UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN
COMISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
ÁREA: FILOSOFÍA
MAESTRÍA EN FILOSOFÍA, MENCIÓN: LÓGICA Y FILOSOFÍA DE LA CIENCIA

EL AXIOMA DE ELECCIÓN: ALGUNAS CONSIDERACIONES MATEMÁTICAS Y FILOSÓFICAS

Trabajo Especial de Grado presentado para optar al título de Magíster en Filosofía, Mención: Lógica y Filosofía de la Ciencia

Autor: Lic. Randy José Alzate Chacón.

C.I.15.872.210

Tutor: Dr. Franklin Galindo.

C.I. 7.295.557

Caracas, Febrero 2018

Número de depósito legal: MI2018000265

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE HUMANIDADES Y EDUCACIÓN
COMISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
Control de Estudios

CEP FHE

VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del jurado designado por el Consejo de la Facultad de Humanidades y Educación de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el **Trabajo de Grado** presentado por: **Randy José Alzate Chacón Cédula de identidad Nº** 15.872.210, bajo el título: **"EL AXIOMA DE ELECCIÓN: ALGUNAS CONSIDERACIONES MATEMÀTICAS Y FILOSÓFICAS"** a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al Grado académico de **MAGÍSTER SCIENTIARUM EN FILOSOFÍA, MENCIÓN LÓGICA Y FILOSOFÍA DE LA CIENCIA**, dejan constancia de lo siguiente:

1.- Leído como fue dicho Trabajo por cada uno de los miembros del jurado, este fijó el día 06 de Febrero de 2018 a las 11:00 AM., para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que este hizo en el aula 16 del piso 3 de la Comisión de Estudios de Postgrado, mediante una exposición oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado, todo ello conforme con lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

2.- Finalizada la defensa del trabajo, el jurado decidió **APROBARLO**, con la calificación de EXCELENTE por considerar que se ajusta a lo dispuesto y exigido en el Reglamento de Estudios de Postgrado. Para dar este veredicto, el Jurado estimó que la obra examinada contituye un aporte significativo al estudio del Axioma de elección desde el punto de vista matemático, metamatemático y filosófico. Se destaca la exposición didáctica del contenido, sin menoscabo del rigor en el tratamiento formal.

En fe de lo cual se levanta la presente ACTA en Caracas, a los 06 días del mes de Febrero del año 2018, dejándose también constancia de que, conforme a lo dispuesto en la normativa jurídica vigente, Reglamento de Estudios de Postgrado, actuó como Coordinador del jurado el Prof. Dr. Franklin Galindo.

Prof. M. Sc Ricardo Da Silva
C.I 19.510.633 - Escuela de Filosofía-UCV

Prof. Dr. Jesús Nieto
C.I.11.590.415 - Universidad Simón Bólivar

Prof. Dr. Franklin Galindo
C.I. 7.295.557
Coordinador de la Maestría Lógica y Filosofía de la Ciencia-UCV
Tutor. Coordinador

FG/RDS/JN/yt.-

Dedicatoria

Dedico el presente Trabajo de Grado a mi esposa y a mi hija. La mayoría de las veces las condiciones actuales del país no contribuyeron a tener la calma y sosiego necesarios para escribir este trabajo. Cualquiera en tales circunstancias hubiese renunciado. Contar con el apoyo de ellas dos fue un aliciente importante para continuar, mi esposa brindándome todo su amor y mi pequeña hija diciéndome: "¡Anda a hacer la tesis!". Las amo profundamente.

Agradecimiento

Agradezco a mi tutor, el profesor Franklin Galindo, por su acompañamiento durante el desarrollo de este trabajo y durante toda la Maestría. Las eternas preguntas sobre las misteriosas entidades matemáticas han maravillado a buena parte de matemáticos y filósofos, poniendo a prueba a la razón humana. El intento de respuesta a una de sus aristas presentado en esta investigación supone un acercamiento muy particular entre la matemática y la filosofía e invita a considerar otras posibilidades para atender los problemas ontológicos y gnoseológicos. Por hacerme conocer esta perspectiva, sin dejar de lado los caminos filosóficos usuales doy gracias a mi tutor.

También deseo agradecer a quienes han contribuido de manera significativa en mi formación como filósofo: A la profesora María Carolina Álvarez, al profesor Jesús Baceta, a la profesora María Eugenia Cisneros y al profesor Jesús Ojeda. Hacer filosofía no está reñida con la rigurosidad y ellos, de manera magistral, lo han logrado mostrar.

Finalmente, deseo agradecer a todo el personal adscrito al Instituto de Filosofía de la Universidad Central de Venezuela, por haberme abierto las puertas y permitido formar parte de tan prestigiosa institución de investigación filosófica.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1. El Axioma de elección y el quehacer matemático

Hablar sobre el axioma de elección[1] es referirnos a uno de los axiomas más polémicos y debatidos por la comunidad matemática y filosófica. David Hilbert afirmó en 1926 lo siguiente: " El axioma de elección es el axioma más atacado en el presente en la literatura matemática." [2] Y Fraenkel al respecto refiere que: " es probablemente el más interesante y, a pesar de su tardía aparición, el más discutido de la matemática, después del axioma euclidiano de las paralelas, el cual se introdujo hace más de dos mil años." [3] Lo controvertible que ha sido el axioma y las consideraciones que se han hecho tanto a su favor como en contra, han colocado sobre el tapete a la actividad matemática, el tratamiento y la naturaleza de los objetos matemáticos, así como también la consistencia de la propia matemática, aspectos que son de interés para lo que expondremos en este trabajo.

En atención a las distintas perspectivas mediante las cuales puede ser visto el axioma de elección, la presentación que ha guíado el desarrollo de esta investigación tomó en cuenta dos niveles de análisis. El primero corresponde a consideraciones matemáticas y metamatemáticas respecto al axioma y el segundo a consideraciones filosóficas. Esto es importante puesto que el estudio que se hace del axioma de elección nos introdujo en la caracterización

[1] Existen varias presentaciones del axioma. Una de ellas es la siguiente: Si $\mathcal{K}$ es una colección de conjuntos no vacíos y K es es el conjunto de todos los elementos pertenecientes a los conjuntos de la colección $\mathcal{K}(K = U\mathcal{K})$, entonces existe una aplicación $f : \mathcal{K} \to K$ tal que, para cada $k \in \mathcal{K}, f(k) \in k$. Torreti, R., *El paraíso de Cantor*. Santiago de Chile, Editorial Universitaria, 1998, p.64. Otras presentaciones pueden consultarse en: Rubin, H. y Rubin, J. *Equivalents of axiom of choice*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1970, p.5.

[2] Moore, G.*Zermelo's axiom of choice Its Origins, Development and Influence*, New York, Springer-Velarg, 1982, p.1.

[3] *Ibidem*

de la actividad del matemático cuando -entre otras actividades- demuestra o analiza teoremas, realiza cálculos o elabora teorías matemáticas, actividad que englobamos bajo la denominación *quehacer matemático*[4]. Por lo tanto, se reflexionó en primera instancia *desde* la matemática y luego *sobre* ella.

Con esto no afirmamos que los aspectos matemáticos y filosóficos sigan caminos separados; por el contrario, mostraremos que a lo interno de la matemática existen elementos que permiten la reflexión filosófica. Al respecto, nuestra investigación considera a la filosofía de la matemática como *el estudio de los problemas filosóficos suscitados por la matemática*[5] En consecuencia, el hilo conductor de este trabajo comienza en la matemática, continúa en la metamatemática y culmina en la filosofía. Se estudia el quehacer matemático[6] para reflexionar respecto a lo que se puede encontrar dentro de la ciencia matemática y observar el tratamiento que se le dan a los objetos matemáticos, junto con las características de la actividad matemática contemporánea.

2. Zermelo y el Axioma de elección

La revisión bibliográfica realizada nos muestra que las discusiones iniciales respecto al axioma no diferenciaban claramente los niveles aducidos antes. Esto no debería sorprendernos pues para la época en la que se puso en el centro del debate al axioma de elección, aún

[4]El término busca recoger algunas de las características de la actividad del matemático cuando *hace* matemáticas pero también cuando *piensa* respecto a ella. En la literatura especializada aparecen términos similares tales como: *pensamiento matemático, formas de pensar matemáticamente, modos de hacer matemática, razonamiento matemático*, etc. que pudieran confundir al lector y pretender separar el hacer matemático del pensar matemático. En nuestro caso, tanto el hacer como el pensar se considerarán parte del quehacer matemático.

[5]"La tarea de la filosofía de la lógica [...] es investigar los problemas filosóficos suscitados por la lógica[...] y la de la filosofía de la matemática [es] investigar los problemas filosóficos suscitados por la matemática." Haack, S. *Filosofía de las lógicas*, Madrid, Ediciones Cátedra S.A.,1991, p.21. Algunos problemas propios son: ¿Cuál es la naturaleza de las entidades matemáticas? ¿Cuáles son las leyes que las rigen? ¿Cómo podemos hacer para conocer tales leyes?, etc.

[6]Weyl utiliza el término *modo matemático de pensar* y lo define así: "Entiendo por modo matemático de pensar, en primer lugar, la forma de razonamiento por la cual la matemática penetra en las ciencias del mundo externo[...], y en segundo lugar, la forma de razonamiento que la matemática, sola y en sí misma, aplica en su propio campo." Weyl, H. "El modo matemático de pensar" en Newman, J. (Ed.) *Sigma El mundo de las matemáticas*, Barcelona, 1976, vol. V, p.220. Peirce, en cambio, utiliza *pensamiento matemático*. Peirce, C. "La esencia de la matemática" Ibid., p.165. En ambos casos hay similitudes.

no existía una presentación axiomática de la teoría de conjuntos -el axioma apareció en 1904 y el primer sistema axiomático para dicha teoría fue propuesto por Zermelo en 1908-, por lo que no había metamatemática[7], y las posiciones filosóficas de la matemática tales como el platonismo[8], el intuicionismo[9], el logicismo[10] y el formalismo[11] se consolidaron tiempo después.

[7]El término *metamatemática* fue acuñado por David Hilbert en 1923, quien lo definiera como una "teoría de la estructura formal de las teorías matemáticas." Hilbert, D. *Gesammelte Abhandlungen* (GA), New York: Chelsea, 1965, III, p.179. (Reimpresión de la edición original: Berlín, Springer, 1933-35). Queremos resaltar que todo resultado metamatemático (o lógico-matemático) se puede entender de al menos dos formas, la primera, como un resultado metamatemático a secas (sin ningún valor agregado) y la segunda, como un resultado metamatemático que se puede utilizar para estudiar los fundamentos de las matemáticas. En este trabajo, la metamatemática apunta al segundo aspecto referido.

[8]Bernays, P. *El platonismo en matemática.* Versión española de Vincenzo P. Lo Monaco y Benjamín Sánchez, Caracas, Ediciones de la Biblioteca U.C.V., 1982, p.15 y ss. El término aparece por vez primera en una conferencia que dictara Paul Bernays el 18 de junio de 1934. Allí, el autor se permite llamar platonismo a "ciertos modos de razonar peculiares al análisis y a la teoría de conjuntos [...] en el que se consideran a los objetos libres de cualquier vinculación con las reflexiones del sujeto." (p.16). Es conocido que la posición platonista permea buena parte de la matemática. Así lo declara Bernays en 1934: "el platonismo reina actualmente en la matemática" (p.20), lo mismo sucede para 1981 (p.43), y, tal y como sustentaremos, sucede en la práctica matemática contemporánea.

[9]Se le puede caracterizar así: "Pero aún debo hacer un señalamiento esencial para una comprensión correcta de nuestra posición: los intuicionistas no atribuimos una existencia independiente de nuestro pensamiento, esto es, una existencia trascendental, ni a los enteros, ni a ningún otro objeto matemático." Heyting, A., Los fundamentos intuicionistas de la matemática" en *Erkentniss*, 1931, pp.91-121. También: "La idea básica del intuicionismo es que la seguridad en el dominio de la matemática debiera de buscarse únicamente en la aceptación de pruebas constructivas." Kneale, W. y Kneale, M. *El desarrollo de la lógica*, Madrid, Editorial Tecnos, 1980, p.633.

[10]"La tesis del logicismo es que la matemática es reducible a la lógica, y por lo tanto no es más que una parte de ésta." Carnap, R., "Los fundamentos logicistas de la matemática" en *Erkentniss.* El logicismo de Frege es anterior a la problemática generada por el axioma de elección. Este tenía como razón de ser derivar la aritmética y el análisis de la lógica, mientras que el logicismo de Russell y Whitehead se proponía derivar *toda* la matemática de la lógica.

[11]"La idea esencial de la teoría de la prueba de Hilbert, es que[...] hay[...] un procedimiento internamente cerrado implícito en la matemática clásica[...] que básicamente consiste en construir sucesivamente ciertas combinaciones de símbolos primitivos considerados probados.[...] este procedimiento de construcción es finitario y directamente constructivo." Neumann, J. "Los fundamentos formalistas de la matemática" en *Erkentniss*, cit. También: "el desiderátum de la escuela formalista es el de encontrar mediante procedimientos metamatemáticos [finitos] una demostración de la compatibilidad o consistencia de esa matemática desprovista de contenidos concretos." Chela, R. *Matemática y lógica*, Caracas, Fondo editorial Acta Científica Venezolana, 1986, p.51.

Queremos advertir el hecho que el axioma emerge y se hace explícito de manera individual, no enmarcado en un sistema axiomático y que fuera utilizado para justificar la demostración del Teorema del Buen Orden[12]. Visto así, se realza su génesis *dentro* de la actividad matemática. Es decir, apareció como justificación de una demostración -siendo el demostrar la actividad por excelencia del matemático- y, dada su naturaleza no constructiva, se comienza a enfatizar la distinción entre demostraciones constructivas y no constructivas, lo que es uno de los elementos centrales de las discusiones en filosofía de la matemática. Con respecto a la filosofía de la matemática, es importante resaltar que, además de las tres preguntas planteadas en la página 2, otra pregunta esencial con respecto a dicha disciplina es: ¿En qué consiste el quehacer matemático?, el desarrollo del presente trabajo brindará elementos que permitan responder tanto las primeras interrogantes como esta última.

Ernst Zermelo, en 1904, elevó a categoría de axioma lo que él consideraba un enunciado usado de manera implícita por los matemáticos. Mas aún, a su juicio "se aplica sin titubeos en el razonamiento matemático." [13] Zermelo presenta al axioma como matemático que es y quienes se opusieron fueron principalmente matemáticos; ahora bien, el contenido del debate generado se fue tornando metamatemático y filosófico. Esto se debe a que, como Ferreirós apunta, el axioma de elección es un "caso paradigmático de planteamiento abstracto" [14] refiriéndose con esto a un axioma que evidencia su no constructividad, describiéndose así un modo de hacer matemática planteado como "una investigación de relaciones que se dan entre objetos o elementos que se asumen existentes con independencia de nuestro pensamiento." [15]Así, sobre el axioma de elección recae la discusión entre lo que se construye en matemáticas y lo que se postula, debate que comienza a hacerse vigente en la actividad de matemáticos interesados en problemas de fundamentos. En particular, se caracteriza al

[12]Dicho teorema plantea que todo conjunto se puede bien ordenar. Cantor lo consideraba una "ley del pensamiento" aunque luego trató de demostrarlo sin éxito. Cantor, G., *Fundamentos para una teoría general de conjuntos* (1883), España, Crítica, 2005.

[13]Zermelo, E."Beweis, dab jede Menge wohlgeordnet werden kann" en *Mathematische Annalen*, 1904, 59, p.516.

[14]Ferreirós, J. *Matemáticas y platonismo(s)*, Sevilla, Universidad de Sevilla, 1999, p.4.

[15]*Ibidem.* Esto se corresponde con el término *platonismo matemático* que asumiremos en este trabajo. Bernays lo denomina platonismo pues, a su juicio,"dicha tendencia se basó especialmente en la filosofía de Platón" (p.16). El término, su uso, matices, y su posible relación con la filosofía platonista se han cuestionado desde diversas fuentes. Sostenemos, como hipótesis de trabajo a investigar, que es adecuado referirse a una filosofía realista de la matemática

axioma de elección como una asunción platonista.

Por ende, toma realce una reflexión sobre la naturaleza de los objetos matemáticos a la par que se analizan las consecuencias de la aceptación -o no- de dichos objetos para la matemática. Ambas vertientes se evidencian en el caso del axioma de elección: se discute la no constructividad del axioma al mismo tiempo que diversas ramas de las matemáticas se van especializando y requiriéndolo en sus resultados. Consideramos que ambas vertientes son igual de importantes pero han sido trabajadas de forma separada mayoritariamente, de acuerdo a la revisión bibliográfica realizada. La presente investigación brinda elementos que permiten subsanar esta divergencia.

3. Orígenes del Axioma

Como se indicara antes, Zermelo refiere que varios matemáticos hicieron un uso implícito del axioma. En efecto, Cantor en 1895, Borel en 1898 y Russell en 1902 -entre otros- lo usaron en algunas de sus demostraciones[16]. El único que consideró al axioma antes que Zermelo fue el matemático italiano Giuseppe Peano en 1890, el cual lo juzgó inadmisible[17]. Posteriormente, en 1902, otro matemático italiano -Beppo Levi- dejó la cuestión por resolver, indicando que quedaba por realizar su demostración y agregando que si se tienen conjuntos bien ordenados entonces existe el conjunto que postula el axioma[18]. Ninguno de los matemáticos antes mencionados le dio el estatus de axioma y, por ende, consideraban natural intentar demostrarlo

más que a una filosofía platonista. Algunas revisiones críticas del platonismo se pueden ver en: Dummet, M. "El platonismo" en *La verdad y otros enigmas*, México, Fondo de Cultura Económica, 1990, p.282 y Ferreirós, J. *Matemáticas y...*, cit.

[16]Ellos usaron el denominado axioma de elección numerable, de manera implícita. Al respecto véase Moore, G. *Zermelo's axiom of...*, cit., p.9.

[17]Peano, G. "Demonstration de i'integrabilite des equations difterentielles ordinaire" en *MA*, 37, 1890, p.210.

[18]Obsérvese aquí la relación entre el Teorema del Buen orden y el axioma de elección que Zermelo probara años después (son proposiciones equivalentes).

de manera constructiva. Así, tanto Peano como Levi actuaron acorde con el modo mayoritario de hacer matemática para la época[19], esto es, *construyendo paso a paso* los objetos matemáticos necesarios para sus investigaciones. Postular objetos matemáticos y averiguar las consecuencias derivadas de ello no era el modo en la que la mayoría de los matemáticos realizaba su actividad para ese período en particular.[20]

Consideramos que esto se debe a que la matemática no había alcanzado el alto nivel de abstracción característico de la teoría de conjuntos cantoriana.[21] La aritmetización del análisis[22] y los avances en topología aún no se habían consolidado. La abstracción y la generalización son dos características que se le adscriben a la matemática[23] y en la contemporaneidad ambos aspectos han alcanzado niveles aún mayores debido al tratamiento que dan, entre otros, al infinito matemático[24]. Pero para el período que estamos considerando -antes de 1904- el tratamiento usual del infinito en el quehacer matemático correspondía al infinito potencial y es solo en los trabajos de Cantor donde se le da rigurosidad matemática al infinito actual.

Ya antes, con la aparición de las geometrías no euclidianas, la matemática comenzaba a mirarse a sí misma, separando sus objetos de estudio de la realidad física, lo que se puede

[19]Que era constructivo. Riemann, Cantor, Dedekind, Cauchy -entre otros- comenzaron a establecer una forma de hacer matemática distinta a la de la época, la cual se basaba en un enfoque conjuntista y un tratamiento abstracto de la matemática. Estos elementos sugieren aspectos relacionados con el platonismo matemático. Al respecto se puede revisar: Ferreirós, J."El enfoque conjuntista en matemáticas" en *La Gaceta*, vol. I, 3, 1998, pp.389-412.

[20]En otras épocas ya se habían dado discusiones al respecto. Por ejemplo, toda la discusión en torno al quinto postulado de la geometría de Euclides. Véase Courant, R. y Herbert, R. *¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos*, España, Aguilar, 1962, p.177. También: Nagel, E. y Newman, J. *El Teorema de Gödel*, Madrid, Tecnos, 2005.

[21]Cantor, G.,"Beitrage zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre" en *Mathematische Annalen*, 1895, 45: 581-512; 49: 207-246.

[22]Dedekind, R.,*Was sind und sollen die Zahlen?*, Braunschweig: Vieweg, 1888.

[23]Solow, D., *The Keys to Advanced Mathematics: Recurrent Themes in Abstract Reasoning*, Books unlimited, 1995.

[24]Considérese la existencia de cardinales inaccesibles, quienes hacen uso *in extremis* del infinito. De hecho, desde ZFC no puede demostrarse la existencia de cardinales inaccesibles. Jech, T. *Set Theory*, Alemania, Springer-Verlag, 2006.

considerar un avance importante hacia la abstracción completa.[25] El camino establecido por Cantor creó algunas dificultades por el uso, entre otros, del principio de comprensión intuitiva[26] -surgieron las paradojas- que minaron la base de confianza tradicional en las matemáticas e invitó a reflexionar sobre sus alcances y limitaciones; pero también estableció una *nueva manera de trabajar con los objetos matemáticos*: la platonista. Alrededor del ambiente antes descrito aparece el axioma de elección.

Es muy posible que Peano rechazara al axioma por no considerar plausible aceptar la existencia de un conjunto sin un procedimiento efectivo que lo construya[27]. Esto va en consonancia con el espíritu del razonar matemático de la época y se confirma por la objeción que años después el mismo Peano le hiciera a Zermelo luego que postulara al axioma de elección, exigiéndole una demostración del mismo. Que este último respondiera que "indemostrabilidad no significa invalidez"[28] y que "en matemática no todo se puede demostrar"[29] muestra dos posiciones respecto al quehacer matemático bien definidas: la matemática constructivista -Peano- y la matemática platonista -Zermelo-. Aquí se evidencia cómo el axioma de elección se convierte en centro de la disputa entre lo que se puede o no hacer en matemáticas, haciendo que los matemáticos reflexionaran sobre su actividad.

4. Existencia de los objetos matemáticos: Constructivismo y Platonismo

Ni en el caso de Peano ni en el de Levi, la aceptación o rechazo del axioma pasa por razones que no fueran a lo interno de la actividad matemática. De hecho, las argumentaciones de Zermelo frente a Peano parten de la propia matemática y su actividad. Como matemáticos que son reflexionan, pero el alcance de sus reflexiones evidencian consideraciones metamatemáticas y filosóficas. Una de ellas, característico de la actividad del matemático,

---

[25]No solo en geometría sino también a través del álgebra, la matemática experimentó el paso hacia la abstracción. Al respecto véase el capítulo VI denominado "la abstracción matemática" en Kneale, W. y Kneale, M. *El desarrollo de...*, cit., p.351.

[26]Este principio afirma que toda propiedad determina un conjunto. Véase: Di Prisco, C. Teoría de Conjuntos, Universidad Central de Venezuela: Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico, 2009.

[27]"But as one cannot apply infinitely many times an *arbitrary* rule by which one assigns to a class A an individual of this class, a determinate rule is stated here." Moore, G. *Zermelo's axiom of...*, cit., p.5.

[28]Torreti, R. *El paraíso de...*, cit, p. 67.

[29]*Ibidem*

es su capacidad para demostrar. Desde este punto de vista, parecería obvio que si se hace referencia a un objeto matemático, se pida su definición a través de algún procedimiento constructivo. Es interesante observar como, muchos años después, Levi, en un libro dedicado a los Elementos de Euclides, apuntara lo siguiente

> En el lenguaje matemático moderno se hizo frecuentemente cuestión entre proposiciones existenciales y proposiciones constructivas; la distinción se vinculó esencialmente con la llamada aritmetización de la matemática, la cual con Kronecker, Weierstrass, Dedekind, parte del lema de edificar todo el análisis del concepto de número entero, debiendo todo lo demás depender de este por definiciones nominales. Muchas veces esta limitación fue considerada, por pioneros o por secuaces demasiado entusiastas, como la afirmación de una verdad, circunscribiendo el dominio total de la matemática aceptable.[30]

Levi distingue entre lo dado -proposiciones existenciales- y lo construido -proposiciones construidas-. Luego agrega:

> Pero, en una visión más justa, la aritmetización no es más que una limitación que voluntariamente nos imponemos acerca de los instrumentos de nuestras deducciones; es imposible no admirar lo mucho de bello y de profundo que ésta y otras limitaciones han producido en el campo de la matemática. Sin embargo, no podemos inclinarnos a dar tales limitaciones un valor dogmático: la construibilidad es relativa a los medios que se conceden a la deducción, **lo existente es lo concebible sin contradicción dentro de cierto sistema lógico que debe entenderse determinado a priori**,-negritas añadidas- dentro de ciertos límites, con un acto de nuestra voluntad dirigido, desde luego, por las condiciones propias de nuestro pensamiento.[31]

Es importante apreciar como en la cita anterior se le va dando presencia y fuerza a las consideraciones del platonismo matemático. La *existencia* de los objetos matemáticos no queda restringida a su posible construcción sino condicionada al hecho de no generar

[30] Levi, B., *Leyendo a Euclides.* Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2003, p.100.

[31] *Ibidem*

contradicciones. ¿Cómo garantizar la no contradicción? El programa metamatemático formalista de David Hilbert buscaba establecer un sistema axiomático completo, consistente y recursivo para que permitiera la existencia sin contradicciones de cualquier tipo de objetos matemáticos, construibles o no. De lograr Hilbert su objetivo, la existencia de los objetos matemáticos quedaba garantizada sin contradicción alguna. Como bien sabemos, los resultados de Gödel (1931[32]) minaron (parcialmente) esta posibilidad, pero no así el desarrollo y fortalecimiento de los sistemas axiomáticos y de la metamatemática actual.

De acuerdo con las consideraciones que hemos estado haciendo, esto sucede porque las características de la actividad matemática concreta así lo requerían. El **quehacer matemático platonista** comenzaba a establecerse y a consolidarse con la axiomatización. Es decir, la actividad del matemático que comenzaba a hacerse presente **requería aceptar los planteamientos del platonismo**[33], en los términos que mostraremos en el último capítulo.

¿Cuál es el papel que el axioma de elección tiene en estas consideraciones? Como haremos evidente en las páginas siguientes, el axioma de elección acompañará el desarrollo de la matemática y metamatemática del siglo XX. Tal acompañamiento se da, tanto por su fuerte presencia en diversas áreas de las matemáticas como por ser objeto de estudio para resolver su independencia -Gödel (1930) y Cohen (1963)- además de su uso como herramienta

[32]Conocidos como Primer y Segundo teorema de Incompletitud. Sea T un sistema axiómatico recursivo y suficientemente fuerte como para deducir en él la aritmetica de Peano. Entonces: Primer Teorema: Si T es consistente, entonces T es incompleto. Esto es, T tiene proposiciones indecidibles, es decir, existe al menos una proposición φ tal que $T \nvdash \varphi$ y $T \nvdash \neg\varphi$. Segundo Teorema: Si T es consistente, entonces $T \nvdash$ "T es consistente" .Una prueba contemporánea de ellos se puede revisar en: Enderton, H., *Una Introducción Matemática a la Lógica*, Universidad Nacional Autónoma de México, 2004.

[33]Veamos lo que Hilbert consideraba que debía ser un "supuesto mínimo" indispensable para hacer matemáticas: "Algo nos está ya dado de antemano en la representación; ciertos objetos concretos extralógicos que preceden como vivencia inmediata a todo pensamiento. Para que la inferencia lógica sea segura, estos objetos tienen que dejarse abarcar con la mirada en todas sus partes, y su presentación, su distinción, su sucesión o concatenación está dado directa e intuitivamente junto con los objetos como algo que no se deja reducir a otra cosa ni requiere una reducción." Torreti, R., *El paraíso de...*, cit., p.306. Creemos que esta cita alude a algunas consideraciones del platonismo matemático, en los términos que referiremos en el último capítulo.

fundamental en la metamatemática contemporánea. Estos tres elementos lo describiremos detalladamente en esta investigación. Tal es el impacto del axioma en las matemáticas que años después -1930- cuando Zermelo presentase una versión mejorada de su sistema axiomático, no aparece como axioma el de elección pues, a su juicio, posee una categoría distinta, considerándolo **inherente a cualquier investigación en matemáticas**[34]. Brindar elementos que permitan sustentar la consideración de Zermelo es uno de los aspectos que este trabajo ofrece.

5. El Axioma de elección y su impacto inmediato

Como bien indica Torreti[35], desde Aristóteles se comienza a utilizar la palabra *axioma* como sinónimo de principio, postulado o hipótesis usada en la ciencia. En los Segundos Analíticos, Aristóteles dice que "un axioma es una aseveración que enuncia uno de los principios evidentes de la ciencia" [36] y luego indica que "toda ciencia debe edificarse sobre principios que se acrediten por sí solos." [37]Así, hacer ciencia consiste en axiomas (principios que no se demuestran) y teoremas (demostrados por inferencia deductiva a partir de áquellos). La inferencia deductiva Aristotélica es harto conocida. Lo que se ha prestado a discusión es en qué se fundamenta la elección de ciertos principios. He aquí donde surge el interés por el estudio de los axiomas, contexto en el que se enmarca la presente investigación.

Las matemáticas no escaparon a esto. La discusión tomó relevancia durante la llamada crisis de fundamentos, acaecida a finales del siglo XIX e inicios del XX, generada por la asunción de algunos principios del platonismo matemático como, por ejemplo, el principio de comprensión intuitiva. Zermelo presentó un sistema axiomático[38] motivado -en parte- por la necesidad de evitar las contradicciones que aparecieron en la teoría de conjuntos cantoriana,

---

[34]Zermelo excluye al axioma de elección de su nuevo sistema axiomático porque "tiene otro caracter que los demás" y lo considera un "principio lógico universal presupuesto por toda nuestra investigación." *Ibid.*, p.102.

[35]Torreti, R. "El Método Axiomático" en Moulines, U. *La Ciencia, estructura y desarrollo*. Madrid, Editorial Trotta, 1993, p.89.

[36]Tratados de Lógica (EL ORGANON). México, Editorial Porrúa, S.A., 1993.

[37]*Ibidem*

[38]Zermelo, E. "NeuerBeweisfur die MoglichkeiteinerWohlordnung" en *Mathematische Annalen*, 1908, 65 pp. 514-535.

y en dicho sistema aparece como uno de sus axiomas el de elección, el cual había sido enunciado de manera explícita cuatro años antes, en la parte final de su prueba del Teorema del Buen Orden. Dice Zermelo al respecto: "Este principio lógico no puede derivarse de otro más simple, pero se aplica universalmente sin titubeos en el razonamiento matemático."[39] A la par, varios programas de fundamentación se fueron desarrollando para superar las antinomias y ofrecer una base incontestable a la matemática. Frege, Russell y Whitehead (Logicismo)[40], Brouwer y Heyting (Intuicionismo) y Hilbert (Formalismo) son considerados los fundadores de tres corrientes hoy clásicas en filosofía de la matemática, las cuales comenzaron a atender a la matemática como objeto de estudio, indagando sobre el quehacer matemático tal y como lo definieramos en párrafos anteriores. En este marco, la posibilidad de derivar, a partir de unos principios, los teoremas matemáticos conocidos, guíaban en buena parte a la mayoría de dichos programas.

Frege intentó derivarlos a partir de axiomas lógicos pero su intención fue frustrada por la conocida paradoja de Russell (1902). ¿Qué hacer? Parecería adecuado entonces derivar los principales teoremas de la matemática desde la propia matemática. Consideramos que Zermelo así lo creyó conveniente, tomando como base la teoría de conjuntos, pues es conocido que toda teoría matemática se puede interpretar en términos de la teoría de conjuntos.[41] ¿Cuáles principios elegir? Zermelo presentó siete, siendo el último el axioma de elección. Este fue objeto de ataques por parte de eminentes matemáticos (Borel, Peano, Lebesgue, Skolem, Poincaré)[42] quienes apuntaban sus acusaciones a dos aspectos: su caracter no constructivo y algunas consecuencias -a juicio de ellos inverosimíles- que tiene su aceptación, por ejemplo, que todo conjunto se pueda bien ordenar, lo que implicaría que los números reales se pueden bien ordenar, a pesar de que no se ha podido dar un orden explícito.

---

[39]Ibidem.

[40]Tal y como refiriéramos previamente, el logicismo de Frege se desarrolló anterior a las discusiones clásicas sobre fundamentos en las matemáticas derivadas por la teoría de conjuntos cantoriana.

[41]Al respecto: Jané, I. "De qué trata la teoría de conjuntos" en Orayen, R. y Moretti, A., (Eds.), *Filosofía de la lógica*, Madrid, Editorial Trotta, 2004, p.247.

[42]En el último capítulo atenderemos en detalle las críticas de algunos de ellos.

Desde entonces, el axioma de elección dejó de ser considerado un "principio indubitable" lo que siempre ponía en tela de juicio las consecuencias derivadas de ella. Pero también, de no utilizarse, se observaba una reducción considerable de las matemáticas, pues muchos resultados fundamentales requerían del axioma. Ante este panorama, el axioma comenzó a tener partidarios y detractores y -al menos- dos matemáticas comenzaban a desarrollarse: las que se producen con el axioma de elección y las que se obtienen sin ella. Junto a esto, al menos dos posiciones filosóficas respecto a la actividad matemática emergen: la intuicionista y la platonista. Se comienza a hablar de varias matemáticas -en plural- ¿Cuál es la correcta? Responder esto pasa necesariamente por responder a la pregunta de si admitir o no al axioma trae contradicciones. Observemos como el axioma de elección genera debate en la matemática, la metamatemática y en la filosofía de la matemática.

