hep-th/0401104

Mecanismo de autointeracción en el modelo masivo vectorial de Hagen

Pío J. Arias [a,b] [1]

[a] *Centro de Física Teórica y Computacional, Facultad de Ciencias, U.C.V., AP 47270, Caracas 1041-A, Venezuela*

[b] *Centro de Astrofísica Teórica, Facultad de Ciencias, U.L.A., La Hechicera, Mérida 5101, Venezuela*

Abstract

It is shown that the non-abelian vectorial model, proposed by C.R.Hagen is obtained using the self-interaction mechanism. The equivalence between this model and the non-abelian topologically massive one is studied showing that the existing equivalence in the abelian models is not sustained.

Key words:*Self-interaction mechanism, non-abelian models*

Se muestra que el modelo masivo vectorial no-abeliano, propuesto por C.R.Hagen, se obtiene usando el mecanismo de autointeracción. Se estudia la equivalencia de este modelo con el modelo topológico masivo no-abeliano y se obtiene que la equivalencia existente a nivel abeliano no se mantiene.

Palabras clave:*Mecanismo de autointeracción, Modelo no-abelianos*

PACS: 11.10.Ef,11.10.Kk, 11.15.Kc, 11.30.Fs

La teoría de campos en 2+1 dimensiones constituye un excelente escenario para el entendimiento y estudio de teorías físicas en dimensión 3+1. Ésto por su sencillez y además por haber provisto nuevas ideas al estudio de la física en 3+1 dimensiones. Es así como los modelos en 2+1 dimensiones han estado motivados por sus posibles aplicaciones en el efecto Hall fraccionario, la superconductividad a altas temperaturas y los procesos en presencia de cuerdas cósmicas.

[1] email:parias@fisica.ciens.ucv.ve

La estructura de las teorías no-abelianas puede obtenerse físicamente bajo el requerimiento de que se acople consistentemente a fuentes dinámicas siguiendo el mecanismo de autointeracción. Para esto comenzamos con una teoría vectorial o tensorial la cual posee alguna invarancia de calibre que asegure la no propagación de los campos asociados a los spines menores al que se quiere describir. La identidad de Biachi asociada a esta invariancia requiere que las fuentes del campo sean conservadas. Ésta conservación se pierde al acoplar dinámicamente al campo, a menos que esté autoacoplado. El auto acoplamineto requerido es determinado a partir de la corriente de Nöether asociada con la invariancia global interna presente en estos modelos. Aplicando este mecanismo se obtiene de forma natural la acciones de Yang-Mills, de Einstein y de supeergravedad[1, 2], así como las acciones de la teoría topológica masiva no-abeliana[3], la de Chapline-Manton[4], la de Freedman-Townsend[5] y la del modelo masivo autodual no-abeliano en 2+1 dimensiones[6], entre otros.

En este trabajo mostraremos como el modelo de Hagen para una partícula de spin 1 masivo en 2+1 dimensiones[7] está conectado con su versión no-abeliana[8] usando el mecanismo de autointeracción antes expuesto. El modelo a considerar es equivalente a los modelos autodual y topológico masivo a nivel abeliano[9]. Sin ambargo, resulta ser no equivalente a nivel no-abeliano dado que los términos de autointeracción proporcionanan correcciones adicionales en el analisis cuántico perturbativo[8].

En 2+1 dimensiones existen distintas descripciones para una partícula masiva con spin 1. El modelo mas sencillo es el modelo autodual[10] descrito por la acción

$$S_{AD} = -\frac{m}{2}\int d^3x \, \left(\varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda + m a_\mu a^\mu\right), \tag{1}$$

donde $\varepsilon^{012} = 1$ y $\eta_{\mu\nu} = (-++)$. Éste modelo no posee invariancias locales y puede mostrarse que constituye una versión del modelo topológico masivo luego de fijar convenientemente el calibre[11, 12, 13, 14]. El modelo topológico masivo viene descrito por la acción[15]

$$S_{TM} = -\frac{1}{2}\int d^3x \, \left(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - m\varepsilon^{\mu\nu\lambda} a_\mu \partial_\nu a_\lambda\right), \tag{2}$$

con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$, donde el primer término corresponde al conocido término de Maxwell y el segundo se conoce como el término de Chern-Simons vectorial. Las ecuaciones de movimiento de este modelo poseen la misma invariancia que la electrodinámica usual. Este hecho resulta interesante pues presenta el ejemplo de una teoría masiva que posee invariancia de calibre. Tal como apuntamos anteriormente los modelos autodual y topológico masivo estan conectados por una fijación de calibre. Sin embargo, puede verse que los espacios de soluciones difieren en soluciones de carácter topológico y que estan conectados por una transformación de dualidad[16, 17, 18, 19, 20, 21].

