UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y SOCIALES
ESCUELA DE ESTADÍSTICA Y CIENCIAS ACTUARIALES

DESARROLLO DE ESTIMADORES INDIRECTOS DE REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE

Prof. Harold David Martín-Caro Malavé

Trabajo presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para ascender a la categoría de Profesor Titular

Caracas
Septiembre, 2016

En el desarrollo de este trabajo, agradezco la solidaridad, apoyo incondicional y comprensión de mi esposa Hellen. La formación, sólida y dedicada, desde mis días de alumno y como docente, de mis profesores Guillermo Ramírez, Adelmo Fernández y Luis Armando Rodríguez, con quien tengo 26 años compartiendo el dictado de asignaturas de muestreo, y de Luis Montero, quien sembró en mi la semilla del muestreo hace 29 años, de la cual no me he separado.

Dedico este trabajo a mi esposa, por su sacrificio y apoyo, a mis padres por los valores y disciplina inculcados, a mis hermanos por su apoyo y ánimo, y especialmente a mi hermana María Fernanda, por ser fuente de inspiración.

A la memoria de mis abuelas Julia y Cristina.

ACTA DE ASCENSO A LA CATEGORIA DE TITULAR
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS Y SOCIALES
ESCUELA DE ESTADISTICA Y CIENCIAS ACTUARIALES
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA

Quienes suscriben, miembros del Jurado designado por el Consejo de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales y por el Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo de Ascenso presentado por el Profesor **HAROLD DAVID MARTIN-CARO MALAVE, C.I. 6.461.840**, bajo el título **"DESARROLLO DE ESTIMADORES INDIRECTOS DE REGRESION LINEAL MULTIPLE"**, a los fines de su ascenso en el escalafón docente a la categoría de **TITULAR**, dejan constancia de lo siguiente:

1. Leído como fue dicho Trabajo por cada uno de los miembros del Jurado, se fijó el día 7 de noviembre de dos mil dieciséis, a las 2pm para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la Sala de Conferencias del Postgrado en Estadística de la UCV, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió a las preguntas que le fueron formuladas, todo ello conforme a lo dispuesto en el Artículo 96 del Reglamento del Personal Docente y de Investigación de la Universidad Central de Venezuela.

2.- Finalizada la defensa del Trabajo de Ascenso, el Jurado decidió por **UNANIMIDAD**, de acuerdo al Artículo 97 del Reglamento citado, **ADMITIRLO**, por considerar sin hacerse solidario de las ideas expuestas por el autor, que se trata de un trabajo personal que significa un aporte a la materia por cuanto se desarrolla y fundamenta en detalle una generalización de los estimadores de regresión lineal al caso de varias variables, en el contexto de la teoría del muestreo, todo de conformidad a lo pautado en los Artículos 77 y siguientes del Reglamento del Personal Docente y de Investigación de la Universidad Central de Venezuela.

En fe de los cual se levanta la presente Acta, en Caracas a los siete días del mes de noviembre de dos mil dieciséis, dejándose también constancia de que conforme al Artículo 93 del Reglamento citado, que actuó como Coordinador del Jurado el profesor **GUILLERMO RAMÍREZ**.

Profesor **GUILLERMO RAMIREZ**
Por el Consejo de la Facultad
Titular FaCES
Coordinador

Profesor **FELIX SEIJAS ZERPA**
Por el Consejo de la Facultad
Titular FaCES

Profesor **JUAN GUEVARA**
Por el Consejo de Desarrollo
Científico y Humanístico
Titular Facultad de Ciencias

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
Facultad de Ciencias Económicas y Sociales
Consejo de la Facultad
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA

RESUMEN

En el presente trabajo se plantean y se generan, por primera vez, los "**Estimadores de Regresión Lineal Múltiple**", que consisten en la generalización de los estimadores de regresión lineal, que utilizan una variable auxiliar y que en este desarrollo se denominan "Estimadores de Regresión Lineal Simple".

En el enfoque utilizado se integra la generación de los estimadores propiamente con el desarrollo de su esperanza, sesgo, varianza, y error cuadrático medio, utilizando rigurosos procedimientos matemáticos, todos a partir de la distribución muestral, que garantizan resultados válidos, haciendo un análisis exhaustivo de los estimadores en el muestreo aleatorio simple y el muestreo estratificado, y en éste se trabaja cada componente de manera separada y combinada, y con capítulos separados para los casos de una, dos, tres y *k* variables auxiliares.

Este trabajo es de carácter teórico y se centra en la formulación y desarrollo de los estimadores. Luego se comparan con los estimadores directos y los otros estimadores indirectos conocidos, de razón y de regresión lineal simple, así como con los estimadores de razón-regresión y de regresión-razón, formulados por el autor (Martín-Caro 2010), de forma analítica y práctica. En principio sobre poblacionales artificiales pequeñas y controlables, generando todas las muestras posibles, para determinar cuando resulta ventajosa su aplicación. Luego se trabaja con un universo real, utilizando data del XIII Censo de Población y Vivienda de Venezuela, llevado a cabo en 2001.

En el trabajo se evidencia que los estimadores propuestos -de regresión lineal múltiple-, mejoran la precisión de otros estimadores, y cuando se determinan los coeficientes de forma que minimicen su varianza, se obtiene la mayor precisión, que además mejora a medida que se agregan variables auxiliares.

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

El muestreo es cada vez más utilizado, va ganando adeptos y se va ampliando su campo de aplicación, sin embargo, para garantizar su buen uso, se deben cuidar diversos aspectos, que se pueden agrupar en 5 componentes, según Deming (1960, pp. 38-39),

- marco muestral
- procedimiento de selección de la muestra
- estimadores a utilizar
- fórmulas para estimar el error estándar y el sesgo de los estimadores
- evaluación de los errores no muestrales

Todos los componentes, sobre todo del primero al cuarto, están muy relacionados entre sí, el marco muestral condiciona el procedimiento de selección a aplicar, éste a su vez, a los estimadores a utilizar, y éste a las fórmulas del error estándar y el sesgo. Haciendo énfasis en los estimadores, se pueden agrupar en dos tipos: directos e indirectos. Ambos consideran los tamaños poblaciones y muestrales, pero los primeros utilizan información de la variable a estimar, proveniente de la muestra y los estimadores indirectos, además de esto, incorporan el uso de “variables auxiliares”, que son variables diferentes a la variables a estimar, con información proveniente de la muestra y del universo, que de acuerdo a su tratamiento se tienen “estimadores del tipo razón”, “estimadores del tipo regresión lineal”, que son los estimadores más ampliamente conocidos y expuestos en todos los textos de muestreo, que utilizan una variables auxiliar, otros son los estimadores indirectos compuestos, del tipo “razón-regresión” y “regresión-razón” (Martín-Caro 2010), que utilizan dos variables auxiliares y consisten en hacer uso simultáneo de los estimadores anteriores.

A partir del desarrollo de los estimadores de razón-regresión y de regresión-razón, que utilizan dos variables auxiliares, surge la iniciativa de analizar y evaluar la factibilidad y el impacto de añadir más variables auxiliares a los estimadores, como resultado se tiene el planteamiento y desarrollo de los “estimadores de regresión lineal múltiple”, que se plantean, se definen, se desarrollan y se aplican en este trabajo.

Cabe destacar que no cualquier variable puede ser usada como auxiliar, en general debe estar altamente correlacionada con la variable a estimar, definido por algunas condiciones específicas, además se deben conocer valores poblacionales como el total, promedio o proporción. Por otra parte, generalmente los estimadores directos son insesgados, por su parte, los indirectos pueden ser sesgados o insesgados, pero aun así, en muestras grandes y con relaciones convenientes entre variables, los estimadores indirectos pueden ser más precisos que los estimadores directos.

En este sentido, en este trabajo se plantean y generan, por primera vez, los "**Estimadores de Regresión Lineal Múltiple"**, que consisten en estimadores de regresión lineal con varias variables auxiliares, que pueden ser 1, 2, 3, …, *k*, donde, por supuesto, con una variable auxiliar es el estimador de regresión lineal conocido, que para diferenciarlo, en este trabajo se denominará **"Estimador de Regresión Lineal Simple"**.

Este trabajo es de carácter teórico y como tal se centra en la formulación teórica del Estimador de Regresión Lineal Múltiple, así se van planteando, definiendo y desarrollando analíticamente uno a uno los diferentes casos, con 1, 2, 3 y *k* variables auxiliares, en el muestreo aleatorio simple y en el muestreo estratificado, tanto el estimador propiamente, como sus varianzas, sesgos y errores cuadráticos medios, así como los estimadores de éstos.

En cada caso se va probando como todos los estimadores conocidos se pueden expresar como casos particulares del estimador de regresión lineal múltiple, así es el caso del estimador directo, de razón, de regresión lineal simple, de razón-regresión y de regresión-razón, además, se observa en la mayoría de los casos trabajados, que al añadir una nueva variable auxiliar, mejora la precisión del estimador.

El desarrollo se hace a partir de la distribución muestral, se plantean los estimadores, luego se desarrollan las esperanzas, sesgos, varianzas y los errores cuadráticos medios. Luego se van trabajando hasta llegar a expresiones finales manejables.

Es importante recalcar que el procedimiento que se aplicará en el desarrollo de los estimadores ya fue utilizado en Martín-Caro (2006 y 2010) para el desarrollo de los estimadores indirectos sencillos y estimadores indirectos compuestos respectivamente, probando su validez.

Por último se hacen unas pruebas prácticas, con una data artificial pequeña, donde se puede trabajar a partir de la distribución muestral y luego con una data real grande, correspondiente al XIII Censo de Población y Vivienda de Venezuela, llevado a cabo en 2001.

Si bien desde hace mucho tiempo se ha trabajado los modelos de regresión lineal múltiple en métodos multivariantes, incluso como modelos de pronóstico, el uso de estimadores de regresión lineal en muestreo ha estado supeditado al caso de una variable, y aunque algunos autores han desarrollado diferentes planteamientos, no se ha encontrado desarrollos similares. Así, el Instituto Vasco de Estadística (España, EUSTAT., 2009) plantea un estimador de regresión generalizado, utilizando modelos de regresión como un medio para conseguir estimadores consistentes, en muestreo estratificado, resultando el estimador del total en el estrato *h*,

$$\hat{Y}_{lrhG} = \sum_{j=1}^{N_h} \hat{y}_{hj} + \sum_{j=1}^{n_h} W_h \left(y_{hj} - \hat{y}_{hj} \right)$$

donde $\hat{y}_{hj}$ son valores predichos por un modelo dado en el estrato *h* y W_h es el peso del estrato, $W_h = \frac{N_h}{N}$.

Este tipo de estimadores ha sido propuesto fundamentalmente por Särndal, Swensson y Wrettman (1989).

El mismo Instituto (España, EUSTAT., 2009) plantea un estimador compuesto, que resulta una combinación lineal de dos estimadores, uno directo ($\hat{Y}_{h.D}$) y otro indirecto ($\hat{Y}_{h.I}$), también en muestreo estratificado, de la forma,

$$\hat{Y}_{h.C} = \phi_h \hat{Y}_{h.D} + (1-\phi_h)\hat{Y}_{h.I}$$

donde ϕ_h es el peso de estimador directo en el estrato h y $0 \le \phi_h \le 1$.

Pfefferman (2002) propone algo similar,

$$\hat{Y}_{h.C} = \phi \hat{Y}_{h.D} + (1-\phi)\hat{Y}_{h.SYN}$$

donde $\phi_h = \dfrac{n_h}{N_h}$ y $\hat{Y}_{h.SYN} = X_h \dfrac{\sum_{h=1}^{L}\sum_{j=1}^{n_h} W_h y_{hj}}{\sum_{h=1}^{L}\sum_{j=1}^{n_h} W_h x_{hj}}$ es un estimador de razón combinado.

Cabe destacar que la notación es diferente y ha sido adaptada a la utilizada en el presente trabajo.

Estos estimadores son combinaciones lineales de un estimador directo y uno indirecto, pero sólo incluyen una variable auxiliar.

Alex Costa Saenz de San Pedro (Institut d'Estadistica de Catalunya), Albert Satorra (Universitat Pompeu Fabra) y Eva Ventura (Universitat Pompeu Fabra), también utilizan este enfoque de combinación lineal entre un estimador directo y otro indirecto, en diferentes trabajos (2002, 2003, 2004 y 2008), pero en ningún caso aplican un estimador de regresión múltiple.

1.- ESTIMADORES DE REGRESIÓN LINEAL SIMPLE EN MUESTREO ALEATORIO SIMPLE

En Martín-Caro (2006), se tiene el desarrollo de los estimadores indirectos con una variable auxiliar, a partir de la distribución muestral, y como uno de los casos, se tiene el estimador de regresión lineal. En Martín-Caro (2010) a éstos estimadores se les denominó “estimadores indirectos sencillos”, ya que en esa oportunidad se desarrollaron los “estimadores indirectos compuestos”. La metodología que se siguió en ambos trabajos es la misma que se seguirá en el desarrollo de los Estimadores de Regresión Lineal Múltiple, que se presenta en el actual trabajo. Igualmente, se utilizará la misma notación base.

A lo largo del trabajo, se presentarán y desarrollarán los estimadores de regresión lineal con más de una variable auxiliar, primero con 2, luego con 3 y posteriormente con k variables auxiliares, que se denominarán “estimadores de regresión lineal múltiple”, al estimador de regresión lineal con una variable auxiliar se le denominará “estimador de regresión lineal simple”.

A todos los efectos de desarrollos posteriores, se supondrán universos de tamaño N, y se trabajarán cuatro variables, “y”, “x”, “z”, “t”. Así, las observaciones poblacionales serán $y_1, y_2, \ldots, y_N$; $x_1, x_2, \ldots, x_N$; $z_1, z_2, \ldots, z_N$; $t_1, t_2, \ldots, t_N$ respectivamente. Para el desarrollo teórico, se supondrá que de dicho universo se extraerá una muestra, que en algunos casos será aleatoria simple y en otros estratificada, los cuales serán indicados en su oportunidad. Cuando el universo se arregle en estratos, los tamaños de cada uno serán $N_1, N_2, \ldots, N_L$, donde L es el total de estratos y las observaciones se definirán por y_{hi}, x_{hi}, z_{hi}, t_{hi} , para indicar el valor de y, x, z o t en el elemento i-ésimo del estrato h.

Tal como se comentó, en Martín-Caro (2006), se hace un desarrollo minucioso de los estimadores de regresión lineal (llamados aquí “estimadores de regresión lineal simple”), tanto para el muestreo aleatorio simple como estratificado, de manera que en este trabajo no se hará mayor énfasis en su desarrollo, sino en mostrarlos, a fin de no perder foco en el planteamiento central, que es el desarrollo de los estimadores de regresión lineal múltiple.

La notación es la siguiente,

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N} = \text{promedio poblacional de la variable } y$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \text{promedio poblacional de la variable } x$$

$$\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^{N} z_i}{N} = \text{promedio poblacional de la variable } z$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \text{promedio muestral de la variable } y$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \text{promedio muestral de la variable } x$$

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n} = \text{promedio muestral de la variable } z$$

1.1.- Estimadores, Esperanzas y Errores Cuadráticos Medios

Los estimadores de regresión lineal simple se definen como

$$\hat{\bar{Y}}_{lr} = \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}) \quad , \quad \hat{Y}_{lr} = N\hat{\bar{Y}}_{lr} = \hat{Y} + b(X - \hat{X})$$

y sus esperanzas, sesgos, varianzas y errores cuadráticos medios son, para el estimador del promedio,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \bar{Y} - COV(b,\bar{x})$$

$$B(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = COV(b,\bar{x})$$

$$V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) \quad = V(\bar{y}) + E(b^2\bar{x}^2) - \left(E(b\bar{x})\right)^2 + \bar{X}^2 E(b^2) - \bar{X}^2\left(E(b)\right)^2 + 2\bar{X}E(b\bar{y}) - 2E(b\bar{x}\bar{y}) -$$

$$-2\bar{X}E(b^2\bar{x}) + 2\bar{Y}E(b\bar{x}) - 2\bar{X}\bar{Y}E(b) + 2\bar{X}E(b)E(b\bar{x})$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\bar{y}) + E(b^2\bar{x}^2) + \bar{X}^2 E(b^2) + 2\bar{X}E(b\bar{y}) - 2E(b\bar{x}\bar{y}) - 2\bar{X}E(b^2\bar{x}) + 2\bar{Y}E(b\bar{x}) - 2\bar{X}\bar{Y}E(b)$$

para el estimador del total,

$$E(\hat{Y}_{lr}) = Y - COV(b,\hat{X})$$

$$B(\hat{Y}_{lr}) = COV(b,\hat{X})$$

$$V(\hat{Y}_{lr}) \quad = V(\hat{Y}) + E(b^2\hat{X}^2) - \left(E(b\hat{X})\right)^2 + X^2 E(b^2) - X^2\left(E(b)\right)^2 + 2XE(b\hat{Y}) - 2E(b\hat{X}\hat{Y}) -$$

$$-2XE(b^2\hat{X}) + 2YE(b\hat{X}) - 2\bar{X}\bar{Y}E(b) + 2XE(b)E(b\hat{X})$$

$$ECM(\hat{Y}_{lr}) = V(\hat{Y}) + E(b^2\hat{X}^2) + X^2 E(b^2) + 2XE(b\hat{Y}) - 2E(b\hat{X}\hat{Y}) - 2XE(b^2\hat{X}) + 2YE(b\hat{X}) - 2XYE(b)$$

De manera que $\hat{\bar{Y}}_{lr}$ y $\hat{Y}_{lr}$ son estimadores sesgados. Pero si b es constante, entonces, $COV(b,\bar{x}) = COV(b,\hat{X}) = 0$, entonces $\hat{\bar{Y}}_{lr}$ y $\hat{Y}_{lr}$ son estimadores insesgados y sus errores cuadráticos medios son,

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\bar{y}) + b^2 V(\bar{x}) - 2bCOV(\bar{x},\bar{y})$$

donde, $V(\bar{y}) = \dfrac{(N-n)}{Nn} S_y^2$, $V(\bar{x}) = \dfrac{(N-n)}{Nn} S_x^2$, $COV(\bar{x}) = \dfrac{(N-n)}{Nn} S_{xy}$

entonces,

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \frac{(N-n)}{N\,n}\left[S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}\right] \quad , \quad ECM(\hat{Y}_{lr}) = \frac{N(N-n)}{n}\left[S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}\right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \frac{(N-n)}{N\,n}\left[s_y^2 + b^2 s_x^2 - 2bs_{xy}\right] \quad , \quad E\hat{C}M(\hat{Y}_{lr}) = \frac{N(N-n)}{n}\left[s_y^2 + b^2 s_x^2 - 2bs_{xy}\right]$$

1.2.- Casos Especiales

Se tienen unos casos especiales, de acuerdo al valor de *b*, que se describen a continuación.