6. Desde la matemática hacia la filosofía

La investigación sobre la naturaleza de los objetos matemáticos ha sido tradición en la filosofía de la matemática y el axioma de elección es visto, desde esta perspectiva, como un ejemplo clásico de una asunción platonista. Sin desestimar esta apreciación, consideramos que la misma se ha restringido a la naturaleza del objeto matemático vista de manera individual, sin considerar el contexto matemático en el que surge el axioma, en este caso la caracterización del quehacer matemático. Es decir, la reflexión filosófica tradicional respecto al axioma se hace desde la filosofía hacia la matemática y no **desde la matemática hacia la filosofía** que es lo que expondremos en el presente trabajo.[43] A nuestro juicio, la perspectiva tradicional limita otras aristas del tema que consideramos pertinente valorizar. Entre ellas, la referida al hecho de que el axioma de elección aparece como necesario en resultados fundamentales de varias áreas de las matemáticas, lo que permite poner en evidencia al platonismo matemático dentro de la matemática, en áreas tales como el análisis, el álgebra y la topología.

[43] Esta visión es fundamental para comprender la presentación que aquí haremos. Varios autores han desarrollado aspectos similares: Mancosu (2016), Tymoczko (1999), Maddy (1998), etc.

Que el axioma sea requerido en tantas áreas de las matemáticas a tal punto que la gran mayoría de la comunidad matemática actual lo considere indispensable[44] invita a indagar respecto a su naturaleza, pero no solamente desde lo que las posiciones tradicionales de filosofía de la matemática dicen al respecto, sino desde las características propias de la actividad matemática concreta -que hemos denominado quehacer matemático-. Es por ello que se justifica la presentación en esta investigación, de la demostración y descripción de algunos resultados fundamentales matemáticos en el que el axioma es requerido. De este ánalisis y desde la perspectiva expresada arriba -desde la matemática hacia la filosofía- consideramos que surgirán elementos que darán mayor sustento a las posiciones del platonismo matemático como parte integrante de la actividad matemática concreta. Sostenemos que un análisis filosófico adecuado del axioma de elección debe considerar las características particulares de la actividad matemática. No es usual encontrar trabajos en la literatura especializada que atiendan como tema específico al axioma de elección que unan las discusiones matemáticas con las consideraciones filosóficas, de acuerdo con la revisión bibliográfica hecha.

También describiremos el proceso que conllevó a determinar la independencia del axioma de elección de la teoría axiomática de conjuntos Zermelo-Fraenkel (ZF). Gracias a las pruebas metamatemáticas de los conjuntos constructibles de Gödel (1938) y el método de construcción de modelos de forcing de Cohen (1963) se poseen procedimientos que son hoy día estándar para resolver problemas de independencia o consistencia relativa.[45] El análisis de estos procedimientos de construcción de modelos se justifica en tanto que todo axioma objeto de análisis pasa en la contemporaneidad necesariamente por pruebas de consistencia relativa. Destaquemos el hecho que tales métodos son considerados platonistas.

Ahora bien, como consecuencia de los resultados de Gödel y Cohen, el hecho de que, tanto el axioma de elección como su negación se puedan utilizar sin riesgo de contradicción alguna

[44] La magnitud de esto se puede apreciar en: Howard, P y Rubin, J. *Consequences of the Axiom of Choice.* American Mathematical Society, 1998 y en Rubin, H. y Rubin, J. *Equivalents of axiom of choice*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1970.

[45] También ha sido usado para probar teoremas matemáticos. Véase: Solovay, R. "On the cardinality of $\sum \frac{1}{2}$ sets of reals" en *Foundations of Mathematics.* Symposium Papers commemorating the sixtieth birthday of Kurt Gödel. Jack J. Bullof, Thomas, C. Holyoke and S. W. Hahn, Editors. Springer-Verlag, 1969.

nos invita a reflexionar sobre las dos matemáticas existentes -una con el axioma, otra sin ella-. Ambas legitimadas, queda la interrogante sobre los posibles criterios para seleccionar a la matemática"adecuada" o si tal pregunta es conveniente. El seleccionar a la que admite al axioma de elección nos llevará a considerar el punto de vista platonista matemático de acuerdo con Bernays[46] y Ferreirós[47], tomando en consideración los planteamientos de Zermelo respecto al papel de los principios matemáticos para la ciencia y para la filosofía.[48] De igual forma estudiaremos los argumentos esgrimidos contra el axioma y veremos que las posiciones intuicionista y platonista no son incompatibles, privilegiándose la actividad matemática y lo que el matemático necesite para trabajar.

De acuerdo con la presentación que se ha hecho, el estudio que mostraremos del axioma de elección siguiendo la perspectiva ya citada -de la matemática a la filosofía- nos permite englobar el desarrollo concreto del axioma, su aparición y aplicación en cuatro áreas claves de las matemáticas: análisis, álgebra, topología y teoría de conjuntos; mostrando la presencia del platonismo matemático en la matemática; cómo hace presencia importante en la metamatemática, determinando en buena medida la división entre la metamatemática finitaria y la infinitaria, y abriendo las compuertas para la aparición de -al menos- dos matemáticas, lo que conlleva discusiones importantes en la filosofía de la matemática.

[46]Bernays, P. *El platonismo en...*, cit.

[47]Ferreirós, J. *Matemáticas y platonismo(s)*, cit.

[48]Zermelo, E. "Untersuchungenuber die Grundlagen der Mengenlehre I" en *Mathematische Annalen*, 1908, 65, pp. 261-281.

Capítulo 2

El axioma de elección en las matemáticas contemporáneas

El axioma de elección se encuentra en muchas áreas de las matemáticas. Howard y Rubin refieren al menos trescientas ochenta y tres (383) formas en las que aparece en las matemáticas. Cada una de las formas tiene al menos un enunciado equivalente o consecuencia estricta y algunas formas tienen varios enunciados equivalentes o consecuencias estrictas de dicho axioma. Los autores referidos han clasificado las formas según las distintas áreas matemáticas a las que pertenecen: Formas Algebraicas, Formas de Análisis, Formas de números cardinales, Formas de elección, Teoremas de punto fijo, Formas de Teoría de Grafos, Formas Lógicas, Principios maximales, Formas que involucran medidas sobre conjuntos, Formas diversas, Principios ordenadores que incluyen propiedades de órdenes parciales y Formas topológicas (incluyendo propiedades del conjunto de los números reales).[49] Centraremos nuestra atención en cuatro áreas fundamentales de las matemáticas, consideradas hoy clásicas, pero que al momento en que aparecía de manera explícita el axioma se encontraban en boga, a saber: teoría de conjuntos, análisis, topología y álgebra. Cada una de ellas se ha consolidado, con un cuerpo de conocimientos sólido y especialistas atendiendo sus principales y peculiares problemas. Por ende, existen entre los matemáticos aquellos que se identifican como conjuntistas, analistas, topólogos, algebristas, etc. Esto trae como consecuencia que, dentro del área particular que se esté estudiando, hay acuerdo respecto a las nociones y resultados fundamentales sobre las que descansa dicha área. Lo que mostraremos en este capítulo es que en algunos de estos resultados se hace *necesario* el axioma. Se podría objetar -y se ha hecho- que se puede hacer teoría de conjuntos, análisis, topología y álgebra sin el axioma de elección, lo cual es cierto, pero la matemática resultante queda disminuida considerablemente en comparación con la que se obtiene con elección. La necesidad a la que hacemos referencia no es la necesidad lógica, sino a la que forma parte del modo contemporáneo de hacer matemáticas, que, como veremos posteriormente, se adscribe a algunos aspectos del

[49] Howard y Rubin, *Consequences of...*, cit.

platonismo matemático y de la investigación científica.

Nuestro análisis comenzará mostrando los resultados en que se necesita el axioma. Así, nos adentramos en el quehacer matemático cotidiano y lo recorremos buscando detectar al axioma de elección. Ya su presencia se encontraba en las discusiones de la llamada crisis de fundamentos, pues era cuestionada su legitimidad para justificar resultados, siendo el primero de ellos el Teorema del Buen Orden. Su caracter no constructivo generaba dudas entre connotados matemáticos, pues no era usual para la época entender a las matemáticas y sus demostraciones bajo un enfoque conjuntista y un tratamiento abstracto, tal y como sucede hoy[50]. Postular entidades matemáticas sin un medio que los construya es aceptable para la mayoría de la comunidad matemática hoy día, mas no lo era cuando surgía el axioma de elección. ¿Qué elementos contribuyeron a su posterior aceptación? Uno de los principales tiene que ver con la gran cantidad de resultados que se sustentan en el axioma, los cuales no pueden soslayarse pues son pilares fundamentales en cada área estudiada. Presentaremos a continuación tales resultados, indicando el área al cual pertenece y su relevancia dentro del mismo.

1. Teoría de conjuntos: Teorema del Buen Orden y Lema de Zorn

La teoría de conjuntos es considerada hoy la teoría base de las teorías matemáticas contemporáneas. Y se denomina "teoría base" en un sentido bien específico. Jané al respecto nos dice

> Que una teoría T sea interpretable en la teoría de conjuntos significa que es posible tratar los objetos de que T se ocupa como conjuntos, y los conceptos, las operaciones y las relaciones que le son propias como conceptos de conjuntos, operaciones con conjuntos y relaciones entre conjuntos, y ello de modo tal que a cada una de las proposiciones expresables en el lenguaje de T se le asocia

[50]Siguiendo a Ferreirós, entenderemos por enfoque conjuntista aquel mediante el cual se privilegia la noción de conjunto como central para el tratamiento moderno y contemporáneo de la matemática. Esto es, cada área de las matemáticas se reescribe haciendo uso del lenguaje conjuntista. Por tratamiento abstracto nos referimos a la preferencia por los conceptos en lugar de las notaciones, las formas de representación o las construcciones. Véase, Ferreirós, J. *El enfoque...*, cit. p.9.

de manera sistemática una proposición conjuntista y que las proposiciones conjuntistas asociadas a los teoremas de T son teoremas de la teoría de conjuntos. Brevemente, interpretar una teoría matemática en la teoría de conjuntos equivale a reformularla como un fragmento de la teoría de conjuntos. Esto le da a la Teoría de conjuntos una peculiaridad digna de análisis y especial atención.[51]

Así, el estudio de la teoría de conjuntos cobra relevancia dentro del área de fundamentos. Y no solo allí, sino que ha influenciado el desarrollo de las distintas áreas de las matemáticas. Esto se puede apreciar en la obra monumental de Bourbaki, con su efecto orientador y uniformizador del trabajo matemático en el período 1950-1980, siendo expresión de la preponderancia de la teoría de conjuntos a un nivel más sofisticado. En el Congreso de la Association for Symbolic Logic de 1948, decía Bourbaki

> Como todos sabemos, todas las teorías matemáticas pueden ser consideradas como extensiones de la teoría general de conjuntos.[52]

En consecuencia, estudiar si la presencia del axioma de elección en la teoría de conjuntos es accidental o necesaria, nos informará sobre su posible influencia en las demás áreas de las matemáticas. Las investigaciones de Gregor Cantor se originaron producto de su atención sobre ciertos conjuntos de puntos de la recta, llevándolo luego al estudio de los conjuntos en general. Zermelo fue el primero en presentar a la teoría de conjuntos como teoría axiomática en 1908. Es usual asociar la noción de conjunto a Cantor de manera exclusiva, y aunque se reconoce en él su desarrollo en cuanto rama autónoma e independiente, el *enfoque conjuntista* que posteriormente dominó el desarrollo de la matemática se debe a varios investigadores antes que Cantor. En particular, la obra de dos matemáticos alemanes: Riemann y Dedekind. En el capítulo dedicado a las consideraciones filosóficas atenderemos con mayor detalle este aspecto.[53]

Durante sus investigaciones, Cantor definió lo que es un *conjunto bien ordenado* en su escrito número cinco denominado "Sobre variedades lineales infinitas de puntos" publicado

---

[51] Jané, I. *De qué trata...*, cit. p.3.

[52] Ferreirós, J. *El enfoque...*, cit. p.1.

[53] Es importante no obviar que, siguiendo a Maddy, las investigaciones de Frege y Russell también contribuyeron a la constitución de lo que es hoy la teoría de conjuntos contemporánea.

en 1883[54]. La teoría de conjuntos no es la misma sin la posibilidad de bien ordenar a todo conjunto, y que esto valga depende necesariamente del axioma de elección. Que todo conjunto se pueda bien ordenar lo asumía Cantor como posible. Al respecto afirmaba

> El concepto de conjunto bien ordenado resulta ser fundamental para la teoría de las variedades. Que siempre es posible reducir cada conjunto bien definido a la forma de un conjunto bien ordenado es una ley del pensamiento, a mi modo de ver, básica y fecunda, y especialmente notable por su universalidad, a la cual retornaré en un trabajo posterior.[55]

La importancia de la posibilidad de bien ordenar un conjunto estriba en el hecho de que el mismo permite establecer el concepto de *número cardinal de un conjunto*. Así lo dice Cantor

> Una de las tareas más importantes de la teoría de conjuntos, que creo haber resuelto en lo principal en [el escrito Nro 5 de 1883], consiste en la exigencia de determinar las distintas valencias o potencias de las variedades presentes en la totalidad de la naturaleza, en la medida en que ésta se abre a nuestro conocimiento. Lo he logrado mediante la formación del concepto general del enumerador de un conjunto bien ordenado, o lo que es lo mismo, del concepto de número ordinal.[56]

Se desprende que para poder determinar el cardinal de un conjunto debe éste poderse bien ordenar. ¿Es posible hacerlo para todo conjunto? Cantor consideró que sí, pero no pudo probarlo. Fue Zermelo en 1904 quien da la prueba, la cual requiere hacer uso en ella del axioma de elección. Llegamos entonces a lo central: para poder definir el cardinal de un conjunto es necesario que pueda bien ordenarse, y esto último solo sucede si asumimos el axioma de elección. La importancia del cardinal de un conjunto junto con la prueba del Buen Orden requiere presentar algunos conceptos previos que trabajamos en la siguiente sección. Además, nos adentraremos en el quehacer matemático e identificaremos algunos elementos que se corresponden con el platonismo.

[54]Citado por Torreti en *El paraíso de...*,cit., p.6.

[55]Cantor, GA, p.169, citado por Torreti, R. *El paraíso de...*, cit., p.35.

[56]Torreti, R. *El paraíso de...*, cit., p.36.

2. Orden parcial, Orden total y Buen Orden

Una *relación* se entiende, en términos generales, como una *asociación* entre los elementos de un mismo conjunto o de diversos conjuntos. La naturaleza o características del cómo estén asociados los elementos determinará distintos tipos de relaciones y algunas de ellas serán de interés para el quehacer matemático. Formalmente, se ha entendido a una relación binaria R como un conjunto de pares ordenados. Un *par ordenado* es un conjunto $\langle x, y\rangle$ tal que $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Definimos el dominio de R de la siguiente manera: $x \in domR \leftrightarrow \exists y \langle x, y\rangle \in R$. Una *función* la definiremos como una relación f tal que para cada $x \in \mathrm{dom}(f)$ existe un único y tal que $\langle x, y\rangle \in f$. Es de suma importancia una especial clase de relación denominada orden parcial, que definimos a continuación.

Definición 2.1. Una relación binaria R en un conjunto $A(A \subseteq R \times R)$ es una relación de *orden parcial débil* si

(1) $\forall x \in A(xRx)$,
(2) $\forall x \in A \forall y \in A(xRy \wedge yRx \to x = y)$,
(3) $\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \to xRz)$

(Esto es, R es una relación del tipo $\leq$).

Definición 2.2. Decimos que R es una relación de *orden parcial estricto* en A si:

(1) $\forall x \in A \neg(xRx)$,
(2) $\forall x, y \in A(xRy \to \neg yRx)$,
(3) $\forall x, y, z \in A(xRy \wedge yRz \to xRz)$

(Esto es, R es una relación del tipo $<$).

En este trabajo se llamará orden parcial a una relación de orden parcial débil o de orden parcial estricto. La notación usual para R es $<$. Dado un orden parcial estricto $<$ se define $x \leq y \leftrightarrow x < y \vee x = y$, y se llama a la relación $\leq$ orden parcial débil. Al par $(A, \leq)$ donde $A \neq \emptyset$ se le llama orden parcial débil mientras que al par $(A, <)$ se le llama orden parcial estricto. En el tratamiento matemático cotidiano es usual encontrar órdenes parciales. Veamos algunos ejemplos:

(1) Dado un conjunto X, consideremos el orden dado por $\subseteq$ en $P(x)$. Si $x = \{a, b\}, P(x) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Tenemos, por ejemplo,$\emptyset \subseteq \{a\}, \{b\} \subset \{a, b\}$, pero no $\{a\} \subseteq \{b\}$

(2) $A = \mathbb{R}$ y $R =<$(el orden usual de los números reales).

(3) $A = \mathbb{N}$, R la relación "es divisor de".

Definición 2.3. Una relación de orden R es un orden total (o lineal) si R es una relación de orden parcial tal que $\forall x, y \in A(xRy \vee yRx \vee x = y)$.

El ejemplo por excelencia de un orden total es $\mathbb{R}$ con el orden usual. También $\mathbb{Q}$ es un orden total.

Definición 2.4 (Elemento mínimo). Consideremos $<$ un orden parcial y sea D un conjunto. Un elemento m de D se dice un elemento *minimal* de D si y sólo si no existe x en D tal que $x < m$. Y m es el *mínimo* elemento de D si y sólo si $m \leq x$ para todo x en D. Todo elemento mínimo es también minimal. Para un orden total en un conjunto que incluya a D los dos conceptos coinciden, ya que

$$\sim (x < m) \rightarrow m \leq x$$

Las definiciones que se han presentado nos permiten caracterizar las propiedades que podría tener un conjunto determinado. En particular, es de interés saber si existen estructuras parcial o totalmente ordenadas para determinados conjuntos y si poseen elemento mínimo. Todo lo anterior es natural si consideramos que Cantor, al dar estas definiciones, buscaba caracterizar a los conjuntos en general, partiendo de los conjuntos de puntos de la recta real que iba estudiando, tratando de determinar cómo se comportan $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y varios subconjuntos de ellos, los cuales eran utilizados por todos los matemáticos en su activididad cotidiana.

Definición 2.5 (Buen orden). Un *buen orden* en A $(A \neq \emptyset)$ es un orden parcial en A donde cada subconjunto no vacío de A tiene elemento mínimo.

Hay conjuntos que poseen un buen orden y otros que no. Por ejemplo, el orden usual en $\mathbb{N}$ es un buen orden pero en $\mathbb{Z}$ no hay buen orden ya que no tiene elemento mínimo. Los buenos órdenes son importantes porque se pueden utilizar para indexar construcciones que proceden de "abajo hacia arriba", donde en cada etapa de la construcción (excepto el último) existe un próximo paso único. Esto lo podemos ver en la jerarquía acumulativa del sistema axiomático de Zermelo y la presentación del universo V de Von Neumann. Para los objetivos de la presente investigación, esto reviste importancia debido a que, si un conjunto no posee un buen orden, no es posible definir su cardinalidad. Como todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal, entonces es posible asignarle a cada conjunto un número cardinal. De no ser bien ordenados, se impide la realización de - entre otros- toda la aritmética cardinal transfinita de Cantor y los resultados metamatemáticos de Gödel (1938) y Cohen(1963). Así explicado, es entendible el interés por determinar si *todo* conjunto posee un buen orden. Torreti indica que

> Para su programa -el de Cantor- el Teorema del Buen orden era indispensable: la sucesión de los ordinales alcanza para enumerar todo lo que se presente a la naturaleza corpórea y espiritual si -y solo si- cada conjunto puede ordenarse bien[57]

La cita nos permite hacer algunas consideraciones sobre los compromisos y la posición de Cantor frente a las entidades matemáticas. Al respecto, el hecho de que se enumere lo que se presente a la naturaleza corpórea y espiritual nos habla de un evidente platonismo. En este sentido, las propiedades de los conjuntos son "descubiertas"por el matemático, es por ello que "se abre a nuestro conocimiento."

El concepto de buen orden es requisito indispensable para definir uno de los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos: el concepto de ordinal. Sin él, es imposible definir la clase de los ordinales y no podría desarrollarse toda la áritmetica cardinal de la teoría de conjuntos, lo que limita severamente varios resultados que en él se soportan. Veamos a continuación las definiciones que se derivan del buen orden.

Definición 2.6 (Conjunto transitivo, Ordinal, Clase de los ordinales). Un conjunto x es *transitivo* si $\forall z(z \in x \to z \subseteq x)$. Un conjunto α es un *ordinal* si es transitivo y está estrictamente bien ordenado por $\in$, es decir, si es transitivo y el par $(\alpha, \in_\alpha)$ es un buen orden estricto, donde $\in_\alpha = \{(\lambda, \delta) \in \alpha \times \alpha : \lambda \in \delta\}$. Hecho esto podemos definir la clase de los ordinales de la siguiente manera: $Ord := \{x : x \text{ es un ordinal}\}$, Ord está estrictamente bien ordenada por $\in$. Sean α y β dos ordinales, se define $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta$.

[57] *Ibid.*, p.35.

Desarrollando la definición anterior tenemos:

$$0 := \{\emptyset\}$$

$$1 := \{0\}$$

$$\ldots$$

$$n := \{0, \ldots, n-1\}$$

$$\ldots$$

$$\omega := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$$\omega + 1 := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, \omega\}$$

$$\omega + 2 := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, \omega, \omega + 1\}$$

$$\omega + 3 := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2\}$$

$$\ldots$$

$$\omega + \omega := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots\}$$

$$\ldots$$

Como puede observarse, cada ordinal es igual al conjunto de los ordinales que lo preceden.[58]

Definición 2.7 (Ordinal sucesor, Ordinal límite, Clase transitiva). Un ordinal α es *sucesor* si $\alpha = \beta + 1$ para algún ordinal β. Algunos ordinales sucesor son el 7, ω+ 1, ω+2. Un ordinal es *límite* si no es cero ni sucesor. Por ejemplo, ω y ω+ ω. Sea M una clase. M es transitiva si $\forall z(z \in M \to z \subseteq M)$ Así, tenemos que Ord es transitiva.

[58] Esta presentación de los ordinales se debe al matemático John Von Neumann. Revísese: Von Neumann, J.,“ On the introduction of transfinite numbers” en van Hiejenoort, J. *From Frege to Gödel*, USA, Oxford University Press, 1967, pp.346-354.

Ahora bien, la propiedad de tener un buen orden para todo conjunto no pudo ser demostrado por Cantor. Sí lo hace Zermelo en 1904 y he aquí cuando hace su entrada en el quehacer matemático de manera explícita el axioma de elección (pues se había usado implícitamente antes). Somos reiterativos en destacar la importancia del teorema del Buen Orden para el desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana: gracias a ella es posible definir el cardinal de un conjunto y con ello el infinito actual se hace manejable matemáticamente. La robustez que esto ofrece al desarrollo de la teoría de conjuntos y a la matemática por extensión se pierde de vista. Por lo tanto, la presencia del axioma de elección en la teoría de conjuntos no es accidental sino necesaria para el completo desarrollo de la misma. Veamos la demostración del Teorema del Buen Orden.

3. El axioma de elección equivale al Teorema del Buen Orden

La equivalencia se obtiene de dos pruebas, en una de ellas, se asume el axioma de elección y se prueba que esto implica el Teorema del Buen orden. En la otra prueba, se asume que todo conjunto se puede bien ordenar y se verifica que esto implica el axioma de elección. Comencemos con esto último.

Teorema 2.8. *El Teorema del Buen Orden implica el axioma de elección*

Demostración[59]: Supongamos que todo conjunto puede bien ordenarse. Lo que queremos concluir es que cada familia S de conjuntos no vacíos tiene función de elección. Esto es, que existe $f : S \to \cup S$ tal que $f(k) \in k$ para cada $k \in S$. Para ver esto, es suficiente bien ordenar $\cup S$ ya que se podría definir f como sigue: $f(k)$ es el menor elemento respecto al orden de $\cup S$. Sea R un buen orden en $\cup S$. Entonces sea $f(k) \in k$ aquella que asigna a k su primer elemento en $< k, R >$.$\square$

Teorema 2.9. *El axioma de elección implica el Teorema del Buen Orden*

[59]La demostración se puede encontrar en: Jech, T. *Set Theory*, Alemania, Springer, 2006, p.48.

Demostración[60]: Sea A un conjunto. Queremos definir un buen orden en A con la ayuda del axioma. Para lograr esto es suficiente encontrar un ordinal y una función biyectiva entre ellos, ya que eso induce un buen orden.[61]

Sea $P(A)\backslash\{\emptyset\}$. Por como está construido, dicho conjunto es una colección de conjuntos no vacíos. Por lo tanto, por el axioma de elección, posee función selectora. Sea $f : P(A)\backslash\{\emptyset\} \rightarrow A$ dicha función. Definamos $g : P(A) \rightarrow A$ como sigue: $g(B) = f(A\backslash B)$. Esto hace que $g(B) \notin B$ para todo $B \subseteq A$. Definamos ahora una relación funcional por recursión. Sea x_0 un conjunto y definamos, para cada ordinal α,

$$F(\alpha) = \begin{cases} g(\{f(\beta) : \beta < \alpha\}) & \text{si } \{f(b) : b < a\} \nsubseteq A \\ x_0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Supongamos que F no toma nunca el valor x_0. Como F es inyectiva con dominio Ord y todos sus valores están en A, tendríamos, por el axioma de reemplazo[62], que Ord es un conjunto. De esta contradicción concluimos que existe algún α tal que $F(\alpha) = x_0$. Sea α_0 el menor de esos ordinales. Entonces para todo $\beta < \alpha$ se tiene que $F(\beta) \in A$ y $\{f(b) : b < a\} \subseteq A$. Pero este conjunto no está en el dominio de g (porque en este caso $F(x_0)$ pertenecería a A), entonces $\{F(b) : b < a\} = A$ y por lo tanto $F \restriction x_0$ es una biyección de α_0 en A. Esto induce un buen orden en A $\square$

4. El axioma de elección equivale al lema de Zorn

El lema de Zorn es posiblemente la forma más común en que es usado el axioma de elección en la matemática contemporánea. En efecto, rápidamente llegó a formar parte de la literatura matemática estándar y es usual encontrarlo en libros de texto matemáticos. La siguiente cita corrobora lo que hemos planteado

> A pesar de la fuerza de la oposición inicial contra ella, el axioma de elección de Zermelo poco a poco fue aceptado principalmente porque era necesario para, en

[60] La demostración sigue los pasos de la que se puede hallar en: Di Prisco, C. *Una introducción a la teoría de conjuntos y los fundamentos de la matemática*, 20 CLE, Unicamp, Campinas, 1997, pp.54-55.

[61] El principio de enumeración garantiza la existencia tanto del ordinal como de la función biyectiva entre A y el ordinal. Mas aún, el axioma de elección implica el principio de enumeración. Lewin, R. *Teoría axiomática de conjuntos*, Chile, Universidad Católica de Chile, p.105.

[62] Axioma de reemplazo: Si F es una función definible, entonces para cualquier conjunto X existe un conjunto $Y = F(x) = \{F(x) : x \in X\}$

> una etapa temprana, el desarrollo de varias ramas de las matemáticas, no sólo en teoría de conjuntos, sino también en topología, álgebra y análisis funcional, por ejemplo. Hacia el final de los años treinta, se había establecido firmemente y se hizo parte del currículum estándar en matemáticas en la forma del lema de Zorn.[63]

Conocer la equivalencia entre el axioma de elección y el lema de Zorn nos permitirá evidenciar la cada vez mayor utilización del axioma en las matemáticas. Daniel Crespin afirma que

> La equivalencia entre el axioma de elección y el lema de Zorn es un requisito indispensable para desarrollar las partes más útiles de la teoría de conjuntos. Al igual que otros tópicos que fundamentan áreas extensas de las Matemáticas, los planteamientos deben tener la mayor amplitud posible. Así, no se imponen restricciones a la cardinalidad de los conjuntos y salvo algunos ejemplos ilustrativos pero totalmente prescindibles en el desarrollo teórico, tampoco se utilizan los números naturales.[64]

El lema de Zorn posee tal caracterización. Además, se describe lo que es común a las matemáticas contemporáneas: generalización, amplitud y el uso de hipótesis que se consideren suficientes para trabajar. En particular, el autor refiere la utilización del infinito actual como dado, a tal punto que infinitos superiores a $\mathbb{N}$ son los más usuales en el quehacer matemático cotidiano. Tal descripción es evidencia del platonismo en las matemáticas actuales. Antes de enunciar el lema se requieren precisar dos conceptos fundamentales: elemento maximal y cota superior. Veámoslas a continuación.

Definición 2.10. Sean (P, R) un orden parcial y $D \subseteq P$. $x \in P$ es un *elemento maximal* de D si $x \in D$ y no existe ningún $y \in D$ tal que $y \neq x \wedge xRy$. x es una *cota superior* de D si $\forall y \in D(yRx \vee y = x)$

Ahora estamos en posición de enunciar el lema. El matemático alemán Max Zorn lo enunció en 1935 y reza de la siguiente manera,

---

[63] *Intuicionism, logicism y formalism: what has become of them?*, Suecia, Springer, 2009. p.210.

[64] Crespin, D. *Axioma de Elección y Lema de Zorn*, Caracas, Cartillas Matemáticas, Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UCV, 2000, p.1.

Definición 2.11. (Lema de Zorn)

Sea (A, R) un conjunto parcialmente ordenado tal que cada $X \subseteq A$ totalmente ordenado tiene una cota superior en A. Entonces A tiene un elemento maximal.

Como bien indica Halmos"Muchos teoremas de existencia pueden ser formulados (o, si es necesario reformulados) de modo que el conjunto subyacente está parcialmente ordenado y tiene la determinante propiedad de la maximalidad." [65]Vale la pena observar, en atención al desarrollo del quehacer matemático, lo que Zorn refiriese. En efecto, él lo publica como un"axioma cierto sobre conjuntos de conjuntos" para sustituir"al teorema del buen orden y la teoría que lo soporta." [66]Siendo equivalentes ambas proposiciones llama la atención que haga esa consideración. Lo que sucede es que para él, la teoría que sustenta al buen orden," está prohibida, desde un punto de vista algebraico" [67]por lo que se entiende que luego indicase que su propósito es "hacer las demostraciones cortas y más algebraicas" [68]objetivo que considera posible con el lema.

El lema de Zorn, aunque es equivalente al axioma de elección, en el trabajo matemático cotidiano es preferido porque no requiere la utilización de ordinales e inducción transfinita, elementos asociados con el Teorema del buen orden, por ejemplo. Esto en las primeras décadas del siglo XX era visto como importante para varios algebristas, quienes lo privilegiaban ya que se centra en la maximalidad y no en funciones de elección que, aunque imprescindibles, no parecían tener especial relevancia para ellos. Esto nos muestra que el matemático utilizará las nociones y conceptos que les sea más fáciles de trabajar, sin importar si la misma es platonista o intuicionista.

No se debe entender lo anterior como una desventaja sino parte del desarrollo natural del quehacer matemático. En consecuencia, la naturaleza de lo que se investiga sera la guía fundamental del matemático para su actividad. Lo que hemos referido nos muestra ya la discusión entre un quehacer matemático constructivista y un quehacer abstracto, este último

[65]Halmos, P. *Naive set theory*, New York, Springer, 1974, p. 62.

[66]Bell, J. *The axiom of choice*, Canadá, College Publications, 2009, p.20.

[67]Bell, J. *The axiom of...*, cit., p.21.

[68]Ibidem.

aún no consolidado para inicios del siglo XX. La mayoría de los algebristas de aquella época veían en el axioma de elección la utilización de transfinitos, lo que consideraban "aparatos trascendentales, extraños al progreso de las matemáticas."[69]Esto es entendible para aquella época, pues el planteamiento platonista no se había consolidado aún en la actividad matemática cotidiana.

Procedamos a analizar la demostración de la equivalencia. De manera análoga a la primera, la demostración de ésta se dará luego de haber probado dos implicaciones. Veámoslas a continuación.

Teorema 2.12. *El axioma de elección implica el lema de Zorn*

Demostración[70]: Sea $U =< A, R >$ un conjunto parcialmente ordenado, donde $R \subseteq A \times A$ es la relación de orden. Por elección tenemos $h : P(A) \backslash \{\emptyset\} \to A$ tal que $h(x) \in x$ para todo $x \subseteq A$ $(x \neq \emptyset)$. Sea C el conjunto de los subconjuntos acotados de A (aquellos para los que existe una cota superior estricta). Para cada $x \in C$, sea X_c el conjunto de las cotas superiores estrictas de x.

Definimos $m : C \to A$ por $m(x) = h(c_x)$. Esto hace que $m(x)$ sea una cota superior de x y $m(x) \notin x$. Sea x_0 un conjunto que no pertenece a A. Definamos una relación funcional por recursión,

$$F(\alpha) = \begin{cases} m(\{f(\beta) : \beta < \alpha\}) & \text{si } \{F(\beta) : \beta < \alpha\} \in C \\ x_0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

De la misma manera que en el teorema anterior, se prueba (usando reemplazo) que F toma el valor x_0. Sea α_0 el menor ordinal de α tal que $F(\alpha) = x_0$. $F \restriction \alpha_0$ es una inyección de α_0 en A que preserva el orden, luego $\{F(\beta) : \beta < \alpha_0\}$ está bien ordenado. Pero por hipótesis este conjunto tiene una cota superior d. Pero d no es una cota superior estricta ya que en este caso $F(\alpha_0) \in A$. Esto quiere decir que d es un elemento maximal. □

Teorema 2.13. *El Lema de Zorn implica el axioma de elección*

[69]Ibid.

[70]La demostración se puede hallar en: Di Prisco, C. *Una introducción a...*, cit. p.55-56.

