Teoría Autodual de Espín 2 revisada

Pío J. Arias[a,c,1]**y Rolando Gaitan D.**[b,2,3]

[a]*Centro de Física Teórica y Computacional, Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, AP 47270, Caracas 1041-A, Venezuela.*

[b]*Grupo de Física Teórica, Departamento de Física, Facultad de Ciencias y Tecnología, Universidad de Carabobo, A.P. 129 Valencia 2001, Edo. Carabobo, Venezuela.*

[c]*Centro de Astrofísica Teórica, Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes, La Hechicera, Mérida 5101, Venezuela*

Resumen

Se estudian los vínculos lagrangianos de la teoría autodual de espín 2 en un espacio-tiempo plano 2+1 dimensional y la acción reducida de un grado de libertad es obtenida. Partiendo de esta formulación se calcula el álgebra de operadores mecánico-cuánticos y se explora la contribución del espín en los generadores de transformaciones.

palabras clave: Formulación Lagrangiana de campos, álgebra de Poincaré

Lagrangian constraints of the spin 2 selfdual theory in a $2+1$ flat space-time are studied and the one degree of freedom reduced action is obtained. From this formulation, the quantum operator algebra is computed and the spin contribution on transformation generators is explored.

keywords : Field's Lagrangian formulation, Poincaré algebra

pacs numbers: $11.10.Ef$, $03.70.+k$, $11.30.Cp$

[1]e-mail: parias@fisica.ciens.ucv.ve

[2]e-mail: rgaitan@fisica.ciens.ucv.ve

[3]Trabajo presentado en el IV Congreso de la Soc. Ven. de Física, Margarita, Nov. 2003

1 Introducción

Las teorías autoduales en dimensiones impares han recibido atención desde hace tiempo [1]. Particularmente, en dimensión $2+1$ poseen un interés inspirado fundamentalmente por su relación con la física de altas temperaturas en $3+1$ dimensiones [2] y con la física de la materia condensada [3,4].

En la siguiente sección estudiamos los vínculos Lagrangianos de la teoría autodual de spin 2 y construimos la acción reducida que permite establecer de manera inmediata el álgebra de operadores sin pasar por el procedimiento canónico de Dirac. En la sección 3 discutimos el espín de la excitación via los generadores del grupo de Poincaré.

2 La acción reducida

La acción de la teoría autodual del campo $h_{\mu\nu}$ con espín 2 en un espacio plano es [5]

$$S_{sd} = \frac{m}{2} \int d^3x (\epsilon^{\mu\nu\lambda} h_\mu{}^\alpha \partial_\nu h_{\lambda\alpha} - m(h_{\mu\nu} h^{\nu\mu} - h^2)) \ , \tag{1}$$

donde h es la traza del campo autodual, $\epsilon^{012} \equiv \epsilon^{12} = +1$ y métrica $\eta = diag(-1, +1, +1)$. Por ser una teoría de primer orden, la ecuación de movimiento proveniente de la extremal de S_{sd} constituye los nueve vínculos Lagrangianos primarios

$$E^{\mu\rho} \equiv \epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\nu h_\lambda{}^\rho + m(\eta^{\mu\rho} h - h^{\rho\mu}) \approx 0 \ . \tag{2}$$

La preservación de éstos proporciona las aceleraciones $\ddot{h}_{k\rho}$ más tres vínculos secundarios, que pueden ser escritos en la capa de masa como

$$\partial_\mu E^{\mu\rho} - m\epsilon^{\rho\mu\alpha} E_{\mu\alpha} \equiv -m^2 \epsilon^{\rho\mu\alpha} h_{\mu\alpha} \approx 0 \ . \tag{3}$$

Siguiendo con el procedimiento, éstos conducen a tres nuevos vínculos,

$$-m^2 \epsilon^{\rho\mu\alpha} \dot{h}_{\mu\alpha} \approx 0 \ . \tag{4}$$

Obsérvese que la combinación sobre la capa de masas $-m^2\epsilon^{\rho\mu\alpha}\partial_\rho h_{\mu\alpha} \approx 2m^3 h \approx 0$ es un vínculo, con lo cual la preservación de (4) proporciona las aceleraciones $\ddot{h}_{ok}$ y el último vínculo,

$$2m^3\dot{h} \approx 0 \ , \tag{5}$$

que al ser preservado permite despejar la aceleración faltante $\ddot{h}_{oo}$, culminando el proceso. Entonces se tiene un sistema de $9+3+3+1=16$ vínculos, indicando que hay una sola excitación.