Otra descripción para una partícula masiva con spin 1 la proporciona la acción propuesta por C.R.Hagen[7]

$$S_H = \frac{1}{2}\int d^3x\Big(-f^\mu f_\mu + 2\varepsilon^{\mu\nu\lambda}f_\mu\partial_\nu a_\lambda + m\varepsilon^{\mu\nu\lambda}a_\mu\partial_\nu a_\lambda + \frac{\lambda}{m}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}f_\mu\partial_\nu f_\lambda\Big). \quad (3)$$

Esta acción se convierte en la de la topológima masiva, a primer orden, si tomamos $\lambda = 0$. Además puede mostrarse que cuando $\lambda = 1$ no tiene dinámica local. La masa de las excitaciones es $|m/(1-\lambda)|$. Para ver esto y su equivalencia con los modelos autodual y topológico masivo analicemos las ecuaciones de movimiento de (3)

$$-f^\mu + \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu(a_\lambda + \frac{\lambda}{m}f_\lambda) = 0, \quad (4)$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_\nu(f_\lambda + ma_\lambda) = 0. \quad (5)$$

En este sistema es claro que si $\lambda = 0$ el sitema se transforma en el de la teoría topológica masiva. Por otro lado en la segunda de estas ecuaciones observamos que localmente $f_\lambda + ma_\lambda = \partial_\lambda\rho$, si fijamos calibre de tal forma que $f_\lambda + ma_\lambda = 0$ y vamos a la primera ecuación el sistema correspondería al de la teoría autodual con masa $m/(1-\lambda)$. Si $\lambda = 1$ el sistema sólo describe estados globales que corresponden a $F_{\mu\nu} = 0$.

Para completar de analizar la cinemática de S_H pasamos a obtener la acción reducida. Para esto tomamos

$$\Phi_0 = \Phi \quad , \quad \Phi_i = \varepsilon_{ij}\partial_j\Phi^T + \partial_i a\Phi^L, \quad (6)$$

donde $\Phi_\mu \equiv (a_\mu, f_\mu)$, $i, j = 1, 2$ y $\varepsilon_{12} = 1$. Al sustituir esta descomposición en S_H observaremos que a y f son multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos $f^T = ma^T$ y $f = (1-\lambda)\Delta a^T$. Teniendo esto en cuenta llegamos a

$$\begin{aligned} S_H \;=\; & \frac{1}{2}\int d^3x\Big((1-\lambda)\dot{a}^T(-\Delta)f^L + f^L(-\Delta)f^L \\ & -(1-\lambda)^2(-\Delta)a^T(-\Delta)a^T - m^2a^T(-\Delta)a^T\Big), \end{aligned} \quad (7)$$

con $\Delta = \partial_i\partial_i$. A este nivel notamos que si $\lambda = 1$ no hay propagación alguna de los campos, además si sustituimos $(1-\lambda)a^T \to a^T$ y $\frac{m}{(1-\lambda)} \to m$ la acción correspondería a la que hubiésemos obtenido si partieramos de la acción topológica masiva.

Si sustituimos $Q = (1-\lambda)(-\Delta)^{1/2}a^T$, $\Pi = (-\Delta)^{1/2}f^L$ en (7) llegamos a la acción reducida

$$S_H^{red} = \int d^3x \Big[[\Pi\dot{Q} - \frac{1}{2}\Pi\,\Pi - \frac{1}{2}Q\left(-\Delta + (\frac{m}{(1-\lambda)})^2\right)Q \Big], \tag{8}$$

donde queda claro que la teoría describe una excitación de masa $|m/(1-\lambda)|$ con energía definida positiva.