Demostración[71]: Supongamos que todo conjunto ordenado cuyos subconjuntos totalmente ordenados que tienen cota superior, tiene un elemento maximal y sea A un conjunto. Queremos hallar una función selectora para A. Sea $F = \{h : dom(h) \subseteq A \backslash \{\emptyset\}$ tal que para todo $x \in dom(h), h(x) \in x\}$.

Nótese que si A tiene algún elemento $x \neq \emptyset$ entonces F no es vacío, pues si $y \in x$ para algun $x \in A$, la función $h =< x, y >\in F$. El conjunto F está parcialmente ordenado por la relación de inclusión.

Si $H \subseteq F$ es un subconjunto totalmente ordenado entonces $\cup H$ es una cota superior de H. Por hipótesis tenemos que existe un elemento maximal $f \in F$. Veamos que f es una función selectora para A. En efecto, como $f \in F$, $dom(f) \subseteq A \backslash \{\emptyset\}$ y para cada $x \in dom(F)$, $f(x) \in x$. Falta demostrar que $dom(f) = A \backslash \{\emptyset\}$. Supongamos lo contrario y tomemos un $z \in A \backslash \{\emptyset\}$ fuera del dominio de f.

Como $z \neq \emptyset$ existe un $u \in z$ y podemos definir $f' = f \cup \{< z, u >\}$. Entonces $f' \in F$ y $f \subseteq f'$ lo que contradice la maximalidad de f.$\square$

5. Topología: Teorema de Tychonoff

Courant y Robbins ofrecen una excelente presentación del surgimiento de la topología en la matemática. En efecto, los autores refieren que

> A mediados del siglo XIX comenzó un desarrollo enteramente nuevo de la geometría, que pronto se convirtió en una de las fuerzas mas potentes de la matemática moderna. La nueva disciplina, llamada *análisis situ* o *topología*, estudia las propiedades de las figuras geométricas que subsisten aun si esas figuras se someten a deformaciones tan radicales que las hagan perder todas sus propiedades métricas y proyectivas.[72]

En efecto, la topología estudia tales propiedades de forma rigurosa y definida. Una de ellas, la *compacidad*, es de uso fundamental y una propiedad de mucho interés para los topólogos. Esto se debe a que hay una serie de resultados y nociones que dependen directamente de ella. Por ejemplo, teoremas tales como el Teorema de Tychonoff, Teorema de Čech-Stone,Teorema de Ascoli y el Teorema de categoría de Baire, junto con conceptos tales

[71] Ibidem.

[72] Courant, R. y Herbert, R., *¿Qué es...*,cit., p.247.

como filtros, ultrafiltros, subespacios de $\mathbb{R}$, etc. de mucha utilidad en el quehacer matemático contemporáneo.

Como plantea Herrlich, la definición de compacidad original fue presentada por Alexandroff y Urysohn en 1929, la cual muestra tres condiciones para que un espacio sea compacto. Lo que interesa para los propósitos de nuestro trabajo es que dos de las condiciones presentadas por ellos serán equivalentes si y sólo si se acepta el axioma de elección, mientras que la otra condición, si no acepta elección será -a juicio de Herrlich-"ligeramente antinatural e impracticable." [73]Se verifica nuevamente como la presencia del axioma de elección se hace necesaria para el completo desarrollo de un área matemática.

Nuestras consideraciones se enfocarán en uno de los teoremas topológicos más utilizados y que equivale al axioma objeto de estudio. En 1935, el matemático ruso Andrei Nykolaievich Tychonoff demostró que el producto arbitrario de espacios topológicos compactos es a su vez compacto, si se le dota de la topología producto. Existe acuerdo entre los topólogos respecto a la importancia de este teorema.[74] Es tal la relevancia que Rubin y Rubin lo coloca como el primer teorema en forma topológica que depende del axioma de elección.[75]

Es importante indicar el hecho de que Tychonoff realiza su prueba usando el axioma de elección, y en 1950 el matemático estadounidense John Kelley demostró la equivalencia estableciendo la implicación faltante (Si vale Tychonoff entonces vale elección). En 1962, L.E.Ward demostró que una versión mas débil del Teorema de Tychonoff es equivalente al axioma de elección. También se ha demostrado que puede ser válido sin necesidad del axioma de elección, si se entiende por topología un concepto no supeditado a un conjunto de puntos, sino que se parte de un retículo de abiertos como noción primitiva y no de la de punto como es habitual.[76]

[73]Herrlich, H. *Axiom of choice*, Alemania, Springer, 2006, p.33.

[74]Herrlich refiere tres opiniones autorizadas. Véase Herrlich, H. *Axiom of...*, cit., p.32.

[75]Rubin, H. y Rubin, J. *Equivalents of axiom of choice*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1970.

[76]Al respecto se puede consultar Johnstone, P.T., *Tychonoff's Theorems without the axiom of choice*. Fund. Math., 113, 21-35, 1981.

Comenzaremos dando algunas definiciones previas, necesarias para la demostración de la equivalencia.

Definición 2.14 (Espacio topológico). Llamaremos *espacio topológico* al par ordenado (X, T) donde X es un conjunto ($X \neq \emptyset$) y T una topología sobre X, es decir una colección de subconjuntos de X que satisfacen lo siguiente:

(1) El conjunto vacío y X pertenecen a T.

(2) La intersección de cualquier subcolección finita de conjuntos de T pertenece también a T: $(O_1 \in T, O_2 \in T) \Rightarrow (O_1 \cap O_2 \in T)$

(3) La unión de toda colección de conjuntos de T pertenece también a T

Definición 2.15 (Recubrimiento abierto). Un *recubrimiento abierto* de un subconjunto $A \subseteq X$ de un espacio topológico, es una familia de conjuntos abiertos $O_{I i \in I}$ de$X$, tales que su unión cubre a A.

$$\bigcup_{i \in I} O_i \supseteq A$$

Así, dado un recubrimiento C de un conjunto A, un *subrecubrimiento* D es una subfamilia de C, $D \subseteq C$ que sigue siendo un recubrimiento de A.

Definición 2.16 (Espacio topológico compacto). Un espacio topológico X se dice *compacto* si, dado un recubrimiento abierto de X cualquiera, existe un subrecubrimiento finito del mismo.

Definición 2.17 (Topología producto). Dada una colección $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)$ tal que $\alpha \in A\}$ de espacios topológicos, la *topología producto* τ sobre el producto cartesiano

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

es la topología que tiene como subbase[77] $S = \{p_\alpha^{-1}(U)$ tal que $\alpha \in A, U \in \tau_\alpha\}$, donde $p_\alpha : X \to X_\alpha$ es la proyección usual.

[77] Sea (X, τ) un espacio topológico. Una colección S de subconjuntos abiertos de X es una subbase de la topología τ de X si existe una base tal que todo abierto de esa base se puede escribir como una intersección finita de subconjuntos de S.

Definición 2.18 (Propiedad de intersección finita). Una colección $F \subseteq 2^X$ tiene la propiedad de intersección finita (PIF) si toda subcolección finita de F tiene intersección no vacía.

Ahora tenemos todos los elementos necesarios para enunciar el Teorema de Tychonoff.

Teorema 2.19 (Teorema de Tychonoff). *El producto de espacios topológicos compactos es compacto.*

Probemos la primera implicación, debida a Tychonoff.

Teorema 2.20. *El axioma de elección implica al Teorema de Tychonoff*

Demostración[78]: Sean $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ una colección de espacios topológicos y X su producto. Si X es compacto, dado que la proyección $p_\alpha : X \to X_\alpha$ es continua y suprayectiva, entonces X_α es compacto. Recíprocamente, sea $\mathcal{F} = \{F_i : i \in \mathcal{I}\}$ una familia de cerrados de X con la Propiedad de Intersección Finita, la que puede suponerse maximal, en el sentido de que si $F_i, F_j \in \mathcal{F}$ entonces $F_i \cap F_j \in \mathcal{F}$ ya que si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}, \cap\mathcal{G} \subseteq \cap\mathcal{F}$.

Entonces, para cada $\alpha \in \mathcal{A}$, la colección $\mathcal{F}_\alpha = \{\overline{p_\alpha(F_i)} : i \in \mathcal{I}\}$ tiene la propiedad de intersección finita, de manera que por la compacidad de X_α ocurre que $\cap\mathcal{F}_\alpha \neq \emptyset$. Luego -gracias al axioma de elección- podemos elegir $x_\alpha \in \cap\mathcal{F}_\alpha$ y sea $x = (x_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}) \in X$, que satisface $p_\alpha(x) = x_\alpha$ para cada $\alpha \in \mathcal{A}$. Sea

$$S = p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$$

un subbásico de la topología producto para X, tal que $x \in S$, entonces $p_\alpha(S)$ es un abierto de X_α que contiene a x_α, y en consecuencia $p_\alpha(S) \cap p_\alpha(F_i) \neq \emptyset$ para todo α y para todo i, de manera que $p_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k}) \cap F_i \neq \emptyset$ para todo $k \in \{1, \ldots n\}$ y todo $i \in \mathcal{I}$. Sea $y_{\alpha_k} \in p_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k}) \cap F_i$ para $i \in I$ fijo, y tómese un punto $y \in F_i$ tal que $p_{\alpha_k}(y) = y_{\alpha_k}$ para $k \in \{1, \ldots n\}$,que claramente satisface $y \in S \cap F_i$, con lo que $S \cap F_i \neq \emptyset$. Se sigue que $S \cap F_i \neq \emptyset$,para todo $i \in \mathcal{I}$. Entonces $x \in \overline{F_i} = F_i$, para todo $i \in \mathcal{I}$ con lo que $x \in \cap\mathcal{F}$.□

Veamos ahora la demostración de la implicación faltante, debida a Kelley.

[78]La demostración puede encontrarse en: Pérez, J.“Los Teoremas de Tychonoff y de los productos conexos son equivalentes” en *Revista de Matemática: Teoría y aplicaciones*, México, 2016, 23(1): pp.1-10

Teorema 2.21. *El Teorema de Tychonoff implica al axioma de elección*

Demostración[79]: Supongamos que $\mathcal{Y} = \{Y_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una colección no vacía de conjuntos no vacíos, y sea

$$y \notin \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha$$

Nótese que tal punto existe, por ejemplo, si

$$y = \bigcup_{\alpha\in A} Y_\alpha.$$

Denotemos $x_\alpha = Y_\alpha \cup \{y\}$ y dótese a este conjunto de la topología $\tau_\alpha = \{X_\alpha, \{y\}, \emptyset\}$, respecto de la cual es compacto, y por hipótesis, el producto

$$X = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} X_\alpha$$

es compacto. Claramente Y_α es cerrado en x_α, de manera que por continuidad $p_\alpha^{-1}(Y_\alpha)$ es cerrado en X y es no vacío. Para toda subcolección finita $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \mathcal{A}$ se satisface que

$$x \in p_{\alpha_1}^{-1}(Y_\alpha) \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(Y_{\alpha_n})$$

donde $x_\alpha = y$ para $\alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ y se elige $x_{\alpha_k} \in y_{\alpha_k}$ para $k \in \{1, \ldots, n\}$ dado que cada Y_α es no vacío.Tenemos entonces que $\{p_\alpha^- 1(Y_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ es una colección de cerrados de X con la propiedad de intersección finita, de manera que por compacidad,tiene intersección no vacía, y dado que

$$\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} p_\alpha^{-1}(Y_\alpha) = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} Y_\alpha$$

se ha completado la demostración.□

6. Análisis: Teorema de Hahn-Banach

El Teorema de Hahn-Banach es un teorema de extensión de funcionales que se debe independientemente al matemático austríaco Hans Hahn (1927) y al polaco Stefan Banach (1929), quienes aparentemente generalizaron ideas del también austríaco Edward Helly (1912). El teorema se presenta de variadas maneras, tanto analíticas como geométricas. Su utilización es de capital importancia y es considerado uno de los cuatro pilares del análisis funcional,

[79] Ibidem.

junto con el Principio de la Acotación Uniforme, el Teorema de la Aplicación Abierta y el Teorema del Grafo Cerrado. Antes de enunciarlo presentamos una definición necesaria.

DEFINICIÓN 2.22 (Funcional sublineal). Sea E un espacio vectorial real.[80] Una función $p : E \to \mathbb{R}$ es un *funcional sublineal* o *subnorma* si cumple las siguientes propiedades:

(1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

(2) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ para todo $x \in E$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 0$

Tomaremos como básica para este trabajo la siguiente versión del Teorema.

TEOREMA 2.23 (Teorema de Hahn-Banach). *Sean E un espacio vectorial real y M un subespacio de E. Supongamos que p es un funcional sublineal sobre E y que $f : M \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M$. Entonces existe una aplicación lineal $g : E \to \mathbb{R}$ tal que $g \mid M = f$ y $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.*

La demostración utiliza el Lema de Zorn y procede de la siguiente manera.

Demostración[81]: Consideremos la familia $\mathcal{A}$ de todas las aplicaciones h lineales y reales definidas en algún subespacio $D(h)$ de E tales que $D(h) \supset M$, $h \mid M = f$ y $h(x) \leq p(x)$ para todo $x \in D(h)$. Esta familia no es vacía pues $f \in \mathcal{A}$. Podemos definir en $\mathcal{A}$ un orden parcial poniendo $h_1 \leq h_2$ si $D(h_1) \subset D(h_2)$ y h_2 es una extensión de h_1. Queremos aplicar el Lema de Zorn a la familia A, dotada del orden parcial anterior.

Procedamos a fijar una cadena $\mathcal{C}$ en $\mathcal{A}$. Llamemos $D := \bigcup_{h \in \mathcal{C}} D(h)$. Como $\mathcal{C}$ está totalmente ordenado, entonces D es un subespacio vectorial de E y que la aplicación $u : D \to \mathbb{R}$ dada por $u(x) = h(x)$ si $x \in D(h)$ con $h \in \mathcal{C}$ está bien definida y es lineal. Tenemos que $h \leq u$ para toda aplicación $h \in \mathcal{C}$. Por lo tanto $\mathcal{C}$ tiene una cota superior en $\mathcal{A}$. En consecuencia $\mathcal{A}$ tiene algún elemento maximal. Sea g tal elemento. Entonces g es lineal $g \mid M = f$ y $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in D(g)$. Basta probar que $D(g) = E$.

Supongamos, por reducción al absurdo que existe algún vector $y \in E \backslash D(g)$. Sea $H = \{x + \alpha y : x \in D(g), \alpha \in \mathbb{R}\} = span(D(g) \cup \{y\})$.Tenemos que H es un subespacio vectorial

[80]Una definición de espacio vectorial se puede encontrar en: Marcus, M. y Minc, H. *Elementos de álgebra lineal*, México, Editorial Limusa, 1971, p.50.

[81]La demostración se puede encontrar en: Gonzalez, L. y Benavides, T. *Notas de Análisis Funcional*, España, Departamento de análisis matemático, Universidad de Sevilla, 2010, pp.52-54.

de E con $D \subset H$ y $D \neq H$. Además, puesto que $y \notin D(g)$, podemos extender linealmente g a H mediante la aplicación dada por

$$h : z = x + \alpha y \in H \mapsto g(x) + \alpha c \in \mathbb{R}$$

donde c es un número real fijo, pero arbitrario. Elijamos c tal que $h(z) \leq p(z)$ para todo $z \in H$ con lo que llegaríamos a contradicción con la maximalidad de g.

Necesitamos que se cumpla

$$g(x) + \alpha c \leq p(x + \alpha y)(x \in D(g), \alpha \in \mathbb{R})$$

Esto es equivalente a

$$g\left(\frac{x_1}{\alpha}\right) + c \leq p\left(\frac{x_1}{\alpha} + y\right)(\alpha > 0, x_1 \in D(g))$$

y

$$g\left(\frac{x_2}{\beta}\right) + c \geq \frac{1}{\beta} p\left(\frac{-\beta(x_2 + \beta y)}{-\beta}\right) = -p\left(-\frac{x_2}{\beta} - y\right)(\beta > 0, x_2 \in D(g))$$

lo que equivale a su vez a

$$-p\left(-\frac{x_2}{\beta} - y\right) + g\left(-\frac{x_2}{\beta}\right) \leq c \leq p\left(\frac{x_1}{\alpha} + y\right) - g\left(\frac{x_1}{\alpha}\right)$$

Como $\frac{x_1}{\alpha}$ y $-\frac{x_2}{\beta}$ son puntos arbitrarios en $D(g)$, basta encontrar c tal que

$$g(u) - p(u - y) \leq c \leq p(v + y) - g(v) \text{ para todo } u, v \in D(g)$$

Ahora bien, sabemos que

$$g(u) + g(v) = g(u + v) \leq p(u + v) \leq p(u - y) + p(v + y),$$

de donde resulta

$$g(u) - p(u - y) \leq p(v + y) - g(v) \text{ para todo } u, v \in D(g)$$

Por tanto $a \leq b$, donde

$a := sup\{g(u) - p(u - y) : u \in D(g)\}$ y $b := inf\{p(v + y) - g(v) : v \in D(g)\}$

Tomando $c \in [a, b]$ se obtiene el resultado. $\square$

Es importante hacer algunas consideraciones respecto al Teorema de Hahn-Banach. Así como refiriéramos que es posible una demostración del Teorema de Tychonoff sin elección (haciendo las salvedades correspondientes), se ha planteado lo mismo para Hahn-Banach. Al respecto, es conocido que el Teorema de Hahn-Banach implica el axioma de elección para familias de conjuntos convexos cerrados en espacios reflexivos y para familias más generales de convexos en espacios localmente convexos.[82]Sin esas condiciones específicas, se puede hacer la demostración de manera constructiva.

Además, se sabe que Hahn-Banach es estrictamente más debil que elección, ya que se sigue del principio de existencia de ultrafiltros (UF).[83] Esto último no implica elección[84] Y además, Pincus en 1974 probó que Hahn-Banach es más débil que el principio de existencia de ultrafiltros.[85] Se tienen entonces las siguientes implicaciones (en ZF sin elección): $AE \to UF \to HB$. Todo lo anterior nos muestra que, dentro del quehacer matemático cotidiano, hay cabida para las demostraciones constructivas. Esto no niega al platonismo sino que, tal y como queremos enfatizar en el desarrollo de la presente investigación, el matemático, siempre que pueda hará demostraciones constructivas pero si no puede y debe recurrir a asunciones platonistas, lo hará sin inconveniente alguno.

Deseamos agregar que existe una relación entre el Teorema de Hahn-Banach, el axioma de elección y la Teoría de la medida, otra área fundamental de las matemáticas contemporáneas. No se corresponde con los objetivos de la investigación explicar en detalle la participación

---

[82]Remitimos el excelente artículo de Caicedo y Enciso, quienes realizan un suscinto análisis de la relación entre el Teorema de Hahn-Banach y el axioma de elección. Caicedo, X. y Enciso, G.“ El Teorema de Hahn-Banach como principio de elección” en *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias*, Vol. 28, 106, 2004, 11-20.

[83]J. Loś y C. Ryll-Nardzewski (1954), On the applications of Tychonoffs theorem in mathematical proofs. Fundamenta Mathematicae 41, 49-65.

[84]J.D. Halpern y A. Levy (1971), The boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice. AMS Proceedings in Axiomatic Set Theory, 83-134.

[85]D. Pincus (1974), The strength of the Hahn-Banach theorem.Victoria Symposium on Non-Standard Analysis. Lect. Notes in Math. 369. Springer Verlag, Berlin, 203-248.

del axioma de elección en la teoría de la medida.[86] Aun así, respecto al tema en cuestión, podemos indicar que, en 1905, Vitali demostró la existencia de un conjunto que no es susceptible de ser medido con la medida de Lebesgue, usando en su demostración al axioma de elección. El resultado de Vitali es el primero de toda una serie de resultados matemáticos que dependen de elección publicado después de 1904.

Es conocido que si ZF es consistente entonces también lo es ZF + $\neg$ AE + $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ lo que significa que el axioma de elección no equivale a $\mathcal{L}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Además, Solovay en 1970 probó que si ZF + existe un cardinal inaccesible es consistente entonces también lo es ZF + Todo $A \subset \mathbb{R}$ es medible-Lebesgue. En ese caso, el Teorema de Hahn-Banach sería falso. Con todo lo anterior podemos apreciar que nuestros resultados dependerán de lo que se acepte como existente. En particular, que la existencia de un cardinal inaccesible (entidad matemática platonista que no se puede probar en ZFC) pueda hacer falso Hahn-Banach deja la puerta abierta a mayores investigaciones.

7. Análisis: Caracterización de continuidad

Indicar cuándo una función es continua se corresponde con uno de los primeros conceptos presentados a los estudiantes universitarios al inicio de la carrera de matemáticas. Esto es entendible, pues gracias a ella conceptos posteriores tales como la derivada de una función y la integración poseen relación con ella. Las aplicaciones de las funciones continuas en gran parte de la actividad matemática son de importancia capital. Una de las caracterizaciones que se puede hacer de una función continua involucra al axioma de elección y es la que en la historia temprana del axioma se desarrolló, tal y como refiere Moore.[87]

En octubre de 1871 Eduard Heine escribe un artículo sobre análisis real. Impreso al año siguiente, en el mismo se encuentra una definición de continuidad de funciones que reza en los siguientes términos:

[86] Un análisis detallado de la relación entre la Teoría de la medida y el axioma de elección se puede hallar en: Adame, C. ¿Es necesario el Axioma de Zermelo para comprender la Teoría de la Medida? en *Methateoria*, 3, 2013, pp.37-64.

[87] Moore, G. Zermelo's axiom of..., cit., p.12.

Teorema 2.24. *Una función real f es continua en un punto p si y sólo si f es secuencialmente continua en p.*

La primera caracterización de función continua es debida a Cauchy y Weierstrass, siendo la usual en los textos sobre el tema, es la siguiente,

Definición 2.25. Una función real f es continua en un punto p si para cada $\epsilon > 0$ existe algun $\eta > 0$ tal que para cada x,

$$| x - p |< \eta \text{ implica } | f(x) - f(p) |< \epsilon.$$

La segunda caracterización, por medio de secuencias en lugar de intervalos es lo que en lo sucesivo se denominará *secuencialmente continua*: una función f es secuencialmente continua en p, si para cada secuencia $x_1, x_2, \ldots$ convergente a p, la sucesión $f(x_1), f(x_2), \ldots$converge a $f(p)$. Ambas caracterizaciones son equivalentes y, en la prueba que Heine presentase de su teorema se usa de manera implicita el axioma de elección. La prueba procede por reducción al absurdo, suponiendo que f no es continua en p. Entonces existe algún ϵ positivo tal que no importa cuan pequeño sea η_0 siempre hay algún η positivo menor que η_0 tal que $| f(p+\eta) - f(p) |\geq \epsilon$. Lo anterior permite llegar a que, como la sucesión $\eta', \eta'', \ldots$ converge a cero, entonces $p + \eta', p + \eta'', \ldots$ converge a p; pero $f(p + \eta'), f(p + \eta''), \ldots$ no converge a $f(p)$, contrario a la hipótesis. Los detalles de la prueba se pueden apreciar en el texto de Gregory Moore.[88] No fue sino hasta una década después que se evidenció que el axioma se encontraba relacionado con el teorema formulado por Heine.[89] Muchos años después se encontró un modelo de ZF que contenía una función real que era secuencialmente continua pero no continua.[90]

8. Álgebra: Existencia de una base de Hamel para todo espacio vectorial

Adame (2013) refiere que Zermelo, en 1908, para justificar la necesidad del axioma de elección presenta una lista de siete teoremas cuyas demostraciones lo requieren. Los teoremas son los siguientes

[88]Ibid., p. 14.

[89]Esto se debe, de manera independiente, a Michele Cipolla en Italia y Waclaw Sierpinski en Polonia. Ibid., p.15.

[90]Ibídem.

(1) Si un conjunto M se puede descomponer en partes disjuntas $A, B, C, ...$ el conjunto de estas partes es equivalente a un subconjunto de M.
(2) Las uniones disjuntas de conjuntos equivalentes son equivalentes.
(3) El producto de varias cardinalidades se puede anular sólo si uno de los factores se anula.
(4) Un conjunto que no es equivalente a ninguna de sus partes siempre se puede ordenar de manera que cada subconjunto tenga un primer y un último elemento.
(5) La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.
(6) La existencia de una base de Hamel para el espacio vectorial de los números reales.
(7) La existencia de soluciones discontinuas de la ecuación $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

El penúltimo de los resultados es el que atenderemos en esta sección. Georg Hamel lo estableció en 1905 y fue generalizado para todo espacio vectorial en 1984 por A. Blass. Para establecer el Teorema, se hacen necesarias las siguientes definiciones previas.

Definición 2.26 (Base de Hamel). Sea $K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sea X un espacio vectorial sobre K. Sea $B \subseteq X$. Decimos que B es una *base de Hamel* de X si B es linealmente independiente y para cada $x \in X$ existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_\beta \in K$ y existen $x_1, \ldots, x_n \in B$ tal que $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$. Es decir, $x \in span(B)$ = combinaciones lineales de elementos en B. Esto equivale a decir que $X = span(B)$.

Así, el teorema queda en los siguientes términos.

Teorema 2.27. *Todo espacio vectorial tiene una base de Hamel.*

Para establecer la equivalencia probaremos ambas implicaciones.

Teorema 2.28. *El axioma de elección implica que todo espacio vectorial tiene una base de Hamel.*

Demostración[91]: Esta demostración utiliza el lema de Zorn. Sea X un espacio vectorial y consideremos $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : A \text{ es linealmente independiente}\}$. Este conjunto está parcialmente ordenado con la inclusión. Veamos que $\mathcal{F}$ satisface las hipótesis del lema de Zorn:

[91] La demostración sigue los pasos de la que se puede hallar en: Lewin,R., *Teoría axiomática de...*,cit., p.112.

(1) Sea $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}_{\alpha\in\lambda} \subseteq \mathcal{F}$ un conjunto totalmente ordenado en $\mathcal{F}$.

(2) Sea $C = \bigcup_{\alpha\in\lambda} C_\alpha$

(3) $C_\alpha \subseteq C \forall \in \lambda$, es decir C es una cota superior de $\mathcal{C}$.

Ahora veamos que C es linealmente independiente:

Sean $x_1, \ldots, x_n \in C$; $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in K$ tal que $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$. Tenemos que $X_k \in C \rightarrow \exists \alpha_k \in \lambda$ tal que $X_k \in C_{\alpha_k}$. Además, existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $C_{\alpha_k} \subseteq C_{\alpha_j}, \forall k = 1, \ldots, n$. Luego, $X_k \in C_{\alpha_j}, \forall k = 1, \ldots, n$. Entonces, $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$ es una combinación lineal nula en C_{α_j}. Como C_{α_j} es linealmente independiente debe ser que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Entonces C es linealmente independiente.

Por el lema de Zorn, $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal. Llamémosle $B.B$ es linealmente independiente ya que $B \in \mathcal{F}$.

Tomemos ahora un $x \in X$. En el caso de que $x \in B$ se tiene que $x \in span(B)$. En caso de que $x \notin B$ podemos considerar el conjunto $B \cup \{x\}$. Este conjunto es linealmente dependiente. En efecto, si no lo fuera entonces se tendría que $B \cup \{x\} \in \mathcal{F}$ lo que implica que $B \subseteq B \cup \{x\}$ y $B \neq B \cup \{x\}$ lo que contradice que B sea el elemento maximal de $\mathcal{F}$. Entonces $\exists x_1, \ldots, x_n \in B$;$\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{K}$, no todos nulos tal que

$$\alpha_0 x + \alpha_1, x_1 + \ldots, \alpha_n x_n = 0(A)$$

Si suponemos $\alpha_0 = 0$ entonces $\alpha_1 x_1 + \ldots, \alpha_n x_n = 0$ lo que nos informa que tenemos una combinación lineal nula en B, que es linealmente independiente. Luego,$\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ que es contradictorio. Por lo tanto, lo que se cumple es que $\alpha_0 \neq 0$. Y de (A) tenemos que $x = -(\alpha_1/\alpha_0)x_1, \ldots, -(\alpha_n/\alpha_0)x_n \in span(B)$. Lo que hace que B sea una base de Hamel de X. $\square$

Teorema 2.29. *La existencia de una base de Hamel para todo espacio vectorial implica el axioma de elección.*

Demostración[92]: Consideremos un espacio vectorial que posee una base de Hamel. Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos no vacíos disjuntos dos a dos. Consideremos un campo arbitrario k y sea $k(X)$ el campo de funciones racionales en las variables $x \in X = \bigcup_{i\in I} X_i$ sobre k. Para monomios, esto es, para elementos de $k(X)$ de la forma $p = \alpha * x_1^{n_1} * x_2^{n_2} * \ldots x_m^{n_m}$, definimos para cada $i \in I$ el i-ésimo grado p como $d_i(p) = \sum_{x_k\in X_i} n_k$.

Un elemento de $k(X)$, $\alpha = \frac{p_1+\ldots+p_n}{q_1+\ldots+q_m}$, donde p_k y q_k son monomios, los llamaremos i-homogeneo de grado d siempre y cuando todos los q_k tengan el mismo grado i-ésimo, decimos d_1, y todos los p_k tengan el mismo i-grado $d_2 = d_1 + d$. Entonces $K = \{a \in k(x) :$ a es i-homogeneo de grado 0 para cada $i \in I\}$ es un subcampo de $k(X)$. Así, $k(X)$ es un espacio vectorial sobre K. Como asumimos que todo espacio vectorial tiene una base entonces $k(X)$ tiene una base B. Para cada $x \in X$ el monomio x puede ser expresado únicamente de la siguiente manera: $x = \sum_{b\in B(x)} a_b(x) * b$, donde $B(x)$ es un subconjunto finito de B y cada $a_b(x) \in X\backslash\{0\}$.

Sean x e y elementos del mismo X_i. Entonces

$$y = \frac{y}{x} * x = \sum_{b\in B(x)} \frac{y}{x} * a_b(x) * b = \sum_{b\in B(y)} a_b(y) * b$$

Ya que $\frac{y}{x} \in X$, esto implica que $B(x) = B(y)$ y $\frac{a_b(y)}{y} = \frac{a_b(x)}{x}$ para cada $b \in B(x)$. Así, los conjuntos $B(x)$ y los elementos $\frac{a_b(x)}{x}$ dependen solamente de i y no de un particular x en X_i. Llamémoslo B_i resp.$\alpha(b,i)$. Ya que los $a_b(x)$ son i-homogéneo de grado 0,los $\alpha(b,i) = \frac{a_b(x)}{x}$ son i-homogéneos de grado -1. Así, si $\alpha(b,i)$ está escrito como un cociente de polinomios en su forma reducida, algunos $x \in X_i$ deben ocurrir en el denominador. Por lo tanto, el conjunto F_i, consistente de todos los $x \in X_i$ que ocurren en el denominador de $\alpha(b,i)$ en su forma reducida para algunos $b \in B_i$ es un subconjunto vacío y finito de X_i.Esto equivale al axioma multiplicativo, el cual es equivalente al axioma de elección.[93] □

[92]La demostración se puede encontrar en: Herrlich, H. *Axiom of choice*, Alemania, Springer, 2006, p.67.

[93]El axioma multiplicativo establece que el producto cartesiano de una familia no vacía de conjuntos no vacíos es vacío. Al respecto se puede revisar: Herrlich, H. *Axiom of...*, cit., p.11.

Capítulo 3

Una aplicación del axioma de elección a la lógica de primer orden

En este capítulo nos proponemos describir una demostración del Teorema de Completitud de Gödel para la Lógica de primer orden con lenguajes de cualquier cardinalidad, la cual se debe a Henkin (1949). La misma consiste en la demostración de tres lemas. La prueba usa el axioma de elección y el mismo no se necesita si se tratara con lenguajes numerables, que es lo más encontrado en la literatura especializada sobre lógica matemática. El Teorema de Completitud de Gödel (1930) es fundamental para las investigaciones en filosofía de la matemática pues gracias a lo que en ella se propone, se consolida la Lógica de primer orden como la lógica base de las matemáticas. Esto se debe a que toda lógica con mayor capacidad expresiva que la lógica de primer orden no satisface la propiedad de Compacidad o la Propiedad de Löwenheim-Skolem y por lo tanto es incompleta, ya que dichas propiedades (que tienen sobresalientes aplicaciones metamatemáticas) son consecuencia de completitud.[94]

En 1923 Skolem propuso que se escribiera la teoría de conjuntos en primer orden y luego Quine apoyó esta propuesta, siendo aceptada después por la comunidad de lógico-matemáticos. La versión generalizada del Teorema de Completitud de Gödel que se mostrará en este trabajo es importante porque permite demostrar resultados fundamentales para la Teoría de Modelos, tales como el Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski hacia arriba, que implica (entre otros) la existencia de modelos no estándar de cualquier cardinalidad para la aritmética y también que no existen teorías categóricas en primer orden que tengan un modelo infinito, a lo sumo pueden ser $\aleph_\alpha$-categóricas, para algún ordinal α. Así como en el capítulo anterior evidenciamos resultados fundamentales para el desarrollo de ciertas áreas de las matemáticas que requieren aceptar el axioma de elección, de la misma manera observamos que para la teoría de modelos contemporánea, la cual utiliza con toda su fuerza la matemática infinitaria, también debe admitirse el axioma. A continuación presentaremos los conceptos necesarios

[94] Y también se debe a los teoremas de incompletitud de Gödel de 1931, entre otras razones.

para definir la lógica de primer orden, y formular y demostrar el teorema de completitud de Gödel.

