)$ un espacio normado. Una función $u:[a,b]\to\mathbb{X}$ es absolutamente continua si existe una función $\delta:(0,\infty)\to(0,1)$, tal que para cada número $\varepsilon>0$ y cada colección finita de puntos $\{a_j,b_j\}_{j=1}^n$ de $[a,b]$ verificando

$$a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq a_3 < \cdots \leq a_n < b_n \quad y \quad \sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j) < \delta(\varepsilon),$$

se tiene que $\sum_{j=1}^{n} |u(b_j) - u(a_j)| < \epsilon$.

La clase de las funciones absolutamente continuas $u : [a, b] \to \mathbb{X}$ se denota por $AC\,([a, b], \mathbb{X})$.

De esta definición y del Lema 4.3.1 se deduce el siguiente corolario.

COROLARIO 4.3.1. *Sean* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio normado,* $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ *una* $\phi-$*sucesión, entonces* $V^S_{(\phi,2)}([a, b], \mathbb{X}) \subset AC\,([a, b], \mathbb{X})$.

OBSERVACIÓN 4.3.3. Si $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach reflexivo y $u \in V^S_{(\phi,2)}\,([a, b], \mathbb{X})$ entonces este corolario garantiza que u es fuertemente diferenciable c. s. con derivada fuertemente medible (ver **[28]**).

En lo que sigue de este capítulo, la integral que consideramos es la integral de Bochner de funciones definidas en un intervalo $[a, b]$ y que toman valores en un espacio normado. Diestel y Uhl en **[60]** garantizan que toda función absolutamente continua es Bochner integrable. De esta manera tenemos que las funciones de $V^S_{(\phi,2)}\,([a, b], \mathbb{X})$ son Bochner integrable.

TEOREMA 4.3.1. *Sean* $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ *un espacio normado,* $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ *una* ϕ*-sucesión y* $u \in V^S_{(\phi,1)}([a, b], \mathbb{X})$, *entonces si* u *es Bochner integrable en* $[a, b]$ *y si definimos* $\overline{u} : [a, b] \to \mathbb{X}$, *por* $\overline{u}(x) = \int_a^x u(t)dt$, *resulta que* $\overline{u} \in V^s_{(\phi,2)}\,([a, b], \mathbb{X})$ *y*

$$V^S_{(\phi,2)}(\overline{u}) \leq V^s_{(\phi,1)}(u).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{I_n = [t_n, t_{n+1}]\}_{n\geq 1}$ una sucesión de intervalos de $I^*\,(a, b)$, entonces:

$$\sum_{n\geq 1}\varphi_n\left(\|\overline{u}[I_{n+1}] - \overline{u}[I_n]\|\right) = \sum_{n\geq 1}\varphi_n\left(\left\|\int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} \frac{u(t)}{t_{n+2} - t_{n+1}}dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{u(t)}{t_{n+1} - t_n}dt\right\|\right).$$

Haciendo cambios de variables, resulta:

$$\sigma^S_{(\phi,2)}(u, I_n)\sum_{n\geq 1}\varphi_n\left(\|\overline{u}[I_{n+1}] - \overline{u}[I_n]\|\right) =$$

$$\sum_{n\geq 1}\varphi_n\left(\left\|\int_0^1 u(t_{n+1} + s(t_{n+2} - t_{n+1}))ds - \int_0^1 u(t_n + s(t_{n+1} - t_n))ds\right\|\right).$$

Como las funciones $\varphi_n, n \geq 1$, son convexas, usando la desigualdad de Jensen, resulta:

$$\sum_{n\geq 1}\varphi_n\left(|\overline{u}[I_{n+1}] - \overline{u}[I_n]|\right) \leq$$

$$\int_0^1 \sum \varphi_n \left(\| u(t_{n+1} + s(t_{n+2} - t_{n+1})) - u(t_n + s(t_{n+1} - t_n)) \| \right) ds \leq V^s_{(\phi,1)}(u, [a,b], \mathbb{X}).$$

Al tomar supremo de $\sigma^S_{(\phi,2)}(u, I_n)$ sobre las sucesiones de $I^*_F(a,b)$ se obtiene la desigualdad requerida. $\square$

Siguiendo las ideas desarrolladas por A. M. Russell y C. F. Upton , en la demostración del lema 6 de [**152**] y por M. Bracamonte, J. Giménez y N. Merentes en el lema 3.2 de [**35**] obtenemos el siguiente lema.

LEMA 4.3.2. *Sean $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ un espacio normado, $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ una ϕ-sucesión, D un subconjunto denso de $[a,b]$ y $u : D \to \mathbb{X}$, tal que existe una constante positiva K verificando:*

$$\sum_{k=1}^{m} \varphi_k \left(\| u(t_{k+1}) - u(t_k) \| \right) \leq K, \tag{4.3.1}$$

para cualesquiera $m+1$ puntos $a \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_m \leq b$ del conjunto D, entonces existen los límites laterales de u :

$$u_D(x-0) = \lim_{\substack{h\to 0^+\\ x-h\in D}} u(x-h), \quad x \in (a,b] - D$$

y

$$u_D(x+0) = \lim_{\substack{h\to 0^+\\ x+h\in D}} u(x+h), \quad x \in [a,b) - D.$$

DEMOSTRACIÓN. Se realizará la demostración sólo para verificar la existencia del límite lateral por la izquierda $u_D(x-0)$ en $(a,b] - D$. La otra parte se demuestra de manera similar.

Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que dicho límite no existe para algún $t \in (a,b] \setminus D$, entonces si $\{x_n\}_{n\geq 1}$y $\{y_n\}_{n\geq 1}$ son sucesiones en D, tales que:

$$x_n < y_n < x_{n+1} < y_{n+1} < \cdots < t \quad y \quad x_n \uparrow t \quad , \quad y_n \uparrow t. \tag{4.3.2}$$

Entonces podemos suponer que ocurren alguna de las siguientes situaciones.

a. $u(x_n) \to \overline{x} \in \mathbb{X} \quad , \quad u(y_n) \to \overline{y} \in \mathbb{X}$.

b. $\|u(x_n)\| \to \infty \in \mathbb{X} \quad , \quad u(y_n) \to \overline{y} \in \mathbb{X}$.

c.$\|u(x_n)\| \to \infty \quad , \quad \|u(y_n)\| \to \infty$.