1.2.1.- Estimador Directo

Cuando *b=0*, el estimador de regresión se transforma en el estimador directo, que es un estimador insesgado.

$$\hat{\hat{Y}}_{lr} = \bar{y} + 0(\bar{X} - \bar{x}) = \bar{y}$$

$$E(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \bar{Y}$$

$$B(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = 0$$

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = V(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \frac{(N-n)}{Nn} S_y^2$$

$$E\hat{C}M(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \hat{V}(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \frac{(N-n)}{Nn} s_y^2$$

1.2.2.- Estimador por Diferencia

Si $b=1$, se denomina el estimador por diferencia, ya que se corrige el promedio muestral sólo por la diferencia entre los promedios poblacional y muestral de la variable auxiliar; esto es,

$$\hat{\bar{Y}}_{lr} = \bar{y} + (\bar{X} - \bar{x})$$

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \bar{Y}$$

$$B(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = 0$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \frac{(N-n)}{Nn}\left[S_y^2 + S_x^2 - 2S_{xy}\right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \frac{(N-n)}{Nn}\left[s_y^2 + s_x^2 - 2s_{xy}\right]$$

1.2.3.- Estimador de Razón

Si $b = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$, entonces b no es constante y el estimador de regresión lineal toma la forma del estimador de razón,

$$\hat{\bar{Y}}_{lr} = \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}) = \bar{y} + \frac{\bar{y}}{\bar{x}}(\bar{X} - \bar{x}) = \bar{y} + \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{X} - \bar{y} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{X} = \hat{\bar{Y}}_R$$

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = E(\hat{\bar{Y}}_R) = \bar{Y}\left[1 + \frac{1-f}{n}\left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\,\bar{Y}}\right)\right]$$

$$V(\hat{\bar{Y}}_R) = V(\hat{\bar{Y}}_R) \approx \bar{Y}^2\left(\frac{1-f}{n}\right)\left[\frac{S_y^2}{\bar{Y}^2} + \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - 2\frac{S_{xy}}{\bar{X}\,\bar{Y}} - \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(\frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy}}{\bar{X}\,\bar{Y}}\right)^2\right]$$

$$B(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = B(\hat{\bar{Y}}_R) = \bar{Y}\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(\frac{S_{xy}}{\bar{X}\,\bar{Y}} - \frac{S_x^2}{\bar{X}^2}\right)$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = ECM(\hat{\bar{Y}}_R) \approx \bar{Y}^2\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(\frac{S_y^2}{\bar{Y}^2} + \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} - 2\frac{S_{xy}}{\bar{X}\,\bar{Y}}\right) = \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}\right)$$

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_R) = \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(s_y^2 + \hat{R}^2 s_x^2 - 2\hat{R}s_{xy}\right)$$

1.2.4.- Estimador de Varianza Mínima para *b* constante

Uno de los casos más importantes es el estimador de varianza mínima para *b* constante, donde se determina el valor de *b* que minimiza el *ECM* del estimador. Para ello se derivada $ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr})$, se iguala a cero y se despeja *b*. Luego se toma la segunda derivada para determinar si en ese punto hay un máximo o un mínimo. A dicho valor de *b* se denomina b_0 y su desarrollo es el siguiente,

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \frac{(N-n)}{N\,n}\left[S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}\right] = \frac{(N-n)}{N\,n}\left[S_y^2 + b_0^2 S_x^2 - 2b_0 S_{xy}\right]$$

Derivando respecto de b_0,

$$\frac{\partial V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_0} = \frac{N-n}{Nn}\left[2b_0 S_x^2 - 2S_{xy}\right] = 0$$

para que se cumpla la igualdad debe ocurrir uno de los siguientes casos,

$$\begin{cases} a) \quad n = N \\ ó \\ b) \quad 2b_0 S_x^2 - 2S_{xy} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} a) \quad n = N \\ ó \\ b) \quad b_1 S_x^2 - S_{xy} = 0 \end{cases}$$

no tiene sentido hacer $n=N$, ya que la investigación sería por enumeración completa y la varianza del estimador es igual a cero, porque se tiene el valor poblacional. Tomando el caso (b) y despejando b_0,

$$b_0 = \frac{S_{xy}}{S_x^2} \text{ , donde } S_x^2 > 0$$

Para verificar que haya un mínimo, se halla la segunda derivada y se verifica que sea mayor que cero en b_0. La segunda derivada es,

$\dfrac{\partial V(\hat{\hat{Y}}_{lr})}{\partial b_0} = 2\dfrac{N-n}{Nn} S_x^2 \geq 0$ y será estrictamente > 0 si $S_x^2 > 0$, que se cumple si x no es una constante.

es decir, si $n<N$ y $S_x^2 > 0$ (x no es una constante), cuando $b = b_0 = \dfrac{S_{xy}}{S_x^2}$ se minimiza $V(\hat{\hat{Y}}_{lr})$.

entonces, $$\hat{\hat{Y}}_{lr} = \bar{y} + \frac{S_{xy}}{S_x^2}(\bar{X} - \bar{x})$$

$$E(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \bar{Y}$$

$$B(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = 0$$

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \frac{(N-n)}{N\,n}\left[S_y^2 + \left(\frac{S_{xy}}{S_x^2}\right)^2 S_x^2 - 2\left(\frac{S_{xy}}{S_x^2}\right)S_{xy}\right] = \frac{(N-n)}{Nn}\left[S_y^2 + \frac{S_{xy}^2}{S_x^2} - 2\frac{S_{xy}^2}{S_x^2}\right]$$

$$= \frac{(N-n)}{Nn}\left[S_y^2 - \frac{S_{xy}^2}{S_x^2}\right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \frac{(N-n)}{Nn}\left[s_y^2 - \frac{s_{xy}^2}{s_x^2}\right]$$

1.3.- Comparación con el Estimador Directo

Para comparar la precisión del estimador de regresión lineal simple con la del directo, se deben comparar sus errores cuadráticos medios, que son,

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}\right)$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}) = \left(\frac{1-f}{n}\right) S_y^2$$

entonces, el estimador de regresión lineal simple será más preciso que el estimador directo si

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) < ECM(\hat{\bar{Y}})$$

es decir,

$$\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}\right) < \left(\frac{1-f}{n}\right) S_y^2$$

y esto se cumple si $b^2 S_x^2 - 2bS_{xy} < 0$, que si se iguala a cero es una ecuación de segundo grado, cuyas raíces son $b = 0$ y $b = 2\frac{S_{xy}}{S_x^2}$. Entonces,

$$\text{Si} \quad \begin{cases} b < 0 & \textit{entonces} \quad ECM(\hat{\bar{Y}}) < ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) \\ b = 0 & \textit{entonces} \quad ECM(\hat{\bar{Y}}) = ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) \\ 0 < b < 2\frac{S_{xy}}{S_x^2} & \textit{entonces} \quad ECM(\hat{\bar{Y}}) > ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) \\ b = 2\frac{S_{xy}}{S_x^2} & \textit{entonces} \quad ECM(\hat{\bar{Y}}) = ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) \\ b > 2\frac{S_{xy}}{S_x^2} & \textit{entonces} \quad ECM(\hat{\bar{Y}}) < ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) \end{cases}$$

pero si *b>0*, entonces

$$\text{Si} \begin{cases} b > 2\dfrac{S_{xy}}{S_x^2} & \textit{entonces} \quad ECM(\hat{\hat{Y}}) < ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) \\ b = 2\dfrac{S_{xy}}{S_x^2} & \textit{entonces} \quad ECM(\hat{\hat{Y}}) = ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) \\ b < 2\dfrac{S_{xy}}{S_x^2} & \textit{entonces} \quad ECM(\hat{\hat{Y}}) > ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) \end{cases}$$

o de otra forma,

$$\text{Si} \begin{cases} \rho < \dfrac{1}{2} b \dfrac{S_x}{S_y} & \textit{entonces} \quad ECM(\hat{\hat{Y}}) < ECM(\hat{\hat{Y}}_R) \\ \rho = \dfrac{1}{2} b \dfrac{S_x}{S_y} & \textit{entonces} \quad ECM(\hat{\hat{Y}}) = ECM(\hat{\hat{Y}}_R) \\ \rho > \dfrac{1}{2} b \dfrac{S_x}{S_y} & \textit{entonces} \quad ECM(\hat{\hat{Y}}) > ECM(\hat{\hat{Y}}_R) \end{cases}$$

para el caso de *b* constante que minimiza el error cuadrático medio, $b_0 = \dfrac{S_{xy}}{S_x^2}$, es decir, que siempre $b_0 < 2\dfrac{S_{xy}}{S_x^2}$, incluso, *b₀* está en justo en el medio del intervalo $\left(0\,,\, 2\dfrac{S_{xy}}{S_x^2}\right)$ y en consecuencia $\hat{\hat{Y}}_{lr}$ con b_0 siempre será más preciso que $\hat{\hat{Y}}$, y serán iguales sólo cuando $\rho_{yx} = 0$, ya que $\rho = \dfrac{1}{2} b_0 \dfrac{S_x}{S_y} = \dfrac{1}{2} \dfrac{S_{xy}}{S_x^2} \dfrac{S_x}{S_y} = \dfrac{1}{2}\rho$ y esto sólo se cumple cuando $\rho = 0$.

(Martín-Caro, 2010, pp. 164, 165)

1.4.- Comparación con el Estimador de Razón

Igual que en el apartado anterior, se compararán los errores cuadráticos medios de los estimadores de regresión lineal simple y de razón, que son,

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}\right)$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{R}) \approx \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}\right)$$

entonces, el estimador de regresión lineal simple será más preciso que el estimador de razón si

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) < ECM(\hat{\bar{Y}}_{R})$$

es decir,

$$\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}\right) < \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}\right)$$

$$S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy} < S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}$$

$$b^2 S_x^2 - 2bS_{xy} < R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}$$

esto es

$$b^2 S_x^2 - 2bS_{xy} - \left(R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}\right) < 0$$

que si se iguala a cero es una ecuación de segundo grado, y aplicando la fórmula general para hallar sus raíces, se tiene que,

$$b = \frac{2S_{xy} \pm \sqrt{(-2S_{xy})^2 + 4S_x^2(R^2 S_x^2 - 2RS_{xy})}}{2S_x^2} = \frac{2S_{xy} \pm \sqrt{\left(2RS_x^2 - 2S_{xy}\right)^2}}{2S_x^2} = \frac{S_{xy} \pm \left(RS_x^2 - S_{xy}\right)}{S_x^2}$$

y las dos raíces son $b_1 = R$, $b_2 = \dfrac{2S_{xy}}{S_x^2} - R$. De manera que,

$$\text{Si} \begin{cases} b < \min\{b_1, b_2\} & \textit{entonces} \;\; ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) > ECM(\hat{\hat{Y}}_R) \\ b = \min\{b_1, b_2\} & \textit{entonces} \;\; ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = ECM(\hat{\hat{Y}}_R) \\ \min\{b_1, b_2\} < b < \max\{b_1, b_2\} & \textit{entonces} \;\; ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) < ECM(\hat{\hat{Y}}_R) \\ b = \max\{b_1, b_2\} & \textit{entonces} \;\; ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = ECM(\hat{\hat{Y}}_R) \\ b > \max\{b_1, b_2\} & \textit{entonces} \;\; ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) > ECM(\hat{\hat{Y}}_R) \end{cases}$$

Cuando $b = b_0 = \dfrac{S_{xy}}{S_x^2}$, que es el valor de b que minimiza el Error Cuadrático Medio, siempre $ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) \leq ECM(\hat{\hat{Y}}_R)$, incluso b_0 está junto en la mitad del intervalo $\left(\min\{b_1, b_2\}, \max\{b_1, b_2\}\right)$, ya que si $b_1 < b_2$, la amplitud del intervalo es

$$\frac{2S_{xy}}{S_x^2} - R - R = 2\left(\frac{S_{xy}}{S_x^2} - R\right)$$

y el punto medio del intervalo es

$$R + \frac{1}{2}\left[2\left(\frac{S_{xy}}{S_x^2} - R\right)\right] = R + \left(\frac{S_{xy}}{S_x^2} - R\right) = \frac{S_{xy}}{S_x^2}.$$

Y si $b_1 > b_2$, la amplitud del intervalo es

$$R - \left(\frac{2S_{xy}}{S_x^2} - R\right) = 2\left(R - \frac{S_{xy}}{S_x^2}\right)$$

y el punto medio del intervalo es

$$\frac{2S_{xy}}{S_x^2} - R + \frac{1}{2}\left[2\left(R - \frac{S_{xy}}{S_x^2}\right)\right] = \frac{2S_{xy}}{S_x^2} - R + \left(R - \frac{S_{xy}}{S_x^2}\right) = \frac{S_{xy}}{S_x^2}.$$

La igualdad se da cuando $R = b_0 = \dfrac{S_{xy}}{S_x^2}$, es decir, cuando $\rho_{xy} = \dfrac{CV(x)}{CV(y)}$.

(Martín-Caro, 2006, p. 165)

2.- ESTIMADORES DE REGRESIÓN LINEAL CON DOS VARIABLES AUXILIARES EN MUESTREO ALEATORIO SIMPLE

En este caso se tienen dos variables auxiliares, que se denotarán por "*x*" y "*z*". La estructura del estimador del promedio de "*y*" viene dada por la expresión,

$$\hat{\bar{Y}}_{lr} = \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) + b_2(\bar{Z} - \bar{z})$$

Que se desarrollará a continuación.

2.1.- Estimadores

Sea un universo de *N* elementos, y sean $y_1, y_{2,..}, y_N$; $x_1, x_{2,..}, x_N$; $z_1, z_{2,..}, z_N$ las observaciones de las variables *y* , *x* , *z* sobre cada uno de ellos.