1. Lenguajes de primer orden

Un *lenguaje* es una colección de símbolos. La colección puede ser numerable (finito o equipotente a $\mathbb{N}$) o de cualquier otra cardinalidad. Como veremos más adelante, el hecho de ser numerable o no determinará la necesidad de hacer uso del axioma de elección. Los símbolos pueden ser agrupados en tres clases:

Símbolos relacionales: $R_0, R_1, \ldots, R_\beta, \ldots (\beta \in \gamma)$. Donde γ es un ordinal que puede ser infinito.

Símbolos funcionales: $f_0, f_1, \ldots, f_\mu, \ldots (\mu \in \delta)$. Donde δ es un ordinal que puede ser infinito.

Símbolos constantes: $c_0, c_1, \ldots, c_\eta, \ldots (\eta \in \xi)$. Donde ξ es un ordinal que puede ser infinito.

Por lo tanto, nuestro lenguaje formal $\mathcal{L}$ se puede representar de la siguiente manera,

$$\mathcal{L} = \{\ R_\beta\}_{\beta\in\gamma} \bigcup \{\ f_\mu\}_{\mu\in\delta} \bigcup \{\ c_\eta\}_{\eta\in\xi}$$

Por aritmética cardinal se tiene que el cardinal de $\mathcal{L}$ es,

$$\mid \mathcal{L} \mid = \mid \gamma \mid + \mid \delta \mid + \mid \xi \mid = \text{mayor}\{\mid \gamma \mid, \mid \delta \mid, \mid \xi \mid\}$$

2. Estructuras

Una *estructura* $\mathcal{U}$ para un lenguaje $\mathcal{L}$ (o una interpretación $\mathcal{U}$) se define de la siguiente manera:

(1) Un conjunto no vacío A (el universo de $\mathcal{U}$)

(2) Para cada símbolo relacional n-ario R_β de $\mathcal{L}$ una relación,

$R_\beta^{\mathcal{U}} \subseteq A^n$

(3) Para cada símbolo funcional n-ario f_μ de $\mathcal{L}$, una función,

$f_\mu^{\mathcal{U}} : A^n \longrightarrow A$

(4) Para cada símbolo constante c_η de $\mathcal{L}$, un elemento,

$c_\eta^{\mathcal{U}} \in A$

La $\mathcal{U}$ definida se puede escribir así:

$$\mathcal{U} = \langle A, < R_\beta^\mathcal{U} >_{\beta\in\gamma}, < f_\mu^\mathcal{U} >_{\mu\in\delta}, < c_\eta^\mathcal{U} >_{\eta\in\xi}\rangle$$

La cardinalidad de $\mathcal{U}$ será la cardinalidad de su universo A.

A continuación presentamos algunos ejemplos de estructuras definidas en sus lenguajes correspondientes:

(1) Un lenguaje para la aritmética: $\{\leq, +, *, 0, 1\}$. Una estructura para este lenguaje es por ejemplo $\langle\mathbb{N}, \leq, +, *, 0, 1, \rangle$ es decir, la estructura que tiene como universo el conjunto de los números naturales, con su orden usual, sus operaciones de suma y producto usuales y su cero y uno usual.

(2) Un lenguaje para los grupos: $\{+, 0\}$. Una estructura para este lenguaje es, por ejemplo: $\langle\mathbb{Z}, +\rangle$.

(3) Un lenguaje para órdenes: $\{\leq\}$. Una estructura para este lenguaje es, por ejemplo: $\langle\mathbb{R}, \leq\rangle$

(4) Un lenguaje para la Teoría de conjuntos: $\{\in\}$. Una estructura para este lenguaje podría ser por ejemplo $\langle V, \in\rangle$ sin embargo, se sabe que V no es un conjunto (es una clase propia).

3. Formalización de un lenguaje

El lenguaje formal que se definirá lo utilizaremos para referirnos a estructuras o interpretaciones.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje definido como en la sección anterior. Para formalizarlo utilizamos símbolos lógicos, son los siguientes:

(1) Conectivas: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(2) Cuantificadores: $\forall, \exists$

(3) Símbolo de identidad: $\equiv$ (símbolo relacional binario)

(4) Variables: $v_0, v_1, \ldots, v_n, \ldots$ $(n \in \aleph_0)$

(5) paréntesis:),(

(6) coma: ,

Al conjunto de las variables la denotamos por VAR. Con los símbolos lógicos y los símbolos de $\mathcal{L}$ se procederá a construir los términos y fórmulas del lenguaje. De esta manera, se podrá hacer referencia a estructuras para $\mathcal{L}$ en primer orden.

Definición 3.1 (Término).

(1) Toda variable y todo símbolo constante es un término.

(2) Si f es un símbolo funcional n-ario y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos, entonces $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ es un término.

(3) Una sucesión de términos es un término sólo si se obtiene usando una cantidad finita de veces (1) y (2).

Definición 3.2 (Fórmula atómica).

(1) Si t_1 y t_2 son términos, entonces $t_1 \equiv t_2$ es una formula atómica.

(2) Si R es un símbolo relacional n-ario y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $R(t_1, \ldots, t_n)$ es una fórmula atómica.

Definición 3.3 (Fórmula bien formada).

(1) Toda fórmula atómica es una fórmula bien formada.

(2) Si φ y ψ son fórmulas bien formadas, entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$,$(\varphi \vee \psi)$,$(\varphi \to \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son fórmulas bien formadas.

(3) Si v es una variable y φ es una fórmula bien formada, entonces $(\forall x)\varphi$ y $(\exists x)\varphi$ son fórmulas bien formadas.

(4) Una sucesión de símbolos es una fórmula bien formada sólo si se obtiene aplicando una cantidad finita de veces las cláusulas (1)-(3).

Tanto la definición de término como de fórmula se hicieron inductivamente. Es por ello que cuando se vaya a probar alguna propiedad sobre términos o fórmulas conviene usar inducción basada en la construcción. Esto aplica igualmente para el caso de hacer definiciones en los términos o fórmulas. Una ocurrencia de una variable en una fórmula es libre si dicha ocurrencia no está bajo el alcance de algún cuantificador. Y es ligada en caso contrario, es decir, si ella está bajo el alcance de algún cuantificador. Es claro que una variable puede tener ocurrencias libres y ocurrencias ligadas en una fórmula. Se dice que una variable está libre en una fórmula si ella tiene al menos una ocurrencia libre en dicha fórmula.

4. Satisfacibilidad y Verdad en una interpretación

Puesto que los términos del lenguaje denotan objetos dentro de una estructura determinada y que las fórmulas afirman hechos sobre estos objetos en dicha estructura, se hace necesario definir cuándo una fórmula es verdadera y cuándo es falsa en una estructura.Lo haremos a continuación.

Definición 3.4. Sea U una estructura en $\mathcal{L}$ y $s : VAR \to A$. Se define el valor de un término de $\mathcal{L}$ en U según s inductivamente en la complejidad del término. El valor del término se denotará por $t_U[s]$.

(1) Si t es la variable v, $t_U[s] = s(v)$
(2) Si t es el símbolo constante c, $t_U[s] = c^U$
(3) Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos, f es un símbolo funcional n-ario y $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ entonces $t_U[s] = f^U(t_{1U}[s], \ldots, t_{nU}[s])$.

El valor de t en A según s es el elemento de A denotado por t cuando asignamos a las variables de t valores según s.

Ahora definiremos lo que significa que s satisface a φ en U, lo que se denota por $U \models \varphi[s]$. Esto se puede entender como el resultado de sustituir en φ las variables libres por sus valores según s, lo que determinaría una afirmación verdadera en U. Decimos que φ es falsa en U diciendo que $U \not\models \varphi[s]$ para toda $s : VAR \to A$. La definición se realiza por inducción en la complejidad de la fórmula.

Definición 3.5.

(1) Para fórmulas atómicas:
  (a) $U \models t_1[s] \equiv t_2[s] \iff t_{1U}[s] = t_{2U}[s]$
  (b) $U \models R(t_1, \ldots, t_n)[s] \iff R^U(t_{1U}[s], \ldots, t_{nU}[s])$
(2) Si φ y ψ son fórmulas, entonces:
  (a) $U \models (\neg\varphi)[s] \iff U \not\models \varphi[s]$
  (b) $U \models (\varphi \to \psi)[s] \iff U \not\models \varphi[s]$ o $U \models \psi[s]$
  (c) $U \models (\varphi \wedge \psi)[s] \iff U \models \varphi[s]$ y $U \models \psi[s]$
  (d) $U \models (\varphi \vee \psi)[s] \iff U \models \varphi[s]$ o $U \models \psi[s]$
  (e) $U \models (\varphi \leftrightarrow \psi)[s] \iff \{U \models \varphi[s]$ y $U \models \psi[s]\}$ o $\{U \not\models \varphi[s]$ y $U \not\models \psi[s]\}$

(f) $U \models ((\forall v)\varphi)[s] \iff U \models \varphi[s']$ para todo $s' : VAR \to A$ que difiere a lo sumo en la variable v

(g) $U \models ((\exists v)\varphi)[s] \iff U \models \varphi[s']$ para todo $s' : VAR \to A$ que difiere a lo sumo en la variable v

Definición 3.6. Sea U una estructura para $\mathcal{L}$ y φ una fórmula de $\mathcal{L}$

(1) Se dice que φ es verdad en U si y sólo si $U \models \varphi[s]$, para toda $s : VAR \to A$. Esto también se expresa diciendo que U es un modelo de φ y se denota por $U \models \varphi$.
(2) Se dice que φ es falsa si y sólo si $U \not\models \varphi[s]$, para toda $s : VAR \to A$.
(3) Si Σ es un conjunto de fórmulas, se dice que U es un modelo de Σ si toda fórmula $\varphi \in \Sigma$ es verdad en U.

Definición 3.7.

(1) φ es lógicamente válida si es verdad en toda interpretación.
(2) Se dice que φ es satisfacible si existe una interpretación U y una $s : VAR \to A$ tal que $U \models \varphi[s]$.
(3) Se dice que φ es contradictoria si $\neg\varphi$ es lógicamente válida, es decir, si φ es falsa en toda interpretación.

Definición 3.8. Sea Σ un conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$ y φ una fórmula de $\mathcal{L}$. Se dice que φ es consecuencia lógica de Σ o que Σ implica lógicamente φ, (y se denota por $\Sigma \models \varphi$) si para cada interpretación U de $\mathcal{L}$,se tiene que si toda fórmula de Σ es verdad en U entonces φ es verdad en U.

A continuación presentamos algunos resultados derivados de la definición:

(1) Una fórmula φ es falsa en U si y sólo si $\neg\varphi$ es verdad en U.
(2) φ es verdad en U si y sólo si $\forall v\varphi$ es verdad en U.
(3) Si $\varphi \to \psi$ y φ son verdad en U entonces ψ es verdad en U.

5. Un sistema axiomático para la lógica de primer orden

5.1. Esquemas de axiomas. [95]

[95] Estos esquemas de axiomas se encuentran en: Enderton, H., *Una Introducción Matemática...*, cit.

Los axiomas lógicos son todas las generalizaciones de las fórmulas de las formas siguientes, donde x, y son variables y φ y ψ son fórmulas:

(1) Toda las instancias de tautologías.

(2) $(\forall x\psi) \to \varphi_x^t$ donde t es sustituible para x en φ.

(3) $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

(4) $\varphi \to \forall x\varphi$, donde x no ocurre libre en φ.

(5) $x \equiv x$

(6) $(x \equiv y) \to (\varphi \to \varphi\prime)$, donde φ es una fórmula atómica y $\varphi\prime$ se obtiene de φ al reemplazar x por y en cero o más lugares (aunque no necesariamente en todos).

5.2. Reglas de Inferencia. Modus Ponens: A partir de $\varphi \to \psi$ y φ podemos inferir ψ.

DEFINICIÓN 3.9. Sea Σ un conjunto de fórmulas y φ una fórmula. Se dice que φ se deduce de Σ o que φ se demuestra a partir de Σ, lo que se denota por,

$$\Sigma \vdash \varphi$$

si existe una sucesión finita $\psi_1, \ldots, \psi_n$ de fórmulas tales que $\psi_n = \varphi$ y cada ψ_i es un axioma, o es un miembro de Σ o se obtiene de fórmulas anteriores en la sucesión por la aplicación de Modus Ponens. Si $\Sigma = \emptyset$ entonces se escribe $\vdash \varphi$ en vez de $\emptyset \vdash \varphi$.

Hasta aquí se ha logrado definir de manera rigurosa toda una estructura (bajo la figura de un sistema axiomático) para el lenguaje de primer orden. Como se planteara en la introducción de este capítulo, la lógica de primer orden es considerada la lógica base de las matemática por varias propiedades metateóricas que posee, consideradas fundamentales. Una de ellas, la presentamos a continuación.

6. Teorema de Corrección

El Teorema de corrección establece que, en primer orden, todo lo que se pueda demostrar será lógicamente válido.

TEOREMA 3.10. *Sea Σ un conjunto de sentencias de un lenguaje $\mathcal{L}$ y φ una sentencia de $\mathcal{L}$. Entonces:*

$$\Sigma \vdash \varphi \Rightarrow \Sigma \models \varphi$$

Demostración:

Si $\Sigma \vdash \varphi$ entonces existe una sucesión $\psi_1, \ldots, \psi_n$ de fórmulas tales que $\psi_n = \varphi$, y cada ψ_i es un axioma , o es miembro de Σ o se obtiene de las fórmulas anteriores por modus ponens. Sea U un modelo de Σ. Se debe probar que U es un modelo de φ. Esto se realiza probando que U es un modelo de ψ_i, para cada $i \in n$. La prueba se hace por inducción considerando que: (a) Todo axioma es una fórmula lógicamente válida y (b) El modus ponens transfiere la verdad de las premisas a la conclusión. □

El siguiente corolario equivale al Teorema de corrección.

Corolario 3.11. *Σ tiene un modelo $\Rightarrow \Sigma$ es consistente*

7. El teorema de completitud de Gödel para lenguajes de cualquier cardinalidad

El Teorema de completitud de Gödel nos informa que, en primer orden, todo lo que sea lógicamente válido se puede demostrar. Es en esta demostración donde se podrá evidenciar la necesidad de usar el axioma de elección cuando la cardinalidad del lenguaje es no numerable. El teorema reza en los siguientes términos:

Teorema 3.12. *Sea Σ un conjunto de sentencias de un lenguaje $\mathcal{L}$ y φ una sentencia de $\mathcal{L}$. Entonces:*

$$\Sigma \models \varphi \Rightarrow \Sigma \vdash \varphi$$

La demostración se da a través de la prueba de tres lemas. Presentaremos a continuación una definición necesaria y posteriormente los tres lemas con sus respectivas pruebas.[96]

[96]La versión de la demostración de los lemas y la versión de la demostración del teorema de completitud para lenguajes de cualquier cardinalidad que ofrecemos se deben al profesor Franklin Galindo, a quien agradecemos su autorización para colocarlo en este trabajo. Se pueden ver en: Galindo, F. *Tres tópicos de Lógica*, Trabajo de ascenso no publicado, Caracas, Universidad Central de Venezuela, 2012, pp.74-83.

Definición 3.13. Sea Σ un conjunto de sentencias del lenguaje $\mathcal{L}$ y C un conjunto de constantes de $\mathcal{L}$. Decimos que C es un conjunto de testigos para Σ en $\mathcal{L}$ si para toda fórmula φ de $\mathcal{L}$ con a lo sumo una variable libre(digamos, x) existe una $c \in C$ tal que:

$$\Sigma \vdash \neg\forall x\varphi(x) \rightarrow \neg\varphi(c)$$

Lema 3.14 (Lema 1). *Sea Σ un conjunto de sentencias de $\mathcal{L}$ y C un conjunto de nuevas constantes tal que $\mid C \mid=\mid \mathcal{L} \mid$. Sea $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup C$. Entonces Σ se puede extender a un conjunto consistente de sentencias Σ' en $\mathcal{L}'$ tal que C es un conjunto de testigos para Σ' en $\mathcal{L}'$.*

Demostración:

Supongamos que $\mid L \mid= \aleph_\alpha$ para algún ordinal α y sea $C = \{c_\gamma : \gamma < \aleph_\alpha\}$. Sea $\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_\beta(x_\beta), \ldots (\beta < \aleph_\alpha)$ una lista de todas las fórmulas con a lo sumo una variable libre de L', donde x_β es la variable de φ_β y $x_\beta = v_0$ en caso contrario.

Ahora se definirá a partir de Σ y por inducción transfinita en $\aleph_\alpha$, una secuencia creciente de conjuntos de sentencias de $L'\Sigma = \Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \ldots \Sigma_\beta \ldots (\beta < \aleph_\alpha)$ y una secuencia de constantes de C $c_{\gamma 0}, \ldots, c_{\gamma\beta}, \ldots (\beta < \aleph_\alpha)$, con unas características que permitirán obtener el resultado buscado.

Definición:

$$\Sigma_0 = \Sigma$$

$$\Sigma_{\xi+1} = \Sigma_\xi \bigcup \{\neg\forall x_\xi \varphi_\xi(x_\xi) \rightarrow \neg(\varphi_\xi)^{x_\xi}_{c_{\gamma\xi}}\}$$

donde γ_ξ es el menor ordinal de $\aleph_\alpha$ tal que $c_{\gamma\xi}$ no aparece en Σ_ξ ni en $\varphi_\xi(x_\xi)$. Dicha constante siempre existe pues si A es un conjunto infinito y $B \subseteq A$ tal que $\mid B \mid<\mid A \mid$ entonces $\mid A \backslash B \mid=\mid A \mid$

$$\Sigma_\lambda = \bigcup_{\theta\in\lambda} \Sigma_\theta$$

Ahora procedemos a definir a Σ' :

$$\Sigma' = \bigcup_{\delta\in\aleph_\alpha} \Sigma_\delta$$

Por la construcción de Σ' se tiene que C tiene un conjunto de testigos para Σ' en L'. Falta probar que Σ' es consistente y para esto es suficiente con demostrar que $\forall\delta \in \aleph_\alpha$ (Σ_δ es consistente). Se probará esto por inducción transfinita en δ:

(1) $\delta = 0$

$\Sigma_0 = \Sigma$ por lo tanto Σ_0 es consistente por hipótesis

(2) $\delta = \mu + 1$ y se supone que Σ_μ es consistente

$\Sigma_{\mu+1} = \Sigma_\mu \bigcup \{\neg\forall x_\mu \varphi_\mu(x_\mu) \to \neg(\varphi_\mu)^{x_\mu}_{c_{\gamma\mu}}\}$

Si $\Sigma_{\mu+1}$ es inconsistente se tiene que, por el siguiente teorema ($\Gamma \vdash \neg\varphi$ si y sólo si $\Gamma \bigcup \{\varphi\}$ es inconsistente), se tiene que:

$$\Sigma_\mu \vdash \neg\{\neg\forall x_\mu \varphi_\mu(x_\mu) \to \neg(\varphi_\mu)^{x_\mu}_{c_{\gamma\mu}}\}$$

Esto implica, por el axioma 1, que:

$$\Sigma_\mu \vdash \neg\forall x_\mu \varphi_\mu(x_\mu)(A)$$

$$\Sigma_\mu \vdash (\varphi_\mu)^{x_\mu}_{c_{\gamma\mu}}(B)$$

Como $c_{\gamma\mu}$ no aparece en Σ_μ ni en φ_μ, aplicando el corolario del teorema de generalización de constantes[97] en (B) se tiene que $\Sigma_\mu \vdash \{\neg\forall x_\mu \varphi_\mu(x_\mu)\}$. Este hecho y (A) indican que Σ_μ es inconsistente, lo cual contradice la hipótesis inductiva.

(3) $\delta = \lambda$, donde λ es un ordinal límite y se supone que para todo $\theta < \lambda$, Σ_θ es consistente.

$$\Sigma_\lambda = \bigcup_{\delta\in\theta} \Sigma_\theta$$

Si Σ_λ es inconsistente, entonces, por el caracter finito de la demostración, que existe un $\theta \in \lambda$ tal que Σ_θ es inconsistente. Pero esto contradice la hipótesis inductiva. Esto concluye la demostración del primer lema.

LEMA 3.15 (Lema 2). *Todo conjunto de sentencias Σ posee una extensión maximal consistente.*

[97]Dicho corolario reza así: Si $\Gamma \vdash \varphi^x_c$ y c es un símbolo constante que no ocurre en Γ ni en φ, entonces $\Gamma \vdash \forall x\varphi$ y existe una deducción de $\forall x\varphi$ a partir de Γ en la que no ocurre c.

Demostración:

Usando el lema de Zorn se puede demostrar este lema (obsérvese que implica esto la aceptación del axioma de elección pues como ya probamos el lema de Zorn equivale al axioma de elección). Sin embargo, la demostración la haremos a través de una construcción inductiva en el cardinal del lenguaje L de Σ. Veamos:

Supongamos que $\mid L \mid = \aleph_\alpha$, para algún ordinal α. Procedemos a listar todas las sentencias de L:

$$\varphi_0, \ldots, \varphi_\beta (\beta < \aleph_\alpha)$$

Y definimos, a partir de Σ y por inducción transfinita en $\aleph_\alpha$, una secuencia creciente de conjuntos de sentencias de L. Definimos:

$$\Sigma_0 = \Sigma$$

$$\Sigma_{\lambda+1} = \begin{cases} \Sigma_\gamma \cup \{\varphi_\gamma\} & \text{si } \Sigma_\gamma \cup \varphi_\gamma \text{ es consistente} \\ \Sigma_\gamma & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\Sigma_\lambda = \bigcup_{\theta \in \lambda} \Sigma_\theta (\lambda \text{ es un ordinal límite })$$

Ahora podemos definir Σ' de la siguiente manera:

$$\Sigma' = \bigcup_{\delta \in \aleph_\alpha} \Sigma_\delta$$

Se cumple que Σ' es maximal consistente. Por un lado tenemos que Σ' es consistente pues, por construcción, $\forall \gamma \in \aleph_\alpha$, Σ_γ es consistente.

Supongamos, por reducción al absurdo, que Σ' no es consistente. Entonces existe un conjunto de sentencias de L, Γ, tal que $\Gamma \supseteq \Sigma'$ y existe una sentencia que ψ tal que $\psi \in \Gamma$ y $\psi \notin \Sigma'$. Entonces, por la construcción de Σ' se tiene que para algún $\mu \in \aleph_\alpha$, $\Sigma_\mu \cup \{\varphi_\mu\}$ es inconsistente, donde $\varphi_\mu = \psi$. Pero $\Sigma_\mu \cup \{\varphi_\mu\} \subseteq \Gamma$, y entonces Γ es inconsistente lo que es una contradicción.

LEMA 3.16 (Lema 3). *Si Σ es un conjunto consistente de sentencias de L y tiene un conjunto de testigos C, entonces Σ tiene un modelo de cardinalidad a lo sumo $\mid L \mid$.*

Demostración:

Podemos suponer que Σ es maximal consistente, pues de no serlo se puede extender (por el lema anterior) a un conjunto Σ' maximal consistente que también tendría a C como conjunto de testigos en L. Definamos ahora la estructura U para L, el cual será el modelo buscado de Σ.

Sea T el conjunto de todos los términos cerrados de L. Para no tener problemas con las sentencias atómicas de Σ se define sobre T una relación de equivalencia de la siguiente manera:

$$t_1 \sim t_2 \text{ si y sólo si } t_1 \equiv t_2 \in \Sigma$$

Sea $T/\sim = \{[t] : \text{ t es un término cerrado de } L\}$ el conjunto cociente determinado por $\sim$

Observemos que el cardinal de $T/\sim$ es a lo sumo $\mid L \mid$. En efecto, $\alpha \times \alpha \approx \alpha$ para todo ordinal infinito α. Además, si cualquier miembro de un conjunto X tiene cardinalidad a lo sumo k, entonces $\mid \bigcup X \mid \leq \mid X \mid$. La demostración de esto usa el axioma de elección.

El universo A de la estructura U es el conjunto cociente $T/\sim$. Las interpretaciones en U para los símbolos de L son los siguientes:

(1) Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos cerrados de L y R es un símbolo relacional n-ario de L, entonces,

$$R^U([t_1], \ldots, [t_n]) \Leftrightarrow R(t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma.$$

(2) Si $t_1, \ldots, t_n$ son términos cerrados de L y f es un símbolo funcional n-ario de L entonces,

$$f^U([t_1], \ldots, [t_n]) = [f(t_1, \ldots, t_n)]$$

(3) Si c es una constante de L, entonces,

$$c^U = [c]$$

Para cada $s : VAR \rightarrow A$ el valor de t en U según s es $[t]$, para todo término cerrado t, es decir $t_U[s] = [t]$

Ya definida la estructura U, demostraremos que para cada sentencia φ,

$$U \models \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Sigma(C)$$

Dicha demostración se realizará por inducción en el rango de φ donde el rango $(\varphi) =$ número de conectivas y cuantificadores de φ

(1) $rango(\varphi) = 0$

(a) $\varphi = t_1 \equiv t_2$:

$U \models t_1 \equiv t_2$ si y sólo si $[t_1] = [t_2]$ si y sólo si $t_1 \equiv t_2 \in \Sigma$

(b) $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$:

$U \models R(t_1, \ldots, t_n)$ si y sólo si $R^U([t_1], \ldots, [t_n])$ si y sólo si $R(t_1, \ldots, t_n) \in \Sigma$

(2) $rango(\varphi) = k$, donde $k \in \mathbb{N}$ y $k > 0$.Y supongamos que para toda sentencia de rango menor que k se cumple (C).

(a) $\varphi = \neg\psi$:

$U \models \neg\psi$ si y sólo si $U \not\models \psi$ si y sólo si (Hipótesis inductiva) $\psi \notin \Sigma$ si y sólo si (maximal)$\neg\psi \in \Sigma$

(b) $\varphi = \phi \to \psi$:

$U \models \phi \to \psi$ si y sólo si $U \not\models \phi$ o $U \not\models \phi$ si y sólo si (Hipótesis inductiva) $\phi \notin \Sigma$ o $\psi \in \Sigma$ si y sólo si (maximal)$\phi \to \psi \in \Sigma$

(c) $\varphi = \forall x\psi$

Probaremos, por contraposición, que si $U \models \forall x\psi$, entonces $\forall x\psi \in \Sigma$. Si $\forall x\psi \notin \Sigma$,entonces (maximal) $\neg x\psi \in \Sigma$. En consecuencia,como C es un conjunto de testigos para $\Sigma \in L$, se tiene que existe un $c \in C$ tal que $\Sigma \vdash \neg\forall x\psi(x) \to \neg\psi(c)$. Por lo tanto,$\Sigma \vdash \neg\psi(c)$. De modo que por ser Σ maximal se infiere que $\neg\psi(c) \in \Sigma$. Entonces por la hipótesis inductiva $U \models \neg\psi(c)$. Luego, $U \not\models \forall x\psi$.

Ahora probaremos que si $\forall x\psi \in \Sigma$, entonces $U \models \forall x\psi$. Como $\forall x\psi \in \Sigma$ se tiene que la siguiente fórmula es un axioma,

$$\forall x\psi \to \psi_t^x$$

donde t se puede sustituir por x en ψ. En consecuencia $\psi_t^x \in \Sigma$ (maximal). Por lo tanto, por hipótesis inductiva se tiene que $U \models \psi_t^x$, para cualquier término cerrado t. Esto implica que $U \models \forall x\psi$.

Ahora, procederemos a probar el teorema de completitud general usando los tres lemas demostrados anteriormente.

Demostración: Sea Σ un conjunto consistente de sentencias del lenguaje L y supongamos que $\aleph_\alpha =\mid L \mid$ para algún ordinal α. Sea C un conjunto de nuevas constantes tales que $\mid C \mid = \aleph_\alpha$. Debido al primer lema, podemos extender Σ a un conjunto consistente de sentencias Σ' de modo que C sea un conjunto consistente de sentencias Σ' en $L' = L \cup C$. Luego, el segundo lema nos permite extender Σ' a un conjunto Σ'' de L' que sea maximal consistente y que tenga a C como conjunto consistente de testigos en L'.Posteriormente, se usa el tercer lema y se construye un modelo U para Σ''. Tenemos que la cardinalidad del universo de U es a lo sumo $\aleph_\alpha$. Como $\Sigma \subseteq \Sigma''$,$U$ es también un modelo para Σ, y específicamente el modelo buscado es U restringido al lenguaje L de Σ.$\square$

Algunas consecuencias de los teoremas de corrección y completitud generalizados son los que a continuación se presentan:

COROLARIO 3.17. *(Teorema de Löwenheim-Skolem hacia abajo): Todo conjunto consistente de sentencias Σ de L que sea consistente tiene un modelo de cardinalidad a lo sumo $\mid L \mid$.*

COROLARIO 3.18. *(Teorema de completitud de Gödel, 1930):*

$$\models \varphi \rightarrow \vdash \varphi$$

COROLARIO 3.19. *(Teorema de Compacidad): Un conjunto de sentencias Σ tiene un modelo si y sólo si cada subconjunto finito de Σ tiene un modelo.*

COROLARIO 3.20. *(Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski hacia arriba): Sea Σ un conjunto de sentencias de un lenguaje L. Si Σ tiene un modelo infinito, entonces tiene modelos de cualquier cardinalidad $\kappa \geq\mid L \mid$.*

Capítulo 4

Independencia del axioma de elección de ZF

1. El axioma de elección en la metamatemática contemporánea

Tal y como se ha desarrollado nuestra investigación, hemos presentado algunos resultados matemáticos fundamentales en los que ha sido suficiente usar el axioma de elección. Además, con la demostración presentada en el capítulo anterior, se le ha relacionado con la lógica de primer orden. Es decir, se ha vinculado al axioma dentro de las matemáticas, justificando gran cantidad de resultados importantes, pero también se le ha utilizado en un resultado metamatemático de gran calibre. Observemos pues su versatilidad, ya que se encuentra dentro de las matemáticas pero también es utilizada fuera de ella.[98]El axioma parece erigirse por encima de las matemáticas y hasta por encima de la metamatemática, pues no se restringe a un área de las matemáticas, ni parece circunscribirse al ámbito metamatemático. Consideramos que esto muestra la certera intuición matemática de Zermelo en 1930, cuando expresara que el axioma es un principio-guía para toda investigación en matemáticas.

A pesar de todo esto, se puede objetar que su utilización no es garantía de necesidad para las matemáticas. Es decir: bien se puede hacer matemática sin él. Ante tal situación, se ha considerado que un argumento de mayor peso para decidir su necesidad para las matemáticas es responder si su aceptación genera alguna contradicción. En efecto, si se lograse verificar que el axioma genera alguna contradicción, todos los resultados que se sustentaban en él serían desestimados y el axioma sería condenado al ostracismo. Gracias a Gödel sabemos que no es así. Por ello, a diferencia de los capítulos anteriores en la que mostrábamos la

[98]Como indicáramos en la introducción de este trabajo, el que sea utilizado *fuera* de la matemática alude al hecho de que todo resultado metamatemático -o lógico-matemático- se puede entender de al menos dos formas: 1. Como un resultado matemático a secas - sin ningún valor agregado- y 2. Como resultado metamatemático que se puede usar para estudiar los fundamentos de las matemáticas. Tanto en el caso 1 como en 2, el axioma de elección se encuentra presente.

utilización del axioma en las matemáticas y su aplicación en las metamatemáticas, lo colocaremos ahora como objeto de estudio metamatemático, buscando legitimar su uso. Ello nos llevará a los resultados de Gödel y Cohen que establecen su independencia de ZF.

Consideramos importante tomar en cuenta que para el momento en que apareció el axioma en 1904, el interés sobre el mismo no era metamatemático sino matemático. En efecto, las discusiones se centraban en su carácter no constructivo, lo que representaba un alejamiento del modo usual de hacer matemática para la época. Recién para ese entonces la matemática comenzaba a mirarse a sí misma y a preguntarse por sus métodos, modos de demostración, alcances y limitaciones. Por ende, el camino metamatemático del axioma de elección tuvo un desarrollo más lento. Se justifica que haya sido así, pues establecer a la matemática como objeto de estudio, enmarcarla dentro de sistemas axiomáticos y estudiar su potencial deductivo no es tarea fácil.

Los métodos utilizados para la prueba de la independencia del axioma de elección son hoy estándar para el desarrollo de la metamatemática contemporánea y son de tal complejidad que su estudio detallado forma parte de varios tratados en la literatura especializada. Por ello, la presentación que haremos en el presente trabajo será hecha a nivel descriptivo, asumiendo algunos resultados necesarios, cuyas demostraciones referenciaremos oportunamente. Nuestro objetivo fundamental es describir la estructura general de las demostraciones de Gödel y Cohen, logrando, al recorrerlas, identificar el tratamiento platonista que necesariamente poseen los conceptos involucrados.

2. Consistencia relativa e independencia

En general, para determinar la consistencia de una proposición determinada se muestra que la misma no se puede refutar en un sistema axiomático dado -probando que el sistema en sí mismo no es contradictorio-. Usualmente se da una interpretación o modelo del lenguaje del sistema, en la cual todos los axiomas son verdaderos junto con la proposición objeto de estudio. En nuestro caso, el sistema axiomático ZF ha sido considerado la referencia estándar en este sentido.

Por los resultados de Gödel, sabemos que no podremos determinar si todo ZF acarrea contradicción o no. Mas aún, ningún sistema axiomático (recursivo) lo suficientemente fuerte para describir la aritmética de Peano puede probar su propia consistencia. Por ende, aún cuando agreguemos el axioma de elección a ZF, conformándose ZFC, no podremos determinar su propia consistencia - la de ZFC-. Nos queda entonces hacer una prueba de consistencia relativa: Si ZF es consistente entonces ZF + AE es consistente. La misma fue hecha por Gödel a través de lo que se conoce como el método de los conjuntos constructibles. Adicionalmente mostraremos que también es consistente negar el axioma de elección, es decir: Si ZF es consistente entonces ZF+ $\neg$ AE es consistente. Este resultado se debe a Cohen y utiliza el método de construcción de modelos llamado forcing. Con ambos resultados se establece la independencia del axioma de elección de ZF, esto es, que ni el axioma ni su negación se pueden derivar de ZF. Los resultados serán objeto de análisis en el presente capítulo.

