

**UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y SOCIALES  
COMISION DE ESTUDIOS PARA GRADUADOS  
AREA DE POSTGRADO EN ESTADISTICA Y ACTUARIADO**



**ANÁLISIS DE LOS ESTIMADORES INDIRECTOS:  
DESARROLLO DE LOS ESTIMADORES INDIRECTOS  
COMPUESTOS COMO ALTERNATIVA DE ESTIMACIÓN**

**Autor: Harold Martín-Caro  
C.I.: 6.461.840  
Tutor: Guillermo Ramírez  
C.I.: 3.609.750**

**Tesis de Grado presentado para optar al título de Doctor en Estadística**

**CARACAS  
Abril de 2010**

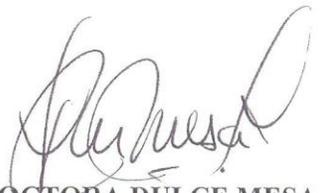
Al Dr. Guillermo Ramírez por su confianza y orientación. A Adelmo Fernández por su colaboración y solidaridad. A mi esposa, por su apoyo incondicional, a pesar de todo.

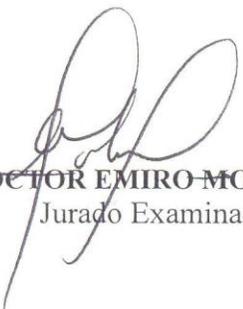
A mi amada esposa y mis padres, y especialmente a mi hermana María Fernanda, mi luz.

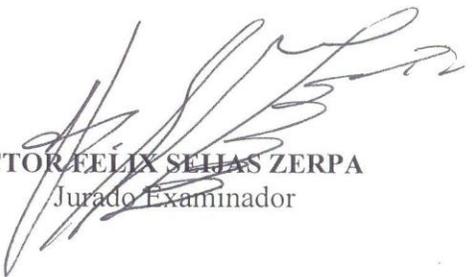
Aprobado Tesis Doctoral en nombre de la Universidad  
Central de Venezuela por el siguiente jurado examinador:

  
**DOCTOR GUILLERMO RAMIREZ**  
Coordinador Tutor del Jurado

  
**DOCTOR FELIX SEIJAS RODRIGUEZ**  
Jurado Examinador

  
**DOCTORA DULCE MESA**  
Jurado Examinador

  
**DOCTOR EMIRO MOLINA**  
Jurado Examinador

  
**DOCTOR FELIX SEIJAS ZERPA**  
Jurado Examinador

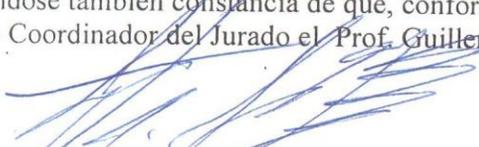
**UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y SOCIALES  
COMISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO  
AREA DE POSTGRADO EN ESTADISTICA Y ACTUARIADO  
DOCTORADO EN ESTADÍSTICA**

**VEREDICTO**

Quienes suscriben, miembros del jurado designado por el Consejo de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad Central de Venezuela para examinar la Tesis Doctoral titulada: *Análisis de Estimadores Indirectos: Desarrollo de los Estimadores Indirectos Compuestos como Alternativa de Estimación* presentado por **HAROLD MARTIN-CARO**, Cédula de Identidad N° 6.461.840, a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al grado de **DOCTOR EN ESTADISTICA**, dejan constancia de lo siguiente:

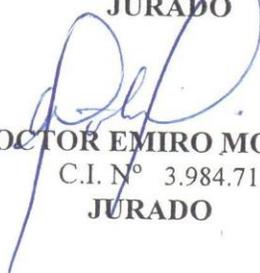
- 1.- Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del Jurado, éste fijó el día 12 de mayo de 2010 a las 2:00 p.m. para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la Sala de Conferencias del Área de Postgrado en Estadística y Actuario, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado; todo ello conforme a lo dispuesto en el Reglamento del Consejo de Estudios de Postgrado.
- 2.- Finalizada la defensa pública del trabajo, el jurado decidió aprobarlo por considerar, sin hacerse solidario de las ideas expuestas por el autor, que se ajusta a lo dispuesto y exigido en el Reglamento de Estudios de Postgrado. Para dar este veredicto el Jurado estimó que dicho trabajo constituye un aporte original a la teoría de los estimadores muestrales en el caso de poblaciones finitas.

En fe de lo cual se levanta la presente Acta a los doce días del mes de Mayo de dos mil diez. Dejándose también constancia de que, conforme a lo dispuesto en la Normativa Jurídica vigente, actuó como Coordinador del Jurado el Prof. Guillermo Ramírez.

  
**DOCTOR FELIX SEIJAS RODRIGUEZ**

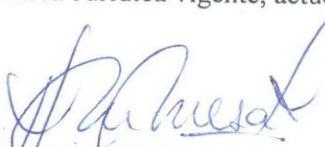
C.I. N° 6.313.291

**JURADO**

  
**DOCTOR EMIRO MOLINA**

C.I. N° 3.984.711

**JURADO**

  
**DOCTORA DULCE MESA**

C.I. N° 6.273.565

**JURADO**

  
**DOCTOR FELIX SEIJAS ZERPA**

C.I. N° 2.230.516

**JURADO**

  
**DOCTOR GUILLERMO RAMIREZ**

C.I. N° 3.967.050

**TUTOR**



## RESUMEN

En el presente trabajo se plantean y generan, por primera vez, los “**Estimadores Indirectos Compuestos**”, que consisten en la aplicación conjunta de estimadores de razón y regresión lineal, dando cabida a dos variables auxiliares. Esto se logra aplicando un ajuste de regresión lineal a un estimador de razón, o un ajuste de razón a un estimador de regresión lineal; a los primeros se les denominará “Estimadores Indirectos Compuestos del Tipo Razón-Regresión” y a los otros “Estimadores Indirectos Compuestos del Tipo Regresión-Razón”. Los estimadores propuestos, logran reducir las diferencias con el valor poblacional en mayor cantidad de variables que otros estimadores, manteniendo la precisión o mejorándola en algunos casos.

El estudio integra el planteamiento de los estimadores propiamente, con el desarrollo de su esperanza, sesgo, varianza, y error cuadrático medio, utilizando rigurosos procedimientos matemáticos, todos a partir de la distribución muestral, que garantizan resultados válidos. En casi todos los casos se hacen desarrollos basados en Series de Taylor sobre el componente de razón.

El desarrollo se hace de manera exhaustiva en el muestreo aleatorio simple y el muestreo estratificado, y en éste se trabaja cada componente de manera separada y combinada. Por otra parte, para el componente de regresión lineal se consideran dos casos, un coeficiente único para ambas variables auxiliares, y un coeficiente diferente para cada variable auxiliar. Todas estas combinaciones dan origen a tres estimadores en el muestreo aleatorio simple, y nueve en el muestreo estratificado, todos con su respectivo desarrollo teórico-analítico.

Este trabajo es de carácter teórico y se centra en la formulación y desarrollo de los estimadores. Luego se comparan y contra los estimadores directos e indirectos sencillos de forma analítica y práctica. En principio sobre poblacionales artificiales pequeñas y controlables, generando todas las muestras posibles, para determinar cuando resulta ventajosa su aplicación. Así mismo, se compara contra los verdaderos valores de las varianzas para determinar la validez de las fórmulas generadas.

Después se trabajan poblaciones más grandes, para eliminar posibles sesgos y restricciones de las poblaciones muy pequeñas, generando un gran número de muestras posibles. Y finalmente se trabaja sobre una población real, utilizando data del XIII Censo de Población y Vivienda de Venezuela, llevado a cabo en 2001.

# ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN, 1

ESTIMADORES INDIRECTOS SENCILLOS, 10

- Estimadores de Razón en el Muestreo Aleatorio Simple, 11
- Estimadores de Razón en el Muestreo Estratificado, 12
- Estimadores de Regresión Lineal en el Muestreo Aleatorio Simple, 17
- Estimadores de Regresión Lineal en el Muestreo Estratificado, 19

ESTIMADORES INDIRECTOS COMPUESTOS, 21

- Estimadores del Tipo Razón-Regresión, 21
- Esperanzas de los Estimadores, 22
- Error Cuadrático Medio de los Estimadores, 23
  - Estimadores de los Errores Cuadráticos Medios de los Estimadores, 32
  - Casos Especiales, 32
    - Estimador de Razón, 32
    - Estimador por Diferencia, 32
    - Estimador de Varianza Mínima para b Constante, 34
  - Estimadores del Tipo Razón-Regresión en el Muestreo Estratificado, 35
    - Estimadores de Razón-Regresión Separados, 37
    - Estimadores de Razón-Regresión Combinados, 48
      - Estimadores de razón-regresión separado-combinado, 49
      - Estimadores de razón-regresión combinado-separado, 61
      - Estimadores de razón-regresión combinado-combinado, 62
- Estimadores del Tipo Regresión-Razón, 71
  - Esperanzas de los Estimadores, 71
  - Error Cuadrático Medio de los Estimadores, 77
  - Casos Especiales, 81
    - Estimador de Razón, 81
    - Estimador por Diferencia, 81
    - Estimador de Varianza Mínima para b constante, 81
  - Estimadores del Tipo Regresión-Razón en el Muestreo Estratificado, 83
    - Estimadores de Regresión-Razón Separados, 85
    - Estimadores de Regresión-Razón Combinados, 93
      - Estimadores de regresión-razón separado-combinado, 93
      - Estimadores de regresión-razón combinado-separado, 100
      - Estimadores de regresión-razón combinado-combinado, 100
- Estimadores del Tipo Regresión-Razón con 2 Coeficientes, 107

Esperanzas de los Estimadores,	107
Error Cuadrático Medio de los Estimadores,	114
Casos Especiales,	120
Estimador de Razón,	120
Estimador por Diferencia,	120
Estimador de Varianza Mínima para b Constante,	120
Comparación con el Estimador de 1 Coeficiente,	123
Estimadores del Tipo Regresión-Razón con 2 Coeficientes en el Muestreo Estratificado,	126
Estimadores de Regresión-Razón 2 Coeficientes Separados,	126
Estimadores de Regresión-Razón 2 Coeficientes Combinados,	134
Estimadores de Regresión-Razón 2 Coeficientes Separado-Combinado,	134
Estimadores de Regresión-Razón 2 Coeficientes Combinado-Separado,	141
Estimadores de Regresión-Razón 2 Coeficientes Combinado-Combinado,	141
<b>ANÁLISIS DE LOS ESTIMADORES INDIRECTOS COMPUESTOS,</b>	<b>152</b>
Los Estimadores de Razón como Caso Particular de los Estimadores de Regresión Lineal,	152
El Estimador de Razón como Caso Particular del Estimador de Regresión Lineal,	153
El Estimador de Razón-Regresión como Estimador de Regresión Lineal,	154
El Estimador de Regresión-Razón como Estimador de Regresión Lineal,	157
Comparación Analítica,	161
Pruebas Prácticas,	166
Pruebas con Data Artificial Pequeña,	166
Pruebas con Data Artificial Grande,	183
Pruebas con Data Real,	199
<b>RESUMEN Y CONCLUSIONES,</b>	<b>209</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA,</b>	<b>214</b>
<b>APÉNDICES,</b>	<b>217</b>
Apéndice A,	217
Apéndice B,	220

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1.	Tipos de Estimadores Indirectos Compuestos, según Clase de Muestreo, 5
Tabla 2.	Numeración de Escenarios Generados, 167
Tabla 3.	Correlaciones de los Escenarios Trabajados, 167
Tabla 4.	Estimadores Trabajados, 168
Tabla 5.	Frecuencia de Posiciones Ocupadas por cada Estimador en los 81 escenarios en el Muestreo Aleatorio Simple y Puntuación y Posición Final, 181
Tabla 6.	Frecuencia de Posiciones Ocupadas por cada Estimador en los 81 Escenarios en el Muestreo Aleatorio Simple y Puntuación y Posición Final -Excluyendo los Estimadores que tengan Únicamente A Z como Variable Auxiliar, 181
Tabla 7.	Aplicación de los Estimadores Indirectos Compuestos en el Muestreo Estratificado, 182
Tabla 8.	Frecuencia de Posiciones Ocupadas por cada Estimador en los 81 Escenarios en el Muestreo Estratificado y Puntuación y Posición Final, 184
Tabla 9.	Frecuencia de Posiciones Ocupadas por cada Estimador en los 81 Escenarios en el Muestreo Estratificado y Puntuación y Posición Final -Excluyendo los Estimadores que tengan Únicamente a z como Variable Auxiliar-, 185
Tabla 10.	Tamaños Poblacionales y Muestrales, 186
Tabla 11.	Características de los Escenarios Generados, 187
Tabla 12.	Tamaños Poblacionales y Muestrales por Parroquia, Municipio Sucre del Estado Miranda, 199
Tabla 13.	Total de personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad, 200
Tabla 14.	Total de Personas por Sexo, según Estimador, 202
Tabla 15.	Total de Personas Ocupadas por Sexo, según Estimador, 202
Tabla 16.	Total de Personas Desocupadas por Sexo, según Estimador, 203
Tabla 17.	Total de Personas Buscando Trabajo por Primera Vez por Sexo, según Estimador, 203
Tabla 18.	Total de Personas Estudiando por Sexo, según Estimador, 204
Tabla 19.	Total de Personas Pensionadas o Jubiladas por Sexo, según Estimador, 204
Tabla 20.	Total de Personas en Otra Condición por Sexo, según Estimador, 205
Tabla 21.	Total de Personas Ocupadas con Bachillerato o Técnico Medio por Sexo, según Estimador, 205
Tabla 22.	Diferencias Mínimas, Máximas y Promedio entre el Valor Poblacional y Estimaciones, para las Tablas 14, y las Tablas 15 a la 21, 206

## ÍNDICE DE FIGURAS

- Figura 1. Errores Cuadráticos Medios, 170
- Figura 2. Coeficientes de Variación de los Estimadores del Promedio (provenientes de la distribución muestral), 171
- Figura 3. Coeficientes de Variación de los Estimadores del Promedio (a partir de la Fórmula del ECM), 171
- Figura 4. Coeficientes de Variación del Estimador Directo del Promedio (distribución muestral, fórmula del ECM), 172
- Figura 5. Coeficientes de Variación de los Estimador de Razón del Promedio (distribución muestral y fórmula del ECM), 172
- Figura 6. Coeficientes de Variación del Estimador de Regresión Lineal del Promedio, usando el  $b$  óptimo (distribución muestral y fórmula del ECM), 173
- Figura 7. Coeficientes de Variación del Estimador de Regresión Lineal del Promedio, usando  $b=1$  (distribución muestral y fórmula del ECM), 173
- Figura 8. Coeficientes de Variación del Estimador de Razón-Regresión del Promedio, usando  $b$  óptimo (distribución muestral y fórmula del ECM), 174
- Figura 9. Coeficientes de Variación del Estimador de Razón-Regresión del Promedio, usando  $b=1$  (distribución muestral y fórmula del ECM), 174
- Figura 10. Coeficientes de Variación del Estimador de Regresión-Razón del Promedio, usando  $b$  óptimo (distribución muestral y fórmula del ECM), 175
- Figura 11. Coeficientes de Variación del Estimador de Regresión-Razón del Promedio, usando  $b=1$  (distribución muestral y fórmula del ECM), 175
- Figura 12. Coeficientes de Variación del Estimador de Regresión-Razón del Promedio, usando dos  $b$  óptimos  $-b_y$  y  $b_z$  (distribución muestral y fórmula del ECM), 176
- Figura 13. Coeficientes de Variación del estimador del promedio por estimador, escenario y variable auxiliar ( $x$ ;  $z$ ;  $xz$ ), 188
- Figura 14. Coeficientes Coeficientes de Variación del estimador del promedio por estimador, escenario y variable auxiliar ( $x$ ;  $xz$ ), 189

## INTRODUCCIÓN

El uso del muestreo se ha masificado y extendido, y son muchas sus aplicaciones - encuestas, control de calidad, auditorías, estudios de poblaciones silvestres, entre otras-. El muestreo consta de varios componentes, según Deming (1960), los 5 componentes de un plan de muestreo son el marco muestral, el procedimiento de selección de la muestra, estimadores a utilizar, fórmulas para estimar el error estándar y el sesgo de los estimadores y evaluación de los errores no muestrales (pp. 38-39). En cuanto a los estimadores de valores poblacionales, se tienen dos tipos: directos e indirectos. Los primeros se basan en los tamaños poblacionales y muestrales, así como en los valores muestrales de la variable a estimar. En los estimadores indirectos se incorpora el uso de “variables auxiliares” -valores muestrales y poblacionales de otras variables incluidas en la investigación-, que de acuerdo a su tratamiento se tienen “estimadores del tipo razón”, y “estimadores del tipo regresión lineal”.

Los estimadores directos generalmente son insesgados, por su parte, los indirectos pueden ser sesgados o insesgados, pero en muestras grandes y con relaciones convenientes entre variables, se logran errores cuadráticos medios menores que en estimadores directos. Si bien la precisión es uno de los aspectos más importantes para decidir la aplicación de un estimador, se deben considerar otros como el diseño para la selección de la muestra, la disponibilidad de información poblacional de las “posibles” variables auxiliares, la sencillez o complejidad de las fórmulas a utilizar, las herramientas de procesamiento, el tiempo y recursos disponibles, entre otros.

Otra aplicación importante del muestreo son los censos de población, considerados como investigaciones sobre variables estructurales, que tradicionalmente se han aplicado a toda la población -enumeración completa-, aunque algunos países aplican técnicas de muestreo simultáneamente al levantamiento de toda la población, esto es, se investigan algunas variables por enumeración completa, y otras por muestreo. En consecuencia, se definirán los censos como "una encuesta destinada a medir las características estructurales de un conjunto de elementos" (Martín-Caro, p. 1), y una encuesta como "un procedimiento en el cual se recopilan, procesan y analizan datos acerca de las características de un conjunto de elementos

(personas, animales, viviendas, objetos), mediante entrevistas, que pueden ser personales, por teléfono o por correo", u observación (Martín-Caro, p. 1).

Contar en un censo con unas variables recopiladas por enumeración completa y otras por muestreo, tiene como ventajas que permite profundizar la investigación de las últimas, ampliar la cantidad de variables a investigar, mejorar la calidad de medición, reducir costos de levantamiento y transcripción y reducir la omisión censal. Utilizar información de otras variables para corregir una estimación directa trae consigo importantes beneficios, más aún cuando tales variables provienen de la misma investigación, ya que se tienen los mismos períodos de referencia y los mismos procedimientos de recolección. Aunque el procesamiento es más complicado y se tiene limitaciones para la desagregación de la información, en comparación con tener todas las variables por enumeración completa.

Cuando se realizan investigaciones por muestreo, se obtienen estimaciones, que, en la mayoría de los casos, no existe manera de compararlas con los valores poblacionales, pero cuando en un censo se investigan unas variables por muestreo y otras por enumeración completa, casi con toda seguridad, se presentarán dos cifras diferentes, correspondientes a la misma variable, una proveniente de la enumeración completa y otra producto de una estimación basada en la muestra, lo cual representa un inconveniente.

Con el objetivo de reducir el problema de los casos descritos, en este trabajo se plantean y generan, por primera vez, los “**Estimadores Indirectos Compuestos**”, que consisten en la aplicación conjunta de estimadores de razón y regresión lineal, dando cabida a dos variables auxiliares. Esto se logra aplicando un ajuste de regresión lineal a un estimador de razón, o un ajuste de razón a un estimador de regresión lineal; a los primeros se les denominará “Estimadores Indirectos Compuestos del Tipo Razón-Regresión” y a los otros “Estimadores Indirectos Compuestos del Tipo Regresión-Razón”. Estos indicadores que se proponen, logran garantizar la igualdad de las cifras en mayor cantidad variables que otros estimadores, sin deteriorar la varianza del estimador, incluso mejorándola en algunos casos.

En la última década se han realizado esfuerzos en el desarrollo de Estimadores

Compuestos, que consisten en una combinación lineal de estimadores directos e indirectos y orientados a estimaciones en áreas geográficas pequeñas, sin embargo, el presente trabajo se enfoca a la definición de Estimadores Indirectos Compuestos, que combina simultáneamente dos estimadores indirectos, de razón y de regresión lineal, bajo las estructuras establecidas en cada uno de ellos, permitiendo la incorporación de una variable auxiliar adicional.

En el Censo de Población y Vivienda de 1990 de Venezuela, se planteó un procedimiento para resolver el problema descrito, que dio origen al desarrollo que aquí se presenta, aunque se debió más a una razón estratégica que al desarrollo preconcebido de los mismos. El autor no conoce otro desarrollo o aplicación de éstos estimadores.

Se aplicó el muestreo en el operativo censal; se investigaron unas variables en toda la población (variables básicas) y otras en una muestra (variables adicionales). Se utilizaron dos cuestionarios, el Básico, que incluía sólo las variables básicas, y el ampliado, que incluía las variables básicas y las adicionales. Se seleccionó una muestra de aproximadamente el 20% a la cual se le aplicó el cuestionario ampliado, al resto se le aplicó el Básico, así, las variables básicas se recogieron en toda la población, y las ampliadas en la muestra mencionada.

Los estimadores utilizados fueron del tipo Razón Separada, aplicados bajo un enfoque de post-estratos, permitiendo el uso simultáneo de dos variables auxiliares no cuantitativas, Sexo y Grupos de Edad; para tal fin se elaboró una matriz de diez Grupos de Edad por Sexo (Hombres y Mujeres) (Venezuela, OCEI, 1993, p. XIX).

El procedimiento de expansión se aplicaba de forma separada e independiente en un conjunto de segmentos (áreas compactas para fines censales, que contenían entre 8 y 12 áreas de empadronamiento aproximadamente), que se denominaban Áreas de Ponderación.

A cada persona se le asignaba un Factor de Expansión, por el cual eran multiplicados y luego sumados para determinar cada estimación.

Cuando se generaban cuadros que incluían variables básicas y adicionales, daban lugar

a diferencias de los totales de las variables básicas que se mostraban en cuadros que incluían sólo variables básicas, ambas cifras provenientes de la misma operación censal. Por supuesto que dichas diferencias eran pequeñas y explicables, pero resultaba estratégico que fueran iguales, específicamente en el caso de la Situación en la Fuerza de Trabajo.

Para el sexo y la edad, las diferencias eran menores que en otras variables, ya que eran variables auxiliares. Se podía incluir la Situación en la Fuerza de Trabajo, como variable auxiliar, aumentando el número de celdas, pero tenía que aumentarse el tamaño de las Áreas de Ponderación, con el consecuente riesgo de trabajar con viviendas, hogares y personas más heterogéneas (al abarcar mayor extensión), y en algunos casos tendrían que unirse Municipios y no se podrían dar estimaciones separadas para éstas unidades geográficas administrativas.

El mismo problema ocurría en variables como “Parentesco o Relación con el Jefe del Hogar”, “Situación Conyugal”, “Asistencia Escolar”, “Sabe Leer y Escribir”, “Lugar de Residencia Anterior”; sin embargo, se consideraba que no eran variables cuyos totales generaran controversia.

Así, se consideró hacer coincidir los totales de las categorías de la variable “Situación en la Fuerza de Trabajo” estimados y poblacionales, por Sexo y Grupos de Edad, para cada Área de Ponderación, modificando los factores de expansión de cada persona. Esto se planteó con el único propósito de “cuadrar” las cifras, pero realmente se estaba haciendo un ajuste de Regresión Lineal a los estimadores de Razón obtenidos, donde el Coeficiente de Regresión  $b$  era el resultado de dividir 1 proporcionalmente entre el total de categorías; es decir, que en el Censo '90 de Venezuela, se aplicó un Estimador Indirecto Compuesto del Tipo Razón-Regresión.

Cabe destacar que así como en el Censo '90, aplicando post-estratos, se incluyeron dos variables auxiliares para estimadores de razón, los estimadores indirectos compuestos permiten la incorporación de aun más variables auxiliares.

La formulación, generación y desarrollo de los Estimadores Indirectos Compuestos

consta del planteamiento de los estimadores propiamente, así como el desarrollo de su esperanza, sesgo, varianza, y error cuadrático medio, utilizando rigurosos procedimientos a partir de la distribución muestral, que garantizan resultados válidos.

En Martín-Caro (2006) dichos procedimientos se aplican a los Estimadores Indirectos conocidos, llamados en este trabajo Estimadores Indirectos Sencillos -tanto de razón como de regresión lineal, para el Muestreo Aleatorio Simple y para el Muestreo Estratificado-, llegando a los mismos resultados publicados en la bibliografía conocida, lo que otorga validez a dichos procedimientos. Bajo el mismo enfoque, aquí se desarrollan los Estimadores Indirectos Compuestos, igualmente, para el Muestreo Aleatorio Simple y el Muestreo Estratificado, en éste último, se plantean varios casos, según se trabajen los estratos de forma separada o combinada. En la tabla 1 se tienen los diferentes tipos de estimadores indirectos compuestos.

Tabla 1 – Tipos de Estimadores Indirectos Compuestos, según Clase de Muestreo

Clase de Muestreo	Estimador
Muestreo Aleatorio Simple	Estimador de Razón-Regresión Estimador de Regresión-Razón
Muestreo Estratificado	Estimador de Razón-Regresión separado-separado Estimador de Razón-Regresión separado-combinado Estimador de Razón-Regresión combinado-separado Estimador de Razón-Regresión combinado-combinado Estimador de Regresión-Razón separado-separado Estimador de Regresión-Razón separado-combinado Estimador de Regresión-Razón combinado-separado Estimador de Regresión-Razón combinado-combinado

Los Estimadores Indirectos Compuestos tienen grandes ventajas sobre los estimadores directos y estimadores indirectos sencillos, y aunque las fórmulas de los estimadores y sobre todo sus varianzas se tornan algo complejas, aunque siempre manejables, la ganancia en precisión puede ser apreciable en algunos casos, y además, en otros casos va a permitir mayor

coincidencia entre valores estimados y poblacionales, razón que pudiera adquirir mayor relevancia en censos donde algunas variables se investigan por muestreo, y tienen que presentarse, a veces en el mismo tomo o volumen, estimaciones y valores poblacionales, ambos provenientes de la misma investigación (Venezuela, OCEI, 1993, p. XX) y (Gurrea y Montero, 1999, p. 35).

Este trabajo es de carácter teórico, y como tal se centra en la formulación teórica de los Estimadores Indirectos Compuestos, de manera que contiene elementos como el planteamiento, deducción y desarrollo analítico de los estimadores propiamente, así como del sesgo, la varianza y el error cuadrático medio de los mismos.

El desarrollo se hará a partir de la distribución muestral, hasta llegar a las fórmulas finales. En principio se plantean los estimadores, luego se desarrollan las esperanzas y las varianzas, y en consecuencia se obtienen los sesgos y los errores cuadráticos medios. Luego se van trabajando hasta llegar a expresiones manejables. En algunos casos se harán aproximaciones basadas en desarrollos de Series de Taylor.

Es importante recalcar que el procedimiento que se aplicará en el desarrollo de los estimadores indirectos compuestos ya fue utilizado en Martín-Caro (2006) para el desarrollo de los estimadores indirectos sencillos, probando su validez.

Luego de su planteamiento, generación y desarrollo, se comparan contra los estimadores directos e indirectos sencillos, en poblacionales artificiales pequeñas y controlables, con diferentes comportamientos, generando todas las muestras posibles, para determinar en que tipo de poblaciones resulta ventajoso la aplicación de ellos. Así mismo, se compara contra los verdaderos valores de las varianzas para determinar la validez de las fórmulas generadas.

Después se trabajarán poblaciones más grandes, para eliminar sesgos en las poblaciones muy pequeñas, generando un gran número de muestras, pero no todas las posibles. Y finalmente se trabajará sobre una población real, utilizando data del XIII Censo de

Población y Vivienda de Venezuela, llevado a cabo en 2001.

Puede evidenciarse que se hará un desarrollo y análisis exhaustivo de los Estimadores Indirectos, que permitirá su mejor aprovechamiento.

Es importante mencionar que no se ha encontrado desarrollo de los estimadores indirectos compuestos, sin embargo se encontró que algunos autores han trabajado estimadores compuestos. Por ejemplo, Sánchez-Crespo y Sánchez-Crespo (1983) -Instituto Nacional de Estadística- publicaron “Estimadores sintéticos en las encuestas socio-económicas” donde describen estos estimadores compuestos.

El Instituto Vasco de Estadística (España, EUSTAT., 2009) plantea un estimador de regresión generalizado y dos estimadores compuestos. El estimador de regresión generalizado se diferencia del estimador de regresión lineal habitual

en que introduce pesos en la estimación de los coeficientes del modelo (normalmente los pesos de muestreo). Este tipo de estimadores utilizan los modelos de regresión como un medio para conseguir estimadores consistentes desde el punto de vista del diseño. Requieren que el muestreo sea aleatorio. Han sido propuestos fundamentalmente por Särndal, Swensson y Wrettman (1989). El estimador de regresión generalizado del total  $Y_h$  en el estrato  $h$  viene dado por

$$\hat{Y}_{1rhG} = \sum_{j=1}^{N_h} \hat{y}_{hj} + \sum_{j=1}^{n_h} W_h (y_{hj} - \hat{y}_{hj})$$

donde  $\hat{y}_{hj}$  son valores predichos por un modelo dado en el estrato  $h$ .

El estimador compuesto se construye para compensar el sesgo del estimador indirecto, frente a la inestabilidad del estimador directo. Viene dado por

$$\hat{Y}_{h,C} = \phi \hat{Y}_{h,D} + (1 - \phi) \hat{Y}_{h,I}$$

donde  $0 \leq \phi \leq 1$ ,  $\hat{Y}_{h,D}$  es un estimador directo de  $Y_h$  y  $\hat{Y}_{h,I}$  es un estimador indirecto de  $Y_h$ .

Muchos de los estimadores propuestos en la literatura bajo diseños o bajo modelos son estimadores compuestos. Entre los estimadores compuestos basados en el diseño podemos tomar por ejemplo  $\hat{Y}_{h,D}$  como estimador directo de razón y  $\hat{Y}_{h,I}$  como estimador indirecto de razón o estimador sintético.

Pfefferman (2002) propone el estimador compuesto:

$$\hat{Y}_{h.C} = \phi \hat{Y}_{h.D} + (1 - \phi) \hat{Y}_{h.SYN}$$

donde  $\phi_h = \frac{n_h}{N_h}$  y  $\hat{Y}_{h.SYN} = X_h \frac{\sum_{h=1}^L \sum_{j=1}^{n_h} W_h y_{hj}}{\sum_{h=1}^L \sum_{j=1}^{n_h} W_h x_{hj}}$

Esta elección de  $\phi_h$  es especialmente adecuada para poblaciones que no sean muy grandes, ya que en otro caso el cociente  $n_h/N_h$  no favorecería necesariamente al estimador directo cuando  $n_h$  crece.

Nótese que  $\hat{Y}_{h.SYN}$  no es más que un estimador de razón combinado. La notación ha sido adaptada a la utilizada en el presente trabajo.

Como puede observarse, estos estimadores compuestos son una combinación lineal o promedio ponderado de un estimador directo y un estimador de regresión lineal, para un estrato determinado, pero no combina estimadores de razón y regresión lineal, ni tampoco aplica el enfoque de estimadores separados y combinados en el muestreo estratificado.

De los que más han trabajado el término de estimadores compuestos son Alex Costa Saenz de San Pedro (Institut d'Estadística de Catalunya), Albert Satorra (Universitat Pompeu Fabra) y Eva Ventura (Universitat Pompeu Fabra), quienes tienen diferentes trabajos al respecto, desarrollados entre 2002 y 2008.

Costa, Satorra y Ventura (2002) hablan de estimadores compuestos en el trabajo “Estimadores Compuestos en Estadística Regional: Aplicación para la Tasa de Variación de la Ocupación en la Industria”, de Diciembre de 2001, muestran tres estimadores, uno directo basado en datos muestrales de cada Comunidad Autónoma, otro sintético (indirecto) que combina los datos estatales con información específica de las Comunidades Autónomas, es un índice compuesto que utiliza 153 índices primarios estimados a escala nacional, y los pondera en función de su importancia relativa en la economía catalana, y un tercer estimador, el compuesto, basado en un modelo estadístico que se concreta en una combinación lineal de los dos anteriores, pero no combinan estimadores indirectos de razón y de regresión.

Luego, los mismos autores, Costa, Satorra y Ventura (2003), estudian las propiedades de la distribución muestral de cinco estimadores para áreas pequeñas mediante simulaciones de Monte Carlo en poblaciones teóricas y empíricas; dichos estimadores son el directo, uno indirecto, y tres estimadores compuestos, que resultan de combinaciones lineales de los anteriores, el teórico, el clásico y el alternativo, pero tampoco combinan los estimadores de razón y de regresión.

Ellos mismos, Costa, Satorra y Ventura (2004 y 2008) también aplican dichos estimadores compuestos, y los definen como “Un estimador compuesto es una combinación lineal de un estimador directo y otro indirecto, con pesos que usualmente dependen de parámetros desconocidos y requieren ser estimados” (Costa, Satorra y Ventura, 2008)

García, Rovira y Ventura (2008) hacen un recuento histórico de la evolución de los estimadores compuestos, desde 1994 hasta 2008, a partir de este momento se inicia el “uso de información auxiliar para mejorar la estimación del sesgo” (pag 2). Pero bajo el mismo enfoque descrito anteriormente.

González (2008) explica el uso de estimadores combinados, que “... permiten que además de la muestra desagregada, se incorpore en la estimación información adicional en la forma de restricciones en un subconjunto de 0.”. (pp.197-216). Pero tampoco combina estimadores de razón y regresión lineal.

García y Artés (2002) hacen una adaptación de dichos estimadores en muestreo sucesivo, que llaman “estimador combinado de la razón poblacional tipo razón-producto” pero en lugar de aplicar un estimador directo y otro indirecto, aplican dos estimadores de razón, para muestras en ocasiones diferentes, para investigaciones periódicas. Eva M. Artés Rodríguez también lo menciona en Artés (2001).

## ESTIMADORES INDIRECTOS SENCILLOS

Tal como se comentó en el capítulo anterior, en Martín-Caro (2006), se tiene el desarrollo de los estimadores indirectos, a partir de la distribución muestral. La metodología que se siguió en esa oportunidad es la misma que se seguirá en el desarrollo de los Estimadores Indirectos Compuestos. Igualmente, se utilizará la misma notación base.

A todos los efectos de desarrollos posteriores, se supondrán universos de tamaño  $N$ , y se trabajarán tres variables, “y”, “x”, “z”. Así, las observaciones poblacionales serán  $y_1, y_2, \dots, y_N$ ;  $x_1, x_2, \dots, x_N$ ;  $z_1, z_2, \dots, z_N$  respectivamente. De dicho universo se extraerá una muestra, que en algunos casos será aleatoria simple y en otros estratificada, los cuales serán indicados en su oportunidad. Cuando el universo se arregle en estratos, los tamaños de cada uno serán  $N_1, N_2, \dots, N_L$ , donde  $L$  es el total de estratos, y las observaciones se definirán por  $y_{hi}, x_{hi}, z_{hi}$ , para indicar el valor de y, x o z en el elemento  $i$ -ésimo del estrato  $h$ .

La notación es la siguiente,

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} = \text{promedio poblacional de la variable } y$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \text{promedio poblacional de la variable } x$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^N z_i}{N} = \text{promedio poblacional de la variable } z$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \text{promedio muestral de la variable } y$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \text{promedio muestral de la variable } x$$

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n} = \text{promedio muestral de la variable } z$$

### Estimadores de Razón en el Muestreo Aleatorio Simple

Se denomina "razón de  $y$  a  $x$ " o simplemente "razón" y se identifica por  $R$ , a

$$R = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{\sum_{i=1}^N x_i} = \frac{Y}{X} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$$

y su estimador es,

$$\hat{R} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{y}{x} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{\hat{Y}}{\hat{X}}$$

y los estimadores de razón del total y el promedio respectivamente son,

$$\hat{Y}_R = \hat{R} X = \frac{y}{x} X \quad \text{y} \quad \hat{\bar{Y}}_R = \bar{y}_R = \hat{R} \bar{X} = \frac{y}{x} \bar{X} = \frac{1}{N} \hat{Y}_R$$

Nótese que tanto el numerador como el denominador son variables aleatorias, y para el desarrollo de su esperanza y varianza se utilizó un procedimiento mostrado por Sukhatme [8;141], que también se aplicará en el desarrollo de los estimadores indirectos compuestos.

La Esperanza, Varianza, Sesgo y Error Cuadrático Medio para los diferentes estimadores son,

$$E(\hat{\bar{Y}}_R) = \bar{Y} \left[ 1 + \frac{1-f}{n} \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}} \right) \right]$$

$$V(\hat{\bar{Y}}_R) \approx \bar{Y}^2 \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ \frac{S_y^2}{\bar{Y}^2} + \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - 2 \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}} - \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}} \right)^2 \right]$$

$$B(\hat{\bar{Y}}_R) = \bar{Y} \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}} - \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} \right)$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_R) \approx \bar{Y}^2 \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_y^2}{\bar{Y}^2} + \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - 2 \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}} \right) = \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2RS_{xy})$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_R) \approx y^2 \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{s_y^2}{y^2} + \frac{s_x^2}{x^2} - 2 \frac{s_{xy}}{x y} \right) = \left( \frac{1-f}{n} \right) (s_y^2 + \hat{R}^2 s_x^2 - 2\hat{R}s_{xy})$$

$$E(\hat{Y}_R) = Y \left[ 1 + \frac{1-f}{n} \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X} \bar{Y}} \right) \right]$$

$$V(\hat{Y}_R) \approx Y^2 \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ \frac{S_y^2}{\bar{Y}^2} + \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - 2 \frac{S_{xy}}{\bar{X} \bar{Y}} - \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X} \bar{Y}} \right)^2 \right]$$

$$B(\hat{Y}_R) = Y \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_{xy}}{\bar{X} \bar{Y}} - \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} \right)$$

$$ECM(\hat{Y}_R) \approx Y^2 \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_y^2}{\bar{Y}^2} + \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - 2 \frac{S_{xy}}{\bar{X} \bar{Y}} \right) = N^2 \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2RS_{xy})$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_R) \approx \hat{Y}^2 \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{s_y^2}{y^2} + \frac{s_x^2}{x^2} - 2 \frac{s_{xy}}{x y} \right) = N^2 \left( \frac{1-f}{n} \right) (s_y^2 + \hat{R}^2 s_x^2 - 2\hat{R}s_{xy})$$

### **Estimadores de Razón en el Muestreo Estratificado**

En el muestreo estratificado se tienen dos estimadores de razón, el primero consiste en utilizar la razón de cada estrato ( $R_h$ ) de manera independiente y separada, y recibe el nombre de “estimador de razón separado”. El segundo aplica una única razón para todos los estratos, y se denomina “estimador de razón combinado”.

El estimador de razón separado para el promedio, su esperanza, sesgo, varianza y error cuadrático medio ( $ECM$ ) son,

$$\hat{Y}_{Rs} = \sum_{h=1}^L W_h \hat{Y}_{R_h}$$

$$E(\hat{Y}_{Rs}) = \sum_{h=1}^L W_h \bar{Y}_h \left[ 1 + \frac{1-f_h}{n_h} \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
B(\hat{Y}_{Rs}) &= \sum_{h=1}^L W_h \bar{Y}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) \\
V(\hat{Y}_{Rs}) &\approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \bar{Y}_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \frac{S_{y_h}^2}{\bar{Y}_h^2} + \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - 2 \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right)^2 \right] - \\
&\quad - 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k Y_h Y_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) \\
ECM(\hat{Y}_{Rs}) &\approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + R_h^2 S_{x_h}^2 - 2R_h S_{xy_h}) \\
E\hat{CM}(\hat{Y}_{Rs}) &\approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (s_{y_h}^2 + \hat{R}_h^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{R}_h s_{xy_h})
\end{aligned}$$

y para el total se tiene,

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{Rs} &= \sum_{h=1}^L \hat{Y}_{R_h} = \sum_{h=1}^L \frac{y_h}{x_h} X_h \\
E(\hat{Y}_{Rs}) &= \sum_{h=1}^L Y_h \left[ 1 + \frac{1-f_h}{n_h} \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \right] \\
B(\hat{Y}_{Rs}) &= \sum_{h=1}^L Y_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) \\
V(\hat{Y}_{Rs}) &\approx \sum_{h=1}^L Y_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \frac{S_{y_h}^2}{\bar{Y}_h^2} + \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - 2 \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right)^2 \right] - \\
&\quad - 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L Y_h Y_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) \\
ECM(\hat{Y}_{Rs}) &\approx \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + R_h^2 S_{x_h}^2 - 2R_h S_{xy_h}) \\
E\hat{CM}(\hat{Y}_{Rs}) &\approx \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (s_{y_h}^2 + \hat{R}_h^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{R}_h s_{xy_h})
\end{aligned}$$

donde  $R_h = \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h}$  ,  $\hat{R}_h = \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}$

Por su parte, el estimador de razón combinado para el promedio, su esperanza, sesgo, varianza y *ECM*,

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{Rc} &= \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} \bar{X} \\ E(\hat{Y}_{Rc}) &= \bar{Y} - \frac{1}{\bar{X}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{xy_h} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{x_h}^2 \right] = \bar{Y} + \frac{1}{\bar{X}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ R_c S_{x_h}^2 - S_{xy_h} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{x_h}^2 \right] \\ B(\hat{Y}_{Rc}) &= \frac{1}{\bar{X}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{xy_h} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{x_h}^2 \right] = \frac{1}{\bar{X}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{xy_h} - R_c S_{x_h}^2 \right] \\ V(\hat{Y}_{Rc}) &\approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 - 2R_c S_{xy_h} + R_c^2 S_{x_h}^2 \right) - \frac{1}{\bar{X}^2} \left( \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{xy_h} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{x_h}^2 \right) \right)^2 \\ ECM(\hat{Y}_{Rc}) &\approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 - 2R_c S_{xy_h} + R_c^2 S_{x_h}^2 \right) \\ \hat{ECM}(\hat{Y}_{Rc}) &\approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( s_{y_h}^2 - 2\hat{R}_c s_{xy_h} + \hat{R}_c^2 s_{x_h}^2 \right)\end{aligned}$$

y para el total

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{Rc} &= \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} X \\ E(\hat{Y}_{Rc}) &= Y - \frac{1}{\bar{X}} \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{xy_h} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{x_h}^2 \right] = Y + \frac{1}{\bar{X}} \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ R_c S_{x_h}^2 - S_{xy_h} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{x_h}^2 \right] \\ B(\hat{Y}_{Rc}) &= \frac{1}{\bar{X}} \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{xy_h} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{x_h}^2 \right] = \frac{1}{\bar{X}} \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{xy_h} - R_c S_{x_h}^2 \right] \\ V(\hat{Y}_{Rc}) &\approx \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 - 2R_c S_{xy_h} + R_c^2 S_{x_h}^2 \right) - \frac{1}{\bar{X}^2} \left( \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{xy_h} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{x_h}^2 \right) \right)^2 \\ ECM(\hat{Y}_{Rc}) &\approx \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 - 2R_c S_{xy_h} + R_c^2 S_{x_h}^2 \right) \\ \hat{ECM}(\hat{Y}_{Rc}) &\approx \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( s_{y_h}^2 - 2\hat{R}_c s_{xy_h} + \hat{R}_c^2 s_{x_h}^2 \right)\end{aligned}$$

$$\text{donde } R_c = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}, \quad \hat{R}_c = \frac{\hat{Y}_{st}}{\hat{X}_{st}}$$

Nótese que para estimar la razón combinada se toma la razón de los estimadores de los promedios. En Martín-Caro (2006) se desarrollan otros estimadores de razón combinados, que consisten en estimar la razón a través del promedio de los estimadores de las razones. Se denominan estimadores de razón combinado estratificado. El resultado para el estimador del promedio es el siguiente,

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{Rcst} &= \bar{X} \sum_{h=1}^L W_h \left( \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \right) \\ E\left[\hat{Y}_{Rcst}\right] &= \bar{X} \sum_{h=1}^L W_h \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \right) + \bar{X} \sum_{h=1}^L W_h \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \right) \left[ \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \right] \\ B\left[\hat{Y}_{Rcst}\right] &= \bar{Y} - \bar{X} \sum_{h=1}^L W_h \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \right) + \bar{X} \sum_{h=1}^L W_h \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \right) \left[ \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \right] \\ V\left[\hat{Y}_{Rcst}\right] &\approx X^2 \left[ \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \right)^2 \left( 1 + \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{S_{y_h}^2}{\bar{Y}_h^2} - 4 \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} + 3 \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \right) \left( \frac{\bar{Y}_k}{\bar{X}_k} \right) \left( 1 + \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{Y}_h \bar{X}_h} \right) \right) \left( 1 + \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{Y}_k \bar{X}_k} \right) \right) \right] - \\ &\quad - X^2 \left[ \sum_{h=1}^L W_h R_h \left( 1 + \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \right) \right]^2 \\ ECM\left[\hat{Y}_{Rcst}\right] &\approx X^2 \left[ \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \right)^2 \left( 1 + \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{S_{y_h}^2}{\bar{Y}_h^2} - 4 \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} + 3 \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \right) \left( \frac{\bar{Y}_k}{\bar{X}_k} \right) \left( 1 + \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{Y}_h \bar{X}_h} \right) \right) \left( 1 + \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{Y}_k \bar{X}_k} \right) \right) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{Y}^2 - 2\bar{X}\bar{Y} \sum_{h=1}^L W_h R_h \left( 1 + \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \right) \\
\hat{ECM} \left[ \hat{Y}_{Rcst} \right] & \approx \bar{X}^2 \left[ \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \right)^2 \left( 1 + \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{s_{y_h}^2}{\bar{y}_h^2} - 4 \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{s_{xy_h}}{\bar{x}_h \bar{y}_h} + 3 \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{s_{x_h}^2}{\bar{x}_h^2} \right) + \right. \\
& + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k \left( \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \right) \left( \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k} \right) \left( 1 + \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{x}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{y}_h \bar{x}_h} \right) \right) \left( 1 + \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{x}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{y}_k \bar{x}_k} \right) \right) \right] + \\
& \left. + \hat{R}_{cst}^2 - 2\hat{R}_{cst} \sum_{h=1}^L W_h \hat{R}_h \left( 1 + \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{x}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{x}_h \bar{y}_h} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

Para el total se tiene,

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{Rcst} & = X \sum_{h=1}^L W_h \left( \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \right) \\
E[\hat{Y}_{Rcst}] & = X \sum_{h=1}^L W_h R_h \left[ 1 + \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \right] \\
B[\hat{Y}_{Rcst}] & = Y - X \sum_{h=1}^L W_h R_h \left[ 1 + \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \right] \\
V[\hat{Y}_{Rcst}] & \approx X^2 \left[ \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \right)^2 \left( 1 + \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{S_{y_h}^2}{\bar{Y}_h^2} - 4 \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} + 3 \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) + \right. \\
& + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \right) \left( \frac{\bar{Y}_k}{\bar{X}_k} \right) \left( 1 + \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{Y}_h \bar{X}_h} \right) \right) \left( 1 + \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{Y}_k \bar{X}_k} \right) \right) \right] - \\
& - X^2 \left[ \sum_{h=1}^L W_h R_h \left( 1 + \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \right) \right]^2 \\
ECM \left[ \hat{Y}_{Rcst} \right] & \approx X^2 \left[ \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \right)^2 \left( 1 + \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{S_{y_h}^2}{\bar{Y}_h^2} - 4 \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} + 3 \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \right) \left( \frac{\bar{Y}_k}{\bar{X}_k} \right) \left( 1 + \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{Y}_h \bar{X}_h} \right) \right) \left( 1 + \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{Y}_k \bar{X}_k} \right) \right) \Bigg] + \\
& + Y^2 - 2XY \sum_{h=1}^L W_h R_h \left( 1 + \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \right) \\
E\hat{C}M[\hat{Y}_{Rcst}] & \approx X^2 \left[ \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \right)^2 \left( 1 + \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{s_{y_h}^2}{\bar{y}_h^2} - 4 \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{s_{xy_h}}{\bar{x}_h \bar{y}_h} + 3 \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \frac{s_{x_h}^2}{\bar{x}_h^2} \right) + \right. \\
& + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k \left( \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \right) \left( \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k} \right) \left( 1 + \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{x}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{y}_h \bar{x}_h} \right) \right) \left( 1 + \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{x}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{y}_k \bar{x}_k} \right) \right) \Bigg] + \\
& + \hat{R}_{cst}^2 - 2\hat{R}_{cst} \sum_{h=1}^L W_h \hat{R}_h \left( 1 + \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{x}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{x}_h \bar{y}_h} \right) \right) \Bigg]
\end{aligned}$$

donde  $R_c = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$  ,  $\hat{R}_{cst} = \sum_{h=1}^L W_h \hat{R}_h = \sum_{h=1}^L W_h \left( \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \right)$

### **Estimadores de Regresión Lineal en el Muestreo Aleatorio Simple**

Los estimadores de regresión lineal se definen como

$$\hat{Y}_{lr} = \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}) \quad , \quad \hat{Y}_{lr} = N\hat{Y}_{lr} = \hat{Y} + b(X - \hat{X})$$

Cabe destacar que si  $b$  no es constante estos estimadores son sesgados, por el contrario, si  $b$  es constante, como en la mayoría de los casos, los estimadores son insesgados, y se tiene que,

$$E(\hat{Y}_{lr}) = \bar{Y} \quad , \quad E(\hat{Y}_{lr}) = Y$$

$$B(\hat{Y}_{lr}) = 0 \quad , \quad B(\hat{Y}_{lr}) = 0$$

y sus *ECM* son,

$$ECM(\hat{Y}_{lr}) = \frac{(N-n)}{Nn} [S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}] \quad , \quad ECM(\hat{Y}_{lr}) = \frac{N(N-n)}{n} [S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{lr}) = \frac{(N-n)}{Nn} [s_y^2 + b^2 s_x^2 - 2bs_{xy}] \quad , \quad E\hat{C}M(\hat{Y}_{lr}) = \frac{N(N-n)}{n} [s_y^2 + b^2 s_x^2 - 2bs_{xy}]$$

Se tienen unos casos especiales, de acuerdo al valor de  $b$ , que se describen a continuación.

Cuando  $b=0$ , el estimador de regresión se transforma en el estimador insesgado.

$$\hat{Y}_{lr} = \bar{y} + 0(\bar{X} - \bar{x}) = \bar{y}$$

Si  $b = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ , es estimador de regresión lineal toma la forma del estimador de razón,

$$\hat{Y}_{lr} = \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}) = \bar{y} + \frac{\bar{y}}{\bar{x}}(\bar{X} - \bar{x}) = \bar{y} + \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{X} - \bar{y} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{X}$$

Si  $b=1$ , se denomina el estimador por diferencia, ya que se corrige el promedio muestral sólo por la diferencia entre los promedios poblacional y muestral de la variable auxiliar; esto es,

$$\hat{Y}_{lr} = \bar{y} + (\bar{X} - \bar{x})$$

Caso especial es el estimador de varianza mínima para  $b$  constante, y se trata de determinar  $b$  que minimice el *ECM* del estimador. Para ello se toma la derivada de  $ECM(\hat{Y}_{lr})$  y se iguala a cero, y se despeja  $b$ . Luego se toma la segunda derivada para determinar si en ese punto hay un máximo o un mínimo. El resultado es,

que en  $b_0 = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$  se minimiza  $ECM(\hat{Y}_{lr})$

### Estimadores de Regresión Lineal en el Muestreo Estratificado

Igual que para los estimadores de razón, los estimadores de regresión lineal pueden ser usados cuando la muestra es estratificada, considerando los mismos enfoques, y se tienen los estimadores de regresión lineal separado y combinado.

$$\hat{Y}_{lrs} = \sum_{h=1}^L \hat{Y}_{lrh} = \sum_{h=1}^L \hat{Y}_h + b_h (X_h - \hat{X}_h)$$

$$\hat{\hat{Y}}_{lrs} = \sum_{h=1}^L W_h [\bar{y}_h + b_h (\bar{X}_h - \bar{x}_h)]$$

considerando  $b_h$  como una constante en cada estrato, los errores cuadráticos medios resultan,

$$ECM(\hat{Y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^L \frac{N_h(N_h - n_h)}{n_h} [S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}]$$

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lrs}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{(N_h - n_h)}{N_h n_h} [S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}]$$

y sus estimadores,

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^L \frac{N_h(N_h - n_h)}{n_h} [s_{y_h}^2 + b_h^2 s_{x_h}^2 - 2b_h s_{xy_h}]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\hat{Y}}_{lrs}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{(N_h - n_h)}{N_h n_h} [s_{y_h}^2 + b_h^2 s_{x_h}^2 - 2b_h s_{xy_h}]$$

Se presentan los mismos casos especiales que en el muestreo aleatorio simple. Especial atención merece el de varianza mínima, y se tiene que,

$$b_{h0} = \frac{S_{xy_h}}{S_{x_h}^2} \quad , \quad \hat{b}_{h0} = \frac{s_{xy_h}}{s_{x_h}^2} \quad \forall h, h=1,2,\dots,L$$

En cuanto a los estimadores de regresión lineal combinado, para el caso general, manteniendo  $b$  constante (que se denotará por  $b_c$ ), los estimadores y sus respectivas esperanzas y varianzas son los siguientes,

$$\hat{Y}_{lrc} = \sum_{h=1}^L W_h (\bar{y}_h + b_c (\bar{X}_h - \bar{x}_h))$$

$$E(\hat{Y}_{lrc}) = E\left[\sum_{h=1}^L W_h (\bar{y}_h + b_c (\bar{X}_h - \bar{x}_h))\right] = \sum_{h=1}^L E[W_h (\bar{y}_h + b_c (\bar{X}_h - \bar{x}_h))] = \bar{Y}$$

por lo tanto es un estimador insesgado.

$$ECM(\hat{Y}_{lrc}) = V(\hat{Y}_{lrc}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} [S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h}]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{lrc}) = \hat{V}(\hat{Y}_{lrc}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} [s_{y_h}^2 + b_c^2 s_{x_h}^2 - 2b_c s_{xy_h}]$$

Para el total se tiene que,

$$\hat{Y}_{lrc} = \sum_{h=1}^L N_h (\bar{y}_h + b_c (\bar{X}_h - \bar{x}_h))$$

$$E(\hat{Y}_{lrc}) = E(N\hat{Y}_{lrc}) = NE(\hat{Y}_{lrc}) = N\bar{Y} = Y$$

$$ECM(\hat{Y}_{lrc}) = V(\hat{Y}_{lrc}) = \sum_{h=1}^L \frac{N_h(N_h - n_h)}{n_h} [S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h}]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{lrc}) = \hat{V}(\hat{Y}_{lrc}) = \sum_{h=1}^L \frac{N_h(N_h - n_h)}{n_h} [s_{y_h}^2 + b_c^2 s_{x_h}^2 - 2b_c s_{xy_h}]$$

Cuando se quiere minimizar el  $ECM$ , se deriva la varianza respecto de  $b_{c0}$  y se iguala a cero, y se despeja  $b_{c0}$ , entonces,

$$b_{c0} = \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} S_{xy_h}}{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} S_{x_h}^2} = \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{1 - f_h}{n_h} S_{xy_h}}{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{1 - f_h}{n_h} S_{x_h}^2}$$

## ESTIMADORES INDIRECTOS COMPUESTOS

Los estimadores indirectos compuestos son aquellos en los cuales se utilizan los estimadores de razón y de regresión lineal de manera simultánea. De acuerdo a como sean utilizados, se denominarán “Estimadores de Razón-Regresión” cuando a dos estimadores de razón se le aplica un estimador de regresión lineal, y “Estimadores de Regresión-Razón” cuando a dos estimadores de regresión lineal se le aplica un estimador de razón.

A continuación se desarrollan estos estimadores, en el muestreo aleatorio simple y en el muestreo estratificado, en el cual se trabajan de forma separada y combinada cada uno de los componentes de ambos estimadores.

### Estimadores del Tipo Razón-Regresión

Estos estimadores utilizan combinan estimadores de razón y de regresión, y consiste en una estimación de regresión lineal, pero en lugar de basarse en valores muestrales, está basado en estimadores de razón, es decir, se ajustan los estimadores de razón a través de una estimación de regresión lineal.

Sean  $\hat{Y}_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X}$  y  $\hat{Y}_{lr} = \hat{Y} + b(\bar{X} - \hat{X}) = \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})$  los estimadores del tipo razón y del tipo regresión lineal respectivamente, del promedio poblacional, entonces se define como el “estimador de razón-regresión del promedio poblacional” a la siguiente expresión,

$$\hat{Y}_{Rr} = \hat{Y}_R + b(\bar{Z} - \hat{Z}_R) = \hat{Y}_R + b\bar{Z} - b\hat{Z}_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X} + b\bar{Z} - b\frac{\bar{z}}{\bar{x}} \bar{X}$$

y como el “estimador de razón-regresión del total poblacional” a,

$$\hat{Y}_{Rr} = N\hat{Y}_{Rr} = \hat{Y}_R + b(Z - \hat{Z}_R) = \hat{Y}_R + b\hat{Z} - b\hat{Z}_R = \frac{y}{x} X + b\hat{Z} - b\frac{z}{x} X$$

### Esperanzas de los Estimadores

Tomando  $b$  constante, la esperanza es

$$\begin{aligned} E(\hat{Y}_{Rr}) &= E(\hat{Y}_R) + b\bar{Z} - bE(\hat{Z}_R) = \bar{Y} \left[ 1 + \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}} \right) \right] + b\bar{Z} - b\bar{Z} \left[ 1 + \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}} \right) \right] \\ &= \bar{Y} \left[ 1 + \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}} \right) \right] - b\bar{Z} \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}} \right) \end{aligned}$$

entonces el sesgo es,

$$B(\hat{Y}_{Rr}) = \bar{Y} \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}} \right) - b\bar{Z} \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}} \right)$$

(A)

$$= \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} \right) (\bar{Y} - b\bar{Z}) - \frac{S_{xy}}{\bar{X}} + b \frac{S_{xz}}{\bar{X}} \right]$$

Sean,

$$\begin{array}{cccc} S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2}{N-1} & S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})(x_i - \bar{X})}{N-1} & s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1} & s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{n-1} \\ S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2}{N-1} & S_{xz} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})(z_i - \bar{Z})}{N-1} & s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} & s_{xz} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(z_i - \bar{z})}{n-1} \\ S_z^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (z_i - \bar{Z})^2}{N-1} & S_{yz} = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})(z_i - \bar{Z})}{N-1} & s_z^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}{n-1} & s_{yz} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z})}{n-1} \end{array}$$

### ***Error Cuadrático Medio de los Estimadores***

Como no son estimadores insesgados, entonces  $ECM(\hat{Y}_{Rr}) = V(\hat{Y}_{Rr}) + (B(\hat{Y}_{Rr}))^2$  y  $ECM(\hat{Y}_{Rr}) = V(\hat{Y}_{Rr}) + (B(\hat{Y}_{Rr}))^2$ . En principio se desarrollará la varianza del estimador del promedio. Esto es,

$$V(\hat{Y}_{Rr}) = V(\hat{Y}_R + b\bar{Z} - b\hat{Z}_R) = V(\hat{Y}_R) + b^2V(\bar{Z}) + b^2V(\hat{Z}_R) + 2COV(\hat{Y}_R, b\bar{Z}) - 2COV(\hat{Y}_R, b\hat{Z}_R) - 2COV(b\bar{Z}, b\hat{Z}_R)$$

pero como  $\bar{Z}$  es constante para cualquier muestra, y asumiendo  $b$  constante,

$$V(\bar{Z}) = 0$$

$$COV(\hat{Y}_R, b\bar{Z}) = bCOV(\hat{Y}_R, \bar{Z}) = 0$$

$$COV(b\bar{Z}, b\hat{Z}_R) = b^2COV(\bar{Z}, \hat{Z}_R) = 0$$

por lo tanto,  $V(\hat{Y}_{Rr}) = V(\hat{Y}_R) + b^2V(\hat{Z}_R) - 2bCOV(\hat{Y}_R, \hat{Z}_R)$

según Martín-Caro (2006, p. 81), se tiene que,

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}_R) &\approx Y^2 \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ \frac{S_y^2}{Y^2} + \frac{S_x^2}{X^2} - 2 \frac{S_{xy}}{XY} - \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_x^2}{X^2} - \frac{S_{xy}}{XY} \right)^2 \right] \\ &\approx \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ S_y^2 + \frac{Y^2}{X^2} S_x^2 - 2 \frac{Y}{X} S_{xy} - Y^2 \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_x^2}{X^2} - \frac{S_{xy}}{XY} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} V(\hat{Z}_R) &\approx Z^2 \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ \frac{S_z^2}{Z^2} + \frac{S_x^2}{X^2} - 2 \frac{S_{xz}}{XZ} - \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_x^2}{X^2} - \frac{S_{xz}}{XZ} \right)^2 \right] \\ &\approx \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ S_z^2 + \frac{Z^2}{X^2} S_x^2 - 2 \frac{Z}{X} S_{xz} - Z^2 \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_x^2}{X^2} - \frac{S_{xz}}{XZ} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Ahora se desarrollará  $COV(\hat{Y}_R, \hat{Z}_R)$ ,

$$\begin{aligned}
 COV(\hat{Y}_R, \hat{Z}_R) &= E\left[\left(\hat{Y}_R - E(\hat{Y}_R)\right)\left(\hat{Z}_R - E(\hat{Z}_R)\right)\right] = E\left[\hat{Y}_R \hat{Z}_R - \hat{Y}_R E(\hat{Z}_R) - E(\hat{Y}_R) \hat{Z}_R + E(\hat{Y}_R) E(\hat{Z}_R)\right] \\
 &= E(\hat{Y}_R \hat{Z}_R) - E(\hat{Y}_R) E(\hat{Z}_R) \\
 &= E\left[\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X}\right)\left(\frac{\bar{z}}{\bar{x}} \bar{X}\right)\right] - \bar{Y} \bar{Z} \left[1 + \frac{1-f}{n} \left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}}\right)\right] \left[1 + \frac{1-f}{n} \left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}}\right)\right] \\
 &= \bar{X}^2 E\left(\frac{\bar{y}\bar{z}}{\bar{x}^2}\right) - \bar{Y} \bar{Z} \left[1 + \left(\frac{1-f}{n}\right) \left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}}\right) + \left(\frac{1-f}{n}\right) \left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}}\right) + \left(\frac{1-f}{n}\right) \left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}}\right) \left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}}\right)\right]
 \end{aligned} \tag{1}$$

para hallar  $E\left(\frac{\bar{y}\bar{z}}{\bar{x}^2}\right)$  se aplicará el mismo procedimiento utilizado en Martín-Caro (2006) para desarrollar los estimadores de razón, que es mostrado por por Sukhatme (1956, p 141). Debe recalarse que en los estimadores de razón tanto el numerador como el denominador son variables aleatorias, por lo tanto los cálculos de la esperanza y la varianza son complejos, y aquí se tiene la esperanza del producto de dos razones.

Se definirán

$$\begin{cases} y_i = \bar{Y} + e_i \\ x_i = \bar{X} + e'_i \\ z_i = \bar{X} + e''_i \end{cases} \quad \text{donde } e_i, e'_i, e''_i \text{ son los desvíos de } y_i, x_i, z_i \text{ respecto de } \bar{Y}, \bar{X}, \bar{Z}.$$

de manera que,

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{Y} + e_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \bar{Y}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n e_i}{n} = \bar{Y} + \bar{e}$$

siendo  $\bar{e}$  la media muestral de los desvíos de  $y$ . Entonces,

$$E(\bar{y}) = E(\bar{Y} + \bar{e}) = E(\bar{Y}) + E(\bar{e}) = \bar{Y} + E(\bar{e}) \quad (2)$$

desarrollando el segundo miembro,

$$E(\bar{e}) = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \frac{e_k}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_{ki}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N-1}{n-1} \sum_{i=1}^N e_i}{n \binom{N}{n}} = \frac{\sum_{i=1}^N e_i}{N} = \bar{E} = 0$$

donde  $\bar{E}$  es el promedio poblacional de los desvíos de  $y$ . Es decir que la esperanza del promedio muestral de los desvíos, es el promedio poblacional de los desvíos, que a su vez es cero. Entonces, sustituyendo este resultado en (2), se tiene que,

$$E(\bar{y}) = \bar{Y}$$

que es un estimador insesgado, tal como ya se conoce. Lo que se hizo fue verificar que esta manera de definir a  $y_i$  es correcta. Ahora se hallará la varianza de  $e$ .

$$V(\bar{e}) = E[(\bar{e} - E(\bar{e}))^2] = E(\bar{e}^2) + E[(\bar{e})]^2$$

desarrollando el primer término,

$$\begin{aligned} E(\bar{e}^2) &= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \left(\frac{e_k}{n}\right)^2}{\binom{N}{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} e_k^2}{n^2 \binom{N}{n}} = \frac{1}{n^2 \binom{N}{n}} \left[ \binom{N-1}{n-1} \sum_{i=1}^N e_i^2 + 2 \binom{N-2}{n-2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N e_i e_j \right] \\ &= \frac{\binom{N-1}{n-1} \sum_{i=1}^N e_i^2}{n^2 \binom{N}{n}} + 2 \frac{\binom{N-2}{n-2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N e_i e_j}{n^2 \binom{N}{n}} = \frac{\sum_{i=1}^N e_i^2}{n N} + \frac{2(n-1)}{N-1} \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N e_i e_j}{n N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n N} \left[ \sum_{i=1}^N e_i^2 + \frac{2(n-1)}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N e_i e_j \right] \\
&= \frac{1}{n N} \left[ \sum_{i=1}^N e_i^2 + 2 \frac{n-1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N e_i e_j + \frac{n-1}{N-1} \sum_{i=1}^N e_i^2 - \frac{n-1}{N-1} \sum_{i=1}^N e_i^2 \right] \\
&= \frac{1}{n N} \left[ \left( \frac{n-1}{N-1} \right) \left( \sum_{i=1}^N e_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N e_i e_j \right) + \left( 1 - \frac{n-1}{N-1} \right) \sum_{i=1}^N e_i^2 \right] \\
&= \frac{1}{n N} \left[ \left( \frac{n-1}{N-1} \right) \left( \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (y_i - \bar{Y})(y_j - \bar{Y}) \right) + \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 \right] \\
&= \frac{1}{n N} \left[ \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 + 2 \frac{n-1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N (y_i - \bar{Y})(y_j - \bar{Y}) \right] \\
&= \frac{1}{n N} \left[ \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 + \frac{n-1}{N-1} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (y_i - \bar{Y})(y_j - \bar{Y}) \right] \\
&= \frac{1}{n N} \left[ \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 + \frac{n-1}{N-1} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N y_i y_j - \frac{n-1}{N-1} \bar{Y} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N y_j - \frac{n-1}{N-1} \bar{Y} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N y_i + \frac{n-1}{N-1} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \bar{Y}^2 \right]
\end{aligned} \tag{3}$$

pero como,

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N y_i y_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N y_i y_j - \sum_{i=1}^N y_i^2 \tag{4}$$

y

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N y_j = (N-1) \sum_{j=1}^N y_j = N(N-1)\bar{Y} \quad ; \quad \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N y_i = (N-1) \sum_{i=1}^N y_i = N(N-1)\bar{Y} \quad (5)$$

además,

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \bar{Y}^2 = N(N-1) \bar{Y}^2 \quad (6)$$

sustituyendo (4),(5) y (6) en (3)

$$E(\bar{e}^2) = \frac{1}{nN} \left[ \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 + \frac{n-1}{N-1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N y_i y_j - \frac{n-1}{N-1} \sum_{i=1}^N y_i^2 - 2(n-1)N\bar{Y}^2 + (n-1)N\bar{Y}^2 \right]$$

descomponiendo,

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N y_i y_j = \sum_{i=1}^N y_i \sum_{j=1}^N y_j = N^2 \bar{Y}^2$$

entonces,

$$\begin{aligned} E(\bar{e}^2) &= \frac{1}{nN} \left[ \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 + N^2 \frac{n-1}{N-1} \bar{Y}^2 - \frac{n-1}{N-1} \sum_{i=1}^N y_i^2 - (n-1)N\bar{Y}^2 \right] \\ &= \frac{1}{nN} \left[ \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 + N \frac{n-1}{N-1} \bar{Y}^2 - \frac{n-1}{N-1} \sum_{i=1}^N y_i^2 \right] = \frac{1}{nN} \left[ \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 - \left( \frac{n-1}{N-1} \right) \left( \sum_{i=1}^N y_i^2 - N\bar{Y}^2 \right) \right] \\ &= \frac{1}{nN} \left[ \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 - \left( \frac{n-1}{N-1} \right) \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 \right] = \frac{1}{nN} \left[ \left( 1 - \frac{n-1}{N-1} \right) \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2 \right] \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$E(\bar{e}^2) = \frac{N-n}{Nn} \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{Y})^2}{N-1} = \frac{1-f}{n} S_y^2 \quad (7)$$

es decir que,

$$V(\bar{e}) = E(\bar{e}^2) = V(\bar{y}) = \frac{1-f}{n} S_y^2$$

De la misma manera,

$$\bar{x} = \bar{X} + \bar{e}'$$

$$E(\bar{e}') = \bar{E}' = 0 \quad \Rightarrow \quad E(\bar{x}) = \bar{X}$$

$$V(\bar{e}') = E(\bar{e}'^2) = V(\bar{x}) = \frac{1-f}{n} S_x^2 \quad (8)$$

y

$$\bar{z} = \bar{Z} + \bar{e}''$$

$$E(\bar{e}'') = \bar{E}'' = 0 \quad \Rightarrow \quad E(\bar{z}) = \bar{Z}$$

$$V(\bar{e}'') = E(\bar{e}''^2) = V(\bar{z}) = \frac{1-f}{n} S_z^2 \quad (9)$$

entonces,

$$\frac{\bar{y}\bar{z}}{\bar{x}^2} = \frac{(Y+\bar{e})(Z+\bar{e}'')}{(X+\bar{e}')^2} = \frac{Y\left(1+\frac{\bar{e}}{Y}\right) Z\left(1+\frac{\bar{e}''}{Z}\right)}{X^2\left(1+\frac{\bar{e}'}{X}\right)^2} = \frac{YZ}{X^2} \frac{\left(1+\frac{\bar{e}}{Y}\right) \left(1+\frac{\bar{e}''}{Z}\right)}{\left(1+\frac{\bar{e}'}{X}\right)^2}$$

entonces,

$$E\left(\frac{\bar{y}\bar{z}}{\bar{x}^2}\right) = E\left[\frac{YZ}{X^2} \frac{\left(1+\frac{\bar{e}}{Y}\right) \left(1+\frac{\bar{e}''}{Z}\right)}{\left(1+\frac{\bar{e}'}{X}\right)^2}\right] = \left(\frac{YZ}{X^2}\right) E\left[\frac{\left(1+\frac{\bar{e}}{Y}\right) \left(1+\frac{\bar{e}''}{Z}\right)}{\left(1+\frac{\bar{e}'}{X}\right)^2}\right] \quad (10)$$

desarrollando la Serie de Taylor del denominador, se tiene que por Martín-Caro (2006, p. 76),

$$\left(1+\frac{\bar{e}'}{X}\right)^{-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)\bar{e}'^k}{X^k} \quad \text{que sustituyendo en (2),}$$

$$E\left(\frac{\bar{y}\bar{z}}{\bar{x}^2}\right) = \left(\frac{\bar{Y}\bar{Z}}{\bar{X}^2}\right) E\left[\left(1+\frac{\bar{e}}{\bar{Y}}\right)\left(1+\frac{\bar{e}''}{\bar{Z}}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(k+1)\bar{e}^k}{\bar{X}^k}\right] = \left(\frac{\bar{Y}\bar{Z}}{\bar{X}^2}\right) E\left[\left(1+\frac{\bar{e}}{\bar{Y}}+\frac{\bar{e}''}{\bar{Z}}+\frac{\bar{e}\bar{e}''}{\bar{Y}\bar{Z}}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(k+1)\bar{e}^k}{\bar{X}^k}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{\bar{Y}\bar{Z}}{\bar{X}^2}\right) E\left[1+\frac{\bar{e}}{\bar{Y}}+\frac{\bar{e}''}{\bar{Z}}+\frac{\bar{e}\bar{e}''}{\bar{Y}\bar{Z}}-2\frac{\bar{e}'}{\bar{X}}-2\frac{\bar{e}\bar{e}'}{\bar{X}\bar{Y}}-2\frac{\bar{e}'\bar{e}''}{\bar{X}\bar{Z}}-2\frac{\bar{e}\bar{e}'\bar{e}''}{\bar{Y}\bar{X}\bar{Z}}+3\frac{\bar{e}^2}{\bar{X}^2}+3\frac{\bar{e}\bar{e}^2}{\bar{Y}\bar{X}^2}+3\frac{\bar{e}^2\bar{e}''}{\bar{X}^2\bar{Z}}+3\frac{\bar{e}\bar{e}^2\bar{e}''}{\bar{Y}\bar{X}^2\bar{Z}}+\dots\right]$$

truncando en potencias de 2,

$$E\left(\frac{\bar{y}\bar{z}}{\bar{x}^2}\right) \approx \left(\frac{\bar{Y}\bar{Z}}{\bar{X}^2}\right) E\left[1+\frac{\bar{e}}{\bar{Y}}+\frac{\bar{e}''}{\bar{Z}}+\frac{\bar{e}\bar{e}''}{\bar{Y}\bar{Z}}-2\frac{\bar{e}'}{\bar{X}}-2\frac{\bar{e}\bar{e}'}{\bar{Y}\bar{X}}-2\frac{\bar{e}'\bar{e}''}{\bar{X}\bar{Z}}+3\frac{\bar{e}^2}{\bar{X}^2}\right]$$

$$\approx \left(\frac{\bar{Y}\bar{Z}}{\bar{X}^2}\right) \left[1+\frac{1}{\bar{Y}}E(\bar{e})+\frac{1}{\bar{Z}}E(\bar{e}'')+\frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}}E(\bar{e}\bar{e}'')-\frac{2}{\bar{X}}E(\bar{e}')-\frac{2}{\bar{Y}\bar{X}}E(\bar{e}\bar{e}')-\frac{2}{\bar{X}\bar{Z}}E(\bar{e}'\bar{e}'')+\frac{3}{\bar{X}^2}E(\bar{e}^2)\right]$$

y como  $E(\bar{e})=0$  ,  $E(\bar{e}')=0$  ,  $E(\bar{e}'')=0$

$$E\left(\frac{\bar{y}\bar{z}}{\bar{x}^2}\right) \approx \left(\frac{\bar{Y}\bar{Z}}{\bar{X}^2}\right) \left[1+\frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}}E(\bar{e}\bar{e}'')-\frac{2}{\bar{Y}\bar{X}}E(\bar{e}\bar{e}')-\frac{2}{\bar{X}\bar{Z}}E(\bar{e}'\bar{e}'')+\frac{3}{\bar{X}^2}E(\bar{e}^2)\right]$$

por Martín-Caro (2006, p. 78),  $E(\bar{e}\bar{e}') = \frac{N-n}{N} \frac{S_{xy}}{n}$

análogamente,  $E(\bar{e}\bar{e}'') = \frac{N-n}{N} \frac{S_{yz}}{n}$  ,  $E(\bar{e}'\bar{e}'') = \frac{N-n}{N} \frac{S_{xz}}{n}$

además, por (razón (6))  $E(\bar{e}^2) = \frac{N-n}{N} \frac{S_y^2}{n}$  , análogamente,  $E(\bar{e}'^2) = \frac{N-n}{N} \frac{S_x^2}{n}$

entonces,

$$E\left(\frac{\bar{y}\bar{z}}{\bar{x}^2}\right) \approx \left(\frac{\bar{Y}\bar{Z}}{\bar{X}^2}\right) \left[1+\frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}}\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{S_{yz}}{n}-\frac{2}{\bar{Y}\bar{X}}\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{S_{xy}}{n}-\frac{2}{\bar{X}\bar{Z}}\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{S_{xz}}{n}+\frac{3}{\bar{X}^2}\left(\frac{N-n}{N}\right)\frac{S_x^2}{n}\right] \tag{11}$$

sustituyendo (11) en (1),

$$COV(\hat{Y}_R, \hat{Z}_R) = \bar{Y}\bar{Z} \left[1+\left(\frac{1-f}{n}\right)\frac{S_{yz}}{\bar{Y}\bar{Z}}-2\left(\frac{1-f}{n}\right)\frac{S_{xy}}{\bar{Y}\bar{X}}-2\left(\frac{1-f}{n}\right)\frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}}+3\left(\frac{1-f}{n}\right)\frac{S_x^2}{\bar{X}^2}\right] -$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{Y}\bar{Z}\left[1+\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2}-\frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}}\right)+\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2}-\frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}}\right)+\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2}-\frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}}\right)\left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2}-\frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}}\right)\right] \\
& =\bar{Y}\bar{Z}\left(\frac{1-f}{n}\right)\left[\frac{S_{yz}}{\bar{Y}\bar{Z}}-\frac{S_{xy}}{\bar{Y}\bar{X}}-\frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}}+\frac{S_x^2}{\bar{X}^2}-\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2}-\frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}}\right)\left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2}-\frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}}\right)\right] \quad (12)
\end{aligned}$$

sustituyendo (12) en  $V(\hat{Y}_{Rr})$ , y haciendo  $R_y = \frac{Y}{X} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$  y  $R_z = \frac{Z}{X} = \frac{\bar{Z}}{\bar{X}}$ , se tiene,

$$\begin{aligned}
V(\hat{Y}_{Rr}) & \approx \left(\frac{1-f}{n}\right)\left[S_y^2 + R_y^2 S_x^2 - 2R_y S_{xy} - Y^2 \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}}\right)^2\right] + \\
& + b^2 \left(\frac{1-f}{n}\right)\left[S_z^2 + R_z^2 S_x^2 - 2R_z S_{xz} - Z^2 \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}}\right)^2\right] - \\
& - 2b \left(\frac{1-f}{n}\right)\left[S_{yz} - R_z S_{xy} - R_y S_{xz} + R_y R_z S_x^2 - YZ \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}}\right)\left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}}\right)\right] \\
& \approx \left(\frac{1-f}{n}\right)\left[\left(S_y^2 + R_y^2 S_x^2 - 2R_y S_{xy}\right) + b^2 \left(S_z^2 + R_z^2 S_x^2 - 2R_z S_{xz}\right) - 2b \left(S_{yz} - R_z S_{xy} - R_y S_{xz} + R_y R_z S_x^2\right)\right] - \\
& - \left(\frac{1-f}{n}\right)^2 \left[\bar{Y} \left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}}\right) - b\bar{Z} \left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}}\right)\right]^2 \quad (13)
\end{aligned}$$

Para hallar el Error Cuadrático Medio, se tiene que,  $ECM(\hat{Y}_{Rr}) = V(\hat{Y}_{Rr}) + (B(\hat{Y}_{Rr}))^2$ . La varianza se tiene de (13), entonces se debe desarrollar  $(B(\hat{Y}_{Rr}))^2$ . De (A) se sabe que,

$$B(\hat{Y}_{Rr}) = \left(\frac{1-f}{n}\right)\left[\left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2}\right)(\bar{Y} - b\bar{Z}) - \frac{S_{xy}}{\bar{X}} + b\frac{S_{xz}}{\bar{X}}\right]$$

entonces,

$$\begin{aligned}
(B(\hat{Y}_{Rr}))^2 & = \left(\frac{1-f}{n}\right)^2 \left[\left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2}\right)(\bar{Y} - b\bar{Z}) - \frac{S_{xy}}{\bar{X}} + b\frac{S_{xz}}{\bar{X}}\right]^2 \\
& = \left(\frac{1-f}{n}\right)^2 \left[\left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2}\right)^2 (\bar{Y} - b\bar{Z})^2 + \frac{S_{xy}^2}{\bar{X}^2} + b^2 \frac{S_{xz}^2}{\bar{X}^2} - 2\left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2}\right)(\bar{Y} - b\bar{Z})\left(\frac{S_{xy}}{\bar{X}}\right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2b \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} \right) (\bar{Y} - b\bar{Z}) \left( \frac{S_{xz}}{\bar{X}} \right) - 2b \frac{S_{xy}}{\bar{X}} \frac{S_{xz}}{\bar{X}} \Big] \\
& = \left( \frac{1-f}{n} \right)^2 \left[ \frac{\bar{Y}^2}{\bar{X}^4} S_x^4 - 2b \frac{\bar{Y}\bar{Z}}{\bar{X}^4} S_x^4 + b^2 \frac{\bar{Z}^2}{\bar{X}^4} S_x^4 - 2 \frac{\bar{Y}}{\bar{X}^3} S_x^2 S_{xy} + 2b \frac{\bar{Z}}{\bar{X}^3} S_x^2 S_{xy} + \frac{S_{xy}^2}{\bar{X}^2} + \right. \\
& \quad \left. + b^2 \frac{S_{xz}^2}{\bar{X}^2} + 2b \frac{\bar{Y}}{\bar{X}^3} S_x^2 S_{xz} - 2b^2 \frac{\bar{Z}}{\bar{X}^3} S_x^2 S_{xz} - 2b \frac{S_{xy}}{\bar{X}} \frac{S_{xz}}{\bar{X}} \right] \\
& = \left( \frac{1-f}{n} \right)^2 \left[ \left( \bar{Y}^2 \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} \right)^2 - 2 \frac{\bar{Y}}{\bar{X}^3} S_x^2 S_{xy} + \frac{S_{xy}^2}{\bar{X}^2} \right) + \left( b^2 \bar{Z}^2 \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} \right)^2 - 2b^2 \frac{\bar{Z}}{\bar{X}^3} S_x^2 S_{xz} + b^2 \frac{S_{xz}^2}{\bar{X}^2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left( -2b \frac{\bar{Y}\bar{Z}}{\bar{X}^4} S_x^4 + 2b\bar{Z} \frac{S_x^2 S_{xy}}{\bar{X}^3} + 2b\bar{Y} \frac{S_x^2 S_{xz}}{\bar{X}^3} - 2b \frac{S_{xy}}{\bar{X}} \frac{S_{xz}}{\bar{X}} \right) \right] \\
& = \left( \frac{1-f}{n} \right)^2 \left[ \left( \bar{Y}^2 \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} \right)^2 - 2 \frac{\bar{Y}}{\bar{X}^3} S_x^2 S_{xy} + \frac{S_{xy}^2}{\bar{X}^2} \right) + \left( \left( b\bar{Z} \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} \right)^2 - 2b^2 \frac{\bar{Z}}{\bar{X}^3} S_x^2 S_{xz} + b^2 \frac{S_{xz}^2}{\bar{X}^2} \right) + \right. \\
& \quad \left. + 2b\bar{Y}\bar{Z} \left( -\frac{S_x^4}{\bar{X}^4} + \frac{S_x^2 S_{xy}}{\bar{X}^3 \bar{Y}} + \frac{S_x^2 S_{xz}}{\bar{X}^3 \bar{Z}} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}} \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}} \right) \right] \\
& = \left( \frac{1-f}{n} \right)^2 \left[ \bar{Y}^2 \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}} \right)^2 + b^2 \bar{Z}^2 \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}} \right)^2 - 2b\bar{Y}\bar{Z} \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}} \right) \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}} \right) \right] \\
& \left( B(\hat{Y}_{Rr}) \right)^2 = \left( \frac{1-f}{n} \right)^2 \left[ \bar{Y} \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}} \right) - b\bar{Z} \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}} \right) \right]^2
\end{aligned}$$

entonces, sustituyendo los valores de  $V(\hat{Y}_{Rr})$  y  $(B(\hat{Y}_{Rr}))^2$ , se tiene que,

$$ECM(\hat{Y}_{Rr}) \approx \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ (S_y^2 + R_y^2 S_x^2 - 2R_y S_{xy}) + b^2 (S_z^2 + R_z^2 S_x^2 - 2R_z S_{xz}) - 2b (S_{yz} - R_z S_{xy} - R_y S_{xz} + R_y R_z S_x^2) \right]$$

$$ECM(\hat{Y}_{Rr}) \approx ECM(\hat{Y}_R) + b^2 ECM(\hat{Z}_R) - 2b \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_{yz} - R_z S_{xy} - R_y S_{xz} + R_y R_z S_x^2)$$

***Estimadores de los Errores Cuadráticos Medios de los Estimadores***

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{Rr}) \approx \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ (s_y^2 + \hat{R}_y^2 s_x^2 - 2\hat{R}_y s_{xy}) + \hat{b}^2 (s_z^2 + \hat{R}_z^2 s_x^2 - 2\hat{R}_z s_{xz}) - 2\hat{b} (s_{yz} - \hat{R}_z s_{xy} - \hat{R}_y s_{xz} + \hat{R}_y \hat{R}_z s_x^2) \right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{Rr}) \approx E\hat{C}M(\hat{Y}_R) + \hat{b}^2 E\hat{C}M(\hat{Z}_R) - 2\hat{b} \left(\frac{1-f}{n}\right) (s_{yz} - \hat{R}_z s_{xy} - \hat{R}_y s_{xz} - \hat{R}_y \hat{R}_z s_x^2)$$

donde,  $\hat{R}_y = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$     y     $\hat{R}_z = \frac{\bar{z}}{\bar{x}}$

***Casos Especiales***

***Estimador de Razón***

En este caso se supone que  $b=0$ , en consecuencia,

$$\hat{Y}_{Rr} = \hat{Y}_R + b(Z - \hat{Z}_R) = \hat{Y}_R = \frac{y}{x} X$$

que es el estimador de razón a una variable, en este caso, sería el estimador del promedio del tipo razón a una variable  $x$ . En el caso del total,

$$\hat{Y}_{Rr} = \hat{Y}_R + b(Z - \hat{Z}_R) = \hat{Y}_R = \frac{y}{x} X$$

***Estimador por Diferencia***

En este caso  $b=1$

$$\hat{Y}_{Rr} = \hat{Y}_R + (\bar{Z} - \hat{Z}_R) = \hat{Y}_R + \bar{Z} - \hat{Z}_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X} + \bar{Z} - \frac{\bar{z}}{\bar{x}} \bar{X}$$

Tomando  $b$  constante, la esperanza es

$$\begin{aligned}
E(\hat{Y}_{Rr}) &\approx \bar{Y} \left[ 1 + \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}} \right) \right] - \bar{Z} \left[ \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}} \right) \right] \\
&\approx \bar{Y} + \bar{Y} \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}} \right) - \bar{Z} \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}} \right)
\end{aligned}$$

entonces el sesgo es,

$$B(\hat{Y}_{Rr}) \approx \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} \right) (\bar{Y} - \bar{Z}) - \frac{S_{xy}}{\bar{X}} + \frac{S_{xz}}{\bar{X}} \right]$$

la varianza es,

$$\begin{aligned}
V(\hat{Y}_{Rr}) &\approx \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ S_y^2 + R_y^2 S_x^2 - 2R_y S_{xy} - \bar{Y}^2 \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}} \right)^2 \right] + \\
&\quad + \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ S_z^2 + R_z^2 S_x^2 - 2R_z S_{xz} - \bar{Z}^2 \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}} \right)^2 \right] - \\
&\quad - 2 \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ S_{yz} - R_z S_{xy} - R_y S_{xz} + R_y R_z S_x^2 \right] - 2\bar{Y}\bar{Z} \left( \frac{1-f}{n} \right)^2 \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}} \right) \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}} \right) \\
&\approx \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ (S_y^2 + R_y^2 S_x^2 - 2R_y S_{xy}) + (S_z^2 + R_z^2 S_x^2 - 2R_z S_{xz}) - 2(S_{yz} - R_z S_{xy} - R_y S_{xz} + R_y R_z S_x^2) \right] - \\
&\quad - \left( \frac{1-f}{n} \right)^2 \left[ \bar{Y} \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}} \right) - \bar{Z} \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}} \right) \right]^2
\end{aligned}$$

y el error cuadrático medio,

$$\begin{aligned}
ECM(\hat{Y}_{Rr}) &\approx \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ (S_y^2 + R_y^2 S_x^2 - 2R_y S_{xy}) + (S_z^2 + R_z^2 S_x^2 - 2R_z S_{xz}) - 2(S_{yz} - R_z S_{xy} - R_y S_{xz} + R_y R_z S_x^2) \right] \\
&\approx ECM(\hat{Y}_R) + ECM(\hat{Z}_R) - 2 \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_{yz} - R_z S_{xy} - R_y S_{xz} + R_y R_z S_x^2)
\end{aligned}$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{Rr}) \approx \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ (s_y^2 + \hat{R}_y^2 s_x^2 - 2\hat{R}_y s_{xy}) + (s_z^2 + \hat{R}_z^2 s_x^2 - 2\hat{R}_z s_{xz}) - 2(s_{yz} - \hat{R}_z s_{xy} - \hat{R}_y s_{xz} + \hat{R}_y \hat{R}_z s_x^2) \right]$$

$$\approx E\hat{C}M(\hat{Y}_R) + E\hat{C}M(\hat{Z}_R) - 2\left(\frac{1-f}{n}\right)(s_{yz} - \hat{R}_z s_{xy} - \hat{R}_y s_{xz} - \hat{R}_y \hat{R}_z s_x^2)$$

### Estimador de Varianza Mínima para $b$ Constante

En este caso  $b = b_0$

$$\hat{Y}_{Rr} = \hat{Y}_R + b_0(\bar{Z} - \hat{Z}_R) = \hat{Y}_R + b_0\bar{Z} - b_0\hat{Z}_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{X} + b_0\bar{Z} - b_0\frac{\bar{z}}{\bar{x}}\bar{X}$$

La esperanza es

$$E(\hat{Y}_{Rr}) = \bar{Y} \left[ 1 + \left(\frac{1-f}{n}\right) \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}} \right) \right] - b_0\bar{Z} \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}} \right)$$

entonces el sesgo es,

$$B(\hat{Y}_{Rr}) = \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} \right) (\bar{Y} - b_0\bar{Z}) - \frac{S_{xy}}{\bar{X}} + b_0 \frac{S_{xz}}{\bar{X}} \right]$$

La varianza es,

$$V(\hat{Y}_{Rr}) \approx \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ (S_y^2 + R_y^2 S_x^2 - 2R_y S_{xy}) + b_0^2 (S_z^2 + R_z^2 S_x^2 - 2R_z S_{xz}) - 2b_0 (S_{yz} - R_z S_{xy} - R_y S_{xz} + R_y R_z S_x^2) \right] - \left(\frac{1-f}{n}\right)^2 \left[ \bar{Y} \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\bar{Y}} \right) - b_0\bar{Z} \left( \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xz}}{\bar{X}\bar{Z}} \right) \right]^2$$

y el error cuadrático medio y su estimador son,

$$ECM(\hat{Y}_{Rr}) \approx \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ (S_y^2 + R_y^2 S_x^2 - 2R_y S_{xy}) + b_0^2 (S_z^2 + R_z^2 S_x^2 - 2R_z S_{xz}) - 2b_0 (S_{yz} - R_z S_{xy} - R_y S_{xz} + R_y R_z S_x^2) \right] \\ \approx ECM(\hat{Y}_R) + b_0^2 ECM(\hat{Z}_R) - 2b_0 \left(\frac{1-f}{n}\right) (S_{yz} - R_z S_{xy} - R_y S_{xz} + R_y R_z S_x^2)$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{Rr}) \approx \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ (s_y^2 + \hat{R}_y^2 s_x^2 - 2\hat{R}_y s_{xy}) + \hat{b}_0^2 (s_z^2 + \hat{R}_z^2 s_x^2 - 2\hat{R}_z s_{xz}) - 2\hat{b}_0 (s_{yz} - \hat{R}_z s_{xy} - \hat{R}_y s_{xz} + \hat{R}_y \hat{R}_z s_x^2) \right]$$

$$\approx \hat{ECM}(\hat{Y}_R) + \hat{b}_0^2 \hat{ECM}(\hat{Z}_R) - 2\hat{b}_0 \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_{yz} - \hat{R}_z S_{xy} - \hat{R}_y S_{xz} - \hat{R}_y \hat{R}_z S_x^2)$$

para hallar  $b_0$  óptimo, se deriva ésta expresión respecto de  $b_0$ , esto es,

$$\frac{\partial \hat{ECM}(\hat{Y}_{Rr})}{\partial b_0} = 2b_0 \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_z^2 + R_z^2 S_x^2 - 2R_z S_{xz}) - 2 \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_{yz} - R_z S_{xy} - R_y S_{xz} + R_y R_z S_x^2) = 0$$

entonces,

$$b_0 = \frac{(S_{yz} - R_z S_{xy} - R_y S_{xz} + R_y R_z S_x^2)}{(S_z^2 + R_z^2 S_x^2 - 2R_z S_{xz})} \quad (14)$$

para verificar que si en  $b_0$  ocurre un mínimo de  $\hat{ECM}(\hat{Y}_{Rr})$ , su segunda derivada respecto de  $b_0$  debe ser positiva, entonces,

$$\frac{\partial^2 \hat{ECM}(\hat{Y}_{Rr})}{\partial^2 b_0} = 2 \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_z^2 + R_z^2 S_x^2 - 2R_z S_{xz})$$

y para que sea positivo debe ocurrir que  $(S_z^2 + R_z^2 S_x^2 - 2R_z S_{xz}) > 0$

y esto pasa si  $S_{xz} < \frac{S_z^2 + R_z^2 S_x^2}{2R_z}$

es decir, si  $S_{xz} < \frac{S_z^2 + R_z^2 S_x^2}{2R_z}$  entonces  $b_0$  expresado en (14) es el valor de  $b$  que minimiza

$\hat{ECM}(\hat{Y}_{Rr})$ .