Se puede expresar a la variable *"y"* como una función lineal de *"x"* y de *"z"*, resultando un plano, de la siguiente manera,

$$y_i = a + b_1 x_i + b_2 z_i + e_i \tag{1}$$

donde *"a"* es el punto de corte del plano en el eje de la variable *"y"*, *"b_1"*, *"b_2"* las pendientes del plano y *"e_i"* es el desvío que tiene *"y_i"* respecto del plano, además,

$$e_i \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{N} e_i = 0$$

Sea
$$y'_i = a + b_1 x_i + b_2 z \tag{2}$$

un estimador de y_i , y se cumple que $\sum_{i=1}^{N} y_i = \sum_{i=1}^{N} y'_i$

ya que,

$$\sum_{i=}^{N} y_i = \sum_{i=1}^{N}(a+b_1 x_i + b_2 z_i + e_i) = Na + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + b_2 \sum_{i=1}^{N} z_i + \sum_{i=1}^{N} e_i = Na + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + b_2 \sum_{i=1}^{N} z_i = \sum_{i=1}^{N}(a+b_1 x_i + b_2 z_i) = \sum_{i=1}^{N} y'_i$$

Si se aplica a (1) sumatoria hasta *N* y luego se divide entre *N*, se tiene,

$$Y = \sum_{i=}^{N} y_i = Na + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + b_2 \sum_{i=1}^{N} z_i + \sum_{i=1}^{N} e_i = Na + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + b_2 \sum_{i=1}^{N} z_i \qquad y \qquad \overline{Y} = a + b_1 \overline{X} + b_2 \overline{Z} \tag{3}$$

si se toma una muestra de tamaño *n*, $n \leq N$, y se le aplica a (1) las mismas operaciones anteriores, pero hasta *n*, se tiene que,

$$\sum_{i=}^{n} y_i = na + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_2 \sum_{i=1}^{n} z_i + \sum_{i=1}^{n} e_i \qquad y \qquad \overline{y} = a + b_1 \overline{x} + b_2 \overline{z} + \overline{e} \tag{4}$$

donde $\overline{e}$ es el promedio muestral de los desvíos y además es diferente de cero. Restando (4) de (3),

$$\overline{Y} - \overline{y} = b_1 \overline{X} - b_1 \overline{x} + b_2 \overline{Z} - b_2 \overline{z} - \overline{e} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{Y} = \overline{y} + b_1 \overline{X} - b_1 \overline{x} + b_2 \overline{Z} - b_2 \overline{z} - \overline{e}$$

si se hace $e'_i = -e_i$, entonces $\overline{Y} = \overline{y} + b_1(\overline{X} - \overline{x}) + b_2(\overline{Z} - \overline{z}) + \overline{e}'$ (5)

El valor de *"a"* se puede obtener igualando (5) a (3), $a = \overline{y} - b_1 \overline{x} - b_2 \overline{z} + \overline{e}'$

Si los datos se comportan como un plano, entonces $\bar{e}=\bar{e}'=0$

de lo que puede decirse que un estimador del promedio poblacional es,

$$\hat{\bar{Y}}_{lr}=\bar{y}+b_1(\bar{X}-\bar{x})+b_2(\bar{Z}-\bar{z}) \tag{6}$$

y será bueno en la medida que e_i converja a cero, es decir, cuando y_i se aproxime al plano $a+b_1x+b_2z$. El estimador mostrado en (6) es el "estimador de regresión lineal del promedio poblacional" y el estimador del total viene dado por la expresión,

$$\hat{Y}_{lr}=N\hat{\bar{Y}}_{lr}=\hat{Y}+b_1(X-\hat{X})+b_2(Z-\hat{Z}) \tag{7}$$

2.2.- Esperanza de los Estimadores

Véase la esperanza del estimador de regresión lineal del promedio,

$$\begin{aligned} E(\hat{\bar{Y}}_{lr}) &= E\left[\bar{y}+b_1(\bar{X}-\bar{x})+b_2(\bar{Z}-\bar{z})\right]=E(\bar{y})+\bar{X}\,E(b_1)-E(b_1\bar{x})+\bar{Z}E(b_2)-E(b_2\bar{z}) \\ &=E(\bar{y})+E(\bar{x})E(b_1)-E(b_1\bar{x})+E(\bar{z})E(b_2)-E(b_2\bar{z}) \\ &=E(\bar{y})-\left[E(b_1\bar{x})-E(\bar{x})E(b_1)\right]-\left[E(b_2\bar{z})-E(\bar{z})E(b_2)\right]=\bar{Y}-COV(b_1,\bar{x})-COV(b_2,\bar{z}) \end{aligned} \tag{8}$$

por lo tanto, no es un estimador insesgado, y su sesgo es

$$B(\hat{\bar{Y}}_{lr})=\bar{Y}-E(\hat{\bar{Y}}_{lr})=\bar{Y}-\bar{Y}+COV(b_1,\bar{x})+COV(b_2,\bar{z})=COV(b_1,\bar{x})+COV(b_2,\bar{z}) \tag{9}$$

Al no ser un estimador insesgado, el error cuadrático medio es,

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr})=V(\hat{\bar{Y}}_{lr})+\left(B(\hat{\bar{Y}}_{lr})\right)^2$$

2.3.- Error Cuadrático Medio de los Estimadores

como ya se demostró, $B(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = COV(b_1,\bar{x}) + COV(b_2,\bar{z}) = E(b_1\bar{x}) - \bar{X}E(b_1) + E(b_2\bar{z}) - \bar{Z}E(b_2)$

entonces,

$$\left(B(\hat{\hat{Y}}_{lr})\right)^2 = \left(E(b_1\bar{x})\right)^2 + \bar{X}^2\left(E(b_1)\right)^2 + \left(E(b_2\bar{z})\right)^2 + \bar{Z}^2\left(E(b_2)\right)^2 -$$
$$-2\bar{X}\,E(b_1)\,E(b_1\bar{x}) + 2E(b_1\bar{x})E(b_2\bar{z}) - 2E(b_1\bar{x})\bar{Z}\,E(b_2) -$$
$$-2\bar{X}\,E(b_1)E(b_2\bar{z}) + 2\bar{X}\,\bar{Z}\,E(b_1)E(b_2) - 2\bar{Z}\,E(b_2)\,E(b_2\bar{z}) \quad (10)$$

Se procederá a hallar la varianza del estimador del promedio.

$$V(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = E\left[\hat{\hat{Y}}_{lr} - E(\hat{\hat{Y}}_{lr})\right]^2 = E\left(\hat{\hat{Y}}_{lr}^2\right) - \left[E(\hat{\hat{Y}}_{lr})\right]^2$$
$$= E(\hat{\hat{Y}}_{lr}^2) - \left[\bar{Y} - \left[E(b_1\bar{x}) - E(\bar{x})\,E(b_1)\right] - \left[E(b_2\bar{z}) - E(\bar{z})\,E(b_2)\right]\right]^2$$
$$= E(\hat{\hat{Y}}_{lr}^2) - \left[\bar{Y} - E(b_1\bar{x}) + E(\bar{x})\,E(b_1) - E(b_2\bar{z}) + E(\bar{z})\,E(b_2)\right]^2$$
$$= E(\hat{\hat{Y}}_{lr}^2) - \left[\bar{Y}^2 + \left(E(b_1\bar{x})\right)^2 + \bar{X}^2\left(E(b_1)\right)^2 + \left(E(b_2\bar{z})\right)^2 + \bar{Z}^2\left(E(b_2)\right)^2 -\right.$$
$$-2\bar{Y}E(b_1\bar{x}) + 2\bar{X}\bar{Y}\,E(b_1) - 2\bar{Y}E(b_2\bar{z}) + 2\bar{Y}\bar{Z}\,E(b_2) -$$
$$-2\bar{X}E(b_1\bar{x})E(b_1) + 2E(b_1\bar{x})E(b_2\bar{z}) - 2\bar{Z}\,E(b_1\bar{x})E(b_2) -$$
$$-2\bar{X}\,E(b_1)E(b_2\bar{z}) + 2\bar{X}\bar{Z}E(b_1)\,E(b_2) -$$
$$\left.-2\bar{Z}E(b_2\bar{z})\,E(b_2)\,\right] \quad (11)$$

$$= E(\hat{\bar{Y}}_{lr}^{2}) - \bar{Y}^{2} - \left(E(b_1\bar{x})\right)^2 - \bar{X}^{2}\left(E(b_1)\right)^2 - \left(E(b_2\bar{z})\right)^2 - \bar{Z}^{2}\left(E(b_2)\right)^2 +$$

$$+2\bar{Y}E(b_1\bar{x}) - 2\overline{YX}E(b_1) + 2\bar{Y}E(b_2\bar{z}) - 2\overline{YZ}E(b_2) +$$

$$+2E\bar{X}(b_1\bar{x})E(b_1) - 2E(b_1\bar{x})E(b_2\bar{z}) + 2\bar{Z}\,E(b_1\bar{x})E(b_2) +$$

$$+\,2\bar{X}E(b_1)E(b_2\bar{z}) - 2\overline{XZ}E(b_1)E(b_2) + 2\bar{Z}E(b_2\bar{z})E(b_2)$$

desarrollando $E(\hat{\bar{Y}}_{lr}^{2})$, se tiene,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lr}^{2}) = E\left[\left(\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) + b_2(\bar{Z} - \bar{z})\right)^2\right] = E\left[\left(\bar{y} + \bar{X}b_1 - b_1\bar{x} + \bar{Z}b_2 - b_2\bar{z}\right)^2\right]$$

$$= E\Big[\bar{y}^{2} + \bar{X}^{2}b_1^2 + b_1^2\bar{x}^{2} + \bar{Z}^{2}b_2^2 + b_2^2\bar{z}^{2} +$$

$$+2\bar{X}b_1\bar{y} - 2b_1\overline{xy} + 2\bar{Z}b_2\bar{y} - 2b_2\overline{yz} -$$

$$-2\bar{X}b_1^2\bar{x} + 2\overline{XZ}b_1b_2 - 2\bar{X}b_1b_2\bar{z} -$$

$$-2\bar{Z}b_1b_2\bar{x} + 2b_1b_2\overline{xz} -$$

$$-2\bar{Z}b_2^2\bar{z}\Big]$$

$$= E\left(\bar{y}^{2}\right) + E\left(\bar{X}^{2}b_1^2\right) + E\left(b_1^2\bar{x}^{2}\right) + E\left(\bar{Z}^{2}b_2^2\right) + E\left(b_2^2\bar{z}^{2}\right) +$$

$$+2\bar{X}E(b_1\bar{y}) - 2E(b_1\overline{xy}) + 2\bar{Z}E(b_2\bar{y}) - 2E(b_2\overline{yz}) -$$

$$-2\bar{X}E(b_1^2\bar{x}) + 2\overline{XZ}E(b_1b_2) - 2\bar{X}E(b_1b_2\bar{z}) -$$

$$-2\bar{Z}E(b_1b_2\bar{x}) + 2E(b_1b_2\overline{xz}) -$$

$$-2\bar{Z}E(b_2^2\bar{z})$$

que al sustituir en (11), se tiene que,

$$
\begin{aligned}
V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) \; &= E\left(\bar{y}^{2}\right)+E\left(\bar{X}^{2}b_1^{2}\right)+E\left(b_1^{2}\bar{x}^{2}\right)+E\left(\bar{Z}^{2}b_2^{2}\right)+E\left(b_2^{2}\bar{z}^{2}\right)+\\
&+2\bar{X}E(b_1\bar{y})-2E(b_1\overline{xy})+2\bar{Z}E(b_2\bar{y})-2E(b_2\overline{yz})-\\
&-2\bar{X}E(b_1^{2}\bar{x})+2\overline{XZ}E(b_1b_2)-2\bar{X}E(b_1b_2\bar{z})-\\
&-2\bar{Z}E(b_1b_2\bar{x})+2E(b_1b_2\overline{xz})-\\
&-2\bar{Z}E(b_2^{2}\bar{z})\\
&-\Big[\bar{Y}^{2}+\left(E(b_1\bar{x})\right)^{2}+\bar{X}^{2}\left(E(b_1)\right)^{2}+\left(E(b_2\bar{z})\right)^{2}+\bar{Z}^{2}\left(E(b_2)\right)^{2}-\\
&-2\bar{Y}E(b_1\bar{x})+2\overline{X}\overline{Y}\,E(b_1)-2\bar{Y}E(b_2\bar{z})+2\overline{YZ}\,E(b_2)-\\
&-2\bar{X}E(b_1\bar{x})E(b_1)+2E(b_1\bar{x})E(b_2\bar{z})-2\bar{Z}\,E(b_1\bar{x})E(b_2)-\\
&-2\bar{X}\,E(b_1)E(b_2\bar{z})+2\overline{XZ}E(b_1)\,E(b_2)-\\
&-2\bar{Z}E(b_2\bar{z})\,E(b_2)\,\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\left[E\left(\bar{y}^{2}\right)-\bar{Y}^{2}\right]+E\left(\bar{X}^{2}b_1^{2}\right)+E\left(b_1^{2}\bar{x}^{2}\right)+E\left(\bar{Z}^{2}b_2^{2}\right)+E\left(b_2^{2}\bar{z}^{2}\right)+\\
&+2\bar{X}E(b_1\bar{y})-2E(b_1\overline{xy})+2\bar{Z}E(b_2\bar{y})-2E(b_2\overline{yz})-\\
&-2\bar{X}E(b_1^{2}\bar{x})+2\overline{XZ}E(b_1b_2)-2\bar{X}E(b_1b_2\bar{z})-\\
&-2\bar{Z}E(b_1b_2\bar{x})+2E(b_1b_2\overline{xz})-\\
&-2\bar{Z}E(b_2^{2}\bar{z})\\
&-\left(E(b_1\bar{x})\right)^{2}-\bar{X}^{2}\left(E(b_1)\right)^{2}-\left(E(b_2\bar{z})\right)^{2}-\bar{Z}^{2}\left(E(b_2)\right)^{2}+\\
&+2\bar{Y}E(b_1\bar{x})-2\overline{X}\overline{Y}\,E(b_1)+2\bar{Y}E(b_2\bar{z})-2\overline{YZ}\,E(b_2)+\\
&+2\bar{X}E(b_1\bar{x})E(b_1)-2E(b_1\bar{x})E(b_2\bar{z})+2\bar{Z}\,E(b_1\bar{x})E(b_2)+\\
&+2\bar{X}\,E(b_1)E(b_2\bar{z})-2\overline{XZ}E(b_1)\,E(b_2)+\\
&+2\bar{Z}E(b_2\bar{z})\,E(b_2)
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

entonces el Error Cuadrático Medio es la suma de (10) y (12), es decir,

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = V(\hat{\hat{Y}}_{lr}) + \left(B(\hat{\hat{Y}}_{lr})\right)^2$$

$$\begin{aligned}
ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = &\left[E\left(\bar{y}^2\right) - \bar{Y}^2\right] + E\left(\bar{X}^2 b_1^2\right) + E\left(b_1^2 \bar{x}^2\right) + E\left(\bar{Z}^2 b_2^2\right) + E\left(b_2^2 \bar{z}^2\right) + \\
&+ 2\bar{X}E(b_1\bar{y}) - 2E(b_1\overline{xy}) + 2\bar{Z}E(b_2\bar{y}) - 2E(b_2\overline{yz}) - \\
&- 2\bar{X}E(b_1^2\bar{x}) + 2\overline{XZ}E(b_1b_2) - 2\bar{X}E(b_1b_2\bar{z}) - \\
&- 2\bar{Z}E(b_1b_2\bar{x}) + 2E(b_1b_2\overline{xz}) - \\
&- 2\bar{Z}E(b_2^2\bar{z}) \\
&- \left(E(b_1\bar{x})\right)^2 - \bar{X}^2\left(E(b_1)\right)^2 - \left(E(b_2\bar{z})\right)^2 - \bar{Z}^2\left(E(b_2)\right)^2 + \\
&+ 2\bar{Y}E(b_1\bar{x}) - 2\overline{XY}\,E(b_1) + 2\bar{Y}E(b_2\bar{z}) - 2\overline{YZ}\,E(b_2) + \\
&+ 2\bar{X}E(b_1\bar{x})E(b_1) - 2E(b_1\bar{x})E(b_2\bar{z}) + 2\bar{Z}\,E(b_1\bar{x})E(b_2) + \\
&+ 2\bar{X}\,E(b_1)E(b_2\bar{z}) - 2\overline{XZ}E(b_1)E(b_2) + \\
&+ 2\bar{Z}E(b_2\bar{z})E(b_2) \\
&+ \left(E(b_1\bar{x})\right)^2 + \bar{X}^2\left(E(b_1)\right)^2 + \left(E(b_2\bar{z})\right)^2 + \bar{Z}^2\left(E(b_2)\right)^2 - \\
&- 2\bar{X}\,E(b_1)E(b_1\bar{x}) + 2E(b_1\bar{x})E(b_2\bar{z}) - 2E(b_1\bar{x})\bar{Z}\,E(b_2) - \\
&- 2\bar{X}\,E(b_1)E(b_2\bar{z}) + 2\bar{X}\,\bar{Z}\,E(b_1)E(b_2) - 2\bar{Z}\,E(b_2)E(b_2\bar{z})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= V(\bar{y}) + E\left(\bar{X}^2 b_1^2\right) + E\left(b_1^2\bar{x}^2\right) + E\left(\bar{Z}^2 b_2^2\right) + E\left(b_2^2\bar{z}^2\right) + \\
&+ 2\bar{X}E(b_1\bar{y}) - 2E(b_1\overline{xy}) + 2\bar{Z}E(b_2\bar{y}) - 2E(b_2\overline{yz}) - \\
&- 2\bar{X}E(b_1^2\bar{x}) + 2\overline{XZ}E(b_1b_2) - 2\bar{X}E(b_1b_2\bar{z}) - \\
&- 2\bar{Z}E(b_1b_2\bar{x}) + 2E(b_1b_2\overline{xz}) - \\
&- 2\bar{Z}E(b_2^2\bar{z}) \\
&+ 2\bar{Y}E(b_1\bar{x}) - 2\overline{XY}\,E(b_1) + 2\bar{Y}E(b_2\bar{z}) - 2\overline{YZ}\,E(b_2)
\end{aligned}$$

$$=V(\bar{y})+E\left(\bar{X}^{2}b_1^2\right)+E\left(b_1^2\bar{x}^{2}\right)+E\left(\bar{Z}^{2}b_2^2\right)+E\left(b_2^2\bar{z}^{2}\right)+$$

$$+2\bar{X}E(b_1\bar{y})-2E(b_1\overline{xy})+2\bar{Z}E(b_2\bar{y})-2E(b_2\overline{yz})-$$

$$-2\bar{X}E(b_1^2\bar{x})+2\overline{XZ}E(b_1b_2)-2\bar{X}E(b_1b_2\bar{z})-$$

$$-2\bar{Z}E(b_1b_2\bar{x})+2E(b_1b_2\overline{xz})-$$

$$-2\bar{Z}E(b_2^2\bar{z})$$

$$+2\bar{Y}E(b_1\bar{x})-2\overline{XY}\ E(b_1)+2\bar{Y}E(b_2\bar{z})-2\overline{YZ}\ E(b_2) \qquad (13)$$