En el caso a. tomemos $\varepsilon = \frac{\|\overline{x}-\overline{y}\|}{3}$. Escojamos $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, tal que:

$$\|u(x_n) - \overline{x}\| < \varepsilon \quad y \quad \|u(y_n) - \overline{y}\| < \varepsilon, \quad n > n_\varepsilon.$$

De aquí resulta que si $n > n_\varepsilon$,entonces:

$$3\varepsilon = \|\overline{x} - \overline{y}\| \leq \|\overline{x} - u(x_n)\| + \|u(y_n) - \overline{y}\| + \|u(x_n) - u(y_n)\| < 2\varepsilon + \|u(x_n) - u(y_n)\| .$$

De esta manera concluimos que:

$$\|u(x_n) - u(y_n)\| > \varepsilon, \quad n > n_\varepsilon. \tag{4.3.3}$$

Si acontece b. o c. Consideramos cualquier número $\varepsilon > 0$ y tomando subsucesiones, podemos suponer que además de verificarse (4.3.2) se cumple que:

$$\|u(x_n)\| > \|u(y_n)\| + \varepsilon$$

De esta manera, también se cumple la relación (4.3.3) .

Así, en cualesquiera de las situaciones planteadas, como $\varphi_{n+1} \leq \varphi_n$, $n \geq 1$, si p es un entero positivo, entonces:

$$\sum_{n=n_\varepsilon+1}^{n\varepsilon+p} \varphi_n \left(\|u(x_n) - u(y_n)\|\right) > \sum_{n=n_\varepsilon+1}^{n\varepsilon+p} \varphi_n(\varepsilon) > p\varphi_{n_\varepsilon+p}(\varepsilon).$$

Y esto contradice la hipótesis inicial. □

El siguiente teorema garantiza que toda función con ϕ-segunda variación acotada, en el sentido de Shramm, es la integral indefinida de una función con ϕ-variación acotada en el sentido de Schramm.

TEOREMA 4.3.2. *Sean* $\mathbb{X}$ *un espacio de Banach reflexivo,* $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ *un* ϕ*-sucesión y* $u \in V^S_{(\phi,2)}([a,b], \mathbb{X})$*. Entonces existe una función* $\overline{u} \in V^S_{(\phi,1)}([a,b], \mathbb{X})$*, tal que:*
a. $u' = \overline{u}$ *c.s. o equivalentemente* $u(t) = u(a) + \int_a^t \overline{u}(s)ds$*,*
b. $V^S_{(\phi,2)}(\overline{u}) = V^S_{(\phi,1)}(u)$.

DEMOSTRACIÓN. Del Corolario 4.3.1 tenemos que u es absolutamente continua. Como $\mathbb{X}$ es un espacio reflexivo, entonces u es fuertemente diferenciable c.s. con derivada fuertemente medible (ver Observación 4.3.3). De esta manera existe un conjunto $E \subset [a,b]$ de medida de Lebesgue cero, tal que u' existe en $D := [a,b] - E$.

Dado un número entero positivo m, escojamos $m+1$ puntos $t_1, \ldots, t_{m+1} \in D$, tales que $a \leq t_1 < \cdots < t_{m+1} \leq b$. Tomemos $m+2$ números positivos $h_1, \ldots, h_{m+1}, \xi$, tales que :

$$t_1 + h_1, \ldots, t_{m-1} - h_{m-1}, t_m + \xi, t - h_{m+1}$$

están en D y

$$t_1 < t_1 + h_1 < \cdots < t_m + h_m < t_m + \xi < t_{m+1} - h_{m+1} < t_{m+1}.$$

Entonces:

$$\sum_{j=1}^{m-1} \varphi_j \left(\left\| \frac{u(t_{j+1} + h_{j+1}) - u(t_{j+1})}{h_{j+1}} - \frac{u(t_j + h_j) - u(t_j)}{h_j} \right\| \right) +$$

$$\varphi_m \left(\left\| \frac{u(t_m) - u(t_{m+1} - h_{m+1})}{h_{m+1}} - \frac{u(t_m + \xi) - u(t_m + h_m)}{\xi - h_m} \right\| \right) \leq V^S_{(\phi,2)}(u).$$

Tomando límite en la desigualdad anterior, cuando $\xi \to 0$ y $h_j \to 0$, $j = 1, \ldots, m+1$, resulta:

$$\sum_{j=1}^{m} \varphi_j \left(\| u'(t_{j+1}) - u'(t_j) \| \right) \leq V^S_{(\phi,2)}(u).$$

Si $t_1 = a$, obtenemos $u'_+(a)$ en lugar de $u'(a)$.

De esta forma concluimos que u' cumple las condiciones del Lema 4.3.2 en D. Entonces podemos definir $\overline{u} : [a,b] \to \mathbb{X}$, por:

$$\overline{u}(t) := \begin{cases} u'(t). & t \in D \\ u'_D(t-0), & t \in (a,b] - D \\ u'_D(a+0), & t = a \notin D. \end{cases}$$

Por construcción se verifica la condiciones a.

Verifiquemos que $\overline{u} \in V^S_{(\phi,1)}([a,b], \mathbb{X})$.

Sean $I_n = [t_n, s_n], n = 1, \ldots, m$ una familia de intervalos de $I_F(a, b)$. Consideremos varios casos, dependiendo si algunos de los extremos de los intervalos $I_n, n = 1, \ldots, m$ es un punto de E.

Caso 1: Supongamos que un extremo de uno sólo de estos intervalos es un elemento de E.

1a: Adicionalmente asumamos que éste extremo es el extremo derecho, digamos s_p, del intervalo I_p para algún $p = 1, \ldots, m$.