Pasamos ahora a aplicar el mecanismo de autointeracción a partir de S_H en (3)[1, 2]. La conexión con el modelo topológico masivo se obtiene tomando $\lambda = 0$. Partimos con un conjunto de campos a_μ^a y f_μ^a, con $a = 1, 2, 3$, pensando en una invariancia bajo rotaciones rígidas (a la SU(2)). Este proceder permite adoptar una notación vectorial que resultará mas simple. La generalización a otro tipo de grupos de invariancia se realizaría de manera análoga. La acción de partida es

$$S_0 = \frac{1}{2}\int d^3x \Big(-\vec{f}^\mu \cdot \vec{f}_\mu + 2\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\vec{f}_\mu \cdot \partial_\nu \vec{a}_\lambda + m\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\vec{a}_\mu \cdot \partial_\nu \vec{a}_\lambda + \frac{\lambda}{m}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\vec{f}_\mu \cdot \partial_\nu \vec{f}_\lambda \Big), \tag{9}$$

la cual es invariante bajo los cambios globales

$$\vec{\Phi}_\mu \to \vec{\Phi}_\mu + \vec{\omega} \times \vec{\Phi}_\mu, \tag{10}$$

y sus ecuaciones de movimiento poseen la invariancia de calibre

$$\delta\vec{a}_\mu = \partial_\mu \vec{\Lambda}(x) \qquad , \qquad \delta\vec{f}^\mu = 0. \tag{11}$$

La corriente de Nöether asociada a la inavariancia global es

$$\vec{j}^\mu = \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\left[(\vec{f}_\nu + \frac{m}{2}\vec{a}_\nu) \times \vec{a}_\lambda + \frac{\lambda}{2m}\vec{f}_\nu \times \vec{f}_\lambda \right], \tag{12}$$

la cual se conserva si usamos las ecuaciones de movimiento que surgen de (9).

Ahora sumamos a S_0 un término de autointeracción de forma tal que al hacer variaciones en éste respecto a $\vec{a}_\mu$ se reobtenga $\vec{j}^\mu$. Este término de autointeracción es

$$S^{int} = -\frac{g}{2}\int d^3x \Big[\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\Big(\vec{a}_\mu \cdot (\vec{f}_\nu + \frac{m}{3}\vec{a}_\nu) \times \vec{a}_\lambda + \frac{\lambda}{m}\vec{a}_\mu \cdot \vec{f}_\nu \times \vec{f}_\lambda \Big) + F[f_\mu] \Big], \tag{13}$$

donde g es un parámetro de acoplamiento con unidades $L^{-1/2}$ y además hemos indicado la posibilidad de adicionar términos que dependan solamente de las fs, ya que lo que requerimos es que $\delta S^{int}/\delta\vec{a}_\mu = \vec{j}^\mu$. Un término posible, no cuadrático, covariante, invariante de calibre y bajo (10) sería de la forma $\sim \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\vec{f}_\mu \cdot \vec{f}_\nu \times \vec{f}_\lambda$. Así la acción que resulta de sumar a S_0 el término de autointeracción, con el término de las fs propuesto, tendrá la forma

$$
\begin{aligned}
S = \frac{1}{2}\int d^3x \Big[& -\vec{f}^\mu \cdot \vec{f}_\mu + \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\vec{f}_\mu \cdot (\partial_\nu \vec{a}_\lambda - \partial_\lambda \vec{a}_\nu - g\vec{a}_\nu \times \vec{a}_\lambda) \\
& + m\varepsilon^{\mu\nu\lambda}(\vec{a}_\mu \partial_\nu \vec{a}_\lambda - \frac{g}{3}\vec{a}_\mu \cdot \vec{a}_\nu \times \vec{a}_\lambda) \\
& + \frac{\lambda}{m}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\vec{f}_\mu \cdot (\partial_\nu \vec{f}_\lambda - g\vec{a}_\nu \times \vec{f}_\lambda) - \frac{g\kappa}{3m^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\vec{f}_\mu \cdot \vec{f}_\nu \times \vec{f}_\lambda \Big], \quad (14)
\end{aligned}
$$

donde κ es un constante adimensionada. En (14) los tres primeros términos corresponden a la acción topológica masiva no-abeliana. Los dos últimos términos corresponderían a la contribución adicional en la teoría de Hagen no-abeliana tal como la propuso en la referencia[8] . Para establecer conexión con la formulación usual de teorías no-abelianas, pensamos en generadores T^a antihermíticos que satisfacen $trT^aT^b = -\frac{1}{2}\delta^{ab}$, los cuales actúan en la representación adjunta del grupo. Para estos $[T^a, T^b] = f^{abc}T^c$, donde f^{abc} son las constantes de estructura del grupo (es el caso de SU(2) éstas son ε^{abc})) y los campos los representamos matricialmente como $\Phi_\mu = gT^a\Phi^a_\mu$. Con esta notación (14) se escribe de forma compacta como