En el caso del estimador del total se tiene que, como se había mostrado en (7),

$$\hat{Y}_{lr}=N\hat{\bar{Y}}_{lr}=\hat{Y}+b_1(X-\hat{X})+b_2(Z-\hat{Z}) \qquad (14)$$

su respectiva esperanza, varianza, sesgo y Error Cuadrático Medio son:

$$E(\hat{Y}_{lr}) =E\left[\hat{Y}+b_1(X-\hat{X})+b_2(Z-\hat{Z})\right]=E(\hat{Y})+X\,E(b_1)-E(b_1\hat{X})+ZE(b_2)-E(b_2\hat{Z})$$

$$=E(\hat{Y})+E(\hat{X})E(b_1)-E(b_1\hat{X})+E(\hat{Z})E(b_2)-E(b_2\hat{Z})$$

$$=E(\hat{Y})-\left[E(b_1\hat{X})-E(\hat{X})E(b_1)\right]-\left[E(b_2\hat{Z})-E(\hat{Z})E(b_2)\right]=Y-COV(b_1,\hat{X})-COV(b_2,\hat{Z}) \qquad (15)$$

$$V(\hat{Y}_{lr}) =E\left(\hat{Y}^{2}\right)+E\left(X^{2}b_1^2\right)+E\left(b_1^2\hat{X}^{2}\right)+E\left(Z^{2}b_2^2\right)+E\left(b_2^2\hat{Z}^{2}\right)+$$

$$+2XE(b_1\hat{Y})-2E(b_1\hat{X}\hat{Y})+2ZE(b_2\hat{Y})-2E(b_2\hat{\hat{Y}}\hat{\hat{Z}})-$$

$$-2XE(b_1^2\hat{X})+2XZE(b_1b_2)-2XE(b_1b_2\hat{Z})-$$

$$-2ZE(b_1b_2\hat{X})+2E(b_1b_2\hat{X}\hat{Z})-$$

$$-2ZE(b_2^2\hat{Z})$$

$$-\Big[Y^{2}+\left(E(b_1\hat{X})\right)^2+X^{2}\left(E(b_1)\right)^2+\left(E(b_2\hat{Z})\right)^2+Z^{2}\left(E(b_2)\right)^2-$$

$$-2YE(b_1\bar{x})+2XY\,E(b_1)-2YE(b_2\hat{Z})+2YZ\,E(b_2)-$$

$$-2XE(b_1\hat{X})E(b_1)+2E(b_1\hat{X})E(b_2\hat{Z})-2Z\,E(b_1\hat{X})E(b_2)-$$

$$-2X\,E(b_1)E(b_2\hat{Z})+2XZE(b_1)\,E(b_2)-$$

$$-\,2ZE(b_2\hat{Z})\,E(b_2)\,\Big] \qquad (16)$$

$$B(\hat{Y}_{lr})=\overline{Y}-E(\hat{Y}_{lr})=Y-Y+COV(b_1,\hat{X})+COV(b_2,\hat{Z})=COV(b_1,\hat{X})+COV(b_2,\hat{Z}) \qquad (17)$$

$$ECM(\hat{Y}_{lr})\ =V(\bar{y})+E\left(\overline{X}^{\,2}b_1^2\right)+E\left(b_1^2\bar{x}^{\,2}\right)+E\left(\overline{Z}^{\,2}b_2^2\right)+E\left(b_2^2\bar{z}^{\,2}\right)+$$

$$+2\overline{X}E(b_1\bar{y})-2E(b_1\overline{xy})+2\overline{Z}E(b_2\bar{y})-2E(b_2\overline{yz})-$$

$$-2\overline{X}E(b_1^2\bar{x})+2\overline{XZ}E(b_1b_2)-2\overline{X}E(b_1b_2\bar{z})-$$

$$-2\overline{Z}E(b_1b_2\bar{x})+2E(b_1b_2\overline{xz})-$$

$$-2\overline{Z}E(b_2^2\bar{z})$$

$$+\,2\overline{Y}E(b_1\bar{x})-2\overline{X}\overline{Y}\ E(b_1)+2\overline{Y}E(b_2\bar{z})-2\overline{Y}\overline{Z}\ E(b_2) \qquad (18)$$

Como se comentó en el capítulo 1 y en Martín-Caro (2006), en el estimador de regresión lineal con una variable auxiliar, en la mayoría de los casos *b* es una constante, considerando esta situación y adaptándola al estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares, es decir, si b_1 y b_2 son constantes, se tiene que entonces, el sesgo es cero,

$$B(\hat{\hat{Y}}_{lr})=E(b_1\bar{x})-\overline{X}E(b_1)+E(b_2\bar{z})-\overline{Z}E(b_2)=b_1E(\bar{x})-b_1\overline{X}+b_2E(\bar{z})-b_2\overline{Z}=b_1\overline{X}-b_1\overline{X}+b_2\overline{Z}-b_2\overline{Z}=0$$

En consecuencia, $\hat{\hat{Y}}_{lr}$ es un estimador insesgado de $\overline{Y}$, por lo tanto $ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr})=V(\hat{\hat{Y}}_{lr})$

$$V(\hat{\hat{Y}}_{lr})\ \ =V(\bar{y})+b_1^2E\left(\overline{X}^{\,2}\right)+b_1^2E\left(\bar{x}^{\,2}\right)+b_2^2E\left(\overline{Z}^{\,2}\right)+b_2^2E\left(\bar{z}^{\,2}\right)+$$

$$+2b_1\overline{X}E(\bar{y})-2b_1E(\overline{xy})+2b_2\overline{Z}E(\bar{y})-2b_2E(\overline{yz})-$$

$$-2b_1^2\,\overline{X}E(\overline{x})+2b_1b_2\,\overline{XZ}-2b_1b_2\,\overline{X}E(\overline{z})-$$

$$-2b_1b_2\overline{Z}E(\overline{x})+2b_1b_2E(\overline{x}\overline{z})-$$

$$-2b_2^2\overline{Z}E(\overline{z})$$

$$-\left(b_1E(\overline{x})\right)^2-b_1^2\,\overline{X}^{\,2}-\left(b_2E(\overline{z})\right)^2-b_2^2\,\overline{Z}^{\,2}+$$

$$+2b_1\overline{Y}E(\overline{x})-2b_1\overline{X}\overline{Y}+2b_2\overline{Y}E(\overline{z})-2b_2\overline{YZ}+$$

$$+2b_1^2\,\overline{X}E(\overline{x})-2b_1b_2E(\overline{x})E(\overline{z})+2b_1b_2\overline{Z}\,E(\overline{x})+$$

$$+2b_1b_2\overline{X}\,E(\overline{z})-2b_1b_2\,\overline{XZ}+$$

$$+2b_2^2\overline{Z}E(\overline{z})$$

$$V(\hat{\hat{Y}}_{lr})\ =V(\overline{y})+b_1^2\,\overline{X}^{\,2}+b_1^2E\left(\overline{x}^{\,2}\right)+b_2^2\,\overline{Z}^{\,2}+b_2^2E\left(\overline{z}^{\,2}\right)+$$

$$+2b_1\overline{X}\overline{Y}-2b_1E(\overline{x}\overline{y})+2b_2\overline{Z}\overline{Y}-2b_2E(\overline{y}\overline{z})-$$

$$-2b_1^2\,\overline{X}^{\,2}+2b_1b_2\,\overline{XZ}-2b_1b_2\,\overline{XZ}-$$

$$-2b_1b_2\,\overline{XZ}+2b_1b_2E(\overline{x}\overline{z})-$$

$$-2b_2^2\,\overline{Z}^{\,2}$$

$$-b_1^2\,\overline{X}^{\,2}-b_1^2\,\overline{X}^{\,2}-b_2^2\,\overline{Z}^{\,2}-b_2^2\,\overline{Z}^{\,2}+$$

$$+2b_1\overline{X}\overline{Y}-2b_1\overline{X}\overline{Y}+2b_2\overline{YZ}-2b_2\overline{YZ}+$$

$$+2b_1^2\,\overline{X}^{\,2}-2b_1b_2\,\overline{XZ}+2b_1b_2\,\overline{XZ}+$$

$$+2b_1b_2\,\overline{XZ}-2b_1b_2\,\overline{XZ}+$$

$$+2b_2^2\,\overline{Z}^{\,2}$$

Es decir,

$$EMC(\hat{\hat{Y}}_{lr})=V(\hat{\hat{Y}}_{lr})\ =V(\overline{y})+b_1^2V(\overline{x})+b_2^2V(\overline{z})-2b_1COV(\overline{x},\overline{y})-2b_2COV(\overline{y},\overline{z})+2b_1b_2COV(\overline{x},\overline{z})$$

como se sabe, en muestreo aleatorio simple, que es caso trabajado,

$$V(\bar{y})=\frac{N-n}{Nn}S_y^2 \quad , \quad V(\bar{x})=\frac{N-n}{Nn}S_x^2 \quad \text{y} \quad V(\bar{z})=\frac{N-n}{Nn}S_z^2$$

y como se demostró en Martín-Caro (2006, pp. 104, 105)

$$COV(\bar{x},\bar{y}) = \left[E(\overline{x}\overline{y})-\overline{X}\overline{Y}\right]=\frac{N-n}{Nn}S_{xy}$$

donde, $S_{xy}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\overline{X}\right)\left(y_i-\overline{Y}\right)}{N-1}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}x_i\,y_i-\overline{X}\overline{Y}}{N-1}$

Análogamente, $COV(\bar{y},\bar{z}) = \left[E(\overline{y}\overline{z})-\overline{Y}\overline{Z}\right]=\dfrac{N-n}{Nn}S_{yz}$ y $COV(\bar{x},\bar{z}) = \left[E(\overline{x}\overline{z})-\overline{X}\overline{Z}\right]=\dfrac{N-n}{Nn}S_{xz}$

donde, $S_{yz}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\overline{Y}\right)\left(z_i-\overline{Z}\right)}{N-1}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}y_i\,z_i-\overline{Y}\overline{Z}}{N-1}$ y $S_{xz}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\overline{X}\right)\left(z_i-\overline{Z}\right)}{N-1}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}x_i\,z_i-\overline{X}\overline{Z}}{N-1}$

Entonces, se puede escribir

$$EMC(\hat{\bar{Y}}_{lr})=V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2+b_1^2S_x^2+b_2^2S_z^2-2b_1S_{xy}-2b_2S_{yz}+2b_1b_2S_{xz}\right]$$

Y para el total,

$$EMC(\hat{Y}_{lr})=V(\hat{Y}_{lr}) = N^2\frac{(N-n)}{Nn}\left[S_y^2+b_1^2S_x^2+b_2^2S_z^2-2b_1S_{xy}-2b_2S_{yz}+2b_1b_2S_{xz}\right] \tag{19}$$

$$=\frac{N(N-n)}{n}\left[S_y^2+b_1^2S_x^2+b_2^2S_z^2-2b_1S_{xy}-2b_2S_{yz}+2b_1b_2S_{xz}\right] \tag{20}$$

En el próximo apartado se desarrollan algunos casos especiales, y en cada uno de ellos se mostrarán los errores cuadráticos medios y sus estimadores.

2.4.- Casos Especiales de Estimador de Regresión Lineal con 2 variables auxiliares

A continuación se presentan algunos casos particulares del estimador de regresión lineal con dos variables auxiliares, en función de los valores de b_1 y b_2.

2.4.1.- Estimador de Regresión Lineal Simple

Este caso se presenta cuando b_2=0, de esta forma sólo se tiene una variable auxiliar. Esto es, para el estimador del promedio, con b_1 y b_2 constantes,

$$\hat{\bar{Y}}_{lr} = \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) + b_2(\bar{Z} - \bar{z}) = \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) + 0(\bar{Z} - \bar{z}) = \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})$$

que tiene la misma estructura que el estimador de regresión lineal simple.

La esperanza es,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \bar{Y} - COV(b_1, \bar{x}) - COV(b_2, \bar{z})$$

Pero como b_2=0,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \bar{Y} - COV(b_1, \bar{x}) - COV(0, \bar{z}) = \bar{Y} - COV(b_1, \bar{x})$$

y si b_1 es constante $COV(b_1,\bar{x})=0$, entonces,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \bar{Y}$$

Luego, es un estimador insesgado y su error cuadrático medio es,

$$EMC(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\bar{y}) + b_1^2V(\bar{x}) + b_2^2V(\bar{z}) - 2b_1COV(\bar{x},\bar{y}) - 2b_2COV(\bar{y},\bar{z}) + 2b_1b_2COV(\bar{x},\bar{z})$$

$$= V(\bar{y}) + b_1^2V(\bar{x}) - 2b_1COV(\bar{x}, \bar{y})$$

donde, $V(\bar{y})=\dfrac{N-n}{N\,n}S_y^2$, $V(\bar{x})=\dfrac{N-n}{N\,n}S_x^2$, $COV(\bar{x},\bar{y})=\left[E(\overline{xy})-\overline{X}\overline{Y}\right]=\dfrac{N-n}{N\,n}S_{xy}$

y, $S_y^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}\left(y_i-\overline{Y}\right)^2}{N-1}$, $S_x^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\overline{X}\right)^2}{N-1}$, $S_{xy}=\dfrac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\overline{X}\right)\left(y_i-\overline{Y}\right)}{N-1}$

de manera que, $EMC(\hat{\overline{Y}}_{lr})=V(\hat{\overline{Y}}_{lr})=\dfrac{N-n}{N\,n}\left[S_y^2+b_1S_x^2-2b_1S_{xy}\right]$

y su estimador, $E\hat{M}C(\hat{\overline{Y}}_{lr})=\hat{V}(\hat{\overline{Y}}_{lr})=\dfrac{N-n}{N\,n}\left[s_y^2+b_1s_x^2-2b_1s_{xy}\right]$

Para el caso del total se tiene que,

$$\hat{Y}_{lr}=N\hat{\overline{Y}}_{lr}=N\bar{y}+b_1N(\overline{X}-\bar{x})=\hat{Y}+b_1(X-\hat{X})$$

$$E(\hat{Y}_{lr})=E(\hat{Y})-\left[E(b_1\hat{X})-E(\hat{X})E(b_1)\right]=Y-b_1\left[E(\hat{X})-E(\hat{X})\right]=Y$$

$$ECM(\hat{Y}_{lr})=V(\hat{Y}_{lr})=\frac{N^2(N-n)}{Nn}\left[S_y^2+b_1^2S_x^2-2b_1S_{xy}\right]=\frac{N(N-n)}{n}\left[S_y^2+b_1^2S_x^2-2b_1S_{xy}\right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{lr})=\hat{V}(\hat{Y}_{lr})=\frac{N(N-n)}{n}\left[s_y^2+\hat{b}_1^2s_x^2-2\hat{b}_1s_{xy}\right]$$

De esta manera se demuestra que el estimador de regresión lineal simple es un caso particular del estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares, cuando $b_2=0$, incluyendo todos sus casos especiales, que son,

Estimador Directo: $b_1=b_2=0$

Estimador de Razón: $b_1=\dfrac{\bar{y}}{\bar{x}}$, $b_2=0$

Estimador por Diferencia: $b_1=1$, $b_2=0$

Estimador de Varianza mínima para b_1 y b_2 constantes: $b_1=\dfrac{S_{xy}}{S_x^2}$, $b_2=0$

2.4.2.- Estimador por Diferencias

Este es el caso cuando $b_1=b_2=1$, entonces se corrige el promedio muestral sólo por la diferencia entre los promedios poblacional y muestral de las variables auxiliares; esto es,

$$\hat{\bar{Y}}_{lr} = \bar{y} + (\bar{X} - \bar{x}) + (\bar{Z} - \bar{z})$$

al sustituir $b_1=b_2=1$ en (8), se tiene,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = E(\bar{y}) - [E(\bar{x}) - E(\bar{x})E(1)] - [E(\bar{z}) - E(\bar{z})E(1)] = E(\bar{y}) = \bar{Y}$$

por lo tanto, es un estimador insesgado. Haciendo lo propio en (13),

$$EMC(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\bar{y}) + \bar{X}^2 + E(\bar{x}^2) + \bar{Z}^2 + E(\bar{z}^2) + 2\bar{X}\bar{Y} - 2E(\bar{x}\bar{y}) + 2\bar{Z}\bar{Y} - 2E(\bar{y}\bar{z}) -$$

$$-2\bar{X}^2 + 2\overline{XZ} - 2\overline{XZ} - 2\overline{XZ} + 2E(\bar{x}\bar{z}) - 2\bar{Z}^2 + 2\overline{XY} - 2\overline{XY} + 2\overline{YZ} - 2\overline{YZ}$$

$$= V(\bar{y}) - \bar{X}^2 + E(\bar{x}^2) - \bar{Z}^2 + E(\bar{z}^2) + 2\bar{X}\bar{Y} - 2E(\bar{x}\bar{y}) + 2\bar{Z}\bar{Y} - 2E(\bar{y}\bar{z}) +$$

$$+2\overline{XZ} - 2\overline{XZ} - 2\overline{XZ} + 2E(\bar{x}\bar{z})$$

$$= V(\bar{y}) + V(\bar{x})\bar{X}^2 + V(\bar{z}) - 2COV(\bar{x},\bar{y}) - 2COV(\bar{y},\bar{z}) + 2COV(\bar{x}\bar{z})$$

$$= \frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2 + S_x^2 + S_z^2 - 2S_{xy} - 2S_{yz} + 2S_{xz}\right]$$

Para el caso del total se tiene que,

$$\hat{Y}_{lr} = N\bar{y} + N(\bar{X} - \bar{x}) + N(\bar{Z} - \bar{z}) = \hat{Y} + (X - \hat{X}) + (Z - \hat{Z})$$

$$E(\hat{Y}_{lr}) = Y + [E(X) - E(\hat{X})] + [E(Z) - E(\hat{Z})] = Y$$

por lo tanto, también es un estimador insesgado.