Consideremos un punto $s'_p \in D \cap (s_p, t_p)$ y remplacemos en la familia el intervalo I_p por $I'_p = [t_p, s'_p]$. Como los extremos de esta nueva colección de intervalos están en D, tenemos que:

$$\sum_{n=1}^{p-2} \varphi_n \left(\|\overline{u}\left[I_{n+1}\right] - \overline{u}\left[I_n\right]\|\right) + \varphi_{p-1}\left(\left\|\overline{u}\left[I'_p\right] - \overline{u}\left[I_{p-1}\right]\right\|\right) +$$

$$\varphi_{p-1}\left(\left\|\overline{u}\left[I_{p+1}\right] - \overline{u}\left[I'_p\right]\right\|\right) + \sum_{n=p+1}^{m-1} \varphi_n \left(\|\overline{u}\left[I_{n+1}\right] - \overline{u}\left[I_n\right]\|\right) \leq$$

$$V^S_{(\phi,2)}(u, [a, b], \mathbb{X}).$$

Manteniendo s'_p en D y tomando límite cuando $s'_p \uparrow s_p$, tenemos que $u(s'_p) \to u_D(s_p - 0)$. De esta manera

$$\sum_{n=1}^{m-1} \varphi_n \left(\|\overline{u}[I_{n+1}] - \overline{u}[I_n]\|\right) \leq V^S_{(\phi,2)}(u). \tag{4.3.4}$$

1b: Supongamos ahora, que el único punto que es extremo de un sólo intervalo $I_n, n = 1, \ldots, m$ es el extremo izquierdo t_p de I_p para algún $p = 1, \ldots, m$. Entonces este intervalo es disjunto con el resto de los intervalos; y como hay una cantidad finita, existe un punto $t'_p \in D$, $t'_p < t_p$, tal que el intervalo $I'_p = [t'_p, s_p]$ no intersecta al resto de los intervalos $I_n, n \neq p$. Ahora sustituimos el intervalo I_p por I'_p y procedemos como en el caso 1a.

Caso 2: Supongamos que un punto de E es extremo dos intervalos: I_p, I_{p+1}, para algún $p = 1, \ldots, m$. Entonces $t_p < s_p = t_{p+1} < s_{p+1}$. Tomemos $s'_p \in D$ tal que $t_p < s'_p < s_p$ y remplacemos el intervalo I_p por $I'_p = [t_p, s'_p]$ y el intervalo I_{p+1} por el intervalo $I'_{p+1} = [s'_p, t_{p+1}]$. Como los extremos de esta nueva colección de intervalos están en D resulta:

$$\sum_{n=1}^{p-2} \varphi_k \left(\|\overline{u}[I_{n+1}] - \overline{u}[I_n]\|\right) + \varphi_{p-1} \left(\left\|\overline{u}[I_p'] - \overline{u}[I_{p-1}]\right\|\right) + \varphi_p \left(\left\|\overline{u}[I_{p+1}'] - \overline{u}[I_p']\right\|\right) +$$

$$\varphi_{p+1} \left(\left\|\overline{u}[I_{p+2}] - \overline{u}[I_{p+1}']\right\|\right) + \sum_{n=p+2}^{m-1} \varphi_n \left(\|\overline{u}[I_{n+1}] - \overline{u}[I_n]\|\right) \leq$$

$$V^S_{(\varphi,2)}(u).$$

Manteniendo s_p' en D y haciendo $s_p' \to s_p$, obtenemos que se verifica la desigualdad (4.3.4).

Caso 3: Asumamos que un número finitos de puntos de E son extremos de algunos de los intervalos $I_n, n = 1, \cdots, m$. Entonces procedemos de manera similar a los casos anteriores tomando un número finito de límites.

Cualquiera sea la situación se concluye que $u \in V^S_{(\varphi,1)}([a.b], X)$ y

$$V^S_{(\varphi,1)}(\overline{u}) \leq V^S_{(\varphi,2)}(u).$$

Y del teorema 2, obtenemos la otra desigualad. □

Finalmente tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.3.2. *Sean $\mathbb{X}$ un espacio de Banach reflexivo, $\phi = \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ un ϕ-sucesión. Una función $u \in V^S_{(\phi,2)}([a,b], \mathbb{X})$ si y sólo si es la integral (Bochner) indefinida de una función de ϕ-variación acotada en el sentido de Schramm.*

4.4. Algunos problemas para investigar.

Aquí presentamos algunos problemas para futuras investigaciones.

1. Generalizar el concepto de ϕ-segunda variación en el sentido de Schramm a un concepto de ϕ-k variación en el sentido de Schramm, para funciones $u : E \to \mathbb{X}$, donde $\mathbb{X}$ es un espacio normado, en particular para multifunciones.
2. Determinar cuáles de las propiedades del Teorema 4.2.1 o de la Proposición (4.3.1) son ciertas.

3. Determinar si es posible demostrar un teorema de representación para estas nuevas funciones, tipo Jordan, tipo Riesz a través de una integral tipo Serpiński-Federer-Chistyakov, como composición de funciones.
4. Demostrar un teorema tipo Teorema 4.3.2 y su corolario.
5. Estudiar algunos problemas relacionados con el operador de composición, como actuación, lipschitzidad local o global, acotación uniforme.

Conclusiones

En este trabajo se realizaron varios aportes al tema de variaciones de funciones. En primer lugar se introdujo un nuevo concepto de variación que denominamos (p,k)-variación en el sentido de Riesz, el cual combina los conceptos de p-variación de Riesz de 1910 y de k-variación estudiado por T. Popoviciu en la década de los treinta del siglo pasado, siguiendo las ideas desarrolladas por N. Merentes en el año 1992 con la noción de segunda variación en el sentido de Riesz.

En este punto como resultados de relevancia, se demostró una generalización del lema de Riesz, caracterizando las funciones que tienen (p,k)-variación en el sentido de Riesz en un intervalo $[a,b]$ de la recta, como aquellas funciones que tiene derivada de orden $k-1$ absolutamente continua y derivada de orden k en $L_p[a,b]$; exponiendo una fórmula para calcular la (p,k)-variación. Además se dotó al espacio de estas funciones de una estructura de espacio de Banach.

Otro resultado en relación a este espacio, es que se logró verificar que la Lipschitzidad global del operador de composición en la condición de Matkowski, se puede relajar por una condición de acotación uniforme.

En segundo lugar se presenta otro nuevo concepto de variación que generaliza la noción de (p,k)-variación en el sentido de Riesz; y que denominados (φ,k)-variación en el sentido de Riesz; y para el cual combinamos los conceptos de φ-variación en el sentido de Riesz, estudiado por Yu. T. Medve'ed en 1953 y de k-variación de T. Popoviciu.