$$
\begin{aligned}
S^{na}_H = \frac{1}{g^2}\int d^3x \, tr\Big[& f^\mu f_\mu - \varepsilon^{\mu\nu\lambda} f_\mu F_{\nu\lambda}(a) - m\varepsilon^{\mu\nu\lambda}(a_\mu \partial_\nu a_\lambda - \frac{2}{3}a_\mu a_\nu a_\lambda) \\
& - \frac{\lambda}{m}\varepsilon^{\mu\nu\lambda} f_\mu \mathcal{D}_\nu f_\lambda + \frac{2\kappa}{3m^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda} f_\mu f_\nu f_\lambda \Big], \quad (15)
\end{aligned}
$$

donde $F_{\nu\lambda}(a) = \partial_\nu a_\lambda - \partial_\lambda a_\nu - [a_\nu, a_\lambda]$ y $\mathcal{D}_\nu f_\lambda = \partial_\nu f_\lambda - [a_\nu, f_\lambda]$ es la derivada covariante de f_λ bajo las transformaciones de calibre

$$
\delta a_\mu = \mathcal{D}_\mu \omega(x) \qquad , \qquad \delta f^\mu = [\omega(x), f^\mu], \quad (16)
$$

con $\omega(x) = gT^a\omega^a(x)$, las cuales dejan invariantes las ecuaciones de movimiento de (15). Estas últimas, en caso de existir algún acoplamiento externo, resultan ser

$$
\begin{aligned}
f^\mu - {}^\star f^\mu(a) - \frac{\lambda}{m}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\mathcal{D}_\nu f_\lambda + \frac{\kappa}{2m^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}[f_\nu, f_\lambda] &= 0, \\
m^\star f^\mu(a) + \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\mathcal{D}_\nu f_\lambda - \frac{\lambda}{2m}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}[f_\nu, f_\lambda] &= J^\mu_{ext}, \quad (17)
\end{aligned}
$$

donde ${}^\star f^\mu(a) = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}F_{\nu\lambda}(a)$. Las ecuaciones de movimiento de la teoría topológica masiva corresponden al caso $\lambda = \kappa = 0$. Es importante resaltar que J^μ_{ext}, sobre las ecuaciones de movimiento, satisface $\mathcal{D}_\mu J^\mu_{ext} = 0$. Veamos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu J^\mu_{ext} &= \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\Big(\mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\nu f_\lambda - \frac{\lambda}{m}[\mathcal{D}_\mu f_\nu, f_\lambda]\Big) \\ &= \Big[-{}^\star f^\lambda(a) - \frac{\lambda}{m}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\mathcal{D}_\mu f_\nu, f_\lambda\Big] \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde hemos usado la identidad $[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]f_\lambda = -[F_{\mu\nu}(a), f_\lambda]$, la primera de las ecuaciones de (17) y las identidades de Jacobi para los conmutadores. Si pensaramos en algun tipo de acoplamiento con los fs la correspondiente fuente externa no se conserva. Sin embargo el papel de f^μ es mas como un campo auxiliar.

Manipulando convenientemente las ecuaciones de movimiento, cuando no hay fuentes externas, se llega al sistema ($\lambda \neq 1$)

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\mathcal{D}_\nu f_\lambda + \frac{m}{(1-\lambda)}f^\mu + \frac{(\kappa-\lambda)}{2m(1-\lambda)}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}[f_\nu, f_\lambda] = 0, \\ f^\mu - (1-\lambda)^\star f^\mu(a) + \frac{(\kappa-\lambda^2)}{2m^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}[f_\nu, f_\lambda] = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

En el caso que $\kappa = \lambda^2$ tendremos que $f^\mu = (1-\lambda)^\star f^\mu(a)$, lo que nos lleva a la ecuación de segundo orden para a_μ

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\mathcal{D}_\nu{}^\star f_\lambda(a) + \overline{m}\,{}^\star f^\mu(a) = \frac{\lambda}{2\overline{m}}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}[{}^\star f_\nu(a), {}^\star f_\lambda(a)], \tag{19}$$

donde $\overline{m} = m/(1-\lambda)$.