Si el vínculo secundario es reescrito en la capa de masas como $\partial_\mu E^{\mu\rho} \equiv m\partial^\rho h - m\partial_\mu h^{\rho\mu} \approx 0$, se puede ver fácilmente que el sistema de vínculos Lagrangianos equivale a describir un campo simétrico, transverso y sin traza que satisface la ecuación $(\partial^2 - m^2){h^{Tt}}_{\mu\nu} = 0$, donde $\partial^2 \equiv \partial_\mu\partial^\mu = -\partial_o\partial_o + \Delta$.

Para exponer a nivel Lagrangiano la única excitación de la teoría, consideramos la descomposición $2+1$ [6]:

$$\begin{aligned} n = h_{00} \ , \ N_i = h_{i0} \ , \ M_i = h_{0i} \ , \\ H_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji}) \ , \ V = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ij}h_{ij} \ , \end{aligned} \tag{6}$$

con componentes transverso-longitudinales dadas por

$$\begin{aligned} N_i \equiv \epsilon_{ik}\partial_k N^T + \partial_i N^L \ , \ M_i \equiv \epsilon_{ik}\partial_k M^T + \partial_i M^L \ , \\ H_{ij} \equiv (\delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)H^T + \partial_i\partial_j H^L + (\epsilon_{ik}\partial_k\partial_j + \epsilon_{jk}\partial_k\partial_i)H^{TL} \ , \end{aligned} \tag{7}$$

en la acción (1). Usando las ecuaciones de movimiento que se obtienen es posible reescribir la acción autodual en la forma reducida

$$S^*_{sd} = \int d^3x\{P\dot{Q} - \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}\,Q(\Delta - m^2)Q\} \ , \tag{8}$$

donde se han definido las variables $Q \equiv \sqrt{2}\,\Delta H^T$ y $P \equiv \sqrt{2}\,m\Delta H^{TL}$, que satisfacen $P = \dot{Q}$. Si promovemos los campos $h_{\mu\nu}$ a sus operadores mecánico-cuánticos, se puede obtener el álgebra de éstos partiendo de la regla fundamental

$$\big[Q(x), P(y)\big]_{x^o=y^o} = i\delta^2(\vec{x} - \vec{y}) \ , \tag{9}$$

con la ayuda de la descomposición $2+1$ transverso-longitudinal. Utilizando propiedades del símbolo de Levi-civita, los conmutadores no nulos que se obtienen son

$$\big[h_{io}(x), h_{jk}(y)\big] = \big[h_{oi}(x), h_{jk}(y)\big] = \frac{i}{2m^2}\{p^{(m)}{}_{ij}\partial_k + p^{(m)}{}_{ik}\partial_j - p^{(m)}{}_{jk}\partial_i\}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ , \quad (10)$$

$$\big[h_{io}(x), h_{oo}(y)\big] = \big[h_{oi}(x), h_{oo}(y)\big] = -\frac{i}{2m^4}\,\partial_i\Delta\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ , \quad (11)$$

$$\big[h_{io}(x), h_{ok}(y)\big] = \big[h_{io}(x), h_{ko}(y)\big] = \big[h_{oi}(x), h_{ko}(y)\big] = \frac{i\,\epsilon_{ki}}{2m^3}\,\Delta\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ , \quad (12)$$

$$\big[h_{oo}(x), h_{ij}(y)\big] = \frac{i}{2m}\{\epsilon_{ki}\,p^{(m)}{}_{kj} + \epsilon_{kj}\,p^{(m)}{}_{ki}\}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ , \quad (13)$$

$$\big[h_{ij}(x), h_{kl}(y)\big] = \frac{i}{4m}\{\epsilon_{ik}\,p^{(m)}{}_{jl} + \epsilon_{jk}\,p^{(m)}{}_{il} + \epsilon_{il}\,p^{(m)}{}_{jk} + \epsilon_{jl}\,p^{(m)}{}_{ik}\}\delta^2(\vec{x}-\vec{y}) \ , \quad (14)$$

donde $p^{(m)}{}_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{m^2}$ es el proyector transversal en la capa $\Delta = m^2$.

Es de esperarse que el álgebra de operadores obtenida mediante el procedimiento de la acción reducida sea equivalente al de la realización a la Dirac[7], hecho que está sustentado por un teorema[8] que garantiza la igualdad entre los corchetes de Dirac y los de Poisson calculados con las variables reducidas.