Logramos obtener otra generalización del lema de Riesz, comprobando que la clase de funciones que tienen (φ,k)-variación en el sentido de Riesz en un intervalo $[a,b]$ de la recta, son aquellas que tiene derivada de orden $k-1$ absolutamente continua y derivada de orden k en el espacio de Orlicz $L_\varphi[a,b]$; y presentamos una manera para calcular la (φ,k)-variación. Además se dotó al espacio generado por estas clase de funciones de una estructura de espacio de Banach.

Usando esta generalización del lema de Riesz, se dieron condiciones necesarias y suficientes para que estas clase de funciones sea un espacio vectorial y para que dos clases de esta funciones, construidas a partir de φ-funciones distintas, tengan una relación de inclusión; o que dicha relación se cumpla con los respectivos espacios generados por esas clases.

Además introducimos un nuevo concepto de segunda ϕ-variación en el sentido Schramm, para funciones definidas en un intervalo de la recta, con valores en un espacio normado; y logramos demostrar que toda función con segunda ϕ-variación acotada en el sentido Schramm, es la integral indefinida de una función de ϕ-variación acotada en el sentido Schramm.

Algunos problemas que se plantearon y que pueden dar continuidad a la investigación desarrollada para la realización de esta tesis, son:

- Determinar si los espacios $RV_{(p,k)}[a,b]$ o $RV_{(\varphi,k)}[a,b]$ son un álgebra de Banach.

- Generalizar los conceptos de k-variación de Popoviciu, (p,k)-variación y (φ,k)-variación en el sentido de Riesz, para funciones definidas en un subconjunto E de la recta y que toman valores en un espacio normado. Demostrar una versión el Lema de Riesz y sus consecuencias.

- Estudiar condiciones sobre actuación, lipschitzidad local y global o acotación uniforme del operador de composición en estos espacios.

Referencias

[1] A. Acosta, W. Aziz, J. Matkowski, N. Merentes, Uniformly continuous composition in the space of φ-variation functions in the sense Riesz, Fasc. Math, 43 (2010), 5-11

[2] C. R. Adams, J. A. Clarkson, On definitions of bounded variation for functions of two variables, Trans. Amer. Math. Soc., vol 35, no. 4 (1933), 824-854. .

[3] C. R. Adams, J. A. Clarkson, Properties of functions $f(x, y)$ of bounded variation, Trans. Amer Math Soc, vol 36, no. 4 (1934), 771-730.

[4] L. Anzola, N. Merentes, J. L. Sánchez, Algunas extensiones a $\mathbb{R}^2$ de la noción de función con Λ-variación acotada en el sentido de Waterman. Ponencia presentada en las XXIV Jornadas Venezolana de Matemáticas. Barquisimeto. Venezuela. 2011.

[5] T. M. Apostol, Análisis Matemático, Editorial Reverté, s. a. España, 1981.

[6] J. Appell, The superposition operator in functions spaces – a survey, Expositiones Math. 6, 3 (1988), 209–270.

[7] J. Appell, J. Banás, N. Merentes, Functions of bounded variation and Nemyskij operator. En preparación.

[8] J. Appell, N. Guanda, M. Väth: Function spaces with the Matkowski property and degeneracy phenomena for nonlinear composition operators, Fixed Point Theory (Cluj), to appear.

[9] J. Appell, E. De Pascale, P. P. Zabrejko, An application of B. N. Sobolovskij's fixed point principle to nonlinear singular equations, Z. Anal. Anwend, 6 (1987), 193-208.

[10] J. Appell, P. P. Zabrejko, Nonlinear Superposition Operators, Cambridge University Press, Cambridge 1990; Paperback Ed.: Cambridge 2008.

[11] F. Armao, Sobre operadores de composición uniformemente acotados en espacios de funciones de variación acotada en el sentido de Popoviciu. Trabajo Especial de Grado presentado para optar al título de Licenciado en Matemática. Universidad Central de Venezuela. Caracas. Venezuela. 2011.

[12] F. Armao, D. Głazowska, S. Rivas, J. Rojas, Uniformly bounded composition operators in the banach space of bounded (p, k)-variation in the sense of Riesz-Popoviciu. Enviado a publicación.

[13] C. Arzelà, Sulle funzioni di due varaibili a variasione limitada, Rend. Bologna (2) vol. 9 (1904-05), 100-107.

[14] J-P Aubin, A. Celina, Differential inclusion (set valued maps and viability theory), Springer-Verlag, 1984.

[15] J-P. Aubin, H. Frankowska, Set-valued analysis, Birkhäusee, Basel, 1990.

[16] M. Avdispahič, Concepts of generalized bounded variation and the theory of Fourier series, Proc. Internat. J. Math. & Math. Sci. Vol. 9, no.2 (1986), 233-244.

[17] M. Avdispahič, On the classes ΛBV and $V(v)$, Proc. Amer. Math. Soc. Vol 95 no.2 (1995), 230-234.

[18] L. Avila, Funciones de p-variación acotada en el sentido de Wiener y Riesz, Trabajo de Pasantía, Universidad Nacional Abierta, Pto. Fijo, Venezuela, 1994.

[19] W. Aziz, Algunas extensiones a $\mathbb{R}^2$ de la noción de función con φ-variación acotada en el sentido de Riesz y controlabilidad de las RNC, Tesis Doctoral. Universidad Central de Venezuela. Caracas. Venezuela. 2009.

[20] W. Aziz, A. Azócar, J. Guerrero, N. Merentes, Uniformly continuous compostion operator in the space of functions φ-variation with weight in the sense of Riesz, Nonlinear Anal. 74 (2011), 573-576.

[21] W. Aziz, J. A. Guerrero, N. Merentes, J. L. Sánchez, Lipschitzian composition operator in the space $\kappa BV[a,b]$. Enviado a publicación (2011).

[22] W. Aziz, H. Leiva, N. Merentes, B. Rzepka, A Representation Theorem for φ–variation of functions in the sense of Riesz, Comment. Math Vol 50, no.2 (2010), 109-120.