Definición 4.1. Sea T una subteoría de ZFC; por ejemplo la misma ZFC o ZF y consideremos ϕ una proposición del lenguaje de T.

(1) Se dice que ϕ es *independiente* de T (o es *indecidible* en T) si y sólo si $T \nvdash \phi$ y $T \nvdash \neg\phi$.
(2) $T + \phi$ es *consistente relativa* a T si y sólo si: Si T es consistente, entonces $T + \phi$ es consistente.

Para probar que AE es independiente de ZF se debe demostrar que $ZF \nvdash AE$ y $ZF \nvdash \neg AE$ siendo ambas pruebas nada fáciles de realizar. En ambos casos se construirán modelos, en el primero de ellos valdrá el axioma mientras que en el segundo no. Comencemos por explicitar el primer modelo, elaborado por Gödel.

3. Universo de los conjuntos constructibles de Gödel

El concepto fundamental sobre el que descansa la demostración de la consistencia del axioma de elección es la de *conjunto constructible*. La constructibilidad tiene varias maneras de relativizarse y en el presente trabajo se muestra una de ellas, la cual permite, a través de la construcción de la clase de los conjuntos constructibles -usualmente llamada **L**- establecer la consistencia relativa del axioma de elección de ZF, pues dicha clase es un modelo del axioma. Mas aún, es el modelo transitivo más pequeño que contiene a los ordinales, siendo esto fundamental ya que se puede encontrar un buen orden para **L**. Así, como el axioma de elección equivale al buen orden, vale en dicho modelo.

El procedimiento para la construcción del modelo **L** se presenta, de manera resumida, en los siguientes términos: En primer lugar se establece la noción de relativización, el cual permite mostrar el concepto de definibilidad, siendo éste último esencial para construir a **L**. De seguidas, se establece la noción de función de dos variables $Df(A, n)$, que se puede entender como el conjunto de las relaciones n-arias de A las cuales son definibles por una fórmula con n variables libres relativizada a A. Posteriormente se define $\mathcal{D}(A)$, el cual es el conjunto de los subconjuntos de A que son definibles a partir de un número finito de elementos de A por una fórmula relativizada a A. Todo lo anterior permite construir a **L** usando recursión transfinita sobre los ordinales. Más adelante, se establece cuando una fórmula es absoluta. Hecho esto, se muestra que **L** es un modelo de ZF y un modelo del axioma de elección. Ambas demostraciones permite mostrar que vale el siguiente teorema: Si ZF es consistente entonces ZF + AE lo es también.

4. Preliminares

A continuación presentamos algunos conceptos previos necesarios. ZFC está conformado por los siguientes axiomas:

(1) Axioma de extensionalidad: Si X y Y son dos conjuntos con los mismos elementos, entonces son iguales.

(2) Axioma de pares: Si X y Y son dos conjuntos, entonces existe un conjunto $Z = \{X, Y\}$ cuyos elementos son exactamente X e Y.

(3) Axioma de comprensión: Si $P(x)$ es una propiedad bien definida, entonces para cualquier conjunto X existe un conjunto Y tal que $Y = \{Z \in X : P(Z)\}$

(4) Axioma de Unión: Si X es un conjunto, entonces existe un conjunto $Y = \bigcup X$ que es la unión de todos los elementos de X.

(5) Axioma del conjunto potencia: Para todo conjunto X existe $P(X)$, el conjunto de los subconjuntos de X.

(6) Axioma del conjunto infinito: Existe un conjunto inductivo.[99]

(7) Axioma de reemplazo: Si F es una función definible, entonces para cualquier conjunto X existe un conjunto $Y = F(x) = \{F(x) : x \in X\}$

(8) Axioma de regularidad: Cualquier conjunto no vacío tiene un elemento $\in$-minimal.

(9) Axioma de elección: Cualquier familia de conjuntos no vacíos tiene función de elección.

Usualmente se denota por ZF a los axiomas 1 al 8. ZF se puede escribir en lenguaje de primer orden, donde el único símbolo no lógico es el relacional binario $\in$ .Dada una fórmula $\varphi(x)$ del lenguaje de ZFC, decimos que la colección $\{x : \varphi(x)\}$ es una clase. Existen algunas clases que son conjuntos pero hay algunas clases que no lo son (clases propias) pues suponerlas conjuntos implica contradicción. Algunas clases que no son conjuntos son los ordinales, los cardinales y los conjuntos constructibles de Gödel, siendo esta última la definida por él para probar la consistencia del axioma de elección respecto a los restantes axiomas de ZF.

Definición 4.2 (Relativización). Sea M una clase y φ una fórmula. Definimos φ^M, la relativización de φ sobre M, por inducción sobre φ así:

(1) $(x = y)^M$ es $x = y$

(2) $(x \in y)^M$ es $x \in y$

(3) $(\varphi \wedge \psi)^M$ es φ^M y ψ^M

(4) $(\neg\varphi)^M$ es $\neg(\varphi)^M$

(5) $(\exists x\varphi)^M$ es $\exists x(x \in M \wedge \varphi^M)$

Sea M una clase:

(1) Para una sentencia φ,“φ es verdad en M” significa φ^M

(2) Para un conjunto de sentencias S,“S es verdad en M” o “M es un modelo de S” significa que cada sentencia en S es verdad en M.

5. Definibilidad

Usualmente se dice que un conjunto b es *definible* si y sólo si existe alguna propiedad $P(x)$ tal que b es el único objeto que lo satisface. Existe un conjunto numerable de conjuntos definibles pues las propiedades se expresan en castellano - u otro idioma- y estas expresiones

[99] Se dice que un conjunto A es inductivo si $0 \in A$ y si $x \in A$ entonces $x \cup \{x\} \in A$. Véase: Abad, J. y Di Prisco,C. *Teoría de Ramsey y Espacios de Banach*, Mérida, EMALCA, 2008, p.198.

pueden ser a lo sumo numerable. Esto trae como consecuencia que existen conjuntos no definibles, por ejemplo algunos ordinales, pero al indicar esto se les ha definido. Para solucionar esta paradoja es necesario establecer bien el significado de la expresión "x es definible a traves de una fórmula." Esto lo haremos escribiendo una fórmula de dos variables, x y A, la cual dice que $x \in A$ y que x es definible por una fórmula relativizada a A. Esto será importante para posteriormente establecer los conjuntos definibles por ordinales y con esto probar la consistencia del axioma de elección. Definamos

$$\mathcal{U} = \langle A, < R_\beta^{\mathcal{U}} >_{\beta\in\gamma}, < f_\mu^{\mathcal{U}} >_{\mu\in\delta}, < c_\xi^{\mathcal{U}} >_{\xi\in\eta}\rangle$$

una estructura y $L_{\mathcal{U}}$ un lenguaje de primer orden para la misma. Decimos que un subconjunto $B \subseteq A$ es *definible* en $\mathcal{U}$ si existe una fórmula $\varphi(x)$ del lenguaje $L_{\mathcal{U}}$ tal que:

$$B = \{z \in A : \mathcal{U} \models \varphi[z]\}$$

Se dice que B es definible en $\mathcal{U}$ con parámetros si existe una fórmula $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$ del lenguaje $L_{\mathcal{U}}$ y existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tal que $B = \{z \in A : \mathcal{U} \models \varphi[z, a_1, \ldots, a_n]\}$.

L se define intuitivamente usando inducción transfinita sobre los ordinales de la siguiente manera:

$$L_0 := \emptyset$$

$$L_{\alpha+1} := \{X \subseteq L_\alpha : X \text{ es definible en} \langle L_\alpha, \in, < b : b \in L_\alpha >\rangle\}$$

$$L_\lambda := \bigcup_{\beta\in\lambda} L_\lambda; \lambda \text{ límite}$$

$$L := \bigcup_{\alpha\in Ord} L_\alpha$$

Para poder establecer, en el paso sucesor, lo definible en la estructura $\langle L_\alpha, \in, < b : b \in L_\alpha >\rangle$ se supone que se tiene un lenguaje de primer orden con identidad, cuyos símbolos lógicos son: un símbolo relacional binario $\underline{\in}$ para la relación de pertenencia $\in$ y una constante $\underline{b}$ para cada $b \in L_\alpha$. Veamos a continuación como formalizar esto en ZF.

La noción fundamental será la de función de dos variables $Df(A,n)$, la cual determina el conjunto de las relaciones n-arias de A que son definibles por una fórmula con n variables libres relativizada a A. Así, se puede decir que un elemento x de A, es definible por una fórmula relativizada a A diciendo $\{x\} \in Df(A,1)$. Se podría definir $Df(A,n)$ como el conjunto de los subconjuntos de A^n de la forma

$$\{< x_1, \ldots, x_n >: \varphi^A(x_1, \ldots, x_n)\}$$

para alguna fórmula φ con n variables libres. Sin embargo, como hay infinitos φ, no se aprecia como formalizar Df sin ZF. Procederemos a definir $Df(A,n)$ como el menor conjunto de relaciones en A que contiene relaciones básicas tales como $\{< x, y > \in A^2 : x \in y\}$ y las cerraduras de intersección, complemento y proyección.

Definición 4.3. Si $n \in W$ e $i, j < n$,

(1) $Proj(A, R, n) = \{s \in A^n : \exists t \in R(t \restriction n = s)\}$
(2) $Diag_{\in}(A, n, i, j) = \{s \in A^n : s(i) \in s(j)\}$
(3) $Diag_{=}(A, n, i, j) = \{s \in A^n : s(i) = s(j)\}$
(4) Por recursión sobre $b \in \omega$, definimos $Df'(k, A, n)$ para todo n simultáneamente:
   (a) $Df'(0, A, n) = \{Diag_{\in}(A, n, i, j) : i, j < n\} \cup \{Diag_{=}(A, n, i, j) : i, j < n\}$
   (b) $Df'(k+1, A, n) = Df'(k, A, n) \cup \{A^n \backslash R : R \in Df'(k, A, n)\} \cup \{R \cap S : R, S \in Df'(k, A, n)\} \cup \{Proj(A, R, n) : R \in Df'(k, A, n+1)\}$
(5) $Df(A, n) = \bigcup\{Df'(k, A, n) : k \in \omega\}$

Tenemos entonces que Df es la clausura de un conjunto contable bajo operaciones finitas.

6. Clase de los conjuntos constructibles de Gödel

Procederemos a dar una definición rigurosa de **L**. Trabajaremos definiendo la operación de conjunto potencia $\mathcal{D}$. $\mathcal{D}(A)$ es el conjunto de los subconjuntos de A que son definibles a partir de un número finito de elementos de A por una fórmula relativizada a A.

Definición 4.4.

$$\mathcal{D}(A) = \{X \subset A : \exists n \in \omega \exists s \in A^n \exists R \in Df(A, n+1)(x = \{x \in A : s^\frown < x > \in R\})\}$$

Definición 4.5. Por recursión transfinita definimos $L(\alpha)$ para $\alpha \in Ord$ por:

$L(0) = 0$

$L(\alpha) = \mathcal{D}(L(\alpha))$

$L(\alpha) = \bigcup_{\eta<\alpha} L(\eta)$ cuando α es un ordinal límite

Ahora procederemos a definir $\mathbf{L}$.

Definición 4.6.

$$\mathbf{L} = \bigcup\{L(\alpha) : \alpha \in Ord\}.$$

Así, tenemos que un conjunto x es constructible si $\exists\alpha(x \in L_\alpha)$, para algún α.

7. ZF + AE en L

Construido $\mathbf{L}$, verifiquemos que el mismo es un modelo transitivo de ZF que contiene a los ordinales y que es modelo del axioma de elección. En el primer caso, el mismo utiliza un resultado importante, como lo es el Teorema de reflexión, y este depende de la definición de absoluticidad. Presentamos algunas definiciones previas necesarias y el teorema a continuación.

Recordemos que un conjunto es transitivo si se cumple que $\forall z(z \in x \to z \subseteq x)$. De manera análoga, una clase es transitiva si cumple lo anterior. Previamente, en el primer capítulo, establecimos que la clase de los ordinales es transitiva y que cada ordinal es igual al conjunto de los ordinales que lo preceden. Se sigue, gracias al axioma de regularidad, que cada conjunto tiene un rango y esto permite definir al universo $\mathbf{V}$ de la siguiente manera

$V(0) = 0$

$V(\alpha + 1) = \mathcal{P}(V(\alpha))$

$V(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} V(\eta)$ cuando α es un ordinal límite

Luego

$$\mathbf{V} = \bigcup\{V(\alpha) : \alpha \in Ord\}.$$

El axioma de constructibilidad establece que $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, esto es, que todo conjunto es constructible.

Definición 4.7. Sean M y N dos clases tal que $M \subseteq N$ y $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una fórmula. Se dice que $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es *absoluta* para M y N si y sólo si

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in M[(M, \in) \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow (N, \in) \models \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

Teorema 4.8 (Teorema de reflexión). *Sea Z una clase, y para cada ordinal α, $Z(\alpha)$ un conjunto. Supongamos que*

(1) $\alpha < \beta$, *entonces* $Z(\alpha) < Z(\beta)$

(2) *Si λ es un ordinal límite, entonces* $Z(\lambda) = \bigcup_{\alpha<\gamma} Z(\alpha)$

(3) $Z = \bigcup_{\alpha \in Ord} Z(\alpha)$

Entonces para cualesquiera fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$:

$\forall \alpha \exists \beta > \alpha(\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *son absolutas para* $Z(\beta), Z)$

Teorema 4.9. **L** *es un modelo de ZF.*

Demostración: **L** es un modelo de ZF si podemos mostrar que todos los axiomas de ZF son verdaderos en **L.** Para ello se procede a relativizar los axiomas a **L** y luego se prueba que la proposición relativizada resultante es verdadera en **V**. El axioma de extensionalidad se cumple en **L** porque **L** es transitivo. El axioma de infinitud se cumple también pues, por construcción, $\omega \in \mathbf{L}$. El axioma de fundación se cumple en cualquier clase. Referenciamos a Kunen, página 169, para observar la demostración para los restantes axiomas.□

Teorema 4.10. **L** *es un modelo del axioma de elección.*

Demostración: La idea es establecer un buen orden para **L** usando la definición formal del mismo. La definición procede inductivamente. Referenciamos a Kunen, página 173, para verificar cómo se da el buen orden.□

Como consecuencia de las dos demostraciones anteriores se tiene que vale el siguiente teorema: Si es consistente ZF entonces también lo es ZF+ AE. Por lo tanto, estamos en posición de garantizar que es posible usar el axioma de elección sin riesgo de contradicción alguna. En los términos en los que se ha desarrollado la presente investigación, podría pensarse que este último resultado le da carta de ciudadanía al axioma de elección y toda discusión posterior sería estéril. En efecto, desde la perspectiva mediante la cual hemos privilegiado el quehacer matemático, tendríamos que un matemático no interesado en problemas de fundamentos aceptaría el axioma de elección, ya que consideraría de mayor importancia el hecho de no conllevar contradicción que ser no-constructivo.

La posición anterior se vería reforzada con la gran cantidad de resultados matemáticos que dependen del axioma. En resumen: el axioma es ampliamente utilizado, importantes resultados dependen de él y además es posible utilizarlo sin riesgo alguno. Esta perspectiva la consideramos relevante y es razón de peso para permitir el uso del axioma dentro del contexto matemático y metamatemático. Ahora bien, como veremos en el último capítulo, la discusión no la damos por terminada y, sin renegar de la posición antes esbozada (siendo más bien fundamental en nuestra propuesta), ofreceremos elementos para el debate. Uno de ellos es el hecho de que también es posible negar el axioma de elección sin contradicción alguna. Este resultado nos habla de la existencia de al menos dos matemáticas: una con elección y otra sin ella. Así, si es tan legítimo usar el axioma como prescindir de él, quedan abiertos posibles planteamientos filosóficos los cuales serán atendidos posteriormente. Veamos entonces la prueba debida a Cohen, que utiliza el método de construcción de modelos base de las investigaciones metamatemáticas contemporáneas: el *forcing*.

8. Forcing de Cohen

El *forcing* es una técnica de construcción de modelos que inventó Cohen (1963-64) para hacer pruebas de consistencia relativa, con la cual demostró que ZFC + $\neg$ HC[100] es consistente relativa con ZFC; y que ZF + $\neg$ AE es consistente relativa con ZF. Esto permitió culminar la prueba de independencia de ambas proposiciones de ZFC y ZF respectivamente, pues ya Gödel había probado (1938-40) que ZF + HC + AE es consistente relativa con ZF, construyendo la clase de los conjuntos constructibles(**L**), revisada en el apartado anterior.

El procedimiento que guía la utilización del forcing es el siguiente: Si se desea probar que ZFC + φ es consistente relativa con ZFC se supone la existencia de un modelo transitivo y numerable M de ZFC y luego se extiende M a otro modelo transitivo y numerable $M[G]$

[100]HC es la hipótesis del continuo. Esta nos dice que no existe un cardinal intermedio entre el cardinal de los números naturales y el de los números reales.

de ZFC+ φ tal que $M[G]$ es el menor modelo transitivo de ZFC que contiene a $M \cup \{G\}$, donde $M[G]$ y M tienen los mismos ordinales. $M[G]$ se llama la extensión genérica de M correspondiente a G, donde G es un P-genérico sobre M. En resumen, dado un $(P, \leq, 1) \in M$ y un G P-genérico sobre M, se define $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^p\}$ donde M^p es el conjunto de todos los P-nombres de M y τ_G es la interpretación de τ en G.

La descripción que haremos de la demostración, nos mostrará como se construyen modelos utilizando la técnica de forcing. La misma utiliza herramientas que pueden ser identificadas como platonistas. Comencemos por presentar algunas nociones fundamentales que nos permitirán definir un P-genérico sobre M, siendo M una clase transitiva y numerable. Esto es importante para posteriormente definir su extensión genérica.

9. Órdenes parciales, conjuntos densos y filtros

DEFINICIÓN 4.11. Un *orden parcial con mayor elemento* es una terna $< P, K, 1 >$ tal que (P, K) es un orden parcial y 1 es un mayor elemento de P, es decir $1 \in P$ y $\forall x \in P(xK1)$.

DEFINICIÓN 4.12. Sea $(P, \leq)$ un orden parcial. Una *cadena* en P es un conjunto $C \subseteq P$ tal que $\forall p, q \in C(p \leq q \vee (q \leq p))$. p y q son compatibles($p \mid q$) si y solo si $\exists r \in P(r \leq p \wedge r \leq q)$. p y q son incompatibles ($p \perp q$) si y sólo si $\neg \exists r \in P(r \leq p \wedge r \leq q)$.Una *anticadena* en P es un subconjunto $A \leq P$ tal que $\forall p, q \in A(p \neq q \rightarrow p \perp q)$.

DEFINICIÓN 4.13. Sea $(P, \leq)$ un orden parcial.$D \subseteq P$ es *denso en P* si y sólo si $\forall p \in P \exists q \in D(q \leq p)$. Si $D \subseteq P$ y $p \in P$, entonces D es denso bajo p en P si y sólo si para cualquier $q \in p$ tal que $q \leq p$, existe un $r \in D$ tal que $r \leq q$. $G \subseteq P$ es un *filtro* sobre P si y sólo si:

(1) $\forall p, q \in G \exists r \in G(r \leq p \wedge r \leq q)$
(2) $\forall p \in G, \forall q$ en $P(p \leq q \rightarrow q \in G)$

El siguiente teorema es fundamental, siendo su prueba inmediata.

TEOREMA 4.14. *Sean $(P, \leq)$ un orden parcial y $p \in P$. El conjunto $\{q \in P : q \leq p \vee q \perp p\}$ es denso en P.*

10. Modelos transitivos, P-genéricos y fórmulas absolutas

Definición 4.15. Sea M una clase. Para toda fórmula φ definimos φ^M, la relativización de φ a M :

(1) $(x = y)^M$ es $x = y$
(2) $(x \in y)^M$ es $x \in y$
(3) $(\chi \wedge \varphi)^M$ es $\chi^M \wedge \varphi^M$
(4) $(\neg\chi)^M$ es $\neg(\chi)^M$
(5) $(\exists x\chi)^M$ es $\exists x(x \in M \wedge \chi^M)$

Definición 4.16. Sea M una clase.Tenemos que

(1) Para cada proposición φ, φ es verdad en M -es decir, M es un modelo de φ- es una abreviatura de φ^M.
(2) Para cada conjunto de proposiciones Δ, decir Δ es verdad en M -es decir, M es un modelo de Δ- es una abreviatura de δ es verdad en M para cada $\delta \in \Delta$.

Es importante hacer algunas consideraciones respecto a la definición anterior. En primer lugar, φ es verdad en M es una abreviación de una proposición del lenguaje formal: φ^M, mientras que Δ es verdad en M no abrevia una proposición del lenguaje formal, sino mas bien a la conjunción infinita $\bigwedge\{\delta^M : \delta \in \Delta\}$. En segundo lugar, si se está trabajando con una subteoría T de ZFC y se quiere probar que φ es verdad en M, hay que demostrar φ^M con los axiomas de T. Si lo que desea probar es que φ no es verdad en M, hay que demostrar $\neg\varphi^M$ con los axiomas de T. Pero, de ser esto así, y como consecuencia de que hay proposiciones indecidibles para T (si T es consistente y suficientemente fuerte para desarrollar la aritmética) puede pasar que no exista una respuesta acerca de si φ es verdad o no en M.

Sin embargo, desde una posición platonista, φ es verdad en M significa que φ^M es verdad en **V**. Así, a pesar de que no se pueda decidir con el instrumento que se está usando (los axiomas de T) si es verdad o no en M, se tiene la convicción de que alguna de las dos cosas debe ocurrir porque en **V** la proposición φ^M es verdadera o falsa. Un matemático intuicionista no aceptaría esto último. En caso de aún no poderse determinar, sería necesario agregar mas axiomas a T que permitiesen decidirlo. Aún así, siempre habrán proposiciones indecidibles.[101]

Definición 4.17. Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC y $p \in P$ un orden parcial con mayor elemento. G es *P-genérico* sobre M si y sólo si G es un filtro sobre P y para todo denso $D \subseteq P$: Si $D \in M \to G \cap D \neq \emptyset$

Teorema 4.18. *Sean M un modelo transitivo y numerable de ZFC, $p \in P$ un orden parcial con mayor elemento.$E \subseteq P$, $E \in M$ y G un P-genérico sobre M. Entonces:*

(1) $G \cap D \neq \emptyset \vee \exists q \in G \forall r \in G(q \perp r)$
(2) *Si $p \in G$ y E es denso bajo p, entonces $G \cap D \neq \emptyset$*

El siguiente teorema es fundamental para el forcing con modelos transitivos numerables, pues garantiza la existencia de un P-genérico sobre M para cada $p \in P$, si M es numerable.

Teorema 4.19. *Sea M un modelo transitivo y numerable de ZFC, $P \in M$ un orden parcial con mayor elemento y $p \in P$. Entonces existe un G que es P-genérico sobre M tal que $p \in G$.*

11. P-nombres y extensiones genéricas M[G]

Definición 4.20. Sea P un orden parcial con mayor elemento, τ es un *P-nombre* si y sólo si τ es una relación y $\forall(\sigma, p) \in \tau[(\sigma \text{ es P-nombre }) \wedge (p \in P)]$.

La definición anterior se hace por inducción transfinita y no se menciona algún modelo.

Definición 4.21. Sea P un orden parcial con mayor elemento. V^P es la clase de los P-nombres. Si M es un modelo transitivo y numerable de ZFC y $P \in M$, entonces $M^P = V^P \cap M$.

Definición 4.22. Sean M un modelo transitivo y numerable de ZFC, P un orden parcial en M, G un P-genérico sobre M y σ un P-nombre:

(1) $val(\tau, G) = \{val(\delta, G) : \exists p \in G((\delta, p) \in \tau)\}$. Se escribirá τ_G en vez de $val(\tau, G)$

[101] La reflexión de los dos párrafos anteriores se debe al profesor Franklin Galindo, a quien gentilmente le debemos la observación. Al respecto se puede ver: Galindo, F. *Algunos métodos de la lógica y una revisión crítica de los mismos en relación con los fundamentos de las matemáticas*, Trabajo de ascenso no publicado, 2014, p.80.

(2) $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^P\}$

(3) Si $x \in M, \check{x} = \{(\check{y}, 1_p) : y \in x\}$.

(4) $\Gamma = \{(\check{p}, p) : p \in P\}$

(5) $up(\sigma, \tau) = \{(\sigma, 1), (\tau, 1)\}$

(6) $op(\sigma, \tau) = up(up(\sigma, \sigma), up(\sigma, \tau))$

Tanto $val(\tau, G)$ como $\check{x}$ se definen por inducción transfinita. El siguiente teorema muestra que $\check{p}$ y Γ son P-nombres canónicos para x y G respectivamente. Además muestra que *up* y *op* son P-nombres canónicos para pares y pares ordenados en M[G] respectivamente.

Teorema 4.23. *Sean M un modelo transitivo y numerable de ZFC, P un o.p.m. en M, G un p-genérico sobre M, $x \in M$, y $\sigma, \tau \in M^P$.Entonces:*

(1) $\check{x}_G = x$

(2) $\Gamma_G = G$

(3) $up(\sigma, \tau) \in M^P$ *y* $up(\sigma, \tau)_G = \{\sigma_G, \tau_G\}$

(4) $op(\sigma, \tau) \in M^P$ *y* $op(\sigma, \tau)_G = (\sigma_G, \sigma_G)$

El siguiente teorema muestra una condición suficiente del orden parcial para obtener extensiones genéricas propias de M.

Teorema 4.24. *Sea M un modelo transitivo y numerable de ZFC, P un o.p.m. en M tal que $\forall p \in P \exists q, r \in P(q \leq p \wedge r \leq p \wedge q \perp r)$ y G un P-genérico sobre M, entonces $G \notin M$.*

12. Las relaciones de Forcing $\Vdash$ y $\Vdash^*$

En esta subsección se definirá la relación de forcing ($p \Vdash \varphi$) con una fórmula que tiene como parámetros a M, a $(P, \leq, 1)$, a p y a una cantidad finita de P-nombres; y además menciona a todos los modelos $M[G]$, donde G es P-genérico sobre M (esto implica que la relación no se puede decidir dentro de M con tal fórmula). Después se definirá la relación de forcing* ($p \Vdash^* \varphi$) con una fórmula que no tiene como parámetro a M (si tiene a $(P, \leq, 1)$,a p y a una cantidad finita de P-nombres), y no menciona a los modelos $M[G]$. Luego se vinculará ambas relaciones con el siguiente teorema: $p \Vdash \varphi \leftrightarrow (p \Vdash^* \varphi)^M$. Tal resultado muestra que la relación $\Vdash$ se puede decidir dentro de M. Para culminar se enunciará el Teorema del forcing el cual vincula la relación con las extensiones genéricas M[G].

Definición 4.25. Sean $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, M un modelo transitivo y numerable de ZFC, P un orden parcial con mayor elemento en M, $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^P$ y $p \in P$. Entonces

$$p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \text{ si y sólo si } \forall G[(G \text{ es P-genérico sobre } M \wedge p \in G) \rightarrow \varphi^{M[G]}(\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG})]$$

La definición anterior indica cuando p *fuerza* a una proposición φ. Ahora definamos la relación forcing*.

Definición 4.26. Sean $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, P un orden parcial con mayor elemento en M, $\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^P$ y $p \in P$. Entonces se define inductivamente $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$

(1) $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ si y sólo si:

(a) $\forall(\pi_1, s_1) \in \tau_1$, el conjunto

$$\{q \leq p : q \leq s_1 \rightarrow \exists(\pi_2, s_2) \in \tau_2(q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)\}$$

es denso bajo p

(b) $\forall(\pi_2, s_2) \in \tau_2$, el conjunto

$$\{q \leq p : q \leq s_2 \rightarrow \exists(\pi_1, s_1) \in \tau_1(q \leq s_1 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)\}$$

es denso bajo p

(2) $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$ si y sólo si el conjunto

$$\{q : \exists(\pi, s) \in \tau_2(q \leq s \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \tau_1)\}$$

es denso bajo p

(3) $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \wedge \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ si y sólo si

$$p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \text{ y } p \Vdash^* \psi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

(4) $p \Vdash^* \neg\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ si y solo si no existe un $q \leq p$ tal que $q \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n)$

(5) $p \Vdash^* \exists x \varphi(x, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ si y sólo si el conjunto

$$\{r : \exists \sigma \in V^p(r \Vdash^* \varphi(\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n))\}$$

es denso bajo p

Definidas ambas relaciones, procedemos a relacionarlas a través del siguiente teorema.

Teorema 4.27. *Sean $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula, M un modelo transitivo y numerable de ZFC, P un orden parcial con mayor elemento en M,$\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^P$ y $p \in P$. Entonces:*

$$p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \leftrightarrow (p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n))^M$$

13. El Teorema del forcing y del modelo genérico

Teorema 4.28 (Teorema del forcing). *Sean $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula, M un modelo transitivo y numerable de ZFC, P un orden parcial con mayor elemento en M,$\tau_1, \ldots, \tau_n \in M^P$ y G un p-genérico sobre M. Entonces:*

$$\varphi(\tau_{1G}, \ldots, \tau_{nG})^{M[G]} \leftrightarrow \exists p \in G(p \Vdash \varphi(\tau_1, \ldots, \tau_n))$$

Por ende, si queremos probar que una fórmula φ es verdad en $M[G]$ se puede usar el Teorema del Forcing. La idea es demostrar la parte derecha del mismo usando conjuntos densos o densos bajo p, con $p \in G$ que esté en M.

El siguiente teorema establece que $M[G]$ es el menor modelo transitivo de ZFC que contiene a $M \cup \{G\}$ y sus ordinales son los mismos de M.

Teorema 4.29 (Teorema del modelo genérico). *Sean M un modelo transitivo numerable de ZFC, P un orden parcial con mayor elemento en M y G un P-genérico sobre M. Entonces,*

(1) *$M[G]$ es un modelo transitivo de ZFC*
(2) *$M \subseteq M[G]$ y $G \in M[G]$*
(3) *$Ord^{M[G]} = Ord^M$*
(4) *Si R es un modelo transitivo de ZFC tal que $M \subseteq R$ y $G \in R$ entonces $M[G] \subseteq R$.*

Si el modelo base M satisface AE, también lo hace su extensión genérica. Sin embargo, todavía podemos utilizar el forcing para construir un modelo en el que AE falla. Es decir, se encontrará un submodelo del modelo genérico, llamémosle N, tal que $M \subset N \subset M[G]$. Así, N será un modelo de ZF en el que los números reales no pueden bien ordenarse. El procedimiento se presenta en la siguiente sección.

14. Un modelo de ZF en el que no vale el axioma de elección

Comenzamos dando unas definiciones previas necesarias.

Definición 4.30 (Álgebra Booleana). Un *álgebra booleana* es un conjunto B con al menos dos elementos, 0 y 1 (cero y uno), dotado de dos operaciones binarias: suma y producto, y una operación unaria: complemento, las cuales satisfacen las siguientes propiedades:

$$a + b = b + a; a * b = b * a$$

$$(a + b) + c = a + (b + c); (a * b) * c = a * (b * c)$$

$$a * (b + c) = (a * b) + (a * c); a + (b * c) = (a + b) * (a + c)$$

$$a + a = a; a * a = a$$

$$a * (a + b) = a; a + (a * b) = a$$

$$a + 1 = 1; a * 1 = a$$

$$a + 0 = a; a * 0 = 0$$

$$a + (a') = 1; a * (a') = 0$$

$$(a')' = a$$

$$(a + b)' = a' * b'; (a * b)' = a' + b'.$$

Si $a, b \in B$, entonces: $a + b$ es el supremo de a y b, $a * b$ es el ínfimo de a y b, a' es el único $c \in B$ tal que $a + c = 1$ y $a * c = 0$. B es *completa* si el supremo de $S(\Sigma S)$ y el ínfimo de $S(\Pi S)$ existen en B, para cualquier $S \subseteq B$.

Definición 4.31 (Modelo a valores Booleanos $\mathbf{V}^B$). Sea B un álgebra booleana completa. Se define $\mathbf{V}^B$ por inducción transfinita en los ordinales de la siguiente manera

$$\mathbf{V}_0^B = \emptyset$$

$$\mathbf{V}_{\alpha+1}^B = \text{ El conjunto de todas las funciones } x \text{ tal que } dom(x) \subseteq \mathbf{V}_\alpha^B \text{ y } rango(x) \subseteq B$$

$$\mathbf{V}_\lambda^B = \bigcup \{\mathbf{V}_\delta^B : \delta < \lambda\}, \lambda \text{ límite}$$

$$\mathbf{V}^B = \bigcup \{\mathbf{V}_\alpha^B : \alpha \in Ord\}$$

Definición 4.32. Sea B un álgebra Booleana completa y sea π un automorfismo de B. Definamos por inducción sobre $\rho(x)$ un automorfismo de $\mathbf{V}^B$ y π es así:

(1) $\pi(\emptyset) = \emptyset$

(2) $dom(\pi x) = \pi(dom(x))$y$(\pi x)(\pi y) = \pi(x(y))$ para todo $\pi(y) \in dom(\pi x)$

Así tenemos que π es una función 1-1 de $\mathbf{V}^B$ sobre sí mismo y $\pi(\check{x}) = \check{x}$ para cada x

Lema 4.33. *Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula. Si π es un automorfismo de B, entonces para cada $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{V}^B$,*

$$\|\varphi(\pi x_1, \ldots, \pi x_n)\| = \pi(\|\varphi(x_1, \ldots, x_n)\|)(I)$$

La prueba se realiza por inducción en la complejidad de la fórmula φ. Una prueba de este lema se puede hallar en Jech, página 221. (I) toma esta forma para el caso que atendemos aquí:

Para todos los P-nombres $\dot{x_1}, \ldots, \dot{x_n}$ tenemos que:

$$p \Vdash \varphi(\dot{x_1}, \ldots, \dot{x_n}) \text{ si y sólo si } \pi p \Vdash \varphi(\pi\dot{x_1}, \ldots, \pi\dot{x_n})$$

Lema 4.34. *Si $i \neq j$ entonces cada p fuerza a $\dot{a}_i \neq \dot{a}_j$*

Demostración: Para cada p existe un q $\supset$ p tal que para algún $n \in w, q(i,n) = 1$ y $q(j,n) = 0$.□

Lema 4.35. *En M[G], no existe una función 1-1 $f : A \to Ord$ definible por ordinales sobre A (en consecuencia A no se puede bien ordenar en el modelo de ZF HOD(A)[102]).*

Una demostración se puede hallar en Jech, Set Theory, páginas 222-223.□

En consecuencia, por los resultados de Gödel y Cohen ya descritos, el axioma de elección es independiente de ZF. Así, nuestro recorrido matemático y metamatemático nos lleva a la siguiente encrucijada: es posible hacer matemática con el axioma y sin él. Para determinar la opción a tomar y las consecuencias que de ello se derivan se hace necesaria la reflexión filosófica, la cual desarrollaremos a continuación.