$$ECM(\hat{Y}_{lr}) = V(\hat{Y}_{lr}) = \frac{N^2(N-n)}{Nn}\left[S_y^2 + S_x^2 + S_z^2 - 2S_{xy} - 2S_{yz} + 2S_{xz}\right]$$

$$= \frac{N(N-n)}{n}\left[S_y^2 + S_x^2 + S_z^2 - 2S_{xy} - 2S_{yz} + 2S_{xz}\right]$$

y su estimador,

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{lr}) = \hat{V}(\hat{Y}_{lr}) = \frac{N(N-n)}{n}\left[s_y^2 + s_x^2 + s_z^2 - 2s_{xy} - 2s_{yz} + 2s_{xz}\right]$$

2.4.3.- Estimador de Razón-Regresión

Los estimadores del tipo Razón-Regresión se presentan en Martín-Caro (2010) y consisten en aplicar el estimador de regresión a estimadores de razón, esto es,

$$\hat{\bar{Y}}_{Rr} = \hat{\bar{Y}}_R + b(\bar{Z} - \hat{\bar{Z}}_R) \qquad ; \qquad \hat{Y}_{Rr} = \hat{Y}_R + b(Z - \hat{Z}_R)$$

y en Martín-Caro (2010, p. 154) se demuestra que es un estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares, que para el estimador del promedio es,

$$\hat{\bar{Y}}_{Rr} = \hat{\bar{Y}}_R + b(\bar{Z} - \hat{\bar{Z}}_R) = \hat{\bar{Y}}_R + b\bar{Z} - b\hat{\bar{Z}}_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{X} + b\bar{Z} - b\frac{\bar{z}}{\bar{x}}\bar{X}$$

Pero, tal como se demostró en Martín-Caro (2010, p. 153), los estimadores de razón son estimadores de regresión lineal, de manera que $\hat{\bar{Y}}_R$ y $\hat{\bar{Z}}_R$ pueden escribirse como

$$\hat{\bar{Y}}_R = \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) \qquad \text{y} \qquad \hat{\bar{Z}}_R = \bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})$$

respectivamente, donde $b_1 = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ y $b_2 = \frac{\bar{z}}{\bar{x}}$, entonces,

$$\hat{\hat{Y}}_{Rr} = \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) + b\left(\bar{Z} - \left(\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})\right)\right)$$

$$= \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) + b\bar{Z} - b\left(\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})\right)$$

$$= \bar{y} + b_1\bar{X} - b_1\bar{x} + b\bar{Z} - b\bar{z} - bb_2\bar{X} + bb_2\bar{x}$$

$$= \bar{y} + (b_1 - bb_2)(\bar{X} - \bar{x}) + b(\bar{Z} - \bar{z})$$

Que es un estimador de regresión lineal con dos variables auxiliares. Los coeficientes se pueden renombrar como,

$$c_1 = b_1 - bb_2 \quad , \quad c_2 = b$$

de forma que $\hat{\hat{Y}}_{Rr} = \bar{y} + c_1(\bar{X} - \bar{x}) + c_2(\bar{Z} - \bar{z})$

$$= \bar{y} + \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}} - b\frac{\bar{z}}{\bar{x}}\right)(\bar{X} - \bar{x}) + b(\bar{Z} - \bar{z})$$

Su Error Cuadrático Medio es,

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = V(\bar{y}) + E\left(\bar{X}^2 c_1^2\right) + E\left(c_1^2 \bar{x}^2\right) + E\left(\bar{Z}^2 c_2^2\right) + E\left(c_2^2 \bar{z}^2\right) +$$

$$+ 2\bar{X}E(c_1\bar{y}) - 2E(c_1\bar{x}\bar{y}) + 2\bar{Z}E(c_2\bar{y}) - 2E(c_2\bar{y}\bar{z}) -$$

$$- 2\bar{X}E(c_1^2\bar{x}) + 2\overline{XZ}E(c_1c_2) - 2\bar{X}E(c_1c_2\bar{z}) -$$

$$- 2\bar{Z}E(c_1c_2\bar{x}) + 2E(c_1c_2\bar{x}\bar{z}) -$$

$$- 2\bar{Z}E(c_2^2\bar{z})$$

$$+ 2\bar{Y}E(c_1\bar{x}) - 2\overline{X}\overline{Y}\, E(c_1) + 2\bar{Y}E(c_2\bar{z}) - 2\overline{Y}\overline{Z}\, E(c_2)$$

sustituyendo $c_1 = b_1 - bb_2 \quad , \quad c_2 = b$

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = V(\bar{y}) + E\left(\bar{X}^2(b_1 - bb_2)^2\right) + E\left((b_1 - bb_2)^2\bar{x}^2\right) + E\left(\bar{Z}^2 b^2\right) + E\left(b^2\bar{z}^2\right) +$$

$$+ 2\bar{X}E((b_1 - bb_2)\bar{y}) - 2E((b_1 - bb_2)\bar{x}\bar{y}) + 2\bar{Z}E(b\bar{y}) - 2E(b\bar{y}\bar{z}) -$$

$$-2\overline{X}E((b_1-bb_2)^2\bar{x})+2\overline{XZ}E((b_1-bb_2)b)-2\overline{X}E((b_1-bb_2)b\bar{z})-$$

$$-2\overline{Z}E((b_1-bb_2)b\bar{x})+2E((b_1-bb_2)b\bar{x}\bar{z})-$$

$$-2\overline{Z}E(b^2\bar{z})$$

$$+2\overline{Y}E((b_1-bb_2)\bar{x})-2\overline{XY}\,E(b_1-bb_2)+2\overline{Y}E(b\bar{z})-2\overline{YZ}\,E(b)$$

Si b es constante y aplicando la aproximación de series de Taylor ya desarrolladas en Martín-Caro (2010), donde $b_1=\frac{\overline{Y}}{\overline{X}}$ y $b_2=\frac{\overline{Z}}{\overline{X}}$, utilizando en el ECM los valores poblaciones y no los muestrales, entonces,

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr})\approx V(\bar{y})+(b_1-bb_2)^2E\left(\overline{X}^2\right)+(b_1-bb_2)^2E\left(\bar{x}^2\right)+b^2E\left(\overline{Z}^2\right)+b^2E\left(\bar{z}^2\right)+$$

$$+2(b_1-bb_2)\overline{X}E(\bar{y})-2(b_1-bb_2)E(\overline{xy})+2b\overline{Z}E(\bar{y})-2bE(\overline{yz})-$$

$$-2(b_1-bb_2)^2\,\overline{X}E(\bar{x})+2((b_1-bb_2)b)\overline{XZ}-2((b_1-bb_2)b)\overline{X}E(\bar{z})-$$

$$-2((b_1-bb_2)b)\overline{Z}E(\bar{x})+2((b_1-bb_2)b)E(\overline{xz})-$$

$$-2b^2\overline{Z}E(\bar{z})$$

$$+2(b_1-bb_2)\overline{Y}E(\bar{x})-2(b_1-bb_2)\,\overline{X}\overline{Y}+2b\overline{Y}E(\bar{z})-2b\overline{YZ}$$

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr})\approx V(\bar{y})+(b_1-bb_2)^2\,\overline{X}^2+(b_1-bb_2)^2E\left(\bar{x}^2\right)+b^2\overline{Z}^2+b^2E\left(\bar{z}^2\right)+$$

$$+2(b_1-bb_2)\overline{X}\overline{Y}-2(b_1-bb_2)E(\overline{xy})+2b\overline{Z}\overline{Y}-2bE(\overline{yz})-$$

$$-2(b_1-bb_2)^2\,\overline{X}^2+2((b_1-bb_2)b)\overline{XZ}-2((b_1-bb_2)b)\overline{XZ}-$$

$$-2((b_1-bb_2)b)\overline{XZ}+2((b_1-bb_2)b)E(\overline{xz})-$$

$$-2b^2\overline{Z}^2$$

$$+2(b_1-bb_2)\overline{X}\overline{Y}-2(b_1-bb_2)\overline{X}\overline{Y}+2b\overline{YZ}-2b\overline{YZ}$$

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) \approx V(\bar{y}) + (b_1 - bb_2)^2 V(\bar{x}) + b^2 V(\bar{z}) -$$

$$-2(b_1 - bb_2) COV(\bar{x}, \bar{y}) - 2b COV(\bar{y}, \bar{z}) +$$

$$+2((b_1 - bb_2)b) COV(\bar{x}\bar{z})$$

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) \approx \frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2 + (b_1 - bb_2)^2 S_x^2 + b^2 S_x^2 - 2(b_1 - bb_2)S_{xy} - 2bS_{yz} + 2b(b_1 - bb_2)S_{xz}\right]$$

y como $c_1 = b_1 - bb_2$, $c_2 = b$, entonces,

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) \approx \frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2 + c_1^2 S_x^2 + c_2^2 S_x^2 - 2c_1 S_{xy} - 2c_2 S_{yz} + 2c_1 c_2 S_{xz}\right]$$

Que es el ECM del estimador de regresión lineal con dos variables auxiliares. Y su estimador,

$$E\hat{M}C(\hat{\hat{Y}}_{Rr}) \approx \frac{N-n}{Nn}\left[s_y^2 + \hat{c}_1^2 s_x^2 + \hat{c}_2^2 s_z^2 - 2\hat{c}_1 s_{xy} - 2\hat{c}_2 s_{yz} + 2\hat{c}_1 \hat{c}_2 s_{xz}\right]$$

Con lo que se demuestra que el estimador del tipo Razón-Regresión es un caso particular del estimador de regresión lineal con dos variables auxiliares.

Para el estimador del total,

$$\hat{Y}_{lr} = N\bar{y} + N(\bar{X} - \bar{x}) + N(\bar{Z} - \bar{z}) = \hat{Y} + (X - \hat{X}) + (Z - \hat{Z})$$

$$E(\hat{Y}_{lr}) = Y + \left[E(X) - E(\hat{X})\right] + \left[E(Z) - E(\hat{Z})\right] = Y$$

$$ECM(\hat{Y}_{lr}) = V(\hat{Y}_{lr}) = \frac{N^2(N-n)}{Nn}\left[S_y^2 + S_x^2 + S_z^2 - 2S_{xy} - 2S_{yz} + 2S_{xz}\right]$$

$$= \frac{N(N-n)}{n}\left[S_y^2 + S_x^2 + S_z^2 - 2S_{xy} - 2S_{yz} + 2S_{xz}\right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{lr}) = \hat{V}(\hat{Y}_{lr}) = \frac{N(N-n)}{n}\left[s_y^2 + s_x^2 + s_z^2 - 2s_{xy} - 2s_{yz} + 2s_{xz}\right]$$

2.4.4.- Estimador de Regresión-Razón

Igual que el caso anterior, los estimadores del tipo Regresión-Razón se presentan en Martín-Caro (2010) y consisten en aplicar el estimador de razón a estimadores de regresión lineal, esto es,

$$\hat{\bar{Y}}_{rR} = \frac{\hat{\bar{Y}}_{rl}}{\hat{\bar{Z}}_{rl}} \bar{Z} = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})} \bar{Z} \qquad ; \qquad \hat{\bar{Y}}'_{rR} = \frac{\hat{\bar{Y}}_{rl}}{\hat{\bar{Z}}_{rl}} \bar{Z} = \frac{\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})} \bar{Z}$$

donde en el primero se tiene el mismo valor de *b* para ambos estimadores de regresión lineal, en cambio en el segundo se tienen valores diferentes de *b*, b_y y b_z, respectivamente para cada estimador de regresión lineal. En Martín-Caro (2010, p. 157) se demuestra que ambos son estimadores de regresión lineal con 2 variables auxiliares.

Véase que el segundo estimador se puede reescribir como

$$\hat{\bar{Y}}'_{rR} = \hat{\bar{Y}}_{rl} + \left(\frac{\hat{\bar{Y}}_{rl}}{\hat{\bar{Z}}_{rl}}\right)\left(\bar{Z} - \hat{\bar{Z}}_{rl}\right)$$

$$= \bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x}) + \left(\frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})}\right)\left(\bar{Z} - \hat{\bar{Z}}_{rl}\right)$$

$$= \bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x}) + \left(\frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})}\right)\left(\bar{Z} - \left(\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})\right)\right)$$

$$= \bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x}) + \left(\frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})}\right)\bar{Z} - \left(\frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})}\right)\left(\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})\right)$$

$$= \left(\frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})}\right)\bar{Z}$$

$$= \left(\frac{\hat{\bar{Y}}_{lr}}{\hat{\bar{Z}}_{lr}}\right)\bar{Z}$$

que es el estimador de Regresión-Razón con dos valores diferentes de *b*.

Pero nótese que

$$\hat{\bar{Y}}'_{rR} = \bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x}) + \left(\frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \right) \bar{Z} - \left(\frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \right) \left(\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x}) \right)$$

$$= \bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x}) + \left(\frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \right) \bar{Z} - \left(\frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \right) \bar{z} - b_z \left(\frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \right) (\bar{X} - \bar{x})$$

$$= \bar{y} + \left[b_y - b_z \left(\frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \right) \right] (\bar{X} - \bar{x}) + \left(\frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \right) (\bar{Z} - \bar{z})$$

que es un estimador de regresión lineal con dos variables auxiliares ("*x*" y "*z*") y dos coeficientes,

$$c_1 = b_y - b_z \left(\frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \right) \quad , \quad c_2 = \frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})}$$

y su error cuadrático medio es,

$$ECM\left(\hat{\bar{Y}}'_{rR} \right) = \frac{N-n}{Nn} \left[S_y^2 + c_1^2 S_x^2 + c_2^2 S_z^2 - 2c_1 S_{xy} - 2c_2 S_{yz} + 2c_1 c_2 S_{xz} \right]$$

$$= \frac{N-n}{Nn} \left[S_y^2 + \left(b_y - b_z \left(\frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \right) \right)^2 S_x^2 + \left(\frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \right)^2 S_z^2 - 2 \left(b_y - b_z \left(\frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \right) \right) S_{xy} - \right.$$

$$\left. - 2 \left(\frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \right) S_{yz} + 2 \left(b_y - b_z \left(\frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \right) \right) \left(\frac{\bar{y} + b_y(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_z(\bar{X} - \bar{x})} \right) S_{xz} \right]$$

$$=\frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2+\left(b_y^2+b_z^2\left(\frac{\bar{y}+b_y(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b_z(\bar{X}-\bar{x})}\right)^2-2b_yb_z\left(\frac{\bar{y}+b_y(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b_z(\bar{X}-\bar{x})}\right)\right)S_x^2+\right.$$

$$+\left(\frac{\bar{y}+b_y(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b_z(\bar{X}-\bar{x})}\right)^2S_z^2-2b_yS_{xy}+2b_z\left(\frac{\bar{y}+b_y(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b_z(\bar{X}-\bar{x})}\right)S_{xy}-$$

$$\left.-2\left(\frac{\bar{y}+b_y(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b_z(\bar{X}-\bar{x})}\right)S_{yz}+2b_y\left(\frac{\bar{y}+b_y(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b_z(\bar{X}-\bar{x})}\right)S_{xz}-2b_z\left(\frac{\bar{y}+b_y(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b_z(\bar{X}-\bar{x})}\right)^2S_{xz}\right]$$

$$=\frac{N-n}{Nn}\left[\left(S_y^2+b_y^2S_x^2-2b_yS_{xy}\right)+\left(\frac{\bar{y}+b_y(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b_z(\bar{X}-\bar{x})}\right)^2\left(S_z^2+b_z^2S_x^2-2b_zS_{xz}\right)-\right.$$

$$\left.-2\left(\frac{\bar{y}+b_y(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b_z(\bar{X}-\bar{x})}\right)\left(S_{yz}-b_zS_{xy}-b_yS_{xz}+b_yb_zS_x^2\right)\right]$$

y como se está trabajando el *ECM*, se tomarán los valores poblacionales, entonces, en lugar de $\frac{\bar{y}+b_y(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b_z(\bar{X}-\bar{x})}$ se tomará $\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}$, entonces,

$$ECM\left(\hat{\bar{Y}}_{rR}'\right)=\left(\frac{1-f}{n}\right)\left[\left(S_y^2+b_y^2\,S_x^2-2b_yS_{xy}\right)+\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2\left(S_z^2+b_z^2\,S_x^2-2b_zS_{xz}\right)-2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)\left(S_{yz}-b_zS_{xy}-b_yS_{xz}+b_yb_z\,S_x^2\right)\right]$$

que es el error cuadrático medio del estimador de Regresión-Razón con *b's* diferentes.