[23] W. Aziz, H. Leiva, N. Merentes and J. L. Sánchez, Functions of two variables with bounded φ-variation in the sense Riesz. J. Math. Appl. 32 (2010), 5-23.

[24] W. Aziz, J. Matkowski, N. Merentes: Uniformly continuous composition opera- tors in the space of bounded φ-variation in the sense of Riesz, Fasciculi Math. 43 (2010), 5–11.

[25] A. Azócar, A. Guerrero, J. Matkowski, N. Merentes, Uniformly continuous set- valued composition operators in the space of continuous functions of bounded variation in the sense of Wiener, Opuscula Math. 30 (2010), 53-60.

[26] M. Balcerzak, S. A. Belov, V. V. Chisyakov, On Helly's principle for meric semigroup valued BV mappings of two real variables, Bull Austral. Math. Soc. 66 (2002), 245-257.

[27] S. Banach, Sur les lignes rectifiables et les surface dont l'aire est finite, Fund. Math, 7 (1925), 225-236.

[28] V. Barbu, Th. Precupanu, Convexity and optimization on Banach spaces, Sijthof and Noordhoff, Nederlands, 1978.

[29] S. A. Belov, V. V. Chistyakov, A selections principle for mappings of bounded variation, J. Math. Anal. Appl, 249 (2000), 351-366.

[30] C. Berge, Espaces Topologiques et Fonctions Multivoques, Dunod. París. 1959.

[31] Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myskis, V. V. Obukhovskii, Multivalued mappings, J. Soviet Math. no.6 24 (1984), 719-786.

[32] M. Bracamonte, Generalización de las nociones de ϕ-variación de funciones vectoriales, Tesis Doctoral, Universidad de los Andes, Merida, Venezuela 2012.

[33] M. Bracamonte, J. Ereu, J. Giménez, N. Merentes, ϕ-variación acotada de funciones de varias variables. Ponencia presentada en las XXIV jornadas Venezolana de Matemática. Barquisimeto. Venezuela. 2011.

[34] M. Bracamonte, J. Ereú, J. Giménez, N. Merentes, Metric Semigroup-valued functions of bounded Riesz Φ-variation in several variables. Enviado a publicación.

[35] M. Bracamonte, J. Giménez, N. Merentes, On second Riesz Φ-variation of normed space valued maps, Adv. Pure Math. (2) 2012, 45-58.

[36] M. Bracamonte, J. Giménez, N. Merentes, Vector valued functions of Φ–bidimensional bounded variation. Enviado a publicación.

[37] P. S. Bullen, An inequalities for variations, Amer. Math. Monthly, 90 (1983) 561.

[38] R. L. Burden J. D. Faires, Numerical Analysis, Books-Cole, edition 7, 2004.

[39] C. Castaing, M. Valadier, Convex analysis and measure multifunctions (lecture notes ina Math 580), Springer-Verlag, erlin-Heidelberg-New York, 1977.

[40] V. V. Chistyakov, On mappings of bounded variation, J. Dyn. Control Syst. 3, no. 2 (1997), 261-289.

[41] V. V. Chistyakov, Generalized variation of mappings with applications to composition operators multifunctions, Postivity, 5 (2001), 323-358.

[42] V. V. Chistyakov, Lipschitzian superposition operators between spaces of functions of bounded generalized variation with weight, J. Appl. Anal., Vol. 6, no. 2 (2000), 173-186.

[43] V. V. Chistyakov, Mappings of bounded variation with values in a metric spaces: generalizations. J. Math. Sciences, Vol. 100, 6 (2000), 2700-2715.

[44] V. V. Chistyakov, Mappings of generalized variation and composition operators, J. Math. Sci. Vol. 110 (2) 2002, 2455-2466.

[45] V. V. Chistyakov, Superposition operators in the algebra of fuctions of two variables with finite total variation, Moanatsh. Math. 137 (2002), 99-114.

[46] V. V. Chistyakov, A Banach algebra of functions of several variables of finite total variation and Lipschitzian superposition operators I. Nonlinear Anal. 62 (2005), 559-578.

[47] V. V. Chistyakov, A Banach algebra of functions of several variables of finite total variation and Lipschitzian superposition operators I.I Nonlinear Anal. 63 (2005), 1-22.

[48] V. V. Chistyakov, O. E. Galkin, On maps of bouded p-vraition with p>1, Positivity, 2 (1998), 19-45.

[49] V. V. Chistyakov, O. E. Galkin, Mappimgs of bounded Φ-variation with arbitrary function Φ, J. Dyn. Control Syst. 4, no. 2 (1998), 217-247.

[50] V. V. Chistyakov, A. Rychlewicz, On the extension and generation set-valued mappings of bounded variation, Studia Math. 153 (3) (2002), 235-247.

[51] V. V. Chistyakov, O. M. Solycheva Lipschitzian operator of substition in the algebra ΛBV^*, J. Difference Equ. Appl. Vol. 9 3/4 (2003), 407-416

[52] V. V. Chistyakov, Y. V. Tretyschenco, Maps os several variables of finite total variation and Helly-type selection principles , J. Math. Anal. Appl, Vol. 370, no. 2 (2010), 672-686 (Part I), Vol. 369, no. 1 (2010), 82-93, (Part II).

[53] J. B. Conway, Functions of one complex variable, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1973.

[54] D. S. Cyphert, J. A. Kelingos, The descomposition of functions of -variation into differences of -decreasing functions, Studia Math. 81 (1985), 185-195.

[55] M. Cotlar, R. Cignoli, An introducction to functional analysis, Noth-Holland Publishing Company,1974.

[56] Z. Cybertowicz, W. Matuszewska, Functions of bounded generalized variations, Comment. Math. Prace. Mat. 20 (1977), 29-52.

[57] L. De Carli, K Kazarian, M. Millman (ed), Topics in classical analysis and applicattions in honor of Daniel Waterman, World Scientific publishing Co. Pte. Ltd (2008).

[58] L. D' Jesus, Espacio de Variación Acotada en el Sentido de Waterman. Trabajo Especial de Grado presentado para optar al título de Licenciado en Matemática. Universidad Central de Venezuela. Caracas. Venezuela. 1995.

[59] Ch. J. de la Vallée Poussin, Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordennées equidistantes, Bull. Acad. Sei. Belg. (1908), 314-410.