### ***Estimadores del Tipo Razón-Regresión en el Muestreo Estratificado***

Suponiendo  $b_h$  constante para cada estrato  $h$ ,

$$\hat{Y}_{Rrh} = \hat{Y}_{Rh} + b_h(\bar{Z}_h - \hat{Z}_{Rh}) = \hat{Y}_{Rh} + b_h\bar{Z}_h - b_h\hat{Z}_{Rh} = \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}\bar{X}_h + b_h\bar{Z}_h - b_h\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h}\bar{X}_h$$

la esperanza, sesgo, varianza y error cuadrático medio son,

$$E(\hat{Y}_{Rrh}) = \bar{Y}_h + \bar{Y}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) - b_h \bar{Z}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right)$$

$$B(\hat{Y}_{Rrh}) = \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) (\bar{Y}_h - b_h \bar{Z}_h) - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h} + b_h \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h} \right]$$

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}_{Rrh}) &\approx \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + R_{y_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{y_h} S_{xy_h}) + b_h^2 (S_{z_h}^2 + R_{z_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{z_h} S_{xz_h}) - \right. \\ &\quad \left. - 2b_h (S_{yz_h} - R_{z_h} S_{xy_h} - R_{y_h} S_{xz_h} + R_{y_h} R_{z_h} S_{x_h}^2) \right] \\ &\quad - \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left[ \bar{Y}_h \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) - b_h \bar{Z}_h \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ECM(\hat{Y}_{Rrh}) &\approx \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + R_{y_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{y_h} S_{xy_h}) + b_h^2 (S_{z_h}^2 + R_{z_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{z_h} S_{xz_h}) - \right. \\ &\quad \left. - 2b_h (S_{yz_h} - R_{z_h} S_{xy_h} - R_{y_h} S_{xz_h} + R_{y_h} R_{z_h} S_{x_h}^2) \right] \\ &\approx ECM(\hat{Y}_{Rh}) + b_h^2 ECM(\hat{Z}_{Rh}) - 2b_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - R_{z_h} S_{xy_h} - R_{y_h} S_{xz_h} + R_{y_h} R_{z_h} S_{x_h}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\hat{C}M(\hat{Y}_{Rrh}) &\approx \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (s_{y_h}^2 + \hat{R}_{y_h}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{R}_{y_h} s_{xy_h}) + b_h^2 (s_{z_h}^2 + \hat{R}_{z_h}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{R}_{z_h} s_{xz_h}) - \right. \\ &\quad \left. - 2b_h (s_{yz_h} - \hat{R}_{z_h} s_{xy_h} - \hat{R}_{y_h} s_{xz_h} + \hat{R}_{y_h} \hat{R}_{z_h} s_{x_h}^2) \right] \end{aligned}$$

$$\approx E\hat{C}M(\hat{Y}_{Rh}) + b_h^2 E\hat{C}M(\hat{Z}_{Rh}) - 2\hat{b}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (s_{yz_h} - \hat{R}_{z_h} s_{xy_h} - \hat{R}_{y_h} s_{xz_h} + \hat{R}_{y_h} \hat{R}_{z_h} s_{x_h}^2)$$

$$\text{donde, } R_{y_h} = \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h}, \quad R_{z_h} = \frac{\bar{Z}_h}{\bar{X}_h}, \quad \hat{R}_{y_h} = \frac{y_h}{x_h} \quad \text{y} \quad \hat{R}_{z_h} = \frac{z_h}{x_h}$$

El “estimador de razón-regresión del total poblacional” para el estrato  $h$  es,

$$\hat{Y}_{Rr_h} = N_h \hat{Y}_{Rr_h} = \hat{Y}_{R_h} + b_h (Z_h - \hat{Z}_{R_h}) = \hat{Y}_{R_h} + b_h \hat{Z}_h - b_h \hat{Z}_{R_h} = \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} X_h + b_h \hat{Z}_h - b_h \frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h} X_h$$

su esperanza, sesgo, varianza y error cuadrático medio se pueden obtener de la relación mostrada

arriba,  $\hat{Y}_{Rr_h} = N_h \hat{Y}_{Rr_h}$ , así queda,

$$E(\hat{Y}_{Rr_h}) = E(N_h \hat{Y}_{Rr_h}) = N_h E(\hat{Y}_{Rr_h})$$

$$B(\hat{Y}_{Rr_h}) = B(N_h \hat{Y}_{Rr_h}) = N_h B(\hat{Y}_{Rr_h})$$

$$V(\hat{Y}_{Rr_h}) = V(N_h \hat{Y}_{Rr_h}) = N_h^2 V(\hat{Y}_{Rr_h})$$

$$ECM(\hat{Y}_{Rr_h}) = ECM(N_h \hat{Y}_{Rr_h}) = N_h^2 ECM(\hat{Y}_{Rr_h})$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{Rr_h}) = E\hat{C}M(N_h \hat{Y}_{Rr_h}) = N_h^2 E\hat{C}M(\hat{Y}_{Rr_h})$$

Cabe destacar que se pueden aplicar los casos especiales en cada estrato, esto es, el estimador de razón (cuando  $b_h = 0$ ), el estimador por diferencia (cuando  $b_h = 1$ ), y el estimador de varianza mínima para  $b_h$  constante, y en este caso  $b_{0h}$  es,

$$b_{0h} = \frac{(S_{y_h} - R_{z_h} S_{xy_h} - R_{y_h} S_{xz_h} + R_{y_h} R_{z_h} S_{x_h}^2)}{(S_{z_h}^2 + R_{z_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{z_h} S_{xz_h})} \quad \text{si} \quad S_{xz_h} < \frac{S_{z_h}^2 + R_{z_h}^2 S_{x_h}^2}{2R_{z_h}}.$$

### ***Estimadores de Razón-Regresión Separados***

$$\hat{Y}_{Rrs} = \sum_{h=1}^L \hat{Y}_{Rr_h} = \sum_{h=1}^L \hat{Y}_{R_h} + b_h (Z_h - \hat{Z}_{R_h}) = \sum_{h=1}^L \hat{Y}_{R_h} + \sum_{h=1}^L b_h (Z_h - \hat{Z}_{R_h}) = \hat{Y}_{Rs} + \sum_{h=1}^L b_h (Z_h - \hat{Z}_{R_h})$$

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{Rrs} &= \frac{1}{N} \hat{Y}_{Rrs} = \frac{1}{N} \left[ \sum_{h=1}^L \hat{Y}_{R_h} + b_h (Z_h - \hat{Z}_{R_h}) \right] = \frac{1}{N} \left[ \sum_{h=1}^L N_h \hat{Y}_{R_h} + b_h (N_h Z_h - N_h \hat{Z}_{R_h}) \right] \\ &= \sum_{h=1}^L W_h \left( \hat{Y}_{R_h} + b_h (\bar{Z}_h - \hat{Z}_{R_h}) \right) = \sum_{h=1}^L W_h \hat{Y}_{R_h} = \hat{Y}_{Rs} + \sum_{h=1}^L W_h b_h (\bar{Z}_h - \hat{Z}_{R_h})\end{aligned}$$

la esperanza, sesgo, varianza y error cuadrático medio del estimador del promedio son,

$$\hat{Y}_{Rr_h} = \hat{Y}_{R_h} + b_h (Z_h - \hat{Z}_{R_h}) = \hat{Y}_{R_h} + b_h Z_h - b_h \hat{Z}_{R_h} = \frac{y_h}{x_h} X_h + b_h Z_h - b_h \frac{z_h}{x_h} X_h$$

la esperanza, sesgo, varianza y error cuadrático medio son,

$$E(\hat{Y}_{Rr_h}) = \bar{Y}_h + \bar{Y}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) - b_h \bar{Z}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right)$$

$$B(\hat{Y}_{Rr_h}) = \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) (\bar{Y}_h - b_h \bar{Z}_h) - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h} + b_h \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h} \right]$$

$$\begin{aligned}V(\hat{Y}_{Rr_h}) &\approx \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + R_{y_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{y_h} S_{xy_h}) + b_h^2 (S_{z_h}^2 + R_{z_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{z_h} S_{xz_h}) - \right. \\ &\quad \left. - 2b_h (S_{yz_h} - R_{z_h} S_{xy_h} - R_{y_h} S_{xz_h} + R_{y_h} R_{z_h} S_{x_h}^2) \right] \\ &\quad - \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left[ \bar{Y}_h \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) - b_h \bar{Z}_h \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \right]^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ECM(\hat{Y}_{Rr_h}) &\approx \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + R_{y_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{y_h} S_{xy_h}) + b_h^2 (S_{z_h}^2 + R_{z_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{z_h} S_{xz_h}) - \right. \\ &\quad \left. - 2b_h (S_{yz_h} - R_{z_h} S_{xy_h} - R_{y_h} S_{xz_h} + R_{y_h} R_{z_h} S_{x_h}^2) \right] \\ &\approx ECM(\hat{Y}_{R_h}) + b_h^2 ECM(\hat{Z}_{R_h}) - 2b_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - R_{z_h} S_{xy_h} - R_{y_h} S_{xz_h} + R_{y_h} R_{z_h} S_{x_h}^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\hat{C}M(\hat{Y}_{Rrh}) &\approx \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) \left[ (s_{y_h}^2 + \hat{R}_{y_h}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{R}_{y_h} s_{xy_h}) + \hat{b}_h^2 (s_{z_h}^2 + \hat{R}_{z_h}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{R}_{z_h} s_{xz_h}) - \right. \\
&\quad \left. - 2\hat{b}_h (s_{yz_h} - \hat{R}_{z_h} s_{xy_h} - \hat{R}_{y_h} s_{xz_h} + \hat{R}_{y_h} \hat{R}_{z_h} s_{x_h}^2) \right] \\
&\approx E\hat{C}M(\hat{Y}_{R_h}) + b_h^2 E\hat{C}M(\hat{Z}_{R_h}) - 2\hat{b}_h \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (s_{yz_h} - \hat{R}_{z_h} s_{xy_h} - \hat{R}_{y_h} s_{xz_h} + \hat{R}_{y_h} \hat{R}_{z_h} s_{x_h}^2)
\end{aligned}$$

donde,  $R_{y_h} = \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h}$ ,  $R_{z_h} = \frac{\bar{Z}_h}{\bar{X}_h}$ ,  $\hat{R}_{y_h} = \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}$  y  $\hat{R}_{z_h} = \frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h}$

$$\begin{aligned}
E(\hat{Y}_{Rrss}) &= E\left[\sum_{h=1}^L W_h \hat{Y}_{Rrh}\right] = \sum_{h=1}^L E\left(W_h \hat{Y}_{Rrh}\right) \\
&\approx \sum_{h=1}^L \left[ \bar{Y}_h + \bar{Y}_h \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) \left(\frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h}\right) - b_h \bar{Z}_h \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) \left(\frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h}\right) \right] \\
&\approx \bar{Y} + \sum_{h=1}^L W_h \bar{Y}_h \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) \left(\frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h}\right) - \sum_{h=1}^L W_h b_h \bar{Z}_h \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) \left(\frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h}\right) \\
&\approx \bar{Y} + \sum_{h=1}^L W_h \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) \left[ \left(\frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2}\right) (\bar{Y}_h - b_h \bar{Z}_h) - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h} + b_h \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h} \right]
\end{aligned}$$

y por supuesto,

$$B(\hat{Y}_{Rrss}) \approx - \sum_{h=1}^L W_h \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) \left[ \left(\frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2}\right) (\bar{Y}_h - b_h \bar{Z}_h) - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h} + b_h \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h} \right]$$

$$\begin{aligned}
V(\hat{Y}_{Rrh}) &\approx \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) \left[ (s_{y_h}^2 + R_{y_h}^2 s_{x_h}^2 - 2R_{y_h} s_{xy_h}) + b_h^2 (s_{z_h}^2 + R_{z_h}^2 s_{x_h}^2 - 2R_{z_h} s_{xz_h}) - \right. \\
&\quad \left. - 2b_h (s_{yz_h} - R_{z_h} s_{xy_h} - R_{y_h} s_{xz_h} + R_{y_h} R_{z_h} s_{x_h}^2) \right] \\
&\quad - \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)^2 \left[ \bar{Y}_h \left(\frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h}\right) - b_h \bar{Z}_h \left(\frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h}\right) \right]^2
\end{aligned}$$

$$V(\hat{Y}_{Rrs}) = V\left[\sum_{h=1}^L W_h \hat{Y}_{Rrh}\right] = \sum_{h=1}^L V(W_h \hat{Y}_{Rrh}) + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L \text{COV}(\hat{Y}_{Rrh}, \hat{Y}_{Rrk})$$

y

$$\begin{aligned} \text{COV}(\hat{Y}_{Rrh}, \hat{Y}_{Rrk}) &= E\left[\left(\hat{Y}_{Rrh} - E(\hat{Y}_{Rrh})\right)\left(\hat{Y}_{Rrk} - E(\hat{Y}_{Rrk})\right)\right] \\ &= E\left[\hat{Y}_{Rrh} \hat{Y}_{Rrk} - \hat{Y}_{Rrh} E(\hat{Y}_{Rrk}) - \hat{Y}_{Rrk} E(\hat{Y}_{Rrh}) + E(\hat{Y}_{Rrh}) E(\hat{Y}_{Rrk})\right] \\ &= E(\hat{Y}_{Rrh} \hat{Y}_{Rrk}) - E(\hat{Y}_{Rrh}) E(\hat{Y}_{Rrk}) - E(\hat{Y}_{Rrh}) E(\hat{Y}_{Rrk}) + E(\hat{Y}_{Rrh}) E(\hat{Y}_{Rrk}) \\ &= E(\hat{Y}_{Rrh} \hat{Y}_{Rrk}) - E(\hat{Y}_{Rrh}) E(\hat{Y}_{Rrk}) \end{aligned}$$

Se sabe que

$$\begin{aligned} E(\hat{Y}_{Rrh}) &= \bar{Y}_h + \bar{Y}_h \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) \left(\frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h}\right) - b_h \bar{Z}_h \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) \left(\frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h}\right) \\ E(\hat{Y}_{Rrk}) &= \bar{Y}_k + \bar{Y}_k \left(\frac{1-f_k}{n_k}\right) \left(\frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k}\right) - b_k \bar{Z}_k \left(\frac{1-f_k}{n_k}\right) \left(\frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k}\right) \end{aligned}$$

entonces se desarrollará  $E(\hat{Y}_{Rrh} \hat{Y}_{Rrk})$ ,

$$\begin{aligned} E(\hat{Y}_{Rrh} \hat{Y}_{Rrk}) &= E\left[\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \bar{X}_h + b_h \bar{Z}_h - b_h \frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h} \bar{X}_h\right)\left(\frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k} \bar{X}_k + b_k \bar{Z}_k - b_k \frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k} \bar{X}_k\right)\right] \\ &= \bar{X}_h \bar{X}_k E\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k}\right) + b_k \bar{X}_h \bar{Z}_k E\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}\right) - b_k \bar{X}_h \bar{X}_k E\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k}\right) + b_h \bar{Z}_h \bar{X}_k E\left(\frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k}\right) + b_h \bar{Z}_h b_k \bar{Z}_k - \\ &\quad - b_h \bar{Z}_h b_k \bar{X}_k E\left(\frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k}\right) - b_h \bar{X}_h \bar{X}_k E\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h} \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k}\right) - b_h \bar{X}_h b_k \bar{Z}_k E\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h}\right) + b_h b_k \bar{X}_h \bar{X}_k E\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h} \frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k}\right) \end{aligned}$$

pero de Martín-Caro (2006, p. 78) se puede adaptar al estrato, y se tiene que

$$E\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}\right) = \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} + \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \left[\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \left(\frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h}\right)\right]$$

análogamente,

$$E\left(\frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k}\right) = \frac{\bar{Y}_k}{\bar{X}_k} + \frac{\bar{Y}_k}{\bar{X}_k} \left[ \frac{N_k - n_k}{N_k n_k} \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) \right]$$

$$E\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h}\right) = \frac{\bar{Z}_h}{\bar{X}_h} + \frac{\bar{Z}_h}{\bar{X}_h} \left[ \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \right]$$

$$E\left(\frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k}\right) = \frac{\bar{Z}_k}{\bar{X}_k} + \frac{\bar{Z}_k}{\bar{X}_k} \left[ \frac{N_k - n_k}{N_k n_k} \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right) \right]$$

y de Martín-Caro (2006, 97) se sabe que

$$E\left(\frac{\bar{y}_h \bar{y}_k}{\bar{x}_h \bar{x}_k}\right) = \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \frac{\bar{Y}_k}{\bar{X}_k} + \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \frac{\bar{Y}_k}{\bar{X}_k} \left[ \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{Y}_h \bar{X}_h} \right) + \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{Y}_k \bar{X}_k} \right) \right]$$

y análogamente,

$$E\left(\frac{\bar{z}_h \bar{z}_k}{\bar{x}_h \bar{x}_k}\right) = \frac{\bar{Z}_h}{\bar{X}_h} \frac{\bar{Z}_k}{\bar{X}_k} + \frac{\bar{Z}_h}{\bar{X}_h} \frac{\bar{Z}_k}{\bar{X}_k} \left[ \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{Z}_h \bar{X}_h} \right) + \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{Z}_k \bar{X}_k} \right) \right]$$

Se aplicará el mismo procedimiento para desarrollar  $E\left(\frac{\bar{y}_h \bar{z}_k}{\bar{x}_h \bar{x}_k}\right)$  y  $E\left(\frac{\bar{z}_h \bar{y}_k}{\bar{x}_h \bar{x}_k}\right)$ .

$$E\left(\frac{\bar{y}_h \bar{z}_k}{\bar{x}_h \bar{x}_k}\right) = \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \frac{\bar{Z}_k}{\bar{X}_k} E\left[ \frac{\left(1 + \frac{\bar{e}_h}{\bar{Y}_h}\right) \left(1 + \frac{\bar{e}_k''}{\bar{Z}_k}\right)}{\left(1 + \frac{\bar{e}_h'}{\bar{X}_h}\right) \left(1 + \frac{\bar{e}_k'}{\bar{X}_k}\right)} \right] = \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \frac{\bar{Z}_k}{\bar{X}_k} E\left[ \frac{\left(1 + \frac{\bar{e}_h}{\bar{Y}_h}\right) \left(1 + \frac{\bar{e}_k''}{\bar{Z}_k}\right)}{\left(\frac{\bar{X}_h + \bar{e}_h'}{\bar{X}_h}\right) \left(\frac{\bar{X}_k + \bar{e}_k'}{\bar{X}_k}\right)} \right]$$

al desarrollar las Series de Taylor, se tiene,

$$\begin{aligned} &= \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \frac{\bar{Z}_k}{\bar{X}_k} E\left[ \left(1 + \frac{\bar{e}_h}{\bar{Y}_h}\right) \left(1 + \frac{\bar{e}_k''}{\bar{Z}_k}\right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{\bar{e}_h^{-l}}{\bar{X}_h^l} \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{\bar{e}_k^{-l}}{\bar{X}_k^l} \right) \right] \\ &= \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \frac{\bar{Z}_k}{\bar{X}_k} E\left[ \left(1 + \frac{\bar{e}_h}{\bar{Y}_h}\right) \left(1 + \frac{\bar{e}_k''}{\bar{Z}_k}\right) \left(1 - \frac{\bar{e}_h'}{\bar{X}_h} + \frac{\bar{e}_h'^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{\bar{e}_h'^3}{\bar{X}_h^3} + \dots + (-1)^l \frac{\bar{e}_h^{-l}}{\bar{X}_h^l}\right) \left(1 - \frac{\bar{e}_k'}{\bar{X}_k} + \frac{\bar{e}_k'^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{\bar{e}_k'^3}{\bar{X}_k^3} + \dots + (-1)^l \frac{\bar{e}_k^{-l}}{\bar{X}_k^l}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \frac{\bar{Z}_k}{\bar{X}_k} E \left[ \left( 1 + \frac{\bar{e}_h}{\bar{Y}_h} + \frac{\bar{e}_k''}{\bar{Z}_k} + \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k''}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k} \right) \left( 1 - \frac{\bar{e}_k'}{\bar{X}_k} + \frac{\bar{e}_k'^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{\bar{e}_h'}{\bar{X}_h} + \frac{\bar{e}_h' \bar{e}_k'}{\bar{X}_h \bar{X}_k} - \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k'^2}{\bar{X}_h \bar{X}_k^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\bar{e}_h'^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{\bar{e}_h'^2 \bar{e}_k'}{\bar{X}_h^2 \bar{X}_k} + \frac{\bar{e}_h'^2 \bar{e}_k'^2}{\bar{X}_h^2 \bar{X}_k^2} + \dots \right) \right] \\
&= \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \frac{\bar{Z}_k}{\bar{X}_k} E \left[ \left( 1 + \frac{\bar{e}_h}{\bar{Y}_h} + \frac{\bar{e}_k''}{\bar{Z}_k} + \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k''}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k} - \frac{\bar{e}_k'}{\bar{X}_k} - \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k'}{\bar{Y}_h \bar{X}_k} - \frac{\bar{e}_k'' \bar{e}_k'}{\bar{Z}_k \bar{X}_k} - \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k'' \bar{e}_k'}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k \bar{X}_k} + \frac{\bar{e}_k'^2}{\bar{X}_k^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k'^2}{\bar{Y}_h \bar{X}_k^2} + \frac{\bar{e}_k'' \bar{e}_k'^2}{\bar{Z}_k \bar{X}_k^2} + \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k'' \bar{e}_k'^2}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k \bar{X}_k^2} + \dots \right) \right]
\end{aligned}$$

truncando en las potencias de orden 2,

$$= \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \frac{\bar{Z}_k}{\bar{X}_k} E \left[ 1 + \frac{\bar{e}_h}{\bar{Y}_h} + \frac{\bar{e}_k''}{\bar{Z}_k} + \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k''}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k} - \frac{\bar{e}_k'}{\bar{X}_k} - \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k'}{\bar{Y}_h \bar{X}_k} - \frac{\bar{e}_k'' \bar{e}_k'}{\bar{Z}_k \bar{X}_k} + \frac{\bar{e}_k'^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{\bar{e}_h'}{\bar{X}_h} - \frac{\bar{e}_h \bar{e}_h'}{\bar{Y}_h \bar{X}_h} - \frac{\bar{e}_k'' \bar{e}_h'}{\bar{Z}_k \bar{X}_h} + \frac{\bar{e}_h' \bar{e}_k'}{\bar{X}_h \bar{X}_k} + \frac{\bar{e}_h'^2}{\bar{X}_h^2} \right]$$

y conociendo que  $E(\bar{e}_h) = E(\bar{e}_k'') = E(\bar{e}_h') = E(\bar{e}_k') = 0$ ,

$$= \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \frac{\bar{Z}_k}{\bar{X}_k} E \left[ 1 + \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k''}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k} - \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k'}{\bar{Y}_h \bar{X}_k} - \frac{\bar{e}_k'' \bar{e}_k'}{\bar{Z}_k \bar{X}_k} + \frac{\bar{e}_k'^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{\bar{e}_h \bar{e}_h'}{\bar{Y}_h \bar{X}_h} - \frac{\bar{e}_k'' \bar{e}_h'}{\bar{Z}_k \bar{X}_h} + \frac{\bar{e}_h' \bar{e}_k'}{\bar{X}_h \bar{X}_k} + \frac{\bar{e}_h'^2}{\bar{X}_h^2} \right]$$

pero, por otra parte,

$$E \left( \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k''}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k} \right) = \frac{1}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k} E(\bar{e}_h \bar{e}_k'') = \frac{1}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k} \frac{\sum_{l=1}^{N_h} e_{hl} \sum_{l=1}^{N_k} e_{kl}''}{\binom{N_h}{n_h} \binom{N_k}{n_k}} = \frac{1}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k} \frac{\binom{N_h-1}{n_h-1} \sum_{i=1}^{N_h} e_{hi} \binom{N_k-1}{n_k-1} \sum_{i=1}^{N_k} e_{ki}''}{n_h \binom{N_h}{n_h} n_k \binom{N_k}{n_k}} = \frac{1}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k} \frac{\sum_{i=1}^{N_h} e_{hi} \sum_{i=1}^{N_k} e_{ki}''}{N_h N_k} = 0$$

y análogamente,  $E \left( \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k'}{\bar{Y}_h \bar{X}_k} \right) = E \left( \frac{\bar{e}_k'' \bar{e}_h'}{\bar{Z}_k \bar{Y}_h} \right) = E \left( \frac{\bar{e}_h' \bar{e}_k'}{\bar{X}_h \bar{X}_k} \right) = 0$ , entonces,

$$\begin{aligned}
E \left( \frac{\bar{y}_h \bar{z}_k}{\bar{x}_h \bar{x}_k} \right) &= \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \frac{\bar{Z}_k}{\bar{X}_k} E \left[ 1 - \frac{\bar{e}_k'' \bar{e}_k'}{\bar{Z}_k \bar{X}_k} + \frac{\bar{e}_k'^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{\bar{e}_h \bar{e}_h'}{\bar{Y}_h \bar{X}_h} + \frac{\bar{e}_h'^2}{\bar{X}_h^2} \right] \\
&= \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \frac{\bar{Z}_k}{\bar{X}_k} \left[ 1 - \frac{1}{\bar{Z}_k \bar{X}_k} \frac{N_k - n_k}{N_k} \frac{S_{xz_k}}{n_k} + \frac{1}{\bar{X}_k^2} \frac{N_k - n_k}{N_k} \frac{S_{x_k}^2}{n_k} - \frac{1}{\bar{Y}_h \bar{X}_h} \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_{xy_h}}{n_h} + \frac{1}{\bar{X}_h^2} \frac{N_h - n_h}{N_h} \frac{S_{x_h}^2}{n_h} \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \frac{\bar{Z}_k}{\bar{X}_k} + \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \frac{\bar{Z}_k}{\bar{X}_k} \left[ \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{Y}_h \bar{X}_h} \right) + \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{Z}_k \bar{X}_k} \right) \right]$$

y

$$E\left( \frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h} \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k} \right) = \frac{\bar{Z}_h}{\bar{X}_h} \frac{\bar{Y}_k}{\bar{X}_k} + \frac{\bar{Z}_h}{\bar{X}_h} \frac{\bar{Y}_k}{\bar{X}_k} \left[ \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{Z}_h \bar{X}_h} \right) + \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{Y}_k \bar{X}_k} \right) \right]$$

entonces,

$$\begin{aligned} E\left( \hat{Y}_{Rrh} \hat{Y}_{Rrk} \right) &= \bar{X}_h \bar{X}_k E\left( \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k} \right) + b_k \bar{X}_h \bar{Z}_k E\left( \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \right) - b_k \bar{X}_h \bar{X}_k E\left( \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k} \right) + b_h \bar{Z}_h \bar{X}_k E\left( \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k} \right) + b_h \bar{Z}_h b_k \bar{Z}_k - \\ &\quad - b_h \bar{Z}_h b_k \bar{X}_k E\left( \frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k} \right) - b_h \bar{X}_h \bar{X}_k E\left( \frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h} \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k} \right) - b_h \bar{X}_h b_k \bar{Z}_k E\left( \frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h} \right) + b_h b_k \bar{X}_h \bar{X}_k E\left( \frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h} \frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k} \right) \end{aligned}$$

resolviendo,

$$\begin{aligned} E\left( \hat{Y}_{Rrh} \hat{Y}_{Rrk} \right) &= \bar{Y}_h \bar{Y}_k + \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{Y}_h \bar{X}_h} \right) + \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{Y}_k \bar{X}_k} \right) - \\ &\quad - b_k \bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{Z}_k \bar{X}_k} \right) - b_h \bar{Z}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{Z}_h \bar{X}_h} \right) \end{aligned}$$

Para hallar la covarianza se debe tener  $E\left( \hat{Y}_{Rrh} \right)$  y  $E\left( \hat{Y}_{Rrk} \right)$ , donde

$$E\left( \hat{Y}_{Rrh} \right) = \bar{Y}_h + \bar{Y}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) - b_h \bar{Z}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right)$$

$$E\left( \hat{Y}_{Rrk} \right) = \bar{Y}_k + \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) - b_k \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right)$$

entonces,

$$\begin{aligned} COV\left( \hat{Y}_{Rrh}, \hat{Y}_{Rrk} \right) &= E\left( \hat{Y}_{Rrh} \hat{Y}_{Rrk} \right) - E\left( \hat{Y}_{Rrh} \right) E\left( \hat{Y}_{Rrk} \right) \\ &= \bar{Y}_h \bar{Y}_k + \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{Y}_h \bar{X}_h} \right) + \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{Y}_k \bar{X}_k} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -b_k \bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{Z}_k \bar{X}_k} \right) - b_h \bar{Z}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{Z}_h \bar{X}_h} \right) - \\
& + \bar{Y}_h \bar{Y}_k + \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) - b_h \bar{Z}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \\
& + \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) + \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) \\
& - b_h \bar{Z}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) \\
& + b_k \bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right) + b_k \bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right) \\
& + b_h \bar{Z}_h b_k \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right) \\
\text{COV}(\hat{Y}_{Rrh}, \hat{Y}_{Rrk}) & = \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) \\
& - b_h \bar{Z}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) \\
& + b_k \bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right) \\
& + b_h \bar{Z}_h b_k \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
V(\hat{Y}_{Rrss}) & = \sum_{h=1}^L V(W_h \hat{Y}_{Rrh}) + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L \text{COV}(\hat{Y}_{Rrh}, \hat{Y}_{Rrk}) \\
& = \sum_{h=1}^L W_h^2 V(\hat{Y}_{Rrh}) + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L \text{COV}(\hat{Y}_{Rrh}, \hat{Y}_{Rrk})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \left[ \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + R_{y_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{y_h} S_{xy_h}) + b_h^2 (S_{z_h}^2 + R_{z_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{z_h} S_{xz_h}) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2b_h (S_{yz_h} - R_{z_h} S_{xy_h} - R_{y_h} S_{xz_h} + R_{y_h} R_{z_h} S_{x_h}^2) \right] - \right. \\
& \quad \left. - W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left[ \bar{Y}_h \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) - b_h \bar{Z}_h \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \right]^2 \right] + \\
& \quad + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=1}^L W_h W_k \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) - \\
& \quad - 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_h \bar{Z}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) + \\
& \quad + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_k \bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right) + \\
& \quad + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_h \bar{Z}_h b_k \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right)
\end{aligned}$$

y finalmente,

$$ECM(\hat{Y}_{Rrss}) = V(\hat{Y}_{Rrss}) + \left[ B(\hat{Y}_{Rrss}) \right]^2$$

donde,

$$B(\hat{Y}_{Rrss}) \approx \sum_{h=1}^L W_h \bar{Y}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) - \sum_{h=1}^L W_h b_h \bar{Z}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right)$$

y

$$\begin{aligned}
\left[ B(\hat{Y}_{Rrss}) \right]^2 & \approx \left[ \sum_{h=1}^L W_h \bar{Y}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) - \sum_{h=1}^L W_h b_h \bar{Z}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \right]^2 \\
& \approx \left[ \sum_{h=1}^L W_h \bar{Y}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \right]^2 + \left[ \sum_{h=1}^L W_h b_h \bar{Z}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \right]^2 - \\
& \quad - 2 \sum_{h=1}^L W_h \bar{Y}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \sum_{h=1}^L W_h b_h \bar{Z}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \bar{Y}_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right)^2 - \\
&\quad - 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) + \\
&\quad + \sum_{h=1}^L W_h^2 b_h^2 \bar{Z}_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right)^2 - \\
&\quad - 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_h b_k \bar{Z}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right) - \\
&\quad - \sum_{h=1}^L W_h^2 b_h \bar{Y}_h \bar{Z}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) - \\
&\quad - 2 \sum_{h=1}^L \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^L W_h W_k b_k \bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right)
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
ECM(\hat{Y}_{Rrss}) &\approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \left[ \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + R_{y_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{y_h} S_{xy_h}) + b_h^2 (S_{z_h}^2 + R_{z_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{z_h} S_{xz_h}) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2b_h (S_{yz_h} - R_{z_h} S_{xy_h} - R_{y_h} S_{xz_h} + R_{y_h} R_{z_h} S_{x_h}^2) \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ECM(\hat{Y}_{Rrss}) &\approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + R_{y_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{y_h} S_{xy_h}) + \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) b_h^2 (S_{z_h}^2 + R_{z_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{z_h} S_{xz_h}) - \\
&\quad - 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) b_h (S_{yz_h} - R_{z_h} S_{xy_h} - R_{y_h} S_{xz_h} + R_{y_h} R_{z_h} S_{x_h}^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{ECM}(\hat{Y}_{Rrss}) &\approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (s_{y_h}^2 + \hat{R}_{y_h}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{R}_{y_h} s_{xy_h}) + \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \hat{b}_h^2 (s_{z_h}^2 + \hat{R}_{z_h}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{R}_{z_h} s_{xz_h}) - \\
&\quad - 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \hat{b}_h (s_{yz_h} - \hat{R}_{z_h} s_{xy_h} - \hat{R}_{y_h} s_{xz_h} + \hat{R}_{y_h} \hat{R}_{z_h} s_{x_h}^2)
\end{aligned}$$

donde,  $R_{y_h} = \frac{Y_h}{X_h}$  ,  $R_{z_h} = \frac{Z_h}{X_h}$  ,  $\hat{R}_{y_h} = \frac{y_h}{x_h}$  y  $\hat{R}_{z_h} = \frac{z_h}{x_h}$

Que se puede reescribir como,

$$ECM(\hat{Y}_{Rrss}) \approx \sum_{h=1}^L W_h^2 ECM(\hat{Y}_{R_h}) + \sum_{h=1}^L b_h^2 W_h^2 ECM(\hat{Z}_{R_h}) - \\ - 2 \sum_{h=1}^L b_h W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h z_h} - R_{z_h} S_{xy_h} - R_{y_h} S_{xz_h} + R_{y_h} R_{z_h} S_{x_h}^2)$$

La esperanza, sesgo, varianza y error cuadrático medio del estimador del total son,

$$E(\hat{Y}_{Rrss}) \approx Y + \sum_{h=1}^L N_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) (\bar{Y}_h - b_h \bar{Z}_h) - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h} + b_h \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h} \right]$$

$$B(\hat{Y}_{Rrss}) \approx - \sum_{h=1}^L N_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) (\bar{Y}_h - b_h \bar{Z}_h) - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h} + b_h \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h} \right]$$

$$V(\hat{Y}_{Rrss}) \approx \sum_{h=1}^L N_h^2 \left[ \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + R_{y_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{y_h} S_{xy_h}) + b_h^2 (S_{z_h}^2 + R_{z_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{z_h} S_{xz_h}) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2b_h (S_{y_h z_h} - R_{z_h} S_{xy_h} - R_{y_h} S_{xz_h} + R_{y_h} R_{z_h} S_{x_h}^2) \right] - \right. \\ \left. - N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left[ \bar{Y}_h \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) - b_h \bar{Z}_h \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \right]^2 \right] + \\ + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L N_h N_k \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) - \\ - 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L N_h N_k b_h \bar{Z}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) + \\ + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L N_h N_k b_k \bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right) + \\ + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L N_h N_k b_h \bar{Z}_h b_k \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right)$$

$$ECM(\hat{Y}_{RrSS}) \approx \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + R_{y_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{y_h} S_{xy_h}) + \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) b_h^2 (S_{z_h}^2 + R_{z_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{z_h} S_{xz_h}) - \\ - 2 \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) b_h (S_{yz_h} - R_{z_h} S_{xy_h} - R_{y_h} S_{xz_h} + R_{y_h} R_{z_h} S_{x_h}^2)$$

$$ECM(\hat{Y}_{RrSS}) \approx \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (s_{y_h}^2 + \hat{R}_{y_h}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{R}_{y_h} s_{xy_h}) + \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \hat{b}_h^2 (s_{z_h}^2 + \hat{R}_{z_h}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{R}_{z_h} s_{xz_h}) - \\ - 2 \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \hat{b}_h (s_{yz_h} - \hat{R}_{z_h} s_{xy_h} - \hat{R}_{y_h} s_{xz_h} + \hat{R}_{y_h} \hat{R}_{z_h} s_{x_h}^2)$$

Igual que en casos anteriores, existen los casos especiales, que afectan el valor de  $b_h$ , en esta oportunidad, para cada estrato. De ellos, el más importante es el estimador de varianza mínima para  $b_h$  constante, que no es más que aplicar el valor hallado en “Estimador de Varianza Mínima para  $b$  Constante”, ahora en cada estrato, de tal manera que  $b_{0h}$  es,

$$ECM(\hat{Y}_{RrSS}) \approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \left[ \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [(S_{y_h}^2 + R_{y_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{y_h} S_{xy_h}) + b_h^2 (S_{z_h}^2 + R_{z_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{z_h} S_{xz_h}) - \right. \\ \left. - 2b_h (S_{yz_h} - R_{z_h} S_{xy_h} - R_{y_h} S_{xz_h} + R_{y_h} R_{z_h} S_{x_h}^2)] \right]$$

donde el valor de  $b$  que minimiza el  $ECM$  es

$$b_{0h} = \frac{(S_{yz_h} - R_{z_h} S_{xy_h} - R_{y_h} S_{xz_h} + R_{y_h} R_{z_h} S_{x_h}^2)}{(S_{z_h}^2 + R_{z_h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{z_h} S_{xz_h})}, \text{ si } S_{xz_h} < \frac{S_{z_h}^2 + R_{z_h}^2 S_{x_h}^2}{2R_{z_h}}.$$

### **Estimadores de Razón-Regresión Combinados**

Aquí se tienen varios casos, según se trate al componente de razón y al de regresión lineal. Se puede trabajar la parte de razón de forma separada y la de regresión en forma

combinada, otra opción es de forma contraria, y la tercera es trabajar ambos componentes en forma combinada. Al primero se le denominará Estimador de Razón-Regresión Separado-Combinado, al segundo Estimador de Razón-Regresión Combinado-Separado y al tercero Estimador de Razón-Regresión Combinado-Combinado. A continuación se describen cada uno de ellos.

***Estimadores de razón-regresión separado-combinado.***

Tal como se comentó anteriormente, en esta oportunidad se trabajará el componente de razón de forma separada, es decir, diferenciado para cada estrato, por su parte, en el componente de regresión, el enfoque será combinado, es decir, el coeficiente será único. Esto es, se haya un estimador de razón independientemente para cada estrato, y luego a éstos estimadores, se le aplica un ajuste de regresión lineal de forma combinada. La estructura del estimador del total y del promedio respectivamente es como sigue,

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{Rrsc} &= \sum_{h=1}^L \hat{Y}_{R_h} + b_c (Z_h - \hat{Z}_{R_h}) = \sum_{h=1}^L \hat{Y}_{R_h} + \sum_{h=1}^L b_c (Z_h - \hat{Z}_{R_h}) = \hat{Y}_{Rs} + \sum_{h=1}^L b_c (Z_h - \hat{Z}_{R_h}) \\ \hat{Y}_{Rrsc} &= \frac{1}{N} \hat{Y}_{Rrsc} = \frac{1}{N} \left[ \sum_{h=1}^L \hat{Y}_{R_h} + b_c (Z_h - \hat{Z}_{R_h}) \right] = \frac{1}{N} \left[ \sum_{h=1}^L N_h \hat{Y}_{R_h} + b_c (N_h Z_h - N_h \hat{Z}_{R_h}) \right] \\ &= \sum_{h=1}^L W_h (\hat{Y}_{R_h} + b_c (Z_h - \hat{Z}_{R_h}))\end{aligned}$$

Para hallar la esperanza,

$$\begin{aligned}E(\hat{Y}_{Rrsc}) &= E \left[ \sum_{h=1}^L W_h (\hat{Y}_{R_h} + b_c (Z_h - \hat{Z}_{R_h})) \right] = E \left[ \sum_{h=1}^L W_h \hat{Y}_{R_h} + b_c \sum_{h=1}^L W_h Z_h - b_c \sum_{h=1}^L W_h \hat{Z}_{R_h} \right] \\ &= \sum_{h=1}^L W_h E(\hat{Y}_{R_h}) + b_c \sum_{h=1}^L W_h E(Z_h) - b_c \sum_{h=1}^L W_h E(\hat{Z}_{R_h})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \sum_{h=1}^L W_h \bar{Y}_h \left[ 1 + \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \right] + b_c \sum_{h=1}^L W_h \bar{Z}_h - b_c \sum_{h=1}^L W_h \bar{Z}_h \left[ 1 + \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \right] \\
&\approx \bar{Y} + \sum_{h=1}^L W_h \bar{Y}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) + b_c \bar{Z}_h - b_c \bar{Z}_h - b_c \sum_{h=1}^L W_h \bar{Z}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \\
&\approx \bar{Y} + \sum_{h=1}^L W_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \bar{Y}_h \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) - b_c \bar{Z}_h \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \right]
\end{aligned}$$

de donde el sesgo es,

$$B(\hat{Y}_{Rrsc}) \approx \sum_{h=1}^L W_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \bar{Y}_h \left( \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) - b_c \bar{Z}_h \left( \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} - \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) \right]$$

Desarrollando la varianza,

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{Rrsc} &= \sum_{h=1}^L W_h (\hat{Y}_{R_h} + b_c (Z_h - \hat{Z}_{R_h})) \\
V(\hat{Y}_{Rrsc}) &= V \left[ \sum_{h=1}^L W_h (\hat{Y}_{R_h} + b_c (Z_h - \hat{Z}_{R_h})) \right] \\
&= \sum_{h=1}^L V[W_h (\hat{Y}_{R_h} + b_c (Z_h - \hat{Z}_{R_h}))] + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L \text{COV}(W_h (\hat{Y}_{R_h} + b_c (Z_h - \hat{Z}_{R_h})), W_k (\hat{Y}_{R_k} + b_c (Z_k - \hat{Z}_{R_k}))) \\
&= \sum_{h=1}^L W_h^2 V(\hat{Y}_{R_h}) + b_c^2 \sum_{h=1}^L W_h^2 V(\bar{Z}_h) + b_c^2 \sum_{h=1}^L W_h^2 V(\hat{Z}_{R_h}) \\
&\quad + 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 b_c \text{COV}(\hat{Y}_{R_h}, \bar{Z}_h) - 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 b_c \text{COV}(\hat{Y}_{R_h}, \hat{Z}_{R_h}) - 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 b_c^2 \text{COV}(\bar{Z}_h, \hat{Z}_{R_h}) + \\
&\quad + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k \text{COV}(\hat{Y}_{R_h}, \hat{Y}_{R_k}) + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_c \text{COV}(\hat{Y}_{R_h}, \bar{Z}_k) - \\
&\quad - 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_c \text{COV}(\hat{Y}_{R_h}, \hat{Z}_{R_k}) + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_c \text{COV}(\bar{Z}_h, \hat{Y}_{R_k}) + \\
&\quad + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_c^2 \text{COV}(\bar{Z}_h, \bar{Z}_k) - 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_c^2 \text{COV}(\bar{Z}_h, \hat{Z}_{R_k}) - \\
&\quad - 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_c \text{COV}(\hat{Z}_{R_h}, \hat{Y}_{R_k}) - 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_c^2 \text{COV}(\hat{Z}_{R_h}, \bar{Z}_k) +
\end{aligned}$$

$$+ 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_c^2 \text{COV}(\hat{Z}_{R_h}, \hat{Z}_{R_k})$$

pero  $\bar{Z}_h$  es un valor poblacional, por lo tanto,  $V(\bar{Z}_h) = 0$  ,  $\text{COV}(\hat{Y}_{R_h}, \bar{Z}_h) = 0$

$$\text{COV}(\bar{Z}_h, \hat{Z}_{R_h}) = 0 \quad , \quad \text{COV}(\hat{Y}_{R_h}, \bar{Z}_k) = 0$$

$$\text{COV}(\bar{Z}_h, \hat{Y}_{R_k}) = 0 \quad , \quad \text{COV}(\bar{Z}_h, \bar{Z}_k) = 0$$

$$\text{COV}(\bar{Z}_h, \hat{Z}_{R_k}) = 0 \quad , \quad \text{COV}(\hat{Z}_{R_h}, \bar{Z}_h) = 0$$

entonces,

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}_{Rrsc}) &= \sum_{h=1}^L W_h^2 V(\hat{Y}_{R_h}) + b_c^2 \sum_{h=1}^L W_h^2 V(\hat{Z}_{R_h}) - 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 b_c \text{COV}(\hat{Y}_{R_h}, \hat{Z}_{R_h}) + \\ &+ 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k \text{COV}(\hat{Y}_{R_h}, \hat{Y}_{R_k}) - 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_c \text{COV}(\hat{Y}_{R_h}, \hat{Z}_{R_k}) - \\ &- 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_c \text{COV}(\hat{Z}_{R_h}, \hat{Y}_{R_k}) + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_c^2 \text{COV}(\hat{Z}_{R_h}, \hat{Z}_{R_k}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}_{Rrsc}) &= \sum_{h=1}^L W_h^2 \left[ V(\hat{Y}_{R_h}) + b_c^2 V(\hat{Z}_{R_h}) - 2 b_c \text{COV}(\hat{Y}_{R_h}, \hat{Z}_{R_h}) \right] + \\ &+ 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k \left[ \text{COV}(\hat{Y}_{R_h}, \hat{Y}_{R_k}) - b_c \text{COV}(\hat{Y}_{R_h}, \hat{Z}_{R_k}) - b_c \text{COV}(\hat{Z}_{R_h}, \hat{Y}_{R_k}) - b_c^2 \text{COV}(\hat{Z}_{R_h}, \hat{Z}_{R_k}) \right] \end{aligned}$$

como se sabe,

$$\begin{aligned} V(\hat{Y}_{R_h}) &\approx \bar{Y}_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \frac{S_{y_h}^2}{\bar{Y}_h^2} + \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - 2 \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right)^2 \right] \\ &\approx \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{y_h}^2 + \frac{\bar{Y}_h^2}{\bar{X}_h^2} S_{x_h}^2 - 2 \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} S_{xy_h} - \bar{Y}_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$V(\hat{Z}_{R_h}) \approx \bar{Z}_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \frac{S_{z_h}^2}{\bar{Z}_h^2} + \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - 2 \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} - \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right)^2 \right]$$

$$\approx \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{y_h}^2 + \frac{\bar{Z}_h^2}{\bar{X}_h^2} S_{x_h}^2 - 2 \frac{\bar{Z}_h}{\bar{X}_h} S_{xz_h} - \bar{Z}_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right)^2 \right]$$

y

$$COV\left(\hat{Y}_{R_h}, \hat{Z}_{R_h}\right) = COV\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \bar{X}_h, \frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h} \bar{X}_h\right) = \bar{X}_h^2 COV\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}, \frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h}\right) = \bar{X}_h^2 \left[ E\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h}\right) - E\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}\right) E\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h}\right) \right]$$

$$COV\left(\hat{Y}_{R_h}, \hat{Y}_{R_k}\right) = COV\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \bar{X}_h, \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k} \bar{X}_k\right) = \bar{X}_h \bar{X}_k COV\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}, \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k}\right) = \bar{X}_h \bar{X}_k \left[ E\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k}\right) - E\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}\right) E\left(\frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k}\right) \right]$$

$$COV\left(\hat{Y}_{R_h}, \hat{Z}_{R_k}\right) = COV\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \bar{X}_h, \frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k} \bar{X}_k\right) = \bar{X}_h \bar{X}_k COV\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}, \frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k}\right) = \bar{X}_h \bar{X}_k \left[ E\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k}\right) - E\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}\right) E\left(\frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k}\right) \right]$$

$$COV\left(\hat{Z}_{R_h}, \hat{Y}_{R_k}\right) = COV\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h} \bar{X}_h, \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k} \bar{X}_k\right) = \bar{X}_h \bar{X}_k COV\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h}, \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k}\right) = \bar{X}_h \bar{X}_k \left[ E\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h} \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k}\right) - E\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h}\right) E\left(\frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k}\right) \right]$$

$$COV\left(\hat{Z}_{R_h}, \hat{Z}_{R_k}\right) = COV\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h} \bar{X}_h, \frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k} \bar{X}_k\right) = \bar{X}_h \bar{X}_k COV\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h}, \frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k}\right) = \bar{X}_h \bar{X}_k \left[ E\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h} \frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k}\right) - E\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h}\right) E\left(\frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k}\right) \right]$$

de Martín-Caro (2006, p. 78) se tiene que

$$E\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}\right) = \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} + \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \left[ \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \right]$$

análogamente,

$$E\left(\frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k}\right) = \frac{\bar{Y}_k}{\bar{X}_k} + \frac{\bar{Y}_k}{\bar{X}_k} \left[ \frac{N_k - n_k}{N_k n_k} \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) \right]$$

$$E\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h}\right) = \frac{\bar{Z}_h}{\bar{X}_h} + \frac{\bar{Z}_h}{\bar{X}_h} \left[ \frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \right]$$

$$E\left(\frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k}\right) = \frac{\bar{Z}_k}{\bar{X}_k} + \frac{\bar{Z}_k}{\bar{X}_k} \left[ \frac{N_k - n_k}{N_k n_k} \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right) \right]$$

de Marín-Caro (2006, p. 97) se sabe que

$$E\left(\frac{\bar{y}_h \bar{y}_k}{\bar{x}_h \bar{x}_k}\right) = \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{X}_h \bar{X}_k} + \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{X}_h \bar{X}_k} \left[ \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{Y}_h \bar{X}_h} \right) + \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{Y}_k \bar{X}_k} \right) \right]$$

y análogamente,

$$E\left(\frac{\bar{z}_h \bar{z}_k}{\bar{x}_h \bar{x}_k}\right) = \frac{\bar{Z}_h \bar{Z}_k}{\bar{X}_h \bar{X}_k} + \frac{\bar{Z}_h \bar{Z}_k}{\bar{X}_h \bar{X}_k} \left[ \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{Z}_h \bar{X}_h} \right) + \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{Z}_k \bar{X}_k} \right) \right]$$

de la sección sobre “Estimadores de Razón-Regresión Separados”

$$E\left(\frac{\bar{y}_h \bar{z}_k}{\bar{x}_h \bar{x}_k}\right) = \frac{\bar{Y}_h \bar{Z}_k}{\bar{X}_h \bar{X}_k} + \frac{\bar{Y}_h \bar{Z}_k}{\bar{X}_h \bar{X}_k} \left[ \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{Y}_h \bar{X}_h} \right) + \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{Z}_k \bar{X}_k} \right) \right]$$

$$E\left(\frac{\bar{z}_h \bar{y}_k}{\bar{x}_h \bar{x}_k}\right) = \frac{\bar{Z}_h \bar{Y}_k}{\bar{X}_h \bar{X}_k} + \frac{\bar{Z}_h \bar{Y}_k}{\bar{X}_h \bar{X}_k} \left[ \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{Z}_h \bar{X}_h} \right) + \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{Y}_k \bar{X}_k} \right) \right]$$

Desarrollando las covarianzas,

$$COV\left(\hat{\bar{Y}}_{R_h}, \hat{\bar{Z}}_{R_h}\right) = COV\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \bar{X}_h, \frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h} \bar{X}_h\right) = \bar{X}_h^2 COV\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}, \frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h}\right) = \bar{X}_h^2 \left[ E\left(\frac{\bar{y}_h \bar{z}_h}{\bar{x}_h \bar{x}_h}\right) - E\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}\right) E\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h}\right) \right]$$

como

$$E\left(\hat{\bar{Y}}_{R_h}\right) = \bar{Y}_h + \bar{Y}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right), \quad E\left(\hat{\bar{Z}}_{R_h}\right) = \bar{Z}_h + \bar{Z}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right)$$

$$E\left(\hat{\bar{Y}}_{R_h} \hat{\bar{Z}}_{R_h}\right) = \bar{Y}_h \bar{Z}_h \left[ 1 + \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \frac{S_{yz_h}}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h} - 2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - 2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} + 3 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right]$$

$$= \bar{Y}_h \bar{Z}_h \left[ 1 + \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) + \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) + \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{yz_h}}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} + \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) \right]$$

$$E\left(\hat{\bar{Y}}_{R_h}\right) E\left(\hat{\bar{Z}}_{R_h}\right) = \left[ \bar{Y}_h + \bar{Y}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \right] \left[ \bar{Z}_h + \bar{Z}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \right]$$

$$= \bar{Y}_h \bar{Z}_h + \bar{Y}_h \bar{Z}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) + \bar{Y}_h \bar{Z}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) +$$

$$+ \bar{Y}_h \bar{Z}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right)$$

entonces,

$$\begin{aligned} \text{COV}(\hat{\bar{Y}}_{R_h}, \hat{\bar{Z}}_{R_h}) &= \bar{Y}_h \bar{Z}_h \left[ \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{yz_h}}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} + \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{COV}(\hat{\bar{Y}}_{R_h}, \hat{\bar{Y}}_{R_k}) = \text{COV}\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \bar{X}_h, \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k} \bar{X}_k\right) = \bar{X}_h \bar{X}_k \text{COV}\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}, \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k}\right) = \bar{X}_h \bar{X}_k \left[ E\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k}\right) - E\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}\right) E\left(\frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k}\right) \right]$$

$$\begin{aligned} &= \bar{Y}_h \bar{Y}_k + \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left[ \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{Y}_h \bar{X}_h} \right) + \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{Y}_k \bar{X}_k} \right) \right] - \\ &\quad - \left[ \bar{Y}_h \bar{X}_k + \bar{Y}_h \bar{X}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \right] \left[ \bar{Y}_k \bar{X}_h + \bar{Y}_k \bar{X}_h \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \bar{Y}_h \bar{Y}_k + \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{Y}_h \bar{X}_h} \right) + \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{Y}_k \bar{X}_k} \right) - \\ &\quad - \bar{Y}_h \bar{Y}_k - \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) - \\ &\quad - \bar{Y}_k \bar{Y}_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) - \\ &\quad - \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) \\ &= -\bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) \end{aligned}$$

$$\text{COV}(\hat{\bar{Y}}_{R_h}, \hat{\bar{Z}}_{R_k}) = \text{COV}\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \bar{X}_h, \frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k} \bar{X}_k\right) = \bar{X}_h \bar{X}_k \text{COV}\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}, \frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k}\right) = \bar{X}_h \bar{X}_k \left[ E\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k}\right) - E\left(\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}\right) E\left(\frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k}\right) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{Y}_h \bar{Z}_k + \bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{Y}_h \bar{X}_h} \right) + \bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{Z}_k \bar{X}_k} \right) - \\
&\quad - \left[ \bar{Y}_h \bar{X}_k + \bar{Y}_h \bar{X}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \right] \left[ \bar{Z}_k \bar{X}_h + \bar{Z}_k \bar{X}_h \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right) \right] \\
&= \bar{Y}_h \bar{Z}_k + \bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{Y}_h \bar{X}_h} \right) + \bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{Z}_k \bar{X}_k} \right) - \\
&\quad - \bar{Y}_h \bar{Z}_k - \bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right) - \\
&\quad - \bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) - \\
&\quad - \bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right) \\
&= -\bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{COV}(\hat{\bar{Z}}_{R_h}, \hat{\bar{Y}}_{R_k}) &= \text{COV}\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h} \bar{X}_h, \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k} \bar{X}_k\right) = \bar{X}_h \bar{X}_k \text{COV}\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h}, \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k}\right) = \bar{X}_h \bar{X}_k \left[ E\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h} \frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k}\right) - E\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h}\right) E\left(\frac{\bar{y}_k}{\bar{x}_k}\right) \right] \\
&= \bar{Z}_h \bar{Y}_k + \bar{Z}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{Z}_h \bar{X}_h} \right) + \bar{Z}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{Y}_k \bar{X}_k} \right) - \\
&\quad - \left[ \bar{Z}_h \bar{X}_k + \bar{Z}_h \bar{X}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \right] \left[ \bar{Y}_k \bar{X}_h + \bar{Y}_k \bar{X}_h \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) \right] \\
&= \bar{Z}_h \bar{Y}_k + \bar{Z}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{Z}_h \bar{X}_h} \right) + \bar{Z}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{Y}_k \bar{X}_k} \right) - \\
&\quad - \bar{Z}_h \bar{Y}_k - \bar{Z}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) - \\
&\quad - \bar{Z}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{Z}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) \\
& = -\bar{Z}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{COV}(\hat{Z}_{R_h}, \hat{Z}_{R_k}) & = \text{COV}\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h} \bar{X}_h, \frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k} \bar{X}_k\right) = \bar{X}_h \bar{X}_k \text{COV}\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h}, \frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k}\right) = \bar{X}_h \bar{X}_k \left[ E\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h} \frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k}\right) - E\left(\frac{\bar{z}_h}{\bar{x}_h}\right) E\left(\frac{\bar{z}_k}{\bar{x}_k}\right) \right] \\
& = \bar{Z}_h \bar{Z}_k + \bar{Z}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{Z}_h \bar{X}_h} \right) + \bar{Z}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{Z}_k \bar{X}_k} \right) - \\
& \quad - \left[ \bar{Z}_h \bar{X}_k + \bar{Z}_h \bar{X}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \right] \left[ \bar{Z}_k \bar{X}_h + \bar{Z}_k \bar{X}_h \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right) \right] \\
& = \bar{Z}_h \bar{Z}_k + \bar{Z}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{Z}_h \bar{X}_h} \right) + \bar{Z}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{Z}_k \bar{X}_k} \right) - \\
& \quad - \bar{Z}_h \bar{Z}_k - \bar{Z}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right) - \\
& \quad - \bar{Z}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) - \\
& \quad - \bar{Z}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right) \\
& = -\bar{Z}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right)
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
V(\hat{Y}_{Rrsc}) & = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + \frac{\bar{Y}_h^2}{\bar{X}_h^2} S_{x_h}^2 - 2 \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} S_{xy_h} \right) - \sum_{h=1}^L W_h^2 \bar{Y}_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right)^2 + \\
& \quad + b_c^2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + \frac{\bar{Y}_h^2}{\bar{X}_h^2} S_{x_h}^2 - 2 \frac{\bar{Z}_h}{\bar{X}_h} S_{xz_h} \right) - b_c^2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \bar{Z}_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right)^2 - \\
& \quad - 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 b_c \bar{Y}_h \bar{Z}_h \left[ \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{yz_h}}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} + \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) - \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) + \\
& + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_c \bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right) + \\
& + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_c \bar{Z}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) - \\
& - 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_c^2 \bar{Z}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right)
\end{aligned}$$

Para hallar el Error Cuadrático Medio,

$$ECM(\hat{Y}_{Rrsc}) = V(\hat{Y}_{Rrsc}) + \left[ B(\hat{Y}_{Rrsc}) \right]^2$$

y el sesgo es,

$$B(\hat{Y}_{Rrsc}) \approx \sum_{h=1}^L W_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \bar{Y}_h \left( \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) - b_c \bar{Z}_h \left( \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} - \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) \right]$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\left[ B(\hat{Y}_{Rrsc}) \right]^2 & \approx \left[ \sum_{h=1}^L W_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \bar{Y}_h \left( \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) - b_c \bar{Z}_h \left( \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} - \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) \right] \right]^2 \\
& \approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left[ \bar{Y}_h \left( \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) - b_c \bar{Z}_h \left( \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} - \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) \right]^2 + \\
& + 2 \sum_{h=1}^L \sum_{k=h+1}^L \left[ W_h W_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left[ \bar{Y}_h \left( \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) - b_c \bar{Z}_h \left( \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} - \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) \right] \right. \\
& \quad \left. \left[ \bar{Y}_k \left( \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} - \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} \right) - b_c \bar{Z}_k \left( \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} - \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} \right) \right] \right] \\
& \approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left[ \bar{Y}_h^2 \left( \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right)^2 + b_c^2 \bar{Z}_h^2 \left( \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} - \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right)^2 - \right. \\
& \quad \left. - 2 b_c \bar{Y}_h \bar{Z}_h \left( \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) \left( \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} - \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{h=1}^L \sum_{k=h+1}^L W_h W_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left[ \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{S_{xyh}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} \right) \left( \frac{S_{xyk}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} - \frac{S_{xk}^2}{\bar{X}_k^2} \right) - \right. \\
& - b_c \bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{S_{xyh}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} \right) \left( \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} - \frac{S_{xk}^2}{\bar{X}_k^2} \right) - b_c \bar{Z}_h \bar{Y}_k \left( \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} - \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} \right) \left( \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} - \frac{S_{xk}^2}{\bar{X}_k^2} \right) + \\
& \left. + b_c^2 \bar{Z}_h \bar{Z}_k \left( \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} - \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} \right) \left( \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} - \frac{S_{xk}^2}{\bar{X}_k^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

por lo tanto, resolviendo,

$$\begin{aligned}
ECM\left(\hat{Y}_{Rrsc}\right) &= \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + \frac{\bar{Y}_h^2}{\bar{X}_h^2} S_{x_h}^2 - 2 \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} S_{xy_h} \right) + b_c^2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + \frac{\bar{Z}_h^2}{\bar{X}_h^2} S_{x_h}^2 - 2 \frac{\bar{Z}_h}{\bar{X}_h} S_{xz_h} \right) - \\
& - 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 b_c \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - \left( \frac{\bar{Z}_h}{\bar{X}_h} \right) S_{xy_h} - \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \right) S_{xz_h} + \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} \right) \left( \frac{\bar{Z}_h}{\bar{X}_h} \right) S_{x_h}^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ECM\left(\hat{Y}_{Rrsc}\right) &= \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + R_{yh}^2 S_{x_h}^2 - 2 R_{yh} S_{xy_h} \right) + b_c^2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + R_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2 R_{zh} S_{xz_h} \right) - \\
& - 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 b_c \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - R_{zh} S_{xy_h} - R_{yh} S_{xz_h} + R_{yh} R_{zh} S_{x_h}^2 \right)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\hat{ECM}\left(\hat{Y}_{Rrsc}\right) &= \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( s_{y_h}^2 + \hat{R}_{yh}^2 s_{x_h}^2 - 2 \hat{R}_{yh} s_{xy_h} \right) + b_c^2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( s_{y_h}^2 + \hat{R}_{zh}^2 s_{x_h}^2 - 2 \hat{R}_{zh} s_{xz_h} \right) - \\
& - 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 b_c \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( s_{yz_h} - \hat{R}_{zh} s_{xy_h} - \hat{R}_{yh} s_{xz_h} + \hat{R}_{yh} \hat{R}_{zh} s_{x_h}^2 \right)
\end{aligned}$$

En resumen se tiene,

$$E\left(\hat{Y}_{Rrsc}\right) \approx \bar{Y} + \sum_{h=1}^L W_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \bar{Y}_h \left( \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xyh}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) - b_c \bar{Z}_h \left( \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \right]$$

$$B\left(\hat{Y}_{Rrsc}\right) \approx \sum_{h=1}^L W_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \bar{Y}_h \left( \frac{S_{xyh}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} \right) - b_c \bar{Z}_h \left( \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} - \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} \right) \right]$$

$$V\left(\hat{Y}_{Rrsc}\right) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + \frac{\bar{Y}_h^2}{\bar{X}_h^2} S_{x_h}^2 - 2 \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} S_{xy_h} \right) - \sum_{h=1}^L W_h^2 \bar{Y}_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xyh}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right)^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + b_c^2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + \frac{\bar{Z}_h^2}{\bar{X}_h^2} S_{x_h}^2 - 2 \frac{\bar{Z}_h}{\bar{X}_h} S_{xz_h} \right) - b_c^2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \bar{Z}_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right)^2 - \\
& - 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 b_c \bar{Y}_h \bar{Z}_h \left[ \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{yz_h}}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} + \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} \right) - \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \right] - \\
& - 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) + \\
& + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_c \bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right) + \\
& + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_c \bar{Z}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) - \\
& - 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L W_h W_k b_c^2 \bar{Z}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ECM\left(\hat{Y}_{R_{rsc}}\right) &= \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + R_{yh}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{yh} S_{xy_h} \right) + b_c^2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + R_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{zh} S_{xz_h} \right) - \\
& - 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 b_c \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - R_{zh} S_{xy_h} - R_{yh} S_{xz_h} + R_{yh} R_{zh} S_{x_h}^2 \right)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
E\hat{C}M\left(\hat{Y}_{R_{rsc}}\right) &= \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( s_{y_h}^2 + \hat{R}_{yh}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{R}_{yh} s_{xy_h} \right) + b_c^2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( s_{y_h}^2 + \hat{R}_{zh}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{R}_{zh} s_{xz_h} \right) - \\
& - 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 b_c \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( s_{yz_h} - \hat{R}_{zh} s_{xy_h} - \hat{R}_{yh} s_{xz_h} + \hat{R}_{yh} \hat{R}_{zh} s_{x_h}^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\text{donde, } R_{y_h} = \frac{Y_h}{X_h}, \quad R_{z_h} = \frac{Z_h}{X_h}, \quad \hat{R}_{y_h} = \frac{y_h}{x_h} \quad \text{y} \quad \hat{R}_{z_h} = \frac{z_h}{x_h}$$

Para el caso del total se tiene,

$$E\left(\hat{Y}_{R_{rsc}}\right) \approx Y + \sum_{h=1}^L N_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \bar{Y}_h \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) - b_c \bar{Z}_h \left( \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
B(\hat{Y}_{Rrsc}) &\approx \sum_{h=1}^L N_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \bar{Y}_h \left( \frac{S_{xyh}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} \right) - b_c \bar{Z}_h \left( \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} - \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} \right) \right] \\
V(\hat{Y}_{Rrsc}) &= \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yh}^2 + \frac{\bar{Y}_h^2}{\bar{X}_h^2} S_{xh}^2 - 2 \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h} S_{xyh} \right) - \sum_{h=1}^L N_h^2 \bar{Y}_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xyh}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right)^2 + \\
&+ b_c^2 \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yh}^2 + \frac{\bar{Z}_h^2}{\bar{X}_h^2} S_{xh}^2 - 2 \frac{\bar{Z}_h}{\bar{X}_h} S_{xz_h} \right) - b_c^2 \sum_{h=1}^L N_h^2 \bar{Z}_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right)^2 - \\
&- 2 \sum_{h=1}^L N_h^2 b_c \bar{Y}_h \bar{Z}_h \left[ \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{yz_h}}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h} - \frac{S_{xyh}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} + \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} \right) - \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xyh}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \right] - \\
&- 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L N_h N_k \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xyh}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{S_{xk}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xyk}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) + \\
&+ 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L N_h N_k b_c \bar{Y}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xyh}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \right) \left( \frac{S_{xk}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right) + \\
&+ 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L N_h N_k b_c \bar{Z}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{xk}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xyk}}{\bar{X}_k \bar{Y}_k} \right) - \\
&- 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L N_h N_k b_c^2 \bar{Z}_h \bar{Z}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} - \frac{S_{xz_h}}{\bar{X}_h \bar{Z}_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{S_{xk}^2}{\bar{X}_k^2} - \frac{S_{xz_k}}{\bar{X}_k \bar{Z}_k} \right) \\
ECM(\hat{Y}_{Rrsc}) &= \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yh}^2 + R_{yh}^2 S_{xh}^2 - 2R_{yh} S_{xyh} \right) + b_c^2 \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yh}^2 + R_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2R_{zh} S_{xz_h} \right) - \\
&- 2 \sum_{h=1}^L N_h^2 b_c \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - R_{zh} S_{xyh} - R_{yh} S_{xz_h} + R_{yh} R_{zh} S_{xh}^2 \right)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
ECM(\hat{Y}_{Rrsc}) &= \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( s_{yh}^2 + \hat{R}_{yh}^2 s_{xh}^2 - 2\hat{R}_{yh} s_{xyh} \right) + b_c^2 \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( s_{yh}^2 + \hat{R}_{zh}^2 s_{xh}^2 - 2\hat{R}_{zh} s_{xz_h} \right) - \\
&- 2 \sum_{h=1}^L N_h^2 b_c \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( s_{yz_h} - \hat{R}_{zh} s_{xyh} - \hat{R}_{yh} s_{xz_h} + \hat{R}_{yh} \hat{R}_{zh} s_{xh}^2 \right)
\end{aligned}$$

Para minimizar el Error Cuadrático Medio, se hace  $b_c = b_{c0}$  constante, se deriva respecto de  $b_{c0}$  y se iguala a cero, esto es,

$$\frac{\partial V(\hat{Y}_{Risc})}{\partial b_{c0}} = 2b_{c0} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + R_{z_h h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{z_h} S_{xz_h}) -$$

$$- 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} + R_{z_h} S_{xy_h} - R_{y_h} S_{xz_h} + R_{y_h} R_{z_h} S_{x_h}^2) = 0$$

es decir,

$$b_{c0} = \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} + R_{z_h} S_{xy_h} - R_{y_h} S_{xz_h} + R_{y_h} R_{z_h} S_{x_h}^2)}{\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + R_{z_h h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{z_h} S_{xz_h})}$$

Al revisar la segunda derivada del Error Cuadrático Medio respecto de  $b_{c0}$ ,

$$\frac{\partial^2 V(\hat{Y}_{Risc})}{\partial b_{c0}^2} = 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + R_{z_h h}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{z_h} S_{xz_h})$$

que es mayor que cero si ocurre

$$\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{z_h}^2 + \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) R_{z_h h}^2 S_{x_h}^2 - 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) R_{z_h} S_{xz_h} > 0$$

$$\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) R_{z_h} S_{xz_h} < \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{z_h}^2 + \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) R_{z_h h}^2 S_{x_h}^2}{2}$$

### ***Estimadores de razón-regresión combinado-separado.***

En este caso, se trabajará de forma inversa al anterior, es decir, se determinan unos estimadores de razón para cada estrato, pero las razones se trabajan de forma combinada, en consecuencia, se tendrá una razón única para todos los estratos. Luego, a éstos estimadores se le aplica un ajuste de regresión lineal donde los coeficientes de regresión se calculan diferenciados para cada estrato. Lo que resulta es que una vez que se trabajan los componentes de razón de

forma combinada, hace que se pierda el efecto de tener los  $b_h$  separados para cada estrato. Los estimadores quedarían así,

$$\hat{Y}_{Rrcs} = \hat{Y}_{Rc} + \sum_{h=1}^L b_h (Z - \hat{Z}_{Rc}) = \hat{Y}_{Rc} + \left( \sum_{h=1}^L b_h \right) (Z - \hat{Z}_{Rc})$$

$$\hat{\bar{Y}}_{Rrcs} = \hat{\bar{Y}}_{Rc} + \sum_{h=1}^L b_h (\bar{Z} - \hat{\bar{Z}}_{Rc}) = \hat{\bar{Y}}_{Rc} + \left( \sum_{h=1}^L b_h \right) (\bar{Z} - \hat{\bar{Z}}_{Rc})$$

y sólo tendrían sentido si

$$\begin{aligned} \text{i) } b_h = 0, \forall h \quad \text{entonces,} \quad \hat{Y}_{Rrcs} &= \hat{Y}_{Rc} & \hat{\bar{Y}}_{Rrcs} &= \hat{\bar{Y}}_{Rc} \\ \text{ii) } \sum_{h=1}^L b_h &= 1 \quad \text{entonces,} \quad \hat{Y}_{Rrcs} &= \hat{Y}_{Rc} + (Z - \hat{Z}_{Rc}) & \hat{\bar{Y}}_{Rrcs} &= \hat{\bar{Y}}_{Rc} + (\bar{Z} - \hat{\bar{Z}}_{Rc}) \end{aligned}$$

que son iguales a los casos especiales para los estimadores de razón-regresión combinado-combinado, cuando  $b_c = 0$  y  $b_c = 1$  respectivamente, que se trabajan en el siguiente apartado.

Si se tratara de optimizar  $b_h$  para cada estrato, además que no se aprovecha por lo ya expuesto, el  $b$  resultante a aplicar, que es  $\sum_{h=1}^L b_h$ , sería muy grande, y dependería del total de estratos, de manera que no estaría minimizando la varianza.

### ***Estimadores de razón-regresión combinado-combinado.***

En este último caso, tanto el componente de razón como el de regresión lineal, son tratados de forma combinada, es decir, se tendrá una razón única y un coeficiente único para todos los estratos. La estructura de los estimadores es,

$$\hat{Y}_{Rrcc} = \hat{Y}_{Rc} + b_c (Z - \hat{Z}_{Rc})$$

$$\hat{\bar{Y}}_{Rrcc} = \frac{1}{N} \hat{Y}_{Rrcc} = \frac{1}{N} [\hat{Y}_{Rc} + b_c (Z - \hat{Z}_{Rc})] = \hat{\bar{Y}}_{Rc} + b_c (\bar{Z} - \hat{\bar{Z}}_{Rc})$$

la esperanza del promedio es,

$$\begin{aligned}
 E(\hat{Y}_{Rrcc}) &= E(\hat{Y}_{Rc} + b_c(Z - \hat{Z}_{Rc})) = E(\hat{Y}_{Rc}) + b_c E(Z) - b_c E(\hat{Z}_{Rc}) = E(\hat{Y}_{Rc}) + b_c Z - b_c E(\hat{Z}_{Rc}) \\
 &= Y + \frac{1}{X} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (R_{yc} S_{x_h}^2 - S_{xy_h}) + b_c Z - b_c Z - b_c \frac{1}{X} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (R_{zc} S_{x_h}^2 - S_{xz_h}) \\
 &= Y + \frac{1}{X} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (R_{yc} S_{x_h}^2 - S_{xy_h}) - b_c \frac{1}{X} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (R_{zc} S_{x_h}^2 - S_{xz_h})
 \end{aligned}$$

por lo tanto, el sesgo es,

$$B(\hat{Y}_{Rrcc}) = \frac{1}{X} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xy_h} - R_{yc} S_{x_h}^2) - b_c \frac{1}{X} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xz_h} - R_{zc} S_{x_h}^2)$$

Para la varianza se tiene que,

$$\begin{aligned}
 V(\hat{Y}_{Rrcc}) &= V(\hat{Y}_{Rc} + b_c(Z - \hat{Z}_{Rc})) \\
 &= V(\hat{Y}_{Rc}) + b_c^2 V(Z) + b_c^2 V(\hat{Z}_{Rc}) + 2 COV(\hat{Y}_{Rc}, b_c Z) - 2 COV(b_c Z, b_c \hat{Z}_{Rc}) - 2 COV(\hat{Y}_{Rc}, b_c \hat{Z}_{Rc})
 \end{aligned}$$

pero como  $b_c$  y  $Z$  son constantes, entonces,

$$\begin{aligned}
 V(Z) &= 0 \\
 COV(\hat{Y}_{Rc}, b_c Z) &= 0 \\
 COV(b_c Z, b_c \hat{Z}_{Rc}) &= 0
 \end{aligned}$$

luego,

$$V(\hat{Y}_{Rrcc}) = V(\hat{Y}_{Rc}) + b_c^2 V(\hat{Z}_{Rc}) - 2 COV(\hat{Y}_{Rc}, b_c \hat{Z}_{Rc}) = V(\hat{Y}_{Rc}) + b_c^2 V(\hat{Z}_{Rc}) - 2 b_c COV(\hat{Y}_{Rc}, \hat{Z}_{Rc})$$

como se sabe de Martín-Caro (2006, p. 92),

$$V(\hat{Y}_{Rc}) \approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 - 2R_{yc} S_{xy_h} + R_{yc}^2 S_{x_h}^2 \right) - \frac{1}{X^2} \left( \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xy_h} - R_{yc} S_{x_h}^2) \right)^2$$

y análogamente,

$$V(\hat{Z}_{Rc}) \approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{z_h}^2 - 2R_{zc} S_{xz_h} + R_{zc}^2 S_{x_h}^2 \right) - \frac{1}{X^2} \left( \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xz_h} - R_{zc} S_{x_h}^2) \right)^2$$

Desarrollando la covarianza, se tiene,

$$\begin{aligned} COV(\hat{Y}_{Rc}, \hat{Z}_{Rc}) &= E[(\hat{Y}_{Rc} - E(\hat{Y}_{Rc}))(\hat{Z}_{Rc} - E(\hat{Z}_{Rc}))] = E[\hat{Y}_{Rc}\hat{Z}_{Rc} - E(\hat{Y}_{Rc})\hat{Z}_{Rc} - \hat{Y}_{Rc}E(\hat{Z}_{Rc}) + E(\hat{Y}_{Rc})E(\hat{Z}_{Rc})] \\ &= E(\hat{Y}_{Rc}\hat{Z}_{Rc}) - E(\hat{Y}_{Rc})E(\hat{Z}_{Rc}) - E(\hat{Y}_{Rc})E(\hat{Z}_{Rc}) + E(\hat{Y}_{Rc})E(\hat{Z}_{Rc}) = E(\hat{Y}_{Rc}\hat{Z}_{Rc}) - E(\hat{Y}_{Rc})E(\hat{Z}_{Rc}) \\ &= E(\hat{Y}_{Rc}\hat{Z}_{Rc}) - \left[ Y + \frac{1}{X} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (R_{yc} S_{x_h}^2 - S_{xy_h}) \right] \left[ Z + \frac{1}{X} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (R_{zc} S_{x_h}^2 - S_{xz_h}) \right] \end{aligned}$$

desarrollando  $E(\hat{Y}_{Rc}\hat{Z}_{Rc})$  se tiene,

$$E(\hat{Y}_{Rc}\hat{Z}_{Rc}) = E\left[ \left( \frac{\hat{Y}_{st}}{\hat{X}_{st}} X \right) \left( \frac{\hat{Z}_{st}}{\hat{X}_{st}} X \right) \right] = X^2 E\left[ \frac{\hat{Y}_{st}\hat{Z}_{st}}{\hat{X}_{st}^2} \right] = X^2 E\left[ \frac{\left( \sum_{h=1}^L W_h \bar{y}_h \right) \left( \sum_{h=1}^L W_h \bar{z}_h \right)}{\left( \sum_{h=1}^L W_h \bar{x}_h \right)^2} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{haciendo} \quad y_{hi} = Y_h + e_{hi} &\Rightarrow \bar{y}_h = Y_h + \bar{e}_h \Rightarrow E(\bar{y}_h) = Y_h + E(\bar{e}_h) = Y_h \quad ; \quad V(\bar{y}_h) = \frac{1-f_h}{n_h} S_{y_h}^2 \\ x_{hi} = X_h + e'_{hi} &\Rightarrow \bar{x}_h = X_h + \bar{e}'_h \Rightarrow E(\bar{x}_h) = X_h + E(\bar{e}'_h) = X_h \quad ; \quad V(\bar{x}_h) = \frac{1-f_h}{n_h} S_{x_h}^2 \\ z_{hi} = Z_h + e''_{hi} &\Rightarrow \bar{z}_h = Z_h + \bar{e}''_h \Rightarrow E(\bar{z}_h) = Z_h + E(\bar{e}''_h) = Z_h \quad ; \quad V(\bar{z}_h) = \frac{1-f_h}{n_h} S_{z_h}^2 \end{aligned}$$

se tiene que,

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{st} &= \sum_{h=1}^L W_h \bar{y}_h = \sum_{h=1}^L W_h Y_h + W_h \bar{e}_h = \sum_{h=1}^L W_h Y_h + \sum_{h=1}^L W_h \bar{e}_h = Y + \bar{e} \quad ; E(\hat{Y}_{st}) = Y \quad ; V(\hat{Y}_{st}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{y_h}^2 \\ \hat{X}_{st} &= \sum_{h=1}^L W_h \bar{x}_h = \sum_{h=1}^L W_h X_h + W_h \bar{e}'_h = \sum_{h=1}^L W_h X_h + \sum_{h=1}^L W_h \bar{e}'_h = X + \bar{e}' \quad ; E(\hat{X}_{st}) = X \quad ; V(\hat{X}_{st}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{x_h}^2 \\ \hat{Z}_{st} &= \sum_{h=1}^L W_h \bar{z}_h = \sum_{h=1}^L W_h Z_h + W_h \bar{e}''_h = \sum_{h=1}^L W_h Z_h + \sum_{h=1}^L W_h \bar{e}''_h = Z + \bar{e}'' \quad ; E(\hat{Z}_{st}) = Z \quad ; V(\hat{Z}_{st}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{z_h}^2 \end{aligned}$$

luego,

$$\frac{\hat{Y}_{st}\hat{Z}_{st}}{\hat{X}_{st}^2} = \frac{(Y + \bar{e})(Z + \bar{e}'')}{(X + \bar{e}')^2} = \frac{Y \left( 1 + \frac{\bar{e}''}{Y} \right) Z \left( 1 + \frac{\bar{e}'}{Z} \right)}{X^2 \left( 1 + \frac{\bar{e}'}{X} \right)^2} \Rightarrow E\left[ \frac{\hat{Y}_{st}\hat{Z}_{st}}{\hat{X}_{st}^2} \right] = \left( \frac{YZ}{X^2} \right) E\left[ \frac{\left( 1 + \frac{\bar{e}''}{Y} \right) \left( 1 + \frac{\bar{e}'}{Z} \right)}{\left( 1 + \frac{\bar{e}'}{X} \right)^2} \right]$$

que es exactamente igual a  $E\left( \frac{\bar{y}\bar{z}}{\bar{x}} \right)$  de la sección dedicada a “Error Cuadrático Medio de los

Estimadores”, por lo tanto, siguiendo el mismo desarrollo de Serie de Taylor del denominador y

truncando en potencias de 2, se tiene,

$$\begin{aligned}
 E\left[\frac{\hat{Y}_{st}\hat{Z}_{st}}{\hat{X}_{st}^2}\right] &= \left(\frac{YZ}{X^2}\right)\left[1 + \frac{1}{YZ}E(\bar{e}e'') - \frac{2}{YX}E(e'e') - \frac{2}{XZ}E(e'e'') + \frac{3}{X^2}E(e'^2)\right] \\
 E(\bar{e}e') &= E\left[\left(\sum_{h=1}^L W_h \bar{e}_h\right)\left(\sum_{h=1}^L W_h e'_h\right)\right] = E\left[\left(\sum_{h=1}^L W_h \frac{\sum_{i=1}^{n_h} e_{hi}}{n_h}\right)\left(\sum_{h=1}^L W_h \frac{\sum_{i=1}^{n_h} e'_{hi}}{n_h}\right)\right] \\
 &= \frac{1}{N^2}E\left[\left(\sum_{h=1}^L \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} e_{hi}\right)\left(\sum_{h=1}^L \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} e'_{hi}\right)\right] \\
 &= \frac{1}{N^2}E\left[\sum_{h=1}^L \left(\frac{N_h}{n_h}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n_h} e_{hi} e'_{hi} + \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} e_{hi} e'_{hj}\right) + \sum_{\substack{h=1 \\ t \neq h}}^L \sum_{t=1}^L \frac{N_h}{n_h} \frac{N_t}{n_t} \left(\sum_{i=1}^{n_h} e_{hi} \sum_{j=1}^{n_t} e'_{tj}\right)\right] \\
 &= \frac{1}{N^2}E\left[\sum_{h=1}^L \left(\frac{N_h}{n_h}\right)^2 \left(\sum_{i=1}^{n_h} e_{hi} e'_{hi} + \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} e_{hi} e'_{hj}\right)\right] + \frac{1}{N^2}E\left[\sum_{\substack{h=1 \\ t \neq h}}^L \sum_{t=1}^L \frac{N_h}{n_h} \frac{N_t}{n_t} \left(\sum_{i=1}^{n_h} e_{hi} \sum_{j=1}^{n_t} e'_{tj}\right)\right]
 \end{aligned}$$

desarrollando  $E(\bar{e}e')$ ,

$$\begin{aligned}
 E(\bar{e}e') &= \frac{1}{N^2} \left[ \sum_{h=1}^L N_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) S_{xy_h} \right] + \frac{1}{N^2} E \left[ \sum_{\substack{h=1 \\ t \neq h}}^L \sum_{t=1}^L \frac{N_h}{n_h} \frac{N_t}{n_t} \left(\sum_{i=1}^{n_h} e_{hi} \sum_{j=1}^{n_t} e'_{tj}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{N^2} \left[ \sum_{h=1}^L N_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) S_{xy_h} \right] + \frac{1}{N^2} E \left[ \left(\sum_{h=1}^L \frac{N_h}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} e_{hi}\right) \left(\sum_{\substack{t=1 \\ t \neq h}}^L \frac{N_t}{n_t} \sum_{j=1}^{n_t} e'_{tj}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{N^2} \left[ \sum_{h=1}^L N_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) S_{xy_h} \right] + \frac{1}{N^2} \left( \sum_{h=1}^L \frac{N_h}{n_h} \frac{1}{\binom{N_h}{n_h}} \sum_{k=1}^{\binom{N_h}{n_h}} \sum_{i=1}^{n_k} e_{hki} \right) \left( \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq h}}^L \frac{N_t}{n_t} \frac{1}{\binom{N_t}{n_t}} \sum_{k=1}^{\binom{N_t}{n_t}} \sum_{j=1}^{n_k} e'_{tjk} \right) \\
 &= \frac{1}{N^2} \left[ \sum_{h=1}^L N_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) S_{xy_h} \right] + \frac{1}{N^2} \left( \sum_{h=1}^L \frac{N_h}{n_h} \frac{1}{\binom{N_h}{n_h}} \binom{N_h-1}{n_h-1} \sum_{i=1}^{N_h} e_{hi} \right) \left( \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq h}}^L \frac{N_t}{n_t} \frac{1}{\binom{N_t}{n_t}} \binom{N_t-1}{n_t-1} \sum_{j=1}^{N_t} e'_{tj} \right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{N^2} \left[ \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xy_h} \right] + \frac{1}{N^2} \left( \sum_{h=1}^L \sum_{i=1}^{N_k} e_{hi} \right) \left( \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq h}}^L \sum_{j=1}^{N_t} e'_{tj} \right)$$

pero como  $\sum_{i=1}^{N_k} e_{hi} = 0$  y  $\sum_{j=1}^{N_t} e'_{tj} = 0$  entonces,

$$E(\bar{e}\bar{e}') = \frac{1}{N^2} \left[ \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xy_h} \right] = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xy_h}$$

análogamente,  $E(\bar{e}\bar{e}'') = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{yz_h}$  ,  $E(\bar{e}'\bar{e}'') = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xz_h}$  y

$$E(\bar{e}'^2) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{x_h}^2$$

luego,

$$E \left[ \frac{\hat{Y}_{st} \hat{Z}_{st}}{\hat{X}_{st}^2} \right] = \left( \frac{YZ}{X^2} \right) \left[ 1 + \frac{1}{YZ} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{yz_h} - \frac{2}{YX} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xy_h} - \frac{2}{XZ} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xz_h} + \frac{3}{X^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{x_h}^2 \right]$$

entonces

$$\begin{aligned} & E(\hat{Y}_{Rc} \hat{Z}_{Rc}) \\ &= YZ \left[ 1 + \frac{1}{YZ} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{yz_h} - \frac{2}{YX} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xy_h} - \frac{2}{XZ} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xz_h} + \frac{3}{X^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{x_h}^2 \right] \\ &= YZ + \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{yz_h} - 2R_z \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xy_h} - 2R_y \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xz_h} + 3R_y R_z \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{x_h}^2 \\ &= YZ + \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{yz_h} - 2R_z S_{xy_h} - 2R_y S_{xz_h} + 3R_y R_z S_{x_h}^2 \right] \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$COV(\hat{Y}_{Rc}, \hat{Z}_{Rc}) = YZ + \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{yz_h} - 2R_z S_{xy_h} - 2R_y S_{xz_h} + 3R_y R_z S_{x_h}^2 \right] -$$

$$\begin{aligned}
& - \left[ \bar{Y} + \frac{1}{\bar{X}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (R_{yc} S_{x_h}^2 - S_{xy_h}) \right] \left[ \bar{Z} + \frac{1}{\bar{X}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (R_{zc} S_{x_h}^2 - S_{xz_h}) \right] \\
& = \bar{Y} \bar{Z} + \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{yz_h} - 2R_z S_{xy_h} - 2R_y S_{xz_h} + 3R_y R_z S_{x_h}^2 \right] - \bar{Y} \bar{Z} - \\
& \quad - R_{yc} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (R_{xc} S_{x_h}^2 - S_{xz_h}) - R_{zc} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (R_{yc} S_{x_h}^2 - S_{xy_h}) - \\
& \quad - \frac{1}{\bar{X}^2} \left[ \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (R_{yc} S_{x_h}^2 - S_{xy_h}) \right] \left[ \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (R_{zc} S_{x_h}^2 - S_{xz_h}) \right] \\
& = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{yz_h} - 2R_z S_{xy_h} - 2R_y S_{xz_h} + 3R_y R_z S_{x_h}^2 \right] - R_{yc} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (R_{zc} S_{x_h}^2 - S_{xz_h}) - \\
& \quad - R_{zc} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (R_{yc} S_{x_h}^2 - S_{xy_h}) - \\
& \quad - \frac{1}{\bar{X}^2} \left[ \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (R_{yc} S_{x_h}^2 - S_{xy_h}) \right] \left[ \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (R_{zc} S_{x_h}^2 - S_{xz_h}) \right]
\end{aligned}$$

finalmente,

$$\begin{aligned}
V(\hat{Y}_{Rrcc}) & \approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 - 2R_{yc} S_{xy_h} + R_{yc}^2 S_{x_h}^2 \right) - \frac{1}{\bar{X}^2} \left( \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xy_h} - R_{yc} S_{x_h}^2) \right)^2 + \\
& \quad + b_c^2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{z_h}^2 - 2R_{zc} S_{xy_h} + R_{zc}^2 S_{x_h}^2 \right) - b_c^2 \frac{1}{\bar{X}^2} \left( \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xz_h} - R_{zc} S_{x_h}^2) \right)^2 \\
& \quad - 2b_c \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{yz_h} - 2R_{zc} S_{xy_h} - 2R_{yc} S_{xz_h} + 3R_{yc} R_{zc} S_{x_h}^2 \right] + 2b_c R_{yc} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xz_h} - R_{zc} S_{x_h}^2) \\
& \quad + 2b_c R_{zc} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xy_h} - R_{yc} S_{x_h}^2) + \\
& \quad + 2b_c \frac{1}{\bar{X}^2} \left[ \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xy_h} - R_{yc} S_{x_h}^2) \right] \left[ \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xz_h} - R_{zc} S_{x_h}^2) \right]
\end{aligned}$$

y el error cuadrático medio  $ECM(\hat{Y}_{Rrcc}) = V(\hat{Y}_{Rrcc}) + [B(\hat{Y}_{Rrcc})]^2$

$$\begin{aligned}
\text{pero } [B(\hat{Y}_{Rrcc})]^2 &= \left[ \frac{1}{\bar{X}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xy_h} - R_{yc} S_{x_h}^2) - b_c \frac{1}{\bar{X}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xz_h} - R_{zc} S_{x_h}^2) \right]^2 \\
&= \frac{1}{\bar{X}^2} \left[ \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xy_h} - R_{yc} S_{x_h}^2) \right]^2 + b_c^2 \frac{1}{\bar{X}^2} \left[ \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xz_h} - R_{zc} S_{x_h}^2) \right]^2 - \\
&\quad - 2b_c \frac{1}{\bar{X}^2} \left[ \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xy_h} - R_{yc} S_{x_h}^2) \right] \left[ \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xz_h} - R_{zc} S_{x_h}^2) \right]
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
ECM(\hat{Y}_{Rrcc}) &\approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 - 2R_{yc} S_{xy_h} + R_{yc}^2 S_{x_h}^2) + b_c^2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 - 2R_{zc} S_{xz_h} + R_{zc}^2 S_{x_h}^2) - \\
&\quad - 2b_c \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yz_h} - 2R_{zc} S_{xy_h} - 2R_{yc} S_{xz_h} + 3R_{yc} R_{zc} S_{x_h}^2] + 2b_c R_{yc} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xz_h} - R_{zc} S_{x_h}^2) + \\
&\quad + 2b_c R_{zc} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xy_h} - R_{yc} S_{x_h}^2) \\
&\approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 - 2R_{yc} S_{xy_h} + R_{yc}^2 S_{x_h}^2) + b_c^2 (S_{z_h}^2 - 2R_{zc} S_{xz_h} + R_{zc}^2 S_{x_h}^2) - \right. \\
&\quad \left. - 2b_c (S_{yz_h} - 2R_{zc} S_{xy_h} - 2R_{yc} S_{xz_h} + 3R_{yc} R_{zc} S_{x_h}^2 + R_{yc} S_{xz_h} - R_{yc} R_{zc} S_{x_h}^2 + R_{zc} S_{xy_h} - R_{yc} R_{zc} S_{x_h}^2) \right] \\
&\approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 - 2R_{yc} S_{xy_h} + R_{yc}^2 S_{x_h}^2) + b_c^2 (S_{z_h}^2 - 2R_{zc} S_{xz_h} + R_{zc}^2 S_{x_h}^2) - \right. \\
&\quad \left. - 2b_c (S_{yz_h} - R_{zc} S_{xy_h} - R_{yc} S_{xz_h} + R_{yc} R_{zc} S_{x_h}^2) \right]
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
E\hat{C}M(\hat{Y}_{Rrcc}) &\approx \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 - 2\hat{R}_{yc} S_{xy_h} + \hat{R}_{yc}^2 S_{x_h}^2) + \hat{b}_c^2 (S_{z_h}^2 - 2\hat{R}_{zc} S_{xz_h} + \hat{R}_{zc}^2 S_{x_h}^2) - \right. \\
&\quad \left. - 2\hat{b}_c (S_{yz_h} - \hat{R}_{zc} S_{xy_h} - \hat{R}_{yc} S_{xz_h} + \hat{R}_{yc} \hat{R}_{zc} S_{x_h}^2) \right]
\end{aligned}$$

Para el total se tiene,

$$E(\hat{Y}_{Rrcc}) = Y + \frac{1}{\bar{X}} \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (R_{yc} S_{x_h}^2 - S_{xy_h}) - b_c \frac{1}{\bar{X}} \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (R_{zc} S_{x_h}^2 - S_{xz_h})$$

$$\begin{aligned}
B(\hat{Y}_{Rrcc}) &= \frac{1}{X} \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xy_h} - R_{yc} S_{x_h}^2) - b_c \frac{1}{X} \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xz_h} - R_{zc} S_{x_h}^2) \\
V(\hat{Y}_{Rrcc}) &\approx \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 - 2R_{yc} S_{xy_h} + R_{yc}^2 S_{x_h}^2) - \frac{1}{X^2} \left( \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xy_h} - R_{yc} S_{x_h}^2) \right)^2 + \\
&\quad + b_c^2 \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 - 2R_{zc} S_{xz_h} + R_{zc}^2 S_{x_h}^2) - b_c^2 \frac{1}{X^2} \left( \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xz_h} - R_{zc} S_{x_h}^2) \right)^2 \\
&\quad - 2b_c \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yz_h} - 2R_{zc} S_{xy_h} - 2R_{yc} S_{xz_h} + 3R_{yc} R_{zc} S_{x_h}^2] + 2b_c R_{yc} \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xz_h} - R_{zc} S_{x_h}^2) \\
&\quad + 2b_c R_{zc} \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xy_h} - R_{yc} S_{x_h}^2) + \\
&\quad + 2b_c \frac{1}{X^2} \left[ \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xy_h} - R_{yc} S_{x_h}^2) \right] \left[ \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{xz_h} - R_{zc} S_{x_h}^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ECM(\hat{Y}_{Rrcc}) &\approx \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 - 2R_{yc} S_{xy_h} + R_{yc}^2 S_{x_h}^2) + b_c^2 (S_{z_h}^2 - 2R_{zc} S_{xz_h} + R_{zc}^2 S_{x_h}^2) - \right. \\
&\quad \left. - 2b_c (S_{yz_h} - R_{zc} S_{xy_h} - R_{yc} S_{xz_h} + R_{yc} R_{zc} S_{x_h}^2) \right] \\
E\hat{C}M(\hat{Y}_{Rrcc}) &\approx \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (s_{y_h}^2 - 2\hat{R}_{yc} s_{xy_h} + \hat{R}_{yc}^2 s_{x_h}^2) + \hat{b}_c^2 (s_{z_h}^2 - 2\hat{R}_{zc} s_{xz_h} + \hat{R}_{zc}^2 s_{x_h}^2) - \right. \\
&\quad \left. - 2\hat{b}_c (s_{yz_h} - \hat{R}_{zc} s_{xy_h} - \hat{R}_{yc} s_{xz_h} + \hat{R}_{yc} \hat{R}_{zc} s_{x_h}^2) \right]
\end{aligned}$$

para hallar  $b_{c0}$  para el caso del estimador de varianza mínima para  $b_c$  constante, se procederá de la manera habitual,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial ECM(\hat{Y}_{Rrcc})}{\partial b_c} &= 2b_c \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 - 2R_{zc} S_{xz_h} + R_{zc}^2 S_{x_h}^2) - \\
&\quad - 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - R_{zc} S_{xy_h} - R_{yc} S_{xz_h} + R_{yc} R_{zc} S_{x_h}^2) = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_{c0} = \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - R_{zc} S_{xy_h} - R_{yc} S_{xz_h} + R_{yc} R_{zc} S_{x_h}^2)}{\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 - 2R_{zc} S_{xz_h} + R_{zc}^2 S_{x_h}^2)}$$

y la segunda derivada,

$$\frac{\partial^2 ECM(\hat{Y}_{Rrcc})}{\partial b_c^2} = 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 - 2R_{zc} S_{xz_h} + R_{zc}^2 S_{x_h}^2)$$

que es positiva cuando  $\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 - 2R_{zc} S_{xz_h} + R_{zc}^2 S_{x_h}^2) > 0$ , es decir,

$$\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xz_h} < \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{z_h}^2 + \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) R_{zc}^2 S_{x_h}^2}{2R_{zc}}$$

y sólo es este caso  $b_{c0}$  minimiza el error cuadrático medio.

### Estimadores del Tipo Regresión-Razón

La estructura del estimador de Regresión-Razón es la siguiente,

$$\hat{Y}_{rR} = \frac{\hat{Y}_{rl}}{\hat{Z}_{rl}} \bar{Z} = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} \bar{Z}$$

nótese que se utiliza el mismo  $b$  para  $\hat{Y}_{rl}$  y para  $\hat{Z}_{rl}$ , esto facilita realizar cruces de variables, siempre y cuando se utilice el mismo valor de  $b$  para cada variable, si no fuera así, se corre el riesgo que al comparar dos cuadros (de cruces de variables) en los cuales se incluya una variable común, los totales o promedios de ella no coincidan, porque se estaría involucrando en cada caso valores de  $b$  diferentes. Es decir, que  $b$  no debería depender de  $y$ , o de sus varianzas, de manera que para estimar el promedio o total de cualquier otra variable diferente de  $y$ , se mantenga el valor de  $b$ .