Para el caso de un solo *b*,

$$\hat{\bar{Y}}_{rR}=\hat{\bar{Y}}_{rl}+\left(\frac{\hat{\bar{Y}}_{rl}}{\hat{\bar{Z}}_{rl}}\right)\left(\bar{Z}-\hat{\bar{Z}}_{rl}\right)$$

$$=\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})+\left(\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}\right)\left(\bar{Z}-\hat{\bar{Z}}_{rl}\right)$$

$$= \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}) + \left(\frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})}\right)\left(\bar{Z} - \left(\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})\right)\right)$$

$$= \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}) + \left(\frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})}\right)\bar{Z} - \left(\frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})}\right)\left(\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})\right)$$

$$= \left(\frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})}\right)\bar{Z}$$

$$= \left(\frac{\hat{\bar{Y}}_{lr}}{\hat{\bar{Z}}_{lr}}\right)\bar{Z}$$

Pero nótese que

$$\hat{\bar{Y}}_{rR} = \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}) + \left(\frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})}\right)\bar{Z} - \left(\frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})}\right)\left(\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})\right)$$

$$= \bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x}) + \left(\frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})}\right)\bar{Z} - \left(\frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})}\right)\bar{z} - b\left(\frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})}\right)(\bar{X} - \bar{x})$$

$$= \bar{y} + \left[b - b\left(\frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})}\right)\right](\bar{X} - \bar{x}) + \left(\frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})}\right)(\bar{Z} - \bar{z})$$

$$= \bar{y} + b\left[1 - \left(\frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})}\right)\right](\bar{X} - \bar{x}) + \left(\frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})}\right)(\bar{Z} - \bar{z})$$

que es un estimador de regresión lineal con dos variables auxiliares ("*x*" y "*z*") y dos coeficientes,

$$c_1 = b\left[1 - \left(\frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})}\right)\right] \quad , \quad c_2 = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})}$$

y su error cuadrático medio es,

$$ECM\left(\hat{\bar{Y}}_{rR}\right) = \frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2 + c_1^2 S_x^2 + c_2^2 S_z^2 - 2c_1 S_{xy} - 2c_2 S_{yz} + 2c_1 c_2 S_{xz}\right]$$

$$=\frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2+b^2\left(1-\left(\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}\right)\right)^2 S_x^2+\left(\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}\right)^2 S_z^2-2b\left(1-\left(\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}\right)\right)S_{xy}-\right.$$

$$\left.-2\left(\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}\right)S_{yz}+2b\left(1-\left(\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}\right)\right)\left(\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}\right)S_{xz}\right]$$

$$=\frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2+b^2\left(1+\left(\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}\right)^2-2\left(\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}\right)\right)S_x^2+\right.$$

$$+\left(\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}\right)^2 S_z^2-2bS_{xy}+2b\left(\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}\right)S_{xy}-$$

$$\left.-2\left(\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}\right)S_{yz}+2b\left(\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}\right)S_{xz}-2b\left(\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}\right)^2 S_{xz}\right]$$

$$=\frac{N-n}{Nn}\left[\left(S_y^2+b^2S_x^2-2bS_{xy}\right)+\left(\frac{\bar{y}+b_y(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b_z(\bar{X}-\bar{x})}\right)^2\left(S_z^2+b^2S_x^2-2bS_{xz}\right)-\right.$$

$$\left.-2\left(\frac{\bar{y}+b_y(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b_z(\bar{X}-\bar{x})}\right)\left(S_{yz}-bS_{xy}-bS_{xz}+b^2S_x^2\right)\right]$$

y como se está trabajando el *ECM*, se tomarán los valores poblacionales, entonces, en lugar de $\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}$ se tomará $\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}$, entonces,

$$ECM\left(\hat{\bar{Y}}_{rR}\right)=\left(\frac{1-f}{n}\right)\left[\left(S_y^2+b^2S_x^2-2bS_{xy}\right)+\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2\left(S_z^2+b^2S_x^2-2bS_{xz}\right)-2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)\left(S_{yz}-bS_{xy}-bS_{xz}+b^2S_x^2\right)\right]$$

que es el error cuadrático medio del estimador de Regresión-Razón con un *b* único.

Con lo que queda demostrado que ambos estimadores de Regresión-Razón (con 1 *b* y con 2 *b's*) son casos particulares del estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares.

Para el estimador del total,

$$\hat{Y}_{rR} = N\hat{\bar{Y}}_{rR} \quad , \quad \hat{Y}'_{rR} = N\hat{\bar{Y}}'_{rR}$$

$$E\left(\hat{Y}_{rR}\right) = Y \quad , \quad E\left(\hat{Y}'_{rR}\right) = Y$$

$$ECM\left(\hat{Y}_{rR}\right) = N^2 ECM\left(\hat{\bar{Y}}_{rR}\right) \quad , \quad ECM\left(\hat{Y}'_{rR}\right) = N^2 ECM\left(\hat{\bar{Y}}'_{rR}\right)$$

$$E\hat{C}M\left(\hat{Y}_{rR}\right) = N^2 E\hat{C}M\left(\hat{\bar{Y}}_{rR}\right) \quad , \quad E\hat{C}M\left(\hat{Y}'_{rR}\right) = N^2 E\hat{C}M\left(\hat{\bar{Y}}'_{rR}\right)$$

2.4.5.- Estimador de Varianza Mínima para *b₁* y *b₂* constantes

Sean $b_1 = b_{10}$ y $b_2 = b_{20}$ constantes, entonces, sustituyendo en (8),

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = E(\bar{y}) - \left[b_{10}E(\bar{x}) - b_{10}E(\bar{x})\right] - \left[b_{20}E(\bar{z}) - b_{20}E(\bar{z})\right] = E(\bar{y}) = \bar{Y}$$

se tiene que es un estimador insesgado. Sustituyendo $b_1 = b_{10}$ y $b_2 = b_{20}$ en (13),

$$\begin{aligned}
ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) &= V(\bar{y}) + b_{10}^2\bar{X}^2 + b_{10}^2 E\left(\bar{x}^2\right) + b_{20}^2\bar{Z}^2 + b_{20}^2 E\left(\bar{z}^2\right) + \\
&+ 2b_{10}\bar{X}\bar{Y} - 2b_{10}E(\overline{xy}) + 2b_{20}\bar{Z}\bar{Y} - 2b_{20}E(\overline{yz}) - \\
&- 2b_{10}^2\bar{X}^2 + 2b_{10}b_{20}\overline{XZ} - 2b_{10}b_{20}\overline{XZ} - \\
&- 2b_{10}b_{20}\overline{XZ} + 2b_{10}b_{20}E(\overline{xz}) - \\
&- 2b_{20}^2\bar{Z}^2 \\
&+ 2b_{10}\overline{XY} - 2b_{10}\overline{XY} + 2b_{20}\overline{YZ} - 2b_{20}\overline{YZ}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= V(\bar{y}) - b_{10}^2\bar{X}^2 + b_{10}^2 E\left(\bar{x}^2\right) - b_{20}^2\bar{Z}^2 + b_{20}^2 E\left(\bar{z}^2\right) + \\
&+ 2b_{10}\bar{X}\bar{Y} - 2b_{10}E(\overline{xy}) + 2b_{20}\bar{Z}\bar{Y} - 2b_{20}E(\overline{yz}) - \\
&- 2b_{10}b_{20}\overline{XZ} + 2b_{10}b_{20}E(\overline{xz}) -
\end{aligned}$$

$$=V(\bar{y})+b_{10}^2V(\bar{x})+b_{20}^2V(\bar{z})-2b_{10}COV(\bar{x},\bar{y})-2b_{20}COV(\bar{y},\bar{z})-2b_{10}b_{20}COV(\bar{x},\bar{z})$$

$$=\frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2+b_{10}^2S_x^2+b_{20}^2S_z^2-2b_{10}S_{xy}-2b_{20}S_{yz}+2b_{10}b_{20}S_{xz}\right]$$

Para minimizar la varianza, en principio se hallan las derivadas parciales, se igualan a cero y se obtienen los valores de b_1 y b_2.

Derivando respecto de b_{10},

$$\frac{\partial V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_{10}}=\frac{N-n}{Nn}\left[2b_{10}S_x^2-2S_{xy}+2b_{20}S_{xz}\right]=0$$

para que se cumpla la igualdad debe ocurrir uno de los siguientes casos,

$$\begin{cases} a)\ n=N \\ ó \\ b)\ 2b_1S_x^2-2S_{xy}+2b_2S_{xz}=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} a)\ n=N \\ ó \\ b)\ b_1S_x^2-S_{xy}+b_2S_{xz}=0 \end{cases}$$

no tiene sentido hacer $n=N$, ya que la investigación sería por enumeración completa y la varianza del estimador es igual a cero, porque se tiene el valor poblacional. Tomando el caso (b) y despejando b_{10},

$$b_{10}=\frac{S_{xy}-b_{20}S_{xz}}{S_x^2}$$

Derivando respecto de b_{20},

$$\frac{\partial V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_{20}}=\frac{N-n}{Nn}\left[2b_{20}S_z^2-2S_{yz}+2b_{10}S_{xz}\right]=0$$

para que se cumpla la igualdad debe ocurrir uno de los siguientes casos,

$$\begin{cases} a)\ n=N \\ ó \\ b)\ 2b_{20}S_z^2-2S_{yz}+2b_{10}S_{xz}=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} a)\ n=N \\ ó \\ b)\ b_{20}S_z^2-S_{yz}+b_{10}S_{xz}=0 \end{cases}$$

no tiene sentido hacer $n=N$, ya que la investigación sería por enumeración completa y la varianza del estimador es igual a cero, porque se tiene el valor poblacional. Tomando el caso (b) y despejando b_{20},

$$b_{20}=\frac{S_{yz}-b_{10}S_{xz}}{S_z^2}$$

Sustituyendo b_{20} en b_{10},

$$b_{10}=\frac{S_{xy}-b_{20}S_{xz}}{S_x^2}=\frac{S_{xy}-\left(\frac{S_{yz}-b_{10}S_{xz}}{S_z^2}\right)S_{xz}}{S_x^2}=\frac{S_{xy}S_z^2-S_{yz}S_{xz}+b_{10}\left(S_{xz}\right)^2}{S_x^2S_z^2}=\frac{S_{xy}S_z^2-S_{yz}S_{xz}}{S_x^2S_z^2}+\frac{b_{10}\left(S_{xz}\right)^2}{S_x^2S_z^2}$$

$$\Rightarrow\ b_{10}-\frac{b_{10}\left(S_{xz}\right)^2}{S_x^2S_z^2}=\frac{S_{xy}S_z^2-S_{yz}S_{xz}}{S_x^2S_z^2}$$

$$b_{10}\left(1-\frac{\left(S_{xz}\right)^2}{S_x^2S_z^2}\right)=b_{10}\left(\frac{S_x^2S_z^2-\left(S_{xz}\right)^2}{S_x^2S_z^2}\right)=\frac{S_{xy}S_z^2-S_{yz}S_{xz}}{S_x^2S_z^2}$$

por lo tanto, $b_{10}=\dfrac{S_{xy}S_z^2-S_{yz}S_{xz}}{S_x^2S_z^2-\left(S_{xz}\right)^2}$.

Luego se sustituye b_{10} en b_{20},

$$b_{20}=\frac{S_{yz}-\left(\frac{S_{xy}S_z^2-S_{yz}S_{xz}}{S_x^2S_z^2-\left(S_{xz}\right)^2}\right)S_{xz}}{S_z^2}=\frac{S_{yz}-\left(\frac{S_{xy}S_{xz}S_z^2-S_{yz}\left(S_{xz}\right)^2}{S_x^2S_z^2-\left(S_{xz}\right)^2}\right)}{S_z^2}=\frac{S_{yz}S_x^2S_z^2-S_{yz}\left(S_{xz}\right)^2-S_{xy}S_{xz}S_z^2+S_{yz}\left(S_{xz}\right)^2}{S_z^2S_x^2S_z^2-S_z^2\left(S_{xz}\right)^2}$$

$$=\frac{S_{yz}S_x^2S_z^2-S_{xy}S_{xz}S_z^2}{\left(S_z^2\right)^2S_x^2-S_z^2\left(S_{xz}\right)^2}=\frac{S_{yz}S_x^2-S_{xy}S_{xz}}{S_z^2S_x^2-\left(S_{xz}\right)^2}$$

Entonces, $b_{10}=\dfrac{S_{xy}S_z^2-S_{yz}S_{xz}}{S_x^2S_z^2-\left(S_{xz}\right)^2}$ y $b_{20}=\dfrac{S_{yz}S_x^2-S_{xy}S_{xz}}{S_z^2S_x^2-\left(S_{xz}\right)^2}$

Luego, para determinar si se alcanza un mínimo, se debe hallar la matriz hessiana y verificar que sus menores principales son mayores que cero. Esto es

$$H(V(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lr}))=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 V(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lr})}{\partial b_1^2} & \dfrac{\partial^2 V(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lr})}{\partial b_1 b_2}\\ \dfrac{\partial^2 V(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lr})}{\partial b_2 b_1} & \dfrac{\partial^2 V(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lr})}{\partial b_2^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{N-n}{Nn}2S_x^2 & \dfrac{N-n}{Nn}2S_{xz}\\ \dfrac{N-n}{Nn}2S_{xz} & \dfrac{N-n}{Nn}2S_z^2\end{bmatrix}$$

$H_1(V(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lr}))=\dfrac{N-n}{Nn}2S_x^2 \geq 0$, y será estrictamente mayor que cero si $n<N \ \wedge \ S_x^2>0$.

$$H_2(V(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lr}))=\begin{vmatrix}\dfrac{N-n}{Nn}2S_x^2 & \dfrac{N-n}{Nn}2S_{xz}\\ \dfrac{N-n}{Nn}2S_{xz} & \dfrac{N-n}{Nn}2S_z^2\end{vmatrix}=\left(\frac{N-n}{Nn}2S_x^2\right)\left(\frac{N-n}{Nn}2S_z^2\right)-\left(\frac{N-n}{Nn}2S_{xz}\right)\left(\frac{N-n}{Nn}2S_{xz}\right)$$

$$=2^2\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^2 S_x^2S_z^2-2^2\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^2 S_{xz}S_{xz}=2^2\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^2\left(S_x^2S_z^2-S_{xz}^2\right)$$

$$=2^2\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^2 S_x^2S_z^2\left(1-\frac{S_{xz}^2}{S_x^2S_z^2}\right)$$

$$=2^2\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^2 S_x^2S_z^2\left(1-\rho_{xz}^2\right)\geq 0$$

porque $2^2\left(\dfrac{N-n}{Nn}\right)^2 \geq 0$, $S_x^2 \geq 0$, $S_z^2 \geq 0$ y $1-\rho_{xz}^2 \geq 0$ (ya que $-1\leq\rho_{xz}\leq 1$, $0\leq\rho_{zx}^2\leq 1$), entonces, $H_2(V(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lr})) \geq 0$, y será estrictamente $H_2(V(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lr}))>0$ $si\ n<N$, $S_x^2>0$, $S_z^2>0$ y $-1<\rho_{xz}<1$, es decir,

si $n<N$, $S_x^2>0$, $S_z^2>0$ y $-1<\rho_{xz}<1$, $b_{10}=\dfrac{S_{xy}S_z^2-S_{yz}S_{xz}}{S_x^2S_z^2-(S_{xz})^2}$, $b_{20}=\dfrac{S_{yz}S_x^2-S_{xy}S_{xz}}{S_z^2S_x^2-(S_{xz})^2}$ minimizan $V(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lr})$.

En contraposición, si el tamaño de muestra es todo el universo (n=N) o x es una constante ($S_x^2=0$) o z es una constante ($S_z^2=0$) o la correlación entre x y z es perfecta positiva o negativa ($\rho_{xz}=-1$ o $\rho_{xz}=1$), entonces no se puede determinar si hay un mínimo. Al analizar cada situación, la primera no tiene sentido, ya que si n=N, la varianza es cero. En la segunda situación, para que $S_x^2=0$, x tiene que ser constante, en ese caso también, $S_{xy}=0$ y $S_{xz}=0$, y se tendría una indeterminación, ya que $b_1=\dfrac{0}{0}$ y $b_2=\dfrac{0}{0}$, igual pasa cuando $S_z^2=0$. Cabe destacar que estas dos situaciones también se presentan cuando se trabaja una sola variable auxiliar. Por último, cuando $\rho_{xz}=-1$ o $\rho_{xz}=1$, el denominador de b_1 y b_2 es cero ($S_x^2 S_z^2 - S_{xz}^2 = 0$), entonces $b_1 = \infty$ y $b_2 = \infty$, por lo tanto, no puede trabajarse el estimador.

De manera que si $n<N$, las variables auxiliares x, z no son constantes ($S_x^2 > 0$, $S_z^2 > 0$), y su correlación no es perfecta ($-1 < \rho_{xz} < 1$), entonces

$$b_{10} = \frac{S_{xy} S_z^2 - S_{yz} S_{xz}}{S_x^2 S_z^2 - (S_{xz})^2} \quad \text{y} \quad b_{20} = \frac{S_{yz} S_x^2 - S_{xy} S_{xz}}{S_z^2 S_x^2 - (S_{xz})^2}$$

son los valores que minimizan la varianza del estimador, para b_1 y b_2 constantes.

Es importante destacar que b_{10} y b_{20}, son los coeficientes utilizados en los estudios de regresión a través del método de los mínimos cuadrados, igual que para el caso de una variable auxiliar.