[60] J. Diestel, J. J. Uhl, Vector measure, Math Surveys, 15 , Amer. Math. Soc. 1977.

[61] J. P. G. L. Dirichlet, Sur la co nvergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, J. Reine Angew. Math. 4 (1829), 157–169.

[62] M. I. Dyachenko. W. Waterman, Convergence of double Fouries series and W-class, Trans. Amer. Math. Soc. (357) 1 (2004), 397-407.

[63] J. Ereu, T. Giménez, N. Merentes. On bi-dimensional second μ-variation. Enviado a publicación.

[64] T Ereu, N. Merentes, J. L. Sánchez, Some remarks on the algebra of functions of two variables with bounded total Φ-variation in Schramm sense. Commentationes Math. 1 (2010).

[65] H. Federer, Geometric measure theory, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.

[66] J. B. J. Fourier, Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corpes solides (extrait), Nouv. Bull. Sci. Soc. Phil. de París, no. 6 (1808), 112–116.

[67] M. Fréchet, Sur les fonctionnelles continues, C. R . Acad. Sci. Paris, 150 (1910), 1231-1233.

[68] M. Fréchet, Sur les fonctionnelles bilinéaires, Trans. Amer. Math. Soc, 16 (1915), 216-234.

[69] F. W. Gehring, A study of α-variation I, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 76 no. 3 (1954), 420-443.

[70] J. Giménez, N. Merentes, S. Rivas, Integral representation of functions of bounded second ϕ-variation in the sense of Schramm, Opuscula Math. Vol 32, no. 1 (2012), 137-151.

[71] D. Głazowska, Z. Jesús, J. Matkowski, O. Mejías, Uniformly bounded composition operators in the Banach space of bounded $(\varphi, k)-$variation in the sense of Riesz-Popoviciu. Enviado a publicación.

[72] J. A. Guerero, Extensión a $\mathbb{R}^2$ de la noción de función de variación acotada en el sentido de Hardy-Vitaly-Wiener, Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela, 2010.

[73] A. Guerrero, H. Leiva , J. Matkowski, N. Merentes, Uniformly continuous composition operators in the space of bounded φ-variation functions, Nonlinear Anal. 72 (2010), 3119-3123.

[74] H. Hanh, Theorie der Reellen Funktionen, 1 Springer, (1921), 539-547.

[75] G. H. Hardy, On double fourier series, and especially those which represent the double zeta–function width real and inconmesurable parameters, Quart. J. Math. Oxford. 37 (1905/06), 53–79.

[76] F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig (1914).

[77] F. Hausdorff, Set theory, Chelsea, reprint (1978) (Translated from German).

[78] A. Hernández, Espacio de Φ-variación acotada en el sentido de Schramm (ΦBV[a,b]). Trabajo de Ascenso para optar a la categoría de profesor Asistente. Facultad de Ingeniería Univesidad Central de Venezuela. Caracas Venezuela. 1996.

[79] A. Hernández, Funciones de Φ−variación acotada en el sentido de Schramm, Ponencia presentada en las IX Jornadas de Matemáticas. Maracaibo, Venezuela, 1996.

[80] E. Hewitt, K Stromberg, Real and abstract analysis, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978.

[81] F. N. Huggins, A generalization of theorem of F. Riesz, Pacicific J. Math. Vol. 39, no. 3 (1971), 695-701.

[82] E. Isaacson, B. Keller, Analysis of Numerical Methods, Dover Publication, Inc, New York (1966).

[83] Z. Jesús, O.Mejias, M. Wróbel, Uniformly bounded composition operator in the space of functions of bounded ϕ-variation in the sense of Schramm. Enviado a publicación.

[84] C. Jordan, Sur la série de Fourier, C. R. Acad. Sci. París, (1881), 228-230.

[85] H.-J. Kim, Some properties of functions of generalized bounded variation, Kangweon-Kyungki Math. J. (12) 2 (2004), 117–125.

[86] H.-J. Kim, Absolute continuity of functions of $\phi\Lambda BV$, J. Appl. Math. & Computing Vol 22, No. 1-2 (2006), 557-562.

[87] S. K. Kim, J. Kim, Functions of $\kappa\phi$-bounded variation, Bull. Korean Math. Soc. no.2 23 (1986), 171-175.

[88] S. K. Kim, J. Yoon, Riemann-Stieltjes integral of functions of κ-bounded variation, Comm. Korea Math. Soc. 5 (2) (1990), 65-73.

[89] J. Knop, On globally Lipschitzien Nemytskii operator in special Banach space of functions, Fasciculi Math. 21 (1990), 79-85.

[90] B. Korenblum, An extension of the Nevalinna theory, Acta Math. 135 (1975), 187- 219.

[91] T. Kostrzewski, Globally lipschitzian operators of sustitution in Banach spaces $BC[a, b]$, Sci. Bull. Lódź Techn. Univ. Mat. 602 (1993), 17-27.

[92] M. A. Krasnosel'skiĭ, Ya. R. Rutickiĭ, Comvex functions and Orlicz Spaces, P. Noordhoff Ltd-Gronigen The Netherkands (1961).

[93] M. Kuczman, An introduction to the theory of functional equations, Polish Scientific Editors and Silesian University, Wasawa-Krakóv-Katowice, 1985.

[94] A. Kufner, O. John, S. Fučik, Functions spces, Academia publishing house of the Czecholovak academy of sciences, Praga (1977).

[95] H. Leiva, N. Merentes, J. Sánchez, S. Rivas, On functions of bounded (φ, k)-varaition. Enviado a publicación.

[96] Lupa, M., From of Lipschitzian operator of subtitution in some class of functions, Zeszyty Nauk. Politek. Lódz, 21 (1989), 87-96.

[97] L. Maligranda, W. Orlicz, On some properties of functions of generalized variation, Mh. Math., 104 (1987), 53-65.

[98] C. Maniscalco, A structural theorem for metric space valued mappings of ϕ-bounded variation, Real. Anal. Exchange, Vol. 35 (1) (2009/2010), 79-90.

[99] Matkowska, A., On the characterization of Lipschitzian operator of substitution in the class Höder's funtions, Zeszyty Nauk. Politech. Lódz. Mat. 17 (1984), 81-85.