#### *Esperanzas de los Estimadores*

Suponiendo  $b$  constante,

$$\begin{aligned} E(\hat{Y}_{lr}) &= E[\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})] = E(\bar{y}) + bE(\bar{X}) - bE(\bar{x}) = \bar{Y} + b\bar{X} - b\bar{X} = \bar{Y} \\ E(\hat{Z}_{lr}) &= E[\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})] = E(\bar{z}) + bE(\bar{X}) - bE(\bar{x}) = \bar{Z} + b\bar{X} - b\bar{X} = \bar{Z} \end{aligned} \quad (15)$$

Haciendo un artificio similar a casos anteriores, se expresa,

$$\hat{Y}_{rl} = \bar{Y} + e \quad \text{donde } e \text{ es una variable aleatoria con promedio cero. Entonces,}$$

$$E(\hat{Y}_{lr}) = E(\bar{Y} + e) = E(\bar{Y}) + E(e) = \bar{Y} \quad \text{que es el resultado mostrado en (15)}$$

y la varianza,

$$V(\hat{Y}_{lr}) = V(\bar{Y} + e) = V(\bar{Y}) + V(e) + 2COV(\bar{Y}, e)$$

pero,

$$V(\bar{Y}) = 0 \quad , \quad COV(\bar{Y}, e) = 0$$

y

$$V(e) = E[(e - E(e))^2] = E[e^2 + (E(e))^2 - 2eE(e)] = E(e^2) + [E(e)]^2 - 2[E(e)]^2 = E(e^2) - [E(e)]^2$$

y como  $E(e) = 0$ , queda  $V(e) = E(e^2)$

desarrollando  $E(e^2)$ ,

$$\begin{aligned} E(e^2) &= \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} e_k^2 P_k = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} e_k^2}{\binom{N}{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} (\hat{Y}_{rl_k} - Y)^2}{\binom{N}{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \hat{Y}_{rl_k}^2 - \binom{N}{n} Y^2}{\binom{N}{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \hat{Y}_{rl_k}^2}{\binom{N}{n}} - Y^2 = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} (y_k + bX - bx_k)^2}{\binom{N}{n}} - Y^2 \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} (y_k^2 + b^2 X^2 + b^2 x_k^2 + 2bX y_k - 2bX x_k - 2b y_k x_k)}{\binom{N}{n}} - Y^2 \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} y_k^2 + \binom{N}{n} b^2 X^2 + b^2 \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} x_k^2 + 2bX \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} y_k - 2b^2 X \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} x_k - 2b \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} y_k x_k}{\binom{N}{n}} - Y^2 \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} y_k^2}{\binom{N}{n}} + b^2 X^2 + b^2 \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} x_k^2}{\binom{N}{n}} + 2bX \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} y_k}{\binom{N}{n}} - 2b^2 X \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} x_k}{\binom{N}{n}} - 2b \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} y_k x_k}{\binom{N}{n}} - Y^2 \\ &= b^2 \bar{X}^2 - \bar{Y}^2 + \frac{1}{\binom{N}{n}} \left[ \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k^2 + b^2 \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k^2 + 2b\bar{X} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k - 2b^2 \bar{X} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k - 2b \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{x}_k \right] \end{aligned} \quad (16)$$

pero,

$$\frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k^2}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \left[ \frac{\sum_{i=1}^n y_{ki}}{n} \right]^2 = \frac{1}{n^2 \binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \left( \sum_{i=1}^n y_{ki} \right)^2 = \frac{1}{Nn} \left[ \left( \frac{n-1}{N-1} \right) N^2 \bar{Y}^2 + \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \sum_{i=1}^N y_i^2 \right]$$

entonces,

$$\frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k^2}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \left[ \frac{\sum_{i=1}^n x_{ki}}{n} \right]^2 = \frac{1}{n^2 \binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \left( \sum_{i=1}^n x_{ki} \right)^2 = \frac{1}{Nn} \left[ \left( \frac{n-1}{N-1} \right) N^2 \bar{X}^2 + \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \sum_{i=1}^N x_i^2 \right]$$

además,

$$\frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \left[ \frac{\sum_{i=1}^n y_{ki}}{n} \right] = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \sum_{i=1}^n y_{ki}}{n \binom{N}{n}} = \frac{(N-1) \sum_{i=1}^N y_i}{n \binom{N}{n}} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i}{N} \quad \text{y} \quad \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k}{\binom{N}{n}} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$$

luego, de (16)

$$\begin{aligned} E(e^2) &= b^2 \bar{X}^2 - \bar{Y}^2 + \left[ \frac{1}{Nn} \left[ \left( \frac{n-1}{N-1} \right) N^2 \bar{Y}^2 + \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \sum_{i=1}^N y_i^2 \right] \right] + \\ &\quad + b^2 \left[ \frac{1}{Nn} \left[ \left( \frac{n-1}{N-1} \right) N^2 \bar{X}^2 + \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \sum_{i=1}^N x_i^2 \right] \right] + 2b \bar{X} \bar{Y} - 2b^2 \bar{X}^2 - 2b \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{x}_k}{\binom{N}{n}} \\ &= \left[ \frac{1}{Nn} \left[ \left( \frac{n-1}{N-1} \right) N^2 \bar{Y}^2 - \bar{Y}^2 + \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \sum_{i=1}^N y_i^2 \right] \right] + \\ &\quad + b^2 \left[ \frac{1}{Nn} \left[ \left( \frac{n-1}{N-1} \right) N^2 \bar{X}^2 - \bar{X}^2 + \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \sum_{i=1}^N x_i^2 \right] \right] - 2b \left[ \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{x}_k}{\binom{N}{n}} - \bar{X} \bar{Y} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{Nn} \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \left[ \sum_{i=1}^N y_i^2 - NY^2 \right] + b^2 \frac{1}{Nn} \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \left[ \sum_{i=1}^N x_i^2 - NX^2 \right] - 2b \left[ \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{x}_k}{\binom{N}{n}} - \bar{X}\bar{Y} \right] \\
 &= \frac{N-n}{Nn} S_y^2 + b^2 \frac{N-n}{Nn} S_x^2 - 2b \left[ \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{x}_k}{\binom{N}{n}} - \bar{X}\bar{Y} \right] \tag{17}
 \end{aligned}$$

pero,  $\frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{x}_k}{\binom{N}{n}} - \bar{X}\bar{Y} = \frac{(N-n)}{Nn} S_{xy}$  , donde  $S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - \bar{X}\bar{Y}}{N-1}$

entonces, de (17),

$$E(e^2) = \frac{N-n}{Nn} S_y^2 + b^2 \frac{N-n}{Nn} S_x^2 - 2b \frac{N-n}{Nn} S_{xy} = \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2b S_{xy}) = ECM(\hat{Y}_{rl})$$

Por lo tanto queda demostrado que el cambio  $\hat{Y}_{rl} = \bar{Y} + e$  es factible, y mantiene el valor esperado y la varianza de  $\hat{Y}_{rl}$ . Análogamente ,  $\hat{Z}_{rl} = \bar{Z} + e''$ .

Ahora se procederá a desarrollar la esperanza, sesgo, varianza y error cuadrático medio de  $\hat{Y}_{rR}$ .

Para la esperanza se tiene que,

$$E(\hat{Y}_{rR}) = \bar{Z} E \left[ \frac{\hat{Y}_{rl}}{\hat{Z}_{rl}} \right] = \bar{Z} E \left[ \frac{\bar{Y} + e}{\bar{Z} + e''} \right] = \bar{Z} E \left[ \frac{\bar{Y} \left( 1 + \frac{e}{\bar{Y}} \right)}{\bar{Z} \left( 1 + \frac{e''}{\bar{Z}} \right)} \right] = \bar{Y} E \left[ \frac{\left( 1 + \frac{e}{\bar{Y}} \right)}{\left( 1 + \frac{e''}{\bar{Z}} \right)} \right]$$

desarrollando la Serie de Taylor y truncando en las potencias de segundo orden,

$$E \left[ \frac{\left(1 + \frac{e}{\bar{Y}}\right)}{\left(1 + \frac{e''}{\bar{Z}}\right)} \right] = E \left[ 1 + \frac{e}{\bar{Y}} - \frac{e''}{\bar{Z}} - \frac{ee''}{\bar{Y}\bar{Z}} + \frac{e'^2}{\bar{Z}^2} \right]$$

pero,  $E(1) = 1$

$E(e) = 0$

$E(e'') = 0$

$$E(e'^2) = \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2b S_{xz})$$

entonces, se debe desarrollar  $E(ee'')$ ;

$$\begin{aligned} E(ee'') &= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} e_k e''_k P_k}{\binom{N}{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} (\hat{Y}_{rl_k} - \bar{Y})(\hat{Z}_{rl_k} - \bar{Z})}{\binom{N}{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \hat{Y}_{rl_k} \hat{Z}_{rl_k} - \bar{Z} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \hat{Y}_{rl_k} - \bar{Y} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \hat{Z}_{rl_k} + \binom{N}{n} \bar{Y} \bar{Z}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \hat{Y}_{rl_k} \hat{Z}_{rl_k} - \binom{N}{n} \bar{Y} \bar{Z} - \binom{N}{n} \bar{Y} \bar{Z} + \binom{N}{n} \bar{Y} \bar{Z}}{\binom{N}{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \hat{Y}_{rl_k} \hat{Z}_{rl_k}}{\binom{N}{n}} - \bar{Y} \bar{Z} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} (\bar{y}_k + b\bar{X} - b\bar{x}_k)(\bar{z}_k + b\bar{X} - b\bar{x}_k)}{\binom{N}{n}} - \bar{Y} \bar{Z} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} (\bar{y}_k \bar{z}_k + b\bar{X}\bar{y}_k - b\bar{x}_k \bar{y}_k + b\bar{X}\bar{z}_k + b^2 \bar{X}^2 - b^2 \bar{X}\bar{x}_k - b\bar{x}_k \bar{z}_k - b^2 \bar{X}\bar{x}_k + b^2 \bar{x}_k^2)}{\binom{N}{n}} - \bar{Y} \bar{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{z}_k}{\binom{N}{n}} + b\bar{X} \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k}{\binom{N}{n}} - b \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k \bar{y}_k}{\binom{N}{n}} + b\bar{X} \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{z}_k}{\binom{N}{n}} + b^2 \bar{X}^2 - b^2 \bar{X} \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k}{\binom{N}{n}} - b \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k \bar{z}_k}{\binom{N}{n}} - b^2 \bar{X} \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k}{\binom{N}{n}} + b^2 \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k^2}{\binom{N}{n}} - \bar{Y} \bar{Z} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{z}_k}{\binom{N}{n}} + b\bar{X}\bar{Y} - b \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k \bar{y}_k}{\binom{N}{n}} + b\bar{X}\bar{Z} + b^2 \bar{X}^2 - b^2 \bar{X}^2 - b \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k \bar{z}_k}{\binom{N}{n}} - b^2 \bar{X}^2 + b^2 \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k^2}{\binom{N}{n}} - \bar{Y} \bar{Z}
\end{aligned}$$

pero como se vio anteriormente,

$$\frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k^2}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{Nn} \left[ \binom{n-1}{N-1} N^2 \bar{X}^2 + \binom{N-n}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right]$$

entonces,

$$\begin{aligned}
E(e'e') &= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{z}_k}{\binom{N}{n}} + b\bar{X}\bar{Y} - b \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k \bar{y}_k}{\binom{N}{n}} + b\bar{X}\bar{Z} + b^2 \bar{X}^2 - b^2 \bar{X}^2 - b \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k \bar{z}_k}{\binom{N}{n}} - b^2 \bar{X}^2 + \\
&\quad + \frac{b^2}{Nn} \left[ \binom{n-1}{N-1} N^2 \bar{X}^2 + \binom{N-n}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right] - \bar{Y} \bar{Z} \\
&= \left[ \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{z}_k}{\binom{N}{n}} - \bar{Y} \bar{Z} \right] - b \left[ \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k \bar{y}_k}{\binom{N}{n}} - \bar{X}\bar{Y} \right] - b \left[ \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k \bar{z}_k}{\binom{N}{n}} - \bar{X}\bar{Z} \right] + \\
&\quad + b^2 \left[ \frac{1}{Nn} \binom{n-1}{N-1} N^2 \bar{X}^2 + \frac{1}{Nn} \binom{N-n}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \bar{X}^2 \right] \\
&= \left( \frac{1-f}{n} \right) S_{yz} - b \left( \frac{1-f}{n} \right) S_{xy} - b \left( \frac{1-f}{n} \right) S_{xz} + b^2 \left[ \frac{1}{Nn(N-1)} \left( (n-1)N^2 \bar{X}^2 + (N-n) \sum_{i=1}^N x_i^2 - Nn(N-1) \bar{X}^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1-f}{n}\right)S_{yz} - b\left(\frac{1-f}{n}\right)S_{xy} - b\left(\frac{1-f}{n}\right)S_{xz} + b^2 \left[ \frac{1}{Nn(N-1)} \left( (N^2n - N^2 - N^2n + Nn)X^2 + (N-n) \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) \right] \\
&= \left(\frac{1-f}{n}\right)S_{yz} - b\left(\frac{1-f}{n}\right)S_{xy} - b\left(\frac{1-f}{n}\right)S_{xz} + b^2 \left[ \frac{1}{Nn(N-1)} \left( N(n-N)X^2 + (N-n) \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) \right] \\
&= \left(\frac{1-f}{n}\right)S_{yz} - b\left(\frac{1-f}{n}\right)S_{xy} - b\left(\frac{1-f}{n}\right)S_{xz} + b^2 \left[ \frac{N-n}{Nn(N-1)} \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 - NX^2 \right) \right] \\
&= \left(\frac{1-f}{n}\right) [S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2]
\end{aligned}$$

entonces,

$$E \left[ \frac{\left(1 + \frac{e}{Y}\right)}{\left(1 + \frac{e'}{Z}\right)} \right] = 1 - \frac{1}{YZ} \left(\frac{1-f}{n}\right) [S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2] + \frac{1}{Z^2} \left(\frac{1-f}{n}\right) [S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}]$$

luego,

$$E(\hat{Y}_{rR}) = Y - \frac{1}{Z} \left(\frac{1-f}{n}\right) [S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2] + \frac{Y}{Z^2} \left(\frac{1-f}{n}\right) [S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}]$$

por lo tanto, el sesgo es,

$$B(\hat{Y}_{rR}) = \frac{1}{Z} \left(\frac{1-f}{n}\right) [S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2] - \frac{Y}{Z^2} \left(\frac{1-f}{n}\right) [S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}]$$

### ***Error Cuadrático Medio de los Estimadores***

Para desarrollar el error cuadrático medio, se debe desarrollar la varianza.

$$V(\hat{Y}_{rR}) = Z^2 V \left[ \frac{\hat{Y}_{rl}}{\hat{Z}_{rl}} \right] = Z^2 E \left[ \left( \left( \frac{\hat{Y}_{rl}}{\hat{Z}_{rl}} \right) - E \left( \frac{\hat{Y}_{rl}}{\hat{Z}_{rl}} \right) \right)^2 \right] = Z^2 \left[ E \left[ \left( \frac{\hat{Y}_{rl}}{\hat{Z}_{rl}} \right)^2 \right] - \left[ E \left( \frac{\hat{Y}_{rl}}{\hat{Z}_{rl}} \right) \right]^2 \right]$$

$$E\left[\left(\frac{\hat{Y}_{rl}}{\hat{Z}_{rl}}\right)^2\right] = E\left[\frac{\hat{Y}_{rl}^2}{\hat{Z}_{rl}^2}\right] = E\left[\frac{Y^2\left(1+\frac{e}{Y}\right)^2}{Z^2\left(1+\frac{e''}{Z}\right)^2}\right] = \frac{Y^2}{Z^2} E\left[\frac{\left(1+\frac{e}{Y}\right)^2}{\left(1+\frac{e''}{Z}\right)^2}\right]$$

y desarrollando la Serie de Taylor y truncando en las potencias de orden 2, se tiene que,

$$E\left[\frac{\left(1+\frac{e}{Y}\right)^2}{\left(1+\frac{e''}{Z}\right)^2}\right] = 1 + \frac{2}{Y}E(e) + \frac{1}{Y^2}E(e^2) - \frac{2}{Z}E(e'') - \frac{4}{YZ}E(ee'') + \frac{3}{Z^2}E(e''^2)$$

pero como  $E(e)=0$  y  $E(e'')=0$ , entonces,

$$E\left[\frac{\left(1+\frac{e}{Y}\right)^2}{\left(1+\frac{e''}{Z}\right)^2}\right] = 1 + \frac{1}{Y^2}E(e^2) - \frac{4}{YZ}E(ee'') + \frac{3}{Z^2}E(e''^2)$$

$$\text{donde, } E(e^2) = \left(\frac{1-f}{n}\right)(S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy})$$

$$E(e''^2) = \left(\frac{1-f}{n}\right)(S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz})$$

$$E(ee'') = \left(\frac{1-f}{n}\right)(S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2)$$

entonces,

$$E\left[\frac{\left(1+\frac{e}{Y}\right)^2}{\left(1+\frac{e''}{Z}\right)^2}\right] = 1 + \frac{1}{Y^2}\left(\frac{1-f}{n}\right)(S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}) - \frac{4}{YZ}\left(\frac{1-f}{n}\right)(S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2) + \frac{3}{Z^2}\left(\frac{1-f}{n}\right)(S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz})$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
v(\hat{Y}_{rR}) &= \bar{Z}^2 \left[ \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Z}^2} \left[ 1 + \frac{1}{\bar{Y}^2} \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}) - \frac{4}{\bar{Y}\bar{Z}} \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{3}{\bar{Z}^2} \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[ \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 \left( 1 - \left( \frac{1-f}{n} \right) \left( \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} (S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}) \right) \right)^2 \right] \right] \\
&= Y^2 \left[ \frac{1}{Y^2} \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}) - \frac{4}{YZ} \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2) + \frac{3}{Z^2} \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}) - \right. \\
&\quad \left. - \left[ -\frac{2}{YZ} \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2) + \frac{2}{Z^2} \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( \frac{1-f}{n} \right)^2 \left( \frac{1}{YZ} (S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2) - \frac{1}{Z^2} (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}) \right)^2 \right] \right] \\
&= Y^2 \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ \frac{1}{Y^2} (S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}) - \frac{2}{YZ} (S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2) + \frac{1}{Z^2} (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}) \right] - \\
&\quad - Y^2 \left( \frac{1-f}{n} \right)^2 \left[ \frac{1}{YZ} (S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2) - \frac{1}{Z^2} (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}) \right]^2 \\
&= \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ (S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}) - 2 \left( \frac{Y}{Z} \right) (S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2) + \left( \frac{Y}{Z} \right)^2 (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}) \right] - \\
&\quad - \left( \frac{1-f}{n} \right)^2 \left[ \frac{1}{Z} (S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2) - \frac{Y}{Z^2} (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}) \right]^2
\end{aligned}$$

entonces,

$$ECM(\hat{Y}_{rR}) = V(\hat{Y}_{rR}) + [B(\hat{Y}_{rR})]^2$$

pero,

$$[B(\hat{Y}_{rR})]^2 = \left[ \frac{1}{Z} \left( \frac{1-f}{n} \right) [S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2] - \frac{Y}{Z^2} \left( \frac{1-f}{n} \right) [S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}] \right]^2$$

luego,

$$ECM(\hat{Y}_{rR}) = \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ (S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) (S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2) + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}) \right]$$

En resumen se tiene que,

$$\hat{Y}_{rR} = \frac{\hat{Y}_{rl}}{\hat{Z}_{rl}} Z = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} Z$$

$$E(\hat{Y}_{rR}) = \bar{Y} - \frac{1}{Z} \left( \frac{1-f}{n} \right) [S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2] + \frac{Y}{Z^2} \left( \frac{1-f}{n} \right) [S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}]$$

$$B(\hat{Y}_{rR}) = \frac{1}{Z} \left( \frac{1-f}{n} \right) [S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2] - \frac{Y}{Z^2} \left( \frac{1-f}{n} \right) [S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}]$$

$$V(\hat{Y}_{rR}) = \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ (S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}) - 2 \left( \frac{Y}{Z} \right) (S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2) + \left( \frac{Y}{Z} \right)^2 (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}) \right] - \left( \frac{1-f}{n} \right)^2 \left( \frac{1}{Z} (S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2) - \frac{Y}{Z^2} (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}) \right)^2$$

$$ECM(\hat{Y}_{rR}) = \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ (S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}) - 2 \left( \frac{Y}{Z} \right) (S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2) + \left( \frac{Y}{Z} \right)^2 (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}) \right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{rR}) = \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ (s_y^2 + \hat{b}^2 s_x^2 - 2\hat{b}s_{xy}) - 2 \left( \frac{y}{z} \right) (s_{yz} - \hat{b}s_{xy} - \hat{b}s_{xz} + \hat{b}^2 s_x^2) + \left( \frac{y}{z} \right)^2 (s_z^2 + \hat{b}^2 s_x^2 - 2\hat{b}s_{xz}) \right]$$

y para el total,

$$\hat{Y}_{rR} = \frac{\hat{Y}_{rl}}{\hat{Z}_{rl}} Z = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} Z$$

$$E(\hat{Y}_{rR}) = Y - \frac{N}{Z} \left( \frac{1-f}{n} \right) [S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2] + \frac{Y}{Z^2} N \left( \frac{1-f}{n} \right) [S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}]$$

$$B(\hat{Y}_{rR}) = \frac{N}{Z} \left( \frac{1-f}{n} \right) [S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2] - \frac{Y}{Z^2} N \left( \frac{1-f}{n} \right) [S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}]$$

$$V(\hat{Y}_{rR}) = N^2 \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ (S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}) - 2 \left( \frac{Y}{Z} \right) (S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2) + \left( \frac{Y}{Z} \right)^2 (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}) \right] - N^2 \left( \frac{1-f}{n} \right)^2 \left( \frac{1}{Z} (S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2) - \frac{Y}{Z^2} (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}) \right)^2$$

$$ECM(\hat{Y}_{rR}) = N^2 \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ (S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}) - 2 \left( \frac{Y}{Z} \right) (S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2) + \left( \frac{Y}{Z} \right)^2 (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}) \right]$$

$$ECM(\hat{Y}_{rR}) = N^2 \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ (s_y^2 + \hat{b}^2 s_x^2 - 2\hat{b}s_{xy}) - 2 \left( \frac{y}{z} \right) (s_{yz} - \hat{b}s_{xy} - \hat{b}s_{xz} + \hat{b}^2 s_x^2) + \left( \frac{y}{z} \right)^2 (s_z^2 + \hat{b}^2 s_x^2 - 2\hat{b}s_{xz}) \right]$$

### Casos Especiales

#### Estimador de Razón

Si  $b=0$  entonces  $\hat{Y}_{rR} = \frac{\hat{Y}_{rl}}{\hat{Z}_{rl}} \bar{Z} = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} \bar{Z} = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} \bar{Z}$  que es el estimador  $\hat{Y}_R$  sólo que en

este caso, la variable auxiliar es  $z$  y no  $x$ . De manera que aplican la esperanza, sesgo, varianza y error cuadrático medio de  $\hat{Y}_R$ , sustituyendo  $x$  por  $z$ .

#### Estimador por Diferencia

Si  $b=1$  entonces  $\hat{Y}_{rR} = \frac{\hat{Y}_{rl}}{\hat{Z}_{rl}} \bar{Z} = \frac{\bar{y} + (\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + (\bar{X} - \bar{x})} \bar{Z}$  y los resultados obtenidos en 3.2.2. y en

3.2.3. son válidos, sustituyendo  $b$  por 1.

#### Estimador de Varianza Mínima para $b$ Constante

En este caso se debe derivar el error cuadrático medio respecto de  $b$ , para hallar el valor de  $b$  que lo minimiza, esto es,

$$\frac{\partial ECM(\hat{Y}_{rR})}{\partial b} = \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ (2bS_x^2 - 2S_{xy}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) (-S_{xy} - S_{xz} + 2bS_x^2) + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 (2bS_x^2 - 2S_{xz}) \right] = 0$$

$$= \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ 2bS_x^2 - 2S_{xy} + 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) S_{xy} + 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) S_{xz} - 4b \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) S_x^2 + 2b \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 S_x^2 - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 S_{xz} \right] = 0$$

pero para que se cumpla la igualdad, se debe cumplir que,

$$2bS_x^2 - 2S_{xy} + 2\left(\frac{Y}{Z}\right)S_{xy} + 2\left(\frac{Y}{Z}\right)S_{xz} - 4b\left(\frac{Y}{Z}\right)S_x^2 + 2b\left(\frac{Y}{Z}\right)^2 S_x^2 - 2\left(\frac{Y}{Z}\right)^2 S_{xz} = 0$$

es decir,

$$2b\left[S_x^2 - 2\left(\frac{Y}{Z}\right)S_x^2 + \left(\frac{Y}{Z}\right)^2 S_x^2\right] + 2\left[-S_{xy} + \left(\frac{Y}{Z}\right)S_{xy} + \left(\frac{Y}{Z}\right)S_{xz} - \left(\frac{Y}{Z}\right)^2 S_{xz}\right] = 0$$

$$2bS_x^2\left[1 - 2\left(\frac{Y}{Z}\right) + \left(\frac{Y}{Z}\right)^2\right] + 2S_{xy}\left[-1 + \left(\frac{Y}{Z}\right)\right] + 2S_{xz}\left[\left(\frac{Y}{Z}\right) - \left(\frac{Y}{Z}\right)^2\right] = 0$$

de manera que,

$$b = b_0 = \frac{-S_{xy}\left[-1 + \left(\frac{Y}{Z}\right)\right] - S_{xz}\left[\left(\frac{Y}{Z}\right) - \left(\frac{Y}{Z}\right)^2\right]}{S_x^2\left[1 - 2\left(\frac{Y}{Z}\right) + \left(\frac{Y}{Z}\right)^2\right]} = \frac{\left[1 - \left(\frac{Y}{Z}\right)\right]S_{xy} - \left(\frac{Y}{Z}\right)\left[1 - \left(\frac{Y}{Z}\right)\right]S_{xz}}{\left[1 - \left(\frac{Y}{Z}\right)\right]^2 S_x^2} = \frac{S_{xy} - \left(\frac{Y}{Z}\right)S_{xz}}{\left[1 - \left(\frac{Y}{Z}\right)\right]S_x^2}$$

y habrá un mínimo si la segunda derivada es mayor que cero, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 ECM(\hat{Y}_{IR})}{\partial b^2} &= \left(\frac{1-f}{n}\right)\left[2S_x^2 - 4\left(\frac{Y}{Z}\right)S_x^2 + 2\left(\frac{Y}{Z}\right)^2 S_x^2\right] \\ &= 2\left(\frac{1-f}{n}\right)\left[1 - 2\left(\frac{Y}{Z}\right) + \left(\frac{Y}{Z}\right)^2\right]S_x^2 = 2\left(\frac{1-f}{n}\right)\left[1 - \left(\frac{Y}{Z}\right)\right]^2 S_x^2 > 0 \end{aligned}$$

y se cumple la condición, ya que

$$\begin{cases} \left(\frac{1-f}{n}\right) > 0 \\ \left[1 - \left(\frac{Y}{Z}\right)\right]^2 > 0 \\ S_x^2 > 0 \end{cases}$$

***Estimadores del Tipo Regresión-Razón en el Muestreo Estratificado***

Igual que en el caso de los estimadores del Tipo Razón-Regresión, se desarrollarán los estimadores del Tipo Regresión-Razón en el Muestreo Estratificado. Si se supone  $b_h$  constante para cada estrato  $h$ ,  $h=1,2\dots L$ , el estimador del promedio es,

$$\hat{Y}_{rR_h} = \frac{\hat{Y}_{rl_h}}{\hat{Z}_{rl_h}} Z_h = \frac{\bar{y}_h + b_h(X_h - \bar{x}_h)}{z_h + b_h(X_h - \bar{x}_h)} Z_h$$

$$E(\hat{Y}_{rR_h}) = \bar{Y}_h - \frac{1}{Z_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] + \frac{\bar{Y}_h}{Z_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}]$$

$$B(\hat{Y}_{rR_h}) = \frac{1}{Z_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] + \frac{\bar{Y}_h}{Z_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}]$$

$$V(\hat{Y}_{rR_h}) = \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right] -$$

$$- \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left( \frac{1}{Z_h} (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) - \frac{\bar{Y}_h}{Z_h^2} (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right)^2$$

$$ECM(\hat{Y}_{rR_h}) = \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{rR_h}) = \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + \hat{b}_h^2 S_{x_h}^2 - 2\hat{b}_h S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{y}_h}{z_h} \right) (S_{yz_h} - \hat{b}_h S_{xy_h} - \hat{b}_h S_{xz_h} + \hat{b}_h^2 S_{x_h}^2) + \left( \frac{\bar{y}_h}{z_h} \right)^2 (S_{z_h}^2 + \hat{b}_h^2 S_{x_h}^2 - 2\hat{b}_h S_{xz_h}) \right]$$

y para el total se tiene,

$$\hat{Y}_{rR_h} = \frac{\hat{Y}_{rl_h}}{\hat{Z}_{rl_h}} Z_h = \frac{y_h + b_h(X_h - x_h)}{z_h + b_h(X_h - x_h)} Z_h$$

$$E(\hat{Y}_{rR_h}) = \bar{Y}_h - \frac{N_h}{Z_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] + \frac{\bar{Y}_h}{Z_h^2} N_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}]$$

$$B(\hat{Y}_{rR_h}) = \frac{N_h}{Z_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] - \frac{\bar{Y}_h}{Z_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) N_h [S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}]$$

$$V(\hat{Y}_{rR_h}) = N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right] -$$

$$-N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left( \frac{1}{Z_h} (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) - \frac{\bar{Y}_h}{Z_h^2} (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right)^2$$

$$ECM(\hat{Y}_{rR_h}) = N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{rR_h}) = N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (s_{y_h}^2 + \hat{b}_h^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_h s_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{y}_h}{z_h} \right) (s_{yz_h} - \hat{b}_h s_{xy_h} - \hat{b}_h s_{xz_h} + \hat{b}_h^2 s_{x_h}^2) + \left( \frac{\bar{y}_h}{z_h} \right)^2 (s_{z_h}^2 + \hat{b}_h^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_h s_{xz_h}) \right]$$

Igualmente, se pueden aplicar los casos especiales en cada estrato, esto es, el estimador de razón (cuando  $b_h = 0$ ), el estimador por diferencia (cuando  $b_h = 1$ ), y el estimador de varianza mínima para  $b_h$  constante, en este caso se tiene que,

$$\frac{\partial ECM(\hat{Y}_{rR_h})}{\partial b_h} = \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ 2b_h S_{x_h}^2 - 2S_{xy_h} + 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) S_{xy_h} + 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) S_{xz_h} - 4b_h \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) S_{x_h}^2 + \right.$$

$$\left. + 2b_h \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right)^2 S_{x_h}^2 - 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right)^2 S_{xz_h} \right] = 0$$

$$= b_h S_{x_h}^2 - S_{xy_h} + \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) S_{xy_h} + \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) S_{xz_h} - 2b_h \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) S_{x_h}^2 + b_h \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right)^2 S_{x_h}^2 - \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right)^2 S_{xz_h} = 0$$

$$= b_h S_{x_h}^2 + b_h \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right)^2 S_{x_h}^2 - 2b_h \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) S_{x_h}^2 - S_{xy_h} + \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) S_{xy_h} + \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) S_{xz_h} - \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right)^2 S_{xz_h} = 0$$

despejando,

$$b_h S_{x_h}^2 + b_h \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right)^2 S_{x_h}^2 - 2b_h \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) S_{x_h}^2 = S_{xy_h} - \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) S_{xy_h} - \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) S_{xz_h} + \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right)^2 S_{xz_h}$$

$$b_h \left( 1 + \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right)^2 - 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) \right) S_{x_h}^2 = \left( 1 - \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) S_{xy_h} - \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) \left( 1 - \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) \right) S_{xz_h}$$

$$b_h \left( 1 - \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) \right)^2 S_{x_h}^2 = \left( 1 - \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) S_{xy_h} - \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) \left( 1 - \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) \right) S_{xz_h}$$

$$b_h = \frac{\left(1 - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h}\right) S_{xy_h} - \left(\frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h}\right) \left(1 - \left(\frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h}\right)\right) S_{xz_h}}{\left(1 - \left(\frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h}\right)\right)^2 S_{x_h}^2} = \frac{S_{xy_h} - \left(\frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h}\right) S_{xz_h}}{\left(1 - \left(\frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h}\right)\right) S_{x_h}^2}$$

entonces,

$$b_h = b_{0h} = \frac{S_{xy_h} - \left(\frac{\bar{X}_h}{\bar{Z}_h}\right) S_{xz_h}}{\left(1 - \left(\frac{\bar{X}_h}{\bar{Z}_h}\right)\right) S_{x_h}^2}$$

que es el valor de  $b_h$  que minimiza el error cuadrático medio, ya que la segunda derivada es mayor que cero,

$$\frac{\partial^2 ECM(\hat{Y}_{rRh})}{\partial b^2} = 2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) \left[1 - \left(\frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h}\right)\right]^2 S_{x_h}^2 > 0$$

### ***Estimadores de Regresión-Razón Separados***

Para desarrollar el estimador Regresión-Razón separado-separado, se debe contemplar separadamente tanto los coeficientes de regresión  $b_h$ , como las razones, esto es,

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{rRss} &= \sum_{h=1}^L \hat{Y}_{rRh} = \sum_{h=1}^L \frac{\hat{Y}_{rl_h}}{\hat{Z}_{rl_h}} Z_h = \sum_{h=1}^L \frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} Z_h \\ \hat{Y}_{rRss} &= \frac{1}{N} \hat{Y}_{rRss} = \frac{1}{N} \left[ \sum_{h=1}^L \frac{\hat{Y}_{rl_h}}{\hat{Z}_{rl_h}} Z_h \right] = \frac{1}{N} \left[ \sum_{h=1}^L \frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} Z_h \right] \\ &= \frac{1}{N} \left[ \sum_{h=1}^L \frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} N_h \bar{Z}_h \right] = \sum_{h=1}^L W_h \left( \frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \bar{Z}_h \right) \end{aligned}$$

y las respectivas esperanzas, sesgos, varianzas y errores cuadráticos medios son,

$$E(\hat{Y}_{rRss}) = \sum_{h=1}^L \left[ Y_h - \frac{N_h}{Z_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \right] [S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] + \frac{\bar{Y}_h}{Z_h^2} N_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}]$$

$$B(\hat{Y}_{rRss}) = \sum_{h=1}^L \left[ \frac{N_h}{Z_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \right] [S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] - \frac{\bar{Y}_h}{Z_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) N_h [S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}]$$

$$V(\hat{Y}_{rRss}) = V \left( \sum_{h=1}^L \hat{Y}_{rR_h} \right) = \sum_{h=1}^L V(\hat{Y}_{rR_h}) + 2 \sum_{h=1}^L \sum_{k=h+1}^L COV(\hat{Y}_{rR_h}, \hat{Y}_{rR_k})$$

$$V(\hat{Y}_{rR_h}) = N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left[ (S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \left( \frac{\bar{Y}_h}{Z_h} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right] - N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left[ \left( \frac{1}{Z_h} (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) - \frac{\bar{Y}_h}{Z_h^2} (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right)^2 \right]$$

$$COV(\hat{Y}_{rR_h}, \hat{Y}_{rR_k}) = E(\hat{Y}_{rR_h} \hat{Y}_{rR_k}) - E(\hat{Y}_{rR_h}) E(\hat{Y}_{rR_k})$$

$$E(\hat{Y}_{rR_h}) = Y_h - \frac{N_h}{Z_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] + \frac{\bar{Y}_h}{Z_h^2} N_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}]$$

$$E(\hat{Y}_{rR_k}) = Y_k - \frac{N_k}{Z_k} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) [S_{yz_k} - b_k S_{xy_k} - b_k S_{xz_k} + b_k^2 S_{x_k}^2] + \frac{\bar{Y}_k}{Z_k^2} N_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) [S_{z_k}^2 + b_k^2 S_{x_k}^2 - 2b_k S_{xz_k}]$$

$$E(\hat{Y}_{rR_h} \hat{Y}_{rR_k}) = E \left( \frac{\hat{Y}_{rR_h}}{\hat{Z}_{rR_h}} Z_h \frac{\hat{Y}_{rR_k}}{\hat{Z}_{rR_k}} Z_k \right) = Z_h Z_k E \left( \frac{\hat{Y}_{rR_h}}{\hat{Z}_{rR_h}} \frac{\hat{Y}_{rR_k}}{\hat{Z}_{rR_k}} \right)$$

$$E \left[ \frac{\hat{Y}_{rR_h}}{\hat{Z}_{rR_h}} \frac{\hat{Y}_{rR_k}}{\hat{Z}_{rR_k}} \right] = E \left[ \frac{\bar{Y}_h \left( 1 + \frac{e_h}{\bar{Y}_h} \right)}{\bar{Z}_h \left( 1 + \frac{e_h''}{\bar{Z}_h} \right)} \frac{\bar{Y}_k \left( 1 + \frac{e_k}{\bar{Y}_k} \right)}{\bar{Z}_k \left( 1 + \frac{e_k''}{\bar{Z}_k} \right)} \right] = \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} E \left[ \frac{\left( 1 + \frac{e_h}{\bar{Y}_h} \right) \left( 1 + \frac{e_k}{\bar{Y}_k} \right)}{\left( 1 + \frac{e_h''}{\bar{Z}_h} \right) \left( 1 + \frac{e_k''}{\bar{Z}_k} \right)} \right]$$

$$= \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} E \left[ \frac{\left( 1 + \frac{\bar{e}_h}{\bar{Y}_h} \right) \left( 1 + \frac{\bar{e}_k}{\bar{Y}_k} \right)}{\left( \frac{\bar{Z}_h + \bar{e}_h''}{\bar{Z}_h} \right) \left( \frac{\bar{Z}_k + \bar{e}_k''}{\bar{Z}_k} \right)} \right]$$

al desarrollar las Series de Taylor, se tiene,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} E \left[ \left( 1 + \frac{\bar{e}_h}{\bar{Y}_h} \right) \left( 1 + \frac{\bar{e}_k}{\bar{Y}_k} \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{\bar{e}_h^{''l}}{\bar{Z}_h^l} \right) \left( \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{\bar{e}_k^{''l}}{\bar{Z}_k^l} \right) \right] \\
 &= \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} E \left[ \left( 1 + \frac{\bar{e}_h}{\bar{Y}_h} \right) \left( 1 + \frac{\bar{e}_k}{\bar{Y}_k} \right) \left( 1 - \frac{\bar{e}_h^{''}}{\bar{Z}_h} + \frac{\bar{e}_h^{''2}}{\bar{Z}_h^2} - \frac{\bar{e}_h^{''3}}{\bar{Z}_h^3} + \dots + (-1)^l \frac{\bar{e}_h^{''l}}{\bar{Z}_h^l} \right) \left( 1 - \frac{\bar{e}_k^{''}}{\bar{Z}_k} + \frac{\bar{e}_k^{''2}}{\bar{Z}_k^2} - \frac{\bar{e}_k^{''3}}{\bar{Z}_k^3} + \dots + (-1)^l \frac{\bar{e}_k^{''l}}{\bar{Z}_k^l} \right) \right] \\
 &= \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} E \left[ \left( 1 + \frac{\bar{e}_h}{\bar{Y}_h} + \frac{\bar{e}_k}{\bar{Y}_k} + \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k}{\bar{Y}_h \bar{Y}_k} \right) \left( 1 - \frac{\bar{e}_k^{''}}{\bar{Z}_k} + \frac{\bar{e}_k^{''2}}{\bar{Z}_k^2} - \frac{\bar{e}_h^{''}}{\bar{Z}_h} + \frac{\bar{e}_h^{''} \bar{e}_k^{''}}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} - \frac{\bar{e}_h^{''} \bar{e}_k^{''2}}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k^2} + \frac{\bar{e}_h^{''2}}{\bar{Z}_h^2} - \frac{\bar{e}_h^{''2} \bar{e}_k^{''}}{\bar{Z}_h^2 \bar{Z}_k} + \frac{\bar{e}_h^{''2} \bar{e}_k^{''2}}{\bar{Z}_h^2 \bar{Z}_k^2} + \dots \right) \right] \\
 &= \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} E \left[ \left( 1 + \frac{\bar{e}_h}{\bar{Y}_h} + \frac{\bar{e}_k}{\bar{Y}_k} + \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k}{\bar{Y}_h \bar{Y}_k} - \frac{\bar{e}_k^{''}}{\bar{Z}_k} - \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k^{''}}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k} - \frac{\bar{e}_k \bar{e}_h^{''}}{\bar{Y}_k \bar{Z}_h} - \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k \bar{e}_k^{''}}{\bar{Y}_h \bar{Y}_k \bar{Z}_k} + \frac{\bar{e}_k^{''2}}{\bar{Z}_k^2} + \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k^{''2}}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k^2} + \frac{\bar{e}_k \bar{e}_h^{''2}}{\bar{Y}_k \bar{Z}_h^2} + \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k \bar{e}_k^{''2}}{\bar{Y}_h \bar{Y}_k \bar{Z}_k^2} + \dots \right) \right]
 \end{aligned}$$

truncando en las potencias de orden 2,

$$= \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} E \left[ 1 + \frac{\bar{e}_h}{\bar{Y}_h} + \frac{\bar{e}_k}{\bar{Y}_k} + \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k}{\bar{Y}_h \bar{Y}_k} - \frac{\bar{e}_k^{''}}{\bar{Z}_k} - \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k^{''}}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k} - \frac{\bar{e}_k \bar{e}_h^{''}}{\bar{Y}_k \bar{Z}_h} + \frac{\bar{e}_k^{''2}}{\bar{Z}_k^2} - \frac{\bar{e}_h^{''}}{\bar{Z}_h} - \frac{\bar{e}_h \bar{e}_h^{''}}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h} - \frac{\bar{e}_k \bar{e}_h^{''}}{\bar{Y}_k \bar{Z}_h} + \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k^{''}}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} + \frac{\bar{e}_h^{''2}}{\bar{Z}_h^2} \right]$$

y conociendo que  $E(\bar{e}_h) = E(\bar{e}_k) = E(\bar{e}_h^{''}) = E(\bar{e}_k^{''}) = 0$ ,

$$= \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} E \left[ 1 + \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k}{\bar{Y}_h \bar{Y}_k} - \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k^{''}}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k} - \frac{\bar{e}_k \bar{e}_h^{''}}{\bar{Y}_k \bar{Z}_h} + \frac{\bar{e}_k^{''2}}{\bar{Z}_k^2} - \frac{\bar{e}_h \bar{e}_h^{''}}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h} - \frac{\bar{e}_k \bar{e}_h^{''}}{\bar{Y}_k \bar{Z}_h} + \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k^{''}}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} + \frac{\bar{e}_h^{''2}}{\bar{Z}_h^2} \right]$$

pero por otra parte,

$$E \left( \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k}{\bar{Y}_h \bar{Y}_k} \right) = \frac{1}{\bar{Y}_h \bar{Y}_k} E(\bar{e}_h \bar{e}_k) = \frac{1}{\bar{Y}_h \bar{Y}_k} \frac{\sum_{l=1}^{N_h} e_{hl}}{N_h} \frac{\sum_{l=1}^{N_k} e_{kl}}{N_k} = \frac{1}{\bar{Y}_h \bar{Y}_k} \frac{\binom{N_h-1}{n_h-1} \sum_{i=1}^{N_h} e_{hi}}{n_h \binom{N_h}{n_h}} \frac{\binom{N_k-1}{n_k-1} \sum_{i=1}^{N_k} e_{ki}}{n_k \binom{N_k}{n_k}} = \frac{1}{\bar{Y}_h \bar{Y}_k} \frac{\sum_{i=1}^{N_h} e_{hi}}{N_h} \frac{\sum_{i=1}^{N_k} e_{ki}}{N_k} = 0$$

y análogamente,  $E \left( \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k^{''}}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k} \right) = E \left( \frac{\bar{e}_k \bar{e}_h^{''}}{\bar{Y}_k \bar{Z}_h} \right) = E \left( \frac{\bar{e}_h \bar{e}_k^{''}}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \right) = 0$ , entonces,

$$E \left[ \frac{\hat{Y}_{rlh}}{\hat{Z}_{rlh}} \frac{\hat{Y}_{rlk}}{\hat{Z}_{rlk}} \right] = \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} E \left[ 1 - \frac{\bar{e}_k \bar{e}_k^{''}}{\bar{Y}_k \bar{Z}_k} + \frac{\bar{e}_k^{''2}}{\bar{Z}_k^2} - \frac{\bar{e}_h \bar{e}_h^{''}}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h} + \frac{\bar{e}_h^{''2}}{\bar{Z}_h^2} \right]$$

En la sección “Esperanza de los Estimadores” se tiene que,

$$E(e^{''2}) = \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2b S_{xz})$$

$$E(e e^{''}) = \left( \frac{1-f}{n} \right) [S_{yz} - b S_{xy} - b S_{xz} + b^2 S_x^2]$$

entonces, para los estratos  $h$  y  $k$ ,

$$E(e_h^{''2}) = \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \quad ; \quad E(e_k^{''2}) = \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{z_k}^2 + b_k^2 S_{x_k}^2 - 2b_k S_{xz_k})$$

$$E(e_h e_h^{''}) = \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] \quad ; \quad E(e_k e_k^{''}) = \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) [S_{yz_k} - b_k S_{xy_k} - b_k S_{xz_k} + b_k^2 S_{x_k}^2]$$

Por lo tanto,

$$E \left[ \frac{\hat{Y}_{r|h}}{\hat{Z}_{r|h}} \frac{\hat{Y}_{r|k}}{\hat{Z}_{r|k}} \right] = \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} - \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}_k \bar{Z}_k} [S_{yz_k} - b_k S_{xy_k} - b_k S_{xz_k} + b_k^2 S_{x_k}^2] - \frac{1}{\bar{Z}_k^2} (S_{z_k}^2 + b_k^2 S_{x_k}^2 - 2b_k S_{xz_k}) \right] -$$

$$- \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h} [S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] - \frac{1}{\bar{Z}_h^2} (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]$$

entonces,

$$E(\hat{Y}_{r|h} \hat{Y}_{r|k}) = \bar{Y}_h \bar{Y}_k - \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}_k \bar{Z}_k} [S_{yz_k} - b_k S_{xy_k} - b_k S_{xz_k} + b_k^2 S_{x_k}^2] - \frac{1}{\bar{Z}_k^2} (S_{z_k}^2 + b_k^2 S_{x_k}^2 - 2b_k S_{xz_k}) \right] -$$

$$- \bar{Y}_h \bar{Y}_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h} [S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] - \frac{1}{\bar{Z}_h^2} (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]$$

y

$$COV(\hat{Y}_{r|h}, \hat{Y}_{r|k}) = Y_h Y_k -$$

$$- Y_h Y_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}_k \bar{Z}_k} [S_{yz_k} - b_k S_{xy_k} - b_k S_{xz_k} + b_k^2 S_{x_k}^2] - \frac{1}{\bar{Z}_k^2} (S_{z_k}^2 + b_k^2 S_{x_k}^2 - 2b_k S_{xz_k}) \right] -$$

$$- Y_h Y_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h} [S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] - \frac{1}{\bar{Z}_h^2} (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right] -$$

$$\begin{aligned}
& -Y_h Y_k + Y_h \frac{N_k}{\bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) [S_{yzk} - b_k S_{xyk} - b_k S_{xz_k} + b_k^2 S_{x_k}^2] - \\
& - \frac{Y_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_k^2} N_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) [S_{z_k}^2 + b_k^2 S_{x_k}^2 - 2b_k S_{xz_k}] + \\
& + Y_k \frac{N_h}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yzh} - b_h S_{xyh} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] - \\
& - \frac{Y_k \bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} N_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}] - \\
& - \left[ \frac{N_h}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yzh} - b_h S_{xyh} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] + \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} N_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}] \right] \\
& \left[ \frac{N_k}{\bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) [S_{yzk} - b_k S_{xyk} - b_k S_{xz_k} + b_k^2 S_{x_k}^2] + \frac{\bar{Y}_k}{\bar{Z}_k^2} N_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) [S_{z_k}^2 + b_k^2 S_{x_k}^2 - 2b_k S_{xz_k}] \right] \\
& = Y_h Y_k - \\
& - Y_h Y_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}_k \bar{Z}_k} [S_{yzk} - b_k S_{xyk} - b_k S_{xz_k} + b_k^2 S_{x_k}^2] - \frac{1}{\bar{Z}_k^2} (S_{z_k}^2 + b_k^2 S_{x_k}^2 - 2b_k S_{xz_k}) \right] - \\
& - Y_h Y_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h} [S_{yzh} - b_h S_{xyh} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] - \frac{1}{\bar{Z}_h^2} (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right] - \\
& - Y_h Y_k + Y_h Y_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}_k \bar{Z}_k} [S_{yzk} - b_k S_{xyk} - b_k S_{xz_k} + b_k^2 S_{x_k}^2] - \frac{1}{\bar{Z}_k^2} [S_{z_k}^2 + b_k^2 S_{x_k}^2 - 2b_k S_{xz_k}] \right] + \\
& + Y_h Y_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h} [S_{yzh} - b_h S_{xyh} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] - \frac{1}{\bar{Z}_h^2} [S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}] \right] - \\
& - \left[ \frac{N_h}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yzh} - b_h S_{xyh} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] + \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} N_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}] \right] \\
& \left[ \frac{N_k}{\bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) [S_{yzk} - b_k S_{xyk} - b_k S_{xz_k} + b_k^2 S_{x_k}^2] + \frac{\bar{Y}_k}{\bar{Z}_k^2} N_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) [S_{z_k}^2 + b_k^2 S_{x_k}^2 - 2b_k S_{xz_k}] \right] \\
\text{COV}(\hat{Y}_{rR_h}, \hat{Y}_{rR_z}) & = - \left[ \frac{N_h}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yzh} - b_h S_{xyh} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] + \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} N_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}] \right]
\end{aligned}$$

$$\left[ \frac{N_k}{\bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left[ S_{yz_k} - b_k S_{xy_k} - b_k S_{xz_k} + b_k^2 S_{x_k}^2 \right] + \frac{\bar{Y}_k}{\bar{Z}_k^2} N_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left[ S_{z_k}^2 + b_k^2 S_{x_k}^2 - 2b_k S_{xz_k} \right] \right]$$

y la varianza,

$$\begin{aligned} v(\hat{Y}_{rRss}) &= \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \left( S_{yz_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h} \right) - 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right)^2 \left( S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h} \right) \right] \\ &\quad - \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left( \frac{1}{\bar{Z}_h} \left( S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2 \right) - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} \left( S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h} \right) \right)^2 \\ &\quad - 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L \left[ \frac{N_h}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2 \right] + \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} N_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h} \right] \right] \\ &\quad \left[ \frac{N_k}{\bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left[ S_{yz_k} - b_k S_{xy_k} - b_k S_{xz_k} + b_k^2 S_{x_k}^2 \right] + \frac{\bar{Y}_k}{\bar{Z}_k^2} N_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left[ S_{z_k}^2 + b_k^2 S_{x_k}^2 - 2b_k S_{xz_k} \right] \right] \end{aligned}$$

Por otra parte se tiene que el sesgo es,

$$B(\hat{Y}_{rRss}) = \sum_{h=1}^L \left[ \frac{N_h}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2 \right] - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) N_h \left[ S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h} \right] \right]$$

y el sesgo cuadrado,

$$\begin{aligned} [B(\hat{Y}_{rRss})]^2 &= \sum_{h=1}^L \left[ \frac{N_h}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2 \right] - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) N_h \left[ S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h} \right] \right]^2 + \\ &\quad + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L \left[ \frac{N_h}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2 \right] - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) N_h \left[ S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h} \right] \right] \\ &\quad \left[ \frac{N_k}{\bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left[ S_{yz_k} - b_k S_{xy_k} - b_k S_{xz_k} + b_k^2 S_{x_k}^2 \right] - \frac{\bar{Y}_k}{\bar{Z}_k^2} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) N_k \left[ S_{z_k}^2 + b_k^2 S_{x_k}^2 - 2b_k S_{xz_k} \right] \right] \end{aligned}$$

Finalmente, el error cuadrático medio es,

$$ECM(\hat{Y}_{rRss}) = v(\hat{Y}_{rRss}) + [B(\hat{Y}_{rRss})]^2$$

$$= \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]$$

En resumen,

$$\hat{Y}_{rRss} = \sum_{h=1}^L \hat{Y}_{rR_h} = \sum_{h=1}^L \frac{\hat{Y}_{rl_h}}{\hat{Z}_{rl_h}} Z_h = \sum_{h=1}^L \frac{y_h + b_h(X_h - x_h)}{z_h + b_h(X_h - x_h)} Z_h$$

$$E(\hat{Y}_{rRss}) = \sum_{h=1}^L \left[ Y_h - \frac{N_h}{Z_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] + \frac{Y_h}{Z_h^2} N_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}] \right]$$

$$B(\hat{Y}_{rRss}) = \sum_{h=1}^L \left[ \frac{N_h}{Z_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] - \frac{\bar{Y}_h}{Z_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) N_h [S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}] \right]$$

$$V(\hat{Y}_{rRss}) = \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right] -$$

$$- \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left( \frac{1}{Z_h} (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) - \frac{\bar{Y}_h}{Z_h^2} (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right)^2$$

$$- 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L \left[ \frac{N_h}{Z_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2] + \frac{\bar{Y}_h}{Z_h^2} N_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}] \right]$$

$$\left[ \frac{N_k}{Z_k} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) [S_{yz_k} - b_k S_{xy_k} - b_k S_{xz_k} + b_k^2 S_{x_k}^2] + \frac{\bar{Y}_k}{Z_k^2} N_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) [S_{z_k}^2 + b_k^2 S_{x_k}^2 - 2b_k S_{xz_k}] \right]$$

$$ECM(\hat{Y}_{rRss}) = \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{rRss}) = \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (s_{y_h}^2 + \hat{b}_h^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_h s_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{y}_h}{\bar{z}_h} \right) (s_{yz_h} - \hat{b}_h s_{xy_h} - \hat{b}_h s_{xz_h} + \hat{b}_h^2 s_{x_h}^2) + \left( \frac{\bar{y}_h}{\bar{z}_h} \right)^2 (s_{z_h}^2 + \hat{b}_h^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_h s_{xz_h}) \right]$$

y para el promedio,

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{rRss} &= \sum_{h=1}^L W_h \left( \frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \bar{Z}_h \right) \\ E\left(\hat{Y}_{rRss}\right) &= \sum_{h=1}^L \left[ Y_h - \frac{W_h}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2 \right] + \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} W_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h} \right] \right] \\ B\left(\hat{Y}_{rRss}\right) &= \sum_{h=1}^L \left[ \frac{W_h}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2 \right] - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) W_h \left[ S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h} \right] \right] \\ V\left(\hat{Y}_{rRss}\right) &= \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \left( S_{yz_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h} \right) - 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right)^2 \left( S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h} \right) \right] - \\ &\quad - \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left( \frac{1}{\bar{Z}_h} \left( S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2 \right) - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} \left( S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h} \right) \right)^2 \\ &\quad - 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L \left[ \frac{W_h}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2 \right] + \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} W_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h} \right] \right] \\ &\quad \left[ \frac{W_k}{\bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left[ S_{yz_k} - b_k S_{xy_k} - b_k S_{xz_k} + b_k^2 S_{x_k}^2 \right] + \frac{\bar{Y}_k}{\bar{Z}_k^2} W_k \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left[ S_{z_k}^2 + b_k^2 S_{x_k}^2 - 2b_k S_{xz_k} \right] \right] \\ ECM\left(\hat{Y}_{rRss}\right) &= \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \left( S_{yz_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h} \right) - 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right)^2 \left( S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h} \right) \right] \\ E\hat{C}M\left(\hat{Y}_{rRss}\right) &= \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \left( s_{yz_h}^2 + \hat{b}_h^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_h s_{xy_h} \right) - 2 \left( \frac{\bar{y}_h}{\bar{z}_h} \right) \left( s_{yz_h} - \hat{b}_h s_{xy_h} - \hat{b}_h s_{xz_h} + \hat{b}_h^2 s_{x_h}^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\bar{y}_h}{\bar{z}_h} \right)^2 \left( s_{z_h}^2 + \hat{b}_h^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_h s_{xz_h} \right) \right] \end{aligned}$$

Los casos especiales pueden ser aplicados, y resultan igual que en el apartado anterior, cuando se trató los estimadores de cada estrato, ya que aquí el tratamiento es completamente separado, es decir, el estimador de razón ocurre cuando  $b_h = 0$ , para cada  $h$ ,  $h=1,2,\dots,L$ , el estimador por diferencia cuando  $b_h = 1$ , para cada  $h$ ,  $h=1,2,\dots,L$ , y el estimador de varianza mínima para  $b_h$  constante, cuando

$$b_h = b_{0h} = \frac{S_{xy_h} - \left(\frac{Y_h}{Z_h}\right) S_{xz_h}}{\left[1 - \left(\frac{Y_h}{Z_h}\right)\right] S_{x_h}^2}$$

ya que, como se mostró anteriormente, la segunda derivada es  $ECM(\hat{Y}_{rRss})$  es mayor que cero.

### ***Estimadores de Regresión-Razón Combinados***

Igual que cuando se trabajaron los estimadores de Razón-Regresión Combinados, aquí se tienen tres casos, de acuerdo al tratamiento que se les da a los componentes de regresión lineal y de razón. Si se trabaja el componente de regresión de forma separada y el de razón de forma combinada, se tendrá el Estimador de Regresión-Razón Separado-Combinado, si el enfoque es justamente el contrario, se tienen los Estimadores de Regresión-Razón Combinado-Separado. La tercera opción es trabajar ambos componentes en forma combinada, que dan origen a los Estimadores de Regresión-Razón Combinado-Combinado. Igual que para los estimadores de Razón-Regresión, los Estimadores de Regresión-Razón Combinado-Separado, no van a tener sentido, ya que van a coincidir con los Estimadores de Regresión-Razón Combinado-Combinado, esto se tratará con mayor detalle en el apartado 3.2.4.2.2.

#### ***Estimadores de regresión-razón separado-combinado.***

Estos estimadores consisten en determinar unos estimadores de regresión lineal independientes para cada estrato, esto es, con coeficientes diferentes en cada estrato, y luego se le aplica un ajuste de razón, con una razón única para todos los estratos. Los estimadores del

promedio y del total son,

$$\hat{Y}_{rRsc} = \left( \frac{\hat{Y}_{rls}}{\hat{Z}_{rls}} \right) \bar{Z} = \left[ \frac{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{y}_h + b_h (\bar{X}_h - \bar{x}_h))}{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{z}_h + b_h (\bar{X}_h - \bar{x}_h))} \right] \bar{Z}$$

$$\hat{Y}_{rRsc} = \left( \frac{\hat{Y}_{rls}}{\hat{Z}_{rls}} \right) Z = \left[ \frac{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{y}_h + b_h (\bar{X}_h - \bar{x}_h))}{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{z}_h + b_h (\bar{X}_h - \bar{x}_h))} \right] Z$$

Para desarrollar la esperanza, sesgo, varianza y error cuadrático medio del estimador del promedio, se procederá a realizar los cambios que han sido aplicados anteriormente y a lo largo del trabajo,

$$\hat{Y}_{rls} = \bar{Y} + e$$

$$\hat{Z}_{rls} = \bar{Z} + e''$$

$$E\left(\hat{Y}_{rRsc}\right) = E\left[\left(\frac{\hat{Y}_{rls}}{\hat{Z}_{rls}}\right)\bar{Z}\right] = \bar{Z} E\left[\frac{\hat{Y}_{rls}}{\hat{Z}_{rls}}\right] = \bar{Z} E\left[\frac{\bar{Y} + e}{\bar{Z} + e''}\right] = \bar{Z} E\left[\frac{\bar{Y}\left(1 + \frac{e}{\bar{Y}}\right)}{\bar{Z}\left(1 + \frac{e''}{\bar{Z}}\right)}\right] = \bar{Y} E\left[\frac{\left(1 + \frac{e}{\bar{Y}}\right)}{\left(1 + \frac{e''}{\bar{Z}}\right)}\right]$$

haciendo el desarrollo de la Serie de Taylor y truncando en potencias de orden 2, se tiene que,

$$E\left(\hat{Y}_{rRsc}\right) = \bar{Y} E\left[1 + \frac{e}{\bar{Y}} - \frac{e''}{\bar{Z}} - \frac{ee''}{\bar{Y}\bar{Z}} + \frac{e'^2}{\bar{Z}^2}\right] \text{ pero como } E(1) = 1, E(e) = 0, E(e'') = 0$$

$$\text{y además, } E(ee'') = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) [S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2]$$

$$E(e'^2) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) [S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}]$$

entonces,

$$E(\hat{Y}_{rRsc}) = \bar{Y} \left[ 1 - \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]$$

$$= Y - Y \left[ \frac{1}{YZ} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) - \frac{1}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]$$

de manera que es un estimador sesgado, y el sesgo es,

$$B(\hat{Y}_{rRsc}) = Y \left[ \frac{1}{YZ} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) - \frac{1}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]$$

A continuación se desarrolla la varianza.

$$\begin{aligned} v(\hat{Y}_{rRsc}) &= V \left[ \left( \frac{\hat{Y}_{rsc}}{\hat{Z}} \right) \bar{Z} \right] = \bar{Z}^2 V \left[ \frac{\hat{Y}_{rsc}}{\hat{Z}} \right] = \bar{Z}^2 E \left[ \left( \frac{\hat{Y}_{rsc}}{\hat{Z}} - E \left( \frac{\hat{Y}_{rsc}}{\hat{Z}} \right) \right)^2 \right] \\ &= \bar{Z}^2 \left[ E \left[ \left( \frac{\hat{Y}_{rsc}}{\hat{Z}} \right)^2 \right] - \left[ E \left( \frac{\hat{Y}_{rsc}}{\hat{Z}} \right) \right]^2 \right] = \bar{Z}^2 E \left[ \left( \frac{\hat{Y}_{rsc}}{\hat{Z}} \right)^2 \right] - \bar{Z}^2 \left[ E \left( \frac{\hat{Y}_{rsc}}{\hat{Z}} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

pero,

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \frac{\hat{Y}_{rsc}}{\hat{Z}} \right)^2 \right] &= E \left[ \frac{\hat{Y}_{rsc}^2}{\hat{Z}^2} \right] = \frac{Y^2}{Z^2} E \left[ \frac{\left( 1 + \frac{e}{Y} \right)^2}{\left( 1 + \frac{e}{Z} \right)^2} \right] = \frac{Y^2}{Z^2} \left[ 1 + \frac{2}{Y} E(e) + \frac{1}{Y^2} E(e^2) - \frac{2}{Z} E(e') - \frac{4}{YZ} E(ee') + \frac{3}{Z^2} E(e'^2) \right] \\ &= \frac{Y^2}{Z^2} \left[ 1 + \frac{1}{Y^2} E(e^2) - \frac{4}{YZ} E(ee') + \frac{3}{Z^2} E(e'^2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{Y^2}{Z^2} \left[ 1 + \frac{1}{Y^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}) - \frac{4}{YZ} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right] \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} v(\hat{Y}_{rRsc}) &= Y^2 \left[ 1 + \frac{1}{Y^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}) - \frac{4}{YZ} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{Y}^2 \left[ 1 - \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]^2 \\
& = \bar{Y}^2 + \bar{Y}^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}) - \frac{4}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right] - \\
& \quad - \bar{Y}^2 - \bar{Y}^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]^2 + \\
& \quad + 2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right] \\
& = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}) - 2 \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \\
& \quad + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \\
& \quad - \bar{Y}^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]^2 \\
& = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right] \\
& \quad - \left[ \frac{1}{\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) - \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]^2
\end{aligned}$$

finalmente, el error cuadrático medio,

$$ECM(\hat{Y}_{rRsc}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]$$

Resumiendo se tiene que,

$$\hat{Y}_{rRsc} = \left( \frac{\hat{Y}_{rIs}}{\hat{Z}_{rIs}} \right) Z = \left[ \frac{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{y}_h + b_h (X_h - \bar{x}_h))}{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{z}_h + b_h (X_h - \bar{x}_h))} \right] Z$$

$$E(\hat{Y}_{rRsc}) = Y - Y \left[ \frac{1}{YZ} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) - \frac{1}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]$$

$$B(\hat{Y}_{rRsc}) = Y \left[ \frac{1}{YZ} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) - \frac{1}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]$$

$$V(\hat{Y}_{rRsc}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right] - \bar{Y}^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}) \right]^2$$

$$ECM(\hat{Y}_{rRsc}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]$$

$$ECM(\hat{Y}_{rRsc}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (s_{y_h}^2 + \hat{b}_h^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_h s_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{y}}{\bar{z}} \right) (s_{yz_h} - \hat{b}_h s_{xy_h} - \hat{b}_h s_{xz_h} + \hat{b}_h^2 s_{x_h}^2) + \left( \frac{\bar{y}}{\bar{z}} \right)^2 (s_{z_h}^2 + \hat{b}_h^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_h s_{xz_h}) \right]$$

y para el total,

$$\hat{Y}_{rRsc} = \left( \frac{\hat{Y}_{rIs}}{\hat{Z}_{rIs}} \right) Z = \left[ \frac{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{y}_h + b_h (X_h - x_h))}{\sum_{h=1}^L W_h (z_h + b_h (X_h - x_h))} \right] Z$$

$$E(\hat{Y}_{rRsc}) = Y - Y \left[ \frac{1}{\bar{Y}Z} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) - \frac{1}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]$$

$$B(\hat{Y}_{rRsc}) = Y \left[ \frac{1}{\bar{Y}Z} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) - \frac{1}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]$$

$$V(\hat{Y}_{rRsc}) = \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{Y}{Z} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \left( \frac{Y}{Z} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right] \\ + Y^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}Z} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) - \frac{1}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]^2$$

$$ECM(\hat{Y}_{rRsc}) = \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{Y}{Z} \right) (S_{yz_h} - b_h S_{xy_h} - b_h S_{xz_h} + b_h^2 S_{x_h}^2) + \left( \frac{Y}{Z} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_h^2 S_{x_h}^2 - 2b_h S_{xz_h}) \right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{rRsc}) = \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (s_{y_h}^2 + \hat{b}_h^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_h s_{xy_h}) - 2 \left( \frac{y}{z} \right) (s_{yz_h} - \hat{b}_h s_{xy_h} - \hat{b}_h s_{xz_h} + \hat{b}_h^2 s_{x_h}^2) + \left( \frac{y}{z} \right)^2 (s_{z_h}^2 + \hat{b}_h^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_h s_{xz_h}) \right]$$

Los casos especiales pueden ser aplicados, y resultan igual que en los estimadores de Regresión-Razón separado-separado, es decir, el estimador de razón ocurre cuando  $b_h = 0$ , para cada  $h$ ,  $h=1,2,\dots,L$ , y el estimador por diferencia cuando  $b_h = 1$ , para cada  $h$ ,  $h=1,2,\dots,L$ . Para trabajar con el estimador de varianza mínima con  $b_h$  constante, se debe hallar el  $b_h$  que minimice el error cuadrático medio, para ello se hace,

$$\frac{\partial ECM(\hat{Y}_{rRsc})}{\partial b_h} = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ 2b_h S_{x_h}^2 - 2S_{xy_h} - 2 \left( \frac{Y}{Z} \right) (-S_{xy_h} - S_{xz_h} + 2b_h S_{x_h}^2) + \left( \frac{Y}{Z} \right)^2 (2b_h S_{x_h}^2 - 2S_{xz_h}) \right] = 0$$

para que la igualdad se cumpla, debe ocurrir que,

$$2b_h S_{x_h}^2 - 2S_{xy_h} - 2 \left( \frac{Y}{Z} \right) (-S_{xy_h} - S_{xz_h} + 2b_h S_{x_h}^2) + \left( \frac{Y}{Z} \right)^2 (2b_h S_{x_h}^2 - 2S_{xz_h}) = 0 \quad \forall h, h=1,2,\dots,L$$

ya que la parte de regresión es separada, es decir, se tiene  $b_h$  diferenciado para cada estrato. Y agrupando se tiene,

$$2b_h \left[ 1 - 2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 \right] S_{x_h}^2 - 2 \left[ 1 - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) \right] S_{xy_h} + 2 \left[ \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 \right] S_{xz_h} = 0$$

despejando  $b_h$ ,

$$b_h = \frac{\left[ 1 - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) \right] S_{xy_h} - \left[ \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 \right] S_{xz_h}}{\left[ 1 - 2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 \right] S_{x_h}^2} = \frac{\left[ 1 - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) \right] S_{xy_h} - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) \left[ 1 - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) \right] S_{xz_h}}{\left[ 1 - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) \right]^2 S_{x_h}^2} = \frac{S_{xy_h} - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) S_{xz_h}}{\left[ 1 - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) \right] S_{x_h}^2}$$

Desarrollando la segunda derivada,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 ECM(\hat{Y}_{rRsc})}{\partial^2 b_h} &= \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ 2S_{x_h}^2 - 4\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) S_{x_h}^2 + 2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 S_{x_h}^2 \right] = 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ 1 - 2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 \right] S_{x_h}^2 \\ &= 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( 1 - \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 S_{x_h}^2 \end{aligned}$$

y como todos los sumandos son siempre mayor o igual a cero, entonces  $\frac{\partial^2 ECM(\hat{Y}_{rRsc})}{\partial^2 b_h} \geq 0$ , y por

lo tanto, cuando

$$b_h = b_{h0} = \frac{S_{xy_h} - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) S_{xz_h}}{\left[ 1 - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) \right] S_{x_h}^2} \text{ se minimiza } ECM(\hat{Y}_{rRsc}).$$

***Estimadores de regresión-razón combinado-separado.***

Al contrario del caso anterior, aquí se determinarán unos estimadores de regresión lineal con un coeficiente único para todos los estratos (combinado), y a éstos se les aplicará un ajuste de razón separado, es decir, una razón diferente para cada estrato. Igual que para el Estimador de Razón-Regresión Combinado-Separado, aquí se pierde el efecto de tener razones diferenciadas para cada estrato, al tener los estimadores de regresión de manera combinada. Esto se puede observar a continuación.

El estimador del promedio es,

$$\hat{Y}_{rRcs} = \sum_{h=1}^L \left[ \left( \frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}} \right) W_h Z_h \right] = \left( \frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}} \right) \sum_{h=1}^L W_h Z_h = \left( \frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}} \right) Z = \hat{Y}_{rRcc}$$

es decir, que el estimador del tipo Regresión-Razón combinado-separado, es exactamente el mismo estimador del promedio del tipo Regresión-Razón combinado-combinado. Igual ocurre con el estimador del total,

$$\hat{Y}_{rRcs} = \sum_{h=1}^L \left[ \left( \frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}} \right) Z_h \right] = \left( \frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}} \right) \sum_{h=1}^L Z_h = \left( \frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}} \right) Z = \hat{Y}_{rRcc}$$

Los estimadores del tipo Regresión-Razón combinado-combinado serán tratados a continuación.

***Estimadores de regresión-razón combinado-combinado.***

Ahora se trabajan de forma combinada, tanto el componente de regresión lineal como el de razón, de forma combinada. Los estimadores del promedio y del total son,

$$\hat{Y}_{rRcc} = \left( \frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}} \right) \bar{Z} = \left[ \frac{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{y}_h + b_c (\bar{X}_h - \bar{x}_h))}{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{z}_h + b_c (\bar{X}_h - \bar{x}_h))} \right] \bar{Z}$$

$$\hat{Y}_{rRcc} = \left( \frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}} \right) Z = \left[ \frac{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{y}_h + b_c (\bar{X}_h - \bar{x}_h))}{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{z}_h + b_c (\bar{X}_h - \bar{x}_h))} \right] Z$$

Para desarrollar la esperanza, sesgo, varianza y error cuadrático medio del estimador del promedio, se procederá a realizar los cambios habituales,

$$\hat{Y}_{rlc} = \bar{Y} + e$$

$$\hat{Z}_{rlc} = \bar{Z} + e''$$

$$E(\hat{Y}_{rRcc}) = E\left[ \left( \frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}} \right) Z \right] = Z E\left[ \frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}} \right] = Z E\left[ \frac{Y+e}{Z+e''} \right] = Z E\left[ \frac{Y\left(1+\frac{e}{Y}\right)}{Z\left(1+\frac{e''}{Z}\right)} \right] = Y E\left[ \frac{\left(1+\frac{e}{Y}\right)}{\left(1+\frac{e''}{Z}\right)} \right]$$

haciendo el desarrollo de la Serie de Taylor y truncando en potencias de orden 2, se tiene que,

$$E(\hat{Y}_{rRcc}) = Y E\left[ 1 + \frac{e}{Y} - \frac{e''}{Z} - \frac{ee''}{YZ} + \frac{e'^2}{Z^2} \right] \quad \text{pero como} \quad E(1) = 1, \quad E(e) = 0, \quad E(e'') = 0$$

$$\text{y además,} \quad E(ee'') = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2 \right]$$

$$E(e'^2) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h} \right]$$

entonces,

$$\begin{aligned} E(\hat{Y}_{rRcc}) &= Y \left[ 1 - \frac{1}{YZ} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2 \right) + \frac{1}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h} \right) \right] \\ &= Y - Y \left[ \frac{1}{YZ} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2 \right) - \frac{1}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h} \right) \right] \end{aligned}$$

de manera que es un estimador sesgado, y el sesgo es,

$$B(\hat{Y}_{rRcc}) = Y \left[ \frac{1}{YZ} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2 \right) - \frac{1}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h} \right) \right]$$

A continuación se desarrolla la varianza.

$$V(\hat{Y}_{rRcc}) = V\left[\left(\frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}}\right)\bar{Z}\right] = \bar{Z}^2 V\left[\frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}}\right] = \bar{Z}^2 E\left[\left(\frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}} - E\left(\frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}}\right)\right)^2\right] = \bar{Z}^2 \left[E\left[\left(\frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}}\right)^2\right] - E\left[\left(\frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}}\right)\right]^2\right]$$

pero,

$$E\left[\left(\frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}}\right)^2\right] = E\left[\frac{\hat{Y}_{rlc}^2}{\hat{Z}_{rlc}^2}\right] = \frac{Y^2}{Z^2} E\left[\left(\frac{1 + \frac{e}{Y}}{1 + \frac{e}{Z}}\right)^2\right] = \frac{Y^2}{Z^2} \left[1 + \frac{2}{Y}E(e) + \frac{1}{Y^2}E(e^2) - \frac{2}{Z}E(e'') - \frac{4}{YZ}E(ee'') + \frac{3}{Z^2}E(e''^2)\right]$$

$$= \frac{Y^2}{Z^2} \left[1 + \frac{1}{Y^2}E(e^2) - \frac{4}{YZ}E(ee'') + \frac{3}{Z^2}E(e''^2)\right]$$

$$= \frac{Y^2}{Z^2} \left[1 + \frac{1}{Y^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h}) - \frac{4}{YZ} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2) + \frac{3}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{z_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xz_h})\right]$$

entonces,

$$V(\hat{Y}_{rRcc}) = Y^2 \left[1 + \frac{1}{Y^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h}) - \frac{4}{YZ} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2) + \frac{3}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{z_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xz_h})\right] - Y^2 \left[1 - \frac{1}{YZ} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2) + \frac{1}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h})\right]^2$$

$$= Y^2 + Y^2 \left[\frac{1}{Y^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h}) - \frac{4}{YZ} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2) + \frac{3}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{z_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xz_h})\right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{z_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xz_h} \right) \Big] - \\
& - Y^2 \left[ 1 - 2 \left( \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2 \right) - \frac{1}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h} \right) \right) + \right. \\
& \left. + \left( \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2 \right) - \frac{1}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h} \right) \right)^2 \right] \\
& = Y^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h} \right) - \frac{4}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2 \right) + \right. \\
& + \frac{3}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{z_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xz_h} \right) + \frac{2}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2 \right) \\
& - \frac{2}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h} \right) \\
& - \left( \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2 \right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h} \right) \right)^2 \Big] \\
& = \bar{Y}^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h} \right) - \frac{2}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2 \right) + \right. \\
& + \frac{1}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{z_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xz_h} \right) - \\
& \left. - \left( \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2 \right) - \frac{1}{Z^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h} \right) \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

finalmente, el error cuadrático medio,

$$\begin{aligned}
& ECM(\hat{Y}_{rRcc}) \\
&= \bar{Y}^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h}) - \frac{2}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xz_h}) - \right. \\
&\quad \left. - \left( \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h}) \right)^2 \right] \\
&\quad + \bar{Y}^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h}) \right]^2 \\
& ECM(\hat{Y}_{rRcc}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h}) - 2 \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2) + \\
&\quad + \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xz_h})
\end{aligned}$$

Resumiendo se tiene que,

$$\hat{Y}_{rRcc} = \begin{pmatrix} \hat{Y}_{rlc} \\ \hat{Z}_{rlc} \end{pmatrix} \bar{Z} = \frac{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{y}_h + b_c (\bar{X}_h - \bar{x}_h))}{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{z}_h + b_c (\bar{X}_h - \bar{x}_h))} \bar{Z}$$

$$E(\hat{Y}_{rRcc}) = Y - Y \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h}) \right]$$

$$B(\hat{Y}_{rRcc}) = Y \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h}) \right]$$

$$\begin{aligned}
V(\hat{Y}_{rRcc}) &= \bar{Y}^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h}) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xz_h}) - \right.
\end{aligned}$$

$$\left. - \left( \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h}) \right)^2 \right]$$

$$ECM(\hat{Y}_{rRcc}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h}) - 2 \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2) +$$

$$+ \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xz_h})$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{rRcc}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (s_{y_h}^2 + \hat{b}_c^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_c s_{xy_h}) - 2 \frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (s_{yz_h} - \hat{b}_c s_{xy_h} - \hat{b}_c s_{xz_h} + \hat{b}_c^2 s_{x_h}^2) +$$

$$+ \frac{\hat{Y}_{rlc}^2}{\hat{Z}_{rlc}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (s_{z_h}^2 + \hat{b}_c^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_c s_{xz_h})$$

y para el total,

$$\hat{Y}_{rRcc} = \left( \frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}} \right) Z = \left[ \frac{\sum_{h=1}^L W_h (y_h + b_c (X_h - \bar{x}_h))}{\sum_{h=1}^L W_h (z_h + b_c (X_h - \bar{x}_h))} \right] Z$$

$$E(\hat{Y}_{rRcc}) = Y - Y \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h}) \right]$$

$$B(\hat{Y}_{rRcc}) = Y \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h}) \right]$$

$$V(\hat{Y}_{rRcc}) = Y^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h}) - \right.$$

$$- \frac{2}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2) +$$

$$+ \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xz_h}) -$$

$$\left. - \left( \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h}) \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
ECM(\hat{Y}_{rRcc}) &= \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xy_h}) - 2 \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_c S_{xy_h} - b_c S_{xz_h} + b_c^2 S_{x_h}^2) + \\
&\quad + \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_c^2 S_{x_h}^2 - 2b_c S_{xz_h}) \\
\hat{ECM}(\hat{Y}_{rRcc}) &= \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (s_{y_h}^2 + \hat{b}_c^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_c s_{xy_h}) - 2 \frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (s_{yz_h} - \hat{b}_c s_{xy_h} - \hat{b}_c s_{xz_h} + \hat{b}_c^2 s_{x_h}^2) + \\
&\quad + \frac{\hat{Y}_{rlc}^2}{\hat{Z}_{rlc}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (s_{z_h}^2 + \hat{b}_c^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_c s_{xz_h})
\end{aligned}$$

Para trabajar con el estimador de varianza mínima, se debe hallar  $b_c$ , esto es,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial ECM(\hat{Y}_{rRcc})}{\partial b_c} &= \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( 2b_c S_{x_h}^2 - 2S_{xy_h} + 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) S_{xy_h} + 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) S_{xz_h} - 4b_c \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) S_{x_h}^2 + 2b_c \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 S_{x_h}^2 - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 S_{xz_h} \right) = 0 \\
&= 2b_c \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{x_h}^2 - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) S_{x_h}^2 + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 S_{x_h}^2 \right) - 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{xy_h} - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) S_{xy_h} - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) S_{xz_h} + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 S_{xz_h} \right) = 0
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
b_c &= \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{xy_h} - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) S_{xy_h} - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) S_{xz_h} + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 S_{xz_h} \right)}{\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{x_h}^2 - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) S_{x_h}^2 + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 S_{x_h}^2 \right)} \\
b_c &= \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \left( 1 - \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) S_{xy_h} - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) \left( 1 - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) \right) S_{xz_h} \right)}{\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( 1 - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) \right)^2 S_{x_h}^2} \\
b_c &= \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{xy_h} - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) S_{xz_h} \right)}{\left( 1 - \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{x_h}^2}
\end{aligned}$$

Luego, se alcanza una varianza mínima en  $b_{c0}$  si la segunda derivada es mayor que cero, esto es,

$$\frac{\partial^2 ECM(\hat{Y}_{rRcc})}{\partial^2 b_c} = 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (1-2R_{yz} + R_{yz}^2) S_{x_h}^2$$

pero como  $W_h^2 \geq 0$  ;  $\left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \geq 0$  y  $S_{x_h}^2 \geq 0$  para todo  $h, h=1,2,\dots,L$  , entonces

$$\frac{\partial^2 ECM(\hat{Y}_{rRcc})}{\partial^2 b_c} = 2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (1-2R_{yz} + R_{yz}^2) S_{x_h}^2 \geq 0 \quad \text{si y sólo si} \quad (1-2R_{yz} + R_{yz}^2) \geq 0$$

y como  $(1-2R_{yz} + R_{yz}^2) = (R_{yz} - 1)^2 \geq 0$  se tiene que en  $b_{c0}$  se obtiene la varianza mínima.

### **Estimadores del Tipo Regresión-Razón con 2 coeficientes**

En esta sección se desarrollarán los mismos Estimadores de Regresión-Razón que los desarrollados en la sección anterior, pero ahora con dos coeficientes, uno para cada estimador de regresión lineal, que se denotarán por  $b_y$ , para  $\hat{Y}_{rl}$ , y  $b_z$ , para  $\hat{Z}_{rl}$ . Para diferenciarlo del anterior, este estimador se denotará por  $\hat{Y}'_{rR}$  y  $\hat{Y}'_{rR}$  para el promedio y el total respectivamente.

$$\text{Sean} \quad \hat{Y}'_{rR} = \frac{\hat{Y}_{rl}}{\hat{Z}_{rl}} \bar{Z} = \frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \bar{Z} \quad , \quad \hat{Y}'_{rR} = \frac{\hat{Y}_{rl}}{\hat{Z}_{rl}} Z = \frac{\hat{Y} + b_y(X - \hat{X})}{\hat{Z} + b_z(X - \hat{X})} Z$$

### ***Esperanzas de los Estimadores***

Suponiendo  $b$  constante,

$$E(\hat{Y}'_{rl}) = E[\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})] = E(\bar{y}) + b_y E(\bar{X}) - b_y E(\bar{x}) = \bar{Y} + b_y \bar{X} - b_y \bar{X} = \bar{Y} \quad (18)$$

$$E(\hat{Z}'_{rl}) = E[\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})] = E(\bar{z}) + b_z E(\bar{X}) - b_z E(\bar{x}) = \bar{Z} + b_z \bar{X} - b_z \bar{X} = \bar{Z}$$

Haciendo el mismo artificio que cuando se desarrolló  $\hat{Y}_{rR}$ ,

$\hat{Y}_{rl} = \bar{Y} + e$  donde  $e$  es una variable aleatoria con promedio cero. Entonces,

$$E(\hat{Y}_{rl}) = E(\bar{Y} + e) = E(\bar{Y}) + E(e) = \bar{Y} \quad \text{que es el resultado mostrado en (18)}$$

y la varianza,

$$V(\hat{Y}_{rl}) = V(\bar{Y} + e) = V(\bar{Y}) + V(e) + 2COV(\bar{Y}, e)$$

pero,

$$V(\bar{Y}) = 0$$

$$COV(\bar{Y}, e) = 0$$

y

$$V(e) = E[(e - E(e))^2] = E[e^2 + (E(e))^2 - 2eE(e)] = E(e^2) + [E(e)]^2 - 2[E(e)]^2 = E(e^2) - [E(e)]^2$$

y como  $E(e) = 0$ , queda  $V(e) = E(e^2)$

desarrollando  $E(e^2)$ ,

$$E(e^2) = \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} e_k^2 P_k = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} e_k^2}{\binom{N}{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} (\hat{Y}_{rlk} - \bar{Y})^2}{\binom{N}{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \hat{Y}_{rlk}^2 - \binom{N}{n} \bar{Y}^2}{\binom{N}{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \hat{Y}_{rlk}^2}{\binom{N}{n}} - \bar{Y}^2 = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} (\bar{y}_k + b_y \bar{X} - b_y \bar{x}_k)^2}{\binom{N}{n}} - \bar{Y}^2$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} (\bar{y}_k^2 + b_y^2 \bar{X}^2 + b_y^2 \bar{x}_k^2 + 2b_y \bar{X} \bar{y}_k - 2b_y \bar{X} \bar{x}_k - 2b_y \bar{y}_k \bar{x}_k)}{\binom{N}{n}} - \bar{Y}^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k^2 + \binom{N}{n} b_y^2 \bar{X}^2 + b_y^2 \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k^2 + 2b_y \bar{X} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k - 2b_y^2 \bar{X} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k - 2b_y \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{x}_k}{\binom{N}{n}} - \bar{Y}^2 \\
 &= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k^2}{\binom{N}{n}} + b_y^2 \bar{X}^2 + b_y^2 \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k^2}{\binom{N}{n}} + 2b_y \bar{X} \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k}{\binom{N}{n}} - 2b_y^2 \bar{X} \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k}{\binom{N}{n}} - 2b_y \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{x}_k}{\binom{N}{n}} - \bar{Y}^2 \\
 &= b_y^2 \bar{X}^2 - \bar{Y}^2 + \frac{1}{\binom{N}{n}} \left[ \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k^2 + b_y^2 \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k^2 + 2b_y \bar{X} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k - 2b_y^2 \bar{X} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k - 2b_y \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{x}_k \right] \tag{19}
 \end{aligned}$$

como se sabe de desarrollos anteriores,

$$\frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k^2}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{Nn} \left[ \left( \frac{n-1}{N-1} \right) N^2 \bar{Y}^2 + \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \sum_{i=1}^N y_i^2 \right] ,$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k^2}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{Nn} \left[ \left( \frac{n-1}{N-1} \right) N^2 \bar{X}^2 + \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \sum_{i=1}^N x_i^2 \right]$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k}{\binom{N}{n}} = \bar{Y} \quad , \quad \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k}{\binom{N}{n}} = \bar{X}$$

sustituyendo en (19)

$$\begin{aligned}
E(e^2) &= b_y^2 \bar{X}^2 - \bar{Y}^2 + \left[ \frac{1}{Nn} \left[ \left( \frac{n-1}{N-1} \right) N^2 \bar{Y}^2 + \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \sum_{i=1}^N y_i^2 \right] \right] + \\
&+ b_y^2 \left[ \frac{1}{Nn} \left[ \left( \frac{n-1}{N-1} \right) N^2 \bar{X}^2 + \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \sum_{i=1}^N x_i^2 \right] \right] + \\
&+ 2b_y \bar{X}\bar{Y} - 2b_y^2 \bar{X}^2 - 2b_y \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{x}_k}{\binom{N}{n}} \\
&= \left[ \frac{1}{Nn} \left[ \left( \frac{n-1}{N-1} \right) N^2 \bar{Y}^2 - \bar{Y}^2 + \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \sum_{i=1}^N y_i^2 \right] \right] + b_y^2 \left[ \frac{1}{Nn} \left[ \left( \frac{n-1}{N-1} \right) N^2 \bar{X}^2 - \bar{X}^2 + \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \sum_{i=1}^N x_i^2 \right] \right] - \\
&- 2b_y \left[ \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{x}_k}{\binom{N}{n}} - \bar{X}\bar{Y} \right] \\
&= \frac{1}{Nn} \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \left[ \sum_{i=1}^N y_i^2 - N\bar{Y}^2 \right] + b_y^2 \frac{1}{Nn} \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \left[ \sum_{i=1}^N x_i^2 - N\bar{X}^2 \right] - 2b_y \left[ \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{x}_k}{\binom{N}{n}} - \bar{X}\bar{Y} \right] \\
&= \frac{N-n}{Nn} S_y^2 + b_y^2 \frac{N-n}{Nn} S_x^2 - 2b_y \left[ \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{x}_k}{\binom{N}{n}} - \bar{X}\bar{Y} \right] = \frac{N-n}{Nn} S_y^2 + b_y^2 \frac{N-n}{Nn} S_x^2 - 2b_y \frac{N-n}{Nn} S_{xy}
\end{aligned}$$

entonces,

$$E(e^2) = \frac{N-n}{Nn} S_y^2 + b_y^2 \frac{N-n}{Nn} S_x^2 - 2b_y \frac{N-n}{Nn} S_{xy} = \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_y^2 + b_y^2 S_x^2 - 2b_y S_{xy}) = ECM(\hat{\bar{Y}}_{rl}) \quad (20)$$

$$\text{Análogamente, } \hat{\bar{Z}}_{rl} = \bar{Z} + e'' \quad , \quad E(e''^2) = \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) = ECM(\hat{\bar{Z}}_{rl}) \quad (21)$$

Para la esperanza de  $\hat{Y}_{rR}$  se tiene que,

$$E\left(\hat{Y}_{rR}\right) = \bar{Z} E\left[\frac{\hat{Y}_{rR}}{\hat{Z}_{rR}}\right] = \bar{Z} E\left[\frac{\bar{Y} + e}{\bar{Z} + e''}\right] = \bar{Z} E\left[\frac{\bar{Y}\left(1 + \frac{e}{\bar{Y}}\right)}{\bar{Z}\left(1 + \frac{e''}{\bar{Z}}\right)}\right] = \bar{Y} E\left[\frac{\left(1 + \frac{e}{\bar{Y}}\right)}{\left(1 + \frac{e''}{\bar{Z}}\right)}\right]$$

Entonces se debe desarrollar  $E\left[\frac{1 + \frac{e}{\bar{Y}}}{1 + \frac{e''}{\bar{Z}}}\right]$ . Para tal fin, se desarrollará la Serie de Taylor del

denominador. La Serie de Taylor de una función  $f(x)$  respecto de  $x_0$  es,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

donde  $f^k(x_0)$  es la derivada de orden  $k$  de la función  $f$ , evaluada en el punto  $x_0$ . En este caso la función es,

$$f(\bar{e}'') = \left(1 + \frac{\bar{e}''}{\bar{Z}}\right)^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{\bar{e}''}{\bar{Z}}} = \frac{1}{\bar{Z} + \bar{e}''} = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z} + \bar{e}''}$$

y se debe hallar la serie de Taylor de  $f(\bar{e}'')$  respecto de cero. Al hallar  $f'(\bar{e}'')$ ,  $f''(\bar{e}'')$ ,  $f'''(\bar{e}'')$ ,....., se llega a la expresión genérica

$$f^k(\bar{e}'') = (-1)^k \frac{k! \bar{Z}}{(\bar{Z} + \bar{e}'')^{k+1}}$$

y evaluando en cero,

$$f^k(0) = (-1)^k \frac{k!}{\bar{Z}^k}$$

entonces la serie es,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{\bar{Z}^k} \tag{22}$$

entonces,  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{\bar{Z}^k} \frac{(\bar{e}'' - 0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\bar{e}'')^k}{\bar{Z}^k}$

luego,

$$E \left[ \frac{1 + \frac{\bar{e}}{\bar{Y}}}{1 + \frac{\bar{e}''}{\bar{Z}}} \right] = E \left[ \left( 1 + \frac{\bar{e}}{\bar{Y}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\bar{e}''^k}{\bar{Z}^k} \right] = E \left[ \left( 1 + \frac{\bar{e}}{\bar{Y}} \right) \left( 1 - \frac{\bar{e}''}{\bar{Z}} + \frac{\bar{e}''^2}{\bar{Z}^2} - \frac{\bar{e}''^3}{\bar{Z}^3} + \dots + (-1)^k \frac{\bar{e}''^k}{\bar{Z}^k} + \dots \right) \right]$$

$$= E \left[ 1 + \frac{\bar{e}}{\bar{Y}} - \frac{\bar{e}''}{\bar{Z}} - \frac{\bar{e}\bar{e}''}{\bar{Y}\bar{Z}} + \frac{\bar{e}''^2}{\bar{Z}^2} + \frac{\bar{e}\bar{e}''^2}{\bar{Y}\bar{Z}^2} - \frac{\bar{e}''^3}{\bar{Z}^3} - \frac{\bar{e}\bar{e}''^3}{\bar{Y}\bar{Z}^3} + \frac{\bar{e}''^4}{\bar{Z}^4} + \frac{\bar{e}\bar{e}''^4}{\bar{Y}\bar{Z}^4} - \frac{\bar{e}''^5}{\bar{Z}^5} - \frac{\bar{e}\bar{e}''^5}{\bar{Y}\bar{Z}^5} + \dots \right]$$

truncando la serie, suponiendo que

$$\frac{\bar{e}''^k}{\bar{Z}^k} \quad \forall k > 2 \quad \wedge \quad \frac{\bar{e}\bar{e}''^k}{\bar{Y}\bar{Z}^k} \quad \forall k > 1$$

no aportan mucho y se pueden despreciar,

$$E \left[ \frac{1 + \frac{\bar{e}}{\bar{Y}}}{1 + \frac{\bar{e}''}{\bar{Z}}} \right] = E \left[ 1 + \frac{\bar{e}}{\bar{Y}} - \frac{\bar{e}''}{\bar{Z}} - \frac{\bar{e}\bar{e}''}{\bar{Y}\bar{Z}} + \frac{\bar{e}''^2}{\bar{Z}^2} \right] = 1 + \frac{1}{\bar{Y}} E(\bar{e}) - \frac{1}{\bar{Z}} E(\bar{e}'') - \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} E(\bar{e}\bar{e}'') + \frac{1}{\bar{Z}^2} E(\bar{e}''^2) \tag{23}$$

pero  $E(\bar{e})=0$  y  $E(\bar{e}'')=0$  , entonces,

$$E \left[ \frac{1 + \frac{\bar{e}}{\bar{Y}}}{1 + \frac{\bar{e}''}{\bar{Z}}} \right] = 1 - \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} E(\bar{e}\bar{e}'') + \frac{1}{\bar{Z}^2} E(\bar{e}''^2)$$

Por (21) se tiene que  $E(e''^2) = \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz})$

Se desarrollará  $E(\bar{e}\bar{e}'')$ .