Sustituyendo $b_{10} = \frac{S_{xy} S_z^2 - S_{yz} S_{xz}}{S_x^2 S_z^2 - (S_{xz})^2}$ y $b_{20} = \frac{S_{yz} S_x^2 - S_{xy} S_{xz}}{S_z^2 S_x^2 - (S_{xz})^2}$ en la fórmula del *ECM* del promedio y del total, respectivamente,

$$EMC(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2 + b_{10}^2 S_x^2 + b_{20}^2 S_z^2 - 2b_{10} S_{xy} - 2b_{20} S_{yz} + 2b_{10} b_{20} S_{xz}\right]$$

$$EMC(\hat{Y}_{lr}) = V(\hat{Y}_{lr}) = \frac{N(N-n)}{n}\left[S_y^2 + b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} + 2b_1 b_2 S_{xz}\right]$$

Cuando no se dispone de los valores poblacionales, entonces,

$$\hat{b}_{10} = \frac{s_{xy} s_z^2 - s_{yz} s_{xz}}{s_x^2 s_z^2 - (s_{xz})^2} \quad \text{y} \quad \hat{b}_{20} = \frac{s_{yz} s_x^2 - s_{xy} s_{xz}}{s_z^2 s_x^2 - (s_{xz})^2}$$

y los estimadores de los errores cuadráticos medio,

$$E\hat{M}C(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \frac{N-n}{Nn}\left[s_y^2 + \hat{b}_{10}^2 s_x^2 + \hat{b}_{20}^2 s_z^2 - 2\hat{b}_{10} s_{xy} - 2\hat{b}_{20} s_{yz} + 2\hat{b}_{10} \hat{b}_{20} s_{xz}\right]$$

$$E\hat{M}C(\hat{Y}_{lr}) = \hat{V}(\hat{Y}_{lr}) = \frac{N(N-n)}{n}\left[s_y^2 + \hat{b}_1^2 s_x^2 + \hat{b}_2^2 s_z^2 - 2\hat{b}_1 s_{xy} - 2\hat{b}_2 s_{yz} + 2\hat{b}_1 \hat{b}_2 s_{xz}\right]$$

2.5.- Comparación con otros Estimadores

A continuación se comparará la precisión del estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares contra la precisión de diversos estimadores, como el directo, de razón, de regresión lineal simple y los estimadores indirectos compuestos. Sin embargo, al tener 3 variables (y, x, z) y 2 coeficientes (b1, b2), en todas las comparaciones se llega a resultados difíciles de aplicar.

2.5.1.- Comparación con el Estimador Directo

Para comparar la precisión del estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares con la del directo, se deben comparar sus errores cuadráticos medios, que son,

$$EMC(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} + 2b_1 b_2 S_{xz}\right)$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}) = \left(\frac{1-f}{n}\right) S_y^2$$

entonces, el estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares será más preciso que el estimador directo si

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) < ECM(\hat{\bar{Y}})$$

es decir,

$$\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} + 2b_1 b_2 S_{xz}\right) < \left(\frac{1-f}{n}\right) S_y^2$$

y esto se cumple si

$$b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} + 2b_1 b_2 S_{xz} < 0$$

2.5.2.- Comparación con el Estimador de Razón

Los errores cuadráticos medios de los estimadores de regresión lineal con 2 variables auxiliares y de razón, son,

$$EMC(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} + 2b_1 b_2 S_{xz}\right)$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_R) \approx \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}\right)$$

entonces, el estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares será más preciso que el estimador de razón si

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) < ECM(\hat{\bar{Y}}_R)$$

es decir,

$$\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} + 2b_1 b_2 S_{xz}\right) < \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}\right)$$

$$S_y^2 + b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} + 2b_1 b_2 S_{xz} < S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}$$

$$b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} + 2b_1 b_2 S_{xz} < R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}$$

$$b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} + 2b_1 b_2 S_{xz} - R^2 S_x^2 + 2RS_{xy} < 0$$

$$\left(b_1^2 - R^2\right)S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2\left(b_1 - R\right)S_{xy} - 2b_2 S_{yz} + 2b_1 b_2 S_{xz} < 0$$

2.5.3.- Comparación con el Estimador de Regresión Lineal Simple

Ahora se tienen dos estimadores de regresión lineal, con 2 y con 1 variable auxiliar, cuyos ECM, respectivamente son,

$$EMC(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} + 2b_1 b_2 S_{xz}\right)$$

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}\right)$$

entonces, el estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares será más preciso que el estimador de regresión lineal con 1 variable auxiliar si

$$\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} + 2b_1 b_2 S_{xz}\right) < \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}\right)$$

$$S_y^2 + b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} + 2b_1 b_2 S_{xz} < S_y^2 + b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}$$

$$b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} + 2b_1 b_2 S_{xz} < b^2 S_x^2 - 2bS_{xy}$$

$$b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} + 2b_1 b_2 S_{xz} - b^2 S_x^2 + 2bS_{xy} < 0$$

$$\left(b_1^2 - b^2\right)S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2\left(b_1 - b\right)S_{xy} - 2b_2 S_{yz} + 2b_1 b_2 S_{xz} < 0$$

2.5.4.- Comparación con el Estimador del Tipo Razón-Regresión

Aquí se tienen los siguientes Errores Cuadráticos Medio,

$$EMC(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} + 2b_1 b_2 S_{xz}\right)$$

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{Rr}) = \left(\frac{1-f}{n}\right)\left[\left(S_y^2 + R_y^2 S_x^2 - 2R_y S_{xy}\right) + b^2\left(S_z^2 + R_z^2 S_x^2 - 2R_z S_{xz}\right) - 2b\left(S_{yz} - R_z S_{xy} - R_y S_{xz} + R_y R_z S_x^2\right)\right]$$

Y el estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares será más preciso que el estimador de Razón-Regresión si,

$$\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2+b_1^2S_x^2+b_2^2S_z^2-2b_1S_{xy}-2b_2S_{yz}+2b_1b_2S_{xz}\right)<$$

$$\left(\frac{1-f}{n}\right)\left[\left(S_y^2+R_y^2S_x^2-2R_yS_{xy}\right)+b^2\left(S_z^2+R_z^2S_x^2-2R_zS_{xz}\right)-2b\left(S_{yz}-R_zS_{xy}-R_yS_{xz}+R_yR_zS_x^2\right)\right]$$

esto es,

$$\left(S_y^2+b_1^2S_x^2+b_2^2S_z^2-2b_1S_{xy}-2b_2S_{yz}+2b_1b_2S_{xz}\right)<$$

$$\left[\left(S_y^2+R_y^2S_x^2-2R_yS_{xy}\right)+b^2\left(S_z^2+R_z^2S_x^2-2R_zS_{xz}\right)-2b\left(S_{yz}-R_zS_{xy}-R_yS_{xz}+R_yR_zS_x^2\right)\right]$$

$$\left(b_1^2-b^2-R_y^2+2bR_yR_z\right)S_x^2+\left(b_2^2-b^2\right)S_z^2-2\left(b_1-R_y+bR_z\right)S_{xy}-2\left(b_2-b\right)S_{yz}+2\left(b_1b_2+b^2R_z-bR_y\right)S_{xz}<0$$

2.5.5.- Comparación con el Estimador del Tipo Regresión- Razón

Como se ha mencionado en 2.4.4, se tienen dos estimadores de Regresión-Razón,

$$\hat{\bar{Y}}_{rR}=\frac{\hat{\bar{Y}}_{rl}}{\hat{\bar{Z}}_{rl}}\bar{Z}=\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}\bar{Z} \qquad ; \qquad \hat{\bar{Y}}'_{rR}=\frac{\hat{\bar{Y}}_{rl}}{\hat{\bar{Z}}_{rl}}\bar{Z}=\frac{\bar{y}+b_1(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b_2(\bar{X}-\bar{x})}\bar{Z}$$

cuyos Errores Cuadráticos Medios son

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{rR})=\left(\frac{1-f}{n}\right)\left[\left(S_y^2+b^2S_x^2-2bS_{xy}\right)+\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2\left(S_z^2+b^2S_x^2-2bS_{xz}\right)-2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)\left(S_{yz}-bS_{xy}-bS_{xz}+b^2S_x^2\right)\right]$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}'_{rR})=\left(\frac{1-f}{n}\right)\left[\left(S_y^2+b_y^2S_x^2-2b_yS_{xy}\right)+\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2\left(S_z^2+b_z^2S_x^2-2b_zS_{xz}\right)-2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)\left(S_{yz}-b_zS_{xy}-b_yS_{xz}+b_yb_zS_x^2\right)\right]$$

Comparando con el primero, el estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares será más preciso que el estimador de Razón-Regresión con 1 coeficiente, si,

$$\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2+b_1^2S_x^2+b_2^2S_z^2-2b_1S_{xy}-2b_2S_{yz}+2b_1b_2S_{xz}\right)<$$

$$\left(\frac{1-f}{n}\right)\left[\left(S_y^2+b^2S_x^2-2bS_{xy}\right)+\left(\frac{\overline{Y}}{\overline{Z}}\right)^2\left(S_z^2+b^2S_x^2-2bS_{xz}\right)-2\left(\frac{\overline{Y}}{\overline{Z}}\right)\left(S_{yz}-bS_{xy}-bS_{xz}+b^2S_x^2\right)\right]$$

operando se tiene,

$$S_y^2+b_1^2S_x^2+b_2^2S_z^2-2b_1S_{xy}-2b_2S_{yz}+2b_1b_2S_{xz}<$$

$$\left(S_y^2+b^2S_x^2-2bS_{xy}\right)+\left(\frac{\overline{Y}}{\overline{Z}}\right)^2\left(S_z^2+b^2S_x^2-2bS_{xz}\right)-2\left(\frac{\overline{Y}}{\overline{Z}}\right)\left(S_{yz}-bS_{xy}-bS_{xz}+b^2S_x^2\right)$$

$$\left(b_1^2-b^2\left(1-\left(\frac{\overline{Y}}{\overline{Z}}\right)\right)^2\right)S_x^2+\left(b_2^2-\left(\frac{\overline{Y}}{\overline{Z}}\right)^2\right)S_z^2-2\left(b_1-b\left(1-\left(\frac{\overline{Y}}{\overline{Z}}\right)\right)\right)S_{xy}-2\left(b_2+\left(\frac{\overline{Y}}{\overline{Z}}\right)\right)S_{yz}+$$

$$+2\left(b_1b_2+\left(\frac{\overline{Y}}{\overline{Z}}\right)^2b-\left(\frac{\overline{Y}}{\overline{Z}}\right)b\right)S_{xz}<0$$

Para el segundo caso, el estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares será más preciso que el estimador de Razón-Regresión con 2 coeficientes, si,

$$\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2+b_1^2S_x^2+b_2^2S_z^2-2b_1S_{xy}-2b_2S_{yz}+2b_1b_2S_{xz}\right)<$$

$$\left(\frac{1-f}{n}\right)\left[\left(S_y^2 + b_y^2 S_x^2 - 2b_y S_{xy}\right) + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 \left(S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}\right) - 2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)\left(S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2\right)\right]$$

esto es,

$$S_y^2 + b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} + 2b_1 b_2 S_{xz} <$$

$$\left(S_y^2 + b_y^2 S_x^2 - 2b_y S_{xy}\right) + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 \left(S_z^2 + b_z^2 S_x^2 - 2b_z S_{xz}\right) - 2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)\left(S_{yz} - b_z S_{xy} - b_y S_{xz} + b_y b_z S_x^2\right)$$

$$\left(b_1^2 - b_y^2 - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 b_z^2 + 2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) b_y b_z\right) S_x^2 + \left(b_2^2 - \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2\right) S_z^2 - 2\left(b_1 - b_y + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) b_z\right) S_{xy} - 2\left(b_2 - 2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)\right) S_{yz} +$$

$$+2\left(b_1 b_2 + \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right)^2 b_z - 2\left(\frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}\right) b_y\right) S_{xz} < 0$$

3.- ESTIMADOR DE REGRESIÓN LINEAL CON TRES VARIABLES AUXILIARES EN MUESTREO ALEATORIO SIMPLE

Siguiendo con la agregación de variables auxiliares, en este capítulo se trabajará con 3 variables auxiliares, que serán *x*, *z*, *t*.

En principio se trabajará en muestreo aleatorio simple, y la estructura de los estimadores es la siguiente,

$$\hat{\bar{Y}}_{lr} = \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) + b_2(\bar{Z} - \bar{z}) + b_3(\bar{T} - \bar{t})$$

$$\hat{Y}_{lr} = N\hat{\bar{Y}}_{lr} = N\left[\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) + b_2(\bar{Z} - \bar{z}) + b_3(\bar{T} - \bar{t})\right] = \hat{Y} + b_1(X - \hat{\bar{X}}) + b_2(Z - \hat{Z}) + b_3(T - \hat{T})$$

A continuación se muestra el desarrollo de los mismos.

3.1. - Estimadores

Sea un universo de *N* elementos, y sean $y_1, y_{2,..,} y_N$; $x_1, x_{2,..,} x_N$; $z_1, z_{2,..,} z_N$; $t_1, t_{2,..,} t_N$ las observaciones de las variables *y* , *x* , *z*, *t*, sobre cada uno de ellos.

Se puede expresar a la variable *"y"* como una función lineal de *"x"*, *"z"* y *"t"* , de la siguiente manera,

$$y_i = a + b_1 x_i + b_2 z_i + b_3 t_i + e_i \qquad (21)$$

donde *"a"* es el punto de corte del hiperplano en el eje de la variable *"y"*; *"b_1", "b_2"* y *"b_3"* son las pendientes del hiperplano y *"e_i"* es el desvío que tiene *"y_i"* respecto del hiperplano, además,

$$e_i \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{N} e_i = 0$$

Sea $$y'_i = a + b_1 x_i + b_2 z_i + b_3 t_i \tag{22}$$

un estimador de y_i , y se cumple que $$\sum_{i=1}^{N} y_i = \sum_{i=1}^{N} y'_i$$

ya que,

$$\sum_{i=}^{N} y_i = \sum_{i=1}^{N}(a + b_1 x_i + b_2 z_i + b_3 t_i + e_i) = Na + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + b_2 \sum_{i=1}^{N} z_i + b_3 \sum_{i=1}^{N} t_i + \sum_{i=1}^{N} e_i$$

$$= Na + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + b_2 \sum_{i=1}^{N} z_i + b_3 \sum_{i=1}^{N} t_i = \sum_{i=1}^{N}(a + b_1 x_i + b_2 z_i + b_3 t_i) = \sum_{i=1}^{N} y'_i$$

Si se aplica a (21) sumatoria hasta *N* y luego se divide entre *N*, se tiene,

$$Y = \sum_{i=}^{N} y_i = N\,a + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + b_2 \sum_{i=1}^{N} z_i + \sum_{i=1}^{N} e_i = N\,a + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + b_2 \sum_{i=1}^{N} z_i + b_3 \sum_{i=1}^{N} t_i \quad y \quad \bar{Y} = a + b_1 \bar{X} + b_2 \bar{Z} + b_3 \bar{T} \tag{23}$$

si se toma una muestra de tamaño n, $n \le N$, y se le aplica a (21) las mismas operaciones anteriores, pero hasta n, se tiene que,

$$\sum_{i=}^{n} y_i = n\,a + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + b_2 \sum_{i=1}^{n} z_i + b_3 \sum_{i=1}^{n} t_i + \sum_{i=1}^{n} e_i \quad y \quad \bar{y} = a + b_1 \bar{x} + b_2 \bar{z} + b_3 \bar{t} + \bar{e} \tag{24}$$

donde $\bar{e}$ es el promedio muestral de los desvíos y además es diferente de cero. Restando (24) de (23),

$$\bar{Y}-\bar{y}=b_1\bar{X}-b_1\bar{x}+b_2\bar{Z}-b_2\bar{z}+b_3\bar{T}-b_3\bar{t}-\bar{e} \quad \Rightarrow \quad \bar{Y}=\bar{y}+b_1\bar{X}-b_1\bar{x}+b_2\bar{Z}-b_2\bar{z}+b_3\bar{T}-b_3\bar{t}-\bar{e}$$

si se hace $e'_i=-e_i$, entonces $\bar{Y}=\bar{y}+b_1(\bar{X}-\bar{x})+b_2(\bar{Z}-\bar{z})+b_3(\bar{T}-\bar{t})+\bar{e}'$ (25)

El valor de *"a"* se puede obtener igualando (25) a (23), $a=\bar{y}-b_1\bar{x}-b_2\bar{z}-b_3\bar{t}+\bar{e}'$

Si los datos se comportan como un hiperplano, entonces $\bar{e}=\bar{e}'=0$

de lo que puede decirse que un estimador del promedio poblacional es,

$$\hat{\bar{Y}}_{lr}=\bar{y}+b_1(\bar{X}-\bar{x})+b_2(\bar{Z}-\bar{z})+b_3(\bar{T}-\bar{t}) \tag{26}$$

y será bueno en la medida que e_i converja a cero, es decir, cuando y_i se aproxime al hiperplano $a+b_1x+b_2z+b_3t$. El estimador mostrado en (26) es el "estimador de regresión lineal del promedio poblacional" y el estimador del total viene dado por la expresión,

$$\hat{Y}_{lr}=N\hat{\bar{Y}}_{lr}=\hat{Y}+b_1(X-\hat{X})+b_2(Z-\hat{Z})+b_3(T-\hat{T}) \tag{27}$$