[100] [41] A. Matkowska, J. Matkowski, N. Merentes, Remark on globally Lipschitzian composition operators, Demostratio. Math. 1, 28 (1995), 171-175.

[101] J. Matkowski, Functional equations and Nemytskij operators, Funkcial. Ekvac. 25 (1982), 127-132.

[102] J. Matkowski, Form of Lipschitz operators of subtitution in Banach spaces of differentiable funtions, Zeszyty Nauk. Politech. Lódz. Mat. 17 (1984), 5-10.

[103] J. Matkowski, Lipschitzian composition operators in some functions space, Nonlinear Anal. 30 (2) (1997), 719-726.

[104] J. Matkowski, Uniformly continuous superposition operators in the spaces of differentiable functions and absolutely continuous functions, Internat. Ser. Numer. Math. 157 (3) (2008), 155–166.

[105] J. Matkowski, Uniformly continuous superposition operators in Banach space of Holder function, J. Math. Anal. App. 359, (2009), 56-61.

[106] J. Matkowski, Uniformly continuous superposition operators in the space of bounded variation functions, Math. Nach. 283, 7 (2010), 1060-1064.

[107] J. Matkowski, Uniformly bounded composition operators between general Lipschitz functions normed spaces, (Aceptado) (2011) Top. Math. Nonl. Anal.

[108] J. Matkowski, N. Merentes, Characterization of globally Lipschitzian composition operator in the Banach space $BV_p^2[a,b]$, Arch. Math (Brno), 28 (1992), 181-186.

[109] J. Matkowski, N. Merentes, Characterization of Globally Lipschitzian composition operators in the Sobolev space $W_p^n[a,b]$, Zeszyty Nauk. Politech. Lódz. Mat. 24 (1993), 90-99.

[110] J. Matkowski, J. Mís, On the characterization of Lipschitzian operators of substitution in the space BV [a, b], Math. Nach. 117 (1984), 155-159.

[111] J. Matkowski, M. Wróbel, Uniformly bounded Nemyskij operator generated by set-valued functions between Hölder functions space. Enviado a publicación.

[112] Yu. T. Medved'ed, A generalization of certain theorems of Riesz (en ruso), Uspekhi Mt, Nauk. 8 (1953), 115-118.

[113] N. Merentes, Functions of bounded $(\varphi, 2)$-variation, Annales Univ. Sci. Budapest, 34 (1991), 145-154.

[114] N. Merentes, On a characterization of Lipschipzian operators of subtitution in the space of bounded Riesz φ-variation, Ann. Univ. Sci. Budapest, 34 (1991), 139-144.

[115] N. Merentes, On functions $(p, 2)-$variation, Collect. Math. 43, 2 (1992), 117-123.

[116] N. Merentes, S. Rivas, On Characterization of Lipschitzian composition operators between spaces of bounded p-variation, Czech. Math. 45 (120) (1995), 627-637.

[117] N. Merentes and S. Rivas, On Nemytskii operator in the space of set- valued functions of bounded p-variation in the sense of Riesz. Publ. Math. Debrecen. 47, 1-2 (1995), 15-27.

[118] N. Merentes, S. Rivas, El operador de composición en espacios con algún tipo de variación acotada, IX Escuela Venezolana de Matemáticas, Merida, Venezuela, 1996.

[119] N. Merentes, S. Rivas, José L. Sánchez, On functions of bounded (p, k)-variation, J. Funct. Spaces Appl. por aparecer.

[120] N. Merentes, S. Rivas, José L. Sánchez, Funciones de (p, k)-variación acotada en el sentido de Riesz. Ponencia presentada en las XXIV Jornadas Venezolana de Matemáticas. Barquisimeto. Venezuela. 2011

[121] N. Merentes, J. L. Sánchez, Characterization of globility Lispschitz Nemytskiĭ operator between spaces of set-valued functions of bounded φ-variation in the sense of Riesz, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 52, no. 4 (2004), 417-430.

[122] S. K. Mukhopadhyay, S. N. Mukhopadhyay, Functions of bounded kth variation and absolutaly kth continuous functios, Bull. Austral Math. Soc. 46 (1992), 91-106.

[123] J. Musielak, W. Orlicz, On generalized variations (I), Studia Math. 18 (1959), 11-41.

[124] J. Musielak, W. Orlicz On modular spaces, Studia Math. 18 (1959), 49-65.

[125] I. P. Natanson, Theory of functions real variable, Vol 1, Translated from the Russian by L. F. Boron, E. Hewitt. Fredirck Ungar Publishing Co New York, 1964.

[126] M. T. Neves, φ-variación en el sentido de Wiener y Riesz y el operador de composición, Trabajo de Pasantía, Universidad Nacional Abierta, Aragua, Venezuela, 1994.

[127] J. Park, On the functions of bounded $\kappa\phi$-variations (I). J. Math. Informat. no.1-2 28 (2010). 487-498

[128] J. Park, S. H. Choo, Functions of $\kappa G\phi$-bounded variation, J, Appl. Mtah. Comput. no. 1-2, 13 (2003), 447-455.

[129] S. Perlman, Functions of generalized variation, Fund. Math. 105 (1980), 199-211.

[130] S. Perlman, D. Waterman, Some remarks on functions of Λ-bounded variation, Proc. Amer. Math. Soc. (74), 1 (1979), 113-118.

[131] J. Pierpont, Lectures on the theory of functions of real variables, 1 , Dover, reprint (1959).

[132] T. Popoviciu, Sur les fonctions convexes d'une variable réelle, C. R. Sci. Paris 190 (1930) 1481-83.

[133] T. Popoviciu Sur quelques propriétés des fonctions d'une variable réelle convexes d'order superior, Mathematica (cluj) 8 (1934), 1-85.

[134] F. Prus-Wiśnioski, Functions of Bounded Λ-variation, L. De Carli, K. Kazarian, M Milman (ed), Topics in classical analsis and applications in honor of Daniel Waterman, World Scientific publishing Co. Pte. Ltd, 2008.

[135] M. M. Rao, Z. D. Ren, Applications of Orlicz spaces. Marcel Dekker, Inc, New York . Basel, 2002.