3 Generadores del álgebra de Poincaré

Con la finalidad de construir los generadores del álgebra de Poincaré, uno puede determinar el tensor momento-energía simétrico del campo autodual ($T^{\alpha\beta}$) extendendiendo la acción autodual (1) al caso de un espacio-tiempo dotado con una métrica general $g_{\mu\nu}$, con lo cual

$$T^{\alpha\beta} = \left[\frac{2}{\sqrt{-g}}\,\frac{\delta S}{\delta g_{\alpha\beta}}\right]_{g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}} = \frac{m^2}{2}\big(h^{\sigma\alpha}h^{\beta}{}_{\sigma} + h^{\sigma\beta}h^{\alpha}{}_{\sigma} - h\,h^{\alpha\beta} - h\,h^{\beta\alpha}$$
$$- \eta^{\alpha\beta}h_{\mu\nu}h^{\nu\mu} + \eta^{\alpha\beta}h^2\big) - \frac{m}{2}\big(\partial_\sigma t^{\alpha\beta\sigma} + h_\sigma{}^{\alpha}E^{\sigma\beta} + h_\sigma{}^{\beta}E^{\sigma\alpha}\big) \ , \quad (15)$$

donde $t^{\alpha\beta\sigma} \equiv \epsilon^{\mu\alpha\nu} h_\mu{}^\beta h_\nu{}^\sigma + \epsilon^{\mu\beta\nu} h_\mu{}^\alpha h_\nu{}^\sigma$ y $E^{\mu\rho} \equiv \epsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu h_\lambda{}^\rho + m(\eta^{\mu\rho}h - h^{\rho\mu})$, como en (2).

Los generadores de translaciones $\mathcal{P}^\mu = \int d^2x\, T^{o\mu}$ se expresan en términos de Q y su momento conjugado, observándose que coinciden con los de un campo escalar, es decir

$$\mathcal{P}^o = \frac{1}{2}\int d^2x\{P^2 + \partial_i Q \partial_i Q + m^2 Q^2\} \ , \tag{16}$$

$$\mathcal{P}^i = -\int d^2x P \partial_i Q \ . \tag{17}$$

De igual manera ocurre con los generadores de rotaciones $\mathcal{J}^{ij} = \int d^2x\{x^i T^{0j} - x^j T^{0i}\} \equiv \epsilon^{ij}\mathcal{J}$, donde

$$\mathcal{J} = -\int d^2x P \epsilon^{kl} x^k \partial_l Q \ , \tag{18}$$

ya que en dos dimensiones ellas estan descritas por el grupo $O(2)$. Pero la contribución explícita del espín se pone de manifiesto cuando escribimos los generadores de los *boosts* de Lorentz

$$\mathcal{J}^{i0} = \frac{1}{2}\int d^2x\, x^i\{P^2 + \partial_i Q\partial_i Q + m^2Q^2\} - x^0\mathcal{P}^i + 2m\int d^2x\, P\frac{\epsilon^{ij}\partial_j}{\Delta}Q \ , \tag{19}$$

donde se observa el típico factor 2 de espín en el término "singular infrarrojo", indicando que Q no transforma como un campo escalar, como debe esperarse.

Para remover la "singularidad infrarroja", se expande Q en ondas planas

$$Q(x) = \int \frac{d^2k}{2\pi\sqrt{2w(\mathbf{k})}}\{e^{-ik_\mu x^\mu}a(\mathbf{k}) + e^{ik_\mu x^\mu}a^+(\mathbf{k})\}, \tag{20}$$

con $k^o = w(\mathbf{k})$, $\overrightarrow{k} = \mathbf{k}$ y $[a(\mathbf{k}), a^+(\mathbf{k}')] = \delta^2(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$. Entonces, los generadores de translaciones y rotaciones son representados por

$$\mathcal{P}^\mu = \int d^2k\, k^\mu a^+(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) \ , \tag{21}$$

$$\mathcal{J}^{ij} = \int d^2k\, a^+(\mathbf{k})\frac{\epsilon^{ij}}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}a(\mathbf{k}) \ , \tag{22}$$

con $\tan\theta = k_2/k_1$. En esta representación, el generador de *boosts* exhibe la "singularidad infrarroja"

$$\mathcal{J}^{i0} = \frac{i}{2} \int d^2k\, w(\mathbf{k}) \{a^+(\mathbf{k}) \overleftrightarrow{\partial_i}\, a(\mathbf{k})\} - 2m \int d^2k\, \frac{\epsilon^{ij}\, k^j}{\mathbf{k}^2}\, a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \ , \tag{23}$$

donde $a^+(\mathbf{k})\overleftrightarrow{\partial_i}\, a(\mathbf{k}) \equiv a^+(\mathbf{k})\partial_i\, a(\mathbf{k}) - a(\mathbf{k})\partial_i\, a^+(\mathbf{k})$.