$$E(ee'') = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} e_k e''_k P_k = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} e_k e''_k \left( \hat{Y}_{rl_k} - \bar{Y} \right) \left( \hat{Z}_{rl_k} - \bar{Z} \right)}{\binom{N}{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \hat{Y}_{rl_k} \hat{Z}_{rl_k} - \bar{Z} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \hat{Y}_{rl_k} - \bar{Y} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \hat{Z}_{rl_k} + \binom{N}{n} \bar{Y}\bar{Z}}{\binom{N}{n}}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \hat{Y}_{rlk} \hat{Z}_{rlk} - \binom{N}{n} \bar{Y} \bar{Z} - \binom{N}{n} \bar{Y} \bar{Z} + \binom{N}{n} \bar{Y} \bar{Z} \sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \hat{Y}_{rlk} \hat{Z}_{rlk}}{\binom{N}{n}} = \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \hat{Y}_{rlk} \hat{Z}_{rlk}}{\binom{N}{n}} - \bar{Y} \bar{Z}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} (\bar{y}_k + b_y \bar{X} - b_y \bar{x}_k) (\bar{z}_k + b_z \bar{X} - b_z \bar{x}_k)}{\binom{N}{n}} - \bar{Y} \bar{Z}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} (\bar{y}_k \bar{z}_k + b_z \bar{X} \bar{y}_k - b_z \bar{x}_k \bar{y}_k + b_y \bar{X} \bar{z}_k + b_y b_z \bar{X}^2 - b_y b_z \bar{X} \bar{x}_k - b_y \bar{x}_k \bar{z}_k - b_y b_z \bar{X} \bar{x}_k + b_y b_z \bar{x}_k^2)}{\binom{N}{n}} - \bar{Y} \bar{Z}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{z}_k}{\binom{N}{n}} + b_z \bar{X} \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k}{\binom{N}{n}} - b_z \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k \bar{y}_k}{\binom{N}{n}} + b_y \bar{X} \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{z}_k}{\binom{N}{n}} + b_y b_z \bar{X}^2 -$$

$$- b_y b_z \bar{X} \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k}{\binom{N}{n}} - b_y \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k \bar{z}_k}{\binom{N}{n}} - b_y b_z \bar{X} \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k}{\binom{N}{n}} + b_y b_z \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k^2}{\binom{N}{n}} - \bar{Y} \bar{Z}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{z}_k}{\binom{N}{n}} + b_z \bar{X} \bar{Y} - b_z \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k \bar{y}_k}{\binom{N}{n}} + b_y \bar{X} \bar{Z} + b_y b_z \bar{X}^2 - b_y b_z \bar{X}^2 - b_y \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k \bar{z}_k}{\binom{N}{n}} - b_y b_z \bar{X}^2 + b_y b_z \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k^2}{\binom{N}{n}} - \bar{Y} \bar{Z}$$

y como

$$\frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k^2}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{Nn} \left[ \binom{n-1}{N-1} N^2 \bar{X}^2 + \binom{N-n}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right]$$

entonces,

$$\begin{aligned}
 E(e e') &= \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{z}_k}{\binom{N}{n}} + b_z \bar{X} \bar{Y} - b_z \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k \bar{y}_k}{\binom{N}{n}} + b_y \bar{X} \bar{Z} + b_y b_z \bar{X}^2 - b_y b_z \bar{X}^2 - b_y \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k \bar{z}_k}{\binom{N}{n}} - \\
 &\quad - b_y b_z \bar{X}^2 + \frac{b_y b_z}{Nn} \left[ \frac{(n-1)}{N-1} N^2 \bar{X}^2 + \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \sum_{i=1}^N x_i^2 \right] - \bar{Y} \bar{Z} \\
 &= \left[ \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{y}_k \bar{z}_k}{\binom{N}{n}} - \bar{Y} \bar{Z} \right] - b_z \left[ \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k \bar{y}_k}{\binom{N}{n}} - \bar{X} \bar{Y} \right] - b_y \left[ \frac{\sum_{k=1}^{\binom{N}{n}} \bar{x}_k \bar{z}_k}{\binom{N}{n}} - \bar{X} \bar{Z} \right] + b_y b_z \frac{1}{Nn} \left( \frac{N-n}{N-1} \right) \left[ \sum_{i=1}^N x_i^2 - N \bar{X}^2 \right] \\
 &= \left( \frac{1-f}{n} \right) S_{yz} - b_z \left( \frac{1-f}{n} \right) S_{xy} - b_y \left( \frac{1-f}{n} \right) S_{xz} + \left( \frac{1-f}{n} \right) b_y b_z S_x^2 \\
 &= \left( \frac{1-f}{n} \right) (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2)
 \end{aligned}$$

entonces,

$$E\left(\hat{Y}_{rR}\right) = \bar{Y} E\left[\frac{\left(1 + \frac{e}{\bar{Y}}\right)}{\left(1 + \frac{e'}{\bar{Z}}\right)}\right] = \bar{Y} - \bar{Y} \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[\frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz})\right]$$

y el sesgo,

$$B\left(\hat{Y}_{rR}\right) = \bar{Y} \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[\frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz})\right]$$

### ***Error Cuadrático Medio de los Estimadores***

Para desarrollar el error cuadrático medio, se debe desarrollar la varianza.

$$\begin{aligned}
V\left(\frac{\hat{Y}_{rR}}{\hat{Z}_{rR}}\right) &= \bar{Z}^2 V\left[\frac{\hat{Y}_{rR}}{\hat{Z}_{rR}}\right] = \bar{Z}^2 E\left[\left(\frac{\hat{Y}_{rR}}{\hat{Z}_{rR}} - E\left(\frac{\hat{Y}_{rR}}{\hat{Z}_{rR}}\right)\right)^2\right] \\
&= \bar{Z}^2 \left[ E\left[\left(\frac{\hat{Y}_{rR}}{\hat{Z}_{rR}}\right)^2\right] - \left[ E\left(\frac{\hat{Y}_{rR}}{\hat{Z}_{rR}}\right) \right]^2 \right] = \bar{Y}^2 \left[ E\left[\left(\frac{1+\frac{e}{\bar{Y}}}{1+\frac{e}{\bar{Z}}}\right)^2\right] - \left[ E\left(\frac{1+\frac{e}{\bar{Y}}}{1+\frac{e}{\bar{Z}}}\right) \right]^2 \right]
\end{aligned}$$

como 
$$E\left(\frac{1+\frac{e}{\bar{Y}}}{1+\frac{e}{\bar{Z}}}\right) = 1 - \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \right]$$

entonces, 
$$\begin{aligned}
\left[ E\left(\frac{1+\frac{e}{\bar{Y}}}{1+\frac{e}{\bar{Z}}}\right) \right]^2 &= \left[ 1 - \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \right] \right]^2 \\
&= 1 - 2 \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \right] + \\
&\quad + \left(\frac{1-f}{n}\right)^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \right]^2
\end{aligned}$$

Para el primer miembro, se tiene,

$$E\left[\frac{\left(1+\frac{e}{\bar{Y}}\right)^2}{\left(1+\frac{e''}{\bar{Z}}\right)^2}\right] = E\left[\frac{\left(1+\frac{e}{\bar{Y}}\right)^2}{\left(1+\frac{e''}{\bar{Z}}\right)^2}\right]$$

y desarrollando la Serie de Taylor y truncando en las potencias de orden 2, se tiene que,

$$E\left[\frac{\left(1+\frac{e}{\bar{Y}}\right)^2}{\left(1+\frac{e''}{\bar{Z}}\right)^2}\right] = 1 + \frac{2}{\bar{Y}} E(e) + \frac{1}{\bar{Y}^2} E(e^2) - \frac{2}{\bar{Z}} E(e'') - \frac{4}{\bar{Y}\bar{Z}} E(ee'') + \frac{3}{\bar{Z}^2} E(e''^2)$$

pero como  $E(e)=0$  y  $E(e'')=0$ , entonces,

$$E \left[ \frac{\left(1 + \frac{e}{\bar{Y}}\right)^2}{\left(1 + \frac{e''}{\bar{Z}}\right)^2} \right] = 1 + \frac{1}{\bar{Y}^2} E(e^2) - \frac{4}{\bar{Y}\bar{Z}} E(ee'') + \frac{3}{\bar{Z}^2} E(e''^2)$$

$$\text{donde, } E(e^2) = \left(\frac{1-f}{n}\right) (S_y^2 + b_y^2 S_x^2 - 2b_y S_{xy})$$

$$E(e''^2) = \left(\frac{1-f}{n}\right) (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz})$$

$$E(ee'') = \left(\frac{1-f}{n}\right) (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2)$$

entonces,

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\left(1 + \frac{e}{\bar{Y}}\right)^2}{\left(1 + \frac{e''}{\bar{Z}}\right)^2} \right] &= 1 + \frac{1}{\bar{Y}^2} \left(\frac{1-f}{n}\right) (S_y^2 + b_y^2 S_x^2 - 2b_y S_{xy}) - \frac{4}{\bar{Y}\bar{Z}} \left(\frac{1-f}{n}\right) (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) + \\ &\quad + \frac{3}{\bar{Z}^2} \left(\frac{1-f}{n}\right) (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \\ &= 1 + \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}^2} (S_y^2 + b_y^2 S_x^2 - 2b_y S_{xy}) - \frac{4}{\bar{Y}\bar{Z}} (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) + \frac{3}{\bar{Z}^2} (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \right] \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$V(\hat{\bar{Y}}_{rR}) = \bar{Y}^2 \left[ E \left[ \frac{\left(1 + \frac{e}{\bar{Y}}\right)^2}{\left(1 + \frac{e''}{\bar{Z}}\right)^2} \right] - \left[ E \left( \frac{1 + \frac{e}{\bar{Y}}}{1 + \frac{e''}{\bar{Z}}} \right) \right]^2 \right]$$

$$\begin{aligned} V(\hat{\bar{Y}}_{rR}) &= \bar{Y}^2 \left[ 1 + \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}^2} (S_y^2 + b_y^2 S_x^2 - 2b_y S_{xy}) - \frac{4}{\bar{Y}\bar{Z}} (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{\bar{Z}^2} (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \right] - \right. \end{aligned}$$

$$-1+2\left(\frac{1-f}{n}\right)\left[\frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}}(S_{yz}-b_zS_{xy}-b_yS_{xz}+b_yb_zS_x^2)-\frac{1}{\bar{Z}^2}(S_z^2+b_z^2S_x^2-2b_zS_{xz})\right]-$$

$$\left. -\left(\frac{1-f}{n}\right)^2\left[\frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}}(S_{yz}-b_zS_{xy}-b_yS_{xz}+b_yb_zS_x^2)-\frac{1}{\bar{Z}^2}(S_z^2+b_z^2S_x^2-2b_zS_{xz})\right]^2\right]$$

$$V(\hat{\bar{Y}}_{rR}') = \left(\frac{1-f}{n}\right)(S_y^2 + b_y^2 S_x^2 - 2b_y S_{xy}) -$$

$$- \bar{Y}^2 \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ \frac{2}{\bar{Y}\bar{Z}}(S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) + \frac{1}{\bar{Z}^2}(S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \right] -$$

$$- \bar{Y}^2 \left(\frac{1-f}{n}\right)^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}}(S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2}(S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \right]^2$$

y entonces, el error cuadrático medio,

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{rR}') = V(\hat{\bar{Y}}_{rR}') + [B(\hat{\bar{Y}}_{rR}')]^2$$

$$= \left(\frac{1-f}{n}\right)(S_y^2 + b_y^2 S_x^2 - 2b_y S_{xy}) - \bar{Y}^2 \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ \frac{2}{\bar{Y}\bar{Z}}(S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) + \frac{1}{\bar{Z}^2}(S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \right]$$

$$= \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ (S_y^2 + b_y^2 S_x^2 - 2b_y S_{xy}) - 2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)(S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \right]$$

$$= \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ (S_y^2 + b_y^2 S_x^2 - 2b_y S_{xy}) + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) - 2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)(S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) \right]$$

$$= \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ (S_y^2 + b_y^2 S_x^2 - 2b_y S_{xy}) + \left(\frac{R_y}{R_x}\right)^2 (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) - 2\left(\frac{R_y}{R_x}\right)(S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) \right]$$

En resumen se tiene que,

$$\hat{\bar{Y}}_{rR}' = \frac{\hat{\bar{Y}}_r}{\hat{\bar{Z}}_r} \bar{Z} = \frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \bar{Z}$$

$$E(\hat{\bar{Y}}_{rR}') = \bar{Y} - \bar{Y} \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}}(S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2}(S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \right]$$

$$B(\hat{\bar{Y}}_{rR}') = \bar{Y} \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}}(S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2}(S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \right]$$

$$V(\hat{Y}_{rR}) = \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ (S_y^2 + b_y^2 S_x^2 - 2b_y S_{xy}) - 2\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) + \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Z}^2} (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \right] - \bar{Y}^2 \left(\frac{1-f}{n}\right)^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \right]^2$$

$$ECM(\hat{Y}_{rR}) = \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ (S_y^2 + b_y^2 S_x^2 - 2b_y S_{xy}) + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) - 2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) \right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{rR}) = \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ (s_y^2 + \hat{b}_y^2 s_x^2 - 2\hat{b}_y s_{xy}) + \left(\frac{\bar{y}}{\bar{z}}\right)^2 (s_z^2 + \hat{b}_z^2 s_x^2 - 2\hat{b}_z s_{xz}) - 2\left(\frac{\bar{y}}{\bar{z}}\right) (s_{yz} - \hat{b}_z s_{xy} - \hat{b}_y s_{xz} + \hat{b}_y \hat{b}_z s_x^2) \right]$$

y para el total,

$$\hat{Y}_{rR} = \frac{\hat{Y}_r}{\hat{Z}_r} Z = \frac{\hat{Y} + b_y (X - \hat{X})}{\hat{Z} + b_z (X - \hat{X})} Z$$

$$E(\hat{Y}_{rR}) = Y - Y \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \right]$$

$$B(\hat{Y}_{rR}) = Y \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \right]$$

$$V(\hat{Y}_{rR}) = N^2 \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ (S_y^2 + b_y^2 S_x^2 - 2b_y S_{xy}) - 2\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) + \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Z}^2} (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \right] - Y^2 \left(\frac{1-f}{n}\right)^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \right]^2$$

$$ECM(\hat{Y}_{rR}) = N^2 \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ (S_y^2 + b_y^2 S_x^2 - 2b_y S_{xy}) + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) - 2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) \right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{rR}) = N^2 \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ (s_y^2 + \hat{b}_y^2 s_x^2 - 2\hat{b}_y s_{xy}) + \left(\frac{\bar{y}}{\bar{z}}\right)^2 (s_z^2 + \hat{b}_z^2 s_x^2 - 2\hat{b}_z s_{xz}) - 2\left(\frac{\bar{y}}{\bar{z}}\right) (s_{yz} - \hat{b}_z s_{xy} - \hat{b}_y s_{xz} + \hat{b}_y \hat{b}_z s_x^2) \right]$$

Nótese que al multiplicar  $\left(\frac{1-f}{n}\right)$  por el primer término dentro del corchete en  $ECM(\hat{Y}_{rR})$ ,

resulta  $ECM(\hat{Y}_{lr})$ , y para el segundo resulta  $\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\right)^2 ECM(\hat{Z}_{lr})$ . Para el tercer término, véase el

siguiente desarrollo,

$$\begin{aligned} COV(\hat{Y}_{lr}, \hat{Z}_{lr}) &= E\left[\left(\hat{Y}_{lr} - E(\hat{Y}_{lr})\right)\left(\hat{Z}_{lr} - E(\hat{Z}_{lr})\right)\right] = E\left[\hat{Y}_{lr}\hat{Z}_{lr} - \hat{Z}_{lr}E(\hat{Y}_{lr}) - \hat{Y}_{lr}E(\hat{Z}_{lr}) + E(\hat{Y}_{lr})E(\hat{Z}_{lr})\right] \\ &= E\left(\hat{Y}_{lr}\hat{Z}_{lr}\right) - E(\hat{Y}_{lr})E(\hat{Z}_{lr}) = E\left(\hat{Y}_{lr}\hat{Z}_{lr}\right) - \bar{Y}\bar{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donde, } E\left(\hat{Y}_{lr}\hat{Z}_{lr}\right) &= E\left[(\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x}))(\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x}))\right] = E\left[\bar{y}\bar{z} + b_z\bar{y}(\bar{X} - \bar{x}) + b_y\bar{z}(\bar{X} - \bar{x}) + b_yb_z(\bar{X} - \bar{x})^2\right] \\ &= E\left[\bar{y}\bar{z} + b_z\bar{y}\bar{X} - b_z\bar{y}\bar{x} + b_y\bar{z}\bar{X} - b_y\bar{z}\bar{x} + b_yb_z(\bar{X} - \bar{x})^2\right] \\ &= E(\bar{y}\bar{z}) + b_z\bar{X}E(\bar{y}) - b_zE(\bar{y}\bar{x}) + b_y\bar{X}E(\bar{z}) - b_yE(\bar{z}\bar{x}) + b_yb_zE\left[(\bar{X} - \bar{x})^2\right] \\ &= E(\bar{y}\bar{z}) + b_z\bar{X}E(\bar{y}) - b_zE(\bar{y}\bar{x}) + b_y\bar{X}E(\bar{z}) - b_yE(\bar{z}\bar{x}) + b_yb_z\left(\frac{1-f}{n}\right)S_x^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ya que } E\left[(\bar{X} - \bar{x})^2\right] &= E\left[(\bar{x} - \bar{X})^2\right] = \left(\frac{1-f}{n}\right)S_x^2 \\ &= E(\bar{y}\bar{z}) + b_z\bar{X}\bar{Y} - b_zE(\bar{y}\bar{x}) + b_y\bar{X}\bar{Z} - b_yE(\bar{z}\bar{x}) + b_yb_z\left(\frac{1-f}{n}\right)S_x^2 \\ &= E(\bar{y}\bar{z}) - b_z\left[E(\bar{y}\bar{x}) - \bar{X}\bar{Y}\right] - b_y\left[E(\bar{z}\bar{x}) - \bar{X}\bar{Z}\right] + b_yb_z\left(\frac{1-f}{n}\right)S_x^2 \\ &= E(\bar{y}\bar{z}) - b_z\left(\frac{1-f}{n}\right)S_{xy} - b_y\left(\frac{1-f}{n}\right)S_{xz} + b_yb_z\left(\frac{1-f}{n}\right)S_x^2 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} COV(\hat{Y}_{lr}, \hat{Z}_{lr}) &= E(\bar{y}\bar{z}) - b_z\left(\frac{1-f}{n}\right)S_{xy} - b_y\left(\frac{1-f}{n}\right)S_{xz} + b_yb_z\left(\frac{1-f}{n}\right)S_x^2 - \bar{Y}\bar{Z} \\ &= \left(\frac{1-f}{n}\right)\left[S_{yz} - b_zS_{xy} - b_yS_{xz} + b_yb_zS_x^2\right] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{Por lo tanto, } ECM\left(\hat{Y}'_{rR}\right) &= ECM\left(\hat{Y}_{rl}\right) + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 ECM\left(\hat{Z}_{rl}\right) - 2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) COV\left(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl}\right) \\ E\hat{C}M\left(\hat{Y}'_{rR}\right) &= E\hat{C}M\left(\hat{Y}_{rl}\right) + \left(\frac{\bar{y}}{\bar{z}}\right)^2 E\hat{C}M\left(\hat{Z}_{rl}\right) - 2\left(\frac{\bar{y}}{\bar{z}}\right) C\hat{O}V\left(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl}\right) \\ ECM\left(\hat{Y}'_{rR}\right) &= ECM\left(\hat{Y}_{rl}\right) + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 ECM\left(\hat{Z}_{rl}\right) - 2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) COV\left(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl}\right) \\ E\hat{C}M\left(\hat{Y}'_{rR}\right) &= E\hat{C}M\left(\hat{Y}_{rl}\right) + \left(\frac{\bar{y}}{\bar{z}}\right)^2 E\hat{C}M\left(\hat{Z}_{rl}\right) - 2\left(\frac{\bar{y}}{\bar{z}}\right) C\hat{O}V\left(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl}\right) \end{aligned}$$

### **Casos Especiales**

#### **Estimador de Razón**

Si  $b_y=b_z=0$  entonces  $\hat{Y}_{rR} = \frac{\hat{Y}_{rl}}{\hat{Z}_{rl}} \bar{Z} = \frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \bar{Z} = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} \bar{Z}$  que es el estimador  $\hat{Y}_R$ , que

es el mismo resultado que se llegó 3.2.3.1, cuando se hizo  $b=0$  en el estimador  $\hat{Y}_{rR}$ .

#### **Estimador por Diferencia**

Si  $b_y=b_z=1$  entonces  $\hat{Y}_{rR} = \frac{\hat{Y}_{rl}}{\hat{Z}_{rl}} \bar{Z} = \frac{\bar{y} + (\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + (\bar{X} - \bar{x})} \bar{Z}$  que es el mismo resultado que se

llegó 3.2.3.2, cuando se hizo  $b=1$  en el estimador  $\hat{Y}_{rR}$ .

#### **Estimador de Varianza Mínima para b Constante**

Para aplicar en este caso el mismo procedimiento de casos anteriores, se debe hallar las derivadas parciales de primer orden de  $ECM\left(\hat{Y}_{rR}\right)$ , igualarlas a cero y obtener los valores de  $b_y$  y  $b_z$  respectivos. Luego hallar la matriz hessiana, de derivadas de segundo orden y hallar el determinante. Pero este procedimiento no concluye nada, debido a que el determinante es negativo. Por tal motivo el enfoque será diferente, se tiene que,

$$ECM\left(\hat{Y}_{rR}\right) = ECM\left(\hat{Y}_{rl}\right) + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 ECM\left(\hat{Z}_{rl}\right) - 2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) COV\left(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl}\right)$$

y para que  $ECM\left(\hat{Y}_{rR}\right)$  sea mínimo, debe ocurrir lo siguiente,

- i.- que  $ECM\left(\hat{Y}_{rl}\right)$  sea mínimo
- ii.- que  $ECM\left(\hat{Z}_{rl}\right)$  sea mínimo
- iii.- si  $\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) > 0$ , entonces que  $COV\left(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl}\right) > 0$  y máxima
- si  $\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) < 0$ , entonces que  $COV\left(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl}\right) < 0$  y mínima

Como  $ECM\left(\hat{Y}_{rl}\right)$  se minimiza cuando  $b_y = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$ , y  $ECM\left(\hat{Z}_{rl}\right)$  se minimiza cuando  $b_z = \frac{S_{xz}}{S_x^2}$ .

Ahora se derivará  $COV\left(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl}\right)$  parcialmente respecto de  $b_y$  y  $b_z$ , y se igualará a cero. De (24) se tiene

$$COV\left(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl}\right) = E(\bar{y}\bar{z}) - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2 - \bar{Y}\bar{Z} = S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2$$

Entonces,

$$\frac{\partial COV\left(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl}\right)}{\partial b_y} = -S_{xz} + b_z S_x^2 = 0 \Rightarrow b_z = \frac{S_{xz}}{S_x^2}$$

$$\frac{\partial COV\left(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl}\right)}{\partial b_z} = -S_{xy} + b_y S_x^2 = 0 \Rightarrow b_y = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$$

Que son los mismos valores que minimizan  $ECM\left(\hat{Y}_{rl}\right)$  y  $ECM\left(\hat{Z}_{rl}\right)$  respectivamente. Para determinar si es máximo o mínimo, se hallará la matriz hessiana, que consiste de las segundas derivadas parciales, esto es,

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \quad \text{y en este caso,}$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \text{COV}(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl})}{\partial b_y^2} & \frac{\partial^2 \text{COV}(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl})}{\partial b_y \partial b_z} \\ \frac{\partial^2 \text{COV}(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl})}{\partial b_z \partial b_y} & \frac{\partial^2 \text{COV}(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl})}{\partial b_z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S_x^2 \\ S_x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Que es una matriz definida negativa, ya que su determinante es negativo;  $|H| = -(S_x^2)^2$ . Entonces, hay un máximo.

Luego, cuando  $b_y = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$  y  $b_z = \frac{S_{xz}}{S_x^2}$ ,  $\text{COV}(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl})$  es máxima,  $ECM(\hat{Y}_{rl})$  y  $ECM(\hat{Z}_{rl})$  son mínimos, en consecuencia, si  $\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) > 0$  y  $\text{COV}(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl}) > 0$ , entonces  $ECM(\hat{Y}_{rR})$  es mínimo.

Para que  $\text{COV}(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl}) > 0$

$$\text{COV}(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl}) = S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2 = S_{yz} - \frac{S_{xz} S_{xy}}{S_x^2} - \frac{S_{xy} S_{xz}}{S_x^2} + \frac{S_{xy} S_{xz}}{S_x^2} = S_{yz} - \frac{S_{xz} S_{xy}}{S_x^2} > 0$$

entonces  $S_{yz} > \frac{S_{xz} S_{xy}}{S_x^2}$  que es equivalente a que,  $\rho_{yz} > \rho_{xz} \rho_{xy}$ .

Es decir, que cuando  $b_y = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$  y  $b_z = \frac{S_{xz}}{S_x^2}$ , y además,  $\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) > 0$  y  $\text{COV}(\hat{Y}_{rl}, \hat{Z}_{rl}) > 0$  que,

(o  $\rho_{yz} > \rho_{xz} \rho_{xy}$ ), entonces  $ECM(\hat{Y}_{rR})$  es mínimo.

### *Comparación con el Estimador de 1 Coeficiente*

Para comparar  $\hat{Y}_{rR}$  y  $\hat{Y}_{rR}'$ , se hará sobre los casos especiales, y específicamente sobre el de varianza mínima para  $b$  constante, ya que en el caso del estimador de razón y por diferencia es obvio que son iguales, debido a que en el primer caso  $b=0$  por una parte, y por la otra  $b_y=0$  y  $b_z=0$ , es decir que  $b=b_y=b_z=0$ . Para el estimador por diferencia ocurre algo similar, ya que  $b=b_y=b_z=1$ .

Para hacer la comparación de los estimadores de varianza mínima para  $b$  constante, se comenzará por la estructura de los estimadores, esto es,

$$\hat{Y}_{rR} = \frac{\hat{Y}_{rl}}{\hat{Z}_{rl}} \bar{Z} = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} \bar{Z}$$

como,

$$\begin{aligned} b = b_0 &= \frac{S_{xy} - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) S_{xz}}{\left[1 - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)\right] S_x^2} = \frac{S_{xy} - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) S_{xz}}{\left(\frac{\bar{Z} - \bar{Y}}{\bar{Z}}\right) S_x^2} = \frac{S_{xy}}{\left(\frac{\bar{Z} - \bar{Y}}{\bar{Z}}\right) S_x^2} - \frac{\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) S_{xz}}{\left(\frac{\bar{Z} - \bar{Y}}{\bar{Z}}\right) S_x^2} \\ &= \left(\frac{\bar{Z}}{\bar{Z} - \bar{Y}}\right) \left(\frac{S_{xy}}{S_x^2}\right) - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z} - \bar{Y}}\right) \left(\frac{S_{xz}}{S_x^2}\right) = \left(\frac{\bar{Z}}{\bar{Z} - \bar{Y}}\right) b_y - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z} - \bar{Y}}\right) b_z \end{aligned}$$

donde  $b_y = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$  y  $b_z = \frac{S_{xz}}{S_x^2}$  que son los hallados en 3.3.3.3.

Sustituyendo  $b_0$ ,

$$\hat{Y}_{rR} = \frac{\hat{Y}_{rI}}{\hat{Z}_{rI}} \bar{Z} = \frac{\bar{y} + \left( \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) b_y - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) b_z \right) (\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + \left( \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) b_y - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) b_z \right) (\bar{X} - \bar{x})} \bar{Z} = \frac{\bar{y} + \left( \frac{b_y \bar{Z} - b_z \bar{Y}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) (\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + \left( \frac{b_y \bar{Z} - b_z \bar{Y}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) (\bar{X} - \bar{x})} \bar{Z} \neq \frac{\bar{y} + b_y (\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z (\bar{X} - \bar{x})} \bar{Z} = \hat{Y}'_{rR}$$

se observa que los estimadores son diferentes, es decir,  $\hat{Y}_{rR} \neq \hat{Y}'_{rR}$ . Se analizarán sus esperanzas y *ECM*.

$$E(\hat{Y}_{rR}) = \bar{Y} - \frac{1}{\bar{Z}} \left( \frac{1-f}{n} \right) [S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2] + \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}^2} \left( \frac{1-f}{n} \right) [S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}]$$

$$\text{como } b = \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) b_y - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) b_z$$

$$b^2 = b_0^2 = \left[ \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) b_y - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) b_z \right]^2 = \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right)^2 b_y^2 + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right)^2 b_z^2 - 2 \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) b_y b_z$$

sustituyendo  $b$  y  $b^2$  se tiene que,

$$\begin{aligned} E(\hat{Y}_{rR}) &= \bar{Y} - \frac{1}{\bar{Z}} \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ S_{yz} - \left( \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) b_y - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) b_z \right) S_{xy} - \left( \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) b_y - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) b_z \right) S_{xz} \right. \\ &\quad \left. + \left( \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right)^2 b_y^2 + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right)^2 b_z^2 - 2 \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) b_y b_z \right) S_x^2 \right] \\ &\quad + \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}^2} \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ S_z^2 + \left( \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right)^2 b_y^2 + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right)^2 b_z^2 - 2 \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) b_y b_z \right) S_x^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \left( \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) b_y - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z} - \bar{Y}} \right) b_z \right) S_{xz} \right] \\ &\neq \bar{Y} - \bar{Y} \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) \right] = E(\hat{Y}'_{rR}) \end{aligned}$$

es decir,  $E(\hat{Y}_{rR}) \neq E(\hat{Y}'_{rR})$ .

Para el Error Cuadrático Medio se tiene que,

$$ECM(\hat{Y}_{rR}) = \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ (S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}) + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) (S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2) \right]$$

$$\text{sea } b^2 = b_0^2 = \left[ \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) b_y - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) b_z \right]^2 = \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right)^2 b_y^2 + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right)^2 b_z^2 - 2 \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) b_y b_z$$

entonces, sustituyendo  $b$  y  $b^2$

$$\begin{aligned} ECM(\hat{Y}_{rR}) = & \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ \left( S_y^2 + \left( \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right)^2 b_y^2 + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right)^2 b_z^2 - 2 \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) b_y b_z \right) S_x^2 - 2 \left( \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) b_y - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) b_z \right) S_{xy} \right) \right. \\ & + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 \left( S_z^2 + \left( \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right)^2 b_y^2 + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right)^2 b_z^2 - 2 \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) b_y b_z \right) S_x^2 - 2 \left( \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) b_y - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) b_z \right) S_{xz} \right) \\ & - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) \left( S_{yz} - \left( \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) b_y - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) b_z \right) S_{xy} - \left( \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) b_y - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) b_z \right) S_{xz} \right. \\ & \left. \left. + \left( \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right)^2 b_y^2 + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right)^2 b_z^2 - 2 \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) b_y b_z \right) S_x^2 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ECM(\hat{Y}_{rR}) = & \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ S_y^2 + \left( \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right)^2 + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right)^2 - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right)^2 \right) b_y^2 S_x^2 - 2 \left( \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) \right) b_y S_{xy} \right. \\ & + \left( \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 S_z^2 + \left( \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right)^2 + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right)^2 - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right)^2 \right) b_z^2 S_x^2 + 2 \left( \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) - \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) \right) b_z S_{xz} \right) \\ & - 2 \left( \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) S_{yz} - \left( \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) \right) b_z S_{xy} - \left( \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) \right) b_y S_{xz} \right. \\ & \left. + \left( \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) \left( \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}-\bar{Y}} \right) \right) b_y b_z S_x^2 \right) \right] \end{aligned}$$

$$ECM(\hat{Y}_{rR}) = \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ (S_y^2 + b_y^2 S_x^2 - 2b_y S_{xy}) + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) \right]$$

$$= ECM(\hat{Y}_{rR}')$$

Es decir, que aunque los estimadores  $\hat{Y}_{rR}$ ,  $\hat{Y}_{rR}'$  son diferentes y tienen diferentes esperanzas, sus Errores Cuadráticos Medios coinciden.

**Estimadores del Tipo Regresión-Razón con 2 Coeficientes en el Muestreo Estratificado**

**Estimadores de Regresión-Razón con 2 Coeficientes Separados**

En el caso de  $\hat{Y}_{rRss}'$  se tiene que,

$$\hat{Y}_{rRss}' = \sum_{h=1}^L \frac{\bar{y}_h + b_{yh} (\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{zh} (\bar{X}_h - \bar{x}_h)} Z_h$$

$$\hat{Y}_{rRss}' = \sum_{h=1}^L W_h \left( \frac{\bar{y}_h + b_{yh} (\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{zh} (\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \bar{Z}_h \right)$$

y sus respectivas esperanzas y sesgos son,

$$E(\hat{Y}_{rRss}') = \sum_{h=1}^L \left[ Y_h - \frac{N_h}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2] + \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} N_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}] \right]$$

$$B(\hat{Y}_{rRss}') = \sum_{h=1}^L \left[ \frac{N_h}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2] - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) N_h [S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}] \right]$$

$$E(\hat{Y}_{rRss}) = \sum_{h=1}^L W_h \left[ \bar{Y}_h - \frac{1}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2] + \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}] \right]$$

$$B(\hat{Y}_{rRss}) = \sum_{h=1}^L W_h \left[ \frac{1}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2] - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}] \right]$$

Para la varianza se tiene que,

$$\begin{aligned}
V(\hat{Y}'_{rRss}) &= \sum_{h=1}^L V(\hat{Y}'_{rRh}) + 2 \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=h+1}^L \text{COV}(\hat{Y}'_{rRh}, \hat{Y}'_{rRk}) = \sum_{h=1}^L V(\hat{Y}'_{rRh}) + \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^L \text{COV}(\hat{Y}'_{rRh}, \hat{Y}'_{rRk}) \\
&= \sum_{h=1}^L \left[ N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + b_{y_h}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{y_h} S_{xy_h} \right) - 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_{z_h} S_{xy_h} - b_{y_h} S_{xz_h} + b_{y_h} b_{z_h} S_{x_h}^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right)^2 \left( S_{z_h}^2 + b_{z_h}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{z_h} S_{xz_h} \right) \right] - \\
&\quad - N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left( \frac{1}{\bar{Z}_h} \left( S_{yz_h} - b_{z_h} S_{xy_h} - b_{y_h} S_{xz_h} + b_{y_h} b_{z_h} S_{x_h}^2 \right) - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} \left( S_{z_h}^2 + b_{z_h}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{z_h} S_{xz_h} \right) \right)^2 \Bigg] + \\
&\quad + \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^L \text{COV}(\hat{Y}'_{rRh}, \hat{Y}'_{rRk})
\end{aligned}$$

por lo tanto, se procederá a desarrollar la  $\text{COV}(\hat{Y}'_{rRh}, \hat{Y}'_{rRk})$ .

$$\begin{aligned}
\text{COV}(\hat{Y}'_{rRh}, \hat{Y}'_{rRk}) &= \text{COV} \left[ Z_h \frac{\hat{Y}_{rRh}}{\hat{Z}_{rRh}}, Z_k \frac{\hat{Y}_{rRk}}{\hat{Z}_{rRk}} \right] = E \left[ Z_h \left( \frac{\hat{Y}_{rRh}}{\hat{Z}_{rRh}} - E \left( \frac{\hat{Y}_{rRh}}{\hat{Z}_{rRh}} \right) \right) Z_k \left( \frac{\hat{Y}_{rRk}}{\hat{Z}_{rRk}} - E \left( \frac{\hat{Y}_{rRk}}{\hat{Z}_{rRk}} \right) \right) \right] \\
&= Z_h Z_k E \left[ \left( \frac{\hat{Y}_{rRh}}{\hat{Z}_{rRh}} \right) \left( \frac{\hat{Y}_{rRk}}{\hat{Z}_{rRk}} \right) - \left( \frac{\hat{Y}_{rRh}}{\hat{Z}_{rRh}} \right) E \left( \frac{\hat{Y}_{rRk}}{\hat{Z}_{rRk}} \right) - E \left( \frac{\hat{Y}_{rRh}}{\hat{Z}_{rRh}} \right) \left( \frac{\hat{Y}_{rRk}}{\hat{Z}_{rRk}} \right) + E \left( \frac{\hat{Y}_{rRh}}{\hat{Z}_{rRh}} \right) E \left( \frac{\hat{Y}_{rRk}}{\hat{Z}_{rRk}} \right) \right] \\
&= Z_h Z_k \left[ E \left[ \left( \frac{\hat{Y}_{rRh}}{\hat{Z}_{rRh}} \right) \left( \frac{\hat{Y}_{rRk}}{\hat{Z}_{rRk}} \right) \right] - E \left( \frac{\hat{Y}_{rRh}}{\hat{Z}_{rRh}} \right) E \left( \frac{\hat{Y}_{rRk}}{\hat{Z}_{rRk}} \right) - E \left( \frac{\hat{Y}_{rRh}}{\hat{Z}_{rRh}} \right) E \left( \frac{\hat{Y}_{rRk}}{\hat{Z}_{rRk}} \right) + E \left( \frac{\hat{Y}_{rRh}}{\hat{Z}_{rRh}} \right) E \left( \frac{\hat{Y}_{rRk}}{\hat{Z}_{rRk}} \right) \right] \\
&= Z_h Z_k \left[ E \left[ \left( \frac{\hat{Y}_{rRh}}{\hat{Z}_{rRh}} \right) \left( \frac{\hat{Y}_{rRk}}{\hat{Z}_{rRk}} \right) \right] - E \left( \frac{\hat{Y}_{rRh}}{\hat{Z}_{rRh}} \right) E \left( \frac{\hat{Y}_{rRk}}{\hat{Z}_{rRk}} \right) \right]
\end{aligned}$$

Se desarrollará el primer término.

$$E \left[ \left( \frac{\hat{Y}_{r_h}}{\hat{Z}_{r_h}} \right) \left( \frac{\hat{Y}_{r_k}}{\hat{Z}_{r_k}} \right) \right] = E \left[ \left( \frac{\hat{Y}_{r_h}}{\hat{Z}_{r_h}} \right) \left( \frac{\hat{Y}_{r_k}}{\hat{Z}_{r_k}} \right) \right] = E \left[ \frac{\bar{Y}_h \left( 1 + \frac{e_h}{\bar{Y}_h} \right)}{\bar{Z}_h \left( 1 + \frac{e''_h}{\bar{Z}_h} \right)} \frac{\bar{Y}_k \left( 1 + \frac{e_k}{\bar{Y}_k} \right)}{\bar{Z}_k \left( 1 + \frac{e''_k}{\bar{Z}_k} \right)} \right] = \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} E \left[ \left( 1 + \frac{e_h}{\bar{Y}_h} \right) \left( 1 + \frac{e_k}{\bar{Y}_k} \right) \right] \left[ \left( 1 + \frac{e''_h}{\bar{Z}_h} \right) \left( 1 + \frac{e''_k}{\bar{Z}_k} \right) \right]$$

desarrollando las Series de Taylor se tiene que,

$$E \left[ \left( \frac{\hat{Y}_{r_h}}{\hat{Z}_{r_h}} \right) \left( \frac{\hat{Y}_{r_k}}{\hat{Z}_{r_k}} \right) \right] = \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} E \left[ \left( 1 + \frac{e_h}{\bar{Y}_h} \right) \left( 1 + \frac{e_k}{\bar{Y}_k} \right) \left( \sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t \frac{(e''_h)^t}{\bar{Z}_h^t} \right) \left( \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u \frac{(e''_k)^u}{\bar{Z}_k^u} \right) \right]$$

$$= \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} E \left[ 1 + \frac{e_h}{\bar{Y}_h} + \frac{e_k}{\bar{Y}_k} + \frac{e_h e_k}{\bar{Y}_h \bar{Y}_k} - \frac{e''_h}{\bar{Z}_h} - \frac{e_h e''_h}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h} - \frac{e_k e''_k}{\bar{Y}_k \bar{Z}_k} - \frac{e_h e_k e''_h}{\bar{Y}_h \bar{Y}_k \bar{Z}_h} + \frac{e''_h{}^2}{\bar{Z}_h^2} + \frac{e_h e''_h{}^2}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h^2} + \frac{e_k e''_k{}^2}{\bar{Y}_k \bar{Z}_k^2} + \frac{e_h e_k e''_h{}^2}{\bar{Y}_h \bar{Y}_k \bar{Z}_h^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{e''_k}{\bar{Z}_k} - \frac{e_h e''_k}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k} - \frac{e_k e''_k}{\bar{Y}_k \bar{Z}_k} - \frac{e_h e_k e''_k}{\bar{Y}_h \bar{Y}_k \bar{Z}_k} + \frac{e''_k{}^2}{\bar{Z}_k^2} + \frac{e_h e''_k{}^2}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k^2} + \frac{e_k e''_k{}^2}{\bar{Y}_k \bar{Z}_k^2} + \frac{e_h e_k e''_k{}^2}{\bar{Y}_h \bar{Y}_k \bar{Z}_k^2} + \dots \right]$$

y truncando en las potencias de 2do grado,

$$E \left[ \left( \frac{\hat{Y}_{r_h}}{\hat{Z}_{r_h}} \right) \left( \frac{\hat{Y}_{r_k}}{\hat{Z}_{r_k}} \right) \right] = \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} E \left[ 1 + \frac{e_h}{\bar{Y}_h} + \frac{e_k}{\bar{Y}_k} + \frac{e_h e_k}{\bar{Y}_h \bar{Y}_k} - \frac{e''_h}{\bar{Z}_h} - \frac{e_h e''_h}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h} - \frac{e_k e''_k}{\bar{Y}_k \bar{Z}_k} + \frac{e''_h{}^2}{\bar{Z}_h^2} - \frac{e''_k}{\bar{Z}_k} - \frac{e_h e''_k}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k} - \frac{e_k e''_k}{\bar{Y}_k \bar{Z}_k} + \frac{e''_k{}^2}{\bar{Z}_k^2} + \frac{e''_h e''_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \right]$$

pero como,  $E(e_h) = 0$ ,  $E(e''_h) = 0$ ,

$$E(e_h^2) = \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yh}^2 + b_{yh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{yh} S_{xyh}), \quad E(e''_h{}^2) = \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}),$$

$$E(e_h e''_h) = \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yzh} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} S_{yh}^2 + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) \quad , \quad \forall h, h = 1, \dots, L$$

entonces,

$$E \left[ \left( \frac{\hat{Y}_{r_h}}{\hat{Z}_{r_h}} \right) \left( \frac{\hat{Y}_{r_k}}{\hat{Z}_{r_k}} \right) \right] = \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \left[ 1 - \frac{1}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yzh} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\bar{Z}_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}) - \\
 & - \frac{1}{\bar{Y}_k \bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{yzk} - b_{zk} S_{xyk} - b_{yk} S_{xzk} + b_{yk} b_{zk} S_{xk}^2) + \frac{1}{\bar{Z}_k^2} \left( \frac{1-f_k}{n_{hk}} \right) (S_{zk}^2 + b_{zk}^2 S_{xk}^2 - 2b_{zk} S_{xzk}) \\
 & + \left. \frac{1}{\bar{Y}_h \bar{Y}_k} E(e_h e_k) - \frac{1}{\bar{Y}_k \bar{Z}_h} E(e_k e''_h) + \frac{1}{\bar{Y}_h \bar{Z}_k} E(e_h e''_k) + \frac{1}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} E(e''_h e''_k) \right]
 \end{aligned}$$

pero  $E(e_h e_k) = \sum_{r=1}^{\binom{N_h}{n_h}} \sum_{t=1}^{\binom{N_k}{n_k}} e_{hr} e_{kt} = \sum_{r=1}^{\binom{N_h}{n_h}} e_{hr} \sum_{t=1}^{\binom{N_k}{n_k}} e_{kt} = (0)(0) = 0$  e igualmente,

$$E(e_h e_k) = E(e_h e''_k) = E(e''_h e''_k) = 0$$

de manera que,

$$\begin{aligned}
 E \left[ \left( \frac{\hat{Y}_{rlh}}{\hat{Z}_{rlh}} \right) \left( \frac{\hat{Y}_{rlk}}{\hat{Z}_{rlk}} \right) \right] & = \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \left[ 1 - \frac{1}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yzh} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) + \frac{1}{\bar{Z}_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\bar{Y}_k \bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{yzk} - b_{zk} S_{xyk} - b_{yk} S_{xzk} + b_{yk} b_{zk} S_{xk}^2) + \frac{1}{\bar{Z}_k^2} \left( \frac{1-f_k}{n_{hk}} \right) (S_{zk}^2 + b_{zk}^2 S_{xk}^2 - 2b_{zk} S_{xzk}) \right]
 \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
 E \left( \frac{\hat{Y}_{rlh}}{\hat{Z}_{rlh}} \right) E \left( \frac{\hat{Y}_{rlk}}{\hat{Z}_{rlk}} \right) & = E \left( \frac{\hat{Y}_{rlh}}{\hat{Z}_{rlh}} \right) E \left( \frac{\hat{Y}_{rlk}}{\hat{Z}_{rlk}} \right) \\
 & = \frac{1}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \left[ \bar{Y}_h - \frac{1}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yzh} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) + \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}) \right] \\
 & \left[ \bar{Y}_k - \frac{1}{\bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{yzk} - b_{zk} S_{xyk} - b_{yk} S_{xzk} + b_{yk} b_{zk} S_{xk}^2) + \frac{\bar{Y}_k}{\bar{Z}_k^2} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{zk}^2 + b_{zk}^2 S_{xk}^2 - 2b_{zk} S_{xzk}) \right] \\
 & = \frac{1}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \left[ \bar{Y}_h \bar{Y}_k - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{yzk} - b_{zk} S_{xyk} - b_{yk} S_{xzk} + b_{yk} b_{zk} S_{xk}^2) + \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_k^2} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{zk}^2 + b_{zk}^2 S_{xk}^2 - 2b_{zk} S_{xzk}) - \right. \\
 & \left. - \frac{\bar{Y}_k}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yzh} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{yzk} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) (S_{yzk} - b_{zk} S_{xyk} - b_{yk} S_{xzk} + b_{yk} b_{zk} S_{xk}^2) - \\
& - \frac{\bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{yzk} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) (S_{zk}^2 + b_{zk}^2 S_{xk}^2 - 2b_{zk} S_{xzk}) + \\
& + \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}) - \\
& - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}) (S_{yzk} - b_{zk} S_{xyk} - b_{yk} S_{xzk} + b_{yk} b_{zk} S_{xk}^2) + \\
& + \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h^2 \bar{Z}_k^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}) (S_{zk}^2 + b_{zk}^2 S_{xk}^2 - 2b_{zk} S_{xzk}) \Big]
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
COV(\hat{Y}'_{rRh}, \hat{Y}'_{rRk}) & = Z_h Z_k \left[ \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \left[ 1 - \frac{1}{\bar{Y}_h \bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yzh} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) + \frac{1}{\bar{Z}_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}) \right) \right. \right. \\
& - \left. \frac{1}{\bar{Y}_k \bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{yzk} - b_{zk} S_{xyk} - b_{yk} S_{xzk} + b_{yk} b_{zk} S_{xk}^2) + \frac{1}{\bar{Z}_k^2} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{zk}^2 + b_{zk}^2 S_{xk}^2 - 2b_{zk} S_{xzk}) \right] - \\
& - \frac{1}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \left[ \bar{Y}_h \bar{Y}_k - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{yzk} - b_{zk} S_{xyk} - b_{yk} S_{xzk} + b_{yk} b_{zk} S_{xk}^2) + \right. \\
& + \left. \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_k^2} \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{zk}^2 + b_{zk}^2 S_{xk}^2 - 2b_{zk} S_{xzk}) \right] - \\
& - \frac{\bar{Y}_k}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yzh} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) + \\
& + \frac{1}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{yzk} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) (S_{yzk} - b_{zk} S_{xyk} - b_{yk} S_{xzk} + b_{yk} b_{zk} S_{xk}^2) - \\
& - \frac{\bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{yzk} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) (S_{zk}^2 + b_{zk}^2 S_{xk}^2 - 2b_{zk} S_{xzk}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}) - \\
& - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2 \bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}) (S_{yzk} - b_{zk} S_{xyk} - b_{yk} S_{xzk} + b_{yk} b_{zk} S_{xk}^2) + \\
& + \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h^2 \bar{Z}_k^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}) (S_{zk}^2 + b_{zk}^2 S_{xk}^2 - 2b_{zk} S_{xzk}) \Big] \\
& = N_h N_k \left[ - \frac{1}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{yzk} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) (S_{yzk} - b_{zk} S_{xyk} - b_{yk} S_{xzk} + b_{yk} b_{zk} S_{xk}^2) + \right. \\
& + \frac{\bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{yzk} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) (S_{zk}^2 + b_{zk}^2 S_{xk}^2 - 2b_{zk} S_{xzk}) + \\
& + \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2 \bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}) (S_{yzk} - b_{zk} S_{xyk} - b_{yk} S_{xzk} + b_{yk} b_{zk} S_{xk}^2) - \\
& \left. - \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h^2 \bar{Z}_k^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}) (S_{zk}^2 + b_{zk}^2 S_{xk}^2 - 2b_{zk} S_{xzk}) \right]
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left[ B(\hat{Y}_{rRss}) \right]^b & = \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left[ \frac{1}{\bar{Z}_h} (S_{yzh} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}) \right]^2 + \\
& + \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^L N_h N_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left[ \frac{1}{\bar{Z}_h} (S_{yzh} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}) \right] \\
& \left[ \frac{1}{\bar{Z}_k} (S_{yzh} - b_{zk} S_{xyk} - b_{yk} S_{xzk} + b_{yk} b_{zk} S_{xk}^2) - \frac{\bar{Y}_k}{\bar{Z}_k^2} (S_{zk}^2 + b_{zk}^2 S_{xk}^2 - 2b_{zk} S_{xzk}) \right] \\
& = \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left[ \frac{1}{\bar{Z}_h} (S_{yzh} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}) \right]^2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=1}^L N_h N_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{1}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \right) (S_{yzh} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) (S_{yzk} - b_{zk} S_{xyk} - b_{yk} S_{xzk} + b_{yk} b_{zk} S_{xk}^2) - \\
& - \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=1}^L N_h N_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{\bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \right) (S_{yzh} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) (S_{zk}^2 + b_{zk}^2 S_{xk}^2 - 2b_{zk} S_{xzk}) - \\
& - \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=1}^L N_h N_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \right) (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}) (S_{yzk} - b_{zk} S_{xyk} - b_{yk} S_{xzk} + b_{yk} b_{zk} S_{xk}^2) + \\
& + \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=1}^L N_h N_k \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( \frac{1}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \right) (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}) (S_{zk}^2 + b_{zk}^2 S_{xk}^2 - 2b_{zk} S_{xzk})
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
ECM(\hat{Y}_{rRss}) & = V(\hat{Y}_{rRss}) + [B(\hat{Y}_{rRss})]^2 = \sum_{h=1}^L V(\hat{Y}_{rRh}) + \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{k=1}^L COV(\hat{Y}_{rRh}, \hat{Y}_{rRk}) + [B(\hat{Y}_{rRss})]^2 \\
& = \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{yh}^2 + b_{yh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{yh} S_{xyh}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right) (S_{yzh} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right)^2 (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}) \right]
\end{aligned}$$

En resumen,

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{rRss} & = \sum_{h=1}^L \frac{\bar{y}_h + b_{yh} (\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{zh} (\bar{X}_h - \bar{x}_h)} Z_h \\
E(\hat{Y}_{rRss}) & = \sum_{h=1}^L \left[ Y_h - \frac{N_h}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yzh} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2] + \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} N_h \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}] \right] \\
B(\hat{Y}_{rRss}) & = \sum_{h=1}^L \left[ \frac{N_h}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yzh} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2] - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) N_h [S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(\hat{Y}_{rRss}) & = \sum_{h=1}^L \left[ N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{yh}^2 + b_{yh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{yh} S_{xyh}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right) (S_{yzh} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right)^2 (S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh}) \right] - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left[ \frac{1}{\bar{Z}_h} (S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2) - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) \right]^2 \Bigg] + \\
 & + \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^L N_h N_k \left[ -\frac{1}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{yzk} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) (S_{yzk} - b_{zk} S_{xyk} - b_{yk} S_{xzk} + b_{yk} b_{zk} S_{xk}^2) + \right. \\
 & + \frac{\bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{yzk} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) (S_{zk}^2 + b_{zk}^2 S_{xk}^2 - 2b_{zk} S_{xzk}) + \\
 & + \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) (S_{yzk} - b_{zk} S_{xyk} - b_{yk} S_{xzk} + b_{yk} b_{zk} S_{xk}^2) - \\
 & \left. - \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h^2 \bar{Z}_k^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) (S_{zk}^2 + b_{zk}^2 S_{xk}^2 - 2b_{zk} S_{xzk}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ECM(\hat{Y}_{rSS}) &= \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_{yh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{yh} S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right) (S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2) + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) \right]
 \end{aligned}$$

y para el promedio,

$$\hat{Y}_{rSS} = \sum_{h=1}^L W_h \left( \frac{\bar{y}_h + b_{yh} (\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{zh} (\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \bar{Z}_h \right)$$

$$\begin{aligned}
 E(\hat{Y}_{rSS}) &= \sum_{h=1}^L W_h \left[ \bar{Y}_h - \frac{1}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2] + \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}] \right] \\
 B(\hat{Y}_{rSS}) &= \sum_{h=1}^L W_h \left[ \frac{1}{\bar{Z}_h} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2] - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) [S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}] \right] \\
 V(\hat{Y}_{rSS}) &= \sum_{h=1}^L \left[ W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_{yh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{yh} S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right) (S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) \right] - \right. \\
 & \left. - W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right)^2 \left[ \frac{1}{\bar{Z}_h} (S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2) - \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2} (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) \right]^2 \right] + \\
 & + \sum_{h=1}^{L-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^L W_h W_k \left[ -\frac{1}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) (S_{yzk} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2) (S_{yzk} - b_{zk} S_{xyk} - b_{yk} S_{xzk} + b_{yk} b_{zk} S_{xk}^2) + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\bar{Y}_k}{\bar{Z}_h \bar{Z}_k^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( S_{yzk} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2 \right) \left( S_{zk}^2 + b_{zk}^2 S_{xk}^2 - 2b_{zk} S_{xzk} \right) + \\
 & + \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h^2 \bar{Z}_k} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh} \right) \left( S_{yzk} - b_{zk} S_{xyk} - b_{yk} S_{xzk} + b_{yk} b_{zk} S_{xk}^2 \right) - \\
 & - \frac{\bar{Y}_h \bar{Y}_k}{\bar{Z}_h^2 \bar{Z}_k^2} \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( \frac{1-f_k}{n_k} \right) \left( S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh} \right) \left( S_{zk}^2 + b_{zk}^2 S_{xk}^2 - 2b_{zk} S_{xzk} \right) \Big] \\
 \\
 ECM\left(\hat{Y}_{rRss}\right) & = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ \left( S_{yh}^2 + b_{yh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{yh} S_{xyh} \right) - 2 \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right) \left( S_{yzh} - b_{zh} S_{xyh} - b_{yh} S_{xzh} + b_{yh} b_{zh} S_{xh}^2 \right) + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right)^2 \left( S_{zh}^2 + b_{zh}^2 S_{xh}^2 - 2b_{zh} S_{xzh} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Para el caso del estimador de varianza mínima, se debe hallar  $b_{yh}$  y  $b_{zh}$ , que repitiendo el procedimiento de la sección “Casos Especiales”, se tiene que cuando

$$\begin{aligned}
 b_{yh} & = \frac{S_{xyh}}{S_{xh}^2} \text{ y } b_{zh} = \frac{S_{xzh}}{S_{xh}^2}, \text{ y además, } \left( \frac{\bar{Y}_h}{\bar{Z}_h} \right) > 0 \text{ y } COV\left(\hat{Y}_{rlh}, \hat{Z}_{rlh}\right) > 0 \text{ (o } \rho_{yzh} > \rho_{xzh} \rho_{xyh} \text{),} \\
 \forall h, h & = 1, 2, \dots, L \text{ entonces } ECM\left(\hat{Y}_{rRss}\right) \text{ es mínimo.}
 \end{aligned}$$

**Estimadores de Regresión-Razón con 2 Coeficientes Combinados**

**Estimadores de regresión-razón con 2 coeficientes separado-combinado.**

En el caso de  $\hat{Y}_{rRsc}$  se tiene que,

$$\hat{Y}_{rRsc} = \frac{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{y}_h + b_{yh} (\bar{X}_h - \bar{x}_h))}{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{z}_h + b_{zh} (\bar{X}_h - \bar{x}_h))} Z$$

$$\hat{Y}_{rRsc} = \left[ \frac{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{y}_h + b_{yh} (\bar{X}_h - \bar{x}_h))}{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{z}_h + b_{zh} (\bar{X}_h - \bar{x}_h))} \right] \bar{Z}$$

Aplicando los mismos procedimientos anteriores,  $\hat{Y}_{rls} = \bar{Y} + e$  ,  $\hat{Z}_{rls} = \bar{Z} + e''$  , entonces,

$$E(\hat{Y}_{rRsc}) = E\left[\left(\frac{\hat{Y}_{rls}}{\hat{Z}_{rls}}\right)Z\right] = ZE\left[\frac{\hat{Y}_{rls}}{\hat{Z}_{rls}}\right] = ZE\left[\frac{Y+e}{Z+e''}\right] = ZE\left[\frac{Y\left(1+\frac{e}{Y}\right)}{Z\left(1+\frac{e''}{Z}\right)}\right] = YE\left[\frac{\left(1+\frac{e}{Y}\right)}{\left(1+\frac{e''}{Z}\right)}\right]$$

desarrollando la Serie de Taylor y truncando en las potencias de orden 2, se tiene que,

$$E(\hat{Y}_{rRsc}) = YE\left[1 + \frac{e}{Y} - \frac{e''}{Z} - \frac{ee''}{YZ} + \frac{e'^2}{Z^2}\right] \quad \text{donde } E(1)=1, E(e)=0, E(e'')=0$$

$$E(ee'') = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) [S_{yz_h} - b_{zh}S_{xy_h} - b_{yh}S_{xz_h} + b_{yh}b_{zh}S_{x_h}^2]$$

$$E(e'^2) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) [S_{z_h}^2 + b_{zh}^2S_{x_h}^2 - 2b_{zh}S_{xz_h}]$$

entonces,

$$\begin{aligned} E(\hat{Y}_{rRsc}) &= \bar{Y} \left[ 1 - \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{yz_h} - b_{zh}S_{xy_h} - b_{yh}S_{xz_h} + b_{yh}b_{zh}S_{x_h}^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2S_{x_h}^2 - 2b_{zh}S_{xz_h}) \right] \\ &= \bar{Y} - \bar{Y} \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{yz_h} - b_{zh}S_{xy_h} - b_{yh}S_{xz_h} + b_{yh}b_{zh}S_{x_h}^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2S_{x_h}^2 - 2b_{zh}S_{xz_h}) \right] \end{aligned}$$

de manera que es un estimador sesgado, y el sesgo es,

$$B(\hat{Y}_{rRsc}) = \bar{Y} \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{yz_h} - b_{zh}S_{xy_h} - b_{yh}S_{xz_h} + b_{yh}b_{zh}S_{x_h}^2) - \right.$$

$$-\frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) \Bigg]$$

A continuación se desarrolla la varianza.

$$\begin{aligned} V\left(\hat{Y}_{rRsc}\right) &= V\left[\left(\frac{\hat{Y}_{rIs}}{\hat{Z}_{rIs}}\right)\bar{Z}\right] = \bar{Z}^2 V\left[\frac{\hat{Y}_{rIs}}{\hat{Z}_{rIs}}\right] = \bar{Z}^2 E\left[\left(\frac{\hat{Y}_{rIs}}{\hat{Z}_{rIs}} - E\left(\frac{\hat{Y}_{rIs}}{\hat{Z}_{rIs}}\right)\right)^2\right] \\ &= \bar{Z}^2 \left[ E\left[\left(\frac{\hat{Y}_{rIs}}{\hat{Z}_{rIs}}\right)^2\right] - \left[E\left(\frac{\hat{Y}_{rIs}}{\hat{Z}_{rIs}}\right)\right]^2 \right] = \bar{Z}^2 E\left[\left(\frac{\hat{Y}_{rIs}}{\hat{Z}_{rIs}}\right)^2\right] - \bar{Z}^2 \left[E\left(\frac{\hat{Y}_{rIs}}{\hat{Z}_{rIs}}\right)\right]^2 \end{aligned}$$

pero,

$$\begin{aligned} E\left[\left(\frac{\hat{Y}_{rIs}}{\hat{Z}_{rIs}}\right)^2\right] &= E\left[\frac{\hat{Y}_{rIs}^2}{\hat{Z}_{rIs}^2}\right] = \frac{Y^2}{Z^2} E\left[\frac{\left(1+\frac{e}{Y}\right)^2}{\left(1+\frac{e}{Z}\right)^2}\right] = \frac{Y^2}{Z^2} \left[1 + \frac{2}{Y}E(e) + \frac{1}{Y^2}E(e^2) - \frac{2}{Z}E(e'') - \frac{4}{YZ}E(ee'') + \frac{3}{Z^2}E(e'^2)\right] \\ &= \frac{Y^2}{Z^2} \left[1 + \frac{1}{Y^2}E(e^2) - \frac{4}{YZ}E(ee'') + \frac{3}{Z^2}E(e'^2)\right] \\ &= \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Z}^2} \left[1 + \frac{1}{\bar{Y}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{y_h}^2 + b_{yh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{yh} S_{xy_h}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) \right] \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} V\left(\hat{Y}_{rRsc}\right) &= \bar{Y}^2 \left[1 + \frac{1}{\bar{Y}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{y_h}^2 + b_{yh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{yh} S_{xy_h}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h} \right) \Big] - \\
- \bar{Y}^2 & \left[ 1 - \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2 \right) + \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h} \right) \right]^2 \\
= \bar{Y}^2 + \bar{Y}^2 & \left[ \frac{1}{\bar{Y}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + b_{yh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{yh} S_{xy_h} \right) - \right. \\
& - \frac{4}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2 \right) + \\
& + \frac{3}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h} \right) \Big] - \\
- \bar{Y}^2 - \bar{Y}^2 & \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2 \right) - \right. \\
& - \left. \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h} \right) \right]^2 + \\
+ 2\bar{Y}^2 & \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2 \right) - \right. \\
& - \left. \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h} \right) \right] \\
= \sum_{h=1}^L W_h^2 & \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + b_{yh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{yh} S_{xy_h} \right) - 2 \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2 \right) + \\
& + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h} \right) \\
& + \bar{Y}^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2 \right) - \right. \\
& - \left. \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h} \right) \right]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_{yh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{yh} S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) (S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) \right] + \\
&\quad + \left[ \frac{1}{\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) \right]^2
\end{aligned}$$

finalmente, el error cuadrático medio,

$$\begin{aligned}
ECM(\hat{\bar{Y}}_{rRsc}) &= \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_{yh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{yh} S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) (S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) \right]
\end{aligned}$$

Resumiendo se tiene que,

$$\hat{\bar{Y}}_{rRsc} = \left( \frac{\hat{\bar{Y}}_{rIs}}{\hat{\bar{Z}}_{rIs}} \right) \bar{Z} = \frac{\left[ \sum_{h=1}^L W_h (\bar{y}_h + b_{yh} (\bar{X}_h - \bar{x}_h)) \right]}{\left[ \sum_{h=1}^L W_h (\bar{z}_h + b_{zh} (\bar{X}_h - \bar{x}_h)) \right]} \bar{Z}$$

$$\begin{aligned}
E(\hat{\bar{Y}}_{rRsc}) &= \bar{Y} - \bar{Y} \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(\hat{\bar{Y}}_{rRsc}) &= \bar{Y} \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(\hat{Y}_{rRsc}^{\cdot}) &= \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_{y_h}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{y_h} S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) (S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{y_h} S_{xz_h} + b_{y_h} b_{zh} S_{x_h}^2) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) \right] + \\
&\quad + \left[ \frac{1}{\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{y_h} S_{xz_h} + b_{y_h} b_{zh} S_{x_h}^2) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) \right]^2 \\
ECM(\hat{Y}_{rRsc}^{\cdot}) &= \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_{y_h}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{y_h} S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) (S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{y_h} S_{xz_h} + b_{y_h} b_{zh} S_{x_h}^2) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) \right] \\
E\hat{C}M(\hat{Y}_{rRsc}^{\cdot}) &= \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (s_{y_h}^2 + \hat{b}_{y_h}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_{y_h} s_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{y}}{\bar{z}} \right) (s_{yz_h} - \hat{b}_{zh} s_{xy_h} - \hat{b}_{y_h} s_{xz_h} + \hat{b}_{y_h} \hat{b}_{zh} s_{x_h}^2) + \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\bar{y}}{\bar{z}} \right)^2 (s_{z_h}^2 + \hat{b}_{zh}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_{zh} s_{xz_h}) \right]
\end{aligned}$$

y para el total,

$$\begin{aligned}
\hat{Y}_{rRsc}^{\cdot} &= \left( \frac{\hat{Y}_{rIs}}{\hat{Z}_{rIs}} \right) Z = \left[ \frac{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{y}_h + b_{y_h} (\bar{X}_h - \bar{x}_h))}{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{z}_h + b_{zh} (\bar{X}_h - \bar{x}_h))} \right] Z \\
E(\hat{Y}_{rRsc}^{\cdot}) &= Y - Y \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{y_h} S_{xz_h} + b_{y_h} b_{zh} S_{x_h}^2) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) \right] \\
B(\hat{Y}_{rRsc}^{\cdot}) &= Y \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{y_h} S_{xz_h} + b_{y_h} b_{zh} S_{x_h}^2) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(\hat{Y}'_{rRsc}) &= \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_{yh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{yh} S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) (S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) \right] + \\
&\quad + \left[ \frac{1}{\bar{Z}} \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) \right]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ECM(\hat{Y}'_{rRsc}) &= \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_{yh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{yh} S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) (S_{yz_h} - b_{zh} S_{xy_h} - b_{yh} S_{xz_h} + b_{yh} b_{zh} S_{x_h}^2) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_{zh}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{zh} S_{xz_h}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\hat{C}M(\hat{Y}'_{rRsc}) &= \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (s_{y_h}^2 + \hat{b}_{yh}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_{yh} s_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{y}}{\bar{z}} \right) (s_{yz_h} - \hat{b}_{zh} s_{xy_h} - \hat{b}_{yh} s_{xz_h} + \hat{b}_{yh} \hat{b}_{zh} s_{x_h}^2) \right. \\
&\quad \left. + \left( \frac{\bar{y}}{\bar{z}} \right)^2 (s_{z_h}^2 + \hat{b}_{zh}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_{zh} s_{xz_h}) \right]
\end{aligned}$$

Para trabajar con el estimador de varianza mínima, se deben hallar  $b_{yh}$  y  $b_{zh}$  que minimicen el error cuadrático medio, donde,

$$ECM(\hat{Y}'_{rRsc}) = \sum_{h=1}^L ECM(\hat{Y}_{r_h}) + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 ECM(\hat{Z}_{r_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) COV(\hat{Y}_{r_h}, \hat{Z}_{r_h})$$

y debe ocurrir lo siguiente,

- i.- que  $ECM(\hat{Y}_{r_h})$  sea mínimo,  $\forall h, h = 1, 2, \dots, L$
- ii.- que  $ECM(\hat{Z}_{r_h})$  sea mínimo,  $\forall h, h = 1, 2, \dots, L$
- iii.- si  $\left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) > 0$ , entonces que  $COV(\hat{Y}_{r_h}, \hat{Z}_{r_h}) > 0$  y máxima,  $\forall h, h = 1, 2, \dots, L$

si  $\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) < 0$ , entonces que  $COV\left(\hat{\bar{Y}}_{rl_h}, \hat{\bar{Z}}_{rl_h}\right) < 0$  y mínima,  $\forall h, h = 1, 2, \dots, L$

y esto se obtiene cuando  $b_{y_h} = \frac{S_{xy_h}}{S_{x_h}^2}$ ,  $b_{z_h} = \frac{S_{xz_h}}{S_{x_h}^2}$  y  $COV\left(\hat{\bar{Y}}_{rl_h}, \hat{\bar{Z}}_{rl_h}\right) > 0$  ( $\rho_{yz_h} > \rho_{xz_h} \rho_{xy_h}$ ),

$\forall h, h = 1, 2, \dots, L$ , y además  $\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) > 0$ , entonces  $ECM\left(\hat{\bar{Y}}'_{rRsc}\right)$  es mínimo.

### ***Estimadores de regresión-razón con 2 coeficientes combinado-separado.***

Igual que en casos anteriores, se pierde el tratamiento de razón separado al aplicárselo a estimadores de regresión lineal combinados  $(\hat{\bar{Y}}_{rlc}, \hat{\bar{Z}}_{rlc})$ , terminando en el estimador de regresión-razón combinado-combinado, esto es,

$$\hat{\bar{Y}}'_{rRcs} = \sum_{h=1}^L \left( \frac{\hat{\bar{Y}}_{rlc}}{\hat{\bar{Z}}_{rlc}} \right) \bar{Z}_h = \left( \frac{\hat{\bar{Y}}_{rlc}}{\hat{\bar{Z}}_{rlc}} \right) \sum_{h=1}^L \bar{Z}_h = \left( \frac{\hat{\bar{Y}}_{rlc}}{\hat{\bar{Z}}_{rlc}} \right) \bar{Z} = \hat{\bar{Y}}'_{rRcc}$$

que es el estimador que se desarrollará a continuación.

### ***Estimadores de regresión-razón con 2 coeficientes combinado-combinado.***

Trabajando de forma combinada, tanto el componente de regresión lineal como el de razón, los estimadores del promedio y del total son,

$$\hat{\bar{Y}}'_{rRcc} = \left( \frac{\hat{\bar{Y}}_{rlc}}{\hat{\bar{Z}}_{rlc}} \right) \bar{Z} = \left[ \frac{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{y}_h + b_{cy} (\bar{X}_h - \bar{x}_h))}{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{z}_h + b_{cz} (\bar{X}_h - \bar{x}_h))} \right] \bar{Z}$$

$$\hat{Y}_{rRcc}' = \left( \frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}} \right) Z = \left[ \frac{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{y}_h + b_{cy} (\bar{X}_h - \bar{x}_h))}{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{z}_h + b_{cz} (\bar{X}_h - \bar{x}_h))} \right] Z$$

Aplicando el procedimiento conocido,

$$\hat{Y}_{rlc} = \bar{Y} + e$$

$$\hat{Z}_{rlc} = \bar{Z} + e''$$

$$E\left(\frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}}\right) = E\left[\frac{\bar{Y} + e}{\bar{Z} + e''}\right] = Z E\left[\frac{\bar{Y} + e}{\bar{Z} + e''}\right] = Z E\left[\frac{Y + e}{Z + e''}\right] = Z E\left[\frac{Y\left(1 + \frac{e}{Y}\right)}{Z\left(1 + \frac{e''}{Z}\right)}\right] = Y E\left[\frac{\left(1 + \frac{e}{Y}\right)}{\left(1 + \frac{e''}{Z}\right)}\right]$$

desarrollando la Serie de Taylor y truncando en potencias de orden 2, se tiene que,

$$E\left(\frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}}\right) = \bar{Y} E\left[1 + \frac{e}{Y} - \frac{e''}{Z} - \frac{ee''}{YZ} + \frac{e''^2}{Z^2}\right] \quad \text{pero como} \quad E(1) = 1, E(e) = 0, E(e'') = 0$$

$$\text{y además,} \quad E(ee'') = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) \left[S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2\right]$$

$$E(e''^2) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) \left[S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}\right]$$

entonces,

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}}\right) &= \bar{Y} \left[1 - \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h})\right] \\ &= \bar{Y} - \bar{Y} \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) - \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h} \right) \Bigg]$$

de manera que es un estimador sesgado, y el sesgo es,

$$B\left(\hat{Y}_{rRcc}\right) = \bar{Y} \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2 \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h} \right) \right]$$

A continuación se desarrolla la varianza.

$$V\left(\hat{Y}_{rRcc}\right) = V\left[\left(\frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}}\right)\bar{Z}\right] = \bar{Z}^2 V\left[\frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}}\right] = \bar{Z}^2 E\left[\left(\frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}} - E\left(\frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}}\right)\right)^2\right] = \bar{Z}^2 \left[ E\left[\left(\frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}}\right)^2\right] - \left[ E\left(\frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}}\right) \right]^2 \right]$$

pero,

$$E\left[\left(\frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}}\right)^2\right] = E\left[\frac{\hat{Y}_{rlc}^2}{\hat{Z}_{rlc}^2}\right] = \frac{Y^2}{Z^2} E\left[\frac{\left(1+\frac{e}{Y}\right)^2}{\left(1+\frac{e}{Z}\right)^2}\right] = \frac{Y^2}{Z^2} \left[ 1 + \frac{2}{Y} E(e) + \frac{1}{Y^2} E(e^2) - \frac{2}{Z} E(e') - \frac{4}{YZ} E(ee') + \frac{3}{Z^2} E(e'^2) \right] \\ = \frac{Y^2}{Z^2} \left[ 1 + \frac{1}{Y^2} E(e^2) - \frac{4}{YZ} E(ee') + \frac{3}{Z^2} E(e'^2) \right] \\ = \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Z}^2} \left[ 1 + \frac{1}{\bar{Y}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{y_h}^2 + b_{cy}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cy} S_{xy_h} \right) - \right. \\ \left. - \frac{4}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{3}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h} \right] \right]$$

y como,

$$E\left(\frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}}\right) = \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) \left[ 1 - \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left( S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2 \right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) \Bigg]$$

entonces,

$$\begin{aligned} V(\hat{\bar{Y}}_{rRcc}) &= \bar{Y}^2 \left[ 1 + \frac{1}{\bar{Y}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_{cy}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cy} S_{xy_h}) - \right. \\ &\quad - \frac{4}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) + \\ &\quad + \frac{3}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) \Bigg] - \\ &\quad - \bar{Y}^2 \left[ 1 - \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) + \right. \\ &\quad + \left. \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) \right]^2 \\ &= \bar{Y}^2 + \bar{Y}^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_{cy}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cy} S_{xy_h}) - \right. \\ &\quad - \frac{4}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) + \\ &\quad + \frac{3}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) \Bigg] - \\ &\quad - \bar{Y}^2 \left[ 1 - 2 \left( \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) - \right. \right. \\ &\quad - \left. \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) \right) + \\ &\quad + \left( \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) - \right. \\ &\quad - \left. \left. \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{Y}^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_{cy}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cy} S_{xy_h}) - \right. \\
&\quad - \frac{4}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) + \\
&\quad + \frac{3}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) + \\
&\quad + \frac{2}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) - \\
&\quad - \frac{2}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) \left. \right) + \\
&\quad + \left( \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) \right)^2 \left. \right] \\
&= \bar{Y}^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_{cy}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cy} S_{xy_h}) - \right. \\
&\quad - \frac{2}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) + \\
&\quad + \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) + \\
&\quad + \left( \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) \right)^2 \left. \right]
\end{aligned}$$

finalmente, el error cuadrático medio,

$$ECM\left(\hat{Y}_{Rcc}\right) = \bar{Y}^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_{cy}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cy} S_{xy_h}) - \frac{2}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) \Big] \\
= & \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_{cy}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cy} S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) \right. \\
& \left. + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) \right]
\end{aligned}$$

Resumiendo se tiene que,

$$\hat{Y}_{rRcc} = \left( \frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}} \right) \bar{Z} = \left[ \frac{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{y}_h + b_{cy} (\bar{X}_h - \bar{x}_h))}{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{z}_h + b_{cz} (\bar{X}_h - \bar{x}_h))} \right] \bar{Z}$$

$$\begin{aligned}
E(\hat{Y}_{rRcc}) = & \bar{Y} - \bar{Y} \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(\hat{Y}_{rRcc}) = & \bar{Y} \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(\hat{Y}_{rRcc}) = & \bar{Y}^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_{cy}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cy} S_{xy_h}) - \right. \\
& - \frac{2}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) + \\
& + \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) + \\
& + \left( \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) \right)^2 \Big]
\end{aligned}$$

$$ECM(\hat{Y}_{rRcc}') = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_{cy}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cy} S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) \right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{rRcc}') = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (s_{y_h}^2 + \hat{b}_{cy}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_{cy} s_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) (s_{yz_h} - \hat{b}_{cz} s_{xy_h} - \hat{b}_{cy} s_{xz_h} + \hat{b}_{cy} \hat{b}_{cz} s_{x_h}^2) + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 (s_{z_h}^2 + \hat{b}_{cz}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_{cz} s_{xz_h}) \right]$$

y para el total,

$$\hat{Y}_{rRcc}' = \left( \frac{\hat{Y}_{rlc}}{\hat{Z}_{rlc}} \right) Z = \left[ \frac{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{y}_h + b_{cy} (\bar{X}_h - \bar{x}_h))}{\sum_{h=1}^L W_h (\bar{z}_h + b_{cz} (\bar{X}_h - \bar{x}_h))} \right] Z$$

$$E(\hat{Y}_{rRcc}') = Y - Y \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) \right]$$

$$B(\hat{Y}_{rRcc}') = Y \left[ \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) \right]$$

$$V(\hat{Y}_{rRcc}') = Y^2 \left[ \frac{1}{\bar{Y}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{y_h}^2 + b_{cy}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cy} S_{xy_h}) - \frac{2}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) + \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) + \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{1}{\bar{Y}\bar{Z}} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\bar{Z}^2} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) \right)^2 \Big] \\
ECM(\hat{Y}'_{rRcc}) &= \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (S_{y_h}^2 + b_{cy}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cy} S_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) + \right. \\
& \left. + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 (S_{z_h}^2 + b_{cz}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{cz} S_{xz_h}) \right] \\
\hat{ECM}(\hat{Y}'_{rRcc}) &= \sum_{h=1}^L N_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) \left[ (s_{y_h}^2 + \hat{b}_{cy}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_{cy} s_{xy_h}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) (s_{yz_h} - \hat{b}_{cz} s_{xy_h} - \hat{b}_{cy} s_{xz_h} + \hat{b}_{cy} \hat{b}_{cz} s_{x_h}^2) + \right. \\
& \left. + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 (s_{z_h}^2 + \hat{b}_{cz}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_{cz} s_{xz_h}) \right]
\end{aligned}$$

Para trabajar con el estimador de varianza mínima, se debe hallar  $b_{cy}$  y  $b_{cz}$ . Nótese que  $ECM(\hat{Y}'_{rRcc})$  se puede escribir de la siguiente manera,

$$ECM(\hat{Y}'_{rRcc}) = ECM(\hat{Y}_{rlc}) + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 ECM(\hat{Z}_{rlc}) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) COV(\hat{Y}_{rlc}, \hat{Z}_{rlc})$$

y para que  $ECM(\hat{Y}'_{rRcc})$  sea mínimo, debe ocurrir lo siguiente,

- i.- que  $ECM(\hat{Y}_{rlc})$  sea mínimo
- ii.- que  $ECM(\hat{Z}_{rlc})$  sea mínimo
- iii.- si  $\left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) > 0$ , entonces que  $COV(\hat{Y}_{rlc}, \hat{Z}_{rlc}) > 0$  y máxima  
si  $\left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) < 0$ , entonces que  $COV(\hat{Y}_{rlc}, \hat{Z}_{rlc}) < 0$  y mínima

despejando  $b_{c0}$ ,

$$b_{cy} = \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{xy_h}}{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{x_h}^2}, \quad b_{cz} = \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{xz_h}}{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{x_h}^2}$$

Es conocido que  $ECM(\hat{Y}_{rlc})$  y  $ECM(\hat{Z}_{rlc})$  se minimizan respectivamente cuando

$$b_{cy} = \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{xy_h}}{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{x_h}^2}, \quad b_{cz} = \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{xz_h}}{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{x_h}^2}.$$

Al derivar  $COV(\hat{Y}_{rlc}, \hat{Z}_{rlc}) = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2)$  parcialmente

respecto de  $b_{cy}$  y  $b_{cz}$ , e igualar a cero se tiene

$$\frac{\partial COV(\hat{Y}_{rlc}, \hat{Z}_{rlc})}{\partial b_{cy}} = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (-S_{xz_h} + b_{cz} S_{x_h}^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_{cz} = \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xz_h}}{\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{x_h}^2}$$

$$\frac{\partial COV(\hat{Y}_{rlc}, \hat{Z}_{rlc})}{\partial b_{cz}} = \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (-S_{xy_h} + b_{cy} S_{x_h}^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad b_{cy} = \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xy_h}}{\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{x_h}^2}$$

Que son los mismos valores que minimizan  $ECM(\hat{Y}_{rlc})$  y  $ECM(\hat{Z}_{rlc})$  respectivamente. Para determinar si es máximo o mínimo, se hallará la matriz hessiana, que consiste de las segundas derivadas parciales, esto es,

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{x_h}^2 \\ \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{x_h}^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Que es una matriz definida negativa, ya que su determinante es negativo;

$$|H| = -\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{x_h}^2. \text{ Por lo tanto, hay un máximo.}$$

Luego, cuando 
$$b_{cy} = \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{xy_h}}{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{x_h}^2}, \quad b_{cz} = \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{xz_h}}{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{x_h}^2}$$

$COV(\hat{Y}_{rlc}, \hat{Z}_{rlc})$  es máxima,  $ECM(\hat{Y}_{rlc})$  y  $ECM(\hat{Z}_{rlc})$  son mínimos, y debe cumplirse que  $\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) > 0$  y  $COV(\hat{Y}_{rlc}, \hat{Z}_{rlc}) > 0$ , para que  $ECM(\hat{Y}_{rRcc})$  es mínimo.

$$\begin{aligned} \text{Para que } COV(\hat{Y}_{rlc}, \hat{Z}_{rlc}) &= \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) (S_{yz_h} - b_{cz} S_{xy_h} - b_{cy} S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} S_{x_h}^2) > 0 \\ &= \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{yz_h} - b_{cz} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xy_h} - b_{cy} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xz_h} + b_{cy} b_{cz} \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{x_h}^2 > 0 \\ &= \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{yz_h} - \frac{\left( \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xy_h} \right) \left( \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xz_h} \right)}{\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{x_h}^2} > 0 \end{aligned}$$

es decir,

$$\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{y^z_h} > \frac{\left( \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xy_h} \right) \left( \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xz_h} \right)}{\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{x_h}^2}$$

Entonces, cuando  $b_{cy} = \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{xy_h}}{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{x_h}^2}$ ,  $b_{cz} = \frac{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{xz_h}}{\sum_{h=1}^L W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{x_h}^2}$ ,

$$\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{y^z_h} > \frac{\left( \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xy_h} \right) \left( \sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{xz_h} \right)}{\sum_{h=1}^L W_h^2 \left( \frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{x_h}^2}$$

y además,  $\left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right) > 0$ , entonces  $ECM\left(\hat{Y}_{rR}\right)$  es mínimo.

## **ANÁLISIS DE LOS ESTIMADORES INDIRECTOS COMPUESTOS**

Para analizar los estimadores desarrollados, en primer lugar se demostrará que los estimadores de razón son un caso particular de los estimadores de regresión lineal, y luego que los estimadores indirectos compuestos también son estimadores de regresión lineal. Es decir, que en última instancia, todos los estimadores indirectos son estimadores de regresión lineal.

Luego, para analizar el comportamiento de los diferentes estimadores, se hará en dos sentidos, analíticamente, comparando las fórmulas de sus Errores Cuadráticos Medios, y prácticamente, a través de corridas sobre bases de datos. Éstas últimas se harán en tres diferentes instancias, primero sobre una data artificial, pequeña, que permite generar todas las muestras posibles y trabajar a partir de la distribución muestral, generando diversos escenarios en los cuales se simulan diversos comportamientos para las diferentes variables. En segunda instancia, también sobre una data artificial mucho más grande, sobre la cual también se generaran diversos escenarios, pero menos que en el primer caso. Y por último, se hará una aplicación a una data del Censo 2001, efectuado en Venezuela en el año 2001, correspondiente a un municipio, con el objeto de verificar su aplicabilidad en un caso real.

### **Los Estimadores de Razón como caso particular de los Estimadores de Regresión Lineal**

En esta sección se mostrará como los estimadores de razón son un caso particular de los estimadores de regresión lineal, y que en última instancia, todos son estimadores de regresión lineal.

En todos los casos, se analizarán los estimadores indirectos en el muestreo aleatorio simple, ya que en el estratificado el comportamiento es igual, con sus adaptaciones en los casos de estimadores combinados.

Se comenzará por el estimador de razón, y luego con los estimadores indirectos compuestos.

***El Estimador de Razón como Caso Particular del Estimador de Regresión Lineal***

Sean los estimadores de razón y de regresión lineal del promedio poblacional,

$$\hat{Y}_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X} \quad , \quad \hat{Y}_{lr} = \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})$$

Si  $b = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ , entonces  $\hat{Y}_{lr} = \bar{y} + \frac{\bar{y}}{\bar{x}}(\bar{X} - \bar{x}) = \bar{y} + \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{X} - \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{x} = \bar{y} + \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{X} - \bar{y} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{X} = \hat{Y}_R$

Por lo tanto, el estimador de razón resulta de aplicar  $b = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$  en el estimador de regresión lineal.

A efectos del estimador se usará  $b = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ , sin embargo, a efectos del *ECM*, se utilizará

$b = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$ , por ser el valor poblacional y no muestral.

Véanse sus *ECM*,

$$ECM(\hat{Y}_{lr}) = \frac{(N-n)}{Nn} [S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2b S_{xy}]$$

Siendo  $b = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$ ,

$$ECM(\hat{Y}_{lr}) = \frac{(N-n)}{Nn} \left[ S_y^2 + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \right)^2 S_x^2 - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \right) S_{xy} \right] = \frac{(N-n)}{Nn} [S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}] = ECM(\hat{Y}_R)$$

Si se utilizara  $b = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ ,

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{lr}) = \frac{(N-n)}{Nn} [s_y^2 + b^2 s_x^2 - 2bs_{xy}] = \frac{(N-n)}{Nn} \left[ s_y^2 + \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)^2 s_x^2 - 2\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right) s_{xy} \right] = \frac{(N-n)}{Nn} [s_y^2 + \hat{R}^2 s_x^2 - 2\hat{R}s_{xy}] = E\hat{C}M(\hat{Y}_R)$$

Por lo tanto, sus ECM son iguales. Entonces, se demuestra que  $\hat{Y}_R$  es un caso particular de  $\hat{Y}_{lr}$  cuando  $b = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ , es decir que tanto  $\hat{Y}_R$  como  $\hat{Y}_{lr}$  son estimadores de regresión lineal.

### *El Estimador de Razón-Regresión como Estimador de Regresión Lineal*

Se analizará ahora el estimador de Razón-regresión. El estimador es,

$$\hat{Y}_{Rr} = \hat{Y}_R + b(\bar{Z} - \hat{Z}_R) = \hat{Y}_R + b\bar{Z} - b\hat{Z}_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{X} + b\bar{Z} - b\frac{\bar{z}}{\bar{x}}\bar{X}$$

donde  $\hat{Y}_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{X}$  y  $\hat{Z}_R = \frac{\bar{z}}{\bar{x}}\bar{X}$  son casos particulares de  $\hat{Y}_{lr}$  y  $\hat{Z}_{lr}$  respectivamente, que pueden escribirse como

$\hat{Y}_R = \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})$  y  $\hat{Z}_R = \bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})$ , cuando  $b_1 = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$  y  $b_2 = \frac{\bar{z}}{\bar{x}}$ . Se utilizan  $b_1$  y  $b_2$  para diferenciarlos de  $b$ , que se está usando como el coeficiente de  $\hat{Y}_{Rr}$ .

$$\begin{aligned} \text{Entonces, } \hat{Y}_{Rr} &= [\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})] + b[\bar{Z} - [\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})]] = \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) + b\bar{Z} - b\bar{z} - bb_2(\bar{X} - \bar{x}) \\ &= \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) + b(\bar{Z} - \bar{z}) - bb_2(\bar{X} - \bar{x}) = \bar{y} + (b_1 - bb_2)(\bar{X} - \bar{x}) + b(\bar{Z} - \bar{z}) \end{aligned}$$

Que es un estimador de regresión lineal con dos variables auxiliares, “x” y “z”, donde los coeficientes son “ $b_1 - bb_2$ ” y “ $b$ ”.

Si  $b_1 = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ ,  $b_2 = \frac{\bar{z}}{\bar{x}}$ ,  $b = \frac{\hat{Y}_R}{\hat{Z}_R}$ , entonces,

$$\begin{aligned}
 \hat{Y}_{Rr} &= \bar{y} + (b_1 - bb_2)(\bar{X} - \bar{x}) + b(\bar{Z} - \bar{z}) = \bar{y} + \left( \frac{\bar{y}}{\bar{x}} - \frac{\bar{z}}{\bar{x}} \frac{\hat{Y}_R}{\hat{Z}_R} \right) (\bar{X} - \bar{x}) + \left( \frac{\hat{Y}_R}{\hat{Z}_R} \right) (\bar{Z} - \bar{z}) \\
 &= \bar{y} + \left( \frac{\bar{y}\hat{Z}_R - \bar{z}\hat{Y}_R}{\bar{x}\hat{Z}_R} \right) (\bar{X} - \bar{x}) + \left( \frac{\hat{Y}_R}{\hat{Z}_R} \right) (\bar{Z} - \bar{z}) \\
 &= \bar{y} + \left( \frac{\bar{y}\hat{Z}_R}{\bar{x}\hat{Z}_R} \right) \bar{X} - \left( \frac{\bar{z}\hat{Y}_R}{\bar{x}\hat{Z}_R} \right) \bar{X} - \left( \frac{\bar{y}\hat{Z}_R}{\bar{x}\hat{Z}_R} \right) \bar{x} + \left( \frac{\bar{z}\hat{Y}_R}{\bar{x}\hat{Z}_R} \right) \bar{x} + \left( \frac{\hat{Y}_R}{\hat{Z}_R} \right) \bar{Z} - \left( \frac{\hat{Y}_R}{\hat{Z}_R} \right) \bar{z} \\
 &= \bar{y} + \left( \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right) \bar{X} - \left( \frac{\bar{z}\hat{Y}_R}{\bar{x}\hat{Z}_R} \right) \bar{X} - \bar{y} + \left( \frac{\bar{z}\hat{Y}_R}{\hat{Z}_R} \right) + \left( \frac{\hat{Y}_R}{\hat{Z}_R} \right) \bar{Z} - \left( \frac{\hat{Y}_R}{\hat{Z}_R} \right) \bar{z} \\
 &= \left( \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right) \bar{X} - \left( \frac{\bar{z}}{\bar{x}} \right) \left( \frac{\hat{Y}_R}{\hat{Z}_R} \right) \bar{X} + \left( \frac{\hat{Y}_R}{\hat{Z}_R} \right) \bar{Z}
 \end{aligned}$$

y como  $\hat{Y}_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X}$ ,  $\hat{Z}_R = \frac{\bar{z}}{\bar{x}} \bar{X}$

$$\begin{aligned}
 \hat{Y}_{Rr} &= \left( \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right) \bar{X} - \left( \frac{\bar{z}}{\bar{x}} \right) \left( \frac{\frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X}}{\frac{\bar{z}}{\bar{x}} \bar{X}} \right) \bar{X} + \left( \frac{\frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X}}{\frac{\bar{z}}{\bar{x}} \bar{X}} \right) \bar{Z} = \left( \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right) \bar{X} - \left( \frac{\bar{z}}{\bar{x}} \right) \left( \frac{\bar{y}}{\bar{z}} \right) \bar{X} + \left( \frac{\bar{y}}{\bar{z}} \right) \bar{Z} \\
 &= \left( \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right) \bar{X} - \left( \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \right) \bar{X} + \left( \frac{\bar{y}}{\bar{z}} \right) \bar{Z} = \left( \frac{\bar{y}}{\bar{z}} \right) \bar{Z}
 \end{aligned}$$

Que es un estimador de razón del promedio poblacional ( $\bar{Y}$ ), con variable auxiliar “z”, que a su vez, tal como se demostró en la sección anterior, es un caso particular de un estimador de regresión lineal, que puede reescribirse como,

$$\hat{Y}_{Rr} = \bar{y} + \frac{\bar{y}}{\bar{z}} (\bar{Z} - \bar{z})$$

Su ECM es

$$ECM(\hat{Y}_{Rr}) \approx \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ (S_y^2 + R_y^2 S_x^2 - 2R_y S_{xy}) + b^2 (S_z^2 + R_z^2 S_x^2 - 2R_z S_{xz}) - 2b (S_{yz} - R_z S_{xy} - R_y S_{xz} + R_y R_z S_x^2) \right]$$

Si  $b_1 = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ ,  $b_2 = \frac{\bar{z}}{\bar{x}}$ ,  $b = \frac{\hat{Y}_R}{\hat{Z}_R}$ , entonces,

Si  $b = \frac{\hat{Y}_R}{\hat{Z}_R} = \frac{\frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X}}{\frac{\bar{z}}{\bar{x}} \bar{X}} = \frac{\bar{y}}{\bar{z}}$  y utilizando en el ECM los valores poblaciones y no los muestrales,

entonces  $b = \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}$ ,

y como  $R_y = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$  y  $R_z = \frac{\bar{Z}}{\bar{X}}$ ,

$$\begin{aligned} ECM(\hat{Y}_{Rr}) &\approx \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ \left( S_y^2 + \frac{\bar{Y}^2}{\bar{X}^2} S_x^2 - 2 \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{xy} \right) + \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Z}^2} \left( S_z^2 + \frac{\bar{Z}^2}{\bar{X}^2} S_x^2 - 2 \frac{\bar{Z}}{\bar{X}} S_{xz} \right) - 2 \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \left( S_{yz} - \frac{\bar{Z}}{\bar{X}} S_{xy} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{xz} + \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \frac{\bar{Z}}{\bar{X}} S_x^2 \right) \right] \\ &\approx \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ \left( S_y^2 + \frac{\bar{Y}^2}{\bar{X}^2} S_x^2 - 2 \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{xy} \right) + \left( \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Z}^2} S_z^2 + \frac{\bar{Y}^2}{\bar{X}^2} S_x^2 - 2 \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{xz} \right) - 2 \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} S_{yz} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{xy} - \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{xz} + \frac{\bar{Y}^2}{\bar{X}^2} S_x^2 \right) \right] \\ &\approx \left( \frac{1-f}{n} \right) \left[ S_y^2 + \left( \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \right)^2 S_z^2 - 2 \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} S_{yz} \right] \end{aligned}$$

que es el *ECM* del estimador de razón de  $\bar{Y}$ , que además en un caso particular del estimador de regresión lineal cuando  $b = \frac{\bar{y}}{\bar{z}}$ .

Entonces, se demuestra que  $\hat{Y}_{Rr}$  es un caso particular de un estimador de regresión lineal, y también se demuestra que un estimador de razón con “z” como variable auxiliar, es un caso particular de  $\hat{Y}_{Rr}$ .

***El Estimador de Regresión-Razón como Estimador de Regresión Lineal***

$$\text{Sean } \hat{Y}_{rR} = \frac{\hat{Y}_r}{\hat{Z}_r} \bar{Z} = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} \bar{Z} \quad , \quad \hat{Y}'_{rR} = \frac{\hat{Y}_r}{\hat{Z}_r} \bar{Z} = \frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \bar{Z}$$

los dos estimadores de Regresión-Razón trabajados. En el primer caso se tiene un solo coeficiente  $b$ , y en el segundo dos coeficientes,  $b_y$  y  $b_z$ . Puede verse a uno como caso particular del otro.

Nótese que para  $\hat{Y}'_{rR}$ , si  $b_y = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$  y  $b_z = \frac{\bar{z}}{\bar{x}}$ , entonces,

$$\hat{Y}'_{rR} = \frac{\hat{Y}_r}{\hat{Z}_r} \bar{Z} = \frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \bar{Z} = \frac{\bar{y} + \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + \left(\frac{\bar{z}}{\bar{x}}\right)(\bar{X} - \bar{x})} \bar{Z} = \frac{\bar{y} + \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)\bar{X} - \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)\bar{x}}{\bar{z} + \left(\frac{\bar{z}}{\bar{x}}\right)\bar{X} - \left(\frac{\bar{z}}{\bar{x}}\right)\bar{x}} \bar{Z} = \frac{\left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)\bar{X}}{\left(\frac{\bar{z}}{\bar{x}}\right)\bar{X}} \bar{Z} = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} \bar{Z}$$

que es un estimador de razón con “z” como variable auxiliar, y como ya se demostró, es un estimador de regresión lineal.

Al desarrollar el *ECM*, tal se indicó anteriormente, se usarán  $b_y = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$  y  $b_z = \frac{\bar{Z}}{\bar{X}}$ ,

entonces,

$$\begin{aligned} ECM\left(\hat{Y}'_{rR}\right) &= \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ \left(S_y^2 + b_1^2 S_x^2 - 2b_1 S_{xy}\right) + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 \left(S_z^2 + b_2^2 S_x^2 - 2b_2 S_{xz}\right) - 2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) \left(S_{yz} - b_2 S_{xy} - b_1 S_{xz} + b_1 b_2 S_x^2\right) \right] \\ &= \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ \left(S_y^2 + \frac{\bar{Y}^2}{\bar{X}^2} S_x^2 - 2\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{xy}\right) + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 \left(S_z^2 + \frac{\bar{Z}^2}{\bar{X}^2} S_x^2 - 2\frac{\bar{Z}}{\bar{X}} S_{xz}\right) - \right. \\ &\quad \left. - 2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) \left(S_{yz} - \frac{\bar{Z}}{\bar{X}} S_{xy} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{xz} + \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \frac{\bar{Z}}{\bar{X}} S_x^2\right) \right] \\ &= \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ \left(S_y^2 + \frac{\bar{Y}^2}{\bar{X}^2} S_x^2 - 2\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{xy}\right) + \left(\frac{\bar{Y}^2}{\bar{Z}^2} S_z^2 + \frac{\bar{Y}^2}{\bar{X}^2} S_x^2 - 2\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}} \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{xz}\right) - \right. \end{aligned}$$

$$-2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}S_{yz} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}S_{xy} - \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\frac{\bar{Y}}{\bar{X}}S_{xz} + \frac{\bar{Y}^2}{\bar{X}^2}S_x^2\right)$$

$$= \left(\frac{1-f}{n}\right)\left[S_y^2 + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 S_z^2 - 2\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}S_{yz}\right]$$

que es el mismo resultado que se llegó en la sección anterior. Entonces, se demuestra que  $\hat{Y}_{rR}'$  es un caso particular de un estimador de regresión lineal, y por otra parte, también se demuestra que un estimador de razón con “z” como variable auxiliar es un caso particular de  $\hat{Y}_{rR}'$ , y en ese caso también  $\hat{Y}_{rR}' = \hat{Y}_{rR}$ .