[102]HOD(A) es la clase de los conjuntos hereditariamente definibles por ordinales sobre A. Véase Jech, T., *Set Theory*, Springer, 2006 y Kunen, K. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*, College Publications, 2011 para su definición y propiedades.

Capítulo 5

Consideraciones filosóficas sobre el axioma de elección

El desarrollo que hemos seguido en esta investigación ha permitido evidenciar la participación que el axioma de elección ha tenido en las matemáticas y las metamatemáticas contemporáneas. En el primer caso, el axioma ha sustentado resultados matemáticos fundamentales. En efecto, hemos mostrado que no se puede bien ordenar a todo conjunto, probar la existencia de una base de Hamel para todo espacio vectorial, probar la existencia de un elemento maximal para un conjunto ordenado no vacío tal que todo subconjunto bien ordenado del mismo tenga cota superior, probar el teorema de Tychonoff, caracterizar la continuidad de funciones a través de sucesiones y probar el teorema de Hahn-Banach *sin aceptar* el axioma de elección. Así, privilegiando lo que cada área necesita para su desarrollo y consolidación, apreciamos como efectivamente la topología, la teoría de conjuntos, el álgebra y el análisis han considerado prioritarios usar el axioma de elección, para los objetivos y resultados que estimaron pertinente. Por ende, el quehacer matemático cotidiano tiene en el axioma de elección un aliado fundamental.

En el ámbito metamatemático, es usual estudiar la actividad matemática a través de uno de sus elementos constituyentes: los sistemas axiomáticos. En particular, se estudian sus propiedades metateóricas para conocer su capacidad deductiva y su poder explicativo. La influencia de la axiomatización hoy día es tal, que los matemáticos en su actividad cotidiana, se cuidan de dejar establecido para cada área respectiva los axiomas propios que le sirven de base, mostrando luego algunos resultados derivados de ellos. A partir de allí, cada área se desarrolla sin volver la mirada a sus axiomas fundacionales. Mas aún, los resultados que van obteniendo no son consecuencia estricta de los axiomas postulados. En este sentido el matemático no se limita a la axiomatización para desarrollar su actividad. La axiomatización solo es una manera de garantizar que no haya contradicciones en lo que desarrolle. Esto hace del quehacer matemático cotidiano una actividad no axiomatizable.

Siguiendo el hilo conductor de las ideas presentadas en los dos párrafos anteriores, podemos observar entonces que cada área posee sus axiomas. En efecto, existen axiomas topológicos, algebraicos, analíticos y conjuntistas. ¿Y el axioma de elección? Los resultados ofrecidos en esta investigación son prueba fehaciente de que el axioma no es exclusivo de un área sino que permea a toda la matemática conocida. Esto nos permite acompañar la afirmación que hiciese Zermelo en 1930 cuando, a diferencia de 1908, prescindiera de postular en su sistema axiomático al axioma de elección, pues lo consideraba presupuesto por toda su investigación.[103] Es decir, el axioma de elección no se restringe a su enunciación dentro de un sistema axiomático sino que posee amplia aplicación en la actividad matemática. Esto lo diferencia de otros axiomas, dándole una condición única. Todo lo anterior es evidencia de la presencia activa, importante y no accidental del axioma en la matemática contemporánea.

Posteriormente, mostramos su aplicación en la lógica de primer orden. Recordemos que esta lógica es considerada la lógica base de las matemáticas contemporáneas. En consecuencia, conocer el poder explicativo y deductivo de dicha lógica es importante pues, por extensión, nos podría informar sobre la potencialidad de la matemática. Esto se logra con el teorema de completitud y, que sea necesario usar el axioma de elección para probar el teorema cuando se utilizan lenguajes de cualquier cardinalidad, nos muestra cómo efectivamente el axioma, así como no se encuentra supeditada a algún área de la matemática, tampoco se restringe a la lógica de primer orden. Esto le da una peculariedad que invita a considerar otros niveles de análisis que vayan más allá de lo matemático y metamatemático. Es por ello que las consideraciones filosóficas van surgiendo como necesarias, y serán abordadas en el presente capítulo.

Con el desarrollo de técnicas metamatemáticas, la pregunta por la consistencia del axioma de elección es obligada. Describiendo las pruebas de Gödel y Cohen, evidenciamos que el axioma es independiente de ZF. Esto es, que tanto el axioma como su negación se pueden utilizar sin riesgo de contradicción alguna. Por lo tanto, aunque la metamatemática nos garantiza poder usar el axioma sin riesgo de contradicción, también nos informa que prescindiendo de ella se puede hacer matemática sin problema alguno. Así, llegamos a un

[103] Torreti, R. *El paraíso de...*, cit., p.102.

punto de no retorno en el que recorrido el camino matemático y metamatemático no tenemos una respuesta concreta sobre la necesidad o no del axioma. En especial la independencia del axioma de ZF nos plantea una encrucijada: Si se puede usar o prescindir del axioma sin riesgo de contradicción, ¿qué podemos hacer? ¿cuál opción tomar y por qué? ¿cuáles criterios pueden ayudarnos? El axioma parece que no puede ser atrapado ni por la matemática, ni por la lógica, y ni siquiera por la metamatemática pues es independiente de ZF, el sistema axiomático considerado estándar para explicar a toda la matemática conocida. Visto así, y, siguiendo el camino metodológico presentado hasta ahora, consideramos que es el momento oportuno de adentrarnos en el terreno de la filosofía. Es pertinente al respecto citar a Savater, quien plantea lo siguiente:

> Cuando el número de preguntas y su radicalidad arrollan patentemente la fragilidad recelosa de las respuestas disponibles, quizás sea hora de acudir a la filosofía. No tanto por afán dogmático de poner pronto remedio al desconcierto sino para utilizar éste a favor del pensamiento: hacernos intelectualmente dignos de nuestras perplejidades es la única vía para empezar a superarlas.[104]

Queremos ser prudentes respecto a las posibles relaciones que se puedan establecer entre la filosofía y las matemáticas. En particular, cómo la filosofía atenderá los problemas suscitados por la matemática, tal y como lo definiéramos en esta investigación y lo evidenciáramos en el camino metodológico señalado. Como se ha dejado sentado, nuestro recorrido procede de la matemática hacia la filosofía. Tanto la matemática como la metamatemática han dejado abiertas preguntas que por su naturaleza y características invitan a ser analizadas por la filosofía.

Al respecto, deseamos aclarar que tales interrogantes no provienen de matemáticos que no se encuentren especialmente interesados en problemas de fundamentos y, por ende, el quehacer matemático cotidiano no se detiene si aún no han sido respondidas, como ha sido evidenciado en esta investigación. Es por ello que sostenemos la posición, según la cual, las relaciones que se pueden establecer entre la matemática y la filosofía no pueden ser de dependencia, ya sea que la filosofía dependa de la matemática o a la inversa. A veces, por las características peculiares que posee la matemática, algunos matemáticos, como matemáticos

[104]Savater, F. *El Valor de Educar*, Barcelona, Editorial Ariel S.A., p.14.

que son, son proclives a hacer filosofía. Esto es loable y respetable, pero se corre el riesgo de hacer, al decir de Torreti, una *filosofía matemática* de la matemática, pues usan herramientas y métodos de análisis propios de la matemática en la filosofía.[105]

Estamos de acuerdo con Kripke cuando afirmaba que "no hay sustituto matemático para la filosofía" [106]pero esto no justifica que algunas posiciones filosóficas no tomen en cuenta las características propias del quehacer matemático. La filosofía poseerá herramientas, recursos y métodos propios que aplicará al estudio de la matemática, pero la propia matemática seguirá desarrollándose con sus métodos y recursos que tenga a bien establecer. Abogamos por establecer unas relaciones de equidad entre la matemática y la filosofía y, en este trabajo, hemos privilegiado el quehacer matemático por sobre las consideraciones ontológicas y epistemológicas. Esto concuerda con algunas consideraciones de la filosofía de la práctica matemática, en los términos planteados por Paolo Mancosu.[107] Charles Sanders Peirce resume lo que hemos venido planteando de la siguiente manera:

> En el sexto libro de la República, Platón sostiene que el caracter esencial de la matemática consiste en la naturaleza y grado peculiares de su abstracción, que es mayor que la de la física, pero menor que la abstracción de lo que hoy llamamos filosofía; y Aristóteles sigue a su maestro en esta definición. Desde entonces ha sido costumbre de los metafísicos el enaltecer sus propios razonamientos y conclusiones como muchos más abstractos y científicos que los de los matemáticos. Y sin duda parece que los problemas acerca de Dios, la Libertad y la Inmortalidad

[105]Torreti lo plantea en estos términos: Movidos por la misma riqueza y audacia de sus invenciones, algunos matemáticos notables se ponen a reflexionar sobre la naturaleza y alcance de su actividad. Su reflexión es lo que se llama filosófica, y así la entienden; pero la conducen como matemáticos que son, aunando libertad y rigor, fantasía ubérrima y precisión pedante, en el estilo propio de su disciplina. Esta filosofía matemática de la matemática existe de dos maneras. Por una parte, hay una corriente más o menos unitaria de pensamiento que ejerce una enorme influencia sobre la investigación matemática y ha llegado a dominar la enseñanza universitaria. Esta corriente se autodenomina "clásica" pero la llamaré "conjuntista" porque coloca al centro de la matemática, en una forma u otra, la noción de conjunto y trabaja en fortalecerla. Torreti, R. *El paraíso de...*, cit., p.11.

[106]Citado por Haack, S. *Filosofía de las lógicas*, Madrid, Ediciones Cátedra S.A., 1991., p.21.

[107]Un panorama general de lo que tal filosofía propone y su estado actual se puede revisar en Mancosu, P. "Algunas observaciones sobre la filosofía de la práctica matemática" *Disputatio, Philosophical Research Bulletin*, 5:6, 2016, pp.131-156.

> son más elevados, por ejemplo, que la cuestión de cúantas horas, minutos y segundos pasarán, antes de que se encuentren dos correos que viajan en determinadas condiciones; de todos modos, no sé que se haya demostrado nunca esa mayor dignidad.[108]

En la cita podemos apreciar donde se ubica a las matemáticas: por encima de la física, pero por debajo de la filosofía. Esta clasificación, al parecer, ha condicionado los estudios clásicos en filosofía de la matemática, y la mayor generalización (que Peirce llama abstracción) es guía para la misma. Consideramos que este parámetro, por sí solo, no explica la complejidad de las posibles relaciones entre las matemáticas y la filosofía. El propio Peirce pone en duda la mayor abstracción de los razonamientos filosóficos por sobre los matemáticos. Esta es una cuestión polémica, que dejamos abierta a futuras investigaciones, pues no es nuestro objeto tomar partido en ella. La referimos pues es nuestra intención hacer explícito que *el quehacer matemático es el origen y sustento* de las consideraciones que hacemos respecto al axioma de elección, sin dejar de lado lo que la filosofía puede aportar. Peirce cierra su observación respecto a lo que venimos presentando de la siguiente manera:

> Pero la idea de que los métodos intelectuales de los metafísicos no son, como hechos históricos, muy inferiores en todos los aspectos a los de la matemática, no es más que vana fatuidad. Una curiosa consecuencia de esa noción que ha prevalecido durante gran parte de la historia de la filosofía y según la cual el razonamiento metafísico debe ser como el matemático, pero en más, ha sido que varios matemáticos se han creído, por el hecho de ser matemáticos, calificados para discutir de filosofía; y no hay peor metafísica que la suya.[109]

Es por ello que nuestro camino metodológico ha respetado el trabajo que los matemáticos han desempeñado y, a partir de allí, hemos ido avanzando, sin suponer una relación de subordinación, sino un camino que nos permita aprovechar lo mejor de cada área del saber: de las matemáticas, de la metamatemática y ahora de la filosofía. Esto concuerda con una filosofía de la práctica matemática, corriente contemporánea que ha cobrado auge en los últimos años. La estructuración de este capítulo comenzará presentando en profundidad un argumento a

[108]Peirce, C. "La esencia de la matemática" en Newman, J. (Ed.) *Sigma El mundo de las matemáticas*, Barcelona, 1976, vol. V, p.162.

[109]Ibidem.

favor del axioma de elección: el platonismo matemático. El mismo será eje central de nuestro análisis filosófico del axioma de elección. Luego presentaremos algunos argumentos en contra, los cuales, como veremos, no se contraponen diametralmente al desarrollo que hemos seguido. Finalmente, mostraremos algunas conclusiones y perspectivas de desarrollo del axioma de elección y del quehacer matemático en lo que va de siglo XXI.

1. Argumento a favor: Platonismo matemático

Si un interlocutor decide consultarle a un matemático contemporáneo, no interesado en problema de fundamentos, si acepta o no al axioma de elección, su respuesta (en la gran mayoría de los casos) posiblemente será afirmativa, arguyendo la gran cantidad de resultados importantes que dependen del axioma en variadas áreas (siendo posiblemente una de ellas la del matemático consultado). Este argumento a favor es, desde la perspectiva del matemático no interesado en problemas de fundamentos, de suficiente peso para zanjar cualquier polémica sobre el axioma. Y, en efecto, esto lo hemos considerado relevante para nuestra investigación, debido al camino metodológico seguido que privilegia el quehacer matemático.

Si a pesar de todo lo anterior, el interlocutor no se encuentra convencido, y rebate el argumento presentándole (por ejemplo) algunos resultados paradójicos derivados de la aceptación del axioma de elección (Paradoja de Banach-Tarski) o cuestiona su aceptación refiriendo que no encuentra creíble que se pueda indicar que exista una función de elección sin definir a la misma, el matemático posiblemente responda: "Está bien, pero usar el axioma de elección no conlleva contradicción alguna." Así, nuestro amigo matemático pasó de consideraciones matemáticas a metamatemáticas, pues como se sabe (Gödel dixit) si es consistente ZF también lo será ZFC (resultado mostrado en la presente investigación). Como bien Maddy expresa, este resultado metamatemático da un aliciente lo suficientemente fuerte a los que apoyan el axioma.[110] Cualquier objeción adicional no parecería superar la fuerza de este resultado en favor de su asunción.

[110]Maddy, P., *Naturalism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford.1997. p.64.

A estas alturas, recorrido el camino matemático y el metamatemático (legitimando ambos el uso del axioma, uno por sus aplicaciones y otro por su consistencia relativa) los cuestionamientos al axioma solo se pueden hacer desde el punto de vista estrictamente filosófico, a lo que nuestro amigo matemático, no interesado en problema de fundamentos, podría no tener necesidad de atender pues no es limitante para el desarrollo de su quehacer matemático (no estaría obligado a ello y así debe entenderse y aceptarse).

Ahora bien, el matemático que sí se encuentre interesado en problemas de fundamentos y el filósofo de las matemáticas pueden aún tener la necesidad de presentar argumentos a favor (o en contra) de la asunción del axioma de elección. Es este el camino que seguiremos en la siguiente sección, tomando en consideración lo que tanto matemática como metamatemáticamente se ha dicho.

2. La existencia de las entidades matemáticas

A lo largo del presente trabajo de investigación, se ha reiterado que la matemática y la metamatemática contemporánea poseen elementos que colinden con el platonismo matemático. Ahora bien, las características de dicha posición filosófica no han sido explicitadas, ni se han presentado las discusiones fundamentales que se han generado al respecto. En consecuencia, nos abocaremos a ello, mostrando algunas reflexiones relacionadas con el axioma de elección, aspecto central de nuestra investigación.

Tal y como lo planteara Mancosu (2016), la filosofía clásica de la matemática se desarrolló y consolidó alrededor de los programas de fundamentación. A juicio del autor, dos artículos de Paul Benacerraf marcaron la dirección de los estudios en filosofía de la matemática en los últimos cincuenta años. Tratar de explicar cómo, si existen objetos abstractos, tenemos acceso a ellos ha sido desde la perspectiva de Mancosu, lo principal de las discusiones filosóficas contemporáneas.[111] Es decir, tanto la pregunta ontológica (la existencia de tales objetos) como la gnoseológica (el acceso a su conocimiento) se privilegian.

[111]Mancosu, P. *Algunas observaciones sobre...*, cit., p.131.

Lo anterior es entendible, pues al pensamiento filosófico le ha interesado sobremanera la particularidad de los objetos con los que trabaja el matemático. A diferencia de los objetos con los que trabajan las ciencias naturales, los cuales se encuentran en la realidad física, los del matemático no se manifiestan en la realidad accesible a los sentidos sino que, en principio, se encuentran en el dominio del pensamiento del matemático.[112] En consecuencia, es natural para la filosofía preguntarse por la existencia de tales entes, y, con mayor razón, cuando ellos no pueden identificarse como abstracción de lo que se observa en la realidad física (por ejemplo, los conjuntos infinitos). ¿Cómo el matemático sabe que tales objetos existen realmente? Si no existen en la realidad física, ¿dónde existen? Y, en caso de que el matemático afirme que sus objetos no poseen relación con la realidad física, entonces ¿con qué la tienen? ¿el matemático puede postular objetos a su arbitrio? ¿o hay criterios racionales que guíen su postulación? Estos cuestionamientos asoman la discusión que Ferreirós apuntase entre lo dado y lo construido en matemáticas[113], lo que enmarca al platonismo como posición filosófica.

Ahora bien, tal y como se ha presentado en el párrafo anterior, la noción de *existencia* cobra especial relevancia. Así, desde la filosofía se pide alguna justificación racional para aceptar la existencia de las entidades matemáticas. En particular de aquellas cuya existencia no puede justificarse apelando a la realidad física o a nociones constructivas. Es importante destacar que el quehacer matemático cotidiano durante todo el siglo XIX fue constructivo. Pero, como Ferreirós advierte, el desarrollo y consolidación de una *matemática abstracta* bajo un *enfoque conjuntista* ya iba apareciendo a finales del siglo XIX, con matemáticos eminentes como Riemann, Dedekind, Noether, Klein, etc, los cuales se encontraban agrupados en su mayoría en la Universidad de Götinga. Esta perspectiva abstracta Ferreirós la explica de la siguiente manera

> Desde Euclides, la matemática habia tenido que ver con construcciones realizables explícitamente, ya fueran construcciones geométricas o analíticas. Con la nueva

[112]Y decimos en principio pues, dependiendo del compromiso platonista que se asuma, se puede pasar de la existencia de los objetos matemáticos en el pensamiento a su existencia en una realidad trascendental, tan real como la espacio-temporal o superior.

[113]Ferreirós, J. *Matemáticas y ...*, cit., p.447.

> tendencia se trata, como ya vimos, de la preferencia por los conceptos en lugar de las notaciones, las formas de representación o las construcciones.[114]

Fueron algunos matemáticos de la época, quienes, para poder desarrollar sus investigaciones, se impusieron la necesidad de postular entidades para las cuales no se tiene un procedimiento efectivo de construcción. Ferreirós muestra algunos ejemplos de cómo Dedekind, Riemann y otros desarrollaron este enfoque.[115] Así, el platonismo matemático forma parte de un hacer que iba surgiendo a finales del siglo XIX e inicios del XX, definido como enfoque abstracto o conjuntista por Ferreirós.

En el caso que nos atañe, el autor refiere como la teoría de conjuntos representa la maxima expresión del enfoque abstracto que ya se venía desarrollando, y muestra al axioma de elección como ejemplo paradigmático de este enfoque. Veámoslo

> La tensión entre un planteamiento de definición o construcción explícita y uno de análisis abstracto explica las dificultades que encontró el enfoque conjuntista en su implantación progresiva. Ya la noción de función propuesta por Dirichlet y Riemann avanzaba claramente en la dirección abstracta, pero puede decirse que la teoría de conjuntos se convirtió en epítome del planteamiento abstracto. El ejemplo más característico de ello es el axioma de elección introducido por Zermelo [1904], que, dada una familia infinita cualquiera de conjuntos, postula la mera existencia de cierto tipo de conjunto. El axioma se usa de modo esencial precisamente cuando no hay ningún medio de especificar o definir explícitamente este tipo de conjuntos de elección.[116]

Así, las observaciones de Ferreirós nos permiten poner en contexto el surgimiento del platonismo matemático -sin ese nombre aún- entre finales del siglo XIX y principios del XX, representando fundamentalmente una *nueva manera de hacer matemática*. Destacamos esto último porque, aunque la noción de existencia (ontológica) es vital en el platonismo entendida como filosofía, no lo es entendida como quehacer matemático. Su aparición no se debió a consideraciones ontológicas sino metodológicas: se postulan tales entidades pues son

---

[114]Ferreirós, J. *El enfoque conjuntista...*, cit., p.10.

[115]Ibidem.

[116]Ferreirós, J. *El enfoque conjuntista...*, cit., p.11.

necesarias para la investigación matemática. Y la necesidad se deriva del cada vez mayor nivel de abstracción que las teorías matemáticas iban teniendo. Es a partir de la tercera década del siglo XX cuando de manera explícita se le da un nombre a este nuevo quehacer matemático, siendo caracterizado en una conferencia por Paul Bernays. Como esta conferencia fue la primera en la que se inicia la discusión sobre el platonismo matemático, reviste especial consideración su análisis, pues la mayoría de las consideraciones filosóficas posteriores toman como base lo planteado en ella por el autor.

3. Bernays y el término platonismo

Paul Bernays (1888-1977) fue un matemático y filósofo suizo que dedicó gran parte de su vida a la investigación en torno a los fundamentos de la matemática. Junto con David Hilbert, desarrolló el programa formalista, ensanchando las bases de la teoría hilbertiana de la demostración. El 18 de junio de 1934 dicta una conferencia en la Universidad de Ginebra, en el marco del Ciclo de conferencias internacionales de Ciencias matemáticas que se desarrollaban en aquella oportunidad. Es allí, donde se permite utilizar el término *platonismo* para caracterizar "ciertos modos de razonar peculiares al análisis y a la teoría de conjuntos" mediante los cuales

> los objetos de una teoría se tratan como elementos de una totalidad tal que permite razonar como sigue: Para cada propiedad expresable usando las nociones de la teoría, es un hecho objetivamente determinado si hay o no un elemento de la totalidad que posea tal propiedad. Asimismo, se sigue de este punto de vista que o bien todos los elementos de un conjunto poseen una determinada propiedad, o bien hay al menos un elemento que no la posee.[117]

La cita anterior alude a lo que es central del platonismo matemático: se consideran a los objetos matemáticos libres de cualquier vinculación con las reflexiones del sujeto cognoscente. Bernays indica que "Dado que esta tendencia se basó especialmente en la filosofia de Platón, me permito llamarla platonismo." [118]Desde entonces, el uso -y abuso- del término se ha extendido a lo largo de la reflexión sobre el modo usual de hacer matemática de los matemáticos,

[117]Bernays, P. *El platonismo en...*, cit., p.16.

[118]Ibidem.

especialmente en la contemporaneidad.

La definición dada por Bernays a nuestro entender ha sido, especialmente debido a no considerar el contexto matemático en el que surge, llevada a extremismos: ya sea asumiendo la existencia de la totalidad de las entidades matemáticas en algún mundo (tan real como el nuestro) o desechándola de plano, abogando por una construcción efectiva de los objetos matemáticos. Como deseamos mostrar, y el propio Bernays así lo hace, lo adecuado es considerar grados o niveles de platonismo, los cuales serían reflejo de los compromisos que asume el matemático para desarrollar su hacer.

Bernays clasifica al platonismo en dos tipos: platonismo absoluto y platonismo moderado. El platonismo absoluto asume la totalidad de las entidades matemáticas y los conceptos generales de conjunto y función, totalidad para la que se cumple el principio del tercero excluído, esto es que, aún en el caso de no poder demostrarse, se tiene la convicción de que ciertos elementos de la totalidad cumplen o no una propiedad determinada. Bajo esta mirada, los métodos de demostración utilizados son no-constructivistas. De no alcanzar a decidirse la proposición objeto de estudio, se promueve la introducción de nuevas asunciones que permitan decidir la veracidad o falsedad de la proposición en cuestión. El utilizar asunciones no-constructivistas no supone dificultad alguna, y en nuestro caso, el axioma de elección sería aceptable de manera natural para un platonista absoluto.

El platonismo moderado o metodológico mantiene las características señaladas en el párrafo anterior acerca del platonismo absoluto, pero, a diferencia de éste, evita el principio de comprensión intuitiva, es decir, que para toda propiedad exista el conjunto que cumpla con la propiedad en cuestión. El quehacer matemático contemporáneo se adscribe a un platonismo moderado y, en este sentido, Zermelo es considerado un platonista moderado mientras que Gregor Cantor es un platonista absoluto. Bernays presenta su clasificación como consecuencia de los ámbitos de acción o dominio de objetos que el matemático considere necesario para trabajar. Esto es importante resaltarlo porque concuerda con lo central de nuestro tratamiento del platonismo: el quehacer cotidiano del matemático y lo que necesite para desarrollar su teoría determinará el grado o nivel de compromiso platónico a asumir.

El autor indica que "la más débil de las asunciones platonistas" es aceptar la totalidad de los números enteros. Siendo esto así, se tiene que, si P es un predicado de enteros, entonces o bien P es verdadero para cada número o hay al menos una excepción. ¿Por qué Bernays considera a la totalidad de los enteros como una asunción platonista débil? Es platonista pues se acepta el infinito actual de todos los enteros. Y débil debe entenderse como lo mínimo que un matemático, interesado o no en problemas de fundamentos, necesitaría para trabajar. Y esto es entendible pues la noción de número durante mucho tiempo se consideró la base fundamental del quehacer matemático. Para un matemático no interesado en problema de fundamentos los números enteros se aceptan como dados en su totalidad sin problema alguno. Por ende, tal matemático es platonista en sentido débil si no acepta otras entidades aparte de los enteros.

Más adelante, Bernays indica que el análisis no se limita a la totalidad de los enteros sino que maneja dos nociones que asume como dadas de manera abstracta, es decir, sin atender a sus posibilidades efectivas de definición. Tales nociones son *conjunto* y *función*. La utilización de funciones y conjuntos arbitrarios los define con la palabra *cuasi-combinatorio*, queriendo decir al respecto que se puede, por analogía con lo finito, asumir subconjuntos arbitrarios para el caso infinito. Inmediatamente el autor coloca como ejemplo de esto al axioma de elección. Al respecto dice:

> El axioma de elección es una aplicación inmediata de los conceptos cuasi-combinatorios en cuestión. Se emplea generalmente en la teoría de los números reales en la siguiente forma particular. Si $M_1, M_2 ...$ es una secuencia de conjuntos no-vacíos de reales, hay entonces una sucesión $a_1, a_2, ...$ tal que para cada índice n, a_n es un elemento de M_n. El principio resulta expuesto a objeciones al exigirse la construcción efectiva de la sucesión de números.[119]

Ferreirós, tomando como referencia lo planteado por Bernays, refiere que "el polémico Axioma de Elección puede verse, simplemente, como una consecuencia natural de emplear

[119] Bernays, P. *El platonismo en...*, cit., p.19.

las nociones de infinito actual y de conjunto (arbitrario o cuasi-combinatorio).” [120]En consecuencia, tanto desde la perspectiva de Bernays como la de Ferreirós, el axioma es una asunción platonista que usa las nociones de conjunto y función en sentido abstracto. Interesante es acotar que Bernays coloca al axioma de elección en el ámbito de la teoría de los números reales. Más allá, coloca a las concepciones platonistas de Cantor. Esto nos permite llamar la atención sobre el dominio o campo de acción que el autor se permite resaltar dentro de su clasificación platonista. Se observan tres campos de acción o dominio de objetos para el matemático: los números enteros, los números reales y la teoría de conjuntos.

Al respecto consideramos importante indicar que Bernays coloca al platonismo dentro de una consecución creciente de ámbitos de acción del dominio matemático, la cual da el nombre de teoría de números, teoría aritmética de funciones y teoría geométrica del continuo. La primera de ellas (teoría de números) no asume la totalidad de los enteros, la segunda de ellas asume la totalidad de los enteros pero evita el uso de conceptos cuasi-combinatorios y la tercera se corresponde con el platonismo ordinario, adecuado para la teoría geométrica del continuo.

Michael Dummett, reflexionando sobre el platonismo, sigue una linea similar de razonamiento cuando afirma que “la existencia de las estructuras estudiadas en la teoría de los números, en el análisis y en la de los conjuntos, juega un importante papel en las pruebas de todas las ramas de las matemáticas. Estas tres teorías son básicas en el sentido de que son el origen de nuestra aceptación de las totalidades de cardinalidad creciente.” [121]Apreciemos la similitud entre esto último y lo planteado por Bernays. Dummett agrega lo siguiente

> el sistema de los números naturales es el origen de nuestro concepto de número infinito. De manera similar, el continuo de los números reales representa el origen de la noción de una infinidad no numerable y la teoría de conjuntos un origen más reciente de nuestra noción de infinitos superiores.[122]

---

[120]Ferreirós, J. *Matemáticas y...*, cit., p.11.

[121]Dummet, M. “El platonismo” en Dummet, M. *La verdad y otros enigmas*, México, Fondo de Cultura Económica, 1990, p.286.

[122]Ibidem.

Queremos llamar la atención al hecho de que Bernays coloca al axioma de elección en el ámbito de los números reales. Esto podría deberse a la influencia del teorema del Buen orden. En aquella época la discusión sobre el continuo se encontraba en boga. Y, tal y como el teorema lo plantea, se puede bien ordenar a los reales siempre y cuando se acepte al axioma. Al parecer, Bernays consideraba privilegiada la relación entre el axioma de elección y el conjunto de los números reales. Como hemos mostrado a lo largo de esta investigación, el axioma no limita su ámbito de acción a los números reales sino que va mas álla, considerándose como necesaria para toda investigación en matemáticas. Bernays resume las consideraciones que hemos estado haciendo de la siguiente manera

> Podríamos decir, un tanto toscamente, que el intuicionismo se ajusta a la teoría de números; el método semiplatonista, que hace uso de la idea de la totalidad de los enteros pero evita conceptos cuasi-combinatorios, se ajusta a la teoría aritmética de funciones, y el platonismo ordinario es adecuado para la teoría geométrica del continuo.**Nada hay de sorprendente en esta situación pues es un procedimiento familiar al matemático contemporáneo limitarse en cada dominio de la ciencia a aquellas asunciones que son esenciales.**[123]

Resaltamos la última expresión pues concuerda con las reflexiones que hemos venido haciendo respecto a cómo el platonismo va surgiendo en la escena matemática moderna, para sustentar las teorías matemáticas que se tenga a bien desarrollar. En este sentido, el platonismo aquí tratado se corresponde con el platonismo interno de Ferreirós. Pero se puede ir mas allá, y Bernays lo cree posible pues afirma que

> Hemos caracterizado solo un platonismo restringido que no pretende ser mas que, por así decirlo, una proyección ideal de un dominio de pensamiento. Pero ahí no queda el asunto. Varios filósofos y matemáticos interpretan los métodos del platonismo en el sentido del realismo conceptual, postulando la existencia de un mundo de objetos ideales que incluye todos los objetos y relaciones de la matemática.[124]

[123]Bernays, P. *El platonismo en...*, cit., p.25.

[124]Ibid., p.20.

En la cita anterior podemos ver un platonismo en el que las entidades existen en el dominio del pensamiento y otro en el que las entidades existen con independencia de su concepción por parte del matemático. La caracterización que hace Bernays en este caso se centra en la noción de existencia, lo que es usual en las presentaciones tradicionales que se hacen del platonismo. Observamos que existe una fuerte asociación platonismo-matemática, la cual se ha consolidado durante el siglo XX y se mantiene vigente en lo que va de siglo XXI, junto con el desarrollo exponencial del conocimiento matemático en todas sus áreas; aspectos que han justificado nuestro interés en ahondar sobre las posibles relaciones, alcances y limitaciones de tal asociación.

Por supuesto, la presente investigación limita sus consideraciones al axioma de elección y no al platonismo en sí, pero no dejamos de reiterar que el axioma es consecuencia natural del modo en el que se iba entendiendo la actividad matemática a principios del siglo XX, la cual es *abstracta, bajo un enfoque conjuntista y platonista*. Podemos ver entonces que el platonismo Bernays lo entendía relacionado con el ámbito del trabajo matemático, considerando niveles de platonismo cuya fuente emanaba de los dominios de objetos que el matemático usaba en sus investigaciones. Ferreirós también establece, a nuestro juicio, observaciones similares que referimos a continuación.