Seguidamente, se realiza una transformación de fase [9] de la forma $a(\mathbf{k}) \longrightarrow e^{i\, s\, \frac{m}{|m|}\, \theta} a(\mathbf{k})$ sobre los operadores creación-aniquilación, con lo cual los generadores de translaciones no son afectados, mientras que los de rotaciones y *boosts* son ahora

$$\mathcal{J}^{ij} = \int d^2k\, a^+(\mathbf{k}) \frac{\epsilon^{ij}}{i} \frac{\partial}{\partial\theta}\, a(\mathbf{k}) + s \frac{m}{|m|} \int d^2k\, \epsilon^{ij}\, a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \ , \tag{24}$$

$$\mathcal{J}^{i0} = \frac{i}{2} \int d^2k\, w(\mathbf{k}) \{a^+(\mathbf{k}) \overleftrightarrow{\partial_i}\, a(\mathbf{k})\} + 2 \frac{m}{|m|} \int d^2k\, \frac{\epsilon^{ij} k^j}{w(\mathbf{k}) + |m|}\, a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \\ + (s-2)\, \frac{m}{|m|} \int d^2k\, w(\mathbf{k})\, \frac{\epsilon^{ij} k^j}{\mathbf{k}^2}\, a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \ . \tag{25}$$

Inmediatamente vemos que $s = 2$ remueve la singularidad y que cualquier otro valor diferente asignado a este parámetro mantiene el comportamiento singular de los generadores. Nótese además que el valor de espín $2\frac{m}{|m|}$ es recuperado, cuya sensibilidad al cambio de signo de m refleja la helicidad del grado de libertad que se propaga. Desde el punto de vista Lagrangiano, esta manifestación de la helicidad proviene del signo del término lineal en m de la acción (1), y sea cual sea éste debe mantenerse el signo presentado en el término cuadrático en m para poder obtener un Hamiltoniano positivo-definido, como el que se deduce de la transformada de Legendre de la acción reducida (8).

Finalmente, puede mostrarse que el álgebra de Poincaré es satisfecha durante todo el proceso, antes y después de realizarse la mencionada transformación de fase, siempre y cuando se defina de manera adecuada el contorno de integración alrrededor de la "singularidad infrarroja".

4 Conclusión

En el estudio de la teoría del campo autodual hemos mostrado que la formulación de acción reducida constituye una herramienta útil para la construcción de la teoría cuántica correspondiente, evitando el procedimiento extenuante de cuantización a la Dirac. Así mismo, este formalismo que describe una exitación masiva para el caso estudiado, permite precisar la contribución del espín estableciendo el comportamiento no escalar del único grado de libertad. Allí, hemos observado que es posible evitar la "singularidad infrarroja" mediante una transformación de fase única sobre los operadores creación-aniquilación y que álgebra de Poincaré es satisfecha.

Agradecimientos

Los autores agradecen a asistencia técnica de Orlando Alvarez LLamoza, así como el apoyo recibido por parte del Decanato de la FACYT-UC y la OPSU. Este trabajo es parcialmente apoyado por el proyecto G-2001000712 del FONACIT.

Referencias

[1] P.K. Townsend, K. Pilch, P. van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett.* **136B** (1984) 38.

[2] S. Weinberg, "Understanding the Fundamental Constitutents of Matter" (A. Zichichi. Ed.) Plenum, New York, 1978; A. Linde, *Rep. Progr. Phys.***42** (1979), 389; D. Gross, R. D. Pisarki, L. G. Yaffe, *Rev. Mod. Phys.* **53**, (1981), 43; S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982), 975.

[3] R. B. Laughlin, *Phys. Rev. Lett.* **60**, (1988) 2677.

[4] Y. H. Chen, F. Wilczek, E. Witten, B. I. Halperin, *Int. J. Mod. Phys.* **B39** (1989) 9679.

[5] C. Aragone, a. Khoudeir, *Phys. Lett.* **173B** (1986) 141; *Quantum Mechanics of Fundamental Systems* , ed. C. Teitlboin, (Plenum Press, New York, 1988), p. 17; S.

Deser, J.G. McCarthy, *Phys. Lett.* **B246** (1990) 441; Addendum-ibid **B248** (1990) 473.

[6] Pio J. Arias, Espín 2 en dimensión $2+1$, Tesis Doctoral (1994) gr-qc/9803083.

[7] Pio J. Arias, Luis Gonzalez, Rolando Gaitan D., en preparación.

[8] T. Maskawa, H. Nakajima, *Prog. Theor. Phys.* **56** (1976) 1295.

[9] S. Deser, R. Jackiw, S. Templeton, *Ann. of Phys.* **140**, (1982) 372.