[136] F. Riesz, Untersucheng uber systeme integrierbarer funktionen, Math. Analen, 69 (1910), 449-497.

[137] F. Riesz Sur certain systeme singuliers d'equations integrales Ann. Ecole Norm. Sup. Paris. (3) 28 (1911), 33-68.

[138] S. Rivas, El operador de composición entre espacios de Riesz, Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela, 1991.

[139] S. Rivas, Sobre la noción de (φ, k)-variación acotada y la lipschitzidad global del operador de composición entre espacios de Banach, Trabajo de Ascenso para optar a la categoría de profesor Asociado. Univesidad Nacional Abierta. Caracas Venezuela. 1994.

[140] S. Rivas, Lipschitzidad global del operador de composición entre espacios de p-variación acotada en el sentido de Wiener, Ponencia presentada en las VII jornadas de Matemáticas, Barquisimeto, Venezuela, 1994.

[141] G. R. Roa, Funciones fuertemente convexas y fuertemente midconvexas, Trabajo Especial de Grado presentado para optar al título de Licenciado en Matemática, Universidad Central de Venezuela, Caracas, 2011.

[142] A. W. Roberts, D. E. Varberg, Convex Functions, Academic Press, New York and London, 1973.

[143] J. Rojas, Sobre operadores de composición uniformemente acotados en espacios de funciones de variación acotada en el sentido de Riesz-Popoviciu. Trabajo Especial de Grado presentado para optar al título de Licenciado en Matemática. Universidad Central de Venezuela. Caracas. Venezuela. 2011.

[144] H. R. Romero, Funciones Convexas, Trabajo de Pasantía, Universidad Nacional Abierta, Maracaibo, Venezuela, 1999.

[145] W. Rudin, Functional analysis, Tata McGraw-Hill publishing company LTD, New Delhi, 1973.

[146] W. Rudin, Real complex analysis, McGraw-Hill series in higher mathematics, second edition, New York, 1974.

[147] A. M. Russell, Functions of bounded second variation and Stieltjes-type integrals, J. London Math. Soc. (2) 2 (1970), 193-208.

[148] A. M. Russell, Function of bounded kth-variation, Proc. London Math Soc. (3) 26 (1973), 547-563.

[149] A. M. Russell A Banach space of functions kth variation. Bull. Austral. Math. Soc. 15 (1976), 431-438.

[150] A. M. Russell, Futher results on integral representation of functions of generalized variation, Bull, Austral Math. Soc. Vol 18, (1978), 407-420.

[151] A. M. Russell, Some inequalities arising from a Banach algebra norm, J. Austral. Math. Soc. (series A) 34 (1983), 199-202.

[152] A. M. Russell, C. J. F. Upton, A generalization of a theorem by F. Riesz, Anal. Math. 9 (1983), 69-77.

[153] A. A. Saakyan, On the convergence of double Fourier series of functions of bounded harmonic variation. (Russian) Izv. Akad. Nauk Armyan. SSR Ser. Mat. 21 (1986), no. 6, 517–529; English transl., Soviet J. Contemp. Math. Anal. 21 (1986), no. 6, 1–13.

[154] A. I. Sablin, Λ-variation and Fourier series. (Russian) Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 10 (1987), 66–68; English transl., Soviet Math. (Iz. VUZ) 31 (1987), no. 10, 87–90.

[155] J. L. Sánchez, Funciones conjunto valuadas y el operador de composición, Tesis de Maestría. Universidad Central de Venezuela. Caracas. Venezuela. 1996.

[156] D. N. Sain, S. N. Mukhopadhyay, Banach space of functions of bouded n-th variation, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, Vol. 20, no.3 (1992), 231-240.

[157] M. V. Sanoja, Funciones de χ-variación acotada en un intervalo y un teorema de representación de Korenblum, Trabajo Especial de Grado presentado para optar al título de Licenciado en Matemática. Universidad Central de Venezuela. Caracas. Venezuela. 2011.

[158] M. Schramm, Functions of bounded Φ-variation and Riemann-Stieltjes integration, Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1985), No. 1, 49–63.

[159] A. Sieczko, Characterization of globally lipschitzian Nemytskii operators in the Banach space, ACr-1, Math. Nach. 141 (1989), 7-11.

[160] W. Sierpinski: Sur une propriéte des fonction qui nónt que des discontinuités de premiere espece. Bull. Acad. Roumaine 16 (1933), 1-4.

[161] Smajdor, A., Smajdor, W., Jensen equation and Nemytskij operator for set-valued functions, Radovi Math. 5 (1989), 331-319.

[162] Y-U Sok, J-K Park, A study on the functions of $\kappa\phi$-bounded variations, J. Chungcheong Math. Soc. 2 (1989), 55-64.

[163] L. Tonelli, Sulla quadratura delle superficie, Rend. Accad. Lincei. (6) 3 (1926), 312-357.

[164] G. Vitali, Sulle funzioni integrali, Atti Accad. Schi. Torino CI Sci. Fis. Mat. Natur. 40 (1904/05), 1021–1034.

[165] D. Waterman, On the convergence of Fourier series of Functions of generalizad bounded vatiation, Studia Math. 44 (1972), 107-117.

[166] D. Waterman, On Λ-bounded variation, Studia Math. 52 (1976), 33-45.

[167] D. Waterman, On the summability of fourier series of functions of Λ-bounded variation, Studia Math. 55 (1976), 87-95.

[168] J. R. Webb, A Hellinger integral representation bounded linear functionals, Pac. J. Math. 5 (1967), 59-66.

[169] N. Wiener, The quadratic variation of function and its Fourier coefficients, Mas- sachusett J. Math. 3 (1924), 72–94.

[170] M. Wróbel, Uniformly bounded Nemyskij operators between the Banach spaces of functions of bounded n-th variation, Enviado a publicación.

[171] L. C. Young, Sur une généralisation de la notion de variation de Pussance $\mathrm{P}^{\mathrm{ieme}}$ borneé de N. Wiener, et sur la convergence des serie de Fourier, C. R. Acad. Sci. París, Ser A-B, No. 240, (1937), 470–472.

[172] G. Zawadzka, On Lipschitzian operators of subtitution in the space of set-valued functions of bounded variation, Radovi Math. 6 (1990), 279-293.