4. Ferreirós: Platonismo interno y platonismo externo

Es importante que aclaremos que la matemática cotidiana, aquella no interesada en problemas de fundamentos, desarrolla su actividad sin especial interés en los posibles problemas que pueda suponer asumir la existencia de conjuntos para los cuales no se especifique una regla de formación. En consecuencia, el platonismo matemático que consideramos, se encuentra presente en el quehacer matemático cotidiano, pero no parece ser lo que el matemático reflexiona de manera consciente cuando hace matemática. En efecto, el matemático cotidiano no considera que, efectivamente, las entidades que postula posean una *existencia real* sino que poseen una *existencia ideal*, esto es, existen en el dominio del pensamiento del matemático. Esto es lo que impele a Ferreirós a clasificar al platonismo en dos categorías: platonismo interno (o matemático) y platonismo externo (o filosófico).

Para Ferreirós, el platonismo interno es aquel en el que "se hace referencia a elementos cuya existencia se postula y se considera dada." [125]Desde esta perspectiva, al matemático le es indiferente dónde existan tales entidades, sin representar problema alguno el hecho de no poder construirlas. Un platonismo interno acepta que las entidades matemáticas existan en el pensamiento del matemático. Aquí, la existencia es entendida como la posibilidad de ser *concebido*. Y esto es entendible en ese contexto, pues lo que le interesa al matemático es utilizar lo que considere necesario para desarrollar con mayor fuerza su teoría. Siempre que pueda concebir en su pensamiento a tales entidades son bienvenidas.

En el caso del platonismo externo o filosófico, las entidades matemáticas poseen una existencia *real*, independiente de su postulación por parte del matemático. Ferreirós advierte que el platonismo filosófico ha desarrollado varios enfoques (por ejemplo, el platonismo de Gödel, el de Quine o el de Maddy) los cuales no serán detallados en el presente trabajo por no formar parte de los objetivos de la investigación.[126] La realidad a la que hacemos referencia no se corresponde a la realidad física sino a otra realidad, no perceptible por los sentidos. Ferreirós al respecto dice que "el platonismo filosófico postula una bifurcación de la realidad: existe una realidad física perceptible por los sentidos, y una realidad matemática perceptible a la intuición, a un supuesto ojo de la mente." [127]

Las características de tal facultad intuitiva que nos permite acceder a las entidades de esa *realidad matemática* ha sido objeto de hartas y complejas discusiones, y se corresponden con los caminos seguidos por la filosofía clásica de la matemática, tal y como muestra Mancosu

[125]Ferreirós, J. *Matemáticas y...*, cit., p.2.

[126]Dos intentos destacados de fundamentación del platonismo en matemáticas (incluyendo al axioma de elección) son el programa metamatemático de Hilbert y el argumento de indispensabilidad Quine-Putnam. **Ambos han resultado insuficientes**, pero su análisis detallado escapa a lo central en este trabajo, como lo es la pertinencia del axioma de elección para la matemática y metamatemática contemporánea. El denominado platonismo *sofisticado* de Gödel es hoy una alternativa importante, cuyo estudio se deja para posteriores investigaciones. Un panorama actual se puede revisar en: Horstein, L. *Philosophy of Mathematics*, Enciclopedia de Filosofía de la Universidad de Stanford, 2017.

[127]Ibid., p.12.

(2016). Al respecto, nuestro acercamiento al platonismo se ha generado a través de la práctica matemática, restringiendo nuestro análisis al axioma de elección. Así, la existencia *real* del conjunto que postula el axioma no se considera necesaria para la actividad matemática cotidiana; bien puede aceptarse una existencia *ideal* del conjunto.

Esta dualidad de la realidad fue ya establecida por Gregor Cantor, el padre de la teoría de conjuntos, quien, en respuesta a sus críticos, indicó que el matemático

> atiende única y exclusivamente a la *realidad inmanente* de sus conceptos, es decir, a su aceptabilidad en el dominio del pensamiento puro; se despreocupa completamente de la *realidad trasiente* de los objetos matemáticos, es decir, de su existencia real o su capacidad de representar relaciones o procesos del mundo externo [Cantor 1883, 181].

Cantor nos habla de dos tipos de realidad: la inmanente que correspondería al matemático en activo, teniendo como campo de validación el pensamiento (existe lo que es concebible por la razón humana) y la trascendente (existe independientemente de ser concebido por la razón humana). La relación entre la realidad inmanente y el platonismo interno, así como la realidad trasiente y el platonismo externo es evidente. Cantor tenía la convicción de que las entidades matemáticas poseían no solo una realidad inmanente sino una realidad trasiente, por lo que es posible encontrar matemáticos que se adscriban al platonismo externo o filosófico.[128]Pero la matemática que se desarrolla cotidianamente se hace aceptando un platonismo interno y es la que se ha desarrollado en el quehacer matemático contemporáneo.

Por lo tanto, lo que guía al platonista interno (o platonista matemático) es suponer que la existencia de lo que postule no conlleve alguna contradicción. Queremos llamar la atención al hecho de que, al Ferreirós llamar a este platonismo como interno es porque toma como referencia la actividad cotidiana del matemático. Así, el interés del matemático reside fundamentalmente en conocer las relaciones posibles entre los objetos que postula y si esta

[128]Este platonismo externo se corresponde a lo que en el sentido de Bernays se llamaría platonismo absoluto. Es importante observar que las famosas antinomias o paradojas de la llamada teoría ingenua cantoriana no eran vistas por Cantor como tales, puesto que las inconsistencias eran producto de la limitada capacidad de la razón humana para aprehenderlas.

postulación es fructífera para el desarrollo de su teoría.

Así, nuestro platonismo acepta la clasificación hecha por Ferreirós y advierte como en Bernays y Cantor la misma clasificación se encuentra presente. Además, es consecuencia de los compromisos que el matemático está dispuesto a aceptar para el desarrollo de sus teorías y, para el caso del axioma de elección, el matemático cotidiano lo acepta como existente idealmente, siempre que no conlleve contradicción. Es decir, un platonismo interno, el cual consideramos legítimo, en atención al desarrollo del quehacer matemático.

Al respecto, es oportuno reflexionar sobre las razones que Gregor Cantor esgrimiera para justificar la actividad del matemático. Cantor consideraba que la introducción de nuevos conceptos en la actividad matemática se guíaba por tres elementos

(1) Los conceptos elaborados por los matemáticos deben "estar libres de contradicciones internas."
(2) Los nuevos conceptos deben estar relacionados con los antiguos conceptos matemáticos, y si es posible dar cuenta de ellos.
(3) El concepto debe impulsar la ciencia hacia un nuevo nivel, haciéndolo enriquecedor para la teoría.[129]

Cantor, un platonista absoluto, no deja al libre arbitrio la introducción de nuevas entidades en la matemática. La teoría que el matemático ha desarrollado y su utilidad para la misma son prioritarias también. No deja de lado lo que el matemático ha desarrollado o deseé desarrollar. Esto es evidencia de una posición pragmática, y como veremos luego, Zermelo también actuó en dichos términos. Se puede resumir lo anterior en las siguientes palabras de Mosterín: "mientras uno no se contradiga y mientras lo que uno haga sirva para algo, todo está permitido en la matemática." [130]

Si analizamos el axioma de elección bajo las tres condiciones cantorianas verificaremos que se cumplen en su totalidad. Como probamos en el capítulo anterior, el axioma de elección

[129]Mosterín, J., *Los lógicos*, Madrid, Editorial España Calpe, 2000, p.116.

[130]Ibídem.

está libre de contradicciones[131], aunque es importante referir que cuando Cantor lo plantease no existía la prueba de Gödel de su consistencia relativa. Su afirmación se centraba en pedir que el concepto no produjera alguna antinomia o paradoja. En este sentido, el axioma no parece producirlo. Además, el axioma de elección se relaciona con otros conceptos antiguos tanto de la teoría de conjuntos como de otras ramas de la matemática, tal y como mostrasemos en el primer capítulo. Finalmente, el axioma es fundamental para enriquecer a la teoría matemática, también mostrado en este trabajo. En consecuencia, el axioma de elección es fácilmente aceptado en los términos que plantease Cantor.

5. Argumento en contra: Intuicionismo matemático

Las principales objeciones contra la aceptación del axioma de elección provienen de dos fuentes: el intuicionismo matemático y la explicación de la facultad intuitiva que permite "percibir" a las entidades abstractas. En el caso del intuicionismo, tenemos una posición dentro de las matemáticas según la cual

> El matemático intuicionista propone el quehacer matemático como una función natural de su intelecto, una actividad libre y vital del pensamiento. La matemática es para él una producción de la mente humana(...) La actitud activa del intuicionista lo impulsa a emprender de una vez la construcción de la matemática. El pilar fundamental de esta construcción es el concepto de unidad, principio arquitectónico del cual depende la serie de los enteros.[132]

Por lo tanto, como producción de la mente humana, cualquier objeto matemático que no pueda ser construido de manera efectiva no existe para el matemático intuicionista. El axioma de elección es entonces inadmisible desde esta perspectiva. En efecto, como no se ha podido definir explícitamente la función de elección, no se puede construir al conjunto en cuestión. Ergo, no existe. Arend Heyting lo deja establecido en los siguientes términos

> los intuicionistas no atribuimos una existencia independiente de nuestro pensamiento, esto es, una existencia trascendental, ni a los enteros ni a ningún otro objeto matemático.[133]

---

[131] Si ZF es consistente.

[132] Heyting, A., "Los fundamentos intuicionistas de la matemática" en *Erkentniss*, 1931, p.91.

[133] Ibídem.

Ateniéndonos a la cita anterior, podría suponerse, y así se ha hecho tradición, que la posición intuicionista se contrapone diametralmente a la platonista. La presentación que hemos hecho en la presente investigación no considera tal división como determinante, sobre todo privilegiando, como lo hemos hecho, el quehacer matemático cotidiano. Bajo esta mirada, el matemático contemporáneo, si puede construir los objetos que considere necesarios para el desarrollo de su actividad así lo hace, pero si no puede construirlos y se ve impelido a postularlos no tendrá dificultad alguna en hacerlo.

En este mismo orden de ideas, Heyting agrega que "aunque pudiera ser cierto que todo pensamiento se refiere a algún objeto cuya existencia se concibe como independiente, este es un problema que sigue estando abierto. En todo caso, dicho objeto no necesita ser completamente independiente del pensamiento humano." .[134] Obsérvese como Heyting no niega la posibilidad de concebir a una entidad matemática como independiente de la construcción mental. Esta posibilidad de existir, en la medida de ser concebido por la razón humana, que Heyting deja como problema por atender, se corresponde con el platonismo interno. Lo que el autor resalta es que no es necesario que sea visto como independiente del matemático, bien pudiese ser construido. Lo fuerte de su posición es que, a su juicio, lo *único* que existe en matemáticas es lo que puede ser construido. Y remata: "la garantía de su existencia es que pueden ser determinados por el pensamiento." [135]

Siguiendo esta linea de razonamiento, no se puede garantizar la existencia del conjunto de elección, ya que no ha podido ser construido efectivamente. Por lo tanto, no existe el conjunto que postula el axioma y debe ser desechado. Recordemos que la actividad matemática cotidiana durante todo el siglo XIX era constructiva y, en consecuencia, eminentes matemáticos, sin adscribirse al intuicionismo, que surgió posteriormente, rechazaron el axioma. El primero de ellos fue Giusseppe Peano, matemático italiano, quien en 1890

[134] Ibídem.

[135] Ibídem.

consideró inadmisible el axioma.[136]

En 1902, Beppo Levi dejo la cuestión por resolver, indicando que quedaba por realizar su demostración y agregando que si se tienen conjuntos bien ordenados entonces existe el conjunto que postula el axioma.[137] Tanto Peano como Levi, actuaron acorde con el modo mayoritario de hacer matemática de la época, el cual era constructivo, y en consecuencia no le dieron el estatus de axioma, intentando derivarlo a través de una construcción efectiva. Al no poder hacerlo, era natural que lo desestimaran. Hasta aquí hemos caracterizado al intuicionismo matemático, la primera de las posiciones desde la que se rebate al axioma de elección y a todo objeto matemático postulado de manera abstracta. Pero hacemos la salvedad que el intuicionismo, como posición filosófica, fue establecida mucho despúes de la aparición del axioma de elección de manera explícita en 1904. Las críticas inmediatas que surgieron a la postulación del axioma por parte de Zermelo, se dieron dentro de la comunidad matemática de aquel entonces quienes, en su mayoría, tenian la impronta de la matemática constructiva y consideraban que el axioma atentaba contra el proceder matemático que creían correcto.

Es difícil responder, dentro del intuicionismo matemático, a las objeciones presentadas contra el axioma. Si aceptamos que las únicas entidades matemáticas que existen son aquellas que pueden ser definidas explícitamente a través de alguna ley que guíe su construcción, entonces no hay más remedio que prescindir del axioma de elección. ¿Qué hacer entonces? Lo que hemos venido desarrollando hasta ahora nos permite responder que estamos en desacuerdo en considerar como las únicas entidades existentes a las construibles (efectivamente), aceptamos también aquellas que puedan ser postuladas sin riesgo de contradicción, como verificamos que sucede con el axioma de elección (gracias a la prueba de consistencia relativa de Gödel) y justificando su existencia, al menos ideal, dentro del platonismo interno de Ferreirós. Esta posición además la creemos acorde con lo planteado por Bernays, para quien el intuicionismo no se contrapone al platonismo, en efecto

[136] "But as one cannot apply infinitely many times an arbitrary rule by which one assigns to a class A an individual of this class, a determinate rule is stated here." Moore, G. Zermelo's axiom of..., cit., p.5.

[137] Obsérvese aquí la relación entre el Teorema del Buen orden y el axioma de elección que Zermelo probara años después (Son proposiciones equivalentes, como probáramos en el primer capítulo).

> Esta realización nos lleva a dudar que el intuicionismo sea el único método legítimo del razonamiento matemático. Incluso si admitimos que la tendencia a alejarse del sujeto cognoscente ha sido llevada muy lejos bajo el reino del platonismo, no por ello creemos que la verdad se encuentre en el lado opuesto. Teniendo ambas posibilidades en mientes, deberíamos tratar de encontrar en cada rama de la ciencia una adaptación del método al objeto investigado.[138]

La última oración de la cita refleja lo que hemos venido sosteniendo: el matemático, de acuerdo a lo que tenga a bien investigar, utilizará lo que le sea necesario. Si el dominio de objetos de su teoría puede manejarse de manera constructiva, pues así lo trabajará; pero si tiene la imperiosa necesidad de asumir otras entidades matemáticas que no puede construir, la única limitante que podría tener para su asunción es que no conlleve contradicción. Bernays, a nuestro juicio y las consideraciones que hemos presentado, hace un certero balance y privilegia el quehacer matemático dentro de la reflexión filosófica.

6. Cinco cartas sobre teoría de conjuntos

El intuicionismo matemático como posición filosófica consolidada surgió años después de la aparición del axioma de elección en 1904. Ahora bien, para presentar los argumentos en contra de la asunción del axioma de elección, también consideramos importante las discusiones que al respecto sostuvieran los matemáticos franceses Emilé Borel, René Baire y Henri Lebesgue con el también matemático Jaques Hadamard, a través de correspondencia que sostuvieran entre sí, y que fueran publicadas en los *Mathematische Annalen* con la anuencia de los involucrados. La razón de presentar esta discusión aquí es que nos permitirá evidenciar como el axioma de elección se convirtió en centro de debate entre el modo de hacer matemática mayoritario en aquel momento, es decir el constructivo, y el nuevo hacer matemático que iba surgiendo -el enfoque abstracto o platonista-. Siendo el axioma de elección ejemplo de esta nueva forma, es de entenderse la polémica generada entre la mayoría de los matemáticos de la época.

David Hilbert, junto con la redacción de los Mathematische Annalen, le pide a Emile Borel algunas reflexiones respecto a la prueba que diera Zermelo del Teorema del Buen Orden

[138]Bernays, P. *El platonismo en...*, cit., p. 32.

y su uso en ella del axioma de elección. Borel así lo hace y se publica en forma de artículo ese mismo año (1904). Este artículo de Borel se convierte en la primera consideración crítica al axioma de elección.

En 1905 Hadamard publica en los *Annalen* cinco cartas, las cuales comienzan con la respuesta de Hadamard al artículo de Borel (1ra carta), sigue con la respuesta de Baire a Hadamard (2da carta), ya que Borel le envió a Baire la primera carta y le pide opinión. Posteriormente Lebesgue responde a Borel, a petición de este último para que interviniese en el debate sobre el tema (3era carta); en la 4ta carta Hadamard responde a Borel, luego de que éste último le enviase a Hadamard las cartas previas. Y finalmente Borel le responde a Hadamard (5ta carta), tomando en consideración todas las cartas anteriores. En todas ellas se dan interesantes apreciaciones respecto al axioma de elección que nos prestamos a analizar a continuación. La importancia que estas cartas revisten para la presente investigación estriba en que muestran al quehacer matemático en acción.

El artículo de Borel posee fecha de 1 de diciembre de 1904 y muestra sus consideraciones a la demostración del teorema del Buen Orden presentada por Zermelo considerando un conjunto M cualquiera y planteando dos problemas, a saber:

(A) Dar a M la forma de un conjunto bien ordenado.

(B) Dado un subconjunto M' cualquiera de M, escoger en M' de manera determinada (pero por otra parte arbitraria) un elemento m', al cual se le dará el nombre de elemento distinguido de M', esta elección se deberá hacer para todos los subconjuntos M' de M.

Dados estos dos problemas dice:

> Es evidente que toda solución del problema A proporciona una solución particular del problema B, pero el recíproco no es evidente y debemos al Sr. Zermelo el saber que los problemas A y B son equivalentes. Pero este resultado, cualquiera que sea su interés, no debe ser considerado como una solución general del problema A.[139]

[139]Borel, E. "Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles" en *Mathematische Annalen*,1904, 59: pp.514-516.

Así, a juicio de Borel, no le parece evidente que asumir como cierto el axioma de elección implique que todo conjunto pueda bien ordenarse. El autor considera que, si fuese posible dar un medio para determinar el elemento distinguido de cada subconjunto, el problema B quedaría resuelto. Ahora bien, lo que dificulta esto es la cardinalidad del conjunto M, ya que, si es finito o infinito numerable, bien se puede dar explícitamente la función de elección (lo que permitiría elegir al elemento distinguido, al decir de Borel) pero si es infinito no numerable no parece ser posible (el propio Borel ejemplifica esta dificultad equiparando a M con el continuo).

Más adelante, Borel refiere que el razonamiento de Zermelo es similar al siguiente: "Para bien ordenar al conjunto M es suficiente escoger arbitrariamente un elemento al cual se le dará el rango 1, después otro al cual se le dará el rango 2, y así sucesiva y transfinitamente [...]" Y remata sentenciando: "Ningún matemático verá como aceptable este razonamiento" [140] El autor indica que las objeciones que viene haciendo valen para todo razonamiento que requiera una elección arbitraria una cantidad infinita no numerable de veces, pues tales razonamientos están fuera del dominio de las matemáticas.

Para las consideraciones de este capítulo vale la pena preguntarnos: ¿A qué se refiere Borel con que tal razonamiento se encuentre "fuera del dominio de las matemáticas"? Aunque en su escrito no lo especifique, tenemos fuertes razones para suponer que Borel se refiere al tratamiento que las matemáticas de su época dan al infinito. En efecto, sostenemos que Borel coloca como parte del "dominio matemático" al infinito en potencia y no al infinito en acto, que es lo que parece desprenderse de la elección arbitraria no numerable.

En consecuencia, para Borel, el ámbito de las elecciones debe restringirse a lo finito o lo infinito numerable (aunque esto último lo dejo Borel como problema a atender, es decir, verificar si es posible hacer una elección arbitraria una cantidad numerable de veces). Podemos observar que, nuevamente, el axioma de elección conlleva al matemático a reflexionar sobre los dominios de entidades que necesita para trabajar, tal y como explicásemos en la sección referida al platonismo matemático. Como se puede apreciar, la arbitrariedad con la

[140] Borel, E. Quelques remarques sur..., cit., p. 516.

que se realiza la elección, sin hacer explícito un medio de determinación, es lo que impele a Borel a rechazar al axioma. Vemos entonces como la primera crítica contra el axioma se corresponde con el modo de hacer constructivo que imperaba en ese momento.

Hadamard responde (1ra carta) a las observaciones de Borel e indica que, en primer lugar, no considera que haya una diferencia sustancial entre una cantidad no numerable de elecciones y una cantidad numerable, debido a la que las elecciones son independientes. En segundo lugar, indica que Zermelo solo enunció la existencia de una función de elección y, con ello, establece una diferencia esencial entre el hecho de que una función *exista o que pueda ser especificada de manera única.* Esta bifurcación de Hadamard es de suma relevancia para lo que hemos presentado hasta ahora, pues hace explícito los dos enfoques para hacer matemática: la constructivista y la abstracta o platonista. Hadamard inclusive indica que el propio Borel utilizó funciones cuya existencia se podía probar pero que no podía ser definida.

Podemos apreciar entonces que Hadamard centró su atención en indicar como legítima la posibilidad de indicar la existencia de funciones aunque no sea posible definirlas. Hadamard parece asomar que dicha legitimidad se deriva del hecho de que la matemática cotidiana venía actuando de esta manera (si bien implícitamente) al punto de que el propio Borel actuase así. Concluye Hadamard,

> muchos problemas matemáticos tendrían un significado distinto (y soluciones distintas) si la condición i) (establecer que una función existe) fuera reemplazada por la condición ii) (que pueda ser definida explícitamente)[141]

La cita, a nuestro juicio, evidencia la certera intuición matemática de Hadamard, al mostrar como la matemática y sus problemas, dependiendo de las condiciones que acepte tendrá respuestas distintas. Las similitudes entre la condición i) y el platonismo (interno al menos) y el intuicionismo y la condición ii) son importantes de resaltar.

En la segunda carta, René Baire responde a Hadamard estando de acuerdo con Borel, pero sosteniendo una posición más radical. Su crítica al axioma de elección se fundamenta en

[141] Hadamard, J.,“ Cinq lettres sur la théorie des ensembles” en *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1905, 33, pp. 261-273.

que, para Baire, no es posible concebir a los subconjuntos de un conjunto dado como dados. Se entiende, bajo esta premisa, la imposibilidad de elegir un elemento de cada subconjunto. Primero deben determinarse efectivamente esos subconjuntos. Baire concluye su carta con una sentencia que no deja lugar a dudas respecto a su posición: "todo en matemáticas debería ser reducido a lo finito." [142]

Borel ahora considera pedirle a Lebesgue que interceda en el debate generado. Él le responde (3era carta) con una posición cercana a sus planteamientos, sin los radicalismos de Baire. Lebesgue se hace la pregunta filosófica fundamental: *¿Se puede demostrar la existencia de un objeto matemático sin definirlo?*[143] Adame refiere que Lebesgue considera que responder esto es

> un problema de convención y dice que él cree que no se puede construir sólidamente en matemáticas sino al aceptar que sólo se puede demostrar la existencia de un objeto al definirlo (de manera explícita y única).[144]

Para efectos de la presente investigación, toma relevancia el hecho de que Lebesgue, en su discusión sobre el axioma de elección, indicase que es un *problema de convención* el aceptar o no la existencia de objetos matemáticos a pesar de no poder definirse. Su adscripción a una posición constructivista es entendible en el contexto matemático dominante para la época, mas creemos que Lebesgue deja la puerta abierta a los compromisos, acuerdos o convenciones que asuma el matemático para su quehacer. Con esto no se está planteando una posición subjetivista de la actividad matemática sino que se realza el hecho de que las características de lo investigado sean lo que determine la necesidad o no de postular entidades y/o construirlas.

Adame refiere que Lebesgue escribe otro artículo ese mismo año (1905)[145] en el que refiere una observación que hiciese Paul du Bois Reymond (1887), en la cual clasificase a la comunidad matemática en estos términos: idealistas y empiristas. Los empiristas sólo aceptan funciones que pueden ser definidas, mientras que los idealistas pueden aceptar otras

[142] Sieg, W., *Hilbert's Program and Beyond*, New York, Oxford University Press, 2013, p.238.

[143] Hadamard, J., *Cinq lettres sur...*, cit., p.265.

[144] Adame, C., *¿Es necesario el...*, cit., p. 47.

[145] Pero fue publicado en 1971. Lebesgue, H., "A propos de quelques travaux mathématiques récents" en L Enseignement Mathématique, XVII(1),1971, pp.1-48.

funciones, aparte de las definibles. Gregory Moore (1982) advierte que el significado de estos términos han cambiado con el paso de los años y que, en la filosofía contemporánea, los idealistas que refiere Lebesgue serían llamados realistas, mientras que los empiristas serían llamados idealistas. Se confirma aquí lo que hemos venido sosteniendo: el quehacer matemático constructivista y el nuevo quehacer matemático platonista comienzan a medir fuerzas, siempre dentro de la actividad matemática. Véase como la discusión comenzó con el axioma de elección, pasó sobre la conveniencia o no de aceptar funciones sin definir y llega a su epítome con la pregunta de Lebesgue.

Borel envía las cartas anteriores a Hadamard quien (4ta carta) mantiene su posición inicial y enfatiza la posibilidad de probar la existencia de un conjunto sin definirlo. Adame nuevamente nos informa que Hadamard discurre el debate generado indicando que sus adversarios (Borel, Baire y Lebesgue) ven el problema desde un punto de vista psicológico y subjetivo pues se preguntan ¿podemos bien ordenar un conjunto? Cuando la pregunta correcta a su juicio es: ¿Es posible bien ordenar un conjunto?. La diferencia estriba en que la primera hace depender la respuesta a la posibilidad efectiva de construcción del buen orden por parte de los matemáticos, mientras que la segunda sólo requiere buscar lo que sea necesario para bien ordenar. Se desprende de esto último que, si es necesario aceptar el axioma de elección para que sea posible bien ordenar un conjunto pues (así lo ve Hadamard) no habrá impedimento alguno en aceptarlo.

Hadamard explica que el primer modo de preguntar es “contrario a la naturaleza de las matemáticas.”[146] Son claras las alusiones a una posición platonista. El propio Bernays coincide en este sentido pues advierte, refiriéndose a los fundamentos del intuicionismo, que “esta es una posición metodológica extrema, contraria a la manera acostumbrada de hacer matemática, consistente en establecer teorías independientes, hasta donde sea posible, del sujeto cognoscente.”[147] Podría cuestionarse que, tal y como Hadamard plantease, la naturaleza de las matemáticas niegue rotundamente la participación del sujeto, pero lo que sí es cierto es que el quehacer matemático cotidiano (el modo acostumbrado, al decir de Bernays)

[146]Adame, C., *¿Es necesario el...*, cit., p. 48.

[147]Bernays, P. *El platonismo en...*, cit. p.31.

privilegia la objetividad.

Finalmente, en la última carta, Borel le responde a Hadamard, y, tomando en consideración todas las cartas anteriores, responde que efectivamente los cuatro matemáticos involucrados tienen posiciones distintas, lo que deja el debate sin una conclusión, pero sí con dos posiciones encontradas: una en la que se aceptan entidades abstractas sin definir y otra que requieren su construcción. Vemos entonces que los argumentos que hemos presentado contra el axioma de elección apuntan en la misma dirección: el hecho de no poderse construir explícitamente niega su aceptación. Además, la aceptación del infinito actual condiciona fuertemente la aceptación del mismo.

Capítulo 6

Conclusiones

Después de todas las consideraciones que hemos hecho mostraremos algunas conclusiones a las que hemos arribado producto del desarrollo de esta investigación. Recordemos que nuestro objetivo fundamental es mostrar la pertinencia del axioma de elección para la matemática y metamatemática contemporánea y, en consecuencia, el desarrollo seguido brindó elementos que permitiesen sostener dicha pertinencia.

Sostenemos que tanto los resultados matemáticos presentados, la descripción de la prueba de independencia del axioma de elección de ZF y las consideraciones filosóficas sobre el platonismo matemático, en los términos que hemos referido, son argumentos sólidos que nos permiten afirmar la pertinencia del axioma de elección para el quehacer matemático y metamatemático contemporáneo. Es decir, nuestra posición filosófica acepta un platonismo interno para el quehacer matemático cotidiano, siendo suficiente esto para usar el axioma de elección en el ámbito matemático. Todo lo anterior se refuerza dentro de una práctica matemática considerada como privilegiada y en la que, dada su cada vez mayor nivel de abstracción, se corresponde como natural el postular entidades para las que no se les puede dar medio de construcción.

Así, nuestras justificaciones se pueden entender a lo interno de la actividad matemática y fuera de ella. Sobre este tipo de justificaciones, Penélope Maddy ha hecho un análisis suscinto que permite fortalecer las consideraciones previas y que analizamos a continuación.

1. Maddy: Justificaciones extrínsecas e intrínsecas

La autora, en un capítulo de su libro *Naturalism in Mathematics* (1998), realiza un análisis de los axiomas que denomina standard, los cuales son los axiomas de ZF (incluyendo el axioma de elección). Su objetivo es presentar los argumentos usuales a favor de los axiomas.

Ella considera que se puede hacer una distinción entre dos tipos de justificaciones: la intrínseca y la extrínseca. Inmediatamente afirma que

> Algunos observadores, siguiendo la tradición, han dictaminado que las únicas justificaciones legítimas son las intrínsecas. Mi propia conclusión es que esto último es incorrecto.[148]

Por los ejemplos que Maddy refiere, se infiere que las consideraciones intrínsecas son aquellas que justifican al axioma por sí mismo, mientras que las extrínsecas se centran en las consecuencias que su aceptación tiene para la teoría matemática. Es decir, lo intrínseco analiza lo que son los conjuntos postulados por los axiomas, su propia naturaleza, mientras que lo extrínseco privilegia otros aspectos.

Que las justificaciones intrínsecas hayan sido favorecidas por la tradición analítica por sobre las extrínsecas, es evidencia de la preponderancia que se da a las consideraciones filosóficas sin atender el contexto matemático en el que surge y se desarrollan los axiomas. Acompañamos la conclusión de Maddy expresada en la cita, y este trabajo buscó brindar elementos que abonaran el terreno para una reflexión filosófica que tomara en cuenta consideraciones matemáticas.

En este orden de ideas, Zermelo postuló sus axiomas en 1908 para“ recuperar en su totalidad la teoría creada por Cantor y Dedekind.” Basándose la defensa de sus axiomas (entre otras razones) en que son “ necesarios para la ciencia.” [149] Así, su postulación de los axiomas (entre ellos el de elección) tuvo como norte el tomar lo que considerase necesario para hacer matemática, en especial un hacer matemático para la teoría de conjuntos cantoriana (sin las paradojas). En consecuencia, el axioma de elección es de natural aceptación en ese contexto y así sostenemos que lo entendía Zermelo.

Torreti, analizando la teoría de los tipos lógicos de Bertrand Russell, hace una consideración similar a la del párrafo anterior, pues refiere que“ Zermelo postula la existencia de un mínimo de conjuntos que le parecían imprescindibles para hacer matemáticas, y presume que su

[148] Maddy, P., *Naturalism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford,1997, p. 37.

[149] Citado por Maddy,P. *Naturalism in...*, cit., p.36.

teoría es inocente de contradicciones hasta que no se le demuestre culpable." [150] Y en una nota al pie agrega

> Subrayo que los axiomas de Zermelo no se eligen, como en la teoría russelliana del zigzag, sólo con vistas a prevenir las contradicciones conocidas. Zermelo tiene un cometido -hacer matemáticas- y postula lo que necesita para eso. Su selección se ha probado duradera. En cambio, Russell, que buscaba certificar -como si hiciera falta- las matemáticas hechas por otros, daba solamente con axiomas implausibles, inspirados por un principio que él mismo juzgaba insuficiente.[151]

Como se puede apreciar, Torreti sigue una linea similar de razonamiento al de Maddy y se complementa con nuestro tratamiento del tema, pues somos reiterativos en no dejar de lado la actividad del matemático y su quehacer, sino incorporarlos a la reflexión filosófica. Entendido en estos términos, el axioma de elección bien puede justificarse tanto por sí mismo como por sus consecuencias y es por ello que la clasificación de Maddy nos parece apropiada. Mas aún, ambos aspectos consolidan las conclusiones a las que hemos arribado. Démosle finalmente la palabra al propio Zermelo y analicemos sus consideraciones a favor de la asunción del axioma enmarcadas en lo planteado.

2. Zermelo: Respuesta a sus críticos

Para analizar con propiedad las justificaciones que Zermelo diera sobre el axioma de elección, debemos considerar tres momentos: cuando enuncia el axioma como parte de la demostración del teorema del buen orden en 1904, cuando presenta su primer sistema axiomático en 1908 (formando parte el axioma de elección), y cuando elabora su segundo sistema axiomático en 1930, en el que de manera explícita prescinde de postular el axioma en tal sistema.

Esto lo hacemos porque así se podrá apreciar la adecuada intuición matemática de Zermelo respecto al axioma. Cuando lo enuncia en 1904, aparece a lo interno de la actividad matemática, como asunción necesaria para una demostración. Esto realza el génesis del

---

[150] Torreti, R. *El paraíso de...*, cit., p.186.

[151] Ibídem.

axioma dentro de la práctica matemática. Como bien indicáramos en la sección correspondiente, las críticas al axioma se desarrollaron a partir de 1905 y, de acuerdo con la revisión bibliográfica realizada, es en 1908 (cuatro años después) cuando Zermelo -según Torreti- hace pública sus respuestas a las críticas que le habían hecho Borel, Peano, Philip Jourdain y Schoenflies.