Pero como el desarrollo para  $\hat{Y}_{rR}$  no es tan obvio, se aplicará otro enfoque, que será utilizado en primer lugar para  $\hat{Y}_{rR}'$ .

Considérese el siguiente estimador de regresión lineal,

$$\hat{Y}_{rR}^* = \hat{Y}_{rR} + \left(\frac{\hat{Y}_{rR}}{\hat{Z}_{rR}}\right)\left(\bar{Z} - \hat{Z}_{rR}\right)$$

Aunque tiene la estructura de tal, se demostrará que realmente es un estimador de regresión lineal.

$$\hat{Y}_{rR}^* = \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) + \left(\frac{\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})}\right)\left(\bar{Z} - (\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x}))\right)$$

$$= \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) + \left(\frac{\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})}\right)\left(\bar{Z} - \bar{z} - b_2(\bar{X} - \bar{x})\right)$$

$$= \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) + \left(\frac{\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})}\right)\left(\bar{Z} - \bar{z}\right) - b_2\left(\frac{\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})}\right)(\bar{X} - \bar{x})$$

$$= \bar{y} + \left(b_1 - b_2\left(\frac{\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})}\right)\right)(\bar{X} - \bar{x}) + \left(\frac{\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})}\right)(\bar{Z} - \bar{z})$$

que es un estimador de regresión lineal con dos variables auxiliares (“x” y “z”) y dos coeficientes,

$$c_1 = b_1 - b_2 \left( \frac{\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})} \right), \quad c_2 = \frac{\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})}$$

Ahora se hará otro desarrollo.

$$\begin{aligned} \hat{Y}_{rl}^* &= \hat{Y}_{rl} + \left( \frac{\hat{Y}_{rl}}{\hat{Z}_{rl}} \right) \left( \bar{Z} - \hat{Z}_{rl} \right) \\ &= \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) + \left( \frac{\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})} \right) \left( \bar{Z} - \hat{Z}_{rl} \right) \\ &= \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) + \left( \frac{\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})} \right) \left( \bar{Z} - (\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})) \right) \\ &= \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) + \left( \frac{\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})} \right) \bar{Z} - \left( \frac{\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})} \right) (\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})) \\ &= \left( \frac{\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})} \right) \bar{Z} \\ &= \hat{Y}_{rR} \end{aligned}$$

Entonces, se demostró que  $\hat{Y}_{rl}^*$  es un estimador de regresión lineal, y luego que  $\hat{Y}_{rl}^* = \hat{Y}_{rR}$ , por lo tanto,  $\hat{Y}_{rR}$  es un estimador de regresión lineal.

Para el otro caso, cuando no se tienen dos coeficientes ( $b_1$  y  $b_2$  o  $b_y$  y  $b_z$ ), sino uno sólo ( $b$ ), el desarrollo es similar.

$$\text{Partiendo desde el mismo punto, } \hat{Y}_{rl}^* = \hat{Y}_{rl} + \left( \frac{\hat{Y}_{rl}}{\hat{Z}_{rl}} \right) \left( \bar{Z} - \hat{Z}_{rl} \right)$$

Ahora,

$$\hat{Y}_n^* = \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}) + \left( \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} \right) (\bar{Z} - (\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})))$$

Es decir, el coeficiente utilizado para  $\hat{Y}_n$  y  $\hat{Z}_n$  son los mismos. Entonces,

$$\begin{aligned} &= \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}) + \left( \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} \right) (\bar{Z} - \bar{z} - b(\bar{X} - \bar{x})) \\ &= \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}) + \left( \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} \right) (\bar{Z} - \bar{z}) - b \left( \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} \right) (\bar{X} - \bar{x}) \\ &= \bar{y} + b \left( 1 - \left( \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} \right) \right) (\bar{X} - \bar{x}) + \left( \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} \right) (\bar{Z} - \bar{z}) \end{aligned}$$

que es un estimador de regresión lineal con dos variables auxiliares (“x” y “z”) y dos coeficientes,

$$c_1 = b \left( 1 - \left( \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} \right) \right) \quad , \quad c_2 = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \hat{Y}_n^* &= \hat{Y}_n + \left( \frac{\hat{Y}_n}{\hat{Z}_n} \right) (\bar{Z} - \hat{Z}_n) \\ &= \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}) + \left( \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} \right) (\bar{Z} - \hat{Z}_n) \\ &= \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}) + \left( \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} \right) (\bar{Z} - (\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x}))) \\ &= \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}) + \left( \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} \right) \bar{Z} - \left( \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} \right) (\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})) \\ &= \left( \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} \right) \bar{Z} \\ &= \hat{Y}_{nR} \end{aligned}$$

De la misma manera que en el desarrollo anterior, se concluye que  $\hat{Y}_{rR}$  es un estimador de regresión lineal.

Es importante destacar que éstas demostraciones concluyen que en última instancia, todos los estimadores indirectos, son estimadores de regresión lineal, pero no invalida todo el desarrollo del trabajo, sino que indica que se pueden reescribir de una forma tal, donde todos son casos particulares de estimadores de regresión lineal, con coeficientes particulares para cada caso.

### Comparación Analítica

Para comparar la precisión de los estimadores, se compararán sus Errores Cuadráticos Medios, que son,

$$ECM(\hat{Y}) = \left(\frac{1-f}{n}\right) S_y^2$$

$$ECM(\hat{Y}_R) \approx \left(\frac{1-f}{n}\right) (S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}) \approx \left(\frac{1-f}{n}\right) S_y^2 + \left(\frac{1-f}{n}\right) (R^2 S_x^2 - 2RS_{xy})$$

$$ECM(\hat{Y}_{lr}) = \frac{(N-n)}{Nn} [S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}] \quad , \quad b = \frac{S_{xy}}{S_x^2} \quad \text{minimiza el ECM}$$

$$ECM(\hat{Y}_{Rr}) \approx \left(\frac{1-f}{n}\right) [(S_y^2 + R_y^2 S_x^2 - 2R_y S_{xy}) + b^2 (S_z^2 + R_z^2 S_x^2 - 2R_z S_{xz})] - 2b(S_{yz} - R_z S_{xy} - R_y S_{xz} + R_y R_z S_x^2)$$

$$\approx ECM(\hat{Y}_R) + b^2 ECM(\hat{Z}_R) - 2b \left(\frac{1-f}{n}\right) (S_{yz} - R_z S_{xy} - R_y S_{xz} + R_y R_z S_x^2)$$

$$b = \frac{(S_{yz} - R_z S_{xy} - R_y S_{xz} + R_y R_z S_x^2)}{(S_z^2 + R_z^2 S_x^2 - 2R_z S_{xz})} \quad \text{minimiza el ECM}$$

$$ECM(\hat{Y}_{rR}) = \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ (S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}) - 2 \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) (S_{yz} - bS_{xy} - bS_{xz} + b^2 S_x^2) + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 (S_z^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xz}) \right]$$

$$b = \frac{S_{xy} - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) S_{xz}}{\left[1 - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)\right] S_x^2} \quad \text{minimiza el ECM}$$

$$ECM(\hat{Y}_{rR}) = \left(\frac{1-f}{n}\right) \left[ (S_y^2 + b_y^2 S_x^2 - 2b_y S_{xy}) + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 (S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}) - 2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) (S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2) \right]$$

$$b_y = \frac{S_{xy}}{S_x^2} \quad \text{y} \quad b_z = \frac{S_{xz}}{S_x^2} \quad \text{minimizan el ECM}$$

Sin embargo, algunas comparaciones resultan difíciles de llegar a un resultado fácilmente aplicable por la cantidad de posibles casos o circunstancias que deben ocurrir para que uno sea más preciso que el otro, por lo tanto sólo se presentarán unas pocas. Las comparaciones se desarrollan a continuación.

i.-  $ECM(\hat{Y})$  vs  $ECM(\hat{Y}_R)$

El error cuadrático medio de  $\hat{Y}_R$  es  $ECM(\hat{Y}_R) \approx \left(\frac{1-f}{n}\right) (S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2RS_{xy})$ , y puede escribirse como

$$\begin{aligned} ECM(\hat{Y}_R) &\approx \left(\frac{1-f}{n}\right) S_y^2 + \left(\frac{1-f}{n}\right) (R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}) \\ &\approx ECM(\hat{Y}) + \left(\frac{1-f}{n}\right) (R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}) \end{aligned}$$

entonces,  $\hat{Y}_R$  será más preciso que  $\hat{Y}$  si  $\left(\frac{1-f}{n}\right) (R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}) \leq 0$ , es decir  $R^2 S_x^2 - 2RS_{xy} \leq 0$ ,

que es una ecuación de segundo grado, cuyas raíces  $R=0$  y  $R=2\frac{S_{xy}}{S_x^2}$ . Entonces,

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{ll} R < 0 & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) < ECM(\hat{Y}_R) \\ R = 0 & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) = ECM(\hat{Y}_R) \\ 0 < R < 2 \frac{S_{xy}}{S_x^2} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) > ECM(\hat{Y}_R) \\ R = 2 \frac{S_{xy}}{S_x^2} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) = ECM(\hat{Y}_R) \\ R > 2 \frac{S_{xy}}{S_x^2} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) < ECM(\hat{Y}_R) \end{array} \right.$$

pero si  $y_i \geq 0$  y  $x_i \geq 0$ , y  $R > 0$ , entonces

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{ll} R > 2 \frac{S_{xy}}{S_x^2} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) < ECM(\hat{Y}_R) \\ R = 2 \frac{S_{xy}}{S_x^2} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) = ECM(\hat{Y}_R) \\ R < 2 \frac{S_{xy}}{S_x^2} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) > ECM(\hat{Y}_R) \end{array} \right.$$

o de otra forma,

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{ll} \rho < \frac{1}{2} R \frac{S_x}{S_y} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) < ECM(\hat{Y}_R) \\ \rho = \frac{1}{2} R \frac{S_x}{S_y} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) = ECM(\hat{Y}_R) \\ \rho > \frac{1}{2} R \frac{S_x}{S_y} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) > ECM(\hat{Y}_R) \end{array} \right.$$

o de otra forma,

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{ll} \rho < \frac{1}{2} \frac{CV(x)}{CV(y)} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) < ECM(\hat{Y}_R) \\ \rho = \frac{1}{2} \frac{CV(x)}{CV(y)} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) = ECM(\hat{Y}_R) \\ \rho > \frac{1}{2} \frac{CV(x)}{CV(y)} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) > ECM(\hat{Y}_R) \end{array} \right.$$

ii.-  $ECM(\hat{Y})$  vs  $ECM(\hat{Y}_{lr})$

El error cuadrático medio de  $\hat{Y}_{lr}$  es  $ECM(\hat{Y}_{lr}) \approx \left(\frac{1-f}{n}\right)(S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy})$  , y puede

escribirse como

$$\begin{aligned} ECM(\hat{Y}_{lr}) &\approx \left(\frac{1-f}{n}\right) S_y^2 + \left(\frac{1-f}{n}\right)(b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}) \\ &\approx ECM(\hat{Y}) + \left(\frac{1-f}{n}\right)(b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}) \end{aligned}$$

entonces,  $\hat{Y}_{lr}$  será más preciso que  $\hat{Y}$  si  $\left(\frac{1-f}{n}\right)(b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}) \leq 0$ , es decir  $b^2 S_x^2 - 2bS_{xy} \leq 0$ ,

que es una ecuación de segundo grado, cuyas raíces  $b=0$  y  $b=2\frac{S_{xy}}{S_x^2}$ . Entonces,

$$\text{Si } \begin{cases} b < 0 & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) < ECM(\hat{Y}_{lr}) \\ b = 0 & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) = ECM(\hat{Y}_{lr}) \\ 0 < b < 2\frac{S_{xy}}{S_x^2} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) > ECM(\hat{Y}_{lr}) \\ b = 2\frac{S_{xy}}{S_x^2} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) = ECM(\hat{Y}_{lr}) \\ b > 2\frac{S_{xy}}{S_x^2} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) < ECM(\hat{Y}_{lr}) \end{cases}$$

pero si  $b > 0$ , entonces

$$\text{Si } \begin{cases} b > 2\frac{S_{xy}}{S_x^2} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) < ECM(\hat{Y}_{lr}) \\ b = 2\frac{S_{xy}}{S_x^2} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) = ECM(\hat{Y}_{lr}) \\ b < 2\frac{S_{xy}}{S_x^2} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) > ECM(\hat{Y}_{lr}) \end{cases}$$

o de otra forma,

$$\text{Si } \begin{cases} \rho < \frac{1}{2} b \frac{S_x}{S_y} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) < ECM(\hat{Y}_R) \\ \rho = \frac{1}{2} b \frac{S_x}{S_y} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) = ECM(\hat{Y}_R) \\ \rho > \frac{1}{2} b \frac{S_x}{S_y} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}) > ECM(\hat{Y}_R) \end{cases}$$

para el caso de  $b$  constante que minimiza el error cuadrático medio,  $b = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$ , es decir, que

siempre  $b < 2 \frac{S_{xy}}{S_x^2}$ , y siempre será más preciso que  $\hat{Y}$ , y serán iguales sólo cuando  $\rho_{yx} = 0$ , ya

que  $\rho = \frac{1}{2} b \frac{S_x}{S_y} = \frac{1}{2} \frac{S_{xy}}{S_x^2} \frac{S_x}{S_y} = \frac{1}{2} \rho$  y esto sólo se cumple cuando  $\rho = 0$ .

iii.-  $ECM(\hat{Y}_R)$  vs  $ECM(\hat{Y}_{lr})$

Los errores cuadráticos medios de  $\hat{Y}_R$  y  $\hat{Y}_{lr}$ , respectivamente son,

$$ECM(\hat{Y}_R) \approx \left(\frac{1-f}{n}\right) (S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}) \approx \left(\frac{1-f}{n}\right) S_y^2 + \left(\frac{1-f}{n}\right) (R^2 S_x^2 - 2RS_{xy})$$

$$ECM(\hat{Y}_{lr}) = \left(\frac{1-f}{n}\right) (S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}) = \left(\frac{1-f}{n}\right) S_y^2 + \left(\frac{1-f}{n}\right) (b^2 S_x^2 - 2bS_{xy})$$

y estos estimadores tendrán la misma precisión si

$$\left(\frac{1-f}{n}\right) (R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}) = \left(\frac{1-f}{n}\right) (b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}), \text{ es decir, si } R^2 S_x^2 - 2RS_{xy} = b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}$$

Si se expresa como una ecuación de segundo grado, donde  $b$  es la incógnita, se tiene que,

$$b^2 S_x^2 - 2bS_{xy} - (R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}) = 0$$

y aplicando la fórmula general para hallar las raíces, se tiene que,

$$b = \frac{2S_{xy} \pm \sqrt{(-2S_{xy})^2 + 4S_x^2(R^2S_x^2 - 2RS_{xy})}}{2S_x^2} = \frac{2S_{xy} \pm \sqrt{(2RS_x^2 - 2S_{xy})^2}}{2S_x^2} = \frac{S_{xy} \pm (RS_x^2 - S_{xy})}{S_x^2}$$

y las dos raíces son  $b_1 = R$  ,  $b_2 = \frac{2S_{xy}}{S_x^2} - R$  . De manera que,

$$\text{Si } \begin{cases} b < \min\{b_1, b_2\} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}_{I_r}) > ECM(\hat{Y}_R) \\ b = \min\{b_1, b_2\} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}_{I_r}) = ECM(\hat{Y}_R) \\ \min\{b_1, b_2\} < b < \max\{b_1, b_2\} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}_{I_r}) < ECM(\hat{Y}_R) \\ b = \max\{b_1, b_2\} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}_{I_r}) = ECM(\hat{Y}_R) \\ b > \max\{b_1, b_2\} & \text{entonces } ECM(\hat{Y}_{I_r}) > ECM(\hat{Y}_R) \end{cases}$$

Cuando  $b = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$ , que minimiza el Error Cuadrático Medio,  $ECM(\hat{Y}_{I_r}) \leq ECM(\hat{Y}_R)$ , y se

da la igualdad cuando  $R = b = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$ , es decir, cuando  $\rho_{xy} = \frac{CV(x)}{CV(y)}$ .

### **Pruebas Prácticas**

#### ***Pruebas con Data Artificial Pequeña***

Para analizar el comportamiento de los diferentes estimadores, se ha generado un archivo en Excel con un universo artificial de 16 elementos, divididos en 4 estratos, cada elemento tiene asociado 3 variables (y, x, z). A partir de dicho universo, se generaran todas las muestras posibles, aleatorias simples y estratificadas, y en cada caso se estimará el promedio de “y”, para finalmente mostrar el Error Cuadrático Medio de cada uno de los estimadores, a partir de la distribución muestral, y a partir de las fórmulas desarrolladas en este trabajo, así como la aplicación de las fórmulas ampliamente trabajadas para los estimadores ya conocidos. Así se podrá comparar, no sólo la precisión de los diferentes estimadores, sino también se puede verificar la exactitud de la aproximación de las fórmulas aquí desarrolladas con las de los verdaderos errores cuadráticos medios, provenientes de la distribución muestral. Para dicho análisis, se generarán 81 escenarios, que constan de 81 universos de 16 elementos cada

uno, con sus respectivas variables ( $y$ ,  $x$ ,  $z$ ), con la intención de abarcar una gran cantidad de casos, a fin de establecer las bondades de los diferentes estimadores en función del comportamiento de las variables en el universo.

Cada escenario corresponde a diferentes correlaciones entre las variables en cuestión, y responden a los siguientes criterios,

Tabla 2 – Numeración de Escenarios Generados

Correlación de $y - x$	Correlación de $y - z$								
	Alta +	Media Alta +	Media +	Baja +	Nula	Baja -	Media -	Media Alta -	Alta -
Alta +	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Media Alta +	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Media +	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Baja +	28	29	30	31	32	33	34	35	36
Nula	37	38	39	40	41	42	43	44	45
Baja -	46	47	48	49	50	51	52	53	54
Media -	55	56	57	58	59	60	61	62	63
Media Alta -	64	65	66	67	68	69	70	71	72
Alta -	73	74	75	76	77	78	79	80	81

Los valores teóricos de las correlaciones que se consideraron, y los que finalmente se trabajaron al generar los diferentes escenarios fueron los siguientes

Tabla 3 – Correlaciones de los Escenarios Trabajados

	Correlaciones								
	Alta +	Media Alta +	Media +	Baja +	Nula	Baja -	Media -	Media Alta -	Alta -
Teóricos	1,00000	0,75000	0,50000	0,25000	0,00000	-0,25000	-0,50000	-0,75000	-1,00000
Entre $y - x$	0,97959	0,75469	0,51852	0,24005	0,00000	-0,25841	-0,49783	-0,74478	-0,97923
Entre $y - z$	0,98932	0,76627	0,51114	0,24539	0,00000	-0,25458	-0,49416	-0,75952	-0,97143

Se trabajó con diversos estimadores, 12 para el muestreo aleatorio simple y 30 para el muestreo estratificado. Los mismos se enumeran en la tabla 4.

Tabla 4 – Estimadores Trabajados

Muestreo Aleatorio Simple

1.- Directo		Estimador Directo
2.- Razón a X		Estimador de Razón (x variable auxiliar)
3.- Razón a Z		Estimador de Razón (z variable auxiliar)
4.- reg lin a X	(b=opt)	Estimador de Regresión Lineal usando b óptimo (x variable auxiliar)
5.- reg lin a Z	(b=opt)	Estimador de Regresión Lineal usando b óptimo (z variable auxiliar)
6.- reg lin a X	(b=1)	Estimador de Regresión Lineal usando b=1 (x variable auxiliar)
7.- reg lin a Z	(b=1)	Estimador de Regresión Lineal usando b=1 (z variable auxiliar)
8.- Rr	(b=opt)	Estimador de Razón-regresión usando b óptimo
9.- Rr	(b=1)	Estimador de Razón-regresión usando b=1
10.- rR	(b=opt)	Estimador de regresión-Razón usando b óptimo
11.- rR	(b=1)	Estimador de regresión-Razón usando b=1
12.- rR'	(b <sub>y</sub> , b <sub>z</sub> =opt)	Estimador de regresión-Razón usando dos b óptimos (b <sub>y</sub> , b <sub>z</sub> )

Muestreo Estratificado

1.- Directo		Estimador Directo
2.- Razón Sep a X		Estimador de Razón Separado (x variable auxiliar)
3.- Razón Sep a Z		Estimador de Razón Separado (z variable auxiliar)
4.- Razón Com a X		Estimador de Razón Combinado (x variable auxiliar)
5.- Razón Com a Z		Estimador de Razón Combinado (z variable auxiliar)
6.- Razón Com st a X		Estimador de Razón Combinado Estratificado (x variable auxiliar)
7.- Razón Com st a Z		Estimador de Razón Combinado Estratificado (z variable auxiliar)
8.- reg lin Sep a X	(b=opt)	Estimador de Regresión Lineal Separado usando b óptimo (x variable auxiliar)
9.- reg lin Sep a Z	(b=opt)	Estimador de Regresión Lineal Separado usando b óptimo (z variable auxiliar)
10.- reg lin Comb a X	(b=opt)	Estimador de Regresión Lineal Combinado usando b óptimo (x variable auxiliar)
11.- reg lin Comb a Z	(b=opt)	Estimador de Regresión Lineal Combinado usando b óptimo (z variable auxiliar)
12.- reg lin Sep a X	(b=1)	Estimador de Regresión Lineal Separado usando b=1 (x variable auxiliar)
13.- reg lin Sep a Z	(b=1)	Estimador de Regresión Lineal Separado usando b=1 (z variable auxiliar)
14.- reg lin Comb a X	(b=1)	Estimador de Regresión Lineal Combinado usando b=1 (x variable auxiliar)
15.- reg lin Comb a Z	(b=1)	Estimador de Regresión Lineal Combinado usando b=1 (z variable auxiliar)
16.- Rr ss	(b=opt)	Estimador de Razón-regresión Separado-Separado usando b óptimo
17.- Rr sc	(b=opt)	Estimador de Razón-regresión Separado-Combinado usando b óptimo
18.- Rr cc	(b=opt)	Estimador de Razón-regresión Combinado-Combinado usando b óptimo
19.- Rr ss	(b=1)	Estimador de Razón-regresión Separado-Separado usando b=1
20.- Rr sc	(b=1)	Estimador de Razón-regresión Separado-Combinado usando b=1
21.- Rr cc	(b=1)	Estimador de Razón-regresión Combinado-Combinado usando b=1
22.- rR ss	(b=opt)	Estimador de regresión-Razón Separado-Separado usando b óptimo
23.- rR sc	(b=opt)	Estimador de regresión-Razón Separado-Combinado usando b óptimo
24.- rR cc	(b=opt)	Estimador de regresión-Razón Combinado-Combinado usando b óptimo
25.- rR ss	(b=1)	Estimador de regresión-Razón Separado-Separado usando b=1
26.- rR sc	(b=1)	Estimador de regresión-Razón Separado-Combinado usando b=1
27.- rR cc	(b=1)	Estimador de regresión-Razón Combinado-Combinado usando b=1
28.- rR' ss	(b <sub>y</sub> , b <sub>z</sub> =opt)	Estimador de regresión-Razón Separado-Separado usando dos b óptimos (b <sub>y</sub> , b <sub>z</sub> )
29.- rR' sc	(b <sub>y</sub> , b <sub>z</sub> =opt)	Estimador de regresión-Razón Separado-Combinado usando dos b óptimos (b <sub>y</sub> , b <sub>z</sub> )
30.- rR' cc	(b <sub>y</sub> , b <sub>z</sub> =opt)	Estimador de regresión-Razón Combinado-Combinado usando dos b óptimos (b <sub>y</sub> , b <sub>z</sub> )

En la figura 1 se muestra la salida de cada una de las corridas de los 81 escenarios, que contienen los errores cuadráticos medios según la distribución muestral, las fórmulas conocidas expuestas en los textos clásicos y las fórmulas desarrolladas en este trabajo.

También incluyen las diferencias porcentuales de los *ECM* respecto de los errores provenientes de la distribución muestral, un ranqueo de los *ECM*, la diferencia porcentual entre el *ECM* del estimador y el *ECM* del estimador primero en el ranking, de acuerdo a la distribución muestral, y un gráfico de barras de los *ECM* según la distribución muestral, para visualizar de otra manera los resultados obtenidos. También incluye las observaciones poblacionales de  $y$ ,  $x$ ,  $z$  para cada elemento, la conformación de los estratos, los coeficientes de correlación entre las variables y un gráfico de líneas de las variables, donde se observan sus tendencias. A partir de éstas salidas se generaron todas las tablas y figuras que se muestran en este capítulo, y sobre los cuales se hace el análisis.

Los resultados de cada uno de los 81 escenarios se graficaron en conjunto, en la figura 2 (Coeficientes de Variación provenientes de la distribución muestral) y figura 3 (Coeficientes de Variación provenientes de las fórmulas trabajadas), aunque sólo se muestran los del muestreo aleatorio simple, por facilitar el gráfico, y nueve de los doce estimadores, dejando fuera a los que utilizaban a “ $z$ ” como variable auxiliar, por hacer más sencilla la comparación. En las figuras 4 a 12 se hace foco en cada estimador, comparando los coeficientes de variación (*CV*) provenientes de la distribución muestral y de las fórmulas desarrolladas.

En éstos últimos se puede observar que en algunos casos los *CV* de las fórmulas coinciden con los de la distribución muestral, en otros la aproximación es muy alta, y sólo en el estimador de regresión-Razón, con un solo  $b$  óptimo, existen diferencias observables.



Figura 2 – Coeficientes de Variación de los Estimadores del Promedio (provenientes de la distribución muestral)

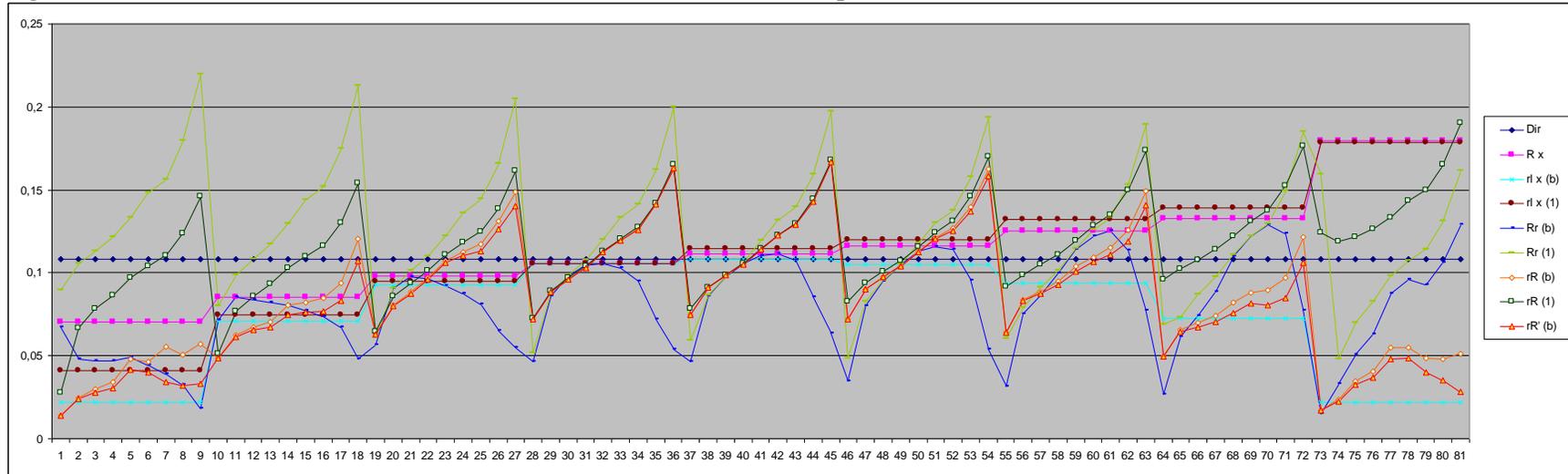


Figura 3 – Coeficientes de Variación de los Estimadores del Promedio (a partir de la Fórmula del ECM)

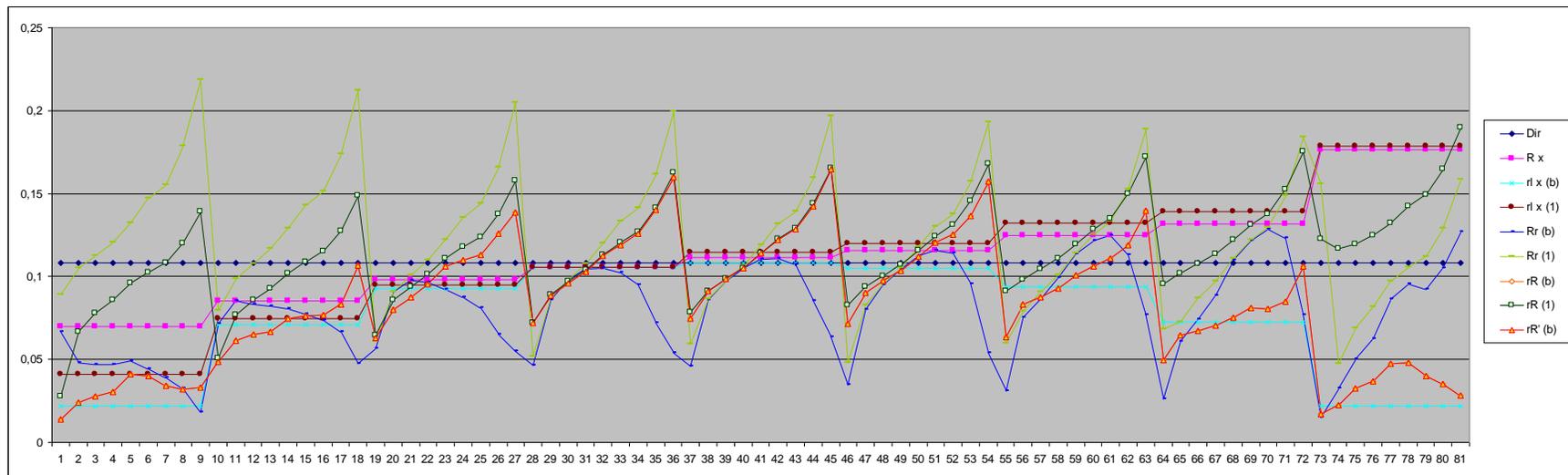


Figura 4 – Coeficientes de Variación del Estimador Directo del Promedio (distribución muestral y fórmula del ECM)

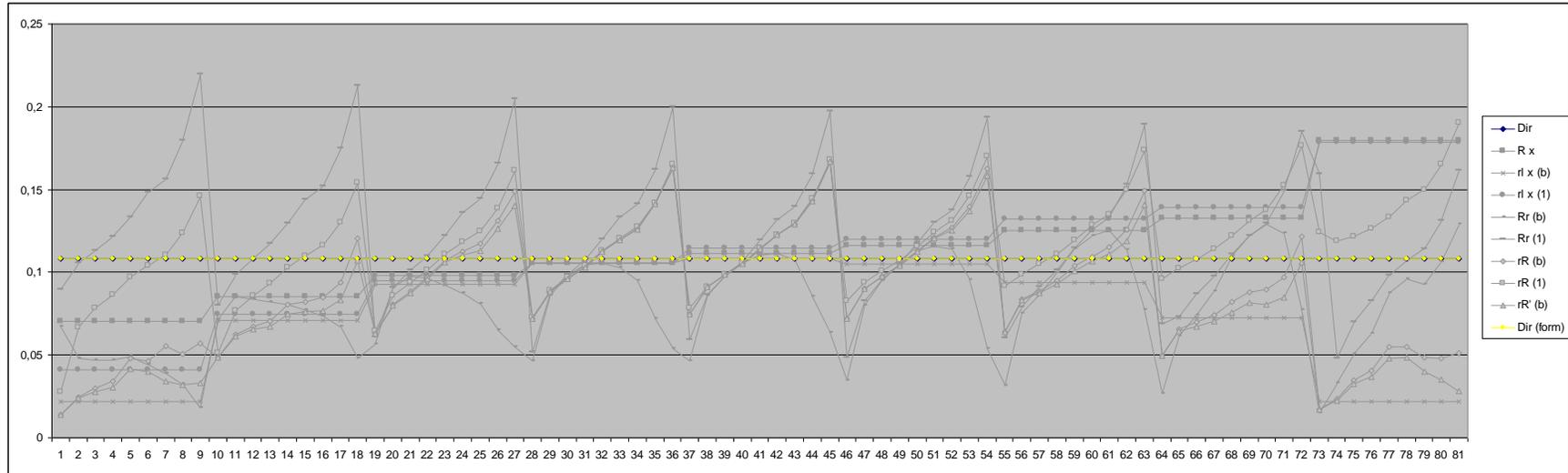


Figura 5 – Coeficientes de Variación del Estimador de Razón del Promedio (distribución muestral y fórmula del ECM)

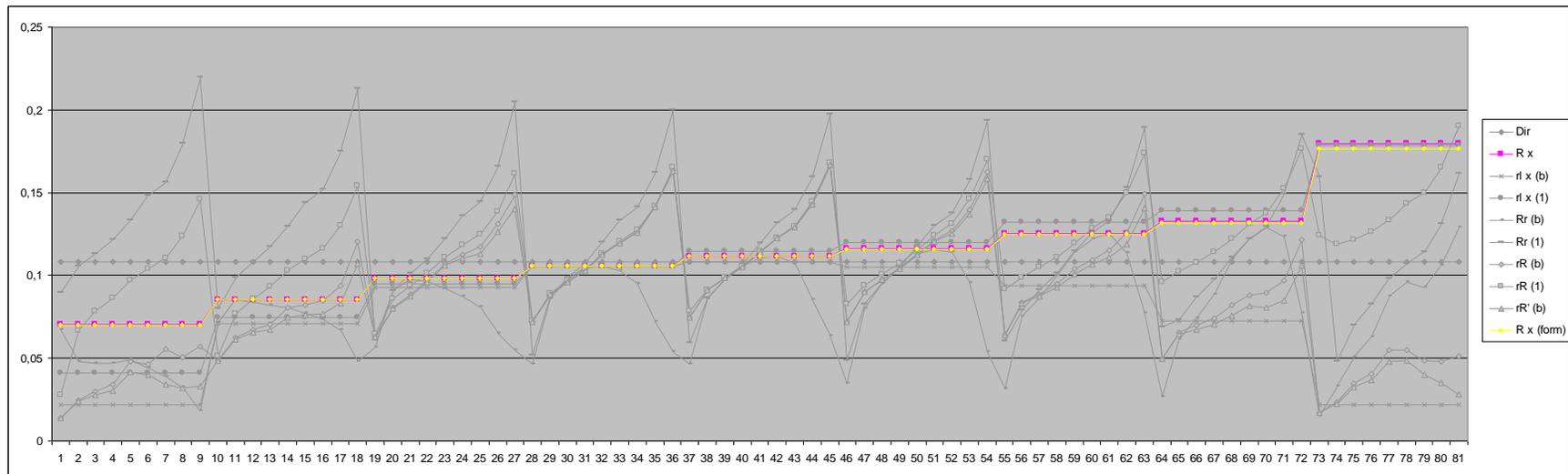


Figura 6 - Coeficientes de Variación del Estimador de Regresión Lineal del Promedio, usando el  $b$  óptimo (distribución muestral y fórmula del ECM)

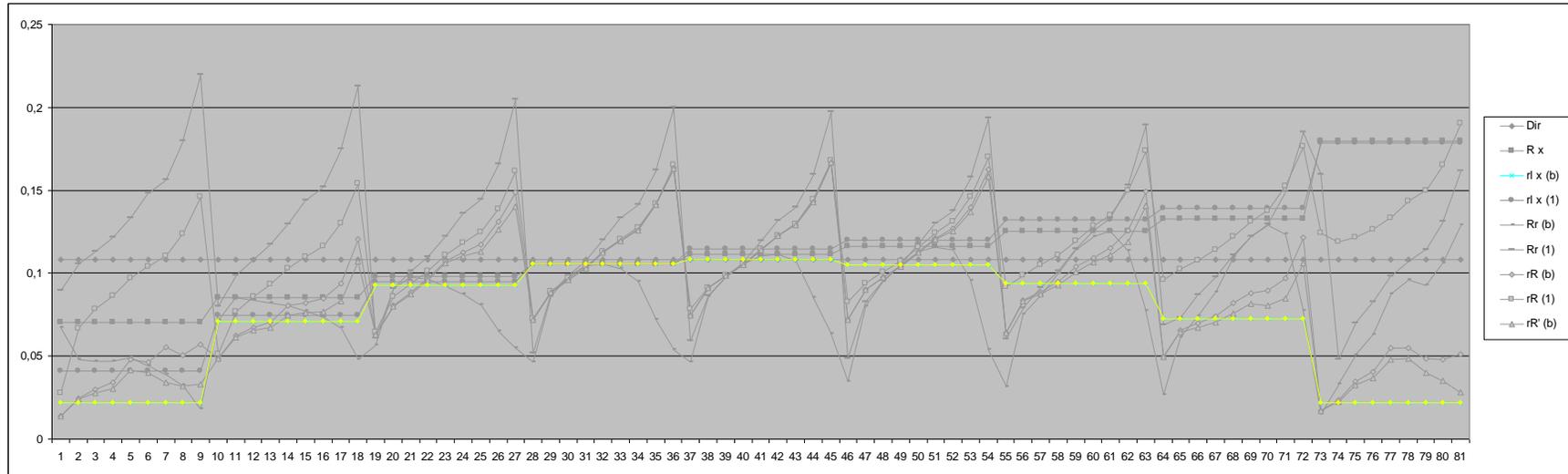


Figura 7 – Coeficientes de Variación del Estimador de Regresión Lineal del Promedio, usando  $b=1$  (distribución muestral y fórmula del ECM)

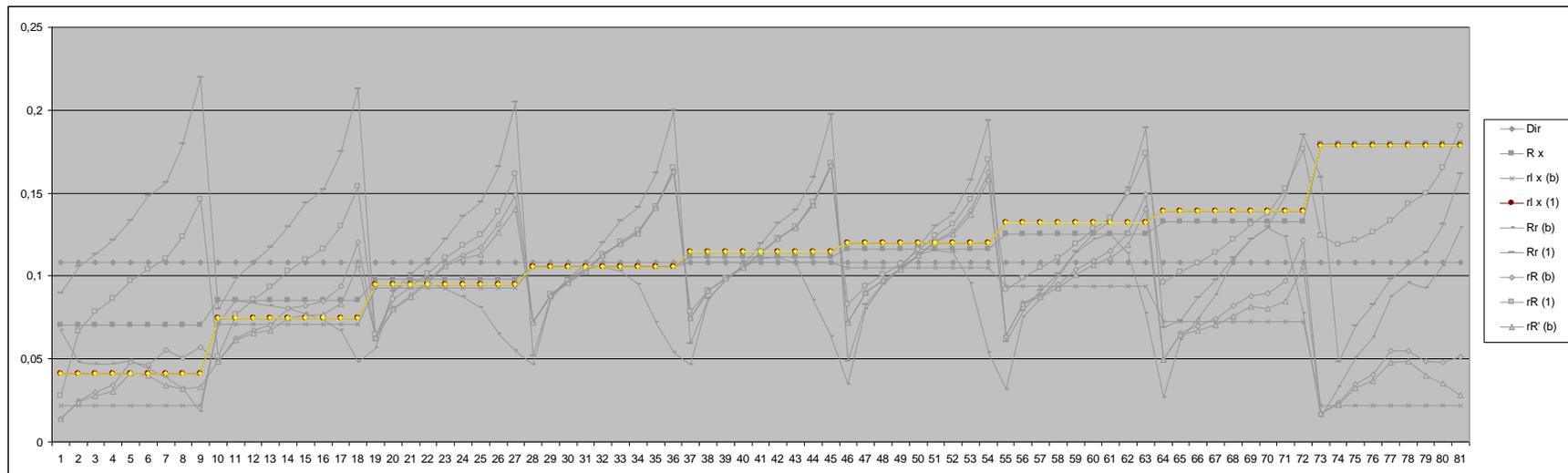


Figura 8 – Coeficientes de Variación del Estimador de Razón-Regresión del Promedio, usando  $b$  óptimo (distribución muestral y fórmula del ECM)

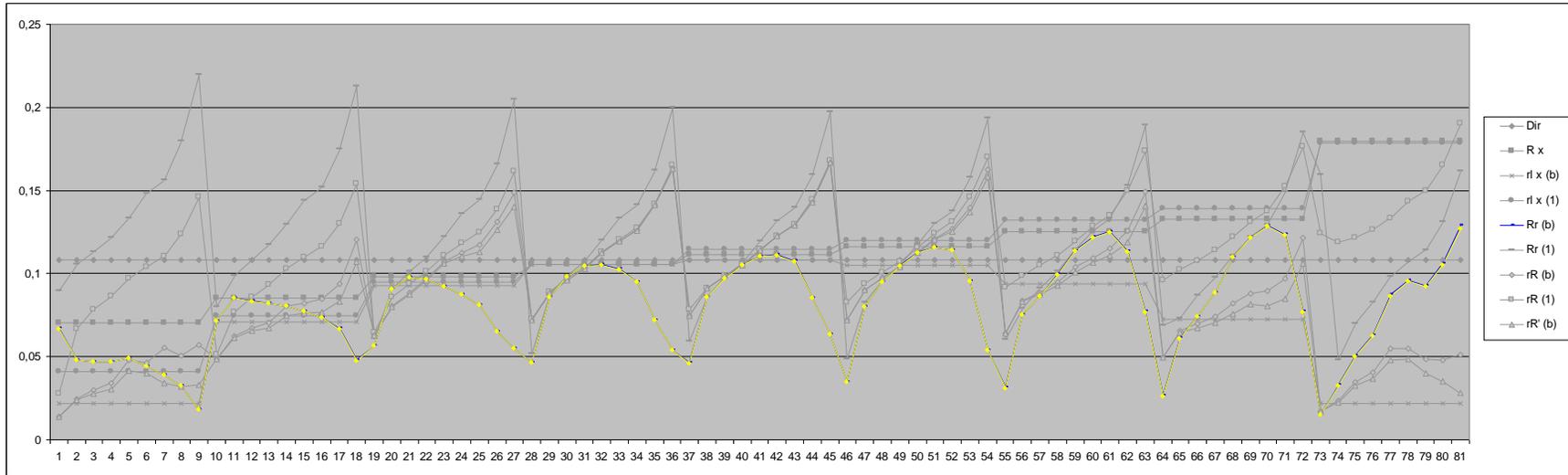


Figura 9 – Coeficientes de Variación del Estimador de Razón-Regresión del Promedio, usando  $b=1$  (distribución muestral y fórmula del ECM)

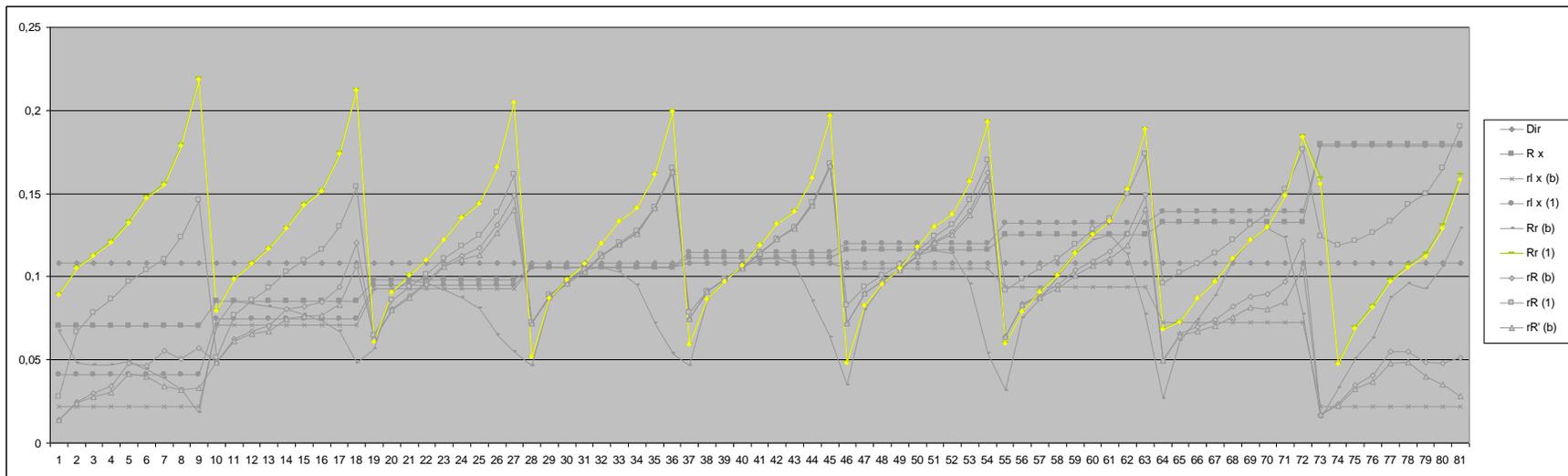


Figura 10 – Coeficientes de Variación del Estimador de Regresión-Razón del Promedio, usando  $b$  óptimo (distribución muestral y fórmula del ECM)

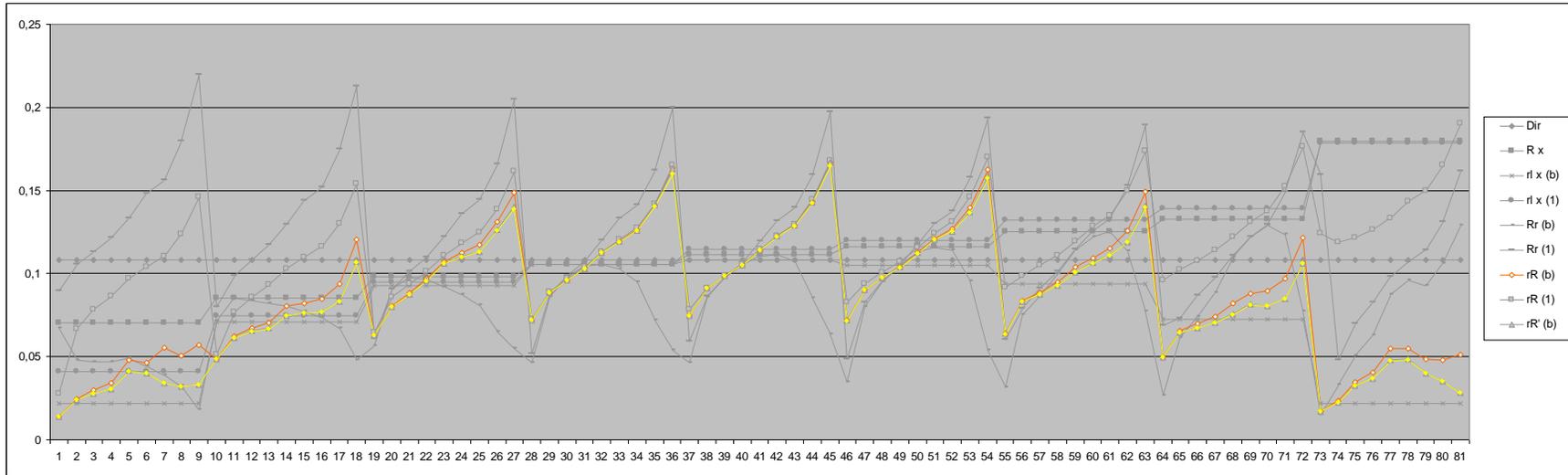


Figura 11 – Coeficientes de Variación del Estimador de Regresión-Razón del Promedio, usando  $b=1$  (distribución muestral y fórmula del ECM)

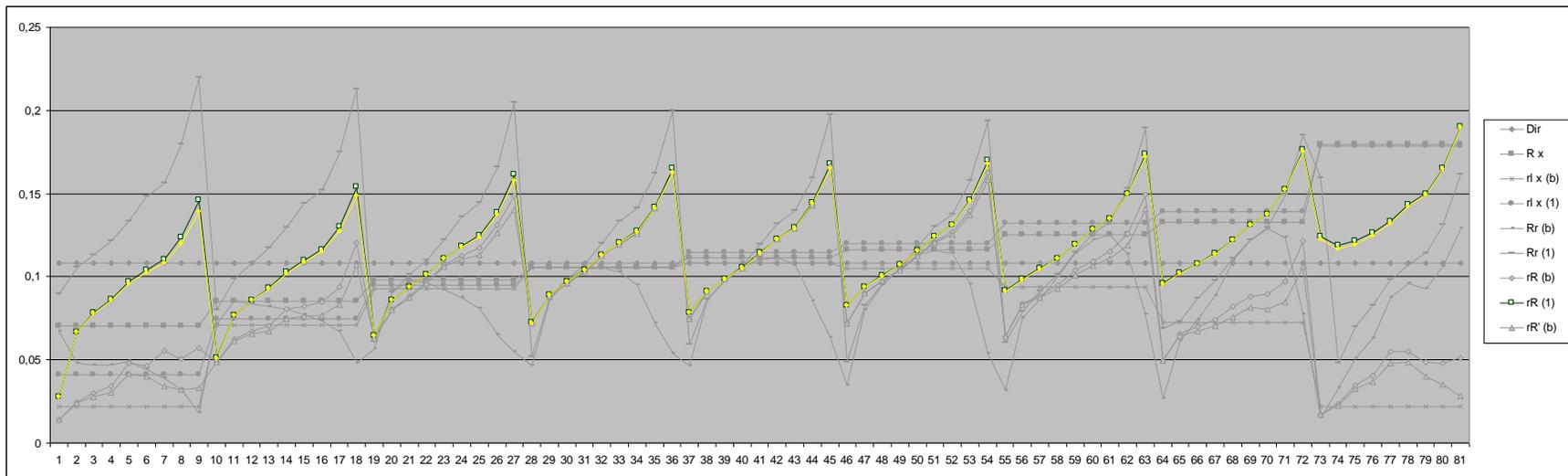
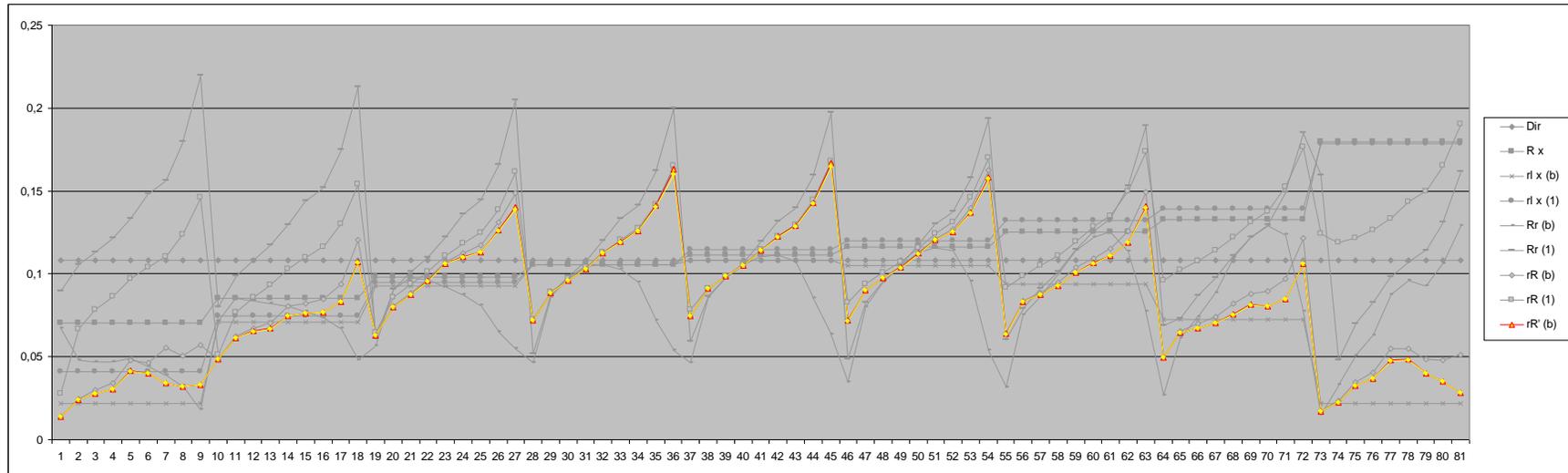


Figura 12 – Coeficientes de Variación del Estimador de Regresión-Razón del Promedio, usando dos b óptimos  $-b_y$  y  $b_z$ - (distribución muestral y fórmula del ECM)



En cuanto al comportamiento de los estimadores, de acuerdo a los escenarios planteados, se tiene lo siguiente,

**Estimador Directo:** no depende de otras variables, y en consecuencia tampoco de la relación entre ellas, por lo tanto el *ECM* se mantiene constante en los diversos escenarios, y sólo llega a ser mejor que los estimadores indirectos en la medida que la correlación de “y” con “x” y/o “y” con “z” se debilita, y se iguala al de regresión lineal cuando la correlación entre “y” y “x” y entre “y” y “z” es nula, y además, en este caso es mejor que el estimador de razón y que el resto de estimadores indirectos.

**Estimador de Razón:** es bueno en la medida que la correlación de “y” con la variable auxiliar “x” sea alta y positiva ( $\rho_{yx} \rightarrow 1$ ), cuando esta correlación se debilita o se torna negativa, el estimador se deteriora, llegando a ser el peor cuando la correlación es altamente negativa ( $\rho_{yx} \rightarrow -1$ ). De cualquier forma, este estimador resulta peor que casi todos los demás estimadores indirectos, aun cuando  $\rho_{yx}$  sea alta y positiva, sólo es mejor que el estimador de Razón-regresión y que el estimador de regresión-Razón cuando en ambos casos se utiliza el estimador por diferencia, es decir, cuando  $b=1$ . Al compararlo con el estimador directo, es mejor que éste cuando  $\rho_{yx} > \frac{1}{2} \frac{CV(x)}{CV(y)}$  (sección anterior), y la diferencia se hace mayor, a favor del estimador de razón, mientras  $\rho_{yx} \rightarrow 1$ , al debilitarse  $\rho_{yx}$  pierde precisión, al punto que cuando

la correlación es nula es peor que el estimador directo y a medida que  $\rho_{yx} \rightarrow -1$  se hace mucho peor.

Aunque cabe destacar que cuando la correlación entre “y” y “z” tiende a cero, positiva o negativamente, el estimador de razón es mejor que el de regresión-Razón.

Estimador de Regresión Lineal:

considerando únicamente el caso cuando “b” minimiza el *ECM*, siempre es mejor que el estimador directo y que el de razón, sólo es igual al directo cuando  $\rho_{yx} = 0$  (sección anterior), y el de razón se le acerca a medida que se debilita  $\rho_{yx}$ , y llegan a ser iguales cuando  $\rho_{xy} = \frac{CV(x)}{CV(y)}$  (sección anterior), que no se presenta en el ejemplo. Igual que el estimador de razón, a medida que se debilita la correlación entre “y” y “x”, el estimador pierde precisión, pero a diferencia de éste, a medida que la correlación se hace fuertemente negativa, vuelve a ganar en precisión, es decir, su precisión mejora en la medida que la correlación entre “y” y “x” sea alta, independientemente si es positiva o negativa ( $\rho_{yx} \rightarrow 1$  o  $\rho_{yx} \rightarrow -1$ ).

Por otra parte, el estimador de regresión lineal (con b óptimo), se comporta muy bien en general, y cuando la correlación con la variable auxiliar es alta (positiva o negativa), es el mejor, salvo en contadas excepciones (3 casos de 18, en el ejemplo desarrollado).

En el caso en que  $b=1$  (estimador por diferencia), tiene menos precisión que cuando se utiliza el b óptimo. Su

comportamiento es similar al estimador de razón pero con mayor precisión, e igual que éste y a diferencia del de regresión lineal con  $b$  óptimo, cuando  $\rho_{yx}$  se hace negativo, se deteriora el estimador, pierde precisión.

Estimador de Razón-Regresión:

el estimador de Razón-regresión se comporta bastante bien en todos los escenarios, cuando se utiliza el  $b$  óptimo (que minimiza el *ECM*). Su precisión mejora cuando aumenta la correlación de “y” con “x” y/o con “z”. La correlación con “z” puede ser positiva o negativa, en cualquier caso mejora mucho, siempre que sea alta. Respecto a la correlación con “x”, a medida que se aleja de 1 pierde precisión, más aun cuando se torna negativa, pero en cualquier caso es muy bien compensada cuando se hace fuerte con “z”, en cualquier sentido.

Cuando se hace  $b=1$ , se deteriora, aunque en algunos casos resulta bueno cuando  $\rho_{yz}$  es alta y positiva; a medida que se debilita esta correlación y se torna negativa, se convierte en un estimador deficiente. Resulta curioso que cuando la correlación entre “y” y “x” se va haciendo débil, incluso tendiendo a -1, la precisión del estimador mejora.

Estimador de Regresión-Razón:

aquí se tienen tres casos, cuando se considera un  $b$  óptimo, cuando  $b=1$ , y cuando se tienen dos  $b$  óptimos, uno en función de “y” ( $b_y$ ) y otro en función de “z” ( $b_z$ ).

En los tres casos el comportamiento es similar, aunque la precisión cuando  $b=1$  es inferior a las otras dos. El estimador es muy bueno cuando la correlación entre “y”

y “x” es alta, positiva o negativamente, excepto cuando  $b=1$ , que pierde precisión cuando la correlación es negativa. Cuando  $\rho_{yz} \rightarrow 1$  mejora mucho la precisión, a medida que  $\rho_{yz}$  se aleja de 1 pierde precisión, siendo el peor caso cuando se acerca a -1. Sin embargo, y únicamente con los dos casos de  $b$  óptimos (el estimador con un  $b$  óptimo, y el estimador con dos  $b$  óptimos,  $b_y$  y  $b_z$ ), cuando  $\rho_{yz} \rightarrow -1$  y  $\rho_{xy} \rightarrow 1$  o  $\rho_{xy} \rightarrow -1$ , se tornan muy precisos. El estimador con dos  $b$  óptimos suele ser mejor que con un solo  $b$  óptimo, excepto cuando  $\rho_{xy} \rightarrow 0$  y  $\rho_{yz}$  es alta y positiva.

En términos generales, se puede decir que si  $\rho_{xy} \rightarrow 1$  o  $\rho_{xy} \rightarrow -1$  el estimador de regresión lineal es muy bueno, si además  $\rho_{yz} \rightarrow 1$ , los estimadores de regresión-Razón se comportan muy bien, mejorando al de regresión cuando  $\rho_{xy}$  deja de ser muy fuerte. Caso contrario ocurre con los estimadores de Razón-regresión, si  $\rho_{xy} \rightarrow 1$  y  $\rho_{yz} \rightarrow -1$ , entonces son muy buenos y mejoran al de regresión lineal a medida que  $\rho_{xy}$  deja de ser fuerte, y aunque se debilita un poco cuando  $\rho_{xy} \rightarrow -1$ , se compensan cuando  $\rho_{yz} \rightarrow 1$  o  $\rho_{yz} \rightarrow -1$ .

A modo de resumen comparativo, se presentan las tablas 5 y 6 para el muestreo aleatorio simple, y las tablas 8 y 9 para el muestreo estratificado, donde se muestran la cantidad de casos en los que cada estimador ocupa cada posición en un ranking de los 81 escenarios trabajados, tanto para el muestreo aleatorio simple como para el estratificado. En uno se incluyen todos los estimadores, y en el otro se eliminan aquellos que sólo utilizan a “z” como variable auxiliar (razón y regresión lineal donde  $z$  es la variable auxiliar). En los mismos se muestra una puntuación que consiste en asignarle el mayor puntaje al 1er lugar y 1 al último lugar. No puede considerarse como una medición sobre cual estimador es mejor, en función de la cantidad de casos que ocupa buena posición en el ranking, debido a que en la realidad no

sólo no se presentan dichos casos en la misma proporción, sino que se desconoce cual es la distribución, además que sabiendo el comportamiento de las variables se descartarían unos u otros estimadores, sin embargo, puede tomarse como una referencia sobre el comportamiento general de los diversos estimadores.

Tabla 5 – Frecuencia de posiciones ocupadas por cada estimador en los 81 escenarios en el muestreo aleatorio simple y Puntuación y Posición Final

	Posición												Puntos	Posición Final
	1ro	2do	3ro	4to	5to	6to	7mo	8vo	9no	10mo	11mo	12mo		
1.- Directo	1	2	7	6	6	11	3	9	10	10	4	12	436	7mo
2.- Razón a X	0	0	0	3	18	14	4	2	5	2	25	8	387	9no
3.- Razón a Z	0	0	0	1	0	2	14	24	14	26	0	0	361	10mo
4.- reg lin a X (b=opt)	29	11	19	1	2	3	2	1	13	0	0	0	774	1ro
5.- reg lin a Z (b=opt)	33	9	4	7	6	8	6	8	0	0	0	0	778	5to
6.- reg lin a X (b=1)	0	4	5	16	2	10	1	5	3	5	8	22	420	6to
7.- reg lin a Z (b=1)	0	11	1	5	0	0	8	4	11	3	27	11	362	8vo
8.- Rr (b=opt)	10	16	12	19	9	10	2	3	0	0	0	0	756	2do
9.- Rr (b=1)	0	0	3	9	8	3	7	3	1	5	14	28	328	12mo
10.- rR (b=opt)	0	9	20	6	14	11	3	16	2	0	0	0	648	4to
11.- rR (b=1)	0	0	1	0	5	3	13	6	24	26	3	0	359	11mo
12.- rR' (b <sub>y</sub> ,b <sub>z</sub> =opt)	10	20	9	7	10	6	18	1	0	0	0	0	728	3ro

Tabla 6 – Frecuencia de posiciones ocupadas por cada estimador en los 81 escenarios en el muestreo aleatorio simple y Puntuación y Posición Final - excluyendo los estimadores que tengan únicamente a z como variable auxiliar-

	Posición									Puntos	Posición Final
	1ro	2do	3ro	4to	5to	6to	7mo	8vo	9no		
1.- Directo	2	8	4	7	12	12	17	7	12	337	5to
2.- Razón a X	0	0	0	21	2	17	7	26	8	285	7mo
4.- reg lin a X (b=opt)	34	20	7	3	4	13	0	0	0	605	1ro
6.- reg lin a X (b=1)	0	4	14	9	11	2	11	8	22	318	6to
8.- Rr (b=opt)	33	3	7	19	16	3	0	0	0	576	2do
9.- Rr (b=1)	0	11	0	2	13	7	3	9	36	256	9no
10.- rR (b=opt)	2	11	26	10	10	4	18	0	0	468	4to
11.- rR (b=1)	0	0	5	2	11	9	20	31	3	263	8vo
12.- rR' (b <sub>y</sub> ,b <sub>z</sub> =opt)	12	25	15	8	2	18	1	0	0	546	3ro

Para el muestreo estratificado, en cada estrato el análisis es exactamente igual a lo descrito anteriormente, y la aplicación de los estimadores de Razón-Regresión o de Regresión-Razón, dependerá del comportamiento de éstos en cada estrato. Para el uso de estimadores separados o combinados, valen las mismas consideraciones que para los estimadores indirectos -de razón y de regresión-, pero ajustados a la estructura de los estimadores indirectos compuestos. Esto es, siempre será preferible utilizar los estimadores Separado-Separado, ya que se estima en cada estrato con información referente únicamente al estrato en cuestión, a menos que el tamaño de muestra en cada estrato sea tan pequeño, que las estimaciones de  $R_h$  o  $b_h$  contengan un error alto, en dicho caso es preferible utilizar los combinados. Aquí es importante destacar que si los tamaños son pequeños, lo serán tanto para el componente de razón como para el de regresión, por lo tanto, es quizás preferible utilizar los Combinado-Combinado, aunque habría que verificar si el error que se comete al estimar el componente de razón o de regresión es aceptable o no lo es, lo que posibilita el hecho de utilizar el Separado-Combinado o el Combinado-Combinado. Por último, aun habiendo tamaños de muestra suficientes en cada estrato, si las razones y/o coeficientes de regresión son similares entre los estratos, implicaría que la ganancia en precisión de los estimadores Separado-Separado sobre los Separado-Combinado y/o Combinado-Combinado no es mucha, y se podrían utilizar éstos. En la Tabla 7 se esquematizan éstas consideraciones.

Tabla 7 – Aplicación de los estimadores indirectos compuestos en el muestreo estratificado

Tamaños de Muestra en cada Estrato	Similitud en las razones de los Estratos	Similitud entre los coeficientes de regresión de los Estratos	Estimador de Razón-Regresión	Estimador de Regresión-Razón
Suficientes	Disímiles	Disímiles	Separado-Separado	Separado-Separado
Suficientes	Disímiles	Similares	Separado-Combinado	Combinado-Combinado
Suficientes	Similares	Disímiles	Combinado-Combinado	Separado-Combinado
Suficientes	Similares	Similares	Combinado-Combinado	Combinado-Combinado
Pequeños	Disímiles	Disímiles	Combinado-Combinado	Combinado-Combinado
Pequeños	Disímiles	Similares	Combinado-Combinado	Combinado-Combinado
Pequeños	Similares	Disímiles	Combinado-Combinado	Combinado-Combinado
Pequeños	Similares	Similares	Combinado-Combinado	Combinado-Combinado

Nótese que en la fila 3 pareciera lógico para el estimador de Razón-Regresión, aplicar el Combinado-Separado, y en la fila 2, para el estimador de Regresión-Razón, utilizar el Combinado-Separado, pero como se vio en el desarrollo de los estimadores indirectos compuestos, los estimadores Combinado-Separado, coinciden con los Combinado-Combinado.

Tabla 8 – Frecuencia de posiciones ocupadas por cada estimador en los 81 escenarios en el muestreo estratificado y Puntuación y

Posición Final

	Posición																														Puntos	Posición Final	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30			
1.- Directo	0	0	0	0	29	3	1	3	2	12	2	2	0	1	4	0	2	4	0	2	7	0	3	1	3	0	0	0	0	0	0	1.598	10
2.- Razón Sen a X	0	0	0	0	0	0	0	2	7	16	10	6	2	1	3	0	2	3	2	1	0	2	8	1	0	5	6	1	3	0	1.200	15	
3.- Razón Sep a Z	0	0	0	0	2	1	1	1	1	1	0	2	1	3	2	4	1	4	1	2	3	13	12	6	5	6	6	3	0	0	844	22	
4.- Razón Com a X	0	0	0	0	2	3	12	15	5	6	3	6	2	0	1	3	0	1	2	1	2	1	3	6	0	1	3	6	0	0	1.454	13	
5.- Razón Com a Z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4	9	8	5	4	15	5	10	13	6	0	1	0	0	0	0	0	1.059	19	
6.- Razón Com st a X	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	6	0	10	0	1	1	0	4	2	1	1	7	0	2	2	3	1	4	5	715	25	
7.- Razón Com st a Z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	7	5	9	3	4	4	16	29	295	30	
8.- rea lin Sen a X (h=opt)	14	10	28	4	6	3	0	0	0	1	1	1	2	1	0	5	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.081	2	
9.- rea lin Sep a Z (b=opt)	52	6	4	2	2	5	0	1	0	3	2	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.267	1	
10.- rea lin Comb a X (b=opt)	0	8	6	28	5	2	13	2	0	0	1	1	1	1	0	2	3	0	1	6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1.926	5	
11.- rea lin Comb a Z (b=opt)	0	36	5	12	2	2	1	1	4	2	2	4	1	0	4	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2.049	3	
12.- rea lin Sep a X (b=1)	0	0	1	1	1	1	0	2	1	0	12	11	9	2	2	5	2	3	2	0	1	0	1	5	3	0	7	7	2	0	1.141	16	
13.- rea lin Sep a Z (b=1)	0	0	2	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	2	1	1	5	2	1	2	2	4	12	10	13	10	7	1	1	0	749	23	
14.- rea lin Comb a X (b=1)	0	0	1	1	1	1	0	2	1	0	12	11	9	2	2	5	2	3	2	0	1	0	1	5	3	0	7	7	2	0	1.141	16	
15.- rea lin Comb a Z (b=1)	0	0	2	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	2	1	1	5	2	1	2	2	4	12	10	13	10	7	1	1	0	749	23	
16.- Rr ss (b=opt)	3	14	13	4	4	13	6	7	3	1	2	1	2	3	2	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.010	4	
17.- Rr sc (b=opt)	0	0	0	0	5	10	5	11	15	3	3	1	3	5	3	7	3	1	1	2	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	1.632	9	
18.- Rr cc (b=opt)	0	0	0	6	11	6	13	11	4	3	2	12	7	4	0	1	0	0	0	1	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	1.883	6	
19.- Rr ss (b=1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	3	8	10	7	12	11	12	12	2	0	497	27
20.- Rr sc (b=1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	1	3	8	10	7	12	11	12	12	2	0	497	27	
21.- Rr cc (b=1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	3	0	2	2	1	2	8	3	1	8	4	5	8	14	8	10	493	29	
22.- rR ss (b=opt)	2	3	6	2	0	3	2	2	2	0	2	2	2	1	2	2	4	3	0	4	2	9	1	1	1	1	0	1	1	9	12	1.073	18
23.- rR sc (b=opt)	0	1	2	5	4	5	11	6	3	5	5	5	6	4	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.697	8	
24.- rR cc (b=opt)	0	0	0	0	0	0	5	4	7	8	4	3	3	8	2	13	17	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.416	14	
25.- rR ss (b=1)	0	0	0	1	2	1	1	1	0	0	0	0	0	1	3	0	1	1	3	0	4	9	7	8	3	4	8	8	15	0	636	26	
26.- rR sc (b=1)	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	2	1	1	2	1	3	8	13	25	16	1	4	1	0	0	0	0	0	0	0	1.048	20	
27.- rR cc (b=1)	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	2	1	1	2	1	3	8	13	25	16	1	4	1	0	0	0	0	0	0	0	1.048	20	
28.- rR' ss (bv.bz=opt)	9	3	5	2	0	1	5	5	1	9	0	1	2	4	3	6	7	0	3	0	13	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1.560	11	
29.- rR' sc (bv.bz=opt)	1	0	3	5	8	10	4	5	8	3	6	6	3	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.768	7	
30.- rR' cc (bv.bz=opt)	0	0	0	0	0	3	2	8	9	4	3	3	9	4	8	15	8	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.463	12	

Tabla 9 – Frecuencia de posiciones ocupadas por cada estimador en los 81 escenarios en el muestreo estratificado y Puntuación y

Posición Final -excluyendo los estimadores que tengan únicamente a z como variable auxiliar-

	Posición																							Puntos	Posición Final
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23		
1.- Directo	0	0	29	3	1	3	2	12	2	2	0	4	4	1	9	1	3	2	3	0	0	0	0	1265	7
2.- Razón Sen a X	0	0	0	0	0	1	4	16	14	6	2	0	3	3	3	3	8	3	1	10	0	4	0	903	13
4.- Razón Com a X	0	0	0	2	12	16	6	5	5	6	2	1	2	1	4	8	2	0	9	0	0	0	0	1126	10
6.- Razón Com st a X	0	0	0	0	0	0	6	0	5	1	10	0	1	1	0	8	0	2	6	6	3	4	28	517	19
8.- rea lin Sen a X (b=opt)	46	6	6	5	2	0	0	1	1	7	0	2	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1662	1
10.- rea lin Comb a X (b=opt)	0	39	5	4	11	2	1	2	1	1	5	1	2	6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1532	3
12.- rea lin Sep a X (b=1)	0	0	1	1	2	2	1	0	11	11	10	2	3	6	2	2	3	4	3	6	8	3	0	846	14
14.- rea lin Comb a X (b=1)	0	0	1	1	2	2	1	0	11	11	10	2	3	6	2	2	3	4	3	6	8	3	0	846	14
16.- Rr ss (b=opt)	19	12	7	11	7	8	3	1	2	1	4	2	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1574	2
17.- Rr sc (b=opt)	0	2	5	8	2	9	17	6	4	3	3	7	5	3	1	3	2	1	0	0	0	0	0	1257	8
18.- Rr cc (b=opt)	2	8	9	15	11	6	6	3	8	7	4	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1466	4
19.- Rr ss (b=1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	1	4	3	6	16	23	16	9	0	368	21
20.- Rr sc (b=1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	1	4	3	6	16	23	16	9	0	368	21
21.- Rr cc (b=1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	4	1	2	1	2	1	13	6	5	11	20	13	351	23
22.- rR ss (b=opt)	4	6	6	2	0	1	1	2	2	2	2	2	0	4	3	3	1	4	10	2	2	6	16	779	16
23.- rR sc (b=opt)	0	1	4	6	16	10	2	2	5	5	5	6	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1267	6
24.- rR cc (b=opt)	0	0	0	0	1	2	11	13	5	1	2	6	2	14	17	6	1	0	0	0	0	0	0	1007	12
25.- rR ss (b=1)	0	0	0	3	1	1	0	1	1	1	1	3	2	0	6	2	1	5	11	8	11	11	12	474	20
26.- rR sc (b=1)	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	4	2	9	5	4	28	17	5	0	1	0	0	0	728	17
27.- rR cc (b=1)	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	4	2	9	5	4	28	17	5	0	1	0	0	0	728	17
28.- rR' ss (bv,bz=opt)	9	7	4	2	4	3	2	7	0	3	2	4	4	5	7	2	1	13	1	1	0	0	0	1144	9
29.- rR' sc (bv,bz=opt)	1	0	5	18	9	4	8	3	4	5	5	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1338	5
30.- rR' cc (bv,bz=opt)	0	0	0	0	1	11	9	4	7	4	5	2	10	15	8	2	3	0	0	0	0	0	0	1053	11

***Pruebas con Data Artificial Grande***

En esta oportunidad se generó una data artificial de 5.000 elementos, agrupados en seis estratos, que igual que en la anterior, cada elemento tiene asociada tres variables ( $y$ ,  $x$ ,  $z$ ). Igualmente, se analiza la precisión de los estimadores tanto en el muestreo aleatorio simple como en el estratificado. Para ello se seleccionan 150 muestras aleatorias simples de tamaño  $n=400$ , y 150 muestras aleatorias estratificadas, de tamaño  $n=400$ , con afijación proporcional; en la siguiente tabla se muestran los tamaños poblacionales y muestrales. Aunque es importante mencionar que en esta data el análisis se centrará en el muestreo estratificado, por considerar que en el ejercicio anterior se cubre de manera exhaustiva, el muestreo aleatorio simple.

Tabla 10 – Tamaños Poblacionales y Muestrales

Estrato ( $h$ )	$N_h$	$n_h$	$W_h$	$w_h$	$f_h$
1	100	8	0,02	0,02	0,08
2	200	16	0,04	0,04	0,08
3	400	32	0,08	0,08	0,08
4	800	64	0,16	0,16	0,08
5	1.500	120	0,30	0,30	0,08
6	2.000	160	0,40	0,40	0,08
Total	5.000	400	1,00	1,00	0,08

En cada caso se estimará el promedio poblacional de “ $y$ ”.

Cabe destacar que tanto en el muestreo aleatorio simple como en el estratificado, el total de muestras posibles supera las  $1,8 \times 10^{308}$ , razón por la cual se tomaron 150 muestras en ambos diseños, siendo un total de muestras grande pero manejable.

Se generaron 11 escenarios, que consisten en la relación entre las variables en cada estrato y en el universo global.

La descripción (en términos de indicadores como Coeficiente de Correlación  $\rho_h$ ,  $-\rho_h$ ,  $R_h$  y  $B_h$ ) y los resultados de dichos escenarios se muestran a continuación,

Tabla 11 – Características de los Escenarios Generados

	Escenario No.										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Corr Y-X	Baja +	Baja +	Baja +	Baja +	Baja +	Baja +	Alta +	Alta +	Alta +	Alta +	Alta +
Corr Y-Z	Alta +	Alta -	Alta + y -	Alta +	Alta +	Baja +	Alta -	Alta + y -	Alta +	Alta +	Baja +
R yx	dif	dif	dif	dif	dif	dif	iguales	iguales	iguales	iguales	iguales
R yz	iguales	dif	dif	parec	iguales	parec	dif	dif	parec	iguales	parec
R zx	dif	dif	dif	dif	dif	dif	dif	dif	parec	iguales	parec
B yx	dif	dif	dif	dif	dif	dif	parec	parec	parec	parec	parec
B yz	parec	dif	dif	parec	iguales	dif	dif	dif	parec	iguales	dif
B zx	dif	dif	dif	dif	dif	dif	parec	dif	iguales	iguales	dif

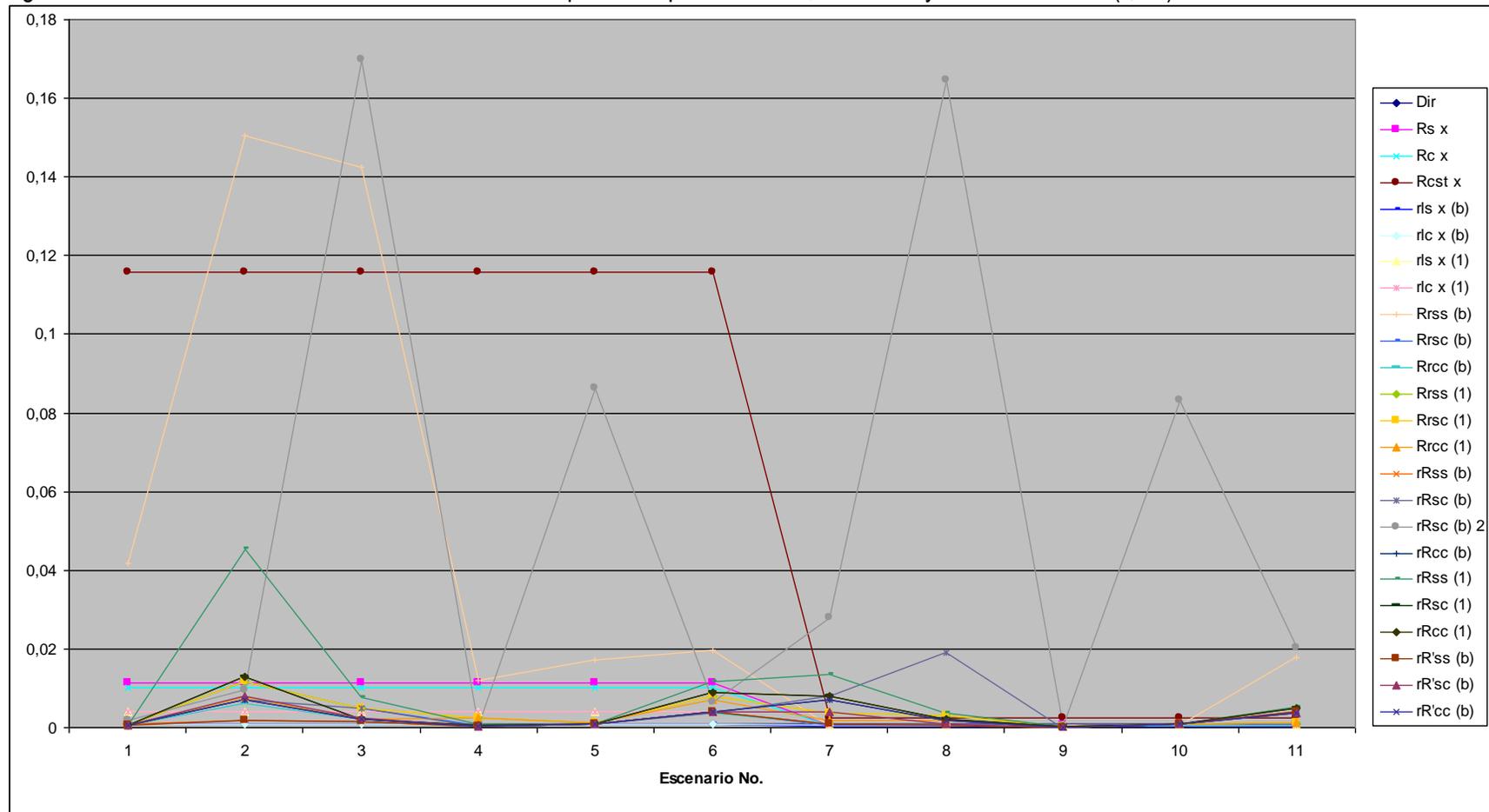
Los valores exactos se tienen en el Apéndice A.

Una vez seleccionadas las muestras, se procedió a estimar el promedio de la variable “y” para cada uno de los estimadores planteados (directo, indirectos sencillos e indirectos compuestos), tanto para el muestreo aleatorio simple como para el muestreo estratificado. Luego, con dichas estimaciones, se obtuvo la varianza, el error cuadrático medio y el coeficiente de variación de cada estimador. Adicionalmente, se obtuvo el error cuadrático medio poblacional de cada estimador, y su coeficiente de variación.

En las figuras 13 y 14 se observa el comportamiento de las precisiones (coeficientes de variación) de cada estimador en cada uno de los 11 escenarios, a partir de las 150 muestras seleccionadas. En el segundo de ellos se excluyen las estimaciones que sólo utilizan a z como variable auxiliar.



Figura 14 – Coeficientes de Variación del estimador del promedio por estimador, escenario y variable auxiliar (x; xz)



Como es lógico, el estimador directo mantiene la misma precisión en todos los escenarios, los estimadores de Razón y Regresión Lineal mantienen la misma precisión en dos bloques, del escenario 1 al 6, y del 7 al 11. Se observará el comportamiento de los estimadores indirectos compuestos comparados contra éstos valores. A efectos de simplificar la terminología, se denominará como “ $b$  óptimo” al coeficiente de regresión  $b$  que minimiza el error cuadrático medio.

A continuación se analiza el comportamiento de cada uno de los estimadores en el muestreo estratificado.

Directo: Muy estable, porque no depende del comportamiento de otras variables sino de "y"

Razón separado: Mejora mucho cuando la correlación entre "y" y "x" es alta y positiva en todos los estratos, si es baja o negativa en algún estrato, pierde precisión. Es muy susceptible a las correlaciones dentro de los estratos

Razón combinado: Igual que el anterior, mejora cuando la correlación entre "y" y "x" es alta y positiva. Es mejor que el anterior cuando las correlaciones entre "y" y "z" son bajas o negativas en algún estrato, cuando la correlación global entre "y" y "x" es mayor que en los estratos, o cuando los  $R_h$  son muy parecidos entre si.

Razón combinado estratificado:

Aunque reacciona igual al anterior ante cambios en las correlaciones y los  $R_h$ , no tiene buen comportamiento, y siempre tiene una precisión inferior al estimador de razón combinado. No es recomendable.

Regresión Lineal separado con  $b$  óptimo:

Tiene muy buen comportamiento, mejora mucho cuando la correlación entre "y" y "x" es alta, positiva o negativa, en todos los estratos; si es baja en algún estrato, pierde precisión. Es menos susceptible que el de razón a cambios en las correlaciones dentro de los estratos

Regresión Lineal combinado con  $b$  óptimo:

Igual que el anterior, mejora cuando la correlación entre "y" y "x" es alta, positiva o negativamente. Es mejor que el anterior cuando las correlaciones entre "y" y "z" son bajas en algunos estratos, cuando la correlación global entre "y" y "x" es mayor que en los estratos, o cuando los  $b_h$  son muy parecidos entre si, pero a diferencia del de razón, en ningún caso mejora en gran medida al de regresión separado.

Regresión Lineal separado con  $b=1$ :

Este estimador es exactamente igual al siguiente, ya que en ambos casos se mantiene  $b=1$  en todos los estratos, de manera que se puede decir que es un

estimador combinado donde siempre  $b=1$ . Como tal, tiene el mismo comportamiento que el estimador de regresión lineal combinado. Cuando el  $b$  óptimo se aproxime a 1, las precisiones de este estimador y del de  $b$  óptimo serán similares.

Regresión Lineal combinado con  $b=1$ :

Igual al anterior.

Razón-Regresión separado-separado con  $b$  óptimo:

Se comporta muy bien cuando las correlaciones entre "y" y "x" y entre "y" y "z" son altas y positivas en todos los estratos, si alguna baja en algún estrato, se deteriora y disminuye la precisión; si la correlación global de "y" con alguna de las variables es mayor que en los estratos, es preferible combinar. Igualmente, es preferible combinar si los  $R_h$  o  $b_h$  tienden a parecerse

Razón-Regresión separado-combinado con  $b$  óptimo:

Es más estable que el anterior, ya que al combinar los coeficientes  $b$ , elimina uno de los factores a los cuales el estimador anterior es muy susceptible. Cuando las correlaciones entre "y" y "x", "y" y "z" y "z" y "x" son muy variables entre los estratos y/o las correlaciones globales son mayores que en varios estratos, este estimador mejora al anterior.

Razón-Regresión combinado-combinado con  $b$  óptimo: Es aún más estable que el anterior, ya que no sólo combina los coeficientes  $b$ , sino también los  $R$ , y elimina los factores a los cuales el estimador es muy susceptible. Debido a ésta susceptibilidad, con facilidad supera en precisión al estimador separado-separado. Si las correlaciones entre las variables se mantienen estables entre los estratos, no mejora al anterior, por el contrario, si existe mucha disparidad en las correlaciones de estrato a estrato, si lo mejora.

Razón-Regresión separado-separado con  $b=1$ : Este estimador es exactamente igual al siguiente, ya que en ambos casos se mantiene  $b=1$  en todos los estratos, y los componentes de razón también se mantienen iguales, ya que son separados. En algunos casos mejora la precisión de los estimadores de Razón Regresión separado-separado y separado-combinado, cuando  $b$  es óptimo, y esto se debe a que en los estimadores de Razón-Regresión, no siempre se cumplen las condiciones necesarias para lograr realmente un  $b$  que minimice el *ECM*, y tal como se comentó, el estimador de Razón Regresión es muy susceptible a cambios en las correlaciones en los estratos.

- Razón-Regresión separado-combinado con  $b=1$ : Igual al anterior.
- Razón-Regresión combinado-combinado con  $b=1$ : Es bastante estable, en ningún caso mejora al estimador de Razón Regresión combinado-combinado cuando  $b$  es óptimo
- Regresión-Razón separado-separado con  $b$  óptimo: Para los escenarios trabajados, es el segundo estimador más estable. Se comporta muy bien, aun con correlaciones bajas. Cuando las correlaciones entre "y" y "x" son altas, los estimadores de Razón y de Regresión Lineal se comportan mejor que este. Cuando alguna de las correlaciones es baja, estos estimadores se comportan mejor que los de Razón Regresión, y que los estimadores indirectos sencillos (razón y regresión lineal).
- Regresión-Razón separado-combinado con  $b$  óptimo: Es menos estable que el anterior y lo mejora cuando los  $R_h$  y los  $b_h$  se parecen y tienden a ser iguales o cuando las correlaciones globales son mayores que en los estratos. Como los estimadores de Regresión Razón son menos susceptible a cambios en correlaciones,  $R_h$  y  $b_h$  que los estimadores de Razón Regresión, este estimador no mejora al separado-separado

tantas veces como en el caso de los estimadores de Razón Regresión.

Regresión-Razón combinado-combinado con  $b$  óptimo: Es más estable que el anterior, pero casi nunca lo mejora, y por supuesto, casi nunca mejora al separado-separado.

Regresión-Razón separado-separado con  $b=1$ : Tal como indica la teoría, la precisión es inferior a cuando se utiliza el  $b$  óptimo, y es de los menos estables, debido a que al ser  $b=1$  para todos los estratos, no toma en cuenta las correlaciones de "y" y "x", y de "z" y "x", que si se contempla al usar el  $b$  óptimo, y se traduce en mayor precisión. Sin embargo, se observa que en dos escenarios, la precisión de este estimador es mayor que con el  $b$  óptimo - aunque no lo mejora mucho-, y puede deberse al hecho que se tiene un subconjunto del espacio muestral, y no todas las posibles muestras.

Regresión-Razón separado-combinado con  $b=1$ : Es igual al siguiente. Es un estimador más estable que el anterior, y en la mayoría de los escenarios presentados, más preciso (8 de 11). Aquí se presentan más escenarios en los que este estimador es más preciso que al usar el  $b$  óptimo (4 de 11 para el separado-combinado y 6 de 11 en el combinado-combinado); puede deberse a

que no se contemplan todas las muestras posibles.

Regresión-Razón combinado-combinado con  $b=1$ : Igual al anterior.

Regresión-Razón con  $b_y$  y  $b_z$  óptimos:  
(separado-separado,  
separado-combinado,  
combinado-combinado)

Estos estimadores tienen un comportamiento muy similar a cuando se utiliza un sólo coeficiente  $b$ , pero son más estables, de hecho el separado-separado es el más estable, el separado-combinado es el cuarto y el combinado-combinado el sexto, lo que indica que son poco susceptibles a cambios en correlaciones de las variables entre los estratos y en forma global. Comparando su precisión contra sus pares cuando se utiliza un  $b$  único, se tiene que el separado-separado es más preciso que su par en 8 de 11 escenarios, el separado-combinado en 4 de 11 y el combinado-combinado en 8 de 11. Se puede decir que son más estables, muy precisos, pero no siempre se puede garantizar que los  $b_y$  y  $b_z$  calculados minimicen el *ECM* del estimador.

Resumiendo, se tiene que al revisar el estimador de Razón-Regresión separado-separado, se observa que no se comporta muy bien cuando la correlación entre “ $y$ ” y “ $x$ ” es baja, aunque positiva, y aunque los  $R_h$  y los  $b_h$  son diferentes entre los estratos, resulta peor que al combinar. Esto se debe a que la correlación global entre “ $y$ ” y “ $x$ ” es alta. Mejora cuando la correlación entre “ $y$ ” y “ $z$ ” es alta y positiva, pero siempre es menos preciso que sus pares combinados. En algunos casos, la precisión mejora cuando  $b=1$ , esto es porque se transforma en el estimador

separado-combinado con  $b=1$ , pero no mejora a éste cuando  $b$  es óptimo. Cuando la correlación entre “y” y “x” se torna alta y positiva, mejora sustancialmente la precisión, en algunos casos se iguala con sus pares combinados, pero siempre se mantiene menos preciso que éstos. En general, es un estimador muy susceptible a las correlaciones dentro de cada estrato, si se debilita en alguno de ellos, se deteriora la precisión, y se mejora al combinar los  $R$ 's y/o los  $b$ 's, o al hacer  $b=1$ .

El estimador de Regresión-razón se comporta bastante bien; cuando la correlación entre “y” y “x” es baja su comportamiento es bastante aceptable, sobre todo cuando la correlación entre “y” y “z” es alta, positiva o negativa, pero cuando ambas correlaciones son altas, funciona muy bien. Mantiene buena estabilidad a lo largo de los escenarios. A medida que se parecen los  $R_{yh}$ , se comporta mejor el estimador separado-combinado, de lo contrario es mejor el separado-separado. En el caso cuando se tienen dos coeficientes ( $b_y$  y  $b_z$ ), ocurre algo similar.

Al comparar los valores de  $CV(\hat{Y}_{rR})$  con  $CV(\hat{Y}_{rR}')$ , así como  $CV(\hat{Y}_{rRss})$  con  $CV(\hat{Y}_{rRss}')$ ,  $CV(\hat{Y}_{rRsc})$  con  $CV(\hat{Y}_{rRsc}')$  y  $CV(\hat{Y}_{rRcc})$  con  $CV(\hat{Y}_{rRcc}')$ , se observa que no son iguales - aunque si parecidos- cuando provienen de la distribución muestral, pero si cuando son calculados a través de la fórmula propuesta, tal como indica la teoría. También En la mayoría de los casos el estimador con dos coeficientes es más preciso que cuando se tiene un sólo coeficiente (20 casos de 33).

En general se puede decir que, el estimador más estable es de Regresión-Razón separado-separado, tanto para el caso de un  $b$  óptimo único, como para dos coeficientes ( $b_y$ ,  $b_z$ , ambos óptimos), y en general son los estimadores de este grupo (ss, sc y cc) los más estables; también el de Razón-Regresión combinado-combinado con  $b$  óptimo, se comporta bastante estable

Cuando al correlación entre  $y$  y  $x$  es baja pero positiva, y la correlación entre  $y$  y  $z$  es alta y positiva, resultan mejor los estimadores de Razón-Regresión, pero cuando la correlación entre  $y$  y  $z$  pasa a ser alta y negativa, los que mejor resultan son los de regresión lineal y algunos de

Regresión-Razón; algo similar ocurre cuando la correlación entre  $y$  y  $z$  es alta, pero en algunos estratos es positiva y en otros negativa.

Cuando la correlación entre  $y$  y  $x$  es baja, aunque positiva, los estimadores de Razón son los que peor se comportan, y mejoran mucho cuando la correlación se torna alta y positiva. Comportamiento similar tiene el estimador de Razón-Regresión separado-separados, pero más irregular, por influencia de la correlación entre  $y$  y  $z$ .

Los de mejor comportamiento en cuanto a estabilidad y precisión son  $\hat{Y}_{Rrc}$ ,  $\hat{Y}_{rRss}$ ,  $\hat{Y}_{rRss}$ ,  $\hat{Y}_{rs}$ ,  $\hat{Y}_{rlc}$ ,  $\hat{Y}_{st}$  y  $\hat{Y}_{rRsc}$ , todos con sus respectivos coeficientes  $b$  que minimizan el Error Cuadrático Medio.

### *Pruebas con Data Real*

En esta instancia, se trabajó una data real, correspondiente al XIII Censo General de Población y Vivienda de Venezuela, llevado a cabo en 2001, por ser la data más reciente disponible en Venezuela de una enumeración completa, y se tomó al Municipio Sucre del Estado Miranda, por diversas razones, es un municipio grande (546.766 habitantes), perteneciente al Área Metropolitana de Caracas, y con gran diversidad de personas.

El objetivo de estas pruebas es constatar la aplicación de los estimadores propuestos en un caso real, así como verificar si realmente ayudan a reducir o incluso a anular las diferencias entre los valores poblacionales y las estimaciones. Aunque se calcularon varianzas, errores estándar y coeficientes de variación, y se compararon, no se cubrió esa parte de forma exhaustiva y detallada debido a que sólo se seleccionó una muestra, y no varias muestras como en las instancias anteriores, por la misma razón no se trabajaron todos los estimadores propuestos, ya que no es el objetivo comparar el comportamiento de los estimadores separados y combinados, cubierto también anteriormente.

El Municipio Sucre consta de 5 Parroquias, Petare, Caucagüita, Fila de Mariches, La Dolorita y Leoncio Martínez. Las parroquias se trataron como estratos, y se seleccionó una muestra sistemática e independiente del 20% de las viviendas en cada parroquia. En la tabla 12 se muestra la relación de la población y la muestra en cada parroquia y en el municipio.

Tabla 12 – Tamaños poblacionales y muestrales por Parroquia, en el Municipio Sucre del Estado Miranda

Parroquia	Población			Muestra		Fracción de Muestreo	
	Total Viviendas	Total Viv. Ocupadas	Total Personas	Total Viv. Ocupadas	Total Personas	Viviendas	Personas
Total	153.424	134.346	546.766	26.914	109.230	0,200	0,200
Parroquia Petare	99.684	87.318	354.531	17.474	70.900	0,200	0,200
Parroquia Caucagüita	12.674	11.104	50.348	2.225	10.095	0,200	0,201
Parroquia Fila de Mariches	6.335	5.870	26.461	1.166	5.338	0,199	0,202
Parroquia La Dolorita	15.471	13.948	59.966	2.808	11.964	0,201	0,200
Parroquia Leoncio Martínez	19.260	16.106	55.460	3.241	10.933	0,201	0,197

Fuente: XIII Censo General de Población y Vivienda. Venezuela, 2001

Una vez seleccionada la muestra, se trabajó la siguiente tabla,

Tabla 13 - Total de personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad

Sexo y Grupos de Edad	Total						Ocupado		Desocupado		BTPPV		Estudiando		Pens/Jub		Otra	
	Total	Prim	Bach/ TM	Prof	Otro	Ning	Total	...	Total	...	Total	...	Total	...	Total	...	Total	...
Total																		
0 a 4 años																		
5 a 9 años																		
10 a 14 años																		
15 a 19 años																		
20 a 24 años																		
25 a 29 años																		
30 a 39 años																		
40 a 49 años																		
50 a 59 años																		
60 ó más años																		
Hombres																		
.																		
.																		
.																		
Mujeres																		
.																		
.																		
.																		