En (19) se muestra la contribución adicional al caso de la topológica masiva (que corresponde a $\lambda = 0$) y queda expresa la diferencia entre los dos modelos. Una ecuación igual a esta se obtiene en el modelo no-abeliano autodual el cual fué formulado indepoendientemente por McKeon[22] y por Arias, et. al.[23].

Para el caso $\lambda = 1$, al igual que en el caso abeliano, implica que ${}^\star f^\mu(a) = f^\mu = 0$. El caracter masivo de las excitaciones se hace explícito si tomamos otra derivada covariante sobre el dual de (19), lo que nos lleva a

$$\Big(-\mathcal{D}^\nu\mathcal{D}_\nu + \overline{m}^2\Big)\,{}^\star f^\mu(a) = \frac{(\lambda-2)}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}[{}^\star f_\nu(a), {}^\star f_\lambda(a)] + \frac{\lambda}{\overline{m}}[\mathcal{D}_\nu{}^\star f^\mu(a), {}^\star f^\nu(a)], \tag{20}$$

corroborando que la masa de las excitaciones es $|m/(1-\lambda)|$ como en el caso abeliano.

Hemos, entonces mostrado como se conectan los modelos vectoriales propuestos por Hagen por la vía del mecanismo de autointeracción. Tambien quedó explicita la no equivalencia entre los modelos no-abelianos de Hagen y de la teoría topológica masiva para un caso particular. En el caso que $\lambda = 1$ ($\kappa = 1$) la teoría de Hagen sólo describe estados globales ($F_{\mu\nu}(a) = 0$) los cuales son sensibles a la topología del espacio base.

Este trabajo está enmarcado dentro del Proyecto de Grupo G-2001000712 del FONACIT.

References

[1] S.Deser, *Gen. Rel. Grav.* **1** (1970) 9.

[2] D.G.Boulware, S.Deser y J.H.Kay, *Physica* **96A** (1979) 141.

[3] C.Aragone y E.Araujo, *Act. Cien. Ven.* **36** (1985) 207.

[4] C.Aragone y J.Stephany, *Rev. Bras. Fis.* **16** (1987) 287.

[5] A.Khoudeir, *Mod. Phys. Lett.* **A11** (1996) 2489.

[6] A.Khoudeir, *Mod. Phys. Lett.* **A16** (2001) 2123.

[7] C.R.Hagen, *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 1074; (E) **58** (1987) 2003.

[8] C.R.Hagen, *Phys. Rev.* **D36** (1987) 3294.

[9] S.Deser y R.Jackiw, *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 1981; C.R.Hagen, *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 1982.

[10] P.K.Townsend, K.Pilch, P.van Nieuwenhuizen, *Phys. Lett.* **136B** (1984) 38; C.R.Hagen *Ann. Phys.* **157** (1984) 342.

[11] S.Deser, R.Jackiw *Phys. Lett.* **139B** (1984) 371.

[12] R.Gianvittorio, A.Restuccia y J.Stephany, *Mod. Phys. Lett.* **A6** (1991) 2121.

[13] P.J.Arias y J.Stephany, *J. Math. Phys.* **36** (1995) 1868.

[14] R. Banerjee, H.J. Rothe y K.D. Rothe (Heidelberg U.), *Phys. Rev.* **D55** (1997) 1997.

[15] S.Deser, R.Jackiw and S.Templeton, *Ann. Phys.* **140** (1982) 372; (E) **185** (1988) 406.

[16] P.J.Arias, A.Restuccia, *Phys. Lett.* **B347** (1995) 241.

[17] J.Stephany, *Phys. Lett.* **B390** (1997) 128.

[18] E.Harikumar y M.Sivakumar *Mod. Phys. Lett.* **A15** (2000) 121.

[19] A. Ilha y C. Wotzasek, *Nucl. Phys.* **B604** (2001) 426.

[20] E.M.Prodanov y S.Sen, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 065019; (E) **D66** (2002) 089902.

[21] M.A. Anacleto, A. Ilha, J.R.S. Nascimento, R.F. Ribeiro y C. Wotzasek, *Phys. Lett.* **B504** (2002) 268.

[22] D.G.C.McKeon, *I. J. Mod. Phys.* **A7** (1992) 2005.

[23] P.J.Arias, L.Leal y A.Restuccia, *Phys. Lett.* **B367** (1996) 170.