Torreti nos informa que tanto Borel como Peano le pidieron a Zermelo una prueba del axioma de elección, a lo que Zermelo respondiera que "en matemáticas la indemostrabilidad no equivale a la invalidez, pues, como es sabido no todo se puede demostrar." [152] Esto es evidencia de una posición contructivista representada por Borel y Peano y un enfoque abstracto o platonista representada por Zermelo. Más adelante, Torreti refiere que Zermelo afirma que no puede forzar a nadie a aceptar al axioma pero que, a su entender, reúne los tres requisitos que justifican la adopción de un postulado en matemáticas, a saber:

(a) con frecuencia ha sido utilizado tácitamente en diversos campos de las matemáticas y especialmente en teoría de conjuntos.

(b) es evidente de suyo

(c) responde a una necesidad científica pues son muchas las proposiciones importantes que sólo pueden demostrarse invocándolo.[153]

Para los objetivos de la presente investigación reviste importancia analizar estos tres argumentos. Siguiendo la clasificación de Maddy, los argumentos (a) y (b) serían justificaciones intrínsecas mientras que (c) sería extrínseca. Torreti sostiene que sólo el tercer argumento ha demostrado tener verdadera fuerza mas no explica el porqué de ello. A continuación, nosotros presentaremos una interpretación que sustentará la referida afirmación.

3. El axioma de elección y su autoevidencia

En el caso del argumento (b), la autoevidencia o naturalidad del axioma de elección es, a nuestro entender, difícil de sostener, pues no es fácil explicar en que podría consistir tal naturalidad. Si es necesario explicarlo entonces no es tan evidente como pareciese. Zermelo la sustenta apoyándose en el argumento (a), explicando lo siguiente

[152] Torreti, R. El paraíso de..., cit, p. 67

[153] Ibídem.

> Es un hecho indisputable que este axioma, aunque nunca ha sido presentado al estilo de los libros de texto, ha sido usado antes, y ademas con éxito, en los más diversos campos de la matemática, especialmente en la teoría de conjuntos, por Dedekind, Cantor, F. Bernstein, Schoenflies, J. Konig y otros...Un uso tan extenso del principio puede explicarse únicamente por su autoevidencia.[154]

Así, para Zermelo, el hecho de que el axioma se haya usado de manera tácita es evidencia de su naturalidad. Hasta que punto esto es suficiente para dar fuerza al argumento es lo que ponemos en duda.

Consideremos al respecto lo que sucede con la mayoría de la comunidad de matemáticos que trabaja en las areas de lógica matemática, metamatemática o teoría de conjuntos en la actualidad. Para decidir si incorporan o no un candidato a axioma (luego de realizarle pruebas de consistencia relativa o independencia) estiman si el mismo es intuitivo, natural o evidente. Bagaria se pregunta: "¿Qué debe ser tenido como un axioma *natural* de la teoría de conjuntos?" [155]Y responde: "Ciertamente cualquier hecho *intuitivamente obvio* acerca de los conjuntos." [156]En este sentido, considera que los axiomas de ZF son intuitivos, y con respecto al tema que nos ocupa, observa la reticencia que el axioma de elección genera en algunos matemáticos que lo rechazan -a su juicio- por las consecuencias contraintuitivas que trae -paradoja de Banach-Tarski por ejemplo- más que por su propia naturaleza, la cual considera, por cierto, "muy natural."

Llama la atención que Bagaria no indicase de manera directa por que considera al axioma de elección *natural*.[157] Mas aún cuando, si seguimos el criterio dado por él, no parecería a primera vista que el axioma de elección proveyera algún hecho obvio acerca de los conjuntos.

---

[154]Maddy, P., *Naturalism in...*, cit., p. 54.

[155]Bagaria, J., *Natural Axioms of set theory and the continuum problem*, Universidad de Barcelona, 2004., p.3.

[156]Ibídem.

[157]Tan solo refiere que una posición distinta se puede consultar en: Kai Hauser, "Is Choice Self-Evident?" en *American Philosophical Quarterly*, 2005, p.237-261. Daniel Crespin parece concordar con la posición de Bagaria: "Tal como el venerable axioma de las paralelas (Postulado V de los Elementos de Geometría de Euclides), el enunciado del axioma de elección es de inmediata comprensión y parece obvio." Crespin, D. *Axioma de Elección y Lema de Zorn*, Caracas, Cartillas Matemáticas, Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UCV, 2000, p.19.

Es decir, postula la existencia de un conjunto cuya razón de su existir no parecería deberse a algún hecho inmediatamente obvio sobre los conjuntos.

Se podrían considerar -hasta cierto punto- obvio a axiomas que permitan la existencia de un conjunto vacío, de un conjunto infinito, de un subconjunto de un conjunto dado, del conjunto de los subconjuntos de un conjunto dado, que la unión de conjuntos sea un conjunto y que se acepte que dos conjuntos con los mismos elementos sean iguales. Pero, a nuestro entender, no parece obvio que exista un conjunto -infinito- formado por la elección de un elemento de cada conjunto de una familia -infinita- de conjuntos no vacíos. Ésta caracterización tan particular del conjunto que postula el axioma pone en cuestionamiento la obviedad del mismo.

Por todo lo expuesto, los argumentos (a) y (b) no se han podido sostener en el tiempo y el propio Zermelo admite su debilidad pues "esa autoevidencia es hasta cierto punto subjetiva" [158]lo que lo impele a emprender su justificación extrínseca (la necesidad del axioma para la ciencia). Para dar mayor fuerza a lo planteado, observemos que, en la actualidad, existen candidatos a nuevos axiomas (axiomas de grandes cardinales, axioma de Forcing propio, axioma de Martin máximo, etc.) que siguen sin ser aceptados como axiomas, mientras que el de elección sí se acepta. ¿Por qué sucede esto? ¿En qué se diferencia el axioma de elección de los demás? La poca naturalidad de los candidatos a axiomas es lo que -se dice- impide su aceptación. Pero ese criterio no se impuso sobre el axioma de elección pues sí es aceptado a pesar de no ser obvio, al menos no en el sentido de Bagaria. Lo que ha sido determinante para su aceptación es su presencia activa y fundamental dentro del quehacer matemático cotidiano, a través de toda una serie de resultados en diversas áreas matemáticas en el que es necesario. Esto no es otra cosa que su necesidad científica, el argumento (c) de Zermelo.

[158]Maddy, P., *Naturalism in...*, cit., p. 55.

4. El axioma de elección y su necesidad para la ciencia

Recordemos que la razón por la que Zermelo postuló sus axiomas fue buscando lo mínimo necesario para hacer matemáticas, reconstruyendo la teoría de conjuntos cantoriana sin el temor de las paradojas conocidas. En el caso del axioma de elección, indica

> Pero la cuestión que puede ser decidida objetivamente es si el principio es necesario para la ciencia. Ahora quisiera someterlo a juicio presentando un número de teoremas y problemas elementales y fundamentales que, en mi opinión, no podrían resolverse sin el principio de elección.[159]

A estos resultados se han agregado muchísimos más, que sustentan el desarrollo matemático contemporáneo. Que el axioma no sea constructivo no fue limitativo para Zermelo, pues consideraba más importante la riqueza en resultados que ofrecía. Así, desde la perspectiva que hemos analizado en este trabajo, Zermelo actuó de manera coherente con el enfoque abstracto o platonista, aceptando un platonismo interno y privilegiando lo que el quehacer matemático necesite.

La revisión bibliográfica realizada no da cuenta sobre si Zermelo podía aceptar o no un platonismo externo (o filosófico), es decir, si aceptaba la realidad trasiente de las entidades matemáticas (a lo Cantor). No existe referencia sobre posiciones filosóficas al respecto asumidas de manera explícita por Zermelo. Esto es entendible pues su interés era matemático, no filosófico. En consecuencia, la existencia del conjunto de elección en el dominio del pensamiento era considerado suficiente para el desarrollo de la actividad matemática.

Lo anterior no quiere decir que sus opiniones no estuvieran exentas de reflexión filosófica. En efecto, dentro de la justificación extrínseca que estamos analizando, Zermelo parece acercarse a un *naturalismo pragmático*, en el sentido referido por Asse Dayan. El término reúne la posición naturalista y holista de Quine, la cual rechaza la primacía de la filosofía sobre la ciencia. En palabras de Asse Dayan: "No hay necesidad alguna de justificar el conocimiento científico bajo ningún tipo de estándares, excepto los establecidos por la ciencia misma." [160]Por lo tanto, el conocimiento que la ciencia nos proporciona es la base para nuestra

[159]Ibídem.

[160]Asse, J., "Naturalismo, ficción y objetos matemáticos" en *Signos filosóficos*, Vol. XIII, 2011, p.48.

comprensión de lo que es real. El holismo nos informa que debemos aceptar todo lo que la ciencia nos informa que hay, sea ello concreto o abstracto. Asse Dayan afirma que existen varios tipos de naturalismo y adjetiva al de Quine como *naturalismo pragmático*. Escapa a los objetivos del presente trabajo analizar en detalle dicho naturalismo pero sí podemos referir que la siguiente afirmación de Zermelo se acerca a algunos de sus planteamientos[161], veamos,

> ...nadie tiene derecho a impedir que los representantes de la ciencia productiva continúen usando esta " hipótesis " -pueden llamarla así si quieren- y llevando sus consecuencias lo más lejos posible... Simplemente necesitamos separar los teoremas que requieren del axioma de los que pueden ser probados sin él para poder delimitar la totalidad de la matemática de Peano como una rama especial, como una ciencia artificialmente mutilada, por decirlo así...**los principios deben ser juzgados desde el punto de vista de la ciencia, y no la ciencia desde el punto de vista de principios fijados de una vez por todas.**(Zermelo, 1908a).[162]

El extracto nos permite afirmar que, para Zermelo, no hay primacía de la filosofía por sobre la ciencia. Así, el punto de vista de la ciencia fue la guía principal de Zermelo para defender la pertinencia del axioma de elección. Podemos concluir diciendo que de los tres argumentos presentados por Zermelo, sólo el tercero parece ser defendible con mayor propiedad, y además refleja la coherente posición de Zermelo.

5. Zermelo y el axioma de elección en 1930

En 1930 Zermelo presenta en su artículo titulado " Sobre números-límite y dominios de conjuntos " un nuevo sistema axiomático, tomando como referencia el de 1908 pero con la gran excepción que no incluye al axioma de elección en su lista de axiomas. ¿Cambió de parecer Zermelo y rechaza al axioma? En absoluto, arguye que lo excluye porque " tiene otro carácter que los demás y no sirve para delimitar los dominios de los modelos." [163]y agrega que

[161]Véase el pie de página 123 de la página 88.

[162]Maddy, P., *Naturalism in...*, cit., p. 56.

[163]Torreti, R. *El paraíso de...*, cit, p.102.

el axioma es "un principio lógico universal presupuesto por toda nuestra investigación."[164]

Nos preguntamos: ¿Cuál es ese carácter que lo diferencia de los demás axiomas? Si es un principio lógico universal, ¿Posee un estatus superior a lo que puede tener como axioma? De ser así, ¿por qué? ¿Qué lo hace universal? Y ¿A cual lógica se refiere Zermelo? ¿Va más allá de un sistema axiomático y por eso no lo agrega? Escapa a los objetivos del presente trabaja responder a todas estas preguntas, aunque Zermelo parece responder a lo último de manera afirmativa, sin aducir razones explícitas.

Tampoco indica cuál es ese carácter que diferencia al axioma de elección de los restantes axiomas. Hemos estimado pertinente establecer como posible carácter diferenciador, dentro de lo que Zermelo argumentara, lo que sigue: los axiomas que Zermelo postula son los que permiten determinar lo mínimo necesario para hacer matemáticas, es decir, muestran lo que hay, las entidades matemáticas mínimas a aceptar para trabajar en matemáticas. El axioma de elección difiere de ellos pues no permite delimitar los dominios de los modelos, ni el conjunto que postula es estrictamente necesario para hacer matemática finitaria, pero sí permite hacer uso de lo que hay con mayor potencia, sobre todo porque involucra al axioma del infinito, axioma que Zermelo no declara al inicio pero que se ve forzado a admitirlo como "postulado metateórico." En consecuencia, para hacer matemática infinitaria con todas las posibilidades que conlleva es requerido necesariamente el axioma de elección. El surgimiento de la nueva forma de hacer matemática (platonista) requiere del axioma y en este sentido se entiende que Zermelo lo "presuponga" para toda su investigación.

Así, hemos analizado el recorrido hecho por Zermelo en tres momentos: 1904, 1908 y 1930. Es relevante resaltar, sobre la génesis del axioma de elección, la siguiente cita de Ferreirós

> Zermelo (1904, 516) era explícito al afirmar que la idea de basar la demostración en el axioma de elección se debe a Schmidt. Al final de su vida, Zermelo se quejaría de que muchas de sus contribuciones en lógica y teoría de conjuntos

[164] Ibídem.

> no eran tenidas en cuenta, mientras que su nombre aparece sólo asociado a un axioma cuya autoría nunca había reclamado.[165]

Y refiere que su aparición se debe a los debates surgidos entre Zermelo y Erhard Schmidt (1876-1959) una semana antes del 24 de septiembre de 1904, fecha de la carta que envíase Zermelo a Hilbert (donde prueba el teorema del Buen orden), siendo Schmidt quien le hiciera la sugerencia de usar el axioma de elección en la prueba. Después de 1930, Zermelo no publicó más hasta el día de su muerte. Fraenkel, citado por Torreti, refiere que en algún momento, seguramente de los años 1940 o 1950, le preguntó a Schmidt por qué su buen amigo Zermelo ya no publicaba; la respuesta fue que no lo hace "porque ya no podía enfadar a nadie con sus publicaciones." [166]Así, el axioma de elección fue polémico y al parecer el hombre que lo enunció era amante de la polémica también.

Para finalizar, queremos advertir que Maddy, en el texto referido anteriormente analiza la llamada concepción reiterativa (también llamada iterativa, teoría de niveles o jerarquía acumulativa) y que, a su juicio, dicha concepción es la base del sistema axiomático presentado en 1930. Hay diferencias, como ya apuntasemos, entre el sistema axiomático de 1908 y el de 1930. Sobre ambos sistemas Maddy indica que "la concepción reiterativa subyace a la jerarquía acumulativa de Zermelo (1930) como un principio que fundamenta los axiomas con más firmeza que la mera justificación extrínseca presentada en 1908." [167]

Como se puede apreciar Maddy confirma (como lo analizaramos previamente) que la justificación principal en Zermelo, para los axiomas en 1908 (entre ellos el de elección) es la extrínseca (necesidad para la ciencia) pero le da a la concepción iterativa mayor fuerza que lo extrínseco. Entendiéndose la concepción iterativa como una justificacion intrínseca, en la medida en que intenta explicar la naturaleza de los conjuntos, valdría la pena preguntarse si el axioma de elección también se puede describir bajo esa concepción. Al respecto, George Boolos, quien ha desarrollado con fuerza la teoría de niveles ha probado que "el axioma

---

[165]Ferreirós,J. *Un episodio de...*, p.462.

[166]Ibídem.

[167]Un análisis detallado de la concepción reiterativa se puede apreciar en Maddy, P., *Naturalism in...*, cit., p.42.

de elección no se puede deducir de la teoría de niveles" [168]lo que nos confirma la certera intuición matemática de Zermelo al no colocarlo como parte de sus axiomas de 1930 y muestra, además, el "otro caracter" del axioma de elección.

En efecto, a modo de resumen y conclusión hemos podido evidenciar lo siguiente. El axioma de elección no se restringe a un área particular de las matemáticas sino que su aplicabilidad es alta y variada. No depende de un área matemática específica. Mas aún, su aplicación no sólo no se restringe a la matemática sino que aparece en la lógica de primer orden. Esta particular "independencia" del axioma respecto a algún área particular se confirma con los resultados de Gödel y Cohen que establecen su independencia lógica de ZF. A nivel filosófico, el axioma es una clara asunción platonista que hace uso de las nociones de conjunto y función abstractas y trabaja con el infinito actual. Y como hemos visto, se diferencia sobremanera de los restantes axiomas por no delimitar los dominios de los modelos y ni siquiera reflejarse bajo la concepción iterativa tal y como Boolos mostrase. El ser tan esquivo en su explicación realza su caracter único y se entiende la polémica generada.

El camino que hemos recorrido, primero matemático, luego lógico, posteriormente metamatemático y finalmente filosófico se ha hecho con la intención de respetar y rescatar los aportes de lo que hemos denominado quehacer matemático cotidiano. Lo que el matemático tenga a bien utilizar para su actividad y las razones para hacerlo, dentro de su contexto, ha sido fundamental para la reflexión filosófica. Con esta posición, nos acercamos a los planteamientos de la filosofía de la práctica matemática tal y como la explican autores como Mancosu (2016) y Tymozcko (1997). Así, la pertinencia del axioma de elección para la matemática y la metamatemática queda justificada en este trabajo en los términos que mostrasemos.

Finalizaremos con las siguientes apreciaciones de Philip Jourdain (1879-1919) quien, curiosamente, fuera uno de los que se opusiera a la aceptación del axioma de elección, pero

---

[168]Al respecto véase: Boolos, G.,"The Iterative Conception of Set" en R. Jeffrey, ed., *Logic, Logic, and Logic*, Cambridge, Harvard University Press, 1971.

que en su libro *La naturaleza de la matemática* mostrase opiniones que parecen contradecir tal oposición[169]. Veamos

> He distinguido, y quiero hacerlo aquí explícitamente, entre "Matemática" que es una colección de verdades y "matemática" que es nuestro conocimiento de la Matemática. Así, podemos hablar de la "matemática de Euclides" o de la "matemática de Newton" y decir con verdad que la matemática se ha desarrollado, y por tanto ha tenido una historia; pero la Matemática es eterna e inmutable, y por tanto no tiene historia, ni pertenece, en todo ni en parte, a Euclides, Newton, ni a ningún otro, sino que es algo que se descubre, en el transcurso del tiempo, por mentes humanas. [170]

Es evidente que una posición platonista se hace presente, pues siendo la Matemática eterna e inmutable es independiente del sujeto cognoscente. Jourdain más adelante parece responder a la pregunta ¿A través de cuál medio se puede conocer a la Matemática? Pues a través de la matemática. Veamos:

> La razón por la cuál es importante la matemática es que la Matemática no es incomprensible, pese a ser eterna e inmutable.[171]

Así, la práctica matemática, el quehacer matemático, será el mejor medio para conocer a las entidades Matemáticas. Jourdain parece reinvindicar la actividad del matemático y en ello vemos similitudes con nuestros planteamientos. La comprensión de la Matemática no se debe analizar solamente desde perspectivas ontológicas y gnoseológicas que es lo usual en la Filosofía, sino desde su práctica y lo que ella hace y ha hecho. En este sentido, la existencia de las entidades matemáticas platonistas, y en particular el axioma de elección, quizás pueda

[169]Jourdain estuvo muy interesado en los fundamentos de las matemáticas. En particular intercedió en la polémica generada por el axioma de elección intercambiando correspondencia con Cantor, Zermelo, Russell, entre otros. Al respecto véase Garciadiego, A. "Philip Jourdain, Historiador de las matemáticas" en *LLULL*, México, Facultad de Ciencias, pp.194-199. Littlewood refiere que Jourdain cerca del final de su vida se obsesionó con demostrar el axioma de elección, publicando varias pruebas incorrectas de ello. Inclusive en su lecho de muerte Jourdain discutía con él su prueba (incorrecta) del axioma. Véase: Littlewood, J. *Littlewood's Miscellany*, Cambridge University Press, 1986, p.129.

[170]Neumann, J. "La Naturaleza de la matemática" en *Sigma El mundo de las matemáticas*, Barcelona, 1976, vol. I, p. 404.

[171]Ibídem.

darse en un reino matemático tal y como postula el cuento del genésis de la topología[172] o quizás podría sucedernos como a Josh Roshair en el cuento de la tesis de ubicuidad.[173] Pero, mas allá de eso e independientemente de lo anterior, lo que sí nos aventuramos a afirmar es que el axioma de elección se mantendrá vigente hasta tanto las condiciones de la actividad matemática no cambien y que el desarrollo de la práctica matemática será acicate fundamental para las reflexiones filosóficas en matemática en este siglo XXI.

[172] El cuento versa en estos términos: En el principio, Dios creó el conjunto, pero el conjunto era hueco y vacío. Y Dios dijo "Háganse los elementos, y que los elementos se combinen en subconjuntos, uniones e intersecciones, y hagase el formalismo lógico." Y Dios separó lo Verdadero de lo Falso, y vió que lo Verdadero era bueno. Dios creó entonces operaciones en conjuntos: Funciones y relaciones creó. Y entre las funciones hubo inyecciones, suryecciones y biyecciones, y Él vió que las biyecciones eran buenas. Entre las relaciones hubo equivalencias, orden y orden parcial, y Él vio que era todo esto ordenado. Y creó Dios entonces los enteros y los números reales. Y usó Él la menor cota superior para separar los números de arriba de los números de abajo, y tambien usó Él los enteros para definir los cardinales de los conjuntos finitos. Dividió lo numerable y lo innumerable, y promulgó el Axioma de Elección(...). El cuento completo se puede ver en http://www.ma.utexas.edu/users/sadun/S08/367K/creation.pdf

[173] Este cuento muestra una refutación imaginaria del axioma de elección. En ella, el protagonista Josh Roshair demuestra un supuesto Teorema del Punto Ubicuo el cual refuta al axioma. Al final, la demostración se derrumba cuando sucede que dos personas pueden estar en un mismo sitio a la vez. Para leer el cuento completo revísese: http://www.elautor.com/Doc/Ubicuidad.pdf

Bibliografía

Abad, J. y Di Prisco,C. *Teoría de Ramsey y Espacios de Banach*, Mérida, EMALCA, 2008.

Adame, C. "¿Es necesario el Axioma de Zermelo para comprender la Teoría de la Medida?" en *Methateoria*, 3, 2013, pp. 37-64.

Álvarez, A. *Axioma de elección y Teoría de la Medida.* Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, México, 2003.

Álvarez, A. y Gaitán, M., "Forcing. Otros mundos posibles" en *Ciencias*, 78, 2005, pp.66-73.

Asse, J., *El ficcionalismo hermenéutico en la filosofía de las matemáticas*, tesis de Maestría, México, UNAM, 2008.

Asse, J., "Naturalismo, ficción y objetos matemáticos." en *Signos filosóficos*, vol. XIII, 2011, pp.47-71.

Alemán, A. *Lógica, matemáticas y realidad*, Tecnos, 2011.

Aristóteles. Opera, G. Reimer, Berlin. 2 vols. Exrecognitione I. Bekkerisedidit Academia Regia Borussica, 1831.

Bagaria, J. *Natural Axioms of set theory and the continuum problem.* Institucio Catalana de Recerca i Estudis Avacats (ICREA), y Departamento de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia, Universidad de Barcelona, 2004.

Batistella, E. *Selección de textos de Gottlob Frege*, Zulia, Universidad del Zulia, 1972.

Batistella, E., Lo Monaco, V., Sánchez, B.,“Brouwer, Wittgenstein, Lakatos: Tres concepciones de la matemática” en *Cuadernos de Episteme*, Instituto de Filosofía, U.C.V., 1988.

Bell, J. *The axiom of choice*, Canadá, College Publications, 2009.

Benacerraf, P. y Putnam, H.(Comp.) *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, 1983.

Bernays, P. *El platonismo en matemática*, UCV-Ediciones de la Biblioteca, Caracas, 1982.

Blanco, R. *Ontología y significado en Dummet: Una filosofía del lenguaje*, Tesis Doctoral, Facultad de Filosofía, UNED, 2011.

Boolos, G.,“The Iterative Conception of Set” en R. Jeffrey, ed., *Logic, Logic, and Logic*, Cambridge, Harvard University Press, 1971.

Caba, S. “Algunas consideraciones sobre el argumento de indispensabilidad en matemáticas” en *Revista de Filosofía*, Vol. 27, Núm.1, 2002.

Caicedo, X. y Enciso, G. “El Teorema de Hahn-Banach como principio de elección” en *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias*, Vol. 28, 106, 2004.

Cantor, G., *Fundamentos para una teoría general de conjuntos* (1883), Crítica, 2005.

Cantor, G., "Beiträgezur Begründung der transfiniten Mengenlehre" en *Mathematische Annalen*, 1895, 45: 581-512; 49: 207-246.

Carnap, R., "Los fundamentos logicistas de la matemática" en *Erkentniss*, 1931, pp.91-121.

Cohen, P. *The independence of the continuum hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences, 50; 1143-1148; 51; 105-110. (1963-64).

Courant, R. y Herbert, R., *¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos*, España, Aguilar, 1962.

Chang, C. y Keisler, H., *Model Theory*, Dover Publications, 2012.

Chela, R. *Matemática y lógica*, Caracas, Fondo Editorial Acta Científica Venezolana, 1986.

Crespin, D. *Axioma de Elección y Lema de Zorn*, Caracas, Cartillas Matemáticas, Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UCV, 2000. Disponible en: http://euler.ciens.ucv.ve/ dcrespin/

De Lorenzo, J. *La matemática: de sus fundamentos y sus crisis*. Tecnos, Madrid, 1998.

Dedekind, R., *Was sind und sollen die Zahlen?*, Braunschweig: Vieweg, 1888.

Di Prisco, C. *Teoría de Conjuntos*, Universidad Central de Venezuela: Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico, 2009.

Di Prisco, C. *Introducción a la Lógica Matemática*, EMALCA, Amazonia, 2009.

Dummet, M. “El platonismo” en Dummet, M. *La verdad y otros enigmas*, México, Fondo de Cultura Económica, 1990, pp.282-295.

Enderton, H., *Una Introducción Matemática a la Lógica*, Universidad Nacional Autónoma de México, 2004.

Ferreirós, J. “El enfoque conjuntista en matemáticas” en *La Gaceta*, vol. I, 3, 1998, pp. 389-412.

Ferreirós, J. “Matemáticas y platonismo(s)” en *La Gaceta*, vol. II, 1999, pp. 446-473.

Ferreirós, J. “Del hacer matemático y sus filosofías” en *ILUIL*, Vol. XXVI, 2003, pp.903-917.

Ferreirós, J. “Un episodio de la crisis de fundamentos: 1904” en *La Gaceta*, vol. VII, 2, 2004, pp.449-467.

Fraenkel, A. “Zu den Grundlagen der Cantor-Zermelos chen Mengenlehre” en *Mathematische Annalen*. 86: 230-237. (Reproducido en Felgner 1979).

Galindo, F. *Tres tópicos de Lógica*, Trabajo de ascenso no publicado, Caracas, Universidad Central de Venezuela, 2012, pp.74-83.

Galindo, F. *Algunos métodos de la lógica y una revisión crítica de los mismos en relación con los fundamentos de las matemáticas*, Trabajo de ascenso no publicado, 2014, p.80.

Garciadiego, A.“Philip Jourdain, Historiador de las matemáticas” en *LLULL*, México, Facultad de Ciencias, pp.194-199.

Gödel, K. “La consistencia del Axioma de Elección y la Hipótesis generalizada del continuo con los axiomas de la teoría de conjuntos (1940)” en *Obras Completas de Gödel*, Alianza, 1981.

Haack, S. *Filosofía de las lógicas*, Madrid, Ediciones Cátedra S.A., 1991.

Halpern, J.D. y Levy, A. "The boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice" en AMS Proceedings in Axiomatic Set Theory, 83-134, 1971.

Herrlich, H. *Axiom of choice*, Alemania, Springer, 2006.

Heyting, A., "Los fundamentos intuicionistas de la matemática" en *Erkentniss*, 1931, pp.91-121

Heyting, A. *Introducción al Intuicionismo*, Tecnos, 1955.

Hilbert, D. *Fundamentos de las Matemáticas*, Mathema. 1993.

Hilbert, D. (GA), *Gesammelte Abhandlungen*, New York, vol. III, 1965, (Reimpresión de la edición original: Berlín, Springer, 1933-35).

Horstein, L. *Philosophy of Mathematics*, Enciclopedia de Filosofía de la Universidad de Stanford, 2017.

Howard, P. y Rubin, J., *Consequences of the Axiom of Choice*, American Mathematical Society, 1998.

Jané, I. "De qué trata la teoría de conjuntos" en Orayen, R. y Moretti, A., (Eds.), *Filosofía de la lógica*, Madrid, Editorial Trotta, 2004.

Jech, T. *Set Theory*, Springer, 2006.

Jech, T. *The Axiom of Choice*, Dover Publications, 2008.

Kai Hauser, "Is Choice Self-Evident?" en *American Philosophical Quarterly*, 2005, pp.237-261.

Körner, S., *The philosophy of mathematics*, London, Hutchinson University Library, 1971.

Kneale, W. y Kneale, M., *El desarrollo de la lógica*, Madrid, Editorial Tecnos, 1980.

Kunen, K. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*, College Publications, 2011.

Lehman, H., *Introduction to the philosophy of mathematics*, Oxford, 1979.

Levi, B. *Leyendo a Euclides*, Buenos Aires, Libros del Zorzal, 2003.

Lewin, R. *Teoría axiomática de conjuntos*, Chile, Universidad Católica de Chile, 2004.

Lindström, S. Palmgren, E. y Segerberg, K. *Logicism, Intuitionism and formalism, what has become of them?*, Springer, 2009.

Littlewood, J. *Littlewood's Miscellany*, Cambridge University Press, 1986.

Lós, J. y C. Ryll-Nardzewski "On the applications of Tychonoff's theorem in mathematical proofs" en *Fundamenta Mathematicae*, 41, 49-65,1954.

Lukasiewicz, J. *Estudios de lógica y filosofía*, Madrid, Biblioteca de la Revista de Occidente, 1970.

Maddy, P., *Naturalism in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1997.

Mancosu, P. "Algunas observaciones sobre la filosofía de la práctica matemática" en *Disputatio, Philosophical Research Bulletin*, 5:6, 2016, pp.131-156.

Manzano, M. *Teoría de Modelos*, Alianza, 1989.

Marcus, M. y Minc, H. *Elementos de álgebra lineal*, México, Editorial Limusa. 1971.

Martin-Löf, P., "100 years of Zermelo's axiom of choice: what was the problem with it?" en *The Computer Journal*, 49/3, 2006, pp. 345-350.

Moore, G. "A House divides against itself: The emergence of first-Order logic as the basis for mathematics" en *Studies in the History of Mathematics*, Esther R. Phillips (Ed.), Mathematical Association of America, 1987, pp. 98-136.

Moore, G. *Zermelo's Axiom of Choice.Its Origins, Development, and Influence*, Dover Publications. 1982.

Mosterín, J. *Los lógicos*, Madrid, Editorial España, Calpe, 2000.

Nagel, E. y Newman, J. *El Teorema de Gödel*, Madrid, Tecnos, 2005.

Neumann, J. "Los fundamentos formalistas de la matemática" en *Erkentniss*, pp.91-121.

Neumann, J. "El matemático" en Newman, J. (Ed.) *Sigma El mundo de las matemáticas*, Barcelona, 1976, vol. V, pp. 443-453.

Pardo, A. "El argumento de indispensabilidad en matemáticas" en *Teorema*, Vol. XVI-II/2, 1999.

Peano, G. “Demonstration de i’integrabilite des equations difterentielles ordinaire” en *MA*, 37, 1890, pp. 182-228.

Peirce, C. “La esencia de la matemática” en Newman, J. (Ed.) *Sigma El mundo de las matemáticas*, Barcelona, 1976, vol. V, pp. 155-171.

Pincus, D. *The strength of the Hahn-Banach theorem.*Victoria Symposium on Non-Standard Analysis. Lect. Notes in Math. 369. Springer Verlag, Berlín, 203-248, 1974.

Rubin, H. y Rubin, J. *Equivalents of axiom of choice*, Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1970.

Sieg, W. *Hilbert’s Program and Beyond, New York*, Oxford University Press, 2013.

Solovay, R. “On the cardinality of $\sum \frac{1}{2}$ sets of reals” en *Foundations of Mathematics*, Symposium Papers commemorating the sixtieth birthday of Kurt Gödel. Jack J. Bullof, Thomas, C. Holyoke and S. W. Hahn, Editors. Springer-Verlag, 1969.

Solow, D., *The Keys to Advanced Mathematics: Recurrent Themes in Abstract Reasoning*, Books unlimited, 1995.

Torreti, R. “El Método Axiomático” en Moulines, U., *La Ciencia, estructura y desarrollo*, Madrid, Editorial Trotta, 1993.

Torretti, R. *El Paraíso de Cantor. La tradición conjuntista en la filosofía de la matemática*, Editorial Universitaria. Santiago de Chile, 1998.

Tratados de Lógica (EL ORGANON). México, Editorial Porrúa, S.A., 1993.

Tymoczko,T. "¿Nuevas direcciones en filosofía de la matemática?" en *Agora, papeles de filosofía*, Volumen XVI, Nro.2: pp.123-137, 1997.

Van Hiejenoort, J. *From Frege to Gödel*, USA, Oxford University Press, 1967.

Weyl, H. "El modo matemático de pensar" en Newman, J. (Ed.) *Sigma El mundo de las matemáticas*, Barcelona, 1976, vol. V, pp. 220-237.

Zermelo, E., "Beweis, dab jede Mengewohlgeordnetwerdenkann" en *Mathematische Annalen*, 59: 514-516, 1904.

Zermelo, E., "Neuer Beweisfür die Möglichkeiteiner Wohlordnung" en *Mathematische Annalen*, 65: 514-535, 1908.

Zermelo, E., "Untersuchungenüber die Grundlagen der Mengenlehre I" en *Mathematische Annalen*, 65: 261-281, 1908a.

Zermelo, E., "Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik" en *Fundamenta Mathematicae*, 14: 339-344, 1929.

Zermelo, E., "Über Grenzzahlenund Mengenbereiche" en *Fundamenta Mathematicae*, 16: 29-47, 1930.