En principio, y como referencia, se generó la tabla con los valores poblacionales, y luego se estimaron los totales para cada una de las celdas con los siguientes estimadores,

- 1.- Estimador Directo
- 2.- Estimador de Razón Separado
- 3.- Estimador de Razón-Regresión Separado-Separado,  $b_h=1$
- 4.- Estimador de Razón-Regresión Separado-Separado,  $b_h =1$  (ajus <0)

- 5.- Estimador de Razón-Regresión Separado-Separado,  $b_h$  óptimo
- 6.- Estimador de Razón-Regresión Separado-Separado,  $b_h = 1$  proporcional
- 7.- Estimador de Regresión Lineal Separado,  $b_h$  óptimo
- 8.- Estimador de Regresión-Razón Separado-Separado,  $b_h = 1$
- 9.- Estimador de Regresión-Razón Separado-Separado,  $b_h = 1$  (ajus  $< 0$ )
- 10.- Estimador de Regresión-Razón Separado-Separado,  $b_h$  óptimo

Igualmente, se calcularon los errores cuadráticos medios, los errores estándar y los coeficientes de variación para cada una de las celdas. En definitiva se generaron 240 tablas, correspondientes a los totales y los errores descritos, para 10 estimadores, en 5 parroquias y la consolidación de ellos que es el Municipio Sucre. Las tablas correspondientes a los totales para el Municipio y sus coeficientes de variación se muestran en el Apéndice B.

Nótese que se incluyeron los estimadores numerados como 4, 6 y 9, que no se trabajaron ni en el desarrollo teórico del tercer capítulo (Estimadores Indirectos Compuestos), como casos especiales, ni en las pruebas anteriores. Los estimadores 4 y 9 se incluyeron porque los estimadores 3 y 8, que si se trabajaron en las pruebas y capítulos anteriores, generan valores negativos en las estimaciones, y éstos estimadores consisten en colocar cero (0) en esos casos. El estimador 6 se incluyó porque es el que se utilizó en el XI Censo General de Población y Vivienda en Venezuela, en 1990.

Los estimadores 3 y 8, aplican las diferencias  $(X_h - \hat{X}_h)$  y  $(Z_h - \hat{Z}_h)$  a cada categoría de las correspondientes celdas de la tabla, por ello, en algunos casos se hace negativa la estimación. El estimador 6, distribuye proporcionalmente estas diferencias entre las celdas correspondientes, así no llega nunca a generar estimaciones negativas.

A continuación se tienen unas tablas resúmenes (tablas 14 a 21) de las tablas generados.

Tabla 14 – Total de Personas por Sexo, según Estimador

Valor Poblacional y Estimador	Total				Hombres				Mujeres			
	Total	Dif	Dif %	cv(Y)	Total	Dif	Dif %	cv(Y)	Total	Dif	Dif %	cv(Y)
Total Poblacional	546.766	-	-	-	259.379	-	-	-	287.387	-	-	-
Est Directo	546.756	-10	0,00%	0,00194	259.273	-106	-0,04%	0,00305	287.483	96	0,03%	0,00299
Est de Razón Sep	546.764	-2	0,00%	0,00194	259.377	-2	0,00%	0,00306	287.387	0	0,00%	0,00299
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$	546.734	-32	-0,01%	0,00284	259.357	-22	-0,01%	0,00437	287.377	-10	0,00%	0,00413
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$ (ajus <0)	555.570	8.804	1,61%	0,00279	263.934	4.555	1,76%	0,00429	291.636	4.249	1,48%	0,00407
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n$ óptimo	546.820	54	0,01%	0,00253	259.787	408	0,16%	0,00391	287.033	-354	-0,12%	0,00372
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$ prop	546.654	-112	-0,02%	0,00189	259.338	-41	-0,02%	0,00302	287.316	-71	-0,02%	0,00292
Est de Regresión Lineal Sep, $b_n$ óptimo	546.214	-552	-0,10%	0,00185	258.987	-392	-0,15%	0,00298	287.226	-161	-0,06%	0,00286
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n=1$	546.710	-56	-0,01%	0,00262	259.634	255	0,10%	0,00401	287.076	-311	-0,11%	0,00387
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n=1$ (ajus <0)	550.752	3.986	0,73%	0,00260	261.909	2.530	0,98%	0,00397	288.843	1.456	0,51%	0,00385
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n$ óptimo	546.500	-266	-0,05%	0,00183	259.175	-204	-0,08%	0,00298	287.325	-62	-0,02%	0,00287

Fuente: XIII Censo General de Población y Vivienda. Venezuela, 2001 / Cálculos Propios

Tabla 15 – Total de Personas Ocupadas por Sexo, según Estimador

Valor Poblacional y Estimador	Total				Hombres				Mujeres			
	Total	Dif	Dif %	cv(Y)	Total	Dif	Dif %	cv(Y)	Total	Dif	Dif %	cv(Y)
Total Poblacional	219.020	-	-	-	126.331	-	-	-	92.689	-	-	-
Est Directo	218.631	-389	-0,18%	0,00251	125.732	-599	-0,47%	0,00444	92.899	210	0,23%	0,00529
Est de Razón Sep	219.360	340	0,16%	0,00254	126.119	-212	-0,17%	0,00448	93.241	552	0,60%	0,00529
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$	217.615	-1.405	-0,64%	0,00410	127.154	823	0,65%	0,00618	90.461	-2.228	-2,40%	0,00733
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$ (ajus <0)	219.618	598	0,27%	0,00406	127.942	1.611	1,28%	0,00613	91.676	-1.013	-1,09%	0,00723
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n$ óptimo	219.415	395	0,18%	0,00361	126.311	-20	-0,02%	0,00565	93.104	415	0,45%	0,00656
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$ prop	219.010	-10	0,00%	0,00258	126.331	0	0,00%	0,00449	92.679	-10	-0,01%	0,00537
Est de Regresión Lineal Sep, $b_n$ óptimo	218.635	-385	-0,18%	0,00257	125.729	-602	-0,48%	0,00453	92.906	217	0,23%	0,00533
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n=1$	219.805	785	0,36%	0,00393	127.420	1.089	0,86%	0,00594	92.386	-303	-0,33%	0,00711
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n=1$ (ajus <0)	220.342	1.322	0,60%	0,00392	127.825	1.494	1,18%	0,00592	92.517	-172	-0,19%	0,00710
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n$ óptimo	219.004	-16	-0,01%	0,00257	126.336	5	0,00%	0,00452	92.668	-21	-0,02%	0,00543

Fuente: XIII Censo General de Población y Vivienda. Venezuela, 2001 / Cálculos Propios

Tabla 16 – Total de Personas Desocupadas por Sexo, según Estimador

Valor Poblacional y Estimador	Total				Hombres				Mujeres			
	Total	Dif	Dif %	cv(Y)	Total	Dif	Dif %	cv(Y)	Total	Dif	Dif %	cv(Y)
Total Poblacional	11.591	-	-	-	7.641	-	-	-	3.950	-	-	-
Est Directo	11.727	136	1,17%	0,01444	7.827	186	2,43%	0,01712	3.900	-50	-1,27%	0,02645
Est de Razón Sep	11.784	193	1,67%	0,01437	7.866	225	2,94%	0,01703	3.918	-32	-0,81%	0,02632
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$	10.829	-762	-6,57%	0,02297	6.746	-895	-11,71%	0,02928	4.083	133	3,37%	0,03739
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$ (ajus <0)	12.354	763	6,58%	0,02014	7.891	250	3,27%	0,02503	4.463	513	12,99%	0,03421
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n$ óptimo	11.787	196	1,69%	0,01920	7.867	226	2,96%	0,02280	3.919	-31	-0,78%	0,03505
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$ prop	11.578	-13	-0,11%	0,01515	7.633	-8	-0,10%	0,01813	3.945	-5	-0,13%	0,02689
Est de Regresión Lineal Sep, $b_n$ óptimo	11.726	135	1,16%	0,01437	7.818	177	2,31%	0,01694	3.908	-42	-1,06%	0,02602
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n=1$	11.368	-223	-1,92%	0,02118	7.300	-341	-4,46%	0,02586	4.068	118	2,98%	0,03392
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n=1$ (ajus <0)	11.861	270	2,33%	0,02030	7.622	-19	-0,24%	0,02477	4.238	288	7,30%	0,03255
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n$ óptimo	11.302	-289	-2,49%	0,01485	7.409	-232	-3,04%	0,02279	3.893	-57	-1,43%	0,03380

Fuente: XIII Censo General de Población y Vivienda. Venezuela, 2001 / Cálculos Propios

Tabla 17 – Total de Personas Buscando Trabajo por Primera Vez por Sexo, según Estimador

Valor Poblacional y Estimador	Total				Hombres				Mujeres			
	Total	Dif	Dif %	cv(Y)	Total	Dif	Dif %	cv(Y)	Total	Dif	Dif %	cv(Y)
Total Poblacional	4.972	-	-	-	3.111	-	-	-	1.861	-	-	-
Est Directo	4.983	11	0,22%	0,02199	3.035	-76	-2,44%	0,02771	1.948	87	4,67%	0,03524
Est de Razón Sep	4.993	21	0,42%	0,02194	3.056	-55	-1,77%	0,02750	1.937	76	4,08%	0,03543
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$	4.863	-109	-2,19%	0,03669	3.321	210	6,75%	0,04258	1.542	-319	-	0,07069
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$ (ajus <0)	5.781	809	16,27%	0,03087	3.819	708	22,76%	0,03702	1.962	101	5,43%	0,05556
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n$ óptimo	4.992	20	0,41%	0,03157	3.055	-56	-1,79%	0,04006	1.937	76	4,07%	0,05044
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$ prop	4.956	-16	-0,32%	0,02325	3.098	-13	-0,42%	0,02878	1.858	-3	-0,16%	0,03832
Est de Regresión Lineal Sep, $b_n$ óptimo	4.965	-7	-0,14%	0,02179	3.027	-84	-2,69%	0,02723	1.938	77	4,13%	0,03470
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n=1$	4.974	2	0,04%	0,03346	3.257	146	4,69%	0,03979	1.717	-144	-7,73%	0,05643
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n=1$ (ajus <0)	5.246	274	5,50%	0,03173	3.407	296	9,50%	0,03804	1.839	-22	-1,18%	0,05269
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n$ óptimo	4.974	2	0,04%	0,02157	3.112	1	0,04%	0,02629	1.862	1	0,03%	0,03581

Fuente: XIII Censo General de Población y Vivienda. Venezuela, 2001 / Cálculos Propios

Tabla 18 – Total de Personas Estudiando por Sexo, según Estimador

Valor Poblacional y Estimador	Total				Hombres				Mujeres			
	Total	Dif	Dif %	cv(Y)	Total	Dif	Dif %	cv(Y)	Total	Dif	Dif %	cv(Y)
Total Poblacional	84.326	-	-	-	40.475	-	-	-	43.851	-	-	-
Est Directo	84.291	-35	-0,04%	0,00479	40.632	157	0,39%	0,00663	43.659	-192	-0,44%	0,00687
Est de Razón Sep	84.371	45	0,05%	0,00476	40.461	-14	-0,03%	0,00663	43.910	59	0,13%	0,00681
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$	84.141	-185	-0,22%	0,00774	40.516	41	0,10%	0,01092	43.625	-226	-0,52%	0,01094
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$ (ajus <0)	85.595	1.269	1,50%	0,00761	41.180	705	1,74%	0,01075	44.415	564	1,29%	0,01074
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n$ óptimo	84.523	197	0,23%	0,00679	40.581	106	0,26%	0,00962	43.942	91	0,21%	0,00956
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$ prop	84.315	-11	-0,01%	0,00485	40.473	-2	0,00%	0,00677	43.842	-9	-0,02%	0,00690
Est de Regresión Lineal Sep, $b_n$ óptimo	84.318	-8	-0,01%	0,00456	40.601	126	0,31%	0,00630	43.718	-133	-0,30%	0,00652
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n=1$	84.265	-61	-0,07%	0,00716	40.146	-329	-0,81%	0,01003	44.120	269	0,61%	0,00997
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n=1$ (ajus <0)	84.893	567	0,67%	0,00711	40.535	60	0,15%	0,00994	44.358	507	1,16%	0,00991
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n$ óptimo	84.326	0	0,00%	0,00445	40.479	4	0,01%	0,00617	43.847	-4	-0,01%	0,00637

Fuente: XIII Censo General de Población y Vivienda. Venezuela, 2001 / Cálculos Propios

Tabla 19 – Total de Personas Pensionadas o Jubiladas por Sexo, según Estimador

Valor Poblacional y Estimador	Total				Hombres				Mujeres			
	Total	Dif	Dif %	cv(Y)	Total	Dif	Dif %	cv(Y)	Total	Dif	Dif %	cv(Y)
Total Poblacional	16.253	-	-	-	9.035	-	-	-	7.218	-	-	-
Est Directo	15.768	-485	-2,98%	0,01379	8.859	-176	-1,95%	0,01806	6.909	-309	-4,28%	0,02145
Est de Razón Sep	15.697	-556	-3,42%	0,01385	8.873	-162	-1,79%	0,01804	6.824	-394	-5,46%	0,02172
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$	18.457	2.204	13,56%	0,01711	9.668	633	7,01%	0,02402	8.789	1.571	21,77%	0,02448
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$ (ajus <0)	19.184	2.931	18,03%	0,01646	10.122	1.087	12,03%	0,02294	9.062	1.844	25,55%	0,02374
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n$ óptimo	15.748	-505	-3,10%	0,01809	8.904	-131	-1,45%	0,02331	6.844	-374	-5,18%	0,02841
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$ prop	16.191	-62	-0,38%	0,01370	9.017	-18	-0,20%	0,01797	7.174	-44	-0,61%	0,02087
Est de Regresión Lineal Sep, $b_n$ óptimo	15.778	-475	-2,92%	0,01369	8.861	-174	-1,93%	0,01772	6.917	-301	-4,17%	0,02113
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n=1$	17.194	941	5,79%	0,01818	9.438	403	4,46%	0,02414	7.757	539	7,46%	0,02708
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n=1$ (ajus <0)	17.413	1.160	7,14%	0,01795	9.529	494	5,47%	0,02390	7.884	666	9,23%	0,02665
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n$ óptimo	16.251	-2	-0,01%	0,01323	9.032	-3	-0,03%	0,01733	7.219	1	0,02%	0,02011

Fuente: XIII Censo General de Población y Vivienda. Venezuela, 2001 / Cálculos Propios

Tabla 20 – Total de Personas en Otra Condición por Sexo, según Estimador

Valor Poblacional y Estimador	Total				Hombres				Mujeres			
	Total	Dif	Dif %	cv(Y)	Total	Dif	Dif %	cv(Y)	Total	Dif	Dif %	cv(Y)
Total Poblacional	210.604	-	-	-	72.786	-	-	-	137.818	-	-	-
Est Directo	211.356	752	0,36%	0,00359	73.188	402	0,55%	0,00598	138.168	350	0,25%	0,00442
Est de Razón Sep	210.559	-45	-0,02%	0,00358	73.002	216	0,30%	0,00595	137.557	-261	-0,19%	0,00443
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$	210.829	225	0,11%	0,00474	71.952	-834	-1,15%	0,00833	138.877	1.059	0,77%	0,00586
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$ (ajus <0)	213.038	2.434	1,16%	0,00469	72.980	194	0,27%	0,00821	140.058	2.240	1,63%	0,00581
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n$ óptimo	210.354	-250	-0,12%	0,00423	73.068	282	0,39%	0,00722	137.286	-532	-0,39%	0,00528
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$ prop	210.604	0	0,00%	0,00332	72.786	0	0,00%	0,00553	137.818	0	0,00%	0,00413
Est de Regresión Lineal Sep, $b_n$ óptimo	210.792	188	0,09%	0,00326	72.952	166	0,23%	0,00542	137.840	22	0,02%	0,00406
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n=1$	209.103	-1.501	-0,71%	0,00417	72.074	-712	-0,98%	0,00684	137.029	-789	-0,57%	0,00536
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n=1$ (ajus <0)	210.997	393	0,19%	0,00414	72.991	205	0,28%	0,00675	138.006	188	0,14%	0,00532
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n$ óptimo	210.644	40	0,02%	0,00322	72.808	22	0,03%	0,00528	137.836	18	0,01%	0,00403

Fuente: XIII Censo General de Población y Vivienda. Venezuela, 2001 / Cálculos Propios

Tabla 21 – Total de Personas Ocupadas con Bachillerato o técnico Medio por Sexo, según Estimador

Valor Poblacional y Estimador	Total				Hombres				Mujeres			
	Total	Dif	Dif %	cv(Y)	Total	Dif	Dif %	cv(Y)	Total	Dif	Dif %	cv(Y)
Total Poblacional	53.020	-	-	-	29.740	-	-	-	23.280	-	-	-
Est Directo	53.412	392	0,74%	0,00523	29.905	165	0,55%	0,01015	23.507	227	0,98%	0,01126
Est de Razón Sep	53.551	531	1,00%	0,00523	29.993	253	0,85%	0,01014	23.558	278	1,19%	0,01124
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$	53.202	182	0,34%	0,00806	30.200	460	1,55%	0,01324	23.002	-278	-1,19%	0,01451
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$ (ajus <0)	53.292	272	0,51%	0,00804	30.250	510	1,71%	0,01320	23.042	-238	-1,02%	0,01448
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n$ óptimo	53.566	546	1,03%	0,00717	30.031	291	0,98%	0,01226	23.535	255	1,09%	0,01328
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_n=1$ prop	53.471	451	0,85%	0,00531	30.080	340	1,14%	0,01016	23.391	111	0,48%	0,01141
Est de Regresión Lineal Sep, $b_n$ óptimo	53.425	405	0,76%	0,00522	29.990	250	0,84%	0,01011	23.434	154	0,66%	0,01128
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n=1$	53.917	897	1,69%	0,00824	30.615	875	2,94%	0,01324	23.302	22	0,10%	0,01500
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n=1$ (ajus <0)	54.010	990	1,87%	0,00823	30.677	937	3,15%	0,01321	23.333	53	0,23%	0,01499
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_n$ óptimo	53.491	471	0,89%	0,00539	30.049	309	1,04%	0,01039	23.442	162	0,69%	0,01164

Fuente: XIII Censo General de Población y Vivienda. Venezuela, 2001 / Cálculos Propios

En la tabla 22 se muestra un resumen de las diferencias entre el valor poblacional y las estimaciones, separadamente para la tabla 14 y las tablas 15 a la 21.

Tabla 22 – Diferencias mínimas, máximas y promedio entre el Valor Poblacional y Estimaciones, para las tablas 14, y las tablas 15 a la 21

Valor Polacional y Estimador	Totales y Estimaciones de la tabla 14			Totales y Estimaciones de las tablas 15 a 21		
	Mínimo	Máximo	Promedio	Mínimo	Máximo	Promedio
Total Poblacional						
Est Directo	0,00%	0,04%	0,03%	0,04%	4,67%	1,27%
Est de Razón Sep	0,00%	0,00%	0,00%	0,02%	5,46%	1,29%
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_h=1$	0,00%	0,01%	0,01%	0,10%	21,77%	4,75%
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_h=1$ (ajus <0)	1,48%	1,76%	1,61%	0,27%	25,55%	6,49%
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_h$ óptimo	0,01%	0,16%	0,10%	0,02%	5,18%	1,27%
Est de Razón-Regr Sep-Sep, $b_h=1$ prop	0,02%	0,02%	0,02%	0,00%	1,14%	0,24%
Est de Regresión Lineal Sep, $b_h$ óptimo	0,06%	0,15%	0,10%	0,01%	4,17%	1,17%
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_h=1$	0,01%	0,11%	0,07%	0,04%	7,73%	2,36%
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_h=1$ (ajus <0)	0,51%	0,98%	0,74%	0,14%	9,50%	2,75%
Est de Regr-Razón Sep-Sep, $b_h$ óptimo	0,02%	0,08%	0,05%	0,00%	3,04%	0,47%

En general, todos los estimadores se comportan bastante bien, con errores bajos, y pequeñas diferencias con los valores poblacionales.

Observando cada uno de ellos, puede notarse que como el estimador directo no considera variables auxiliares, únicamente los tamaños poblacionales y muestrales, la diferencia entre la estimación y el valor poblacional de la población total es muy pequeño (0,00%, que equivale a 10 personas). Al separar por sexo, las diferencias aumentan a 0,04% y 0,03% para hombres y mujeres respectivamente, y a medida que se va desagregando la información, las diferencias aumentan, llegando a alcanzar 4,67%. Esto se debe a que este estimador apunta a  $N$ , y no a ninguna variable.

El estimador de razón separado utiliza una variable auxiliar, que en este caso son sexo y grupos de edad, y obtiene la menor diferencia con el valor poblacional para estimar el total de personas, de hombres y de mujeres (2, 2 y 0 personas respectivamente, 0% en cada caso).

Al desagregar por Situación en la Fuerza de Trabajo, las diferencias van aumentando, y llegan hasta 5,46%, y el promedio es similar al del estimador directo.

Los de mejor comportamiento son el de Razón-Regresión con  $b_h$  distribuido proporcionalmente entre las categorías de respuesta y el de Regresión-Razón con  $b$  óptimo. Para el primero, en el total de personas su comportamiento es excelente, aunque no el mejor, por muy poco. Pero para el resto de las estimaciones, cuando se desagregan las variables, alcanza el menor mínimo, el menor máximo y el menor promedio (tabla 22). Para el estimador de Regresión-Razón con  $b$  óptimo, su comportamiento general es muy bueno, obteniendo resultados muy cerca de los valores poblacionales, pero por detrás del anterior (tabla 22).

Cabe destacar que el estimador de Razón-Regresión con  $b_h$  distribuido proporcionalmente entre las categorías de respuesta fue el estimador que se utilizó en el Censo '90, y de donde surge el planteamiento de éste trabajo, aunque en ese momento su aplicación respondió más a un hecho estético-político (que las estimaciones de Situación en la Fuerza de Trabajo cuadraran con el valor poblacional), que a uno analítico.

Los que tienen peor comportamiento son los de Razón-Regresión y de Regresión-Razón con  $b_h=1$ , y con  $b_h=1$  ajustando las estimaciones negativas a cero.

El resto de los estimadores se comportan de manera similar y bien, destacando el de Regresión-Razón con  $b_h$  que minimice la varianza.

En cuanto al coeficiente de variación, el que más veces obtiene el valor mínimo es el de Regresión-Razón con  $b_h$  óptimo, seguido por el de Regresión Lineal con  $b$  óptimo, entre estos dos se reparten la mayoría de los coeficientes mínimos y los segundos. En un segundo lote se tienen el estimador de razón, el directo y el de Razón-Regresión con  $b_h$  distribuido proporcionalmente entre las categorías de respuesta.

Con esto se evidencia que es factible utilizar los estimadores indirectos compuestos en censos y encuestas por muestreo, no sólo para variables numéricas, sino para variables

categóricas, y que si bien no mejoran sustancialmente la precisión de los estimadores indirectos sencillos, en muchos casos si reducen las diferencias con los valores poblacionales, muy útil en censos en los cuales se aplica enumeración completa para algunas variables y una muestra para otras, y da lugar a comparaciones entre valores poblacionales y estimaciones.

## RESUMEN Y CONCLUSIONES

En el presente trabajo se proponen y desarrollan “**Estimadores Indirectos Compuestos**”, siendo un planteamiento inédito. En el desarrollo se demuestra la factibilidad de utilización de los mismos en censos y encuestas por muestreo; para variables numéricas y variables categóricas, así como para estimar errores cuadráticos medios.

Se presenta una opción para casos de estudios poblacionales, en los cuales las diferencias entre el valor poblacional y el muestral, no suele ser un problema, ya que en la mayoría de los casos se desconocen los valores poblacionales, a lo sumo se conocen los totales para algunas variables, provenientes de registros administrativos o procedimientos de proyecciones, pero en censos, donde se investigan variables por enumeración completa y por muestreo, esto cobra relevancia, ya que algunos cuadros se podrán generar de la base de datos de la enumeración completa, pero otros se tendrán que generar de la base de datos de la muestra, y podrán compararse valores poblacionales y estimaciones. Al tratarse de variables numéricas, y más aun si son variables reales, que acepten decimales, estas diferencias suelen ser pequeñas, pero en variables enteras y más aun categóricas, las diferencias pueden ser altas. Los estimadores indirectos compuestos reducen estas diferencias, ya que permiten incluir más variables auxiliares. En las pruebas con data real realizadas en el desarrollo del estudio, se trabaja con tres variables artificiales, a manera de post-estratos -sexo, grupos de edad y situación en la fuerza de trabajo-, y los resultados mejoran, en comparación a los de los estimadores de razón y de regresión lineal, que sólo utilizan dos variables artificiales -sexo y grupos de edad-, sobre todo en el caso del de Razón-Regresión con  $b_h$  distribuido proporcionalmente entre las categorías de respuesta y el de Regresión-Razón con  $b$  óptimo.

Al considerar las precisiones, sea el Error Cuadrático Medio o el Coeficiente de Variación, se observa que en algunos casos se logra mejorar la precisión.

Para el muestreo aleatorio simple, el estimador de Razón-Regresión se comporta bastante bien, sobre todo cuando se utiliza el  $b$  que minimiza el  $ECM$ . Su precisión es muy buena cuando  $\rho_{xy} \rightarrow 1$  y/o  $\rho_{yz} \rightarrow 1$  o cuando  $\rho_{xy} \rightarrow 1$  y/o  $\rho_{yz} \rightarrow -1$ . Cuando  $\rho_{xy}$  se aleja de 1 el

estimador pierde precisión, pero en cualquier caso se compensa cuando se hace fuerte con “z”, en cualquier sentido.

El estimador de Regresión-Razón es muy bueno cuando  $\rho_{xy} \rightarrow 1$  o  $\rho_{xy} \rightarrow -1$  y  $\rho_{yz} \rightarrow 1$  o  $\rho_{yz} \rightarrow -1$ , excepto cuando  $b=1$ , que pierde precisión cuando  $\rho_{xy} \rightarrow -1$  y/o  $\rho_{yz} \rightarrow -1$ . El estimador con dos  $b$  óptimos ( $b_y$  y  $b_z$ ) suele ser mejor que con un solo  $b$  óptimo, excepto cuando  $\rho_{xy} \rightarrow 0$  y  $\rho_{yz} \rightarrow 1$ .

En términos generales, se puede decir que si  $\rho_{xy} \rightarrow 1$  o  $\rho_{xy} \rightarrow -1$  el estimador de regresión lineal es muy bueno, si además  $\rho_{yz} \rightarrow 1$ , los estimadores de Regresión-Razón se comportan muy bien, mejorando al de regresión cuando  $\rho_{xy}$  deja de ser muy fuerte. Caso contrario ocurre con los estimadores de Razón-Regresión, si  $\rho_{xy} \rightarrow 1$  y  $\rho_{yz} \rightarrow -1$ , entonces son muy buenos y mejoran al de regresión lineal a medida que  $\rho_{xy}$  deja de ser fuerte, y aunque se debilita un poco cuando  $\rho_{xy} \rightarrow -1$ , se compensan cuando  $\rho_{yz} \rightarrow 1$  o  $\rho_{yz} \rightarrow -1$ .

Para el muestreo estratificado, el análisis es exactamente igual, con la complejidad que supone hacerlo en cada estrato, y aunque se puede complicar mucho la decisión sobre el tipo de estimador, incluso aplicar diferentes estimadores en los estratos, se presenta una Tabla que resulta de mucha utilidad a la hora de tener una guía de decisión; en ella se contemplan aspectos como el tamaño de muestra en cada estrato y la similitud o disparidad entre las razones ( $R_h$ ) y los coeficientes de regresión ( $b_h$ ) que unidos al análisis sobre  $\rho_{xy_h}$  y  $\rho_{yz_h}$  dan gran soporte a la decisión.

En cuanto al análisis en función de las correlaciones, en primer lugar debe decirse que los estimadores de Razón-Regresión son muy susceptibles a cambios en las correlaciones en los estratos. Al tratar el separado-separado con  $b$  óptimo, se observa que se comporta muy bien cuando  $\rho_{xy_h} \rightarrow 1$  y  $\rho_{yz_h} \rightarrow 1$ , para todo  $h, h=1, 2, \dots, L$ . Si  $\rho_{xy_h}$  o  $\rho_{yz_h}$  baja en algún  $h$ , el estimador pierde precisión. Si la correlación global de "y" con alguna de las variables es mayor que en los estratos, es preferible combinar. Igualmente, es preferible combinar si los  $R_h$  o  $b_h$  tienden a

parecerse. Cuando  $b_h=1$  en todos los estratos, suele bajar la precisión, sin embargo, en algunos casos la mejora, y esto se debe a que en los estimadores de Razón-Regresión, no siempre se cumplen las condiciones necesarias para lograr realmente un  $b$  que minimice el *ECM*. El separado-combinado es más estable, ya que al combinar los  $b_h$  elimina unos de los factores de susceptibilidad; cuando hay mucha variabilidad en  $\rho_{xy_h}$ ,  $\rho_{yz_h}$ ,  $\rho_{xz_h}$ , para todo  $h$ , y  $\rho_{xy}$ ,  $\rho_{yz}$ ,  $\rho_{xz}$ , este estimador mejora al anterior. Cuando  $b_h=1$  en todos los estratos, ambos estimadores coinciden, y las conclusiones son las mismas. El combinado-combinado es aun más estable, porque elimina los dos aspectos de susceptibilidad del estimador, pero no siempre es mejor, sólo mejora los anteriores cuando existe mucha disparidad en las correlaciones de estrato a estrato. Al hacer  $b_h=1$ , es aun más estable, pero en ningún caso mejora la precisión.

El estimador de Regresión-Razón es uno de los estimadores más estables que hay, sobre todo el separado-separado, y se comporta muy bien aun con correlaciones bajas. Cuando  $\rho_{xy_h} \rightarrow 1$  y  $\rho_{yz_h} \rightarrow 1$ , para todo  $h$ ,  $h=1,2,\dots,L$ , es superado por los estimadores de Razón y de Regresión Lineal, pero cuando alguna correlación baja en algún estrato, es el que mejor se comporta. Al hacer  $b_h=1$  en todos los estratos, se deteriora el estimador. Cuando se aplica el separado-combinado, resulta menos estable, y lo mejora cuando los  $R_h$  y los  $b_h$  se parecen entre ellos,  $h=1,2,\dots,L$ , o cuando las correlaciones globales son mayores que en los estratos. Cuando  $b_h=1$  en todos los estratos, en general se gana estabilidad pero se pierde precisión. Al trabajar el combinado-combinado, resulta más estable, pero casi nunca mejora la precisión de los anteriores. Cuando  $b_h=1$  en todos los estratos, se tiene el mismo estimador que en el caso anterior.

Mención especial requieren los estimadores de Regresión-Razón con  $b_y$  y  $b_z$  que minimizan el Error Cuadrático Medio, es decir dos coeficientes ( $b_y$  y  $b_z$ ) en lugar de uno sólo ( $b$ ). Tienen un comportamiento similar, pero los primeros son más estables, de hecho el separado-separado es el más estable de todos, y en general, no sólo son más estables, sino también más precisos.

En cuanto a la exactitud de las fórmulas para calcular los Errores Cuadráticos Medios de los estimadores, resultan en general muy exactas, y las diferencias respecto a los valores

verdaderos, que provienen de la distribución muestral, van desde el 0,0012% al 0,6%, con promedio 0,4%, pero las menos exactas son las fórmulas del Estimador de Regresión-Razón con un sólo  $b$ , que al usar el  $b$  óptimo las diferencias van desde el 0,07% al 44%, con promedio 6%, y alcanza sus mayores desviaciones en la medida en que  $\rho_{yz} \rightarrow -1$ , pero cuando  $\rho_{yz} \rightarrow 1$  es igual de exacto que el resto.

Finalmente, tal como se demostró en el Análisis de los Estimadores Indirectos Compuestos, todos los estimadores son casos particulares de estimadores de regresión lineal, no sólo los estimadores indirectos compuestos, sino también el estimador de razón.

En el caso del estimador de Razón-Regresión se tiene

$$\hat{Y}_{Rr} = \hat{Y}_R + b(\bar{Z} - \hat{Z}_R) = \bar{y} + a(\bar{X} - \bar{x}) + b(\bar{Z} - \bar{z})$$

donde  $a = (b_1 - bb_2)$

y a su vez,  $b_1$  y  $b_2$  son tales que,

$$\hat{Y}_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X} = \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}), \text{ con } b_1 = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \quad \text{y} \quad \hat{Z}_R = \frac{\bar{z}}{\bar{x}} \bar{X} = \bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x}), \text{ con } b_2 = \frac{\bar{z}}{\bar{x}}.$$

y si  $b_1 = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ ,  $b_2 = \frac{\bar{z}}{\bar{x}}$ ,  $b = \frac{\hat{Y}_R}{\hat{Z}_R}$ , entonces,  $\hat{Y}_{Rr} = \left(\frac{\bar{y}}{\bar{z}}\right) \bar{Z} = \bar{y} + \frac{\bar{y}}{\bar{z}}(\bar{Z} - \bar{z})$

Para el estimador de Regresión-Razón se tienen dos casos, uno utiliza un coeficiente de regresión y el otro utiliza dos coeficientes.

$$\hat{Y}_{rR} = \frac{\hat{Y}_r}{\hat{Z}_r} \bar{Z} = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} \bar{Z}, \quad \hat{Y}_{rR} = \frac{\hat{Y}_r}{\hat{Z}_r} \bar{Z} = \frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \bar{Z}$$

y se tiene que,

$$\hat{Y}_{rR} = \bar{y} + c_1(\bar{X} - \bar{x}) + c_2(\bar{Z} - \bar{z}) \quad , \text{ donde } \quad c_1 = b \left( 1 - \left( \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} \right) \right) \quad , \quad c_2 = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})}$$

y

$$\hat{Y}'_{rR} = \bar{y} + c_1(\bar{X} - \bar{x}) + c_2(\bar{Z} - \bar{z}) \quad , \text{ donde } \quad c_1 = b_1 - b_2 \left( \frac{\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})} \right) \quad , \quad c_2 = \frac{\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})}$$

que son estimadores de regresión lineal con dos variables auxiliares (“x” y “z”) y dos coeficientes ( $c_1$  y  $c_2$ ).

Si para  $\hat{Y}'_{rR}$ ,  $b_1 = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$  y  $b_2 = \frac{\bar{z}}{\bar{x}}$ , entonces,

$$c_1 = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} - \frac{\bar{z}}{\bar{x}} \left( \frac{\bar{y} + \frac{\bar{y}}{\bar{x}}(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + \frac{\bar{z}}{\bar{x}}(\bar{X} - \bar{x})} \right) = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} - \frac{\bar{z}}{\bar{x}} \left( \frac{\frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X}}{\frac{\bar{z}}{\bar{x}} \bar{X}} \right) = \frac{\bar{y}}{\bar{x}} - \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = 0 \quad , \quad c_2 = \frac{\bar{y} + \frac{\bar{y}}{\bar{x}}(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + \frac{\bar{z}}{\bar{x}}(\bar{X} - \bar{x})} = \frac{\frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X}}{\frac{\bar{z}}{\bar{x}} \bar{X}} = \frac{\bar{y}}{\bar{z}}$$

$$\text{Entonces, } \hat{Y}'_{rR} = \bar{y} + \frac{\bar{y}}{\bar{z}}(\bar{Z} - \bar{z}) = \frac{\bar{y}}{\bar{z}} \bar{Z} = \hat{Y}_{Rr}$$

Igualmente se demuestra que  $\hat{Y}_R$  también es un estimador de regresión lineal, por lo tanto, se concluye que todos los estimadores indirectos, son estimadores de regresión lineal.

## BIBLIOGRAFÍA

- Artés, E.** (2001). *Contribuciones al muestreo sucesivo: estimador producto multivariante*. QUESTIIO (Quaderns d'Estadística, Sistemes, Informàtica i Investigació Operativa), vol. 25, 1. Recuperado el 17 de septiembre de 2009 de <http://upcommons.upc.edu/revistes/bitstream/2099/4139/4/article.pdf>.
- Azorín, F., & Sánchez-Crespo, J.** (1986). *Métodos y aplicaciones del muestreo*. Madrid: Alianza Editorial/Alianza Universidad Textos.
- Cochram, W.** (1984). *Técnicas de muestreo*. (Trad. A. Sestier B.). (4ta. Ed.). México: C.E.C.S.A. (Original en Inglés, 1977).
- Costa, A., Satorra, A. & Ventura, E.** (2002). *Estimadores compuestos en estadística regional: una aplicación de la tasa de variación de la ocupación en la industria*. QUESTIIO -Quaderns d'Estadística, Sistemes, Informàtica i Investigació Operativa- (vol 26, 1-2, pag. 213-243). España. Recuperado el 23 de octubre de 2006 de <http://www.raco.cat/index.php/Questiio/article/viewFile/27025/26859>.
- Costa, A., Satorra, A. & Ventura, E.** (2003). *An empirical evaluation of small area Estimators*. En UPF Economics and Business. Working Paper No. 674. Recuperado el 23 de octubre de 2006 de [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=428200](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=428200)
- Costa, A., Satorra, A. & Ventura, E.** (2004). *Improving both domain and total area estimation by composition*. SORT 28 (1), (pp. 69-86). January-June 2004. <http://www.raco.cat/index.php/SORT/article/viewFile/28862/28696>.
- Costa, A., Satorra, A. & Ventura, E.** (2006). *Improving small area estimation by combining surveys: new perspectives in regional statistics*. España. Recuperado el 10 de noviembre de 2008 de <http://www.econ.upf.edu/~ventura/my-public-files/csv4.pdf>.
- Costa, A., Satorra, A. & Ventura, E.** (2008). *On the performance of small-area estimators: fixed vs. random area parameters*. Recuperado el 18 de abril de 2009 de SSRN: [http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1107775](http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1107775).
- Deming, W.** (1960). *Sample design in business research*. USA:John Wiley & Sons, Inc.
- United State of American, Department of Commerce-Bureau of the Census** (1978). *The current population survey: design and methodology*. Washington: Bureau of the Census.
- España, Euskal Estatistika Erakunda/Instituto Vasco de Estadística (EUSTAT)**. (s/f). *Cálculo de coeficientes de variación para diferentes estimadores directos*

*e indirectos utilizados en las encuestas económicas de Eustat. España.* Recuperado el 23 de marzo de 2009 de [http://www.eustat.es/document/datos/Errores\\_c.pdf](http://www.eustat.es/document/datos/Errores_c.pdf).

**García, M., Rovira, C. & Ventura, E.** (2008). *La práctica de la estimación de pequeñas áreas en los institutos de estadística de CCAA para mejorar la estadística municipal y comarcal.* En XVI JECAS - Jornadas de Estadística de las Comunidades Autónomas-. Santander, España. Recuperado el 06 de junio de 2009 de [http://www.icane.es/opencms/opencms/ponencias/CATALUxA/TALLER\\_AREAS\\_PEQUEXAS\\_IDESCAT.ppt](http://www.icane.es/opencms/opencms/ponencias/CATALUxA/TALLER_AREAS_PEQUEXAS_IDESCAT.ppt).

**García, A. & Artés, E.** (2002). *Aportaciones al muestreo sucesivo: estimador combinado de la razón poblacional tipo razón-producto.* Revista Colombiana de Estadística, 25(2), 145-158. Recuperado el 25 de julio de 2008 de [http://www.emis.de/journals/RCE/V25/V25\\_2\\_145GarciaArtes.pdf](http://www.emis.de/journals/RCE/V25/V25_2_145GarciaArtes.pdf).

**González, S.** (2008). *El uso de datos agregados e individuales para estimar modelos econométricos.* (pp.197-216). Recuperado el 04 de marzo de 2009 de <http://www.scribd.com/doc/5368647/12-Uso-de-datos-para-estimar-modelos-econometricos>.

**Gurrea, I. & Montero, L.** (1999). *Diseño de la muestra del censo 90 de Venezuela: consideraciones teóricas, metodológicas y operativas.* Caracas: Unidad de Publicaciones y Reproducción (FACES).

**Jules, B.** (2006). *Comparación de las metodologías y software utilizados para el cálculo de los errores de muestreo de la encuesta de hogares por muestreo.* Trabajo final de pasantía para optar al título de Licenciado en Estadística, Escuela de Estadística y Ciencias Actuariales, Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela.

**Kish, L.** (1979). *Muestreo de encuestas.* (2da. ed.). México: Trillas.

**Lohr, S.** (2000). *Muestreo: diseño y análisis.* (Trad. Óscar A. Palmas V.). México: International Thomson. (Original en Inglés, 1999).

**Longford, N.** (2001). *Synthetic estimators with moderating influence: the carry-over in cross-over trial revisited.* Statistics in Medicine, 20, 3189-3203. Recuperado el 25 de octubre de 2006 de [http://www.ucm.es/BUCM/compludoc/W/10111/02776715\\_2.htm](http://www.ucm.es/BUCM/compludoc/W/10111/02776715_2.htm)

**Martín-Caro, H.** (1995). *El uso de las técnicas de simulación como método alternativo en la evaluación de censos.* Trabajo de ascenso presentado para ascender a la categoría de Asistente, Escuela de Estadística y Ciencias Actuariales, Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela.

- Martín-Caro, H.** (2006). *Análisis Muestral* -Trabajo de ascenso Trabajo de ascenso presentado para ascender a la categoría de Agregado, Escuela de Estadística y Ciencias Actuariales, Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela.
- Venezuela, Oficina Central de Estadística e Informática** (1993). *El censo 90 en Venezuela*. Caracas: OCEI.
- Pérez, C.** (1999). *Técnicas de muestreo estadístico, teoría, práctica y aplicaciones informáticas*; Madrid: RA-MA Editorial.
- Pfeffermann, D.** (2002). *Small Area Estimations-New Developments and Directions*. International Statistical Review, 70, 125-143.
- Sánchez-Crespo, G & Sánchez-Crespo, J.** (1983). *Estimadores sintéticos en las encuestas socio-económicas*. Estadística Española, 101, 55-65. Recuperado el 11 de noviembre de 2008 de [http://www.ine.es/revistas/estaespa/101\\_4.pdf](http://www.ine.es/revistas/estaespa/101_4.pdf).
- Särndal, C.E., Swensson, B. and Wretman, J.H.** (1989). *The Weighted Technique for Estimating the Variance of the General Regression Estimator of the Finite Population Total*. Biometrika, 76, 3, 527-537.
- Sukhatme, P.** (1956). *Teoría de encuestas por muestreo con aplicaciones*. (Trad. A. Flores, J. Nieto de Pascual). México: Fondo de Cultura Económica. (Original en Inglés, 1953)
- Vilar, J. & González, W.** (2000). *Resampling for checking linear regression models via nonparametric regression estimation*. Computational Statistics and Data Analysis, 35, 211-231. Recuperado el 25 de octubre de 2006 de [http://www.sciencedirect.com/science?\\_ob=ArticleURL&\\_udi=B6V8V-41WBG12-6&\\_user=10&\\_coverDate=12%2F28%2F2000&\\_rdoc=6&\\_fmt=high&\\_orig=browse&\\_srch=doc-info\(%23toc%235880%232000%23999649997%23221164%23FLA%23display%23Volume\)&\\_cdi=5880&\\_sort=d&\\_docanchor=&\\_ct=6&\\_acct=C000050221&\\_version=1&\\_urlVersion=0&\\_userid=10&md5=f4efe47ad3d8aa9e9af068a1a6d40e41](http://www.sciencedirect.com/science?_ob=ArticleURL&_udi=B6V8V-41WBG12-6&_user=10&_coverDate=12%2F28%2F2000&_rdoc=6&_fmt=high&_orig=browse&_srch=doc-info(%23toc%235880%232000%23999649997%23221164%23FLA%23display%23Volume)&_cdi=5880&_sort=d&_docanchor=&_ct=6&_acct=C000050221&_version=1&_urlVersion=0&_userid=10&md5=f4efe47ad3d8aa9e9af068a1a6d40e41)

## **APÉNDICES**

## Apéndice A

### Caracterización de Escenarios Data Artificial Grande

Razones de los Estimadores de Razón, Coeficientes de Regresión de los Estimadores de Regresión Lineal, Coeficientes de Correlación entre las variables, tomadas dos a dos, para los escenarios 1 a 4

	Estrato	Escenario 1			Escenario 2			Escenario 3			Escenario 4		
		y,x	y,z	x,z	y,x	y,z	x,z	y,x	y,z	x,z	y,x	y,z	x,z
R <sub>n</sub>	1	0,1785	0,9362	5,2448	0,1785	0,0066	0,0369	0,1785	0,0066	0,0369	0,1785	0,1906	1,0680
	2	0,4096	0,9834	2,4009	0,4096	0,0721	0,1760	0,4096	0,9882	2,4126	0,4096	0,5269	1,2865
	3	0,7841	0,9941	1,2678	0,7841	0,3859	0,4921	0,7841	0,3859	0,4921	0,7841	0,6824	0,8702
	4	1,2353	0,9972	0,8073	1,2353	1,3202	1,0687	1,2353	0,9979	0,8079	1,2353	0,7015	0,5679
	5	2,1231	0,9988	0,4704	2,1231	4,8355	2,2776	2,1231	4,8355	2,2776	2,1231	0,7533	0,3548
	6	3,4953	0,9993	0,2859	3,4953	15,5693	4,4544	3,4953	0,9996	0,2860	3,4953	0,8571	0,2452
	Global	2,5769	0,9989	0,3876	2,5769	3,8332	1,4875	2,5769	1,1560	0,4486	2,5769	0,8121	0,3151
B <sub>n</sub>	1	0,0082	0,7769	0,6528	0,0082	-0,0064	-0,0066	0,0082	-0,0064	-0,0066	0,0082	0,1569	-0,1301
	2	0,0002	0,9938	0,0355	0,0002	-0,0738	0,0028	0,0002	0,7593	-0,2189	0,0002	0,8395	-0,0661
	3	0,0390	1,0008	0,3134	0,0390	-0,4008	-0,1265	0,0390	-0,4008	-0,1265	0,0390	0,9575	0,2765
	4	0,0092	0,9882	0,4975	0,0092	-1,3210	-0,6438	0,0092	0,5239	0,3089	0,0092	0,8685	0,5146
	5	0,0195	0,9992	0,2880	0,0195	-4,8813	-1,3612	0,0195	-4,8813	-1,3612	0,0195	0,9832	0,2682
	6	0,0003	0,9983	0,0123	0,0003	-15,4801	-0,2565	0,0003	0,5504	0,0380	0,0003	0,9773	0,0057
	Global	3,3795	1,0000	0,1541	3,3795	-1,1142	-0,2518	3,3795	0,6324	0,0693	3,3795	0,9037	0,1425
Coeficientes de Correlación	1	0,0878	0,8879	0,0695	0,0878	-0,9941	-0,0947	0,0878	-0,9941	-0,0947	0,0878	0,3505	-0,0271
	2	0,0007	0,9948	0,0085	0,0007	-0,9928	0,0089	0,0007	0,8491	-0,0587	0,0007	0,9137	-0,0172
	3	0,1109	0,9989	0,1099	0,1109	-0,9965	-0,1105	0,1109	-0,9965	-0,1105	0,1109	0,9820	0,0996
	4	0,0669	0,9959	0,0690	0,0669	-0,9995	-0,0670	0,0669	0,7051	0,0572	0,0669	0,9396	0,0766
	5	0,0751	0,9993	0,0749	0,0751	-0,9989	-0,0725	0,0751	-0,9989	-0,0725	0,0751	0,9884	0,0701
	6	0,0015	0,9993	0,0027	0,0015	-0,9929	-0,0036	0,0015	0,7388	0,0112	0,0015	0,9889	0,0013
	Global	0,7217	1,0000	0,7217	0,7217	-0,6099	-0,6452	0,7217	0,7600	0,3898	0,7217	0,9977	0,7365

Promedios y Coeficientes de Variación de las variables y, x, z, para los escenarios 1 a 4

		Escenario 1			Escenario 2			Escenario 3			Escenario 4		
		y	x	z	y	x	z	y	x	z	y	x	z
Promedios	1	25,8100	144,6000	27,5700	25,8100	144,6000	3,916,3900	25,8100	144,6000	3,916,3900	25,8100	144,6000	135,3900
	2	120,7950	294,9000	122,8300	120,7950	294,9000	1,676,0050	120,7950	294,9000	122,2350	120,7950	294,9000	229,2350
	3	341,3325	435,3000	343,3575	341,3325	435,3000	884,5425	341,3325	435,3000	884,5425	341,3325	435,3000	500,2125
	4	726,5313	588,1500	728,5363	726,5313	588,1500	550,3175	726,5313	588,1500	728,0425	726,5313	588,1500	1.035,6138
	5	1.554,1800	732,0333	1.556,1247	1.554,1800	732,0333	321,4107	1.554,1800	732,0333	321,4107	1.554,1800	732,0333	2.063,0667
	6	3.052,7315	873,3900	3.054,7650	3.052,7315	873,3900	196,0735	3.052,7315	873,3900	3.053,9175	3.052,7315	873,3900	3.561,6895
	Global	1.836,2462	712,5820	1.838,2424	1.836,2462	712,5820	479,0348	1.836,2462	712,5820	1.588,4576	1.836,2462	712,5820	2.261,1882
Coeficientes de Variación de las Variables	1	0,1037	0,1987	0,1110	0,1037	0,1987	0,1059	0,1037	0,1987	0,1059	0,1037	0,1987	0,0442
	2	0,1139	0,1946	0,1121	0,1139	0,1946	0,1105	0,1139	0,1946	0,1258	0,1139	0,1946	0,0653
	3	0,0850	0,1898	0,0843	0,0850	0,1898	0,0816	0,0850	0,1898	0,0816	0,0850	0,1898	0,0595
	4	0,0218	0,1958	0,0219	0,0218	0,1958	0,0218	0,0218	0,1958	0,0293	0,0218	0,1958	0,0166
	5	0,0243	0,1983	0,0243	0,0243	0,1983	0,0241	0,0243	0,1983	0,0241	0,0243	0,1983	0,0184
	6	0,0125	0,1982	0,0125	0,0125	0,1982	0,0125	0,0125	0,1982	0,0168	0,0125	0,1982	0,0108
	Global	0,5906	0,3250	0,5900	0,5906	0,3250	1,2392	0,5906	0,3250	0,8204	0,5906	0,3250	0,5295

Razones de los Estimadores de Razón, Coeficientes de Regresión de los Estimadores de Regresión Lineal, Coeficientes de Correlación entre las variables, tomadas dos a dos, para los escenarios 5 a 8

	Estrato	Escenario 5			Escenario 6			Escenario 7			Escenario 8		
		y,x	y,z	x,z	y,x	y,z	x,z	y,x	y,z	x,z	y,x	y,z	x,z
R <sub>h</sub>	1	0,1785	1,0328	5,7863	0,1785	2,3485	13,1574	0,9362	0,0066	0,0070	0,9362	0,0066	0,0070
	2	0,4096	0,9949	2,4289	0,4096	1,1787	2,8776	0,9834	0,0721	0,0733	0,9834	0,9882	1,0049
	3	0,7841	0,9958	1,2700	0,7841	1,6653	2,1238	0,9941	0,3859	0,3882	0,9941	0,3859	0,3882
	4	1,2353	0,9936	0,8043	1,2353	2,3069	1,8675	0,9972	1,3202	1,3238	0,9972	0,9979	1,0007
	5	2,1231	0,9928	0,4676	2,1231	2,8267	1,3314	0,9988	4,8355	4,8415	0,9988	4,8355	4,8415
	6	3,4953	0,9799	0,2803	3,4953	3,3927	0,9706	0,9993	15,5693	15,5797	0,9993	0,9996	1,0003
	Global	2,5769	0,9843	0,3820	2,5769	3,0811	1,1957	0,9989	3,8332	3,8374	0,9989	1,1560	1,1572
B <sub>h</sub>	1	0,0082	0,9713	0,7919	0,0082	0,2211	4,8306	0,7769	-0,0064	-0,0066	0,7769	-0,0064	-0,0066
	2	0,0002	0,9903	0,0196	0,0002	0,1855	-2,6939	0,9938	-0,0738	-0,0734	0,9938	0,7593	0,7586
	3	0,0390	0,9910	0,2761	0,0390	0,4422	0,9175	1,0008	-0,4008	-0,3996	1,0008	-0,4008	-0,3996
	4	0,0092	0,7694	0,4220	0,0092	0,0106	0,2891	0,9882	-1,3210	-1,3258	0,9882	0,5239	0,5235
	5	0,0195	0,7622	0,1995	0,0195	0,0071	0,2404	0,9992	-4,8813	-4,8784	0,9992	-4,8813	-4,8784
	6	0,0003	0,2958	-0,0315	0,0003	0,0059	-0,0454	0,9983	-15,4801	-15,4829	0,9983	0,5504	0,5509
	Global	3,3795	0,9751	0,1499	3,3795	3,7568	0,5996	1,0000	-1,1142	-1,1143	1,0000	0,6324	0,6324
Coeficientes de Correlación	1	0,0878	0,9900	0,0752	0,0878	0,0679	0,1383	0,8879	-0,9941	-0,8886	0,8879	-0,9941	-0,8886
	2	0,0007	0,9969	0,0047	0,0007	0,0231	-0,0806	0,9948	-0,9928	-0,9871	0,9948	0,8491	0,8474
	3	0,1109	0,9951	0,0974	0,1109	0,0483	0,0352	0,9989	-0,9965	-0,9955	0,9989	-0,9965	-0,9955
	4	0,0669	0,8814	0,0665	0,0669	0,0063	0,0235	0,9959	-0,9995	-0,9954	0,9959	0,7051	0,6991
	5	0,0751	0,8701	0,0593	0,0751	0,0057	0,0502	0,9993	-0,9989	-0,9982	0,9993	-0,9989	-0,9982
	6	0,0015	0,5349	-0,0125	0,0015	0,0094	-0,0159	0,9993	-0,9929	-0,9921	0,9993	0,7388	0,7387
	Global	0,7217	0,9994	0,7193	0,7217	0,9846	0,7359	1,0000	-0,6099	-0,6099	1,0000	0,7600	0,7600

Promedios y Coeficientes de Variación de las variables y, x, z, para los escenarios 5 a 8

		Escenario 5			Escenario 6			Escenario 7			Escenario 8		
		y	x	z	y	x	z	y	x	z	y	x	z
Promedios	1	25,8100	144,6000	24,9900	25,8100	144,6000	10,9900	25,8100	27,5700	3,916,3900	25,8100	27,5700	3,916,3900
	2	120,7950	294,9000	121,4150	120,7950	294,9000	102,4800	120,7950	122,8300	1,676,0050	120,7950	122,8300	122,2350
	3	341,3325	435,3000	342,7575	341,3325	435,3000	204,9650	341,3325	343,3575	884,5425	341,3325	343,3575	884,5425
	4	726,5313	588,1500	731,2313	726,5313	588,1500	314,9350	726,5313	728,5363	550,3175	726,5313	728,5363	728,0425
	5	1.554,1800	732,0333	1.565,5147	1.554,1800	732,0333	549,8200	1.554,1800	1.556,1247	321,4107	1.554,1800	1.556,1247	321,4107
	6	3.052,7315	873,3900	3.115,4965	3.052,7315	873,3900	899,8000	3.052,7315	3.054,7650	196,0735	3.052,7315	3.054,7650	3.053,9175
	Global	1.836,2462	712,5820	1.865,6270	1.836,2462	712,5820	595,9718	1.836,2462	1.838,2424	479,0348	1.836,2462	1.838,2424	1.588,4576
Coeficientes de Variación de las Variables	1	0,1037	0,1987	0,1092	0,1037	0,1987	0,0748	0,1037	0,1110	0,1059	0,1037	0,1110	0,1059
	2	0,1139	0,1946	0,1140	0,1139	0,1946	0,0167	0,1139	0,1121	0,1105	0,1139	0,1121	0,1258
	3	0,0850	0,1898	0,0850	0,0850	0,1898	0,0155	0,0850	0,0843	0,0816	0,0850	0,0843	0,0816
	4	0,0218	0,1958	0,0248	0,0218	0,1958	0,0298	0,0218	0,0219	0,0218	0,0218	0,0219	0,0293
	5	0,0243	0,1983	0,0275	0,0243	0,1983	0,0551	0,0243	0,0243	0,0241	0,0243	0,0243	0,0241
	6	0,0125	0,1982	0,0221	0,0125	0,1982	0,0674	0,0125	0,0125	0,0125	0,0125	0,0125	0,0168
	Global	0,5906	0,3250	0,5958	0,5906	0,3250	0,4769	0,5906	0,5900	1,2392	0,5906	0,5900	0,8204

Razones de los Estimadores de Razón, Coeficientes de Regresión de los Estimadores de Regresión Lineal, Coeficientes de Correlación entre las variables, tomadas dos a dos, para los escenarios 9 a 11

	Estrato	Escenario 9			Escenario 10			Escenario 11		
		y,x	y,z	x,z	y,x	y,z	x,z	y,x	y,z	x,z
R <sub>n</sub>	1	0,9362	0,1906	0,2036	0,9362	1,0328	1,1032	0,9362	2,3485	2,5086
	2	0,9834	0,5269	0,5358	0,9834	0,9949	1,0117	0,9834	1,1787	1,1986
	3	0,9941	0,6824	0,6864	0,9941	0,9958	1,0018	0,9941	1,6653	1,6752
	4	0,9972	0,7015	0,7035	0,9972	0,9936	0,9963	0,9972	2,3069	2,3133
	5	0,9988	0,7533	0,7543	0,9988	0,9928	0,9940	0,9988	2,8267	2,8302
	6	0,9993	0,8571	0,8577	0,9993	0,9799	0,9805	0,9993	3,3927	3,3949
	Global	0,9989	0,8121	0,8130	0,9989	0,9843	0,9853	0,9989	3,0811	3,0844
B <sub>n</sub>	1	0,7769	0,1569	0,1327	0,7769	0,9713	0,9872	0,7769	0,2211	0,1429
	2	0,9938	0,8395	0,8344	0,9938	0,9903	0,9862	0,9938	0,1855	0,2310
	3	1,0008	0,9575	0,9548	1,0008	0,9910	0,9880	1,0008	0,4422	0,4537
	4	0,9882	0,8685	0,8735	0,9882	0,7694	0,7715	0,9882	0,0106	0,0148
	5	0,9992	0,9832	0,9824	0,9992	0,7622	0,7615	0,9992	0,0071	0,0076
	6	0,9983	0,9773	0,9775	0,9983	0,2958	0,2966	0,9983	0,0059	0,0053
	Global	1,0000	0,9037	0,9037	1,0000	0,9751	0,9751	1,0000	3,7568	3,7569
Coeficientes de Correlación	1	0,8879	0,3505	0,2594	0,8879	0,9900	0,8805	0,8879	0,0679	0,0384
	2	0,9948	0,9137	0,9072	0,9948	0,9969	0,9918	0,9948	0,0231	0,0288
	3	0,9989	0,9820	0,9812	0,9989	0,9951	0,9940	0,9989	0,0483	0,0497
	4	0,9959	0,9396	0,9378	0,9959	0,8814	0,8770	0,9959	0,0063	0,0087
	5	0,9993	0,9884	0,9875	0,9993	0,8701	0,8691	0,9993	0,0057	0,0061
	6	0,9993	0,9889	0,9883	0,9993	0,5349	0,5358	0,9993	0,0094	0,0084
	Global	1,0000	0,9977	0,9977	1,0000	0,9994	0,9994	1,0000	0,9846	0,9846

Promedios y Coeficientes de Variación de las variables y, x, z, para los escenarios 9 a 11

		y	x	z	y	x	z	y	x	z
		Promedios	1	25,8100	27,5700	135,3900	25,8100	27,5700	24,9900	25,8100
	2	120,7950	122,8300	229,2350	120,7950	122,8300	121,4150	120,7950	122,8300	102,4800
	3	341,3325	343,3575	500,2125	341,3325	343,3575	342,7575	341,3325	343,3575	204,9650
	4	726,5313	728,5363	1.035,6138	726,5313	728,5363	731,2313	726,5313	728,5363	314,9350
	5	1.554,1800	1.556,1247	2.063,0667	1.554,1800	1.556,1247	1.565,5147	1.554,1800	1.556,1247	549,8200
	6	3.052,7315	3.054,7650	3.561,6895	3.052,7315	3.054,7650	3.115,4965	3.052,7315	3.054,7650	899,8000
	Global	1.836,2462	1.838,2424	2.261,1882	1.836,2462	1.838,2424	1.865,6270	1.836,2462	1.838,2424	595,9718
Coeficientes de Variación de las Variables	1	0,1037	0,1110	0,0442	0,1037	0,1110	0,1092	0,1037	0,1110	0,0748
	2	0,1139	0,1121	0,0653	0,1139	0,1121	0,1140	0,1139	0,1121	0,0167
	3	0,0850	0,0843	0,0595	0,0850	0,0843	0,0850	0,0850	0,0843	0,0155
	4	0,0218	0,0219	0,0166	0,0218	0,0219	0,0248	0,0218	0,0219	0,0298
	5	0,0243	0,0243	0,0184	0,0243	0,0243	0,0275	0,0243	0,0243	0,0551
	6	0,0125	0,0125	0,0108	0,0125	0,0125	0,0221	0,0125	0,0125	0,0674
	Global	0,5906	0,5900	0,5295	0,5906	0,5900	0,5958	0,5906	0,5900	0,4769

Apéndice B

Totales Poblacionales, Muestrales y Estimaciones  
Municipio Sucre, Estado Miranda

MUNICIPIO SUCRE

Población	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	546.766	267.843	96.829	88.877	63.310	29.907	219.020	99.528	53.020	58.962	2.797	4.713	11.591	5.465	2.683	3.100	102	241
0 a 4 años	50.736	0	0	0	40.161	10.575	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	51.901	31.083	0	0	16.388	4.430	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	49.474	47.141	711	0	798	824	368	310	22	0	17	19	23	22	0	0	1	0
15 a 19 años	49.623	27.227	17.307	3.859	583	647	9.684	5.850	3.089	525	94	126	723	500	184	21	9	9
20 a 24 años	53.882	22.347	16.900	13.211	695	729	28.588	12.417	9.778	5.804	309	280	1.830	964	566	270	15	15
25 a 29 años	47.724	20.067	12.710	13.662	647	638	32.283	12.894	8.785	10.002	347	255	1.743	735	458	523	9	18
30 a 39 años	85.600	39.273	19.906	23.642	1.198	1.581	61.507	26.572	14.684	18.725	731	795	3.140	1.339	676	1.053	27	45
40 a 49 años	68.389	34.387	13.832	16.907	1.097	2.166	48.013	22.766	9.776	13.561	706	1.204	2.359	1.089	482	713	22	53
50 a 59 años	44.668	22.862	8.233	10.419	668	2.486	27.019	13.145	4.906	7.446	389	1.133	1.327	623	238	399	13	54
60 ó más años	44.769	23.456	7.230	7.177	1.075	5.831	11.558	5.574	1.980	2.899	204	901	446	193	79	121	6	47
Hombres	259.379	129.371	43.539	40.420	32.255	13.794	126.331	62.478	29.740	29.743	1.624	2.746	7.641	4.159	1.658	1.533	80	211
0 a 4 años	25.941	0	0	0	20.418	5.523	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	26.408	15.609	0	0	8.419	2.380	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.652	23.475	310	0	412	455	244	212	9	0	11	12	20	20	0	0	0	0
15 a 19 años	24.059	14.154	7.557	1.661	292	395	5.886	4.011	1.502	228	49	96	497	382	91	8	8	8
20 a 24 años	25.506	11.560	7.655	5.524	373	394	16.438	8.348	5.269	2.434	180	207	1.173	713	336	105	9	10
25 a 29 años	22.539	10.277	5.886	5.692	340	344	18.256	8.478	4.949	4.459	188	182	1.044	526	271	223	8	16
30 a 39 años	40.631	19.376	9.499	10.298	657	801	35.048	16.505	8.414	9.198	441	490	1.934	999	419	452	22	42
40 a 49 años	31.040	15.668	6.173	7.717	554	928	26.427	13.118	5.356	6.939	372	642	1.592	840	310	375	18	49
50 a 59 años	20.112	10.100	3.484	5.254	358	916	16.002	7.926	2.847	4.381	240	608	1.004	515	168	269	9	43
60 ó más años	18.491	9.152	4.274	4.274	432	1.658	8.030	3.880	1.394	2.104	143	509	377	164	63	101	6	43
Mujeres	287.387	138.472	53.290	48.457	31.055	16.113	92.689	37.050	23.280	29.219	1.173	1.967	3.950	1.306	1.025	1.567	22	30
0 a 4 años	24.795	0	0	0	19.743	5.052	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	25.493	15.474	0	0	7.969	2.050	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.822	23.666	401	0	386	369	124	98	13	0	6	7	3	2	0	0	1	0
15 a 19 años	25.564	13.073	9.750	2.198	291	252	3.798	1.839	1.587	297	45	30	226	118	93	13	1	1
20 a 24 años	28.376	10.787	9.245	7.687	322	335	12.150	4.069	4.509	3.370	129	73	657	251	230	165	6	5
25 a 29 años	25.185	9.790	6.824	7.970	307	294	14.027	4.416	3.836	5.543	159	73	699	209	187	300	1	2
30 a 39 años	44.969	19.897	10.407	13.344	541	780	26.459	10.067	6.270	9.527	290	305	1.206	340	257	601	5	3
40 a 49 años	37.349	18.719	7.659	9.190	543	1.238	21.586	9.648	4.420	6.622	334	562	767	249	172	338	4	4
50 a 59 años	24.556	12.762	4.749	5.165	310	1.570	11.017	5.219	2.059	3.065	149	525	323	108	70	130	4	11
60 ó más años	26.278	14.304	4.255	2.903	643	4.173	3.528	1.694	586	795	61	392	69	29	16	20	0	4

Muestra	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	109.230	53.412	19.399	17.661	12.765	5.993	43.665	19.807	10.666	11.662	575	955	2.343	1.111	516	634	24	58
0 a 4 años	10.262	0	0	0	8.144	2.118	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	10.410	6.295	0	0	3.253	862	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	9.829	9.350	139	0	174	166	88	75	4	0	6	3	5	5	0	0	0	0
15 a 19 años	9.995	5.513	3.386	818	141	137	1.949	1.199	602	104	16	28	145	103	36	3	1	2
20 a 24 años	10.771	4.494	3.384	2.608	139	146	5.726	2.516	1.979	1.101	72	58	340	184	109	42	3	2
25 a 29 años	9.474	3.994	2.559	2.658	135	128	6.409	2.536	1.797	1.961	69	46	341	142	80	111	2	6
30 a 39 años	16.891	7.713	3.939	4.685	247	307	12.138	5.207	2.904	3.713	147	167	640	291	128	208	6	7
40 a 49 años	13.792	6.914	2.802	3.423	212	441	9.716	4.588	1.979	2.746	147	256	482	212	94	157	7	12
50 a 59 años	8.754	4.414	1.679	2.049	135	477	5.249	2.523	1.005	1.439	83	199	279	126	49	86	3	15
60 ó más años	9.052	4.725	1.511	1.420	185	1.211	2.390	1.163	396	598	35	198	111	48	20	27	2	14
Hombres	51.802	25.760	8.676	8.111	6.463	2.792	25.116	12.371	5.972	5.903	321	549	1.564	837	330	328	21	48
0 a 4 años	5.245	0	0	0	4.127	1.118	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	5.268	3.152	0	0	1.646	470	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	4.986	4.727	65	0	96	98	59	49	2	0	5	3	4	4	0	0	0	0
15 a 19 años	4.779	2.800	1.452	372	70	85	1.156	781	295	49	7	24	104	80	19	2	1	2
20 a 24 años	5.044	2.280	1.508	1.098	77	81	3.270	1.670	1.066	455	41	38	219	130	67	18	2	2
25 a 29 años	4.530	2.063	1.188	1.141	66	72	3.651	1.693	1.010	877	35	36	211	100	52	53	2	4
30 a 39 años	8.021	3.779	1.877	2.068	132	165	6.881	3.208	1.653	1.829	86	105	400	217	74	96	6	7
40 a 49 años	6.278	3.177	1.234	1.593	100	174	5.342	2.657	1.066	1.424	69	126	323	165	64	80	5	9
50 a 59 años	3.952	1.939	735	1.024	78	176	3.120	1.516	594	846	56	108	208	98	38	57	3	12
60 ó más años	3.699	1.843	617	815	71	353	1.637	797	286	423	22	109	95	43	16	22	2	12
Mujeres	57.428	27.652	10.723	9.550	6.302	3.201	18.549	7.436	4.694	5.759	254	406	779	274	186	306	3	10
0 a 4 años	5.017	0	0	0	4.017	1.000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	5.142	3.143	0	0	1.607	392	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	4.843	4.623	74	0	78	68	29	26	2	0	1	0	1	1	0	0	0	0
15 a 19 años	5.216	2.713	1.934	446	71	52	793	418	307	55	9	4	41	23	17	1	0	0
20 a 24 años	5.727	2.214	1.876	1.510	62	65	2.456	846	913	646	31	20	121	54	42	24	1	0
25 a 29 años	4.944	1.931	1.371	1.517	69	56	2.758	843	787	1.084	34	10	130	42	28	58	0	2
30 a 39 años	8.870	3.934	2.062	2.617	115	142	5.257	1.999	1.251	1.884	61	62	240	74	54	112	0	0
40 a 49 años	7.514	3.737	1.568	1.830	112	267	4.374	1.931</										

MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Población	BTTPV							Estudiando							Pensionado o Jubilado						
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno		Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno		Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	
<b>Total</b>	4.972	2.469	1.497	889	24	93		84.326	57.111	14.483	11.516	984	232		16.253	7.177	2.592	3.731	571	2.182	
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	
10 a 14 años	107	87	4	0	3	13		44.364	43.012	623	0	564	165		76	18	0	0	3	55	
15 a 19 años	1.974	1.212	697	22	8	35		26.632	12.370	10.802	3.149	283	28		186	57	6	1	23	99	
20 a 24 años	1.706	752	545	376	5	28		9.018	776	2.190	5.967	77	8		234	84	31	4	30	85	
25 a 29 años	775	267	171	322	5	10		2.240	196	443	1.569	28	4		234	86	22	5	26	95	
30 a 39 años	410	151	80	169	3	7		1.025	186	190	625	20	4		547	223	71	46	57	150	
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0		383	188	72	106	8	9		933	389	184	193	64	103	
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0		106	47	20	34	1	4		2.393	891	423	888	57	134	
60 ó más años	0	0	0	0	0	0		558	336	143	66	3	10		11.650	5.429	1.855	2.594	311	1.461	
<b>Hombres</b>	3.111	1.838	821	364	15	73		40.475	28.474	6.436	4.940	515	110		9.035	4.266	1.374	2.066	284	1.045	
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	
10 a 14 años	84	65	3	0	3	13		22.070	21.423	271	0	293	83		34	5	0	0	1	28	
15 a 19 años	1.307	903	364	10	3	27		12.701	6.344	4.821	1.370	151	15		115	40	3	1	11	60	
20 a 24 años	1.037	563	313	139	4	18		4.038	329	1.014	2.650	42	3		147	68	18	1	17	43	
25 a 29 años	446	194	100	139	3	10		908	71	181	642	12	2		149	65	13	2	15	54	
30 a 39 años	237	113	41	76	2	5		354	67	64	211	10	2		342	159	47	17	32	87	
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0		150	86	27	28	5	4		538	272	95	81	37	53	
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0		28	12	2	13	1	0		1.127	520	169	323	38	77	
60 ó más años	0	0	0	0	0	0		226	142	56	26	1	1		6.583	3.137	1.029	1.641	133	643	
<b>Mujeres</b>	1.861	631	676	525	9	20		43.851	28.637	8.047	6.576	469	122		7.218	2.911	1.218	1.665	287	1.137	
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	
10 a 14 años	23	22	1	0	0	0		22.294	21.589	352	0	271	82		42	13	0	0	2	27	
15 a 19 años	667	309	333	12	5	8		13.931	6.026	5.981	1.779	132	13		71	17	3	0	12	39	
20 a 24 años	669	189	232	237	1	10		4.980	447	1.176	3.317	35	5		87	16	13	3	13	42	
25 a 29 años	329	73	71	183	2	0		1.332	125	262	927	16	2		85	21	9	3	11	41	
30 a 39 años	173	38	39	93	1	2		671	119	126	414	10	2		205	64	24	29	25	63	
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0		233	102	45	78	3	5		395	117	89	112	27	50	
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0		78	35	18	21	0	4		1.266	371	254	565	19	57	
60 ó más años	0	0	0	0	0	0		332	194	87	40	2	9		5.067	2.292	826	953	178	818	

Muestra	BTTPV							Estudiando							Pensionado o Jubilado						
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno		Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno		Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	
<b>Total</b>	996	493	296	182	5	20		16.840	11.376	2.826	2.365	224	49		3.146	1.411	544	685	71	435	
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	
10 a 14 años	23	22	0	0	0	1		8.807	8.528	123	0	118	38		12	1	0	0	0	11	
15 a 19 años	404	247	143	5	2	7		5.354	2.509	2.087	681	72	5		32	10	2	0	1	19	
20 a 24 años	330	134	107	81	0	8		1.828	158	432	1.218	20	0		38	14	6	0	1	17	
25 a 29 años	153	59	25	64	2	3		432	44	91	291	6	0		48	20	5	0	4	19	
30 a 39 años	86	31	21	32	1	1		207	33	39	129	5	1		112	44	21	8	11	28	
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0		73	34	11	25	2	1		183	81	42	34	7	19	
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0		27	12	4	11	0	0		455	173	91	153	7	31	
60 ó más años	0	0	0	0	0	0		112	58	39	10	1	4		2.266	1.068	377	490	40	291	
<b>Hombres</b>	607	359	156	75	3	14		8.117	5.702	1.216	1.062	118	19		1.788	844	297	369	37	221	
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	
10 a 14 años	18	17	0	0	0	1		4.426	4.292	55	0	63	16		8	0	0	0	0	8	
15 a 19 años	273	187	77	4	1	4		2.521	1.265	906	310	39	1		21	9	0	0	1	11	
20 a 24 años	186	93	57	30	0	6		827	70	188	558	11	0		23	10	3	0	0	10	
25 a 29 años	85	41	13	27	1	3		192	22	36	133	1	0		35	15	3	0	2	15	
30 a 39 años	45	21	9	14	1	0		71	8	13	46	3	1		78	34	13	3	8	20	
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0		29	15	6	7	1	0		112	62	20	14	5	11	
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0		7	3	0	4	0	0		214	100	39	52	6	17	
60 ó más años	0	0	0	0	0	0		44	27	12	4	0	1		1.277	614	219	300	15	129	
<b>Mujeres</b>	389	134	140	107	2	6		8.723	5.674	1.610	1.303	106	30		1.378	567	247	316	34	214	
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	
10 a 14 años	5	5	0	0	0	0		4.381	4.236	68	0	55	22		4	1	0	0	0	3	
15 a 19 años	131	60	66	1	1	3		2.833	1.244	1.181	371	33	4		11	1	2	0	0	8	
20 a 24 años	144	41	50	51	0	2		1.001	88	244	660	9	0		15	4	3	0	1	7	
25 a 29 años	68	18	12	37	1	0		240	22	55	158	5	0		13	5	2	0	2	4	
30 a 39 años	41	10	12	18	0	1		136	25	26	83	2	0		34	10	8	5	3	8	
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0		44	19	5	18	1	1		71	19	22	20	2	8	
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0		20	9	4	7	0	0		241	73	52	101	1	14	
60 ó más años	0	0	0	0	0	0		68	31	27	6	1	3		989	454	158	190	25	162	

MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Población	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	210.604	96.093	22.554	10.679	58.832	22.446
0 a 4 años	50.736	0	0	0	40.161	10.575
5 a 9 años	51.901	31.083	0	0	16.388	4.430
10 a 14 años	4.536	3.692	62	0	210	572
15 a 19 años	10.424	7.238	2.529	141	166	350
20 a 24 años	12.506	7.354	3.790	790	259	313
25 a 29 años	10.449	5.889	2.831	1.241	232	256
30 a 39 años	18.971	10.802	4.205	3.024	360	580
40 a 49 años	16.701	9.955	3.318	2.334	297	797
50 a 59 años	13.823	8.156	2.646	1.652	208	1.161
60 ó más años	20.557	11.924	3.173	1.497	551	3.412
<b>Hombres</b>	72.786	28.156	3.510	1.774	29.737	9.609
0 a 4 años	25.941	0	0	0	20.418	5.523
5 a 9 años	26.408	15.609	0	0	8.419	2.380
10 a 14 años	2.200	1.750	27	0	104	319
15 a 19 años	3.553	2.474	776	44	70	189
20 a 24 años	2.673	1.539	705	195	121	113
25 a 29 años	1.736	943	372	227	114	80
30 a 39 años	2.716	1.533	514	344	150	175
40 a 49 años	2.333	1.352	385	294	122	180
50 a 59 años	1.951	1.127	298	268	70	188
60 ó más años	3.275	1.829	433	402	149	462
<b>Mujeres</b>	137.818	67.937	19.044	8.905	29.095	12.837
0 a 4 años	24.795	0	0	0	19.743	5.052
5 a 9 años	25.493	15.474	0	0	7.969	2.050
10 a 14 años	2.336	1.942	35	0	106	253
15 a 19 años	6.871	4.764	1.753	97	96	161
20 a 24 años	9.833	5.815	3.085	595	138	200
25 a 29 años	8.713	4.946	2.459	1.014	118	176
30 a 39 años	16.255	9.269	3.691	2.680	210	405
40 a 49 años	14.368	8.603	2.933	2.040	175	617
50 a 59 años	11.872	7.029	2.348	1.384	138	973
60 ó más años	17.282	10.095	2.740	1.095	402	2.950

Muestra	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	42.240	19.214	4.551	2.133	11.866	4.476
0 a 4 años	10.262	0	0	0	8.144	2.118
5 a 9 años	10.410	6.295	0	0	3.253	862
10 a 14 años	894	719	12	0	50	113
15 a 19 años	2.111	1.445	516	25	49	76
20 a 24 años	2.509	1.488	751	166	43	61
25 a 29 años	2.091	1.193	561	231	52	54
30 a 39 años	3.708	2.107	826	595	77	103
40 a 49 años	3.338	1.999	676	461	49	153
50 a 59 años	2.744	1.580	530	360	42	232
60 ó más años	4.173	2.388	679	295	107	704
<b>Hombres</b>	14.630	5.647	705	374	5.963	1.941
0 a 4 años	5.245	0	0	0	4.127	1.118
5 a 9 años	5.268	3.152	0	0	1.646	470
10 a 14 años	471	365	8	0	28	70
15 a 19 años	704	478	155	7	21	43
20 a 24 años	519	307	127	37	23	25
25 a 29 años	356	192	74	51	25	14
30 a 39 años	546	291	115	80	28	32
40 a 49 años	472	278	78	68	20	28
50 a 59 años	403	222	64	65	13	39
60 ó más años	646	362	84	66	32	102
<b>Mujeres</b>	27.610	13.567	3.846	1.759	5.903	2.535
0 a 4 años	5.017	0	0	0	4.017	1.000
5 a 9 años	5.142	3.143	0	0	1.607	392
10 a 14 años	423	354	4	0	22	43
15 a 19 años	1.407	967	361	18	28	33
20 a 24 años	1.990	1.181	624	129	20	36
25 a 29 años	1.735	1.001	487	180	27	40
30 a 39 años	3.162	1.816	711	515	49	71
40 a 49 años	2.866	1.721	598	393	29	125
50 a 59 años	2.341	1.358	466	295	29	193
60 ó más años	3.527	2.026	595	229	75	602

MUNICIPIO SUCRE

Estimaciones  
Estimador Directo

	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	546.756	267.186	97.160	88.595	63.861	29.954	218.631	99.062	53.412	58.504	2.879	4.774	11.727	5.555	2.584	3.178	120	290
0 a 4 años	51.328	0	0	0	40.741	10.587	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	52.071	31.493	0	0	16.272	4.306	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	49.170	46.774	697	0	870	829	440	375	20	0	30	15	25	25	0	0	0	0
15 a 19 años	50.011	27.568	16.954	4.099	705	685	9.750	5.995	3.014	521	80	140	725	515	180	15	5	10
20 a 24 años	53.904	22.465	16.939	13.074	696	730	28.651	12.578	9.905	5.518	360	290	1.700	920	545	210	15	10
25 a 29 años	47.418	19.964	12.809	13.329	676	640	32.081	12.678	8.995	9.833	345	230	1.707	710	401	556	10	30
30 a 39 años	84.559	38.562	19.722	23.505	1.237	1.533	60.776	26.035	14.541	18.629	737	834	3.203	1.454	641	1.043	30	35
40 a 49 años	69.061	34.584	14.039	17.173	1.062	2.203	48.655	22.949	9.914	13.777	736	619	2.414	1.061	471	787	35	60
50 a 59 años	43.851	22.087	8.418	10.285	676	2.385	26.297	12.625	5.037	7.223	416	996	1.398	630	246	432	15	75
60 ó más años	45.383	23.689	7.582	7.130	926	6.056	11.981	5.827	1.986	3.003	175	960	555	240	100	135	10	70
Hombres	259.273	128.844	43.454	40.693	32.331	13.951	125.732	61.861	29.905	29.618	1.606	2.742	7.827	4.185	1.653	1.644	105	240
0 a 4 años	26.233	0	0	0	20.645	5.588	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	26.349	15.768	0	0	8.233	2.346	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.945	23.650	326	0	480	489	295	245	10	0	25	15	20	20	0	0	0	0
15 a 19 años	23.913	14.001	7.272	1.865	350	425	5.782	3.904	1.477	246	35	120	520	400	95	10	5	10
20 a 24 años	25.244	11.398	7.550	5.505	386	405	16.359	8.347	5.336	2.281	205	190	1.095	650	335	90	10	10
25 a 29 años	22.672	10.310	5.948	5.723	331	360	18.271	8.462	5.056	4.398	175	180	1.057	500	261	266	10	20
30 a 39 años	40.152	18.893	9.398	10.376	661	824	34.449	16.039	8.277	9.178	431	524	2.000	1.084	370	481	30	35
40 a 49 años	31.433	15.890	6.182	7.992	500	869	26.745	13.288	5.339	7.144	345	629	1.618	826	321	401	25	45
50 a 59 años	19.793	9.699	3.683	5.141	390	880	15.627	7.584	2.976	4.247	280	540	1.042	490	191	286	15	60
60 ó más años	18.539	9.235	3.095	4.091	355	1.763	8.204	3.992	1.434	2.124	110	544	475	215	80	110	10	60
Mujeres	287.483	138.342	53.706	47.902	31.530	16.003	92.899	37.201	23.507	28.886	1.273	2.032	3.900	1.370	931	1.534	15	50
0 a 4 años	25.095	0	0	0	20.096	4.999	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	25.722	15.725	0	0	8.039	1.958	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.225	23.124	371	0	390	340	145	130	10	0	5	0	5	5	0	0	0	0
15 a 19 años	26.098	13.567	9.682	2.234	355	260	3.968	2.091	1.537	275	45	20	205	115	85	5	0	0
20 a 24 años	28.660	11.067	9.389	7.569	310	325	12.292	4.231	4.569	3.237	155	100	605	270	210	120	5	0
25 a 29 años	24.746	9.654	6.961	7.606	345	280	13.810	4.216	3.939	5.435	170	50	650	210	140	290	0	0
30 a 39 años	44.407	19.669	10.324	13.129	576	709	26.327	9.996	6.264	9.451	306	310	1.203	370	271	562	0	0
40 a 49 años	37.628	18.694	7.857	9.181	562	1.334	21.910	9.661	4.575	6.633	391	650	796	235	150	386	10	15
50 a 59 años	24.058	12.388	4.735	5.144	286	1.505	10.670	5.041	2.061	2.976	136	456	356	140	55	146	0	15
60 ó más años	26.844	14.454	4.487	3.039	571	4.293	3.777	1.835	552	879	65	446	80	25	20	25	0	10

Coef de Variación

Estimador Directo

	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0.0019	0.0025	0.0049	0.0049	0.0067	0.0103	0.0025	0.0036	0.0052	0.0049	0.0236	0.0180	0.0144	0.0186	0.0346	0.0289	0.1795	0.1145
0 a 4 años	0.0072	0.0000	0.0000	0.0000	0.0049	0.0131	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5 a 9 años	0.0072	0.0072	0.0000	0.0000	0.0126	0.0325	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10 a 14 años	0.0063	0.0044	0.2327	0.0000	0.0897	0.0596	0.0455	0.0358	0.5047	0.0000	0.0827	0.2232	0.1631	0.1000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
15 a 19 años	0.0063	0.0074	0.0091	0.0336	0.1419	0.1045	0.0117	0.0127	0.0191	0.1099	0.1786	0.1337	0.0583	0.0515	0.1251	1.4283	1.1050	0.9175
20 a 24 años	0.0059	0.0090	0.0089	0.0107	0.1530	0.1104	0.0069	0.0103	0.0101	0.0184	0.0680	0.1091	0.0412	0.0472	0.0676	0.1755	0.6130	1.4821
25 a 29 años	0.0062	0.0092	0.0107	0.0099	0.1433	0.1164	0.0066	0.0109	0.0120	0.0113	0.0759	0.1443	0.0390	0.0574	0.0884	0.0643	0.8487	0.4408
30 a 39 años	0.0046	0.0064	0.0092	0.0075	0.1064	0.0651	0.0048	0.0073	0.0102	0.0082	0.0491	0.0552	0.0274	0.0367	0.0724	0.0464	0.3693	0.4720
40 a 49 años	0.0050	0.0063	0.0114	0.0091	0.1141	0.0416	0.0052	0.0072	0.0131	0.0098	0.0426	0.0310	0.0314	0.0435	0.0846	0.0528	0.2743	0.2417
50 a 59 años	0.0068	0.0083	0.0160	0.0126	0.1628	0.0354	0.0075	0.0100	0.0199	0.0146	0.0582	0.0302	0.0403	0.0541	0.1207	0.0719	0.4629	0.1418
60 ó más años	0.0072	0.0083	0.0188	0.0192	0.1433	0.0182	0.0104	0.0134	0.0320	0.0229	0.0871	0.0186	0.0535	0.0733	0.1564	0.1253	0.3684	0.0736
Hombres	0.0031	0.0038	0.0086	0.0085	0.0087	0.0159	0.0044	0.0056	0.0102	0.0097	0.0498	0.0380	0.0171	0.0200	0.0428	0.0413	0.1912	0.1253
0 a 4 años	0.0099	0.0000	0.0000	0.0000	0.0076	0.0193	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5 a 9 años	0.0100	0.0100	0.0000	0.0000	0.0194	0.0466	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10 a 14 años	0.0084	0.0059	0.3267	0.0000	0.1182	0.0710	0.0024	0.0552	0.1169	0.0000	0.1294	0.3092	0.1956	0.1225	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
15 a 19 años	0.0095	0.0103	0.0155	0.0548	0.1933	0.1209	0.0208	0.0192	0.0445	0.2465	0.5067	0.1976	0.0631	0.0525	0.1843	1.5309	1.0243	0.8294
20 a 24 años	0.0098	0.0136	0.0169	0.0214	0.1614	0.1407	0.0122	0.0149	0.0204	0.0443	0.1425	0.2040	0.0505	0.0539	0.0865	0.3026	0.8414	1.3173
25 a 29 años	0.0103	0.0140	0.0207	0.0202	0.1574	0.1430	0.0116	0.0154	0.0227	0.0247	0.1743	0.2196	0.0466	0.0619	0.0997	0.0918	0.7520	0.5787
30 a 39 años	0.0079	0.0104	0.0179	0.0153	0.1023	0.0833	0.0086	0.0114	0.0195	0.0166	0.0986	0.1063	0.0337	0.0385	0.0963	0.0723	0.3329	0.4113
40 a 49 años	0.0087	0.0106	0.0233	0.0172	0.1213	0.0696	0.0094	0.0117	0.0257	0.0184	0.1045	0.0744	0.0378	0.0463	0.1006	0.0778	0.3665	0.3007
50 a 59 años	0.0115	0.0143	0.0318	0.0221	0.1352	0.0603	0.0129	0.0163	0.0369	0.0250	0.1018	0.0675	0.0469	0.0620	0.1355	0.0882	0.4703	0.1750
60 ó más años	0.0119	0.0143	0.0334	0.0257	0.1846	0.0388	0.0170	0.0212	0.0529	0.0355	0.1760	0.0440	0.0565	0.0756	0.1775	0.1327	0.3976	0.0862
Mujeres	0.0030	0.0038	0.0077	0.0078	0.0101	0.0150	0.0053	0.0078	0.0113	0.0094	0.0558	0.0438	0.0264	0.0436				

MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Estimaciones Estimador Directo	BTTPV							Estudiando							Pensionado o Jubilado						
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno			
Total	4.983	2.464	1.482	912	25	100	84.291	56.915	14.155	11.856	1.120	245	15.768	7.070	2.729	3.438	355	2.176			
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
10 a 14 años	115	110	0	0	0	5	44.062	42.665	617	0	590	190	60	5	0	0	0	0			
15 a 19 años	2.020	1.234	716	25	10	35	26.802	12.553	10.451	3.413	360	25	160	50	10	0	5	95			
20 a 24 años	1.652	670	536	406	0	40	9.165	792	2.166	6.107	100	0	190	70	30	0	5	85			
25 a 29 años	766	295	125	321	10	15	2.166	220	456	1.460	30	0	240	100	25	0	20	95			
30 a 39 años	430	155	105	160	5	5	1.036	165	195	646	25	5	560	220	105	40	55	140			
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	365	170	55	125	10	5	917	406	211	170	35	95			
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	135	60	20	55	0	0	2.280	866	456	768	35	155			
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	560	290	195	50	5	20	11.361	5.353	1.892	2.460	200	1.456			
Hombres	3.035	1.794	781	375	15	70	40.632	28.530	6.092	5.325	590	95	8.859	4.228	1.490	1.851	185	1.105			
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
10 a 14 años	90	85	0	0	0	5	22.146	21.475	276	0	315	80	40	0	0	0	0	40			
15 a 19 años	1.365	934	386	20	5	20	12.621	6.329	4.538	1.554	195	5	105	45	0	0	5	55			
20 a 24 años	930	465	285	150	0	30	4.147	351	943	2.798	55	0	115	50	15	0	0	50			
25 a 29 años	425	205	65	135	5	15	963	110	180	668	5	0	175	75	15	0	10	75			
30 a 39 años	225	105	45	70	5	0	355	40	65	230	15	5	390	170	65	15	40	100			
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	145	75	30	35	5	0	562	311	101	70	25	55			
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	35	15	0	20	0	0	1.071	500	195	261	30	85			
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	220	135	60	20	0	5	6.401	3.077	1.099	1.505	75	645			
Mujeres	1.948	670	701	537	10	30	43.659	28.385	8.063	6.531	530	150	6.909	2.842	1.239	1.587	170	1.071			
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
10 a 14 años	25	25	0	0	0	0	21.916	21.190	341	0	275	110	20	5	0	0	0	15			
15 a 19 años	655	300	330	5	5	15	14.181	6.224	5.913	1.859	165	20	55	5	10	0	0	40			
20 a 24 años	722	205	251	256	0	10	5.018	441	1.223	3.309	45	0	75	20	15	0	5	35			
25 a 29 años	341	90	60	186	5	0	1.203	110	276	792	25	0	65	25	10	0	10	20			
30 a 39 años	205	50	60	90	0	5	681	125	130	416	10	0	170	50	40	25	15	40			
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	220	95	25	90	5	5	355	95	110	100	10	40			
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	100	45	20	35	0	0	1.209	366	261	507	5	70			
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	340	155	135	30	5	15	4.960	2.276	793	955	125	811			

Coef de Variación Estimador Directo	BTTPV							Estudiando							Pensionado o Jubilado						
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno			
Total	0,0220	0,0273	0,0436	0,0580	0,3907	0,2013	0,0048	0,0047	0,0153	0,0167	0,0592	0,1274	0,0138	0,0184	0,0364	0,0311	0,1127	0,0398			
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000			
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000			
10 a 14 años	0,1494	0,1002	0,0000	0,0000	0,0000	0,6397	0,0066	0,0045	0,2531	0,0000	0,0812	0,1205	0,2352	1,7302	0,0000	0,0000	0,0000	0,1241			
15 a 19 años	0,0336	0,0341	0,0557	1,2966	0,5773	0,3583	0,0085	0,0119	0,0116	0,0328	0,1034	0,6963	0,1583	0,3096	1,0969	0,0000	0,8739	0,1259			
20 a 24 años	0,0393	0,0599	0,0715	0,0766	0,0000	0,2988	0,0148	0,1122	0,0332	0,0112	0,2192	0,0000	0,1538	0,2540	0,4278	0,0000	1,0847	0,1557			
25 a 29 años	0,0577	0,0899	0,2081	0,0691	0,4029	0,5301	0,0322	0,2078	0,0813	0,0242	0,3716	0,0000	0,1137	0,1673	0,4698	0,0000	0,2526	0,1363			
30 a 39 años	0,0713	0,1194	0,1720	0,0951	0,5387	1,1260	0,0442	0,1821	0,1250	0,0358	0,2935	0,6696	0,0701	0,1073	0,1692	0,4705	0,1324	0,1156			
40 a 49 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0797	0,1122	0,2812	0,1181	0,4639	0,4147	0,0558	0,0757	0,1094	0,1437	0,2676	0,2242			
50 a 59 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0865	0,1278	0,3110	0,1070	0,0000	0,0000	0,0368	0,0582	0,0831	0,0524	0,4296	0,2257			
60 ó más años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0593	0,0757	0,0909	0,3268	1,1091	0,1306	0,0161	0,0204	0,0446	0,0373	0,1697	0,0487			
Hombres	0,0277	0,0297	0,0633	0,1005	0,5235	0,2504	0,0066	0,0063	0,0234	0,0249	0,0812	0,2048	0,0181	0,0230	0,0486	0,0416	0,1602	0,0578			
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000			
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000			
10 a 14 años	0,1273	0,0863	0,0000	0,0000	0,0000	0,5023	0,0088	0,0061	0,3765	0,0000	0,1122	0,1822	0,1840	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0725			
15 a 19 años	0,0382	0,0358	0,0792	1,1494	0,9882	0,5461	0,0121	0,0160	0,0178	0,0483	0,1388	2,1782	0,1635	0,2361	0,0000	0,0000	0,5781	0,1424			
20 a 24 años	0,0541	0,0689	0,1042	0,1481	0,0000	0,3493	0,0213	0,1659	0,0490	0,0161	0,2708	0,0000	0,2232	0,3232	0,7038	0,0000	0,2515				
25 a 29 años	0,0784	0,0997	0,3033	0,1168	0,5804	0,4561	0,0432	0,2489	0,1210	0,0318	1,3837	0,0000	0,1295	0,1923	0,5998	0,0000	0,9591				
30 a 39 años	0,1062	0,1421	0,3123	0,1574	0,4082	0,0000	0,0743	0,4353	0,2131	0,0580	0,3472	0,0000	0,0742	0,1047	0,1971	0,8812	0,1246				
40 a 49 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1235	0,1573	0,3129	0,2602	0,6008	0,0000	0,0656	0,0728	0,1610	0,2414	0,2589				
50 a 59 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1622	0,2522	0,0000	0,1377	0,0000	0,0000	0,0532	0,0697	0,1303	0,1021	0,3369				
60 ó más años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0944	0,1022	0,1821	0,5128	0,0000	0,3011	0,0213	0,0268	0,0569	0,0447	0,3384				
Mujeres	0,0352	0,0593	0,0587	0,0670	0,5903	0,3499	0,0069	0,0070	0,0202	0,0226	0,0865	0,1635	0,0215	0,0305	0,0552	0,0469	0,1620				
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000				
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000				
10 a 14 años	0,2860	0,1711	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0097	0,0066	0,3407	0,0000	0,1181	0,1606	0,5385	1,2731	0,0000	0,0000	0,3418				
15 a 19 años	0,0647	0,0827	0,0774	4,3636	0,6939	0,4302	0,0118	0,0177	0,0153	0,0445	0,1552	0,6784	0,3259	2,1100	0,8079	0,0000	0,2016				
20 a 24 años	0,0558	0																			

MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Estimaciones Estimador Directo	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	211.356	96.120	22.798	10.707	59.362	22.369
0 a 4 años	51.328	0	0	0	40.741	10.587
5 a 9 años	52.071	31.493	0	0	16.272	4.306
10 a 14 años	4.468	3.594	60	0	250	564
15 a 19 años	10.554	7.221	2.583	125	245	380
20 a 24 años	12.546	7.435	3.757	833	216	305
25 a 29 años	10.458	5.961	2.807	1.159	261	270
30 a 39 años	18.554	10.533	4.135	2.987	385	514
40 a 49 años	16.710	9.998	3.388	2.314	246	764
50 a 59 años	13.741	7.906	2.659	1.807	210	1.159
60 ó más años	20.926	11.979	3.409	1.482	536	3.520
<b>Hombres</b>	73.188	28.246	3.533	1.880	29.830	9.699
0 a 4 años	26.233	0	0	0	20.645	5.588
5 a 9 años	26.349	15.768	0	0	8.233	2.348
10 a 14 años	2.354	1.825	40	0	140	349
15 a 19 años	3.520	2.389	776	35	105	215
20 a 24 años	2.598	1.535	636	186	116	125
25 a 29 años	1.781	958	371	256	126	70
30 a 39 años	2.733	1.455	576	402	140	160
40 a 49 años	2.363	1.390	391	342	100	140
50 a 59 años	2.018	1.110	321	327	65	195
60 ó más años	3.239	1.816	422	332	160	509
<b>Mujeres</b>	138.168	67.874	19.265	8.827	29.532	12.670
0 a 4 años	25.095	0	0	0	20.096	4.999
5 a 9 años	25.722	15.725	0	0	8.039	1.958
10 a 14 años	2.114	1.769	20	0	110	215
15 a 19 años	7.034	4.832	1.807	90	140	165
20 a 24 años	9.948	5.900	3.121	647	100	180
25 a 29 años	8.677	5.003	2.436	903	135	200
30 a 39 años	15.821	9.078	3.559	2.585	245	354
40 a 49 años	14.347	8.608	2.997	1.972	146	624
50 a 59 años	11.723	6.796	2.338	1.480	145	964
60 ó más años	17.687	10.163	2.987	1.150	376	3.011

Coef de Variación

Estimador Directo	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	0,0036	0,0047	0,0124	0,0185	0,0069	0,0125
0 a 4 años	0,0072	0,0000	0,0000	0,0000	0,0049	0,0131
5 a 9 años	0,0072	0,0072	0,0000	0,0000	0,0126	0,0325
10 a 14 años	0,0252	0,0189	0,6810	0,0000	0,2457	0,0762
15 a 19 años	0,0158	0,0140	0,0235	0,3182	0,3726	0,1682
20 a 24 años	0,0147	0,0149	0,0180	0,0540	0,4655	0,2285
25 a 29 años	0,0161	0,0171	0,0222	0,0366	0,3523	0,2347
30 a 39 años	0,0125	0,0132	0,0210	0,0204	0,3262	0,1656
40 a 49 años	0,0128	0,0129	0,0238	0,0249	0,4723	0,1028
50 a 59 años	0,0143	0,0148	0,0284	0,0307	0,5049	0,0603
60 ó más años	0,0113	0,0117	0,0272	0,0479	0,2372	0,0233
<b>Hombres</b>	0,0060	0,0093	0,0327	0,0451	0,0089	0,0187
0 a 4 años	0,0099	0,0000	0,0000	0,0000	0,0076	0,0193
5 a 9 años	0,0100	0,0100	0,0000	0,0000	0,0194	0,0466
10 a 14 años	0,0311	0,0240	0,4691	0,0000	0,3160	0,0885
15 a 19 años	0,0277	0,0245	0,0320	0,4867	0,5611	0,1923
20 a 24 años	0,0330	0,0334	0,0353	0,0871	0,4464	0,2850
25 a 29 años	0,0378	0,0419	0,0481	0,0525	0,3221	0,3952
30 a 39 años	0,0310	0,0347	0,0389	0,0417	0,3652	0,2181
40 a 49 años	0,0332	0,0336	0,0538	0,0480	0,4735	0,2296
50 a 59 años	0,0350	0,0378	0,0600	0,0464	0,6555	0,1458
60 ó más años	0,0292	0,0307	0,0636	0,0685	0,3560	0,0721
<b>Mujeres</b>	0,0044	0,0055	0,0133	0,0202	0,0103	0,0168
0 a 4 años	0,0102	0,0000	0,0000	0,0000	0,0064	0,0183
5 a 9 años	0,0101	0,0101	0,0000	0,0000	0,0162	0,0472
10 a 14 años	0,0400	0,0292	1,7288	0,0000	0,3875	0,1432
15 a 19 años	0,0190	0,0169	0,0303	0,3968	0,4814	0,2345
20 a 24 años	0,0162	0,0167	0,0212	0,0674	0,8116	0,3230
25 a 29 años	0,0177	0,0187	0,0260	0,0472	0,5705	0,2744
30 a 39 años	0,0135	0,0142	0,0252	0,0242	0,4341	0,2104
40 a 49 años	0,0138	0,0139	0,0278	0,0298	0,6739	0,1101
50 a 59 años	0,0155	0,0161	0,0333	0,0384	0,6187	0,0635
60 ó más años	0,0122	0,0127	0,0313	0,0614	0,2805	0,0235

MUNICIPIO SUCRE

Estimaciones  
Est. de Razón

	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	546.764	267.568	97.195	88.894	63.353	29.754	219.360	99.408	53.551	58.740	2.887	4.774	11.784	5.588	2.593	3.194	120	289
0 a 4 años	50.736	0	0	0	40.277	10.459	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	51.902	31.394	0	0	16.222	4.286	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	49.468	47.066	700	0	870	832	439	374	20	0	30	15	25	25	0	0	0	0
15 a 19 años	49.625	27.414	16.776	4.051	699	685	9.721	5.996	2.988	516	80	141	726	517	179	15	5	10
20 a 24 años	53.885	22.444	16.921	13.095	695	730	28.696	12.614	9.908	5.524	359	291	1.709	924	548	212	15	10
25 a 29 años	47.721	20.018	12.897	13.488	680	638	32.221	12.665	9.034	9.946	347	229	1.714	710	404	560	10	30
30 a 39 años	85.595	39.107	19.952	23.731	1.249	1.556	61.508	26.415	14.707	18.795	743	848	3.249	1.482	648	1.054	30	35
40 a 49 años	68.392	34.265	13.881	16.990	1.057	2.199	48.138	22.716	9.794	13.628	730	1.270	2.385	1.047	465	779	35	59
50 a 59 años	44.663	22.530	8.575	10.443	688	2.427	26.756	12.870	5.126	7.325	424	1.011	1.423	645	249	438	15	76
60 ó más años	44.777	23.330	7.493	7.096	916	5.942	11.881	5.758	1.974	3.006	174	969	553	238	100	136	10	69
Hombres	259.377	129.006	43.603	40.761	32.144	13.863	126.119	62.128	29.993	29.638	1.611	2.749	7.866	4.214	1.661	1.647	105	239
0 a 4 años	25.941	0	0	0	20.426	5.515	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	26.409	15.810	0	0	8.258	2.341	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.651	23.371	321	0	473	486	292	242	10	0	25	15	20	20	0	0	0	0
15 a 19 años	24.057	14.110	7.300	1.866	352	429	5.834	3.945	1.485	247	36	121	525	404	96	10	5	10
20 a 24 años	25.502	11.520	7.625	5.561	387	409	16.523	8.435	5.386	2.304	205	193	1.107	657	339	91	10	10
25 a 29 años	22.539	10.202	5.924	5.728	330	355	18.161	8.377	5.031	4.400	174	179	1.055	498	261	266	10	20
30 a 39 años	40.631	19.224	9.497	10.402	667	841	34.845	16.313	8.363	9.199	434	536	2.031	1.107	375	484	30	35
40 a 49 años	31.043	15.698	6.094	7.889	498	864	26.409	13.126	5.263	7.053	342	625	1.595	813	317	396	25	44
50 a 59 años	20.108	9.886	3.737	5.192	396	897	15.877	7.731	3.021	4.290	285	550	1.060	502	193	289	15	61
60 ó más años	18.496	9.185	3.105	4.123	357	1.726	8.178	3.959	1.434	2.145	110	530	473	213	80	111	10	59
Mujeres	287.387	138.562	53.592	48.133	31.209	15.891	93.241	37.280	23.558	29.102	1.276	2.025	3.918	1.374	932	1.547	15	50
0 a 4 años	24.795	0	0	0	19.851	4.944	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	25.493	15.584	0	0	7.964	1.945	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.817	23.695	379	0	397	346	147	132	10	0	5	0	5	5	0	0	0	0
15 a 19 años	25.568	13.304	9.476	2.185	347	256	3.887	2.051	1.503	269	44	20	201	113	83	5	0	0
20 a 24 años	28.383	10.924	9.296	7.534	308	321	12.173	4.179	4.522	3.220	154	98	602	267	209	121	5	0
25 a 29 años	25.182	9.816	6.973	7.760	350	350	14.060	4.288	4.003	5.546	173	50	659	212	143	294	0	10
30 a 39 años	44.964	19.883	10.465	13.329	582	715	26.663	10.102	6.344	9.596	309	312	1.218	375	273	570	0	0
40 a 49 años	37.349	18.567	7.787	9.101	559	1.335	21.729	9.590	4.531	6.575	388	645	790	234	148	383	10	15
50 a 59 años	24.555	12.644	4.838	5.251	292	1.530	10.879	5.139	2.105	3.035	139	461	363	143	56	149	0	15
60 ó más años	26.281	14.145	4.388	2.973	559	4.216	3.703	1.799	540	861	64	439	80	25	20	25	0	10

Coef de Variación  
Est. de Razón

	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0,0019	0,0025	0,0049	0,0048	0,0065	0,0104	0,0025	0,0037	0,0052	0,0049	0,0240	0,0181	0,0144	0,0185	0,0345	0,0287	0,1796	0,1149
0 a 4 años	0,0070	0,0000	0,0000	0,0000	0,0044	0,0131	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0073	0,0075	0,0000	0,0000	0,0125	0,0327	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,0063	0,0043	0,2320	0,0000	0,0900	0,0595	0,0456	0,0358	0,5047	0,0000	0,0828	0,2232	0,1631	0,1000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
15 a 19 años	0,0064	0,0074	0,0092	0,0342	0,1433	0,1046	0,0117	0,0127	0,0191	0,1110	0,1792	0,1330	0,0582	0,0513	0,1257	1,4283	1,1051	0,9176
20 a 24 años	0,0059	0,0091	0,0088	0,0106	0,1533	0,1105	0,0069	0,0106	0,0100	0,0183	0,0691	0,1091	0,0410	0,0471	0,0671	0,1738	0,6131	1,4822
25 a 29 años	0,0062	0,0094	0,0106	0,0097	0,1426	0,1168	0,0066	0,0112	0,0119	0,0111	0,0764	0,1452	0,0389	0,0575	0,0877	0,0637	0,8488	0,4408
30 a 39 años	0,0046	0,0065	0,0091	0,0073	0,1056	0,0642	0,0049	0,0076	0,0102	0,0081	0,0500	0,0547	0,0270	0,0360	0,0716	0,0458	0,3695	0,4721
40 a 49 años	0,0051	0,0065	0,0116	0,0092	0,1149	0,0418	0,0054	0,0075	0,0134	0,0100	0,0441	0,0315	0,0318	0,0441	0,0857	0,0533	0,2745	0,2458
50 a 59 años	0,0067	0,0082	0,0157	0,0125	0,1601	0,0348	0,0074	0,0100	0,0197	0,0145	0,0579	0,0298	0,0396	0,0529	0,1192	0,0709	0,4631	0,1399
60 ó más años	0,0073	0,0084	0,0191	0,0194	0,1449	0,0185	0,0105	0,0136	0,0322	0,0231	0,0881	0,0186	0,0536	0,0739	0,1564	0,1244	0,3685	0,0746
Hombres	0,0031	0,0039	0,0085	0,0085	0,0085	0,0160	0,0045	0,0057	0,0101	0,0097	0,0502	0,0380	0,0170	0,0199	0,0426	0,0412	0,1913	0,1258
0 a 4 años	0,0096	0,0000	0,0000	0,0000	0,0069	0,0193	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0102	0,0105	0,0000	0,0000	0,0193	0,0468	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,0085	0,0058	0,3322	0,0000	0,1204	0,0715	0,0731	0,0558	1,1659	0,0000	0,1295	0,3092	0,1956	0,1225	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
15 a 19 años	0,0094	0,0103	0,0154	0,0550	0,1925	0,1199	0,0206	0,0190	0,0441	0,2457	0,4934	0,1962	0,0625	0,0520	0,1823	1,5309	1,0246	0,8295
20 a 24 años	0,0098	0,0137	0,0167	0,0211	0,1613	0,1394	0,0122	0,0152	0,0201	0,0438	0,1436	0,2012	0,0499	0,0533	0,0854	0,2993	0,8417	1,3174
25 a 29 años	0,0105	0,0145	0,0208	0,0202	0,1582	0,1452	0,0118	0,0160	0,0229	0,0247	0,1764	0,2212	0,0467	0,0622	0,0997	0,0918	0,7522	0,5788
30 a 39 años	0,0080	0,0107	0,0178	0,0152	0,1020	0,0818	0,0087	0,0118	0,0193	0,0166	0,0994	0,1043	0,0331	0,0378	0,0949	0,0718	0,3332	0,4113
40 a 49 años	0,0090	0,0111	0,0237	0,0174	0,1223	0,0702	0,0097	0,0123	0,0262	0,0187	0,1067	0,0752	0,0384	0,0470	0,1019	0,0787	0,3668	0,3076
50 a 59 años	0,0114	0,0143	0,0315	0,0219	0,1335	0,0592	0,0129	0,0164	0,0365	0,0248	0,1009	0,0664	0,0461	0,0605	0,1341	0,0857	0,4706	0,1721
60 ó más años	0,0119	0,0144	0,0334	0,0256	0,1837	0,0396	0,0172	0,0215	0,0530	0,0353	0,1767	0,0449	0,0568	0,0763	0,1775	0,1315	0,3977	0,0876
Mujeres	0,0030	0,0038	0,0077	0,0077	0,0099	0,0151	0,0053	0,0079	0,0112	0,0093	0,0560	0,0440	0,0263	0,0435	0,0597	0,0394	0,5306	

MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Estimaciones Est. de Razón	BTTPV						Estudiante						Pensionado o Jubilado						
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	
Total	4.993	2.468	1.481	919	25	100	84.371	57.102	14.055	11.849	1.120	245	15.697	7.032	2.726	3.435	353	2.151	
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	114	109	0	0	0	5	44.346	42.944	621	0	591	190	59	5	0	0	0	0	54
15 a 19 años	2.013	1.234	709	25	10	35	26.555	12.462	10.339	3.371	358	25	161	50	10	0	5	96	86
20 a 24 años	1.659	672	541	406	0	40	9.179	792	2.166	6.120	101	0	192	71	30	0	5	86	94
25 a 29 años	770	294	125	326	10	15	2.190	222	462	1.476	30	0	237	98	25	0	20	94	142
30 a 39 años	437	159	106	162	5	5	1.048	167	198	653	25	5	566	223	106	40	55	142	94
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	361	167	55	124	10	5	908	401	210	168	35	94	158
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	138	62	20	56	0	0	2.324	885	466	781	34	1427	2.446
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	554	286	194	49	5	20	11.250	5.299	1.879	2.446	199	1.427	
Hombres	3.056	1.804	788	379	15	70	40.461	28.311	6.114	5.355	587	94	8.873	4.233	1.499	1.860	185	1.096	
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	89	84	0	0	0	5	21.878	21.217	272	0	310	79	39	0	0	0	0	39	56
15 a 19 años	1.372	940	387	20	5	20	12.673	6.366	4.552	1.554	196	5	106	45	0	0	5	56	51
20 a 24 años	942	470	290	152	0	30	4.189	355	952	2.826	56	0	117	51	15	0	0	51	74
25 a 29 años	423	202	65	136	5	15	964	109	181	669	5	0	172	73	15	0	10	102	54
30 a 39 años	230	108	46	71	5	0	359	41	66	232	15	5	396	173	66	15	40	87	71
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	143	74	30	34	5	0	555	307	100	69	25	87	633
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	35	15	0	20	0	0	1.090	511	199	264	29	633	1.055
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	220	134	61	20	0	5	6.398	3.073	1.104	1.512	76	794	
Mujeres	1.937	664	693	540	10	30	43.910	28.791	7.941	6.494	533	151	6.824	2.799	1.227	1.575	168	1.055	
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	25	25	0	0	0	0	22.468	21.727	349	0	281	111	20	5	0	0	0	15	40
15 a 19 años	641	294	322	5	5	15	13.882	6.096	5.787	1.817	162	20	55	5	10	0	0	40	35
20 a 24 años	717	202	251	254	0	10	4.990	437	1.214	3.294	45	0	75	20	15	0	5	20	40
25 a 29 años	347	92	60	190	5	0	1.226	113	281	807	25	0	65	25	10	0	10	20	40
30 a 39 años	207	51	60	91	0	5	689	126	132	421	10	0	170	50	40	25	15	40	
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	218	93	25	90	5	5	353	94	110	99	10	40	
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	103	47	20	36	0	0	1.234	374	267	517	5	71	
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	334	152	133	29	5	15	4.852	2.226	775	934	123	794	

Coef de Variación

Est. de Razón	BTTPV						Estudiante						Pensionado o Jubilado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0,0219	0,0273	0,0436	0,0575	0,3908	0,2014	0,0048	0,0046	0,0154	0,0168	0,0596	0,1278	0,0139	0,0184	0,0364	0,0312	0,1134	0,0402
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,1507	0,1011	0,0000	0,0000	0,0000	0,6397	0,0065	0,0044	0,2518	0,0000	0,0818	0,1211	0,2392	1,7302	0,0000	0,0000	0,0000	0,1264
15 a 19 años	0,0337	0,0340	0,0562	1,2967	0,5776	0,3584	0,0086	0,0121	0,0116	0,0334	0,1045	0,6968	0,1573	0,3096	1,0968	0,0000	0,8739	0,1246
20 a 24 años	0,0392	0,0597	0,0708	0,0766	0,0000	0,2989	0,0147	0,1123	0,0331	0,0112	0,2173	0,0000	0,1522	0,2504	0,4277	0,0000	1,0848	0,1539
25 a 29 años	0,0574	0,0902	0,2080	0,0680	0,4030	0,5302	0,0318	0,2060	0,0802	0,0239	0,3717	0,0000	0,1151	0,1707	0,4698	0,0000	0,2526	0,1377
30 a 39 años	0,0701	0,1164	0,1704	0,0939	0,5388	1,1260	0,0437	0,1800	0,1231	0,0354	0,2936	0,6696	0,0694	0,1058	0,1676	0,4705	0,1325	0,1140
40 a 49 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0806	0,1142	0,2812	0,1190	0,4640	0,0000	0,0563	0,0767	0,1099	0,1454	0,2677	0,2266
50 a 59 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0846	0,1236	0,3110	0,1050	0,0000	0,0000	0,0361	0,0569	0,0813	0,0515	0,4424	0,2214
60 ó más años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0599	0,0768	0,0914	0,3335	1,1092	0,1304	0,0163	0,0206	0,0449	0,0376	0,1709	0,0496
Hombres	0,0275	0,0295	0,0627	0,0994	0,5236	0,2505	0,0066	0,0063	0,0233	0,0248	0,0822	0,2076	0,0180	0,0230	0,0483	0,0415	0,1604	0,0582
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,1287	0,0872	0,0000	0,0000	0,0000	0,5023	0,0089	0,0060	0,3825	0,0000	0,1151	0,1855	0,1887	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0744
15 a 19 años	0,0380	0,0355	0,0789	1,1494	0,9886	0,5461	0,0121	0,0160	0,0176	0,0487	0,1390	2,1789	0,1619	0,2361	0,0000	0,0000	0,5781	0,1399
20 a 24 años	0,0534	0,0682	0,1023	0,1461	0,0000	0,3494	0,0211	0,1641	0,0484	0,0159	0,2665	0,0000	0,2194	0,3168	0,7037	0,0000	0,2466	0,1399
25 a 29 años	0,0788	0,1012	0,3033	0,1159	0,5807	0,4561	0,0431	0,2512	0,1203	0,0317	1,3840	0,0000	0,1318	0,1976	0,5998	0,0000	0,4959	0,1578
30 a 39 años	0,1039	0,1382	0,3055	0,1552	0,4084	0,0000	0,0735	0,4247	0,2098	0,0574	0,3473	0,0000	0,0731	0,1029	0,1941	0,8812	0,1282	0,1222
40 a 49 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1252	0,1594	0,3129	0,2678	0,6009	0,0000	0,0664	0,0738	0,1626	0,2448	0,2591	0,2942
50 a 59 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1622	0,2522	0,0000	0,1377	0,0000	0,0000	0,0522	0,0682	0,1277	0,1009	0,3488	0,2744
60 ó más años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0944	0,1030	0,1792	0,5128	0,0000	0,3010	0,0214	0,0269	0,0567	0,0446	0,3345	0,0826
Mujeres	0,0054	0,0599	0,0593	0,0666	0,5904	0,3500	0,0068	0,0068	0,0205	0,0228	0,0865	0,1629	0,0217	0,0309	0,0558	0,0474	0,1642	0,0559
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,2860	0,1710	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0094	0,0063	0,3333	0,0000	0,1							

MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Estimaciones Est. de Razón	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	210.559	95.970	22.789	10.757	58.848	22.195
0 a 4 años	50.736	0	0	0	40.277	10.459
5 a 9 años	51.902	31.394	0	0	16.222	4.286
10 a 14 años	4.485	3.609	59	0	249	568
15 a 19 años	10.449	7.155	2.551	124	241	378
20 a 24 años	12.450	7.371	3.728	833	215	303
25 a 29 años	10.589	6.029	2.847	1.180	263	270
30 a 39 años	18.787	10.661	4.187	3.027	391	521
40 a 49 años	16.600	9.934	3.357	2.291	247	771
50 a 59 años	14.022	8.068	2.714	1.843	215	1.182
60 ó más años	20.539	11.749	3.346	1.459	528	3.457
<b>Hombres</b>	73.002	28.316	3.548	1.882	29.641	9.615
0 a 4 años	25.941	0	0	0	20.426	5.515
5 a 9 años	26.409	15.810	0	0	8.258	2.341
10 a 14 años	2.333	1.808	39	0	138	348
15 a 19 años	3.547	2.410	780	35	105	217
20 a 24 años	2.624	1.552	643	188	116	125
25 a 29 años	1.764	943	371	257	126	67
30 a 39 años	2.770	1.482	581	401	143	163
40 a 49 años	2.341	1.378	384	337	101	141
50 a 59 años	2.046	1.127	324	329	67	199
60 ó más años	3.227	1.806	426	335	161	499
<b>Mujeres</b>	137.557	67.654	19.241	8.875	29.207	12.580
0 a 4 años	24.795	0	0	0	19.851	4.944
5 a 9 años	25.493	15.584	0	0	7.964	1.945
10 a 14 años	2.152	1.801	20	0	111	220
15 a 19 años	6.902	4.745	1.771	89	136	161
20 a 24 años	9.626	5.819	3.085	645	99	178
25 a 29 años	8.825	5.096	2.476	923	137	203
30 a 39 años	16.017	9.179	3.606	2.626	248	358
40 a 49 años	14.259	8.556	2.973	1.954	146	630
50 a 59 años	11.976	6.941	2.390	1.514	148	983
60 ó más años	17.312	9.943	2.920	1.124	367	2.958

Coef de Variación  
Est. de Razón

Est. de Razón	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	0,0036	0,0048	0,0124	0,0184	0,0068	0,0126
0 a 4 años	0,0070	0,0000	0,0000	0,0000	0,0044	0,0131
5 a 9 años	0,0073	0,0075	0,0000	0,0000	0,0125	0,0327
10 a 14 años	0,0250	0,0186	0,6926	0,0000	0,2468	0,0757
15 a 19 años	0,0160	0,0141	0,0236	0,3208	0,3789	0,1692
20 a 24 años	0,0148	0,0152	0,0179	0,0539	0,4677	0,2301
25 a 29 años	0,0160	0,0169	0,0218	0,0357	0,3497	0,2348
30 a 39 años	0,0123	0,0131	0,0206	0,0199	0,3213	0,1635
40 a 49 años	0,0129	0,0130	0,0240	0,0249	0,4705	0,1019
50 a 59 años	0,0140	0,0146	0,0278	0,0300	0,4933	0,0591
60 ó más años	0,0116	0,0120	0,0278	0,0489	0,2409	0,0236
<b>Hombres</b>	0,0059	0,0094	0,0325	0,0450	0,0086	0,0187
0 a 4 años	0,0096	0,0000	0,0000	0,0000	0,0069	0,0193
5 a 9 años	0,0102	0,0105	0,0000	0,0000	0,0193	0,0468
10 a 14 años	0,0313	0,0240	0,4814	0,0000	0,3207	0,0889
15 a 19 años	0,0275	0,0242	0,0316	0,4869	0,5612	0,1907
20 a 24 años	0,0327	0,0331	0,0347	0,0860	0,4464	0,2851
25 a 29 años	0,0381	0,0426	0,0480	0,0520	0,3221	0,4129
30 a 39 años	0,0306	0,0341	0,0385	0,0415	0,3576	0,2141
40 a 49 años	0,0336	0,0339	0,0547	0,0484	0,4689	0,2280
50 a 59 años	0,0345	0,0373	0,0594	0,0459	0,6360	0,1428
60 ó más años	0,0293	0,0309	0,0631	0,0680	0,3539	0,0735
<b>Mujeres</b>	0,0044	0,0055	0,0133	0,0200	0,0101	0,0169
0 a 4 años	0,0100	0,0000	0,0000	0,0000	0,0055	0,0183
5 a 9 años	0,0103	0,0106	0,0000	0,0000	0,0162	0,0476
10 a 14 años	0,0391	0,0283	1,7289	0,0000	0,3841	0,1401
15 a 19 años	0,0194	0,0173	0,0306	0,4014	0,4957	0,3020
20 a 24 años	0,0165	0,0172	0,0212	0,0674	0,8200	0,3268
25 a 29 años	0,0174	0,0186	0,0255	0,0458	0,5623	0,2705
30 a 39 años	0,0134	0,0143	0,0248	0,0234	0,4290	0,2082
40 a 49 años	0,0139	0,0141	0,0280	0,0299	0,6741	0,1092
50 a 59 años	0,0152	0,0159	0,0326	0,0375	0,6064	0,0623
60 ó más años	0,0125	0,0131	0,0322	0,0634	0,2876	0,0237

MUNICIPIO SUCRE

Estimaciones  
Est. de Regresión

	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	546.214	267.226	97.087	88.848	63.294	29.758	218.635	98.989	53.425	58.639	2.835	4.748	11.726	5.507	2.603	3.192	141	282
0 a 4 años	50.803	0	0	0	40.307	10.496	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	52.025	31.491	0	0	16.234	4.301	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	49.190	46.887	659	0	832	812	415	335	28	0	35	17	19	19	0	0	0	0
15 a 19 años	50.012	27.559	16.855	4.147	738	712	9.771	5.999	3.000	523	99	150	724	514	179	17	5	9
20 a 24 años	53.912	22.472	16.912	13.072	717	738	28.648	12.573	9.867	5.537	370	300	1.722	916	566	218	16	6
25 a 29 años	47.440	19.903	12.827	13.402	665	642	32.086	12.621	9.000	9.894	337	234	1.716	704	404	563	13	31
30 a 39 años	84.563	38.563	19.789	23.625	1.102	1.483	60.776	26.084	14.605	18.666	630	791	3.200	1.435	636	1.051	38	41
40 a 49 años	69.057	34.581	14.021	17.103	1.133	2.219	48.656	22.931	9.899	13.722	810	1.294	2.408	1.057	470	784	37	60
50 a 59 años	43.845	22.117	8.425	10.334	583	2.385	26.297	12.666	5.035	7.260	333	1.902	1.390	626	247	428	15	74
60 ó más años	45.368	23.653	7.598	7.165	982	5.969	11.986	5.779	1.991	3.034	221	960	546	236	101	132	16	61
Hombres	258.987	128.786	43.565	40.683	32.103	13.850	125.729	61.857	29.990	29.641	1.537	2.704	7.818	4.165	1.654	1.643	124	232
0 a 4 años	25.976	0	0	0	20.442	5.534	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	26.404	15.804	0	0	8.254	2.346	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.872	23.491	376	0	509	495	278	219	15	0	28	17	16	16	0	0	0	0
15 a 19 años	23.902	14.014	7.286	1.858	319	425	5.793	3.913	1.502	225	35	119	516	399	89	14	5	9
20 a 24 años	25.258	11.387	7.581	5.524	375	391	16.359	8.342	5.345	2.289	195	188	1.108	649	346	96	11	6
25 a 29 años	22.674	10.291	5.931	5.726	354	372	18.272	8.439	5.049	4.411	184	189	1.058	504	260	262	13	20
30 a 39 años	40.157	18.933	9.440	10.391	594	798	34.449	16.087	8.330	9.199	343	490	1.999	1.070	366	484	38	41
40 a 49 años	31.429	15.889	6.170	7.949	545	876	26.746	13.279	5.330	7.116	385	636	1.614	827	320	398	25	45
50 a 59 años	19.788	9.708	3.686	5.167	348	878	15.627	7.596	2.980	4.278	256	537	1.038	488	192	283	15	59
60 ó más años	18.527	9.268	3.094	4.067	361	1.736	8.205	3.983	1.439	2.124	131	528	468	212	81	106	16	52
Mujeres	287.226	138.440	53.522	48.165	31.191	15.908	92.906	37.132	23.434	28.998	1.298	2.044	3.908	1.342	949	1.549	17	50
0 a 4 años	24.827	0	0	0	19.864	4.962	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	25.621	15.686	0	0	7.980	1.955	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.317	23.396	282	0	323	317	136	116	13	0	7	0	3	3	0	0	0	0
15 a 19 años	26.110	13.545	9.569	2.289	419	288	13.977	2.086	1.498	299	63	31	208	115	89	3	0	0
20 a 24 años	28.654	11.085	9.332	7.548	343	348	12.289	4.232	4.522	3.248	175	113	614	267	220	122	5	0
25 a 29 años	24.765	9.612	6.896	7.676	311	271	13.815	4.183	3.950	5.483	153	45	658	201	144	301	0	12
30 a 39 años	44.406	19.630	10.349	13.234	508	685	26.327	9.997	6.275	9.468	287	301	1.201	364	270	567	0	0
40 a 49 años	37.628	18.692	7.851	9.154	588	1.343	21.910	9.652	4.569	6.606	425	658	794	230	150	386	12	15
50 a 59 años	24.057	12.409	4.739	5.166	235	1.507	10.670	5.070	2.055	2.983	97	465	352	137	55	144	0	15
60 ó más años	26.841	14.385	4.504	3.098	621	4.233	3.781	1.796	552	911	91	432	78	24	20	25	0	9

Coef de Variación

Est. de Regresión

	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0.0019	0.0024	0.0045	0.0043	0.0068	0.0104	0.0026	0.0038	0.0052	0.0049	0.0356	0.0194	0.0144	0.0188	0.0343	0.0286	0.1474	0.1050
0 a 4 años	0.0048	0.0000	0.0000	0.0000	0.0050	0.0131	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5 a 9 años	0.0065	0.0074	0.0000	0.0000	0.0126	0.0326	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10 a 14 años	0.0058	0.0044	0.2533	0.0000	0.0998	0.0626	0.0429	0.0446	0.3111	0.0000	0.0718	0.1829	0.1298	0.1298	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
15 a 19 años	0.0063	0.0074	0.0092	0.0335	0.1382	0.0994	0.0117	0.0127	0.0196	0.1091	0.1564	0.1262	0.0556	0.0517	0.1254	1.1296	0.4091	0.5851
20 a 24 años	0.0059	0.0092	0.0089	0.0106	0.1519	0.1080	0.0070	0.0108	0.0100	0.0183	0.0932	0.1134	0.0403	0.0476	0.0656	0.1653	0.5569	2.0058
25 a 29 años	0.0062	0.0095	0.0106	0.0097	0.1503	0.1167	0.0067	0.0114	0.0118	0.0111	0.1099	0.1503	0.0387	0.0581	0.0875	0.0637	0.5550	0.3894
30 a 39 años	0.0047	0.0066	0.0091	0.0073	0.1242	0.0689	0.0050	0.0078	0.0102	0.0081	0.0974	0.0654	0.0276	0.0373	0.0731	0.0465	0.3088	0.3824
40 a 49 años	0.0051	0.0064	0.0115	0.0091	0.1115	0.0416	0.0054	0.0074	0.0132	0.0098	0.0523	0.0323	0.0314	0.0437	0.0844	0.0632	0.2748	0.2234
50 a 59 años	0.0068	0.0083	0.0160	0.0126	0.1914	0.0351	0.0076	0.0101	0.0200	0.0146	0.0938	0.0301	0.0403	0.0545	0.1194	0.0726	0.4084	0.1352
60 ó más años	0.0073	0.0083	0.0188	0.0193	0.1358	0.0185	0.0104	0.0136	0.0319	0.0228	0.0744	0.0198	0.0540	0.0746	0.1521	0.1273	0.2205	0.0856
Hombres	0.0030	0.0037	0.0082	0.0080	0.0092	0.0161	0.0045	0.0058	0.0101	0.0097	0.0675	0.0397	0.0169	0.0201	0.0427	0.0411	0.1397	0.1129
0 a 4 años	0.0076	0.0000	0.0000	0.0000	0.0081	0.0196	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5 a 9 años	0.0097	0.0105	0.0000	0.0000	0.0195	0.0467	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10 a 14 años	0.0076	0.0060	0.2876	0.0000	0.1144	0.0712	0.0639	0.0663	0.6085	0.0000	0.0948	0.2386	0.1545	0.1545	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
15 a 19 años	0.0095	0.0104	0.0155	0.0554	0.2156	0.1186	0.0208	0.0192	0.0440	0.2698	0.5073	0.1999	0.0605	0.0527	0.1947	1.0061	0.4469	0.5954
20 a 24 años	0.0098	0.0139	0.0168	0.0211	0.1626	0.1449	0.0124	0.0154	0.0202	0.0441	0.1866	0.2141	0.0487	0.0541	0.0844	0.2768	0.2843	1.7824
25 a 29 años	0.0104	0.0144	0.0206	0.0200	0.1549	0.1394	0.0118	0.0160	0.0227	0.0245	0.2095	0.2162	0.0455	0.0601	0.0996	0.0934	0.4893	0.4801
30 a 39 años	0.0081	0.0109	0.0177	0.0151	0.1338	0.0884	0.0089	0.0120	0.0193	0.0164	0.1790	0.1203	0.0337	0.0391	0.0974	0.0723	0.2737	0.3284
40 a 49 años	0.0089	0.0109	0.0234	0.0172	0.1251	0.0689	0.0096	0.0121	0.0259	0.0184	0.1249	0.0752	0.0377	0.0463	0.1004	0.0789	0.3554	0.2721
50 a 59 años	0.0115	0.0145	0.0318	0.0220	0.1527	0.0593	0.0131	0.0167	0.0369	0.0249	0.1431	0.0682	0.0468	0.0622	0.1342	0.0892	0.4177	0.1635
60 ó más años	0.0119	0.0143	0.0334	0.0260	0.1806	0.0395	0.0171	0.0214	0.0528	0.0357	0.1527	0.0453	0.0571	0.0767	0.1729	0.1364	0.2395	0.0993
Mujeres	0.0029	0.0036	0.0072	0.0071	0.0101	0.0150	0.0053	0.0080	0.0113	0.0093	0.0623	0.0438	0.0260	0.0441				

MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Estimaciones Est. de Regresión	BTTPV							Estudiante							Pensionado o Jubilado						
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno		Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno		Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	
Total	4.965	2.455	1.492	896	22	100		84.318	57.044	14.050	11.892	1.093	241		15.778	7.166	2.730	3.385	334	2.164	
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	
10 a 14 años	106	101	0	0	0	5		44.095	42.790	582	0	550	174		63	8	0	0	0	55	
15 a 19 años	2.001	1.224	714	19	6	37		26.800	12.555	10.397	3.448	364	36		164	50	14	0	6	94	
20 a 24 años	1.661	677	546	401	0	37		9.155	812	2.146	6.087	109	0		184	68	29	0	4	84	
25 a 29 años	770	296	128	320	11	15		2.172	209	462	1.474	27	0		239	96	24	0	22	97	
30 a 39 años	427	158	104	155	4	6		1.040	165	193	648	29	5		568	218	101	45	61	143	
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0		365	168	55	129	8	5		919	406	212	170	35	96	
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0		131	58	20	53	0	0		2.291	870	457	775	33	156	
60 ó más años	0	0	0	0	0	0		560	286	195	53	5	21		11.351	5.450	1.893	2.395	173	1.440	
Hombres	3.027	1.774	793	382	10	68		40.601	28.497	6.097	5.326	588	92		8.861	4.270	1.478	1.826	179	1.108	
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	
10 a 14 años	82	77	0	0	0	5		22.124	21.422	306	0	319	76		41	0	0	0	0	41	
15 a 19 años	1.346	926	381	17	0	23		12.622	6.340	4.535	1.568	173	6		106	45	0	0	6	55	
20 a 24 años	943	461	300	157	0	25		4.139	359	926	2.790	65	0		113	49	16	0	0	49	
25 a 29 años	430	205	67	138	5	15		960	114	176	661	11	0		175	72	12	0	13	77	
30 a 39 años	225	105	45	71	4	0		356	39	64	231	17	5		391	171	61	10	47	102	
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0		144	73	30	37	4	0		563	314	100	65	28	56	
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0		34	15	0	19	0	0		1.075	501	195	265	28	85	
60 ó más años	0	0	0	0	0	0		220	134	60	21	0	5		6.397	3.118	1.094	1.486	56	644	
Mujeres	1.938	681	700	513	12	32		43.718	28.547	7.952	6.565	505	148		6.917	2.895	1.251	1.559	156	1.056	
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0		0	0	0	0	0	0	
10 a 14 años	23	23	0	0	0	0		21.971	21.367	275	0	231	98		23	8	0	0	0	15	
15 a 19 años	655	299	333	3	6	14		14.178	6.215	5.862	1.880	191	30		58	5	14	0	0	39	
20 a 24 años	718	216	246	244	0	12		5.015	453	1.220	3.298	45	0		70	19	13	0	4	35	
25 a 29 años	340	91	61	182	6	0		1.211	95	287	813	16	0		65	24	11	0	9	20	
30 a 39 años	201	53	59	84	0	6		684	127	129	416	12	0		176	47	40	34	14	41	
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0		221	95	25	92	4	5		356	91	112	105	7	40	
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0		97	43	20	34	0	0		1.215	369	262	510	5	70	
60 ó más años	0	0	0	0	0	0		340	152	135	33	5	16		4.954	2.332	799	910	117	796	

Coef de Variación  
Est. de Regresión

Estimaciones Est. de Regresión	BTTPV							Estudiante							Pensionado o Jubilado						
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno		Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno		Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	
Total	0,0218	0,0275	0,0427	0,0575	0,3693	0,1899		0,0046	0,0047	0,0157	0,0119	0,0690	0,1310		0,0137	0,0180	0,0361	0,0312	0,1217	0,0398	
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
10 a 14 años	0,1078	0,1104	0,0000	0,0000	0,0000	0,4957		0,0059	0,0045	0,2788	0,0000	0,1020	0,1489		0,1530	0,8425	0,0000	0,0000	0,0000	0,1237	
15 a 19 años	0,0337	0,0344	0,0568	1,5925	1,1765	0,3172		0,0086	0,0120	0,0117	0,0332	0,1167	0,4896		0,1283	0,2898	0,6778	0,0000	0,1414	0,1271	
20 a 24 años	0,0391	0,0596	0,0703	0,0781	0,0000	0,3180		0,0148	0,1097	0,0336	0,0112	0,2083	0,0000		0,1371	0,2632	0,4310	0,0000	0,9752	0,1472	
25 a 29 años	0,0570	0,0900	0,0209	0,0684	0,2870	0,4969		0,0320	0,2185	0,0803	0,0240	0,4043	0,0000		0,0880	0,1340	0,4069	0,0000	0,1745	0,1339	
30 a 39 años	0,0688	0,1176	0,1560	0,0978	0,4687	0,7893		0,0438	0,1811	0,1257	0,0359	0,2271	0,5621		0,0684	0,1081	0,1686	0,4194	0,1167	0,1135	
40 a 49 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0793	0,1134	0,2802	0,1136	0,5125	0,3980		0,0549	0,0759	0,1075	0,1426	0,2441	0,2131	
50 a 59 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0813	0,1164	0,2952	0,1088	0,0000	0,0000		0,0363	0,0580	0,0819	0,0519	0,4581	0,2155	
60 ó más años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0584	0,0770	0,0898	0,2938	1,0610	0,1219		0,0163	0,0201	0,0446	0,0387	0,2066	0,0496	
Hombres	0,0272	0,0299	0,0613	0,0960	0,6324	0,2260		0,0063	0,0063	0,0237	0,0176	0,0923	0,2092		0,0177	0,0224	0,0480	0,0415	0,1668	0,0559	
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
10 a 14 años	0,0943	0,0964	0,0000	0,0000	0,0000	0,4368		0,0079	0,0061	0,3476	0,0000	0,1300	0,2122		0,0715	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0715	
15 a 19 años	0,0386	0,0362	0,0813	1,3383	-13,6796	0,4212		0,0122	0,0160	0,0178	0,0492	0,1754	1,8258		0,1132	0,2131	0,0000	0,0000	0,1004	0,1310	
20 a 24 años	0,0532	0,0696	0,0992	0,1424	0,0000	0,4036		0,0213	0,1625	0,0501	0,0161	0,2369	0,0000		0,1620	0,2443	0,4885	0,0000	0,0000	0,2388	
25 a 29 años	0,0739	0,0949	0,2830	0,1122	0,2628	0,3892		0,0428	0,2367	0,1243	0,0321	0,6161	0,0000		0,0927	0,1246	0,4999	0,0000	0,1898	0,1519	
30 a 39 años	0,0992	0,1425	0,2770	0,1515	0,4651	0,0000		0,0710	0,4484	0,1847	0,0578	0,2497	0,0000		0,0695	0,0964	0,2049	1,2944	0,1073	0,1039	
40 a 49 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1224	0,1606	0,3066	0,2428	0,7140	0,0000		0,0631	0,0722	0,1599	0,2597	0,2005	0,2392	
50 a 59 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,1310	0,2383	0,0000	0,1392	0,0000	0,0000		0,0517	0,0696	0,1255	0,1001	0,3570	0,2515	
60 ó más años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0915	0,1029	0,1778	0,4851	0,0000	0,2593		0,0214	0,0265	0,0573	0,0455	0,4818	0,0815	
Mujeres	0,0347	0,0583	0,0577	0,0679	0,3097	0,2994		0,0065	0,0069	0,0209	0,0162	0,1028	0,1614		0,0211	0,0294	0,0540	0,0475	0,1635	0,0554	
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000			

MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Estimaciones Est. de Regresión	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	210.792	96.066	22.788	10.845	58.870	22.224
0 a 4 años	50.803	0	0	0	40.307	10.496
5 a 9 años	52.025	31.491	0	0	16.234	4.301
10 a 14 años	4.491	3.634	49	0	248	561
15 a 19 años	10.552	7.217	2.552	139	258	386
20 a 24 años	12.543	7.426	3.758	828	218	311
25 a 29 años	10.457	5.977	2.810	1.150	255	266
30 a 39 años	18.552	10.502	4.151	3.061	339	498
40 a 49 años	16.709	10.020	3.385	2.298	242	764
50 a 59 años	13.736	7.897	2.666	1.818	202	1.153
60 ó más años	20.925	11.902	3.417	1.550	567	3.488
<b>Hombres</b>	72.952	28.223	3.552	1.865	29.666	9.646
0 a 4 años	25.976	0	0	0	20.442	5.534
5 a 9 años	26.404	15.804	0	0	8.254	2.346
10 a 14 años	2.331	1.757	55	0	162	357
15 a 19 años	3.518	2.391	779	35	100	213
20 a 24 años	2.594	1.527	648	193	104	123
25 a 29 años	1.780	958	367	254	128	72
30 a 39 años	2.736	1.461	575	396	145	160
40 a 49 años	2.362	1.396	390	334	103	140
50 a 59 años	2.013	1.108	318	323	69	196
60 ó más años	3.237	1.821	421	331	158	507
<b>Mujeres</b>	137.840	67.842	19.235	8.980	29.204	12.578
0 a 4 años	24.827	0	0	0	19.864	4.962
5 a 9 años	25.621	15.686	0	0	7.980	1.955
10 a 14 años	2.160	1.877	-6	0	85	204
15 a 19 años	7.033	4.826	1.772	104	158	174
20 a 24 años	9.948	5.899	3.111	635	114	189
25 a 29 años	8.677	5.019	2.442	896	126	194
30 a 39 años	15.816	9.041	3.577	2.665	195	338
40 a 49 años	14.347	8.624	2.995	1.964	139	625
50 a 59 años	11.723	6.789	2.348	1.496	133	957
60 ó más años	17.687	10.081	2.997	1.220	409	2.981

Coef de Variación  
Est. de Regresión

Est. de Regresión	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	0,0033	0,0042	0,0090	0,0133	0,0070	0,0126
0 a 4 años	0,0048	0,0000	0,0000	0,0000	0,0050	0,0131
5 a 9 años	0,0065	0,0074	0,0000	0,0000	0,0126	0,0326
10 a 14 años	0,0242	0,0191	0,7845	0,0000	0,2469	0,0766
15 a 19 años	0,0158	0,0140	0,0238	0,2878	0,3535	0,1646
20 a 24 años	0,0147	0,0151	0,0179	0,0547	0,4595	0,2218
25 a 29 años	0,0162	0,0171	0,0221	0,0372	0,3606	0,2385
30 a 39 años	0,0124	0,0133	0,0208	0,0200	0,3577	0,1711
40 a 49 años	0,0128	0,0129	0,0238	0,0250	0,4792	0,1027
50 a 59 años	0,0143	0,0149	0,0283	0,0305	0,5249	0,0606
60 ó más años	0,0114	0,0118	0,0272	0,0467	0,2244	0,0235
<b>Hombres</b>	0,0054	0,0076	0,0171	0,0241	0,0090	0,0188
0 a 4 años	0,0076	0,0000	0,0000	0,0000	0,0081	0,0196
5 a 9 años	0,0097	0,0105	0,0000	0,0000	0,0195	0,0467
10 a 14 años	0,0302	0,0257	0,3108	0,0000	0,2513	0,0866
15 a 19 años	0,0276	0,0245	0,0320	0,4782	0,5881	0,1929
20 a 24 años	0,0317	0,0336	0,0345	0,0842	0,4453	0,2862
25 a 29 años	0,0368	0,0419	0,0480	0,0523	0,2953	0,3845
30 a 39 años	0,0305	0,0346	0,0389	0,0421	0,3386	0,2180
40 a 49 años	0,0332	0,0335	0,0533	0,0487	0,4566	0,2300
50 a 59 años	0,0341	0,0379	0,0604	0,0466	0,5730	0,1451
60 ó más años	0,0289	0,0306	0,0622	0,0690	0,3525	0,0723
<b>Mujeres</b>	0,0041	0,0050	0,0107	0,0162	0,0102	0,0169
0 a 4 años	0,0061	0,0000	0,0000	0,0000	0,0062	0,0182
5 a 9 años	0,0089	0,0103	0,0000	0,0000	0,0163	0,0473
10 a 14 años	0,0370	0,0280	-4,6352	0,0000	0,4964	0,1510
15 a 19 años	0,0190	0,0170	0,0310	0,3463	0,4264	0,2788
20 a 24 años	0,0163	0,0170	0,0212	0,0694	0,7099	0,3059
25 a 29 años	0,0178	0,0189	0,0259	0,0482	0,6096	0,2802
30 a 39 años	0,0133	0,0145	0,0250	0,0236	0,4925	0,2208
40 a 49 años	0,0138	0,0140	0,0278	0,0298	0,7090	0,1075
50 a 59 años	0,0156	0,0162	0,0332	0,0380	0,6735	0,0640
60 ó más años	0,0123	0,0129	0,0315	0,0605	0,2587	0,0238

MUNICIPIO SUCRE

Estimaciones  
Est. Raz-Regz (b=1)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	546.734	267.562	97.189	88.888	63.347	29.748	217.615	99.059	53.202	58.391	2.538	4.425	10.829	5.397	2.402	3.003	-71	98
0 a 4 años	50.736	0	0	0	40.277	10.459	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	51.902	31.394	0	0	16.222	4.286	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	49.488	47.070	704	4	874	836	79	302	-52	-72	-42	-57	15	23	-2	-2	-2	-2
15 a 19 años	49.605	27.410	16.772	4.047	695	681	9.541	5.960	2.952	480	44	105	706	513	175	11	1	6
20 a 24 años	53.865	22.440	16.917	13.091	691	726	28.136	12.502	9.796	5.412	247	179	2.319	1.046	670	334	137	132
25 a 29 años	47.731	20.020	12.899	13.490	682	640	32.536	12.728	9.097	10.009	410	292	1.854	738	432	588	38	58
30 a 39 años	85.575	39.103	19.948	23.727	1.245	1.552	61.473	26.408	14.700	18.788	736	841	2.694	1.371	537	943	-81	-76
40 a 49 años	68.402	34.267	13.883	16.992	1.059	2.201	47.513	22.591	9.669	13.503	605	1.145	2.270	1.024	442	756	12	36
50 a 59 años	44.658	22.529	8.574	10.442	687	2.426	28.061	13.131	5.387	7.586	685	1.272	933	547	151	340	-83	-22
60 ó más años	44.772	23.329	7.492	7.095	915	5.941	10.276	5.437	1.653	2.685	-147	648	38	135	-3	33	-93	-34
Hombres	259.357	129.002	43.599	40.757	32.140	13.859	127.154	62.335	30.200	29.845	1.818	2.956	6.746	3.990	1.437	1.423	-119	15
0 a 4 años	25.941	0	0	0	20.426	5.515	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	26.409	15.810	0	0	8.258	2.341	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.661	23.373	323	2	475	488	52	194	-38	-48	-23	-39	20	20	0	0	0	0
15 a 19 años	24.047	14.108	7.298	1.864	350	427	6.094	3.997	1.537	299	88	173	385	376	68	-18	-23	-18
20 a 24 años	25.482	11.516	7.621	5.557	383	405	16.078	8.346	5.297	2.215	116	104	1.432	722	404	156	75	75
25 a 29 años	22.544	10.203	5.925	5.729	331	356	18.641	8.473	5.127	4.496	270	275	1.000	487	250	255	-1	9
30 a 39 años	40.626	19.223	9.496	10.401	666	840	35.850	16.514	8.564	9.400	635	737	1.541	1.009	277	386	-68	-63
40 a 49 años	31.048	15.699	6.095	7.890	499	865	26.504	13.145	5.282	7.072	361	644	1.590	812	316	395	24	43
50 a 59 años	20.103	9.885	3.736	5.191	395	896	16.492	7.854	3.144	4.413	408	673	775	445	136	232	-42	4
60 ó más años	18.496	9.185	3.105	4.123	357	1.726	7.443	3.812	1.287	1.998	-37	383	3	119	-14	17	-84	-35
Mujeres	287.377	138.560	53.590	48.131	31.207	15.889	90.461	36.724	23.002	28.546	720	1.469	4.083	1.407	965	1.580	48	83
0 a 4 años	24.795	0	0	0	19.851	4.944	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	25.493	15.584	0	0	7.964	1.945	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.827	23.697	381	2	399	348	27	108	-14	-24	-19	-24	-5	3	-2	-2	-2	-2
15 a 19 años	25.558	13.302	9.474	2.183	345	254	3.447	1.963	1.415	181	-44	-68	321	137	107	29	24	24
20 a 24 años	28.383	10.924	9.296	7.534	308	321	12.058	4.156	4.499	3.197	131	75	687	324	266	178	62	57
25 a 29 años	25.187	9.817	6.974	7.751	351	284	13.895	4.255	3.970	5.513	140	17	854	251	162	333	-39	49
30 a 39 años	44.949	19.880	10.452	13.326	579	712	25.623	9.894	6.136	9.388	101	104	1.153	362	260	557	-13	-13
40 a 49 años	37.354	18.568	7.788	9.102	560	1.336	21.009	9.446	4.387	6.431	244	501	680	212	126	361	-12	-7
50 a 59 años	24.555	12.644	4.838	5.251	292	1.530	11.569	5.277	2.243	3.173	277	599	158	102	15	108	-41	-26
60 ó más años	26.276	14.144	4.387	2.972	558	4.215	2.833	1.625	366	687	-110	265	35	16	11	16	-9	-1

Coef de Variación

Est. Raz-Regz (b=1)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0,0028	0,0030	0,0072	0,0076	0,0104	0,0206	0,0041	0,0046	0,0081	0,0075	0,1251	0,0760	0,0230	0,0244	0,0504	0,0409	-1,1867	0,8991
0 a 4 años	0,0098	0,0000	0,0000	0,0000	0,0057	0,0207	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0100	0,0083	0,0000	0,0000	0,0163	0,0524	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,0100	0,0053	0,3382	56,8439	0,2218	0,2259	0,3967	0,0592	-0,2864	-0,2063	-0,2461	-0,1865	0,2758	0,1097	-1,0577	-1,1511	-0,2840	-0,4038
15 a 19 años	0,0099	0,0095	0,0135	0,0536	0,2829	0,2714	0,0183	0,0164	0,0284	0,1752	1,3175	-0,5724	0,0736	0,0581	0,1502	2,3063	14,5662	2,7212
20 a 24 años	0,0084	0,0110	0,0122	0,0154	0,2579	0,2276	0,0107	0,0130	0,0146	0,0276	0,4121	0,6019	0,0432	0,0515	0,0728	0,1464	0,2423	0,2670
25 a 29 años	0,0084	0,0109	0,0144	0,0135	0,2314	0,2303	0,0098	0,0133	0,0168	0,0156	0,2623	0,3911	0,0509	0,0684	0,1073	0,0792	0,8161	0,5633
30 a 39 años	0,0073	0,0080	0,0144	0,0119	0,2054	0,1585	0,0084	0,0096	0,0168	0,0133	0,2615	0,2427	0,0524	0,0529	0,1263	0,0733	-0,6250	-0,6866
40 a 49 años	0,0077	0,0078	0,0175	0,0141	0,2053	0,0936	0,0090	0,0093	0,0214	0,0155	0,2590	0,1449	0,0507	0,0588	0,1259	0,0751	3,3283	1,1518
50 a 59 años	0,0091	0,0096	0,0216	0,0174	0,2436	0,0631	0,0105	0,0117	0,0266	0,0193	0,1455	0,0832	0,0820	0,0753	0,2495	0,1139	-0,2913	-1,1596
60 ó más años	0,0104	0,0104	0,0273	0,0284	0,2193	0,0311	0,0185	0,0186	0,0553	0,0358	-0,4270	0,1005	0,9190	0,1440	-5,8952	0,5707	-0,0966	-0,2846
Hombres	0,0044	0,0045	0,0121	0,0125	0,0142	0,0318	0,0062	0,0065	0,0132	0,0130	0,1399	0,0934	0,0293	0,0265	0,0669	0,0660	-0,5698	4,7718
0 a 4 años	0,0143	0,0000	0,0000	0,0000	0,0092	0,0307	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0146	0,0121	0,0000	0,0000	0,0250	0,0742	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,0137	0,0072	0,4977	77,5799	0,2834	0,2688	0,5659	0,0867	-0,3903	-0,2852	-0,3936	-0,2937	0,1991	0,1238	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
15 a 19 años	0,0145	0,0132	0,0222	0,0839	0,3901	0,3059	0,0263	0,0224	0,0533	0,2609	0,5462	0,2978	0,1074	0,0634	0,3064	-1,0571	-0,5358	-0,7760
20 a 24 años	0,0131	0,0159	0,0214	0,0281	0,3035	0,2862	0,0166	0,0174	0,0256	0,0595	0,6993	0,8538	0,0551	0,0597	0,0952	0,2387	0,3535	0,3796
25 a 29 años	0,0136	0,0163	0,0260	0,0258	0,3070	0,2949	0,0151	0,0178	0,0281	0,0308	0,3186	0,3423	0,0695	0,0779	0,1364	0,1288	-23,1787	2,7600
30 a 39 años	0,0117	0,0125	0,0250	0,0220	0,2558	0,2129	0,0126	0,0136	0,0266	0,0234	0,2437	0,2281	0,0699	0,0556	0,1871	0,1327	-0,5712	-0,6398
40 a 49 años	0,0126	0,0126	0,0319	0,0241	0,2765	0,1657	0,0138	0,0139	0,0352	0,0257	0,3385	0,2054	0,0592	0,0614	0,1441	0,1132	1,3850	0,8092
50 a 59 años	0,0148	0,0160	0,0394	0,0280	0,2528	0,1149	0,0162	0,0180	0,0436	0,0307	0,2002	0,1319	0,0881	0,0833	0,2466	0,1424	-0,5337	5,9433
60 ó más años	0,0163	0,0174	0,0447	0,0342	0,3153	0,0664	0,0245	0,0260	0,0723	0,0469	-1,4163	0,1463	10,9909	0,1544	-1,1844	0,9965	-0,1119	-0,2846
Mujeres	0,0041	0,0045	0,0104	0,0110	0,0156	0,0284	0,0073	0,0093	0,0145	0,0119	0,2941	0,1532	0,0374					

MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Estimaciones Est. Raz-Regr (b=1)	BTTPV						Estudiando						Pensionado o Jubilado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	4.863	2.442	1.455	893	-1	74	84.141	57.056	14.009	11.803	1.074	199	18.457	7.584	3.278	3.987	905	2.703
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	79	102	-7	-7	-7	-2	44.441	42.963	640	19	610	209	144	22	17	17	17	71
15 a 19 años	1.803	1.192	667	-17	-32	-7	26.935	12.538	10.415	3.447	434	101	291	76	36	26	31	122
20 a 24 años	1.884	717	586	451	45	85	8.374	631	2.005	5.959	-60	-161	402	113	72	42	47	128
25 a 29 años	795	299	130	331	15	20	2.445	273	513	1.527	81	51	212	93	20	-5	15	89
30 a 39 años	302	132	79	135	-22	-22	918	141	172	627	-1	-21	466	203	86	20	35	122
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	471	189	77	146	32	27	1.038	427	236	194	61	120
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	-27	29	-13	23	-33	-33	2.659	952	533	848	101	225
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	584	292	200	55	11	26	13.245	5.698	2.278	2.845	598	1.826
Hombres	3.321	1.857	841	432	68	123	40.516	28.322	6.125	5.366	598	105	9.668	4.392	1.658	2.019	344	1.255
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	64	79	-5	-5	-5	0	22.838	21.409	464	192	502	271	14	-5	-5	-5	-5	34
15 a 19 años	1.037	873	320	-47	-62	-47	12.803	6.392	4.578	1.580	222	31	151	54	9	9	14	65
20 a 24 años	1.407	563	383	245	93	123	3.429	203	800	2.674	-96	-152	267	81	45	30	30	81
25 a 29 años	543	226	89	160	29	39	689	54	126	614	-50	-55	47	48	-10	-25	-15	49
30 a 39 años	270	116	54	79	13	8	329	35	60	226	9	-1	131	120	13	-38	-13	49
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	178	81	37	41	12	7	470	290	83	52	8	37
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	-5	7	-8	12	-8	-8	1.265	546	234	299	64	122
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	255	141	68	27	7	12	7.323	3.258	1.289	1.697	261	818
Mujeres	1.542	585	614	461	-69	-49	43.625	28.734	7.884	6.437	476	94	8.789	3.192	1.620	1.968	561	1.448
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	15	23	-2	-2	-2	-2	21.603	21.554	176	-173	108	-62	130	27	22	22	22	37
15 a 19 años	766	319	347	30	30	40	14.132	6.146	5.837	1.867	212	70	140	22	27	17	17	57
20 a 24 años	477	154	203	206	-48	-38	4.945	428	1.205	3.285	36	-9	135	32	27	12	17	47
25 a 29 años	252	73	41	171	-14	-19	1.756	219	387	913	131	106	165	45	30	20	30	40
30 a 39 años	32	16	25	56	-35	-30	689	106	112	401	-10	-20	335	83	73	58	48	73
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	293	108	40	105	20	20	568	137	153	142	53	83
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	-22	22	-5	11	-25	-25	1.394	406	299	549	37	103
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	329	151	132	28	4	14	5.922	2.440	989	1.148	337	1.006

Coeff. de Variación

Est. Raz-Regr (b=1)	BTTPV						Estudiando						Pensionado o Jubilado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0,0367	0,0377	0,0620	0,0921	-63,7743	0,8947	0,0077	0,0059	0,0225	0,0258	0,2266	1,2166	0,0171	0,0217	0,0435	0,0369	0,1222	0,0502
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,2355	0,1128	-1,5418	-1,1361	-0,5319	-2,2492	0,0107	0,0055	0,3632	11,7799	0,2969	0,8694	0,1006	0,4000	0,3649	0,3578	0,1701	0,0982
15 a 19 años	0,0650	0,0501	0,0876	-3,1584	-1,3484	-6,3706	0,0144	0,0162	0,0176	0,0521	0,3391	1,4458	0,0917	0,2101	0,3221	0,4442	0,1833	0,1026
20 a 24 años	0,0584	0,0786	0,0942	0,1118	0,8919	0,4881	0,0229	0,1747	0,0471	0,0148	-0,1076	-0,3862	0,0772	0,1630	0,1897	0,3288	0,1503	0,1094
25 a 29 años	0,0805	0,1124	0,2558	0,0916	1,4049	1,1088	0,0328	0,1838	0,0801	0,0255	0,3433	0,1364	0,1861	0,6253	-2,4677	0,4371	0,1530	
30 a 39 años	0,1319	0,1647	0,2703	0,1406	-0,5307	-0,5767	0,0551	0,2334	0,1519	0,0394	-10,4907	-0,3888	0,0947	0,1248	0,2314	1,0464	0,3255	0,1513
40 a 49 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0655	0,1075	0,2090	0,1053	0,1716	0,1307	0,0588	0,0802	0,1164	0,1478	0,2862	0,2164
50 a 59 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,4471	0,2751	-0,4890	0,2617	-0,0615	-0,0348	0,0435	0,0648	0,0975	0,0632	0,3818	0,2220
60 ó más años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0602	0,0791	0,0920	0,3106	0,6237	0,1860	0,0211	0,0251	0,0555	0,0458	0,1688	0,0655
Hombres	0,0426	0,0396	0,0844	0,1466	0,7564	0,4377	0,0109	0,0081	0,0347	0,0385	0,2801	1,5883	0,0240	0,0278	0,0630	0,0532	0,2360	0,0794
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,2095	0,1009	-1,4554	-1,2111	-0,6544	0,0000	0,0142	0,0075	0,3399	0,7961	0,2490	0,4638	0,5367	-0,9017	-0,6852	-0,7522	-0,2392	0,0874
15 a 19 años	0,0910	0,0554	0,1457	-0,8952	-0,5732	-0,7849	0,0208	0,0218	0,0272	0,0777	0,4595	3,2601	0,1207	0,2037	0,8770	0,8949	0,2810	0,1275
20 a 24 años	0,0620	0,0801	0,1138	0,1586	0,3460	0,2727	0,0366	0,3565	0,0766	0,0216	-0,4435	-0,2683	0,1015	0,2056	0,2503	0,3549	0,2217	0,1623
25 a 29 años	0,0890	0,1139	0,2832	0,1388	0,5491	0,4385	0,0695	0,5569	0,1923	0,0379	-0,2431	-0,1889	0,5129	0,3107	-0,9724	-0,3516	-0,4074	0,2495
30 a 39 años	0,1151	0,1498	0,3081	0,1791	0,6992	1,2736	0,0874	0,5426	0,2455	0,0624	0,6496	-4,0956	0,2535	0,1607	1,1336	-0,3983	-0,6759	0,2939
40 a 49 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1065	0,1553	0,2641	0,2311	0,2875	0,2869	0,0961	0,0881	0,2413	0,3959	1,6598	0,5329
50 a 59 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-1,1717	0,5632	-0,3867	0,2342	-0,1313	-0,0570	0,0607	0,0765	0,1466	0,1177	0,3926	0,2724
60 ó más años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0861	0,1030	0,1668	0,3967	0,6335	0,2362	0,0284	0,0329	0,0729	0,0571	0,2869	0,1081
Mujeres	0,0707	0,0937	0,0911	0,1133	-0,5561	-0,8031	0,0109	0,0086	0,0296	0,0347	0,3705	1,8666	0,0245	0,0347	0,0603	0,0513	0,1347	0,0638
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,5173	0,1915	-2,2349	-2,0542	-0,5861	-0,8013	0,0160	0,0080	0,9675	-0,9430	1,2099	-2,1119	0,0849	0,2398	0,2231	0,2180	0,1053	0,1414
15 a 19 años	0,0911																	

MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Estimaciones Est. Raz-Regr (b=1)	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	210.829	96.024	22.843	10.811	58.902	22.249
0 a 4 años	50.736	0	0	0	40.277	10.459
5 a 9 años	51.902	31.394	0	0	16.222	4.286
10 a 14 años	4.730	3.658	108	49	298	617
15 a 19 años	10.329	7.131	2.527	100	217	354
20 a 24 años	12.750	7.431	3.788	893	275	363
25 a 29 años	9.889	5.889	2.707	1.040	123	130
30 a 39 años	19.722	10.848	4.374	3.214	578	708
40 a 49 años	17.110	10.036	3.459	2.393	349	873
50 a 59 años	13.032	7.870	2.516	1.645	17	984
60 ó más años	20.629	11.767	3.364	1.477	546	3.475
<b>Hombres</b>	71.952	28.106	3.338	1.672	29.431	9.405
0 a 4 años	25.941	0	0	0	20.426	5.515
5 a 9 años	26.409	15.810	0	0	8.258	2.341
10 a 14 años	1.673	1.676	-93	-132	6	216
15 a 19 años	3.577	2.416	786	41	111	223
20 a 24 años	2.869	1.601	692	237	165	174
25 a 29 años	1.624	915	343	229	98	39
30 a 39 años	2.505	1.429	528	348	90	110
40 a 49 años	2.306	1.371	377	330	94	134
50 a 59 años	1.576	1.033	230	235	-27	105
60 ó más años	3.472	1.855	475	384	210	548
<b>Mujeres</b>	138.877	67.918	19.505	9.139	29.471	12.844
0 a 4 años	24.795	0	0	0	19.851	4.944
5 a 9 años	25.493	15.584	0	0	7.964	1.945
10 a 14 años	3.057	1.982	201	181	292	401
15 a 19 años	6.752	4.715	1.741	59	106	131
20 a 24 años	9.881	5.830	3.096	656	110	189
25 a 29 años	8.265	4.974	2.364	811	25	91
30 a 39 años	17.217	9.419	3.846	2.866	488	598
40 a 49 años	14.804	8.665	3.082	2.063	255	739
50 a 59 años	11.456	6.837	2.286	1.410	44	879
60 ó más años	17.157	9.912	2.889	1.093	336	2.927

Coef de Variación

Est. Raz-Regr (b=1)	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	0,0047	0,0055	0,0179	0,0332	0,0085	0,0188
0 a 4 años	0,0098	0,0000	0,0000	0,0000	0,0057	0,0207
5 a 9 años	0,0100	0,0083	0,0000	0,0000	0,0163	0,0524
10 a 14 años	0,0269	0,0202	0,4424	0,7299	0,2290	0,0806
15 a 19 años	0,0197	0,0157	0,0311	0,6432	0,4949	0,2333
20 a 24 años	0,0179	0,0169	0,0233	0,0847	0,4374	0,2564
25 a 29 años	0,0205	0,0192	0,0289	0,0629	0,8711	0,6264
30 a 39 años	0,0156	0,0152	0,0279	0,0331	0,2759	0,1762
40 a 49 años	0,0162	0,0149	0,0319	0,0400	0,4132	0,1279
50 a 59 años	0,0186	0,0168	0,0387	0,0510	7,4411	0,0967
60 ó más años	0,0152	0,0139	0,0385	0,0791	0,2954	0,0358
<b>Hombres</b>	0,0083	0,0109	0,0657	0,1233	0,0109	0,0285
0 a 4 años	0,0143	0,0000	0,0000	0,0000	0,0092	0,0307
5 a 9 años	0,0146	0,0121	0,0000	0,0000	0,0250	0,0742
10 a 14 años	0,0507	0,0289	-0,2808	-0,1641	8,1688	0,1662
15 a 19 años	0,0327	0,0268	0,0472	0,8008	0,6039	0,2271
20 a 24 años	0,0345	0,0348	0,0430	0,1131	0,3499	0,2426
25 a 29 años	0,0462	0,0469	0,0643	0,0835	0,4503	0,8072
30 a 39 años	0,0397	0,0391	0,0575	0,0752	0,6465	0,3826
40 a 49 años	0,0392	0,0370	0,0736	0,0737	0,5639	0,2830
50 a 59 años	0,0500	0,0430	0,1047	0,0896	-1,7223	0,3091
60 ó más años	0,0322	0,0322	0,0786	0,0932	0,3088	0,0826
<b>Mujeres</b>	0,0059	0,0063	0,0181	0,0334	0,0131	0,0258
0 a 4 años	0,0135	0,0000	0,0000	0,0000	0,0070	0,0285
5 a 9 años	0,0137	0,0112	0,0000	0,0000	0,0212	0,0761
10 a 14 años	0,0311	0,0282	0,1942	0,1569	0,1643	0,0895
15 a 19 años	0,0245	0,0193	0,0400	0,9502	0,7788	0,5028
20 a 24 años	0,0212	0,0194	0,0284	0,1153	0,9418	0,4469
25 a 29 años	0,0234	0,0213	0,0343	0,0843	3,8161	0,8416
30 a 39 años	0,0176	0,0168	0,0335	0,0397	0,3022	0,2046
40 a 49 años	0,0184	0,0166	0,0376	0,0491	0,5202	0,1477
50 a 59 años	0,0206	0,0185	0,0445	0,0622	2,6076	0,1046
60 ó más años	0,0174	0,0156	0,0449	0,1049	0,4284	0,0405

MUNICIPIO SUCRE

Estimaciones  
Est. Raz-Regr (b=1)  
(ajustando negativos)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	555.570	267.715	97.998	90.704	66.669	32.484	219.618	99.059	53.292	58.600	3.432	5.235	12.354	5.418	2.578	3.286	506	566
0 a 4 años	50.736	0	0	0	0	40.277	10.459	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	51.902	31.394	0	0	16.222	4.286	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	50.662	47.082	966	498	1.074	1.042	356	302	11	11	16	16	59	23	9	9	9	9
15 a 19 años	51.244	27.412	16.830	4.462	1.226	1.314	10.028	5.960	2.952	561	235	320	890	513	180	64	64	69
20 a 24 años	55.164	22.528	16.920	13.200	1.253	1.263	28.440	12.502	8.796	5.425	398	319	2.415	1.054	670	348	173	170
25 a 29 años	48.758	20.064	12.977	13.609	1.085	1.023	32.741	12.728	9.097	10.009	508	399	2.008	751	443	599	105	110
30 a 39 años	86.876	39.108	20.061	23.965	1.726	2.016	61.653	26.408	14.700	18.788	801	956	3.098	1.371	604	1.031	46	46
40 a 49 años	68.788	34.267	13.906	17.044	1.202	2.369	47.513	22.591	9.669	13.503	605	1.145	2.441	1.024	456	784	72	105
50 a 59 años	45.507	22.531	8.711	10.625	1.070	2.570	28.095	13.131	5.387	7.586	698	1.293	1.198	547	191	380	33	47
60 ó más años	45.933	23.329	7.627	7.301	1.534	6.142	10.792	5.437	1.680	2.716	171	283	245	135	25	71	4	10
Hombres	263.934	129.061	44.133	41.811	33.730	15.199	127.942	62.335	30.250	30.000	2.113	3.244	7.891	4.011	1.573	1.650	301	356
0 a 4 años	25.941	0	0	0	20.426	5.515	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	26.409	15.810	0	0	8.258	2.341	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	25.333	23.385	532	250	611	555	208	194	1	1	6	6	52	20	8	8	8	8
15 a 19 años	25.037	14.110	7.342	2.145	661	779	6.283	3.997	1.537	367	146	236	528	376	68	23	28	33
20 a 24 años	25.950	11.524	7.621	5.812	575	618	16.111	8.346	5.297	2.228	129	111	1.526	730	404	170	110	112
25 a 29 años	23.109	10.235	5.825	5.265	548	548	18.672	8.473	5.127	4.486	293	250	1.080	500	250	255	35	40
30 a 39 años	41.308	19.226	9.591	13.679	878	1.035	35.991	16.741	8.564	9.400	646	767	1.890	1.009	646	467	36	36
40 a 49 años	31.255	15.699	6.099	7.919	594	944	26.504	13.145	5.282	7.072	361	644	1.683	812	316	410	61	84
50 a 59 años	20.448	9.887	3.790	5.247	552	972	16.526	7.854	3.144	4.413	421	694	942	445	173	264	23	37
60 ó más años	19.144	9.185	3.193	4.235	639	1.892	7.747	3.812	1.298	2.023	111	503	190	119	12	53	0	6
Mujeres	291.636	138.654	53.865	48.893	32.939	17.285	91.676	36.724	23.042	28.600	1.319	1.991	4.463	1.407	1.005	1.636	205	210
0 a 4 años	24.795	0	0	0	19.851	4.944	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	25.493	15.584	0	0	7.964	1.945	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	25.329	23.697	434	248	463	487	148	108	10	10	10	10	7	3	1	1	1	1
15 a 19 años	26.207	13.302	9.488	2.317	565	535	3.745	1.963	1.415	194	89	84	362	137	112	41	36	36
20 a 24 años	29.214	11.004	9.299	7.588	678	645	12.329	4.156	4.499	3.197	269	208	889	324	266	178	63	58
25 a 29 años	25.649	9.829	7.012	7.784	549	475	14.069	4.255	3.970	5.513	215	116	928	251	193	344	70	70
30 a 39 años	45.568	19.882	10.470	13.387	848	981	25.762	9.894	6.136	9.388	155	189	1.208	362	262	564	10	10
40 a 49 años	37.533	18.568	7.807	9.125	608	1.425	21.009	9.446	4.387	6.431	244	501	758	212	140	374	11	21
50 a 59 años	25.059	12.644	4.921	5.378	519	1.598	11.569	5.277	2.243	3.173	277	599	256	102	18	116	10	10
60 ó más años	26.789	14.144	4.434	3.066	895	4.250	3.045	1.625	382	694	60	284	55	16	13	18	4	4

Coef de Variación  
Est. Raz-Regr (b=1)  
(ajustando negativos)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0,0028	0,0030	0,0072	0,0074	0,0099	0,0189	0,0041	0,0046	0,0080	0,0074	0,0924	0,0641	0,0201	0,0243	0,0470	0,0374	0,1665	0,1557
0 a 4 años	0,0098	0,0000	0,0000	0,0000	0,0057	0,0207	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0100	0,0083	0,0000	0,0000	0,0163	0,0524	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,0087	0,0053	0,2466	0,4567	0,1806	0,1813	0,0880	0,0593	1,3537	1,3498	0,6457	0,6843	0,0701	0,1097	0,2350	0,2558	0,0631	0,0897
15 a 19 años	0,0095	0,0095	0,0134	0,0486	0,1604	0,1406	0,0175	0,0164	0,0284	0,1499	0,2469	0,1880	0,0584	0,0581	0,1461	0,3964	0,2276	0,2366
20 a 24 años	0,0082	0,0109	0,0122	0,0153	0,1422	0,1308	0,0106	0,0130	0,0146	0,0275	0,2559	0,3377	0,0414	0,0511	0,0728	0,1405	0,1919	0,2073
25 a 29 años	0,0083	0,0109	0,0143	0,0134	0,1453	0,1439	0,0097	0,0133	0,0168	0,0155	0,2115	0,2858	0,0470	0,0672	0,1046	0,0777	0,2953	0,2970
30 a 39 años	0,0071	0,0080	0,0143	0,0118	0,1481	0,1219	0,0084	0,0096	0,0168	0,0132	0,2400	0,2131	0,0456	0,0529	0,1123	0,0670	1,1004	1,1343
40 a 49 años	0,0077	0,0078	0,0175	0,0140	0,1808	0,0869	0,0090	0,0093	0,0214	0,0155	0,2587	0,1447	0,0472	0,0588	0,1221	0,0725	0,5547	0,3949
50 a 59 años	0,0089	0,0096	0,0212	0,0171	0,1563	0,0594	0,0105	0,0117	0,0265	0,0193	0,1424	0,0816	0,0639	0,0753	0,1972	0,1019	0,7326	0,5428
60 ó más años	0,0101	0,0104	0,0268	0,0275	0,1308	0,0301	0,0176	0,0186	0,0544	0,0353	0,3675	0,0828	0,1425	0,1440	0,7074	0,2652	2,2457	0,9680
Hombres	0,0043	0,0045	0,0119	0,0122	0,0135	0,0289	0,0061	0,0065	0,0132	0,0130	0,1200	0,0849	0,0250	0,0264	0,0611	0,0570	0,2252	0,2010
0 a 4 años	0,0143	0,0000	0,0000	0,0000	0,0092	0,0307	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0146	0,0121	0,0000	0,0000	0,0250	0,0742	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,0133	0,0072	0,3023	0,6207	0,2205	0,2363	0,1415	0,0867	14,8300	13,6886	1,5082	1,6152	0,0766	0,1238	0,2566	0,2622	0,0795	0,1069
15 a 19 años	0,0139	0,0132	0,0221	0,0729	0,2065	0,1676	0,0255	0,0224	0,0532	0,2126	0,3293	0,2183	0,0784	0,0634	0,3065	0,8272	0,4400	0,4232
20 a 24 años	0,0129	0,0159	0,0214	0,0278	0,2021	0,1875	0,0165	0,0173	0,0256	0,0591	0,6285	0,7991	0,0517	0,0590	0,0952	0,2190	0,2410	0,2422
25 a 29 años	0,0133	0,0163	0,0257	0,0253	0,1890	0,1909	0,0150	0,0178	0,0280	0,0307	0,2924	0,3312	0,0644	0,0759	0,1364	0,1288	0,6622	0,6210
30 a 39 años	0,0115	0,0125	0,0247	0,0216	0,1935	0,1722	0,0125	0,0136	0,0265	0,0234	0,2386	0,2183	0,0570	0,0556	0,1516	0,1097	1,0785	1,1194
40 a 49 años	0,0125	0,0126	0,0319	0,0240	0,2320	0,1516	0,0138	0,0139	0,0351	0,0257	0,3379	0,2050	0,0560	0,0614	0,1441	0,1091	0,5449	0,4142
50 a 59 años	0,0145	0,0160	0,0388	0,0277	0,1805	0,1057	0,0162	0,0180	0,0436	0,0306	0,1935	0,1275	0,0725	0,0833	0,1939	0,1251	0,9745	0,6425
60 ó más años	0,0157	0,0174	0,0435	0,0333	0,1762	0,0605	0,0235	0,0260	0,0718	0,0464	0,4729	0,1115	0,1735	0,1544	1,3817	0,3196	0,0000	1,6607
Mujeres	0,0041	0,0045	0,0103	0,0108	0,0147	0,0261	0,0072	0,0093	0,0145	0,0119								

MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Estimaciones Est. Raz-Regr (b=1) (ajustando negativos)	BTPPV						Estudiante						Pensionado o Jubilado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	5.781	2.483	1.555	1.076	301	366	85.595	57.116	14.060	12.013	1.538	868	19.184	7.603	3.418	4.235	1.174	2.754
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	179	102	18	18	18	23	44.743	42.963	645	202	637	296	192	34	29	29	29	71
15 a 19 años	2.265	1.192	703	125	110	135	27.085	12.538	10.415	3.447	477	208	346	78	53	43	43	129
20 a 24 años	2.037	748	586	451	111	141	8.820	677	2.005	5.959	162	117	436	116	75	54	59	132
25 a 29 años	897	309	155	341	41	51	2.592	280	520	1.529	144	119	356	95	55	45	59	102
30 a 39 años	403	132	93	141	21	16	1.016	146	175	627	34	34	638	203	115	95	95	130
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	512	189	81	155	46	41	1.096	427	241	209	80	139
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	98	31	19	30	9	9	2.702	952	533	848	144	225
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	629	292	200	64	29	44	13.418	5.698	2.317	2.912	665	1.826
<b>Hombres</b>	3.819	1.857	899	577	218	268	41.180	28.334	6.149	5.378	845	474	10.122	4.406	1.746	2.172	509	1.289
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	144	79	15	15	15	20	22.838	21.409	464	192	502	271	62	7	7	7	7	34
15 a 19 años	1.431	873	352	72	62	72	12.945	6.392	4.578	1.580	265	130	191	56	21	21	21	72
20 a 24 años	1.407	563	383	245	93	123	3.702	203	800	2.674	15	10	267	81	45	30	30	81
25 a 29 años	543	226	89	160	29	39	836	61	133	616	13	13	453	48	23	23	27	49
30 a 39 años	294	116	60	85	19	14	357	38	63	226	15	15	261	120	34	24	34	49
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	209	81	41	50	21	16	498	290	83	57	17	51
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	27	9	2	12	2	2	1.299	546	234	299	98	122
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	266	141	68	28	12	17	7.361	3.258	1.299	1.711	275	818
<b>Mujeres</b>	1.962	626	656	499	83	98	44.415	28.782	7.911	6.635	693	394	9.062	3.197	1.672	2.063	665	1.465
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	35	23	3	3	3	3	21.905	21.554	181	10	135	25	130	27	22	22	22	37
15 a 19 años	834	319	351	53	48	63	14.140	6.146	5.837	1.867	212	78	155	22	32	22	22	57
20 a 24 años	630	185	203	206	18	18	5.218	474	1.205	3.285	147	107	169	35	30	24	29	51
25 a 29 años	354	83	66	181	12	12	1.756	219	387	913	131	106	173	47	32	22	32	40
30 a 39 años	109	16	33	56	2	2	659	108	112	401	19	19	377	83	81	71	61	81
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	303	108	40	105	25	25	598	137	158	152	63	88
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	71	22	17	18	7	7	1.403	406	299	549	46	103
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	363	151	132	36	17	27	6.057	2.440	1.018	1.201	390	1.008

Coef de Variación  
Est. Raz-Regr (b=1)  
(ajustando negativos)

	BTPPV						Estudiante						Pensionado o Jubilado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	0,0309	0,0371	0,0580	0,0765	0,2118	0,1809	0,0076	0,0059	0,0225	0,0254	0,1583	0,2789	0,0185	0,0216	0,0417	0,0347	0,0942	0,0492
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,1039	0,1128	0,5896	0,4418	0,2068	0,1956	0,0106	0,0055	0,3605	1,1083	0,2845	0,6139	0,0755	0,2588	0,2139	0,2098	0,0997	0,0982
15 a 19 años	0,0517	0,0501	0,0831	0,4295	0,3921	0,3303	0,0143	0,0162	0,0176	0,0521	0,3085	0,7017	0,0771	0,2047	0,2188	0,2686	0,1322	0,0970
20 a 24 años	0,0540	0,0753	0,0942	0,1119	0,3616	0,2943	0,0215	0,1629	0,0472	0,0148	0,3985	0,5314	0,0712	0,1588	0,1821	0,2558	0,1197	0,1061
25 a 29 años	0,0713	0,1088	0,2146	0,0889	0,5140	0,4348	0,0309	0,1792	0,0790	0,0255	0,1392	0,1471	0,0812	0,1822	0,2274	0,2742	0,1111	0,1335
30 a 39 años	0,0988	0,1647	0,2297	0,1347	0,5559	0,7929	0,0497	0,2254	0,1493	0,0394	0,3086	0,2402	0,0692	0,1248	0,1731	0,2203	0,1199	0,1420
40 a 49 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0602	0,1075	0,1987	0,0992	0,1194	0,0861	0,0557	0,0802	0,1140	0,1372	0,2182	0,1868
50 a 59 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1232	0,2574	0,3347	0,2007	0,2256	0,1282	0,0428	0,0648	0,0975	0,0632	0,2678	0,2220
60 ó más años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0559	0,0791	0,0920	0,2669	0,2366	0,1099	0,0208	0,0251	0,0546	0,0447	0,1517	0,0655
<b>Hombres</b>	0,0370	0,0396	0,0789	0,1097	0,2358	0,2008	0,0107	0,0081	0,0346	0,0384	0,1983	0,3517	0,0229	0,0277	0,0598	0,0495	0,1595	0,0773
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,0931	0,1009	0,4851	0,4037	0,2180	0,1997	0,0142	0,0075	0,3400	0,7961	0,2492	0,4636	0,1212	0,6441	0,4894	0,5373	0,1708	0,0874
15 a 19 años	0,0659	0,0554	0,1324	0,5842	0,5277	0,5121	0,0205	0,0218	0,0272	0,0777	0,3850	0,7769	0,0954	0,1964	0,3758	0,3835	0,1874	0,1151
20 a 24 años	0,0620	0,0801	0,1137	0,1585	0,3460	0,2727	0,0340	0,3566	0,0766	0,0216	2,8379	4,0775	0,1015	0,2056	0,2503	0,3549	0,2217	0,1623
25 a 29 años	0,0890	0,1139	0,2832	0,1388	0,5491	0,4386	0,0573	0,4931	0,1823	0,0379	0,9353	0,7998	0,1317	0,3107	0,4228	0,3821	0,2263	0,1972
30 a 39 años	0,1057	0,1498	0,2773	0,1665	0,4784	0,7278	0,0806	0,4998	0,2338	0,0624	0,3898	0,2731	0,1272	0,1607	0,4335	0,6308	0,2583	0,2939
40 a 49 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0907	0,1553	0,2383	0,1895	0,1643	0,1256	0,0907	0,0881	0,2413	0,3612	0,7811	0,3866
50 a 59 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2170	0,4381	1,5470	0,2343	0,5254	0,2289	0,0591	0,0765	0,1466	0,1177	0,2564	0,2724
60 ó más años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0825	0,1030	0,1668	0,3825	0,3695	0,1666	0,0282	0,0329	0,0723	0,0566	0,2722	0,1081
<b>Mujeres</b>	0,0556	0,0876	0,0852	0,1047	0,4623	0,4016	0,0107	0,0086	0,0295	0,0337	0,2545	0,4453	0,0237	0,0347	0,0584	0,0490	0,1136	0,0631
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,2217	0,1915	1,4899	1,3694	0,3907	0,5342	0,0158	0,0080	0,9409	16,3200	0,9682	5,2380	0,084					

MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Estimaciones Est. Raz-Regr (b=1) (ajustando negativos)	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	213.038	96.036	23.095	11.494	59.718	22.695
0 a 4 años	50.736	0	0	0	40.277	10.459
5 a 9 años	51.902	31.394	0	0	16.222	4.286
10 a 14 años	5.133	3.658	254	229	365	627
15 a 19 años	10.630	7.131	2.527	222	297	453
20 a 24 años	12.916	7.431	3.788	963	350	364
25 a 29 años	10.164	5.901	2.707	1.086	228	242
30 a 39 años	20.068	10.848	4.374	3.283	729	834
40 a 49 años	17.226	10.036	3.459	2.393	399	939
50 a 59 años	13.414	7.870	2.581	1.781	186	996
60 ó más años	20.849	11.767	3.405	1.537	665	3.475
<b>Hombres</b>	72.980	28.118	3.516	2.034	29.744	9.568
0 a 4 años	25.941	0	0	0	20.426	5.515
5 a 9 años	26.409	15.810	0	0	8.258	2.341
10 a 14 años	2.029	1.676	37	27	73	216
15 a 19 años	3.659	2.416	786	82	139	236
20 a 24 años	2.937	1.601	692	265	198	181
25 a 29 años	1.795	927	343	275	139	111
30 a 39 años	2.615	1.429	528	376	128	154
40 a 49 años	2.361	1.371	377	330	134	149
50 a 59 años	1.654	1.033	237	259	8	117
60 ó más años	3.580	1.855	516	420	241	548
<b>Mujeres</b>	140.058	67.918	19.579	9.460	29.974	13.127
0 a 4 años	24.795	0	0	0	19.851	4.944
5 a 9 años	25.493	15.584	0	0	7.964	1.945
10 a 14 años	3.104	1.982	217	202	292	411
15 a 19 años	6.971	4.715	1.741	140	158	217
20 a 24 años	9.979	5.830	3.096	698	152	203
25 a 29 años	8.369	4.974	2.364	811	89	131
30 a 39 años	17.453	9.419	3.846	2.907	601	980
40 a 49 años	14.865	8.665	3.082	2.063	265	790
50 a 59 años	11.760	6.837	2.344	1.522	178	879
60 ó más años	17.269	9.912	2.889	1.117	424	2.927

Coef de Variación  
Est. Raz-Regr (b=1)  
(ajustando negativos)

	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	0,0047	0,0055	0,0177	0,0312	0,0084	0,0184
0 a 4 años	0,0098	0,0000	0,0000	0,0000	0,0057	0,0207
5 a 9 años	0,0100	0,0083	0,0000	0,0000	0,0163	0,0524
10 a 14 años	0,0248	0,0202	0,1883	0,1565	0,1870	0,0795
15 a 19 años	0,0191	0,0157	0,0311	0,2893	0,3614	0,1822
20 a 24 años	0,0177	0,0169	0,0233	0,0784	0,3435	0,2422
25 a 29 años	0,0200	0,0191	0,0289	0,0602	0,4698	0,3363
30 a 39 años	0,0153	0,0152	0,0279	0,0324	0,2187	0,1496
40 a 49 años	0,0161	0,0149	0,0319	0,0400	0,3614	0,1189
50 a 59 años	0,0181	0,0168	0,0377	0,0471	0,6800	0,0955
60 ó más años	0,0151	0,0139	0,0380	0,0759	0,2424	0,0358
<b>Hombres</b>	0,0082	0,0109	0,0624	0,1014	0,0108	0,0280
0 a 4 años	0,0143	0,0000	0,0000	0,0000	0,0092	0,0307
5 a 9 años	0,0146	0,0121	0,0000	0,0000	0,0250	0,0742
10 a 14 años	0,0419	0,0290	0,7071	0,8051	0,6718	0,1666
15 a 19 años	0,0320	0,0268	0,0471	0,3996	0,4821	0,2145
20 a 24 años	0,0338	0,0348	0,0431	0,1012	0,2916	0,2333
25 a 29 años	0,0418	0,0463	0,0644	0,0696	0,3175	0,2836
30 a 39 años	0,0380	0,0391	0,0575	0,0697	0,4545	0,2733
40 a 49 años	0,0383	0,0370	0,0736	0,0737	0,3955	0,2545
50 a 59 años	0,0477	0,0430	0,1017	0,0813	5,8128	0,2775
60 ó más años	0,0312	0,0322	0,0723	0,0851	0,2690	0,0825
<b>Mujeres</b>	0,0058	0,0063	0,0180	0,0322	0,0129	0,0252
0 a 4 años	0,0135	0,0000	0,0000	0,0000	0,0070	0,0285
5 a 9 años	0,0137	0,0112	0,0000	0,0000	0,0212	0,0761
10 a 14 años	0,0306	0,0282	0,1797	0,1404	0,1642	0,0872
15 a 19 años	0,0238	0,0193	0,0400	0,4000	0,5223	0,3033
20 a 24 años	0,0194	0,0194	0,0283	0,1079	0,6804	0,4150
25 a 29 años	0,0231	0,0213	0,0342	0,0842	1,0708	0,5837
30 a 39 años	0,0173	0,0168	0,0335	0,0392	0,2453	0,1798
40 a 49 años	0,0183	0,0166	0,0376	0,0491	0,5005	0,1381
50 a 59 años	0,0201	0,0185	0,0433	0,0576	0,6444	0,1046
60 ó más años	0,0172	0,0156	0,0449	0,1026	0,3392	0,0405

MUNICIPIO SUCRE

Estimaciones  
Est. Raz-Regr  
(B dist prop)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado						
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	
	Total	546.654	267.488	97.278	88.806	63.327	29.754	219.010	99.255	53.471	58.637	2.877	4.770	11.578	5.416	2.615	3.173	114	260
0 a 4 años	50.736	0	0	0	40.277	10.459	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	51.901	31.393	0	0	16.222	4.286	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	49.419	47.048	695	0	860	816	358	305	16	0	25	13	14	14	0	0	0	0	0
15 a 19 años	49.612	27.357	16.814	4.052	688	700	9.684	5.962	2.985	521	77	140	723	496	197	15	5	11	10
20 a 24 años	53.877	22.497	16.914	13.015	697	754	28.588	12.523	8.854	5.562	358	291	1.830	1.000	591	214	15	10	10
25 a 29 años	47.713	19.949	12.927	13.530	685	642	32.283	12.664	9.050	9.991	348	229	1.743	718	420	566	10	29	10
30 a 39 años	85.589	39.123	19.975	23.701	1.247	1.542	61.507	26.500	14.710	18.703	743	851	3.140	1.382	631	1.068	28	31	10
40 a 49 años	68.383	34.266	13.869	16.987	1.055	2.206	48.013	22.638	9.772	13.612	727	1.264	2.359	1.032	453	780	34	60	10
50 a 59 años	44.658	22.528	8.594	10.437	697	2.402	27.019	13.044	5.165	7.352	431	1.027	1.324	591	240	413	14	66	10
60 ó más años	44.766	23.326	7.490	7.085	917	5.947	17.518	5.618	1.920	2.896	167	966	445	184	83	117	9	52	10
Hombres	259.338	129.044	43.664	40.682	32.116	13.832	126.331	62.204	30.080	29.690	1.608	2.749	7.633	4.068	1.632	1.616	100	217	10
0 a 4 años	25.941	0	0	0	20.426	5.515	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	26.408	15.809	0	0	8.258	2.341	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.624	23.389	321	0	465	449	244	200	9	0	22	13	12	12	0	0	0	0	0
15 a 19 años	24.048	14.081	7.322	1.865	348	432	5.886	3.949	1.522	260	34	121	497	380	92	9	5	11	10
20 a 24 años	25.506	11.585	7.635	5.470	396	430	16.438	8.386	5.361	2.296	204	192	1.173	705	359	89	10	10	10
25 a 29 años	22.539	10.200	5.932	5.727	315	364	18.256	8.366	5.056	4.438	175	178	1.044	506	252	255	10	22	10
30 a 39 años	40.631	19.409	10.324	13.244	660	824	35.047	16.445	8.409	9.217	436	541	1.934	1.016	362	497	28	31	10
40 a 49 años	31.040	15.689	6.086	7.905	497	864	26.427	13.118	5.269	7.074	342	624	1.592	816	310	396	25	45	10
50 a 59 años	20.110	9.885	3.745	5.196	402	882	16.002	7.802	3.044	4.314	288	554	1.004	469	192	275	14	53	10
60 ó más años	18.491	9.197	3.108	4.094	359	1.732	8.030	3.896	1.411	2.091	107	525	377	165	65	95	9	44	10
Mujeres	287.316	138.444	53.615	48.124	31.211	15.922	92.679	37.051	23.391	28.947	1.268	2.021	3.945	1.348	983	1.557	14	43	10
0 a 4 años	24.795	0	0	0	19.851	4.944	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	25.493	15.584	0	0	7.964	1.945	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.795	23.659	374	0	395	367	114	104	7	0	3	0	2	2	0	0	0	0	0
15 a 19 años	25.564	13.276	9.493	2.187	341	268	3.798	2.013	1.463	261	43	19	226	116	104	6	0	0	0
20 a 24 años	28.371	10.913	9.279	7.544	311	324	12.150	4.137	4.493	3.266	155	99	657	295	232	125	5	0	0
25 a 29 años	25.174	9.749	6.995	7.802	350	279	14.027	4.257	3.994	5.553	173	50	699	212	168	311	0	8	10
30 a 39 años	44.958	19.915	10.460	13.277	567	718	26.459	10.055	6.301	9.486	307	310	1.206	366	269	571	0	0	0
40 a 49 años	37.343	18.577	7.783	9.082	558	1.342	21.596	9.519	4.503	6.538	385	640	767	216	143	384	9	15	10
50 a 59 años	24.548	12.643	4.849	5.240	286	1.520	11.017	5.243	2.121	3.037	143	473	320	121	48	138	0	13	10
60 ó más años	26.275	14.130	4.382	2.991	558	4.215	3.528	1.722	509	805	60	432	68	19	19	23	0	8	10

Coeff de Variación  
Est. Raz-Regr  
(B dist prop)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado						
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	
	Total	0.0019	0.0025	0.0045	0.0044	0.0068	0.0104	0.0026	0.0037	0.0053	0.0051	0.0229	0.0177	0.0151	0.0204	0.0348	0.0299	0.1669	0.1138
0 a 4 años	0.0049	0.0000	0.0000	0.0000	0.0051	0.0133	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5 a 9 años	0.0066	0.0075	0.0000	0.0000	0.0128	0.0328	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10 a 14 años	0.0062	0.0052	0.2317	0.0000	0.0908	0.0606	0.0547	0.0557	0.5742	0.0000	0.0971	0.2358	0.1803	0.1803	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
15 a 19 años	0.0067	0.0080	0.0097	0.0340	0.1449	0.1007	0.0126	0.0144	0.0205	0.1107	0.1744	0.1327	0.0573	0.0569	0.1147	1.3335	0.3898	0.4989	0.0000
20 a 24 años	0.0061	0.0094	0.0091	0.0111	0.1521	0.1044	0.0071	0.0108	0.0104	0.0186	0.0669	0.1080	0.0394	0.0471	0.0646	0.1690	0.5684	1.1730	0.0000
25 a 29 años	0.0062	0.0095	0.0107	0.0099	0.1451	0.1149	0.0067	0.0111	0.0120	0.0114	0.0738	0.1410	0.0394	0.0598	0.0857	0.0656	0.6961	0.4146	0.0000
30 a 39 años	0.0047	0.0065	0.0092	0.0077	0.1024	0.0644	0.0049	0.0074	0.0102	0.0085	0.0470	0.0530	0.0296	0.0418	0.0752	0.0486	0.3774	0.4918	0.0000
40 a 49 años	0.0052	0.0066	0.0117	0.0095	0.1146	0.0413	0.0054	0.0075	0.0134	0.0104	0.0419	0.0306	0.0335	0.0478	0.0893	0.0562	0.2763	0.2229	0.0000
50 a 59 años	0.0068	0.0084	0.0158	0.0128	0.1576	0.0349	0.0075	0.0100	0.0197	0.0149	0.0554	0.0289	0.0436	0.0603	0.1245	0.0777	0.4097	0.1536	0.0000
60 ó más años	0.0075	0.0089	0.0193	0.0198	0.1447	0.0188	0.0113	0.0150	0.0339	0.0252	0.0860	0.0196	0.0670	0.0975	0.1859	0.1445	0.4017	0.1013	0.0000
Hombres	0.0030	0.0038	0.0083	0.0081	0.0090	0.0160	0.0045	0.0057	0.0102	0.0099	0.0487	0.0374	0.0181	0.0223	0.0441	0.0429	0.1598	0.1210	0.0000
0 a 4 años	0.0078	0.0000	0.0000	0.0000	0.0083	0.0199	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5 a 9 años	0.0098	0.0107	0.0000	0.0000	0.0198	0.0470	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10 a 14 años	0.0084	0.0071	0.3250	0.0000	0.1166	0.0776	0.0780	0.0796	1.0796	0.0000	0.1215	0.3090	0.0654	0.2064	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
15 a 19 años	0.0099	0.0113	0.0160	0.0548	0.1928	0.1064	0.0143	0.0208	0.0441	0.2341	0.4879	0.1955	0.0262	0.0597	0.1891	1.6011	0.4330	0.5102	0.0000
20 a 24 años	0.0099	0.0139	0.0170	0.0219	0.1471	0.1293	0.0124	0.0154	0.0205	0.0442	0.1418	0.2010	0.0482	0.0544	0.0834	0.2977	0.3192	1.0447	0.0000
25 a 29 años	0.0105	0.0145	0.0208	0.0203	0.1569	0.1391	0.0117	0.0159	0.0228	0.0246	0.1726	0.2175	0.0479	0.0641	0.1047	0.0982	0.6204	0.4335	0.0000
30 a 39 años	0.0079	0.0105	0.0178	0.0155	0.0995	0.0818	0.0086	0.0114	0.0193	0.0168	0.0954	0.1015	0.0368	0.0456	0.1001	0.0737	0.3395	0.4235	0.0000
40 a 49 años	0.0090	0.0110	0.0238	0.0178	0.1211	0.0681	0.0097	0.0120	0.0262	0.0191	0.1039	0.0734	0.0402	0.0513	0.1058	0.0818	0.3255	0.2706	0.0000
50 a 59 años	0.0114	0.0144	0.0224	0.0314	0.1240	0.0587	0.0128	0.0162	0.0363	0.0253	0.0978	0.0652	0.0500	0.0681	0.13				

MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Estimaciones Est. Raz-Regr (B dist prop)	BTPPV						Estudiando						Pensionado o Jubilado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	4.956	2.439	1.496	894	24	104	84.315	57.153	14.059	11.737	1.120	246	16.191	7.211	2.847	3.590	364	2.178
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	92	87	0	0	0	5	44.364	42.962	620	0	591	190	55	7	0	0	0	48
15 a 19 años	1.974	1.186	717	26	10	36	26.632	12.518	10.363	3.368	359	25	175	46	18	0	2	109
20 a 24 años	1.706	718	550	395	0	43	9.018	783	2.129	6.007	99	0	229	80	35	0	7	107
25 a 29 años	775	293	133	324	9	16	2.240	220	492	1.487	31	0	223	77	27	0	20	100
30 a 39 años	409	155	96	149	5	4	1.025	166	189	642	24	5	537	192	117	52	52	123
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	381	171	58	136	11	5	929	404	221	173	35	95
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	99	43	18	38	0	0	2.393	921	472	801	40	159
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	556	291	191	48	5	21	11.650	5.484	1.957	2.564	208	1.438
Hombres	3.098	1.793	808	407	15	74	40.473	28.514	6.075	5.202	587	95	9.017	4.301	1.526	1.900	184	1.106
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	71	66	0	0	0	5	22.070	21.404	274	0	313	80	27	0	0	0	0	27
15 a 19 años	1.307	887	375	20	5	20	12.701	6.405	4.553	1.542	196	5	104	44	0	0	2	58
20 a 24 años	1.037	521	317	166	0	33	4.038	342	917	2.726	54	0	147	60	19	0	0	69
25 a 29 años	446	206	70	150	5	16	906	38	175	630	5	0	149	40	12	0	9	90
30 a 39 años	237	114	46	72	5	3	354	40	63	232	14	5	342	143	66	14	36	83
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	150	73	33	39	6	0	538	305	94	65	22	52
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	26	12	0	14	0	0	1.127	534	199	275	35	85
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	226	140	61	20	0	5	6.583	3.168	1.136	1.547	80	652
Mujeres	1.858	646	688	486	9	30	43.842	28.639	7.984	6.535	533	151	7.174	2.911	1.321	1.690	180	1.072
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	21	21	0	0	0	0	22.294	21.559	346	0	279	110	28	7	0	0	0	21
15 a 19 años	667	299	342	5	5	16	13.931	6.112	5.810	1.827	162	20	71	3	18	0	0	51
20 a 24 años	669	197	233	229	0	9	4.980	441	1.212	3.281	46	0	82	20	16	0	7	38
25 a 29 años	329	87	63	175	4	0	1.332	121	317	867	27	0	74	29	15	0	11	19
30 a 39 años	172	42	49	77	0	4	671	126	125	410	9	0	195	49	51	38	16	40
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	231	98	25	97	5	0	391	100	126	109	13	44
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	73	31	18	24	0	0	1.266	388	273	526	5	74
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	330	151	130	28	5	15	5.067	2.316	821	1.017	128	785

Coef de Variación  
Est. Raz-Regr  
(B dist prop)

Estimaciones Est. Raz-Regr (B dist prop)	BTPPV						Estudiando						Pensionado o Jubilado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0,0233	0,0307	0,0444	0,0597	0,2739	0,1820	0,0049	0,0053	0,0158	0,0124	0,0589	0,1150	0,0137	0,0189	0,0350	0,0299	0,1072	0,0400
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,1274	0,1321	0,0000	0,0000	0,0000	0,4720	0,0064	0,0054	0,2519	0,0000	0,0811	0,1203	0,1776	0,9787	0,0000	0,0000	0,0000	0,1451
15 a 19 años	0,0372	0,0416	0,0599	1,2054	0,5489	0,3245	0,0090	0,0129	0,0125	0,0336	0,1039	0,6412	0,1214	0,3128	0,5315	0,0000	0,4336	0,1126
20 a 24 años	0,0404	0,0611	0,0730	0,0829	0,0000	0,2742	0,0156	0,1141	0,0343	0,0128	0,2171	0,0000	0,1108	0,2238	0,3515	0,0000	0,4960	0,1175
25 a 29 años	0,0591	0,0947	0,1965	0,0745	0,3519	0,4632	0,0315	0,2092	0,0758	0,0247	0,3423	0,0000	0,0954	0,1698	0,3643	0,0000	0,1943	0,1323
30 a 39 años	0,0738	0,1230	0,1725	0,1054	0,3586	1,1899	0,0452	0,1834	0,1292	0,0373	0,2794	0,6471	0,0729	0,1244	0,1458	0,3586	0,1373	0,1328
40 a 49 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0772	0,1148	0,2672	0,1087	0,3825	0,3643	0,0552	0,0784	0,1047	0,1405	0,2445	0,2145
50 a 59 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1086	0,1603	0,3306	0,1515	0,0000	0,0000	0,0358	0,0572	0,0806	0,0525	0,3670	0,2119
60 ó más años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0595	0,0772	0,0925	0,3256	0,9903	0,1208	0,0163	0,0212	0,0437	0,0365	0,1635	0,0504
Hombres	0,0288	0,0340	0,0624	0,0927	0,3197	0,2081	0,0068	0,0072	0,0238	0,0185	0,0806	0,1859	0,0180	0,0237	0,0471	0,0406	0,1542	0,0567
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,1155	0,1202	0,0000	0,0000	0,0000	0,4174	0,0087	0,0074	0,3741	0,0000	0,1132	0,1821	0,1100	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1100
15 a 19 años	0,0442	0,0462	0,0864	1,0984	0,8131	0,4919	0,0128	0,0174	0,0188	0,0483	0,1356	1,9550	0,1175	0,2209	0,0000	0,0000	0,3090	0,1279
20 a 24 años	0,0519	0,0693	0,0882	1,1383	0,0000	0,3082	0,0227	0,1712	0,0512	0,0186	0,2889	0,0000	0,1270	0,2031	0,4083	0,0000	0,0000	0,1742
25 a 29 años	0,0748	0,1007	0,2727	0,1133	0,2700	0,3649	0,0461	0,2755	0,1253	0,0355	1,3816	0,0000	0,1106	0,1887	0,5225	0,0000	0,2850	0,1496
30 a 39 años	0,0976	0,1377	0,2737	0,1553	0,3790	0,0000	0,0725	0,4343	0,1894	0,0593	0,2940	0,3509	0,0805	0,1172	0,1922	0,9515	0,1420	0,1300
40 a 49 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1198	0,1669	0,2836	0,2326	0,4945	0,0000	0,0677	0,0785	0,1715	0,2594	0,2510	0,2583
50 a 59 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1742	0,3003	0,0000	0,1930	0,0000	0,0000	0,0510	0,0698	0,1249	0,0987	0,2814	0,2544
60 ó más años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0905	0,1014	0,1766	0,5003	0,0000	0,2609	0,0215	0,0279	0,0559	0,0447	0,3168	0,0814
Mujeres	0,0383	0,0651	0,0626	0,0755	0,4177	0,3179	0,0069	0,0077	0,0209	0,0168	0,0855	0,1432	0,0209	0,0307	0,0519	0,0444	0,1368	0,0552
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,2098	0,2098	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0093	0,0078	0,3356	0,0000	0,1166	0,1570	0,2723	0,7954	0,0000	0,0000	0,0000	0,2481
15 a 19 años	0,0673	0,0911	0,0834	3,7269	0,642													

MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Estimaciones Est. Raz-Regr (B dist prop)	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	210.604	96.014	22.790	10.775	58.828	22.196
0 a 4 años	50.736	0	0	0	40.277	10.459
5 a 9 años	51.901	31.393	0	0	16.222	4.286
10 a 14 años	4.536	3.673	59	0	244	559
15 a 19 años	10.424	7.149	2.535	123	236	380
20 a 24 años	12.506	7.393	3.754	837	218	304
25 a 29 años	10.449	5.978	2.805	1.151	247	268
30 a 39 años	18.971	10.727	4.233	3.087	396	528
40 a 49 años	16.701	10.021	3.365	2.285	248	782
50 a 59 años	13.823	7.929	2.700	1.833	212	1.150
60 ó más años	20.557	11.750	3.339	1.459	528	3.481
<b>Hombres</b>	72.786	28.164	3.542	1.867	29.621	9.592
0 a 4 años	25.941	0	0	0	20.426	5.515
5 a 9 años	26.408	15.809	0	0	8.258	2.341
10 a 14 años	2.200	1.708	38	0	131	323
15 a 19 años	3.553	2.416	779	35	105	218
20 a 24 años	2.673	1.572	663	194	119	126
25 a 29 años	1.736	934	368	255	113	66
30 a 39 años	2.716	1.450	569	392	141	164
40 a 49 años	2.333	1.377	379	331	102	143
50 a 59 años	1.951	1.068	311	318	64	190
60 ó más años	3.275	1.828	435	342	163	506
<b>Mujeres</b>	137.818	67.850	19.248	8.909	29.207	12.604
0 a 4 años	24.795	0	0	0	19.851	4.944
5 a 9 años	25.493	15.584	0	0	7.964	1.945
10 a 14 años	2.336	1.966	21	0	114	236
15 a 19 años	6.871	4.733	1.756	88	132	162
20 a 24 años	9.833	5.822	3.091	643	99	178
25 a 29 años	8.713	5.043	2.437	896	135	202
30 a 39 años	16.255	9.277	3.664	2.694	255	364
40 a 49 años	14.399	8.644	2.986	1.954	146	639
50 a 59 años	11.872	6.861	2.389	1.515	147	960
60 ó más años	17.282	9.922	2.903	1.118	365	2.974

Coef de Variación  
Est. Raz-Regr  
(B dist prop)

	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	0,0033	0,0043	0,0091	0,0134	0,0071	0,0127
0 a 4 años	0,0049	0,0000	0,0000	0,0000	0,0051	0,0133
5 a 9 años	0,0066	0,0075	0,0000	0,0000	0,0128	0,0328
10 a 14 años	0,0245	0,0196	0,6432	0,0000	0,2523	0,0774
15 a 19 años	0,0164	0,0149	0,0242	0,3231	0,3866	0,1677
20 a 24 años	0,0150	0,0158	0,0183	0,0540	0,4616	0,2276
25 a 29 años	0,0164	0,0177	0,0225	0,0371	0,3722	0,2364
30 a 39 años	0,0125	0,0138	0,0209	0,0202	0,3086	0,1616
40 a 49 años	0,0132	0,0136	0,0243	0,0255	0,4690	0,1008
50 a 59 años	0,0145	0,0154	0,0283	0,0306	0,5015	0,0610
60 ó más años	0,0118	0,0125	0,0280	0,0489	0,2410	0,0237
<b>Hombres</b>	0,0055	0,0079	0,0173	0,0242	0,0092	0,0190
0 a 4 años	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	0,0083	0,0199
5 a 9 años	0,0098	0,0107	0,0000	0,0000	0,0198	0,0470
10 a 14 años	0,0326	0,0276	0,4437	0,0000	0,3145	0,0963
15 a 19 años	0,0280	0,0255	0,0325	0,4783	0,5629	0,1993
20 a 24 años	0,0313	0,0337	0,0342	0,0841	0,3912	0,2795
25 a 29 años	0,0382	0,0440	0,0483	0,0528	0,3384	0,4171
30 a 39 años	0,0313	0,0361	0,0400	0,0430	0,3509	0,2139
40 a 49 años	0,0341	0,0350	0,0552	0,0499	0,4659	0,2256
50 a 59 años	0,0355	0,0399	0,0622	0,0481	0,6151	0,1499
60 ó más años	0,0288	0,0308	0,0602	0,0674	0,3437	0,0725
<b>Mujeres</b>	0,0041	0,0052	0,0108	0,0163	0,0103	0,0169
0 a 4 años	0,0062	0,0000	0,0000	0,0000	0,0063	0,0184
5 a 9 años	0,0089	0,0103	0,0000	0,0000	0,0165	0,0476
10 a 14 años	0,0349	0,0277	1,4212	0,0000	0,3762	0,1312
15 a 19 años	0,0199	0,0182	0,0315	0,4053	0,5127	0,2985
20 a 24 años	0,0168	0,0179	0,0219	0,0681	0,8213	0,3245
25 a 29 años	0,0180	0,0195	0,0264	0,0478	0,5723	0,2689
30 a 39 años	0,0133	0,0151	0,0249	0,0238	0,3781	0,2049
40 a 49 años	0,0142	0,0149	0,0283	0,0305	0,6741	0,1055
50 a 59 años	0,0157	0,0168	0,0330	0,0379	0,6086	0,0641
60 ó más años	0,0128	0,0138	0,0326	0,0634	0,2891	0,0241

MUNICIPIO SUCRE

Estimaciones

Est Raz-Regr (b opt)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	546.820	267.680	97.208	88.915	63.288	29.729	219.415	99.452	53.566	58.742	2.882	4.773	11.787	5.591	2.594	3.194	119	289
0 a 4 años	50.736	0	0	0	40.277	10.459	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	51.902	31.394	0	0	16.222	4.286	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	49.344	47.016	693	0	819	816	462	391	25	0	30	15	28	28	0	0	0	0
15 a 19 años	49.637	27.424	16.782	4.052	698	680	9.716	5.997	2.990	513	76	140	726	517	179	15	5	10
20 a 24 años	53.761	22.401	16.904	13.073	661	722	28.625	12.578	9.891	5.519	350	288	1.710	925	548	212	15	10
25 a 29 años	47.745	20.017	12.890	13.510	690	639	32.259	12.672	9.042	9.964	350	229	1.714	710	404	560	10	30
30 a 39 años	85.629	39.168	19.956	23.693	1.252	1.561	61.516	26.447	14.704	18.764	749	852	3.248	1.481	648	1.054	30	35
40 a 49 años	68.222	34.180	13.857	16.959	1.037	2.189	48.076	22.679	9.787	13.623	722	1.265	2.385	1.047	465	779	35	59
50 a 59 años	44.972	22.730	8.600	10.486	724	2.432	26.860	12.932	5.139	7.333	440	1.016	1.422	644	249	438	15	76
60 ó más años	44.873	23.351	7.526	7.144	908	5.945	11.902	5.756	1.988	3.026	165	967	554	239	100	136	10	69
Hombres	259.787	129.261	43.652	40.784	32.209	13.881	126.311	62.229	30.031	29.671	1.625	2.755	7.867	4.215	1.661	1.647	104	239
0 a 4 años	25.941	0	0	0	20.426	5.515	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	26.409	15.810	0	0	8.258	2.341	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.806	23.455	336	0	519	497	304	251	13	0	25	15	22	22	0	0	0	0
15 a 19 años	24.025	14.108	7.299	1.844	349	426	5.804	3.941	1.481	229	33	120	525	404	96	10	5	10
20 a 24 años	25.425	11.501	7.620	5.543	357	403	16.483	8.412	5.377	2.304	199	191	1.107	658	339	91	10	10
25 a 29 años	22.603	10.242	5.933	5.742	331	356	18.214	8.397	5.042	4.416	179	180	1.055	498	261	266	10	20
30 a 39 años	40.801	19.314	9.520	10.408	705	854	34.972	16.387	8.383	9.208	450	544	2.030	1.106	375	484	30	35
40 a 49 años	30.987	15.666	6.082	7.883	495	861	26.420	13.124	5.267	7.063	342	624	1.595	813	317	396	25	44
50 a 59 años	20.265	9.982	3.742	5.219	421	902	15.939	7.766	3.029	4.298	293	553	1.059	502	193	289	15	61
60 ó más años	18.523	9.183	3.120	4.144	349	1.727	8.175	3.952	1.439	2.153	104	528	474	214	80	111	10	59
Mujeres	287.033	138.419	53.556	48.132	31.079	15.848	93.104	37.223	23.535	29.071	1.257	2.018	3.919	1.376	932	1.547	15	50
0 a 4 años	24.795	0	0	0	19.851	4.944	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	25.493	15.584	0	0	7.964	1.945	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.537	23.561	358	0	300	319	158	140	12	0	5	0	7	7	0	0	0	0
15 a 19 años	25.611	13.316	9.484	2.208	350	254	3.912	2.056	1.510	284	43	20	201	113	83	5	0	0
20 a 24 años	28.336	10.900	9.284	7.530	304	319	12.142	4.165	4.514	3.216	151	97	602	267	209	121	5	0
25 a 29 años	25.142	9.775	6.957	7.768	359	284	14.045	4.276	4.000	5.548	171	50	659	212	143	294	0	10
30 a 39 años	44.828	19.854	10.436	13.285	547	707	26.544	10.060	6.320	9.556	300	309	1.218	375	273	570	0	0
40 a 49 años	37.235	18.513	7.775	9.076	542	1.328	21.656	9.554	4.520	6.561	380	641	790	234	148	383	10	15
50 a 59 años	24.706	12.748	4.858	5.266	303	1.530	10.921	5.166	2.109	3.035	146	464	363	143	56	149	0	15
60 ó más años	26.349	14.168	4.405	3.000	559	4.217	3.726	1.805	549	872	61	439	80	25	20	25	0	10

Coef de Variación

Est Raz-Regr (b opt)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0,0025	0,0028	0,0064	0,0066	0,0092	0,0177	0,0036	0,0043	0,0072	0,0067	0,0903	0,0582	0,0192	0,0221	0,0432	0,0355	0,5921	0,2578
0 a 4 años	0,0082	0,0000	0,0000	0,0000	0,0052	0,0181	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0089	0,0079	0,0000	0,0000	0,0149	0,0459	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,0087	0,0049	0,3085	0,0000	0,1999	0,1910	0,0575	0,0414	0,4937	0,0000	0,2704	0,5521	0,1454	0,0887	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
15 a 19 años	0,0088	0,0088	0,0121	0,0474	0,2414	0,2266	0,0159	0,0150	0,0250	0,1463	0,6067	0,3442	0,0648	0,0552	0,1374	1,4678	2,2744	1,3346
20 a 24 años	0,0076	0,0104	0,0111	0,0139	0,2352	0,1936	0,0094	0,0121	0,0131	0,0244	0,2374	0,3085	0,0525	0,0545	0,0819	0,2092	1,8045	2,8322
25 a 29 años	0,0077	0,0104	0,0132	0,0123	0,2009	0,1971	0,0088	0,0126	0,0153	0,0142	0,2514	0,4109	0,0499	0,0669	0,1058	0,0770	2,5503	0,9076
30 a 39 años	0,0064	0,0075	0,0128	0,0106	0,1747	0,1332	0,0074	0,0088	0,0149	0,0118	0,2107	0,1978	0,0393	0,0456	0,0962	0,0605	1,4477	1,2782
40 a 49 años	0,0069	0,0074	0,0158	0,0127	0,1831	0,0802	0,0079	0,0086	0,0189	0,0138	0,1782	0,1086	0,0443	0,0542	0,1112	0,0681	0,9785	0,6047
50 a 59 años	0,0083	0,0091	0,0198	0,0159	0,2087	0,0552	0,0099	0,0112	0,0254	0,0184	0,1882	0,0869	0,0500	0,0610	0,1424	0,0837	1,3736	0,2905
60 ó más años	0,0093	0,0097	0,0245	0,0253	0,1968	0,0271	0,0141	0,0163	0,0413	0,0286	0,3039	0,0547	0,0595	0,0788	0,1675	0,1323	0,7644	0,1218
Hombres	0,0039	0,0042	0,0108	0,0111	0,0124	0,0271	0,0056	0,0062	0,0123	0,0120	0,1283	0,0836	0,0228	0,0236	0,0535	0,0524	0,5467	0,2533
0 a 4 años	0,0121	0,0000	0,0000	0,0000	0,0084	0,0271	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0130	0,0116	0,0000	0,0000	0,0230	0,0653	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,0119	0,0068	0,4270	0,0000	0,2193	0,2193	0,0806	0,0610	0,9105	0,0000	0,2702	0,4884	0,1814	0,1129	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
15 a 19 años	0,0129	0,0122	0,0200	0,0756	0,3346	0,2562	0,0251	0,0213	0,0511	0,3132	1,1651	0,3530	0,0706	0,0561	0,2005	1,5969	1,8978	1,1425
20 a 24 años	0,0119	0,0151	0,0197	0,0258	0,2703	0,2427	0,0148	0,0165	0,0234	0,0528	0,3343	0,3899	0,0639	0,0615	0,1044	0,3684	2,1716	2,2892
25 a 29 años	0,0125	0,0155	0,0241	0,0238	0,2572	0,2504	0,0142	0,0172	0,0266	0,0291	0,3958	0,4382	0,0593	0,0706	0,1206	0,1137	1,9152	1,0151
30 a 39 años	0,0105	0,0117	0,0225	0,0198	0,2006	0,1748	0,0115	0,0129	0,0246	0,0215	0,2804	0,2556	0,0482	0,0475	0,1275	0,0975	1,1238	0,9976
40 a 49 años	0,0114	0,0120	0,0293	0,0220	0,2350	0,1400	0,0125	0,0132	0,0324	0,0235	0,2931	0,1765	0,0537	0,0576	0,1326	0,1043	1,1229	0,6739
50 a 59 años	0,0136	0,0152	0,0369	0,0259	0,2025	0,0984	0,0156	0,0175	0,0425	0,0294	0,2341	0,1368	0,0598	0,0706	0,1637	0,1077	1,2895	0,3395
60 ó más años	0,0148	0,0164	0,0408	0,0312	0,2788	0,0581	0,0206	0,0239	0,0608	0,0406	0,4143	0,0897	0,0650	0,0827	0,1946	0,1441	0,7965	0,1454
Mujeres	0,0037	0,0042	0,0094	0,0098	0,0138	0,0245	0,0066	0,0087	0,0133	0,0110								

MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Estimaciones Est Raz-Regr (b opt)	BTTPV						Estudiando						Pensionado o Jubilado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	4.992	2.467	1.481	919	25	100	84.523	57.241	14.059	11.854	1.124	246	15.748	7.042	2.735	3.461	360	2.151
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	114	109	0	0	0	5	44.358	42.953	619	0	595	192	56	2	0	0	0	54
15 a 19 años	2.012	1.233	709	25	10	35	26.566	12.467	10.344	3.371	361	24	158	50	8	0	5	95
20 a 24 años	1.659	672	541	406	0	40	9.168	801	2.165	6.104	99	0	185	65	29	0	5	85
25 a 29 años	770	294	125	326	10	15	2.169	214	450	1.475	30	0	238	99	25	0	20	94
30 a 39 años	437	159	106	162	5	5	1.078	189	206	653	25	5	556	224	102	33	55	142
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	259	107	38	101	9	5	906	400	210	167	35	94
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	363	229	39	96	0	0	2.324	885	466	781	34	158
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	561	282	199	56	5	20	11.325	5.316	1.895	2.480	206	1.429
Hombres	3.055	1.803	788	379	15	70	40.581	28.432	6.115	5.339	597	98	8.904	4.240	1.506	1.872	188	1.097
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	89	84	0	0	0	5	21.948	21.262	281	0	321	84	39	0	0	0	0	39
15 a 19 años	1.371	939	387	20	5	20	12.673	6.368	4.554	1.549	198	5	106	45	0	0	5	56
20 a 24 años	943	470	290	152	0	30	4.188	371	953	2.811	53	0	113	48	15	0	0	51
25 a 29 años	423	202	65	136	5	15	979	129	179	666	4	0	174	75	16	0	10	74
30 a 39 años	230	108	46	71	5	0	371	50	71	230	15	5	399	175	67	16	40	102
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	82	42	17	19	4	0	556	308	100	70	25	54
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	128	85	0	42	0	0	1.090	511	199	264	29	87
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	213	125	62	21	0	5	6.426	3.080	1.110	1.522	80	634
Mujeres	1.937	664	693	540	10	30	43.942	28.809	7.944	6.515	527	148	6.844	2.802	1.229	1.589	172	1.053
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	25	25	0	0	0	0	22.410	21.691	338	0	273	108	17	2	0	0	0	14
15 a 19 años	641	294	322	5	5	15	13.893	6.099	5.790	1.822	163	20	52	5	8	0	0	39
20 a 24 años	717	202	251	254	0	10	4.980	430	1.212	3.293	45	0	71	18	14	0	5	35
25 a 29 años	347	92	60	190	5	0	1.191	85	272	309	26	0	64	24	10	0	10	20
30 a 39 años	207	51	60	91	0	5	707	199	135	423	10	0	157	49	35	17	15	40
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	177	86	21	81	5	5	349	92	110	97	10	40
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	236	143	39	53	0	0	1.234	374	267	517	5	71
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	348	157	137	34	5	15	4.900	2.236	785	957	127	794

Coef de Variación

Est Raz-Regr (b opt)	BTTPV						Estudiando						Pensionado o Jubilado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0,0316	0,0343	0,0551	0,0792	2,0783	0,5486	0,0068	0,0055	0,0203	0,0222	0,1800	0,8054	0,0181	0,0217	0,0472	0,0390	0,2569	0,0559
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,1396	0,1031	0,0000	0,0000	0,0000	0,6608	0,0093	0,0051	0,3379	0,0000	0,2521	0,7723	0,2266	2,8170	0,0000	0,0000	0,0000	0,1283
15 a 19 años	0,0509	0,0441	0,0745	1,8551	3,4914	1,0525	0,0129	0,0150	0,0159	0,0475	0,3387	4,8978	0,1537	0,2896	1,2405	0,0000	0,8408	0,1283
20 a 24 años	0,0584	0,0766	0,0921	0,1104	0,0000	0,8584	0,0193	0,1306	0,0408	0,0135	0,5582	0,0000	0,1518	0,2757	0,4377	0,0000	0,8876	0,1479
25 a 29 años	0,0759	0,1077	0,2497	0,0851	1,7826	1,2528	0,0352	0,2272	0,0881	0,0255	0,5660	0,0000	0,1005	0,1340	0,3951	0,0000	0,2379	0,1412
30 a 39 años	0,0826	0,1307	0,1769	0,1094	1,9212	2,1274	0,0450	0,1670	0,1231	0,0371	0,3578	1,3751	0,0749	0,1098	0,1790	0,6013	0,1773	0,1232
40 a 49 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1149	0,1829	0,4200	0,1481	0,5386	0,5964	0,0619	0,0818	0,1207	0,1590	0,3948	0,2466
50 a 59 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0302	0,0304	0,1506	0,0603	0,0000	0,0000	0,0457	0,0661	0,1024	0,0638	0,9663	0,2836
60 ó más años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0607	0,0806	0,0907	0,2911	1,2608	0,2181	0,0222	0,0248	0,0602	0,0482	0,4090	0,0737
Hombres	0,0401	0,0369	0,0801	0,1443	2,7211	0,6221	0,0096	0,0075	0,0312	0,0335	0,2347	1,3964	0,0233	0,0285	0,0622	0,0523	0,3568	0,0794
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,1366	0,0910	0,0000	0,0000	0,0000	0,6131	0,0129	0,0071	0,5018	0,0000	0,3257	1,2349	0,1915	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0757
15 a 19 años	0,0593	0,0464	0,1073	1,7884	5,5957	1,5051	0,0185	0,0201	0,0245	0,0707	0,4296	18,3278	0,1533	0,2151	0,0000	0,0000	0,5624	0,1327
20 a 24 años	0,0796	0,0863	0,1330	0,2199	0,0000	0,8980	0,0274	0,1840	0,0597	0,0191	0,6665	0,0000	0,1841	0,2560	0,5329	0,0000	0,6000	0,2344
25 a 29 años	0,1014	0,1154	0,3516	0,1474	2,6445	0,9401	0,0462	0,2227	0,1305	0,0338	2,2892	0,0000	0,1050	0,1248	0,4202	0,0000	0,3310	0,1609
30 a 39 años	0,1200	0,1529	0,3130	0,1797	1,4553	0,0000	0,0723	0,3604	0,1775	0,0603	0,3458	0,7211	0,0748	0,0997	0,2043	0,9059	0,1862	0,1168
40 a 49 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,2215	0,2904	0,5604	0,4712	0,7237	0,0000	0,0717	0,0784	0,1797	0,2667	0,3938	0,2889
50 a 59 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0410	0,0422	0,0000	0,0626	0,0000	0,0000	0,0629	0,0768	0,1530	0,1210	0,7027	0,3230
60 ó más años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0996	0,1137	0,1781	0,4830	0,0000	0,4933	0,0290	0,0322	0,0763	0,0581	0,7857	0,1227
Mujeres	0,0504	0,0763	0,0738	0,0873	3,2108	1,1166	0,0096	0,0080	0,0286	0,0295	0,2762	0,9667	0,0284	0,0384	0,0723	0,0589	0,3694	0,0778
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,2843	0,1745	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0133	0,0074	0,4528	0,0000	0,3815	0,9790	0,8012	2,2814	0,0000	0,0000	0,0000	0,3578
15 a 19 años	0,0960	0,1089	0,1012	5,7183	4,1266	1,4206	0,017											

MUNICIPIO SUCRE (cont.)						
Estimaciones Est Raz-Regr (b opt)	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	210.354	95.887	22.774	10.745	58.778	22.171
0 a 4 años	50.736	0	0	0	40.277	10.459
5 a 9 años	51.902	31.394	0	0	16.222	4.286
10 a 14 años	4.325	3.532	49	0	194	550
15 a 19 años	10.458	7.160	2.552	128	242	376
20 a 24 años	12.415	7.360	3.730	833	193	299
25 a 29 años	10.595	6.028	2.842	1.184	270	271
30 a 39 años	18.794	10.668	4.190	3.027	388	521
40 a 49 años	16.596	9.947	3.358	2.289	236	766
50 a 59 años	14.002	8.040	2.707	1.838	235	1.182
60 ó más años	20.530	11.758	3.344	1.446	522	3.460
<b>Hombres</b>	73.068	28.341	3.550	1.875	29.680	9.622
0 a 4 años	25.941	0	0	0	20.426	5.515
5 a 9 años	26.409	15.810	0	0	8.258	2.341
10 a 14 años	2.404	1.836	42	0	172	354
15 a 19 años	3.546	2.412	781	36	103	215
20 a 24 años	2.591	1.542	646	187	95	121
25 a 29 años	1.760	942	371	257	123	67
30 a 39 años	2.799	1.487	578	399	166	168
40 a 49 años	2.333	1.380	382	335	98	139
50 a 59 años	2.049	1.118	321	326	83	201
60 ó más años	3.235	1.813	430	336	156	501
<b>Mujeres</b>	137.286	67.547	19.224	8.869	29.098	12.548
0 a 4 años	24.795	0	0	0	19.851	4.944
5 a 9 años	25.493	15.584	0	0	7.964	1.945
10 a 14 años	1.921	1.696	7	0	22	196
15 a 19 años	6.912	4.748	1.772	92	139	161
20 a 24 años	9.623	5.818	3.084	646	98	177
25 a 29 años	8.836	5.086	2.472	927	146	204
30 a 39 años	15.996	9.181	3.612	2.628	222	353
40 a 49 años	14.262	8.567	2.976	1.954	138	628
50 a 59 años	11.953	6.922	2.387	1.512	152	981
60 ó más años	17.295	9.945	2.914	1.110	366	2.959

Coef de Variación						
Est Raz-Regr (b opt)	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	0,0042	0,0050	0,0153	0,0275	0,0079	0,0167
0 a 4 años	0,0082	0,0000	0,0000	0,0000	0,0052	0,0181
5 a 9 años	0,0089	0,0079	0,0000	0,0000	0,0149	0,0459
10 a 14 años	0,0274	0,0199	0,8555	0,0000	0,3350	0,0847
15 a 19 años	0,0179	0,0150	0,0277	0,4248	0,4135	0,1969
20 a 24 años	0,0169	0,0163	0,0212	0,0761	0,5784	0,2755
25 a 29 años	0,0179	0,0180	0,0253	0,0480	0,3742	0,2741
30 a 39 años	0,0149	0,0146	0,0263	0,0302	0,3721	0,2134
40 a 49 años	0,0154	0,0143	0,0299	0,0365	0,5708	0,1315
50 a 59 años	0,0164	0,0159	0,0336	0,0413	0,5113	0,0744
60 ó más años	0,0140	0,0132	0,0349	0,0704	0,2855	0,0316
<b>Hombres</b>	0,0072	0,0098	0,0500	0,0869	0,0099	0,0248
0 a 4 años	0,0121	0,0000	0,0000	0,0000	0,0084	0,0271
5 a 9 años	0,0130	0,0116	0,0000	0,0000	0,0230	0,0653
10 a 14 años	0,0322	0,0252	0,5220	0,0000	0,2547	0,0956
15 a 19 años	0,0305	0,0257	0,0408	0,7411	0,6153	0,2142
20 a 24 años	0,0349	0,0350	0,0413	0,1220	0,5278	0,3202
25 a 29 años	0,0398	0,0443	0,0537	0,0641	0,3251	0,4456
30 a 39 años	0,0331	0,0363	0,0473	0,0566	0,3224	0,2329
40 a 49 años	0,0364	0,0355	0,0645	0,0623	0,5136	0,2552
50 a 59 años	0,0359	0,0388	0,0688	0,0570	0,5027	0,1531
60 ó más años	0,0317	0,0318	0,0741	0,0891	0,3867	0,0818
<b>Mujeres</b>	0,0053	0,0059	0,0159	0,0289	0,0121	0,0231
0 a 4 años	0,0112	0,0000	0,0000	0,0000	0,0064	0,0249
5 a 9 años	0,0121	0,0108	0,0000	0,0000	0,0194	0,0664
10 a 14 años	0,0452	0,0313	4,4125	0,0000	2,0875	0,1692
15 a 19 años	0,0219	0,0184	0,0355	0,5164	0,5442	0,3620
20 a 24 años	0,0192	0,0185	0,0252	0,0966	0,9589	0,4092
25 a 29 años	0,0201	0,0199	0,0299	0,0636	0,6014	0,3312
30 a 39 años	0,0168	0,0163	0,0319	0,0369	0,5653	0,3016
40 a 49 años	0,0173	0,0158	0,0353	0,0451	0,8826	0,1520
50 a 59 años	0,0185	0,0176	0,0398	0,0527	0,7084	0,0855
60 ó más años	0,0157	0,0147	0,0406	0,0915	0,3591	0,0350

MUNICIPIO SUCRE

Estimaciones  
Est Regr Raz (b=1)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	546.710	267.158	97.850	88.363	63.931	29.409	219.805	99.634	53.917	58.207	3.340	4.708	11.368	5.346	2.456	3.263	38	265
0 a 4 años	49.999	-587	0	0	40.587	9.999	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	51.428	31.227	-409	0	16.217	4.392	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	49.668	46.975	1.056	14	867	756	293	304	-45	2	30	2	20	22	-3	0	0	1
15 a 19 años	49.329	27.241	16.640	4.423	462	563	9.660	5.949	2.877	596	83	155	709	505	161	18	11	13
20 a 24 años	53.823	22.448	16.807	13.007	830	731	28.611	12.566	9.765	5.394	645	242	1.915	1.019	580	232	73	10
25 a 29 años	48.050	20.298	12.916	13.216	1.009	613	32.523	12.923	9.216	9.639	512	233	1.770	735	422	605	-20	28
30 a 39 años	86.481	39.515	20.396	23.693	1.378	1.499	62.238	26.710	15.062	18.801	835	831	3.057	1.389	519	1.078	40	31
40 a 49 años	67.879	34.010	13.850	16.984	793	2.242	47.612	22.424	9.746	13.672	519	1.251	2.279	991	492	794	-43	46
50 a 59 años	45.382	22.876	9.173	10.143	815	2.376	27.603	13.330	5.557	7.102	643	971	1.262	555	231	423	-19	71
60 ó más años	44.671	23.156	7.421	6.883	974	6.237	11.265	5.428	1.739	3.001	73	1.023	356	130	53	113	-5	65
Hombres	259.634	128.988	44.013	40.848	31.926	13.859	127.420	62.712	30.615	29.574	1.739	2.780	7.300	3.919	1.570	1.610	-9	210
0 a 4 años	25.585	-291	0	0	20.535	5.341	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	26.274	15.734	-160	0	8.191	2.509	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.372	23.342	149	-16	478	420	197	195	-23	-1	25	1	19	19	0	0	0	0
15 a 19 años	24.188	14.144	7.407	2.124	146	367	6.042	4.028	1.590	272	17	136	463	369	72	6	3	12
20 a 24 años	25.764	11.667	7.705	5.593	405	395	16.582	8.472	5.360	2.225	359	167	1.211	703	385	89	24	9
25 a 29 años	22.496	10.219	5.933	5.675	298	371	18.338	8.501	5.097	4.312	234	194	1.008	475	278	271	-32	18
30 a 39 años	41.130	19.346	9.870	10.501	590	824	35.714	16.621	8.748	9.351	456	538	1.820	1.010	271	513	0	27
40 a 49 años	30.723	15.589	5.977	8.006	224	927	26.263	13.078	5.192	7.193	139	660	1.525	782	327	381	-2	37
50 a 59 años	20.445	10.039	4.087	4.960	510	850	16.355	7.977	3.324	4.133	417	504	963	445	209	258	-1	52
60 ó más años	18.656	9.200	3.046	4.006	548	1.856	7.929	3.840	1.327	2.089	92	581	290	115	29	91	0	55
Mujeres	287.076	138.170	53.837	47.514	32.005	15.550	92.386	36.922	23.302	28.632	1.601	1.928	4.068	1.427	886	1.653	47	54
0 a 4 años	24.414	-296	0	0	20.052	4.658	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	25.153	15.493	-249	0	8.026	1.883	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	25.296	23.632	908	30	389	336	95	109	-22	3	5	1	1	3	-3	0	0	1
15 a 19 años	25.141	13.097	9.233	2.300	315	196	3.618	1.921	1.287	324	67	20	246	136	89	12	8	1
20 a 24 años	28.058	10.781	9.103	7.414	425	336	12.030	4.094	4.405	3.169	286	75	704	316	195	143	49	1
25 a 29 años	25.555	10.079	6.983	7.540	711	242	14.185	4.423	4.119	5.327	278	39	782	291	144	335	12	10
30 a 39 años	45.351	20.170	10.526	13.192	788	675	26.524	10.089	6.314	9.450	379	293	1.237	378	248	565	41	5
40 a 49 años	37.156	18.421	7.873	8.978	568	1.316	21.349	9.345	4.554	6.479	379	591	754	209	165	412	-1	9
50 a 59 años	24.937	12.837	5.086	5.183	305	1.526	11.248	5.354	2.233	2.969	226	467	299	111	22	165	-18	19
60 ó más años	26.015	13.956	4.376	2.877	426	4.381	3.336	1.588	412	913	-19	442	66	15	24	22	-5	10

Coef de Variación

Est Regr Raz (b=1)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0.0026	0.0028	0.0066	0.0060	0.0107	0.0201	0.0039	0.0041	0.0082	0.0065	0.1108	0.0662	0.0212	0.0246	0.0490	0.0370	1.9463	0.2931
0 a 4 años	0.0063	0.0000	0.0000	0.0000	0.0056	0.0216	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5 a 9 años	0.0084	0.0083	0.0000	0.0000	0.0163	0.0511	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10 a 14 años	0.0088	0.0053	0.2244	0.0000	0.2236	0.2499	0.0972	0.0548	-0.3823	0.0000	0.3695	6.0443	0.1252	0.1122	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
15 a 19 años	0.0098	0.0095	0.0137	0.0494	0.4284	0.3040	0.0188	0.0148	0.0305	0.1560	0.8003	6.4241	0.0652	0.0590	0.1600	1.2076	0.3611	0.6769
20 a 24 años	0.0083	0.0106	0.0124	0.0150	0.2296	0.2147	0.0107	0.0120	0.0149	0.0262	0.2017	0.4813	0.0501	0.0529	0.0840	0.1986	0.3986	3.0988
25 a 29 años	0.0085	0.0104	0.0152	0.0128	0.1781	0.2420	0.0100	0.0123	0.0180	0.0147	0.2740	0.5061	0.0513	0.0687	0.1085	0.0762	-1.2399	1.0520
30 a 39 años	0.0066	0.0074	0.0135	0.0097	0.1881	0.1460	0.0074	0.0085	0.0156	0.0100	0.2422	0.2074	0.0450	0.0523	0.1306	0.0641	1.1331	1.4885
40 a 49 años	0.0075	0.0074	0.0180	0.0122	0.2902	0.0837	0.0075	0.0084	0.0220	0.0127	0.3361	0.1151	0.0496	0.0608	0.1123	0.0716	-0.8943	0.8198
50 a 59 años	0.0092	0.0090	0.0223	0.0174	0.2301	0.0642	0.0112	0.0105	0.0303	0.0199	0.2047	0.1097	0.0589	0.0742	0.1618	0.0913	-1.0927	0.3202
60 ó más años	0.0104	0.0102	0.0286	0.0292	0.2138	0.0292	0.0176	0.0162	0.0626	0.0321	1.1527	0.0577	0.0963	0.1496	0.3261	0.1651	-1.8726	0.1327
Hombres	0.0040	0.0041	0.0111	0.0101	0.0146	0.0299	0.0059	0.0060	0.0132	0.0118	0.1632	0.0915	0.0259	0.0269	0.0606	0.0569	-6.4152	0.3006
0 a 4 años	0.0099	0.0000	0.0000	0.0000	0.0091	0.0317	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5 a 9 años	0.0126	0.0122	0.0000	0.0000	0.0252	0.0692	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10 a 14 años	0.0120	0.0072	1.0534	0.0000	0.2789	0.2855	0.1241	0.0803	-0.6190	0.0000	0.3353	10.5151	0.1301	0.1272	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
15 a 19 años	0.0141	0.0129	0.0222	0.0738	0.9060	0.3190	0.0274	0.0206	0.0547	0.3069	3.2459	0.4121	0.0791	0.0645	0.2827	2.7173	1.3472	6.6839
20 a 24 años	0.0128	0.0151	0.0215	0.0272	0.2957	0.2845	0.0163	0.0161	0.0260	0.0577	0.2768	0.5731	0.0593	0.0613	0.0998	0.3753	0.3959	2.7039
25 a 29 años	0.0136	0.0154	0.0269	0.0247	0.3891	0.2830	0.0155	0.0166	0.0295	0.0305	0.4539	0.4937	0.0653	0.0776	0.1207	0.1195	-0.5824	1.1927
30 a 39 años	0.0105	0.0114	0.0225	0.0180	0.2862	0.1837	0.0113	0.0123	0.0243	0.0191	0.3389	0.2604	0.0576	0.0555	0.1897	0.0990	-96.6860	1.3787
40 a 49 años	0.0120	0.0118	0.0328	0.0207	0.6437	0.1324	0.0130	0.0128	0.0362	0.0217	0.9386	0.1683	0.0601	0.0637	0.1380	0.1173	-13.9433	0.8486
50 a 59 años	0.0148	0.0150	0.0392	0.0279	0.2246	0.1200	0.0168	0.0165	0.0456	0.0312	0.2440	0.1775	0.0688	0.0834	0.1592	0.1275	-17.8606	0.4095
60 ó más años	0.0164	0.0168	0.0484	0.0350	0.2220	0.0619	0.0241	0.0237	0.0797	0.0446	0.7800	0.0986	0.1113	0.1598	0.5645	0.1837	31.0651	0.1599
Mujeres	0.0039	0.0042	0.0097	0.0094	0.0154	0.0277	0.0071	0.0087	0.0150	0.0111	0.1551	0.1072	0.0					



MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Estimaciones Est Regr Raz (b=1)	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	209.103	95.120	22.686	10.407	59.114	21.777
0 a 4 años	49.999	-587	0	0	40.587	9.999
5 a 9 años	51.428	31.227	-409	0	16.217	4.392
10 a 14 años	4.580	3.650	158	2	248	521
15 a 19 años	10.298	7.076	2.592	71	259	299
20 a 24 años	12.434	7.383	3.672	861	173	345
25 a 29 años	10.428	5.938	2.732	1.177	341	240
30 a 39 años	19.236	10.909	4.386	3.033	421	487
40 a 49 años	16.607	9.968	3.332	2.231	263	814
50 a 59 años	13.841	7.960	2.884	1.788	55	1.154
60 ó más años	20.252	11.596	3.339	1.243	548	3.526
<b>Hombres</b>	72.074	27.673	3.430	1.857	29.570	9.544
0 a 4 años	25.585	-291	0	0	20.535	5.341
5 a 9 años	26.274	15.734	-160	0	8.191	2.509
10 a 14 años	2.066	1.663	-34	-13	139	310
15 a 19 años	3.583	2.402	866	34	113	177
20 a 24 años	2.742	1.598	637	254	125	128
25 a 29 años	1.672	906	355	257	97	56
30 a 39 años	2.669	1.428	651	340	82	168
40 a 49 años	2.251	1.352	352	336	51	161
50 a 59 años	1.885	1.037	338	305	6	199
60 ó más años	3.346	1.844	435	343	230	495
<b>Mujeres</b>	137.029	67.446	19.256	8.550	29.544	12.233
0 a 4 años	24.414	-296	0	0	20.052	4.658
5 a 9 años	25.153	15.493	-249	0	8.026	1.883
10 a 14 años	2.514	1.987	192	15	109	211
15 a 19 años	6.715	4.673	1.737	37	146	122
20 a 24 años	9.693	5.786	3.034	607	48	217
25 a 29 años	8.756	5.032	2.377	921	244	183
30 a 39 años	16.567	9.482	3.735	2.693	339	318
40 a 49 años	14.356	8.616	2.980	1.895	212	653
50 a 59 años	11.956	6.922	2.546	1.483	49	955
60 ó más años	16.906	9.752	2.904	900	319	3.032

Coef de Variación  
Est Regr Raz (b=1)

Est Regr Raz (b=1)	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	0,0042	0,0048	0,0121	0,0225	0,0085	0,0192
0 a 4 años	0,0063	0,0000	0,0000	0,0000	0,0056	0,0216
5 a 9 años	0,0084	0,0083	0,0000	0,0000	0,0163	0,0511
10 a 14 años	0,0262	0,0202	0,2737	0,0000	0,2747	0,0954
15 a 19 años	0,0197	0,0158	0,0303	0,8993	0,4140	0,2744
20 a 24 años	0,0183	0,0170	0,0240	0,0876	0,6942	0,2663
25 a 29 años	0,0195	0,0190	0,0287	0,0557	0,3140	0,3403
30 a 39 años	0,0158	0,0151	0,0278	0,0349	0,3671	0,2560
40 a 49 años	0,0166	0,0149	0,0331	0,0420	0,5485	0,1370
50 a 59 años	0,0176	0,0166	0,0338	0,0470	2,2940	0,0825
60 ó más años	0,0155	0,0141	0,0388	0,0939	0,2940	0,0352
<b>Hombres</b>	0,0068	0,0088	0,0240	0,0369	0,0107	0,0280
0 a 4 años	0,0099	0,0000	0,0000	0,0000	0,0091	0,0317
5 a 9 años	0,0126	0,0122	0,0000	0,0000	0,0252	0,0692
10 a 14 años	0,0383	0,0293	-0,6796	0,0000	0,3256	0,1161
15 a 19 años	0,0323	0,0270	0,0432	0,8316	0,5906	0,2830
20 a 24 años	0,0347	0,0349	0,0467	0,1026	0,4118	0,3240
25 a 29 años	0,0436	0,0473	0,0609	0,0693	0,4243	0,5573
30 a 39 años	0,0367	0,0392	0,0466	0,0754	0,6871	0,2499
40 a 49 años	0,0399	0,0375	0,0770	0,0685	1,0353	0,2357
50 a 59 años	0,0407	0,0428	0,0714	0,0669	7,2720	0,1634
60 ó más años	0,0331	0,0324	0,0831	0,1041	0,2777	0,0913
<b>Mujeres</b>	0,0054	0,0058	0,0144	0,0279	0,0129	0,0269
0 a 4 años	0,0081	0,0000	0,0000	0,0000	0,0069	0,0303
5 a 9 años	0,0113	0,0113	0,0000	0,0000	0,0211	0,0786
10 a 14 años	0,0349	0,0280	0,1688	0,0000	0,4391	0,1686
15 a 19 años	0,0246	0,0195	0,0401	1,5164	0,5660	0,5384
20 a 24 años	0,0216	0,0195	0,0289	0,1243	2,1461	0,3841
25 a 29 años	0,0221	0,0210	0,0341	0,0744	0,3907	0,4128
30 a 39 años	0,0178	0,0167	0,0344	0,0421	0,3907	0,3833
40 a 49 años	0,0187	0,0166	0,0388	0,0524	0,6261	0,1599
50 a 59 años	0,0197	0,0183	0,0399	0,0592	2,3305	0,0964
60 ó más años	0,0176	0,0158	0,0447	0,1268	0,4516	0,0390

MUNICIPIO SUCRE

Estimaciones  
Est Regr Raz (b=1)  
(ajustando negativos)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	550.752	268.058	99.200	88.772	65.007	29.715	220.342	99.634	54.010	58.259	3.680	4.759	11.861	5.366	2.629	3.328	254	284
0 a 4 años	50.791	199	0	0	40.587	10.004	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	52.012	31.227	1.75	0	16.217	4.392	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	50.020	46.990	1.307	59	867	798	372	304	14	11	30	13	31	22	8	0	0	1
15 a 19 años	49.688	27.243	16.694	4.507	571	672	9.698	5.949	2.877	603	103	166	722	505	168	22	13	13
20 a 24 años	54.254	22.503	16.834	13.056	1.070	793	28.646	12.566	9.765	5.394	663	258	1.956	1.027	580	248	82	18
25 a 29 años	48.349	20.336	13.000	13.239	1.113	662	32.529	12.923	9.216	9.639	512	239	1.861	748	431	605	50	28
30 a 39 años	86.851	39.516	20.507	23.731	1.590	1.507	62.364	26.710	15.062	18.801	960	831	3.171	1.389	602	1.078	71	31
40 a 49 años	68.082	34.010	13.886	17.033	887	2.267	47.624	22.424	9.746	13.672	528	1.254	2.395	991	512	826	14	53
50 a 59 años	45.741	22.878	9.284	10.201	998	2.379	27.726	13.330	5.557	7.134	731	974	1.327	555	257	428	15	71
60 ó más años	44.964	23.156	7.513	6.946	1.108	6.241	11.383	5.428	1.773	3.006	153	1.023	398	130	72	120	8	69
Hombres	261.909	129.380	44.817	41.098	32.570	14.043	127.825	62.712	30.677	29.616	2.003	2.817	7.622	3.939	1.705	1.661	94	223
0 a 4 años	25.919	43	0	0	20.535	5.341	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	26.560	15.734	125	0	8.191	2.509	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.598	23.357	304	22	478	437	240	195	6	6	25	8	27	19	8	0	0	0
15 a 19 años	24.402	14.146	7.445	2.161	215	436	6.065	4.028	1.590	272	33	142	467	369	72	8	5	12
20 a 24 años	26.014	11.675	7.726	5.623	546	444	16.598	8.472	5.360	2.225	359	183	1.249	711	385	106	32	16
25 a 29 años	22.704	10.260	5.695	6.907	400	490	18.338	8.599	5.097	4.122	234	183	1.055	487	278	278	2	19
30 a 39 años	41.434	19.346	9.870	10.535	753	830	36.825	16.621	9.748	9.351	567	538	1.924	1.010	513	21	21	27
40 a 49 años	30.816	15.589	6.004	8.034	256	933	26.275	13.078	5.192	7.193	148	663	1.583	782	341	406	14	40
50 a 59 años	20.649	10.041	4.119	5.002	635	853	16.476	7.977	3.324	4.163	505	507	993	445	224	259	13	52
60 ó más años	18.812	9.200	3.127	4.026	599	1.860	8.008	3.840	1.360	2.094	132	581	324	115	44	99	8	59
Mujeres	288.843	138.678	54.382	47.674	32.437	15.672	92.517	36.922	23.333	28.644	1.677	1.942	4.238	1.427	924	1.667	160	61
0 a 4 años	24.872	156	0	0	20.052	4.664	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	25.452	15.493	49	0	8.026	1.883	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	25.422	23.632	1.003	37	389	361	132	109	8	5	5	5	4	3	0	0	0	1
15 a 19 años	25.286	13.097	9.249	2.347	356	237	3.632	1.921	1.287	331	70	24	255	136	96	15	8	1
20 a 24 años	28.240	10.828	9.107	7.433	523	348	12.047	4.094	4.405	3.169	304	75	707	316	195	143	50	3
25 a 29 años	25.645	10.086	7.003	7.544	751	261	14.191	4.423	4.119	5.327	278	45	806	261	153	335	48	10
30 a 39 años	45.418	20.171	10.537	13.196	836	677	26.539	10.089	6.314	9.450	394	293	1.246	378	248	565	50	5
40 a 49 años	37.266	18.421	7.882	8.989	631	1.334	21.349	9.345	4.554	6.479	379	591	812	209	170	420	0	13
50 a 59 años	25.081	12.837	5.166	5.199	363	1.526	11.250	5.354	2.233	2.971	226	467	334	111	33	169	2	19
60 ó más años	26.152	13.956	4.386	2.920	509	4.381	3.376	1.588	412	913	20	442	74	15	28	22	0	10

Coef de Variación  
Est Regr Raz (b=1)  
(ajustando negativos)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0.0026	0.0028	0.0065	0.0060	0.0105	0.0199	0.0039	0.0041	0.0082	0.0065	0.0105	0.0655	0.0203	0.0245	0.0458	0.0363	0.0290	0.2732
0 a 4 años	0.0062	0.0000	0.0000	0.0000	0.0056	0.0216	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5 a 9 años	0.0083	0.0083	0.0000	0.0000	0.0163	0.0511	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10 a 14 años	0.0087	0.0053	0.1814	0.0000	0.2237	0.2368	0.0765	0.0548	1.2084	0.0000	0.3685	0.8241	0.0812	0.1122	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
15 a 19 años	0.0097	0.0095	0.0136	0.0485	0.3466	0.2546	0.0187	0.0148	0.0305	0.1542	0.6503	0.3961	0.0641	0.0590	0.1539	0.9820	0.3072	0.6769
20 a 24 años	0.0082	0.0106	0.0124	0.0149	0.1781	0.1981	0.0107	0.0120	0.0149	0.0262	0.1963	0.4500	0.0490	0.0525	0.0840	0.1855	0.3567	1.6671
25 a 29 años	0.0084	0.0103	0.0151	0.0128	0.1615	0.2239	0.0100	0.0123	0.0180	0.0147	0.2740	0.4931	0.0488	0.0675	0.1063	0.0762	0.5037	1.0520
30 a 39 años	0.0066	0.0074	0.0134	0.0096	0.1630	0.1452	0.0074	0.0085	0.0156	0.0100	0.2105	0.2074	0.0434	0.0523	0.1126	0.0641	0.6419	1.4885
40 a 49 años	0.0074	0.0074	0.0179	0.0122	0.2593	0.0828	0.0085	0.0084	0.0220	0.0127	0.3303	0.1148	0.0472	0.0608	0.1081	0.0688	2.7734	0.7095
50 a 59 años	0.0091	0.0090	0.0220	0.0173	0.1878	0.0641	0.0112	0.0105	0.0303	0.0198	0.1800	0.1093	0.0560	0.0742	0.1454	0.0901	1.3473	0.3202
60 ó más años	0.0104	0.0102	0.0283	0.0289	0.1878	0.0292	0.0174	0.0162	0.0614	0.0321	0.5494	0.0577	0.0861	0.1496	0.2434	0.1549	1.0524	0.1255
Hombres	0.0040	0.0041	0.0109	0.0100	0.0143	0.0295	0.0059	0.0060	0.0132	0.0118	0.1417	0.0904	0.0248	0.0268	0.0558	0.0551	0.5894	0.2831
0 a 4 años	0.0097	0.0000	0.0000	0.0000	0.0091	0.0317	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5 a 9 años	0.0125	0.0122	0.0000	0.0000	0.0252	0.0692	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10 a 14 años	0.0119	0.0072	0.1550	0.0000	0.2790	0.2743	0.0119	0.0803	2.3230	0.0000	0.3453	1.1618	0.0918	0.1272	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
15 a 19 años	0.0140	0.0129	0.0221	0.0725	0.6180	0.2689	0.0273	0.0206	0.0547	0.3069	0.8437	1.3921	0.0776	0.0645	0.2827	2.0631	0.8114	0.6839
20 a 24 años	0.0127	0.0151	0.0214	0.0270	0.2192	0.2530	0.0163	0.0161	0.0260	0.0577	0.2768	0.5207	0.0575	0.0606	0.0998	0.3172	0.3021	1.5812
25 a 29 años	0.0135	0.0153	0.0266	0.0246	0.3207	0.2619	0.0155	0.0166	0.0295	0.0305	0.4539	0.4937	0.0624	0.0757	0.1207	0.1195	0.98711	1.1927
30 a 39 años	0.0104	0.0114	0.0222	0.0179	0.2240	0.1823	0.0112	0.0123	0.0243	0.0211	0.2730	0.2604	0.0544	0.0555	0.1452	0.0990	1.7300	1.3786
40 a 49 años	0.0120	0.0118	0.0327	0.0206	0.5654	0.1315	0.0130	0.0128	0.0362	0.0217	0.8808	0.1676	0.0579	0.0637	0.1323	0.1100	2.1458	0.7893
50 a 59 años	0.0146	0.0150	0.0389	0.0277	0.1803	0.1196	0.0167	0.0165	0.0456	0.0310	0.2013	0.1764	0.0667	0.0834	0.1485	0.1271	1.4898	0.4095
60 ó más años	0.0162	0.0168	0.0471	0.0348	0.2029	0.0618	0.0239	0.0237	0.0778	0.0445	0.5410	0.0986	0.0997	0.1598	0.3752	0.1699	1.1004	0.1498
Mujeres	0.0039	0.0042	0.0096	0.0094	0.0152	0.0274	0.0071	0.0087	0.0150	0.0111	0.1481	0.1064	0.0326					

MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Estimaciones Est Regr Raz (b=1) (ajustando negativos)	BTTPPV						Estudiando						Pensionado o Jubilado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	5.246	2.515	1.590	956	69	116	84.893	56.922	14.447	12.180	1.112	232	17.413	7.704	3.013	3.529	717	2.450
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	128	105	11	4	0	9	44.670	42.874	1.002	25	588	180	107	34	14	0	0	60
15 a 19 años	2.035	1.217	728	42	11	36	26.638	12.417	10.295	3.736	177	13	240	79	34	4	7	116
20 a 24 años	1.825	742	606	421	10	46	9.052	663	2.148	6.110	127	4	306	122	50	14	9	111
25 a 29 años	835	312	129	356	20	18	2.352	302	438	1.440	164	8	275	101	38	7	26	103
30 a 39 años	423	138	117	134	27	7	1.047	156	225	639	23	4	570	215	116	27	65	148
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	420	188	76	144	8	4	1.000	440	220	146	65	129
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	117	33	21	59	3	1	2.624	999	493	782	170	179
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	597	288	242	28	21	18	12.291	5.714	2.049	2.549	375	1.604
Hombres	3.407	1.911	918	471	27	81	40.535	28.340	6.053	5.624	418	102	9.529	4.460	1.617	1.800	419	1.232
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	103	83	9	3	0	9	22.034	21.389	252	12	313	68	55	7	5	0	0	43
15 a 19 años	1.357	912	394	33	0	18	12.781	6.376	4.526	1.810	57	13	139	58	8	3	7	63
20 a 24 años	1.170	566	377	188	3	36	4.025	242	917	2.835	27	4	199	86	37	7	1	68
25 a 29 años	510	230	75	176	12	17	681	146	662	4	7	1	140	53	30	3	13	3
30 a 39 años	266	120	63	70	11	11	373	59	98	227	7	2	335	127	56	13	45	94
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	163	80	44	34	4	1	543	297	75	64	38	69
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	35	10	2	22	0	1	1.221	572	219	242	95	94
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	243	140	68	23	6	6	6.857	3.260	1.188	1.468	220	720
Mujeres	1.839	604	672	485	42	35	44.358	28.582	8.394	6.557	695	130	7.884	3.244	1.396	1.728	298	1.218
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	25	22	2	1	0	0	22.635	21.485	750	13	275	112	52	26	9	0	0	17
15 a 19 años	678	306	334	9	11	18	13.857	6.041	5.769	1.926	121	0	101	21	26	1	0	53
20 a 24 años	654	176	229	232	7	10	5.027	421	1.231	3.275	100	0	107	36	13	7	8	43
25 a 29 años	325	82	54	180	7	1	1.471	240	292	778	160	1	95	49	8	4	13	21
30 a 39 años	157	18	53	63	16	6	673	117	127	412	16	2	235	88	60	14	20	54
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	258	108	32	110	4	3	456	143	145	83	26	69
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	82	23	19	37	3	0	1.402	428	275	539	76	85
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	354	148	174	5	15	12	5.434	2.453	861	1.081	155	885

Coef de Variación  
Est Regr Raz (b=1)  
(ajustando negativos)

	BTTPPV						Estudiando						Pensionado o Jubilado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0,0317	0,0366	0,0557	0,0813	0,5939	0,5212	0,0071	0,0059	0,0219	0,0169	0,2185	0,9595	0,0180	0,0213	0,0470	0,0408	0,1524	0,0550
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,0932	0,1092	0,0000	0,0000	0,0000	0,3840	0,0094	0,0055	0,2321	0,0000	0,3079	1,0111	0,0916	0,2049	0,0000	0,0000	0,0000	0,1170
15 a 19 años	0,0548	0,0491	0,0803	1,1510	3,3670	1,0950	0,0143	0,0164	0,0178	0,0480	0,8295	9,9220	0,0905	0,1862	0,2866	0,0000	0,1440	0,1083
20 a 24 años	0,0553	0,0760	0,0896	0,1183	0,0000	0,8615	0,0200	0,1662	0,0440	0,0144	0,5010	0,0000	0,0865	0,1515	0,2825	0,0000	0,4677	0,1168
25 a 29 años	0,0714	0,1078	0,2566	0,0815	0,5257	1,0587	0,0332	0,1663	0,0938	0,0270	0,1186	0,0000	0,0807	0,1316	0,2708	0,0000	0,1880	0,1323
30 a 39 años	0,0884	0,1575	0,1657	0,1386	0,3498	1,5763	0,0477	0,2114	0,1153	0,0387	0,3920	1,7322	0,0756	0,1178	0,1626	0,7618	0,1632	0,1249
40 a 49 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0727	0,1080	0,2109	0,1054	0,6000	0,7478	0,0594	0,0778	0,1232	0,1881	0,2393	0,1943
50 a 59 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0934	0,2117	0,2813	0,1000	0,0000	0,0000	0,0433	0,0617	0,1041	0,0671	0,2167	0,2714
60 ó más años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0578	0,0802	0,0752	0,5867	0,2955	0,2514	0,0227	0,0250	0,0617	0,0509	0,2689	0,0744
Hombres	0,0380	0,0382	0,0754	0,1255	1,1156	0,5915	0,0099	0,0081	0,0346	0,0247	0,3926	1,3883	0,0239	0,0270	0,0635	0,0582	0,1888	0,0792
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,0828	0,0963	0,0000	0,0000	0,0000	0,3563	0,0127	0,0075	0,6128	0,0000	0,3993	1,6794	0,0540	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0695
15 a 19 años	0,0651	0,0531	0,1184	1,1332	0,0000	1,7655	0,0201	0,0218	0,0275	0,0678	1,7086	6,4370	0,0892	0,1689	0,0000	0,0000	0,1035	0,1209
20 a 24 años	0,0680	0,0797	0,1131	0,2021	0,0000	0,8938	0,0295	0,2987	0,0669	0,0203	1,5517	0,0000	0,0964	0,1438	0,2201	0,0000	0,0000	0,1786
25 a 29 años	0,0840	0,1050	0,3215	0,1195	0,3496	0,8451	0,0521	0,4781	0,1655	0,0353	2,4939	0,0000	0,0952	0,1784	0,2229	0,0000	0,2680	0,1501
30 a 39 años	0,1032	0,1445	0,2354	0,1894	0,6480	0,0000	0,0737	0,4840	0,1285	0,0621	0,7498	1,8399	0,0926	0,1413	0,2513	1,1531	0,1816	0,1346
40 a 49 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1145	0,1579	0,2161	0,2772	0,7780	0,0000	0,0782	0,0858	0,2615	0,3005	0,2813	0,2446
50 a 59 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1319	0,3706	0,0000	0,1235	0,0000	0,0000	0,0597	0,0731	0,1477	0,1364	0,2442	0,3185
60 ó más años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0871	0,1034	0,1639	0,4560	0,0000	0,4121	0,0302	0,0329	0,0791	0,0658	0,3373	0,1228
Mujeres	0,0527	0,0904	0,0810	0,0999	0,2686	0,8847	0,0099	0,0086	0,0278	0,0233	0,2533	1,1844	0,0266	0,0337	0,0694	0,0570	0,2318	0,0750
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,1763	0,1964	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0133	0,0080	0,2270	0,0000	0,4749	1,1062	0,1466	0,2122	0,0000	0,0000	0,0000	0,3106
15 a 19 años	0,0916	0,1143																

MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Estimaciones Est Regr Raz (b=1) (ajustando negativos)	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	210.997	95.918	23.511	10.519	59.175	21.875
0 a 4 años	50.791	199	0	0	40.587	10.004
5 a 9 años	52.012	31.227	175	0	16.217	4.392
10 a 14 años	4.712	3.650	259	19	248	536
15 a 19 años	10.354	7.076	2.592	100	259	329
20 a 24 años	12.470	7.383	3.686	869	178	354
25 a 29 años	10.497	5.950	2.748	1.192	341	266
30 a 39 años	19.277	10.909	4.386	3.053	442	487
40 a 49 años	16.643	9.968	3.332	2.244	273	827
50 a 59 años	13.947	7.960	2.956	1.800	78	1.154
60 ó más años	20.294	11.596	3.378	1.243	551	3.526
<b>Hombres</b>	72.991	28.019	3.847	1.926	29.610	9.589
0 a 4 años	25.919	43	0	0	20.535	5.341
5 a 9 años	26.560	15.734	125	0	8.191	2.509
10 a 14 años	2.138	1.663	25	1	139	310
15 a 19 años	3.592	2.402	856	34	113	187
20 a 24 años	2.773	1.598	651	262	125	137
25 a 29 años	1.741	918	371	272	97	89
30 a 39 años	2.710	1.428	651	360	103	168
40 a 49 años	2.252	1.352	352	337	51	161
50 a 59 años	1.924	1.037	350	316	22	199
60 ó más años	3.381	1.844	467	343	233	495
<b>Mujeres</b>	138.006	67.899	19.664	8.593	29.565	12.286
0 a 4 años	24.872	156	0	0	20.052	4.664
5 a 9 años	25.452	15.493	49	0	8.026	1.883
10 a 14 años	2.574	1.987	234	18	109	226
15 a 19 años	6.762	4.673	1.737	65	146	141
20 a 24 años	9.697	5.786	3.034	607	53	217
25 a 29 años	8.796	5.032	2.377	921	244	183
30 a 39 años	16.567	9.482	3.735	2.693	339	318
40 a 49 años	14.391	8.616	2.980	1.907	222	666
50 a 59 años	12.022	6.922	2.606	1.483	56	355
60 ó más años	16.913	9.752	2.911	900	319	3.032

Coef de Variación  
Est Regr Raz (b=1)  
(ajustando negativos)

	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	0,0041	0,0047	0,0117	0,0223	0,0085	0,0191
0 a 4 años	0,0062	0,0000	0,0000	0,0000	0,0056	0,0216
5 a 9 años	0,0083	0,0083	0,0000	0,0000	0,0163	0,0511
10 a 14 años	0,0255	0,0202	0,1675	0,0000	0,2748	0,0929
15 a 19 años	0,0196	0,0158	0,0303	0,6445	0,4140	0,2506
20 a 24 años	0,0183	0,0170	0,0239	0,0868	0,6753	0,2594
25 a 29 años	0,0194	0,0190	0,0285	0,0550	0,3140	0,3066
30 a 39 años	0,0158	0,0151	0,0278	0,0347	0,3494	0,2560
40 a 49 años	0,0166	0,0149	0,0331	0,0418	0,5284	0,1348
50 a 59 años	0,0174	0,0166	0,0330	0,0467	1,6239	0,0825
60 ó más años	0,0155	0,0141	0,0383	0,0939	0,2925	0,0352
<b>Hombres</b>	0,0068	0,0087	0,0214	0,0356	0,0107	0,0279
0 a 4 años	0,0097	0,0000	0,0000	0,0000	0,0091	0,0317
5 a 9 años	0,0125	0,0122	0,0000	0,0000	0,0252	0,0692
10 a 14 años	0,0370	0,0293	0,9230	0,0000	0,3257	0,1162
15 a 19 años	0,0322	0,0270	0,0432	0,8315	0,5906	0,2692
20 a 24 años	0,0343	0,0349	0,0457	0,0995	0,4118	0,3025
25 a 29 años	0,0419	0,0467	0,0583	0,0656	0,4243	0,3803
30 a 39 años	0,0362	0,0392	0,0466	0,0712	0,5451	0,2499
40 a 49 años	0,0399	0,0375	0,0770	0,0682	1,0353	0,2357
50 a 59 años	0,0399	0,0428	0,0691	0,0645	1,9630	0,1634
60 ó más años	0,0327	0,0324	0,0775	0,1041	0,2742	0,0913
<b>Mujeres</b>	0,0053	0,0057	0,0141	0,0278	0,0129	0,0268
0 a 4 años	0,0080	0,0000	0,0000	0,0000	0,0069	0,0303
5 a 9 años	0,0112	0,0113	0,0000	0,0000	0,0211	0,0787
10 a 14 años	0,0341	0,0280	0,1385	0,0000	0,4393	0,1580
15 a 19 años	0,0245	0,0195	0,0401	0,8597	0,5659	0,4648
20 a 24 años	0,0196	0,0195	0,0289	0,1242	1,9507	0,3839
25 a 29 años	0,0220	0,0210	0,0341	0,0744	0,3907	0,4127
30 a 39 años	0,0178	0,0167	0,0344	0,0421	0,3907	0,3832
40 a 49 años	0,0187	0,0166	0,0388	0,0520	0,5979	0,1566
50 a 59 años	0,0196	0,0183	0,0390	0,0592	2,0486	0,0964
60 ó más años	0,0176	0,0158	0,0445	0,1268	0,4515	0,0390

MUNICIPIO SUCRE

Estimaciones

Est Reg Raz (b opt)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	546.500	267.359	97.196	88.393	63.667	29.887	219.004	99.307	53.491	58.535	2.882	4.789	11.302	5.440	2.534	2.922	123	283
0 a 4 años	51.160	40	0	0	40.587	10.532	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	51.886	31.381	7	0	16.217	4.280	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	49.228	46.843	691	0	867	827	439	373	21	0	30	15	25	25	0	0	0	0
15 a 19 años	49.986	27.567	16.941	4.086	707	686	9.768	6.011	3.015	521	80	141	715	507	178	15	5	10
20 a 24 años	53.860	22.474	16.926	13.037	691	732	28.697	12.617	9.913	5.519	357	292	1.668	901	537	208	12	10
25 a 29 años	47.423	19.974	12.821	13.315	674	640	32.143	12.717	9.013	9.837	345	231	1.689	695	399	556	10	29
30 a 39 años	84.363	38.585	19.718	23.279	1.244	1.536	60.887	26.107	14.566	18.639	737	837	2.932	1.418	617	826	35	35
40 a 49 años	69.053	34.602	14.044	17.140	1.066	2.201	48.726	22.994	9.926	13.786	740	1.281	2.351	1.038	465	755	34	59
50 a 59 años	43.896	22.105	8.417	10.310	682	2.382	26.339	12.653	5.046	7.227	416	998	1.379	621	239	428	17	73
60 ó más años	45.647	23.787	7.631	7.226	932	6.071	26.339	12.653	5.046	7.227	416	998	1.379	621	239	428	17	73
Hombres	259.175	129.008	43.543	40.514	32.205	13.906	126.336	62.204	30.049	29.710	1.611	2.761	7.409	4.086	1.591	1.383	114	235
0 a 4 años	26.101	22	0	0	20.535	5.544	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	26.209	15.688	3	0	8.191	2.326	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.982	23.589	327	0	478	488	295	244	11	0	25	15	20	20	0	0	0	0
15 a 19 años	23.875	13.990	7.257	1.850	352	426	5.816	3.927	1.486	247	35	121	509	393	92	10	5	10
20 a 24 años	25.273	11.427	7.564	5.490	384	407	16.439	8.394	5.360	2.290	203	192	1.067	633	328	87	9	10
25 a 29 años	22.736	10.338	5.967	5.736	333	361	18.362	8.507	5.082	4.416	176	181	1.034	489	255	260	11	20
30 a 39 años	40.042	18.962	9.411	10.170	671	828	34.616	16.135	8.319	9.203	432	527	1.718	1.059	340	248	36	35
40 a 49 años	31.536	15.948	6.200	8.008	509	870	26.873	13.362	5.362	7.168	349	633	1.581	805	312	392	28	44
50 a 59 años	19.851	9.738	3.691	5.148	394	880	15.698	7.627	2.990	4.258	280	543	1.017	479	186	278	16	58
60 ó más años	18.672	9.306	3.121	4.112	357	1.776	8.237	4.009	1.440	2.129	111	548	463	209	78	107	10	59
Mujeres	287.325	138.351	53.653	47.879	31.462	15.981	92.668	37.103	23.442	28.825	1.270	2.028	3.893	1.354	943	1.539	9	48
0 a 4 años	25.059	19	0	0	20.052	4.989	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	25.677	15.693	4	0	8.026	1.954	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.346	23.254	364	0	389	339	145	129	11	0	5	0	5	5	0	0	0	0
15 a 19 años	26.111	13.576	9.684	2.236	355	260	3.952	2.084	1.529	274	45	20	206	115	86	5	0	0
20 a 24 años	28.587	11.047	9.362	7.547	307	325	12.258	4.223	4.553	3.229	153	101	601	268	100	121	3	0
25 a 29 años	24.687	9.636	6.853	7.579	340	279	13.791	4.210	3.931	5.421	169	50	655	206	144	297	0	9
30 a 39 años	44.321	19.623	10.306	13.109	573	708	26.271	9.572	6.248	9.436	305	310	1.214	360	277	578	-1	0
40 a 49 años	37.517	18.655	7.843	9.132	557	1.331	21.853	9.632	4.564	6.618	391	648	769	233	153	363	6	15
50 a 59 años	24.045	12.367	4.726	5.163	288	1.502	10.641	5.026	2.056	2.969	136	454	362	143	53	150	1	15
60 ó más años	26.975	14.481	4.510	3.113	575	4.295	3.768	1.826	551	878	66	446	81	26	21	25	0	10

Coef de Variación

Est Reg Raz (b opt)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0,0018	0,0024	0,0045	0,0043	0,0065	0,0103	0,0026	0,0037	0,0054	0,0050	0,0228	0,0178	0,0148	0,0190	0,0351	0,0310	0,1607	0,1042
0 a 4 años	0,0043	0,0000	0,0000	0,0000	0,0043	0,0130	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0066	0,0075	0,0000	0,0000	0,0125	0,0328	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,0055	0,0043	0,2335	0,0000	0,0905	0,0598	0,0445	0,0455	0,4217	0,0000	0,0774	0,2021	0,1011	0,1014	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
15 a 19 años	0,0064	0,0075	0,0092	0,0337	0,1412	0,1026	0,0126	0,0143	0,0208	0,1106	0,1647	0,1313	0,0561	0,0523	0,1250	1,3066	0,3847	0,5593
20 a 24 años	0,0060	0,0092	0,0091	0,0108	0,1533	0,1076	0,0072	0,0108	0,0107	0,0189	0,0672	0,1081	0,0413	0,0483	0,0685	0,1726	0,6871	1,2535
25 a 29 años	0,0062	0,0094	0,0109	0,0100	0,1432	0,1154	0,0067	0,0111	0,0124	0,0115	0,0748	0,1407	0,0391	0,0587	0,0882	0,0640	0,6470	0,4266
30 a 39 años	0,0046	0,0065	0,0093	0,0074	0,1024	0,0647	0,0049	0,0075	0,0104	0,0081	0,0468	0,0548	0,0300	0,0377	0,0753	0,0585	0,3054	0,4447
40 a 49 años	0,0051	0,0064	0,0115	0,0091	0,1134	0,0415	0,0053	0,0073	0,0133	0,0099	0,0411	0,0308	0,0322	0,0445	0,0854	0,0550	0,3092	0,2269
50 a 59 años	0,0068	0,0084	0,0162	0,0128	0,1611	0,0351	0,0077	0,0103	0,0204	0,0150	0,0576	0,0300	0,0406	0,0549	0,1234	0,0724	0,3536	0,1374
60 ó más años	0,0072	0,0084	0,0188	0,0193	0,1422	0,0181	0,0109	0,0144	0,0329	0,0241	0,0804	0,0182	0,0540	0,0750	0,1562	0,1260	0,3619	0,0748
Hombres	0,0030	0,0037	0,0084	0,0086	0,0084	0,0158	0,0045	0,0057	0,0104	0,0099	0,0487	0,0375	0,0228	0,0205	0,0444	0,0902	0,1514	0,1111
0 a 4 años	0,0067	0,0000	0,0000	0,0000	0,0068	0,0192	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0097	0,0106	0,0000	0,0000	0,0194	0,0471	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,0073	0,0057	0,3195	0,0000	0,1142	0,0711	0,0646	0,0654	0,8678	0,0000	0,1097	0,2650	0,1235	0,1237	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
15 a 19 años	0,0096	0,0106	0,0157	0,0552	0,1904	0,1177	0,0218	0,0209	0,0464	0,2467	0,4696	0,1948	0,0613	0,0535	0,1888	1,4083	0,4174	0,5703
20 a 24 años	0,0099	0,0139	0,0175	0,0216	0,1477	0,1366	0,0126	0,0154	0,0214	0,0449	0,1424	0,2022	0,0504	0,0553	0,0884	0,3017	0,3412	1,1150
25 a 29 años	0,0105	0,0142	0,0212	0,0206	0,1484	0,1403	0,0118	0,0157	0,0235	0,0253	0,1722	0,2166	0,0463	0,0618	0,1010	0,0937	0,5515	0,4778
30 a 39 años	0,0085	0,0106	0,0182	0,0189	0,0978	0,0819	0,0087	0,0116	0,0198	0,0168	0,0964	0,1054	0,0727	0,0395	0,1060	0,4459	0,2943	0,3815
40 a 49 años	0,0088	0,0107	0,0236	0,0176	0,1183	0,0680	0,0096	0,0118	0,0261	0,0188	0,1019	0,0732	0,0385	0,0475	0,1030	0,0795	0,3270	0,2760
50 a 59 años	0,0116	0,0145	0,0323	0,0228	0,1267	0,0589	0,0132	0,0165	0,0375	0,0260	0,1015	0,0669	0,0477	0,0634	0,1385	0,0905	0,3935	0,1662
60 ó más años	0,0119	0,0145	0,0336	0,0263	0,1797	0,0385	0,0176	0,0220	0,0540	0,0374	0,1626	0,0435	0,0576	0,0778	0,1793	0,1349	0,3939	0,0877
Mujeres	0,0029	0,0036	0,0073	0,0075	0,0097	0,0149	0,0054	0,0079	0,0116	0,0098	0,0544							

MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Estimaciones Est Regr Raz (b opt)	BTTPV						Estudiando						Pensionado o Jubilado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	4.974	2.464	1.485	899	24	102	84.326	57.018	14.134	11.806	1.121	246	16.251	7.276	2.823	3.578	373	2.201
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	120	114	0	0	0	5	44.137	42.748	612	0	588	190	59	2	0	0	0	57
15 a 19 años	2.018	1.228	718	26	11	35	26.800	12.571	10.443	3.398	362	25	162	49	10	0	6	97
20 a 24 años	1.646	673	533	399	0	41	9.138	795	2.160	6.082	101	0	192	70	31	0	5	85
25 a 29 años	759	293	127	315	8	15	2.156	220	455	1.452	29	0	238	98	24	0	21	95
30 a 39 años	431	156	106	159	5	5	1.034	165	195	644	25	5	570	223	106	41	57	142
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	366	170	55	125	10	5	950	419	224	175	38	95
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	135	60	20	55	0	0	2.351	888	467	804	39	155
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	559	290	195	50	5	20	11.729	5.526	1.962	2.558	208	1.475
Hombres	3.112	1.820	807	397	15	73	40.479	28.475	6.050	5.268	591	95	9.032	4.320	1.516	1.875	196	1.126
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	94	89	0	0	0	5	22.104	21.435	276	0	313	80	38	-3	0	0	0	42
15 a 19 años	1.383	938	398	21	5	20	12.561	6.316	4.508	1.536	196	5	109	46	0	0	6	57
20 a 24 años	958	476	293	157	0	32	4.110	351	935	2.769	56	0	116	51	15	0	0	51
25 a 29 años	441	209	68	144	4	15	953	110	178	660	5	0	174	73	15	0	11	76
30 a 39 años	236	108	48	74	5	0	353	40	65	228	15	5	397	173	65	15	42	102
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	144	75	30	35	5	0	583	323	107	71	27	55
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	35	15	0	20	0	0	1.092	515	195	265	33	85
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	219	134	59	20	0	5	6.522	3.141	1.121	1.524	77	658
Mujeres	1.862	644	677	502	9	29	43.847	28.543	8.085	6.538	531	150	7.219	2.956	1.307	1.703	177	1.076
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	26	25	0	0	0	0	22.034	21.313	336	0	275	110	21	6	0	0	0	15
15 a 19 años	635	291	320	5	5	15	14.239	6.255	5.935	1.862	166	20	53	3	10	0	0	40
20 a 24 años	688	197	240	242	0	10	5.028	444	1.225	3.313	45	0	75	20	16	0	5	35
25 a 29 años	318	93	59	171	4	0	1.203	110	277	792	24	0	64	25	9	0	10	20
30 a 39 años	195	48	58	84	0	5	682	125	131	416	10	0	172	49	42	26	15	40
40 a 49 años	0	0	0	0	0	0	221	95	25	91	5	5	367	95	117	104	11	39
50 a 59 años	0	0	0	0	0	0	100	45	20	35	0	0	1.259	373	272	539	6	70
60 ó más años	0	0	0	0	0	0	341	155	135	30	5	15	5.207	2.385	841	1.034	131	817

Coeff de Variación

Est Regr Raz (b opt)	BTTPV						Estudiando						Pensionado o Jubilado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0,0216	0,0273	0,0424	0,0568	0,2669	0,1844	0,0045	0,0046	0,0153	0,0119	0,0595	0,1160	0,0132	0,0177	0,0348	0,0294	0,1047	0,0389
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,0944	0,0967	0,0000	0,0000	0,0000	0,4634	0,0057	0,0044	0,2559	0,0000	0,0828	0,1219	0,1641	2,8167	0,0000	0,0000	0,0000	0,1207
15 a 19 años	0,0331	0,0342	0,0555	1,1903	0,5159	0,3319	0,0085	0,0120	0,0115	0,0332	0,1037	0,6297	0,1298	0,2946	0,9530	0,0000	0,1510	0,1229
20 a 24 años	0,0391	0,0596	0,0712	0,0780	0,0000	0,2820	0,0148	0,1119	0,0332	0,0112	0,2140	0,0000	0,1312	0,2522	0,4027	0,0000	0,6904	0,1441
25 a 29 años	0,0575	0,0906	0,2035	0,0688	0,3666	0,4706	0,0322	0,2078	0,0815	0,0243	0,3704	0,0000	0,0882	0,1318	0,3997	0,0000	0,1874	0,1356
30 a 39 años	0,0679	0,1184	0,1525	0,0945	0,3492	1,0062	0,0440	0,1817	0,1239	0,0359	0,2612	0,6110	0,0680	0,1060	0,1597	0,4507	0,1233	0,1138
40 a 49 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0791	0,1119	0,2815	0,1165	0,4115	0,3880	0,0530	0,0734	0,1020	0,1381	0,2262	0,2156
50 a 59 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0787	0,1128	0,2906	0,1049	0,0000	0,0000	0,0353	0,0568	0,0802	0,0500	0,3797	0,2170
60 ó más años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0584	0,0758	0,0901	0,3120	1,0567	0,1228	0,0156	0,0197	0,0430	0,0360	0,1639	0,0480
Hombres	0,0263	0,0290	0,0595	0,0920	0,3202	0,2099	0,0062	0,0062	0,0233	0,0176	0,0811	0,1865	0,0173	0,0221	0,0468	0,0403	0,1452	0,0549
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,0812	0,0828	0,0000	0,0000	0,0000	0,4084	0,0076	0,0059	0,3726	0,0000	0,1149	0,1835	0,0759	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0697
15 a 19 años	0,0372	0,0356	0,0767	1,0510	0,7930	0,4716	0,0122	0,0161	0,0177	0,0493	0,1372	1,8729	0,1101	0,2071	0,0000	0,0000	0,1073	0,1259
20 a 24 años	0,0520	0,0673	0,1003	0,1412	0,0000	0,3213	0,0214	0,1660	0,0493	0,0163	0,2592	0,0000	0,1578	0,2358	0,5173	0,0000	0,0000	0,2292
25 a 29 años	0,0718	0,0929	0,2772	0,1068	0,2905	0,3692	0,0431	0,2451	0,1225	0,0321	1,2634	0,0000	0,0930	0,1234	0,4226	0,0000	0,2315	0,1541
30 a 39 años	0,0944	0,1379	0,2607	0,1430	0,3633	0,0000	0,0716	0,4338	0,1831	0,0584	0,3315	0,0000	0,0683	0,0949	0,1925	0,8642	0,1128	0,1043
40 a 49 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1224	0,1575	0,3091	0,2595	0,5511	0,0000	0,0609	0,0700	0,1507	0,2351	0,2081	0,2419
50 a 59 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,1277	0,2391	0,0000	0,1331	0,0000	0,0000	0,0507	0,0677	0,1258	0,0998	0,2963	0,2533
60 ó más años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0922	0,1028	0,1796	0,5017	0,0000	0,2754	0,0210	0,0263	0,0559	0,0443	0,3298	0,0794
Mujeres	0,0358	0,0614	0,0588	0,0689	0,3834	0,3245	0,0064	0,0068	0,0201	0,0161	0,0868	0,1449	0,0201	0,0287	0,0517	0,0431	0,1389	0,0538
0 a 4 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5 a 9 años	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10 a 14 años	0,1675	0,1679	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0093	0,0064	0,3465	0,0000	0,1199	0,1594	0,3647	0,9626	0,0000	0,0000	0,0000	0,3440
15 a 19 años	0,0654	0,0854	0,0797	4,1737	0,5722	0,4444	0,0118											

MUNICIPIO SUCRE (cont.)

Estimaciones Est Regr Raz (b opt)	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	210.644	95.854	22.729	10.652	59.144	22.265
0 a 4 años	51.160	40	0	0	40.587	10.532
5 a 9 años	51.886	31.381	7	0	16.217	4.280
10 a 14 años	4.448	3.581	58	0	248	560
15 a 19 años	10.524	7.201	2.577	125	243	378
20 a 24 años	12.519	7.418	3.752	829	216	303
25 a 29 años	10.437	5.951	2.803	1.154	260	269
30 a 39 años	18.509	10.515	4.127	2.970	384	512
40 a 49 años	16.661	9.981	3.374	2.299	244	762
50 a 59 años	13.692	7.883	2.645	1.797	211	1.157
60 ó más años	20.809	11.901	3.385	1.478	533	3.512
<b>Hombres</b>	72.808	28.103	3.530	1.881	29.678	9.616
0 a 4 años	26.101	22	0	0	20.535	5.544
5 a 9 años	26.209	15.688	3	0	8.191	2.326
10 a 14 años	2.331	1.805	41	0	139	346
15 a 19 años	3.498	2.372	774	35	104	212
20 a 24 años	2.582	1.523	634	186	116	123
25 a 29 años	1.771	950	370	256	126	69
30 a 39 años	2.722	1.446	575	401	141	159
40 a 49 años	2.354	1.383	390	342	100	138
50 a 59 años	2.009	1.102	320	327	65	194
60 ó más años	3.231	1.812	422	332	159	505
<b>Mujeres</b>	137.836	67.751	19.199	8.771	29.466	12.649
0 a 4 años	25.059	19	0	0	20.052	4.989
5 a 9 años	25.677	15.693	4	0	8.026	1.954
10 a 14 años	2.117	1.776	17	0	109	215
15 a 19 años	7.026	4.829	1.803	90	139	165
20 a 24 años	9.937	5.895	3.118	643	100	180
25 a 29 años	8.666	5.001	2.433	898	134	200
30 a 39 años	15.787	9.070	3.552	2.569	243	354
40 a 49 años	14.306	8.598	2.984	1.956	144	624
50 a 59 años	11.683	6.780	2.324	1.470	145	963
60 ó más años	17.578	10.089	2.963	1.145	374	3.007

Coef de Variación  
Est Regr Raz (b opt)

Estimaciones Est Regr Raz (b opt)	Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
<b>Total</b>	0,0032	0,0042	0,0090	0,0134	0,0067	0,0125
0 a 4 años	0,0043	0,0000	0,0000	0,0000	0,0043	0,0130
5 a 9 años	0,0066	0,0075	0,0000	0,0000	0,0125	0,0328
10 a 14 años	0,0242	0,0188	0,6589	0,0000	0,2474	0,0768
15 a 19 años	0,0158	0,0140	0,0234	0,3177	0,3753	0,1684
20 a 24 años	0,0147	0,0151	0,0178	0,0541	0,4646	0,2279
25 a 29 años	0,0162	0,0172	0,0221	0,0366	0,3536	0,2357
30 a 39 años	0,0124	0,0133	0,0209	0,0202	0,3170	0,1662
40 a 49 años	0,0129	0,0129	0,0239	0,0248	0,4765	0,1031
50 a 59 años	0,0144	0,0149	0,0285	0,0308	0,5031	0,0604
60 ó más años	0,0114	0,0118	0,0275	0,0483	0,2387	0,0232
<b>Hombres</b>	0,0053	0,0077	0,0172	0,0237	0,0084	0,0187
0 a 4 años	0,0067	0,0000	0,0000	0,0000	0,0068	0,0192
5 a 9 años	0,0097	0,0106	0,0000	0,0000	0,0194	0,0471
10 a 14 años	0,0297	0,0241	0,4192	0,0000	0,2935	0,0894
15 a 19 años	0,0278	0,0246	0,0318	0,4773	0,5642	0,1934
20 a 24 años	0,0319	0,0337	0,0352	0,0867	0,4010	0,2849
25 a 29 años	0,0370	0,0422	0,0476	0,0515	0,3008	0,4021
30 a 39 años	0,0307	0,0350	0,0389	0,0413	0,3500	0,2198
40 a 49 años	0,0333	0,0338	0,0532	0,0472	0,4735	0,2322
50 a 59 años	0,0342	0,0381	0,0601	0,0458	0,6018	0,1466
60 ó más años	0,0290	0,0308	0,0619	0,0685	0,3512	0,0726
<b>Mujeres</b>	0,0040	0,0050	0,0107	0,0163	0,0099	0,0168
0 a 4 años	0,0056	0,0000	0,0000	0,0000	0,0054	0,0181
5 a 9 años	0,0089	0,0105	0,0000	0,0000	0,0161	0,0473
10 a 14 años	0,0374	0,0288	1,7192	0,0000	0,3913	0,1436
15 a 19 años	0,0190	0,0170	0,0301	0,3961	0,4854	0,2928
20 a 24 años	0,0163	0,0170	0,0210	0,0676	0,8078	0,3208
25 a 29 años	0,0177	0,0189	0,0259	0,0471	0,5760	0,2711
30 a 39 años	0,0132	0,0145	0,0252	0,0239	0,3947	0,2107
40 a 49 años	0,0138	0,0140	0,0279	0,0297	0,6840	0,1077
50 a 59 años	0,0156	0,0163	0,0336	0,0386	0,6173	0,0636
60 ó más años	0,0123	0,0129	0,0318	0,0623	0,2825	0,0233