3.2.- Esperanza de los Estimadores

Véase la esperanza del estimador de regresión lineal del promedio,

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\bar{Y}}_{lr}) &= E\left[\bar{y}+b_1(\bar{X}-\bar{x})+b_2(\bar{Z}-\bar{z})+b_3(\bar{T}-\bar{t})\right] \\
&= E(\bar{y})+\bar{X}\,E(b_1)-E(b_1\bar{x})+\bar{Z}E(b_2)-E(b_2\bar{z})+\bar{T}E(b_3)-E(b_3\bar{t}) \\
&= E(\bar{y})+E(\bar{x})E(b_1)-E(b_1\bar{x})+E(\bar{z})E(b_2)-E(b_2\bar{z})+E(\bar{t})E(b_3)-E(b_3\bar{t}) \\
&= E(\bar{y})-\left[E(b_1\bar{x})-E(\bar{x})\,E(b_1)\right]-\left[E(b_2\bar{z})-E(\bar{z})\,E(b_2)\right]-\left[E(b_3\bar{t})-E(\bar{t})\,E(b_3)\right] \qquad (28) \\
&= \bar{Y}-COV(b_1,\bar{x})-COV(b_2,\bar{z})-COV(b_3,\bar{t}) \qquad (29)
\end{aligned}
$$

por lo tanto, no es un estimador insesgado y su sesgo es

$$
\begin{aligned}
B(\hat{\bar{Y}}_{lr}) &= \bar{Y}-E(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \bar{Y}-\bar{Y}+COV(b_1,\bar{x})+COV(b_2,\bar{z})+COV(b_3,\bar{t}) \\
&= COV(b_1,\bar{x})+COV(b_2,\bar{z})+COV(b_3,\bar{t}) \qquad (30)
\end{aligned}
$$

Al no ser un estimador insesgado, el error cuadrático medio es,

$$
ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) + \left(B(\hat{\bar{Y}}_{lr})\right)^2
$$

3.3.- Error Cuadrático Medio de los Estimadores

Como ya se demostró,

$$
\begin{aligned}
B(\hat{\bar{Y}}_{lr}) &= COV(b_1,\bar{x})+COV(b_2,\bar{z})+COV(b_3,\bar{t}) \\
&= E(b_1\bar{x})-\bar{X}E(b_1)+E(b_2\bar{z})-\bar{Z}E(b_2)+E(b_3\bar{t})-\bar{T}E(b_3)
\end{aligned}
$$

entonces,

$$\left(B(\hat{\bar{Y}}_{lr})\right)^2 = \left(E(b_1\bar{x})\right)^2 + \bar{X}^2\left(E(b_1)\right)^2 + \left(E(b_2\bar{z})\right)^2 + \bar{Z}^2\left(E(b_2)\right)^2 + \left(E(b_3\bar{t})\right)^2 + \bar{T}^2\left(E(b_3)\right)^2 -$$

$$-2\bar{X}E(b_1)E(b_1\bar{x}) + 2E(b_1\bar{x})E(b_2\bar{z}) - 2\bar{Z}E(b_1\bar{x})E(b_2) + 2E(b_1\bar{x})E(b_3\bar{t}) -$$

$$-2\bar{T}E(b_1\bar{x})E(b_3) - 2\bar{X}E(b_1)E(b_2\bar{z}) + 2\bar{X}\bar{Z}E(b_1)E(b_2) - 2\bar{X}E(b_1)E(b_3\bar{t}) +$$

$$+2\bar{X}\bar{T}E(b_1)E(b_3) - 2\bar{Z}E(b_2)E(b_2\bar{z}) + 2E(b_2\bar{z})E(b_3\bar{t}) - 2\bar{T}E(b_2\bar{z})E(b_3) -$$

$$-2\bar{Z}E(b_2)E(b_3\bar{t}) + 2\bar{Z}\bar{T}E(b_2)E(b_3) - 2\bar{T}E(b_3)E(b_3\bar{t}) \qquad (31)$$

Se procederá a hallar la varianza del estimador del promedio.

$$V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = E\left[\hat{\bar{Y}}_{lr} - E(\hat{\bar{Y}}_{lr})\right]^2 = E\left(\hat{\bar{Y}}_{lr}^2\right) - \left[E(\hat{\bar{Y}}_{lr})\right]^2$$

$$= E(\hat{\bar{Y}}_{lr}^2) - \left[\bar{Y} - [E(b_1\bar{x}) - E(\bar{x})E(b_1)] - [E(b_2\bar{z}) - E(\bar{z})E(b_2)] - [E(b_3\bar{t}) - E(\bar{t})E(b_3)]\right]^2$$

$$= E(\hat{\bar{Y}}_{lr}^2) - \left[\bar{Y} - E(b_1\bar{x}) + E(\bar{x})E(b_1) - E(b_2\bar{z}) + E(\bar{z})E(b_2) - E(b_3\bar{t}) + E(\bar{t})E(b_3)\right]^2$$

$$= E(\hat{\bar{Y}}_{lr}^2) - \Big[\bar{Y}^2 + \left(E(b_1\bar{x})\right)^2 + \bar{X}^2\left(E(b_1)\right)^2 + \left(E(b_2\bar{z})\right)^2 + \bar{Z}^2\left(E(b_2)\right)^2 + \left(E(b_3\bar{t})\right)^2 + \bar{T}^2\left(E(b_3)\right)^2 -$$

$$-2\bar{Y}E(b_1\bar{x}) + 2\bar{X}\bar{Y}E(b_1) - 2\bar{Y}E(b_2\bar{z}) + 2\bar{Y}\bar{Z}E(b_2) - 2\bar{Y}E(b_3\bar{t}) + 2\bar{Y}\bar{T}E(b_3) -$$

$$-2\bar{X}E(b_1\bar{x})E(b_1) + 2E(b_1\bar{x})E(b_2\bar{z}) - 2\bar{Z}E(b_1\bar{x})E(b_2) + 2E(b_1\bar{x})E(b_3\bar{t}) - 2\bar{T}E(b_1\bar{x})E(b_3) -$$

$$-2\bar{X}E(b_1)E(b_2\bar{z}) + 2\bar{X}\bar{Z}E(b_1)E(b_2) - 2\bar{X}E(b_1)E(b_3\bar{t}) + 2\bar{X}\bar{T}E(b_1)E(b_3) -$$

$$-2\bar{Z}E(b_2\bar{z})E(b_2) + 2E(b_2\bar{z})E(b_3\bar{t}) - 2\bar{T}E(b_2\bar{z})E(b_3) -$$

$$-2\bar{Z}E(b_2)E(b_3\bar{t}) + 2\bar{Z}\bar{T}E(b_2)E(b_3) - 2\bar{T}E(b_3)E(b_3\bar{t})\Big]$$

$$=E(\hat{\bar{Y}}_{lr}^{2})-\bar{Y}^{2}-\left(E(b_1\bar{x})\right)^2-\bar{X}^{2}\left(E(b_1)\right)^2-\left(E(b_2\bar{z})\right)^2-\bar{Z}^{2}\left(E(b_2)\right)^2-\left(E(b_3\bar{t})\right)^2-\bar{T}^{2}\left(E(b_3)\right)^2+$$

$$+2\bar{Y}E(b_1\bar{x})-2\bar{X}\bar{Y}\,E(b_1)+2\bar{Y}E(b_2\bar{z})-2\bar{Y}\bar{Z}\,E(b_2)+2\bar{Y}E(b_3\bar{t})-2\bar{Y}\bar{T}\,E(b_3)+$$

$$+2\bar{X}E(b_1\bar{x})E(b_1)-2E(b_1\bar{x})E(b_2\bar{z})+2\bar{Z}\,E(b_1\bar{x})E(b_2)-2E(b_1\bar{x})E(b_3\bar{t})+2\bar{T}\,E(b_1\bar{x})E(b_3)+$$

$$+2\bar{X}\,E(b_1)E(b_2\bar{z})-2\bar{X}\bar{Z}E(b_1)E(b_2)+2\bar{X}\,E(b_1)E(b_3\bar{t})-2\bar{X}\bar{T}E(b_1)E(b_3)+$$

$$+2\bar{Z}E(b_2\bar{z})E(b_2)-2E(b_2\bar{z})E(b_3\bar{t})+2\bar{T}E(b_2\bar{z})E(b_3)+$$

$$+\,2\bar{Z}E(b_2)E(b_3\bar{t})-2\bar{Z}\bar{T}E(b_2)E(b_3)+2\bar{T}\;E(b_3)E(b_3\bar{t}) \qquad (32)$$

desarrollando $E(\hat{\bar{Y}}_{lr}^{2})$, se tiene,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lr}^{2})\;=E\left[\left(\bar{y}+b_1(\bar{X}-\bar{x})+b_2(\bar{Z}-\bar{z})+b_3(\bar{T}-\bar{t})\right)^2\right]=E\left[\left(\bar{y}+\bar{X}b_1-b_1\bar{x}+\bar{Z}b_2-b_2\bar{z}+\bar{T}b_3-b_3\bar{t}\right)^2\right]$$

$$=E\Big[\bar{y}^{2}+\bar{X}^{2}b_1^2+b_1^2\bar{x}^{2}+\bar{Z}^{2}b_2^2+b_2^2\bar{z}^{2}+\bar{T}^{2}b_3^2+b_3^2\bar{t}^{2}+$$

$$+2\bar{X}b_1\bar{y}-2b_1\bar{x}\bar{y}+2\bar{Z}b_2\bar{y}-2b_2\bar{y}\bar{z}+2\bar{T}b_3\bar{y}-2b_3\bar{y}\bar{t}-$$

$$-2\bar{X}b_1^2\bar{x}+2\bar{X}\bar{Z}b_1b_2-2\bar{X}b_1b_2\bar{z}+2\bar{X}\bar{T}b_1b_3-2\bar{X}b_1b_3\bar{t}-$$

$$-2\bar{Z}b_1b_2\bar{x}+2b_1b_2\bar{x}\bar{z}-2\bar{T}b_1b_3\bar{x}+2b_1b_3\bar{x}\bar{t}-$$

$$-2\bar{Z}b_2^2\bar{z}+2\bar{Z}\bar{T}b_2b_3-2\bar{Z}b_2b_3\bar{t}-$$

$$-2\bar{T}b_2b_3\bar{z}+2b_2b_3\bar{z}\bar{t}-2\bar{T}b_3^2\bar{t}\Big]$$

$$=E\left(\bar{y}^{2}\right)+E\left(\bar{X}^{2}b_1^2\right)+E\left(b_1^2\bar{x}^{2}\right)+E\left(\bar{Z}^{2}b_2^2\right)+E\left(b_2^2\bar{z}^{2}\right)+E\left(\bar{T}^{2}b_3^2\right)+E\left(b_3^2\bar{t}^{2}\right)+$$

$$+2\bar{X}E(b_1\bar{y})-2E(b_1\bar{x}\bar{y})+2\bar{Z}E(b_2\bar{y})-2E(b_2\bar{y}\bar{z})+2\bar{T}E(b_3\bar{y})-2E(b_3\bar{y}\bar{t})-$$

$$-2\bar{X}E(b_1^2\bar{x})+2\bar{X}\bar{Z}E(b_1b_2)-2\bar{X}E(b_1b_2\bar{z})+2\bar{X}\bar{T}E(b_1b_3)-2\bar{X}E(b_1b_3\bar{t})-$$

$$-2\bar{Z}E(b_1b_2\bar{x})+2E(b_1b_2\bar{x}\bar{z})-2\bar{T}E(b_1b_3\bar{x})+2E(b_1b_3\bar{x}\bar{t})-$$

$$-2\bar{Z}E(b_2^2\bar{z})+2\bar{Z}\bar{T}E(b_2b_3)-2\bar{Z}E(b_2b_3\bar{t})-$$

$$-2\bar{T}E(b_2b_3\bar{z})+2E(b_2b_3\bar{z}\bar{t})-2\bar{T}E(b_3^2\bar{t})$$

que al sustituir en (32), se tiene que,

$$V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = E\left(\bar{y}^2\right)+E\left(\bar{X}^2b_1^2\right)+E\left(b_1^2\bar{x}^2\right)+E\left(\bar{Z}^2b_2^2\right)+E\left(b_2^2\bar{z}^2\right)+E\left(\bar{T}^2b_3^2\right)+E\left(b_3^2\bar{t}^2\right)+$$

$$+2\bar{X}E(b_1\bar{y})-2E(b_1\bar{x}\bar{y})+2\bar{Z}E(b_2\bar{y})-2E(b_2\bar{y}\bar{z})+2\bar{T}E(b_3\bar{y})-2E(b_3\bar{y}\bar{t})-$$

$$-2\bar{X}E(b_1^2\bar{x})+2\bar{X}\bar{Z}E(b_1b_2)-2\bar{X}E(b_1b_2\bar{z})+2\bar{X}\bar{T}E(b_1b_3)-2\bar{X}E(b_1b_3\bar{t})-$$

$$-2\bar{Z}E(b_1b_2\bar{x})+2E(b_1b_2\bar{x}\bar{z})-2\bar{T}E(b_1b_3\bar{x})+2E(b_1b_3\bar{x}\bar{t})-$$

$$-2\bar{Z}E(b_2^2\bar{z})+2\bar{Z}\bar{T}E(b_2b_3)-2\bar{Z}E(b_2b_3\bar{t})-$$

$$-2\bar{T}E(b_2b_3\bar{z})+2E(b_2b_3\bar{z}\bar{t})-2\bar{T}E(b_3^2\bar{t})$$

$$-\bar{Y}^2-\left(E(b_1\bar{x})\right)^2-\bar{X}^2\left(E(b_1)\right)^2-\left(E(b_2\bar{z})\right)^2-\bar{Z}^2\left(E(b_2)\right)^2-\left(E(b_3\bar{t})\right)^2-\bar{T}^2\left(E(b_3)\right)^2+$$

$$+2\bar{Y}E(b_1\bar{x})-2\bar{X}\bar{Y}\,E(b_1)+2\bar{Y}E(b_2\bar{z})-2\bar{Y}\bar{Z}\,E(b_2)+2\bar{Y}E(b_3\bar{t})-2\bar{Y}\bar{T}\,E(b_3)+$$

$$+2\bar{X}E(b_1\bar{x})E(b_1)-2E(b_1\bar{x})E(b_2\bar{z})+2\bar{Z}\,E(b_1\bar{x})E(b_2)-2E(b_1\bar{x})E(b_3\bar{t})+2\bar{T}\,E(b_1\bar{x})E(b_3)+$$

$$+2\bar{X}\,E(b_1)E(b_2\bar{z})-2\bar{X}\bar{Z}E(b_1)E(b_2)+2\bar{X}\,E(b_1)E(b_3\bar{t})-2\bar{X}\bar{T}E(b_1)E(b_3)+$$

$$+2\bar{Z}E(b_2\bar{z})E(b_2)-2E(b_2\bar{z})E(b_3\bar{t})+2\bar{T}E(b_2\bar{z})E(b_3)+$$

$$+2\bar{Z}E(b_2)E(b_3\bar{t})-2\bar{Z}\bar{T}E(b_2)E(b_3)+2\bar{T}\,E(b_3)E(b_3\bar{t})$$

$$V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \left[E\left(\bar{y}^2\right) - \bar{Y}^2\right] + E\left(\bar{X}^2 b_1^2\right) + E\left(b_1^2 \bar{x}^2\right) + E\left(\bar{Z}^2 b_2^2\right) + E\left(b_2^2 \bar{z}^2\right) + E\left(\bar{T}^2 b_3^2\right) + E\left(b_3^2 \bar{t}^2\right) +$$

$$+2\bar{X}E(b_1\bar{y}) - 2E(b_1\bar{x}\bar{y}) + 2\bar{Z}E(b_2\bar{y}) - 2E(b_2\bar{y}\bar{z}) + 2\bar{T}E(b_3\bar{y}) - 2E(b_3\bar{y}\bar{t}) -$$

$$-2\bar{X}E(b_1^2\bar{x}) + 2\bar{X}\bar{Z}E(b_1 b_2) - 2\bar{X}E(b_1 b_2 \bar{z}) + 2\bar{X}\bar{T}E(b_1 b_3) - 2\bar{X}E(b_1 b_3 \bar{t}) -$$

$$-2\bar{Z}E(b_1 b_2 \bar{x}) + 2E(b_1 b_2 \bar{x}\bar{z}) - 2\bar{T}E(b_1 b_3 \bar{x}) + 2E(b_1 b_3 \bar{x}\bar{t}) -$$

$$-2\bar{Z}E(b_2^2 \bar{z}) + 2\bar{Z}\bar{T}E(b_2 b_3) - 2\bar{Z}E(b_2 b_3 \bar{t}) -$$

$$-2\bar{T}E(b_2 b_3 \bar{z}) + 2E(b_2 b_3 \bar{z}\bar{t}) - 2\bar{T}E(b_3^2 \bar{t})$$

$$-\left(E(b_1\bar{x})\right)^2 - \bar{X}^2\left(E(b_1)\right)^2 - \left(E(b_2\bar{z})\right)^2 - \bar{Z}^2\left(E(b_2)\right)^2 - \left(E(b_3\bar{t})\right)^2 - \bar{T}^2\left(E(b_3)\right)^2 +$$

$$+2\bar{Y}E(b_1\bar{x}) - 2\bar{X}\bar{Y}\,E(b_1) + 2\bar{Y}E(b_2\bar{z}) - 2\bar{Y}\bar{Z}\,E(b_2) + 2\bar{Y}E(b_3\bar{t}) - 2\bar{Y}\bar{T}\,E(b_3) +$$

$$+2\bar{X}E(b_1\bar{x})E(b_1) - 2E(b_1\bar{x})E(b_2\bar{z}) + 2\bar{Z}\,E(b_1\bar{x})E(b_2) - 2E(b_1\bar{x})E(b_3\bar{t}) + 2\bar{T}\,E(b_1\bar{x})E(b_3) +$$

$$+2\bar{X}\,E(b_1)E(b_2\bar{z}) - 2\bar{X}\bar{Z}E(b_1)E(b_2) + 2\bar{X}\,E(b_1)E(b_3\bar{t}) - 2\bar{X}\bar{T}E(b_1)E(b_3) +$$

$$+2\bar{Z}E(b_2\bar{z})E(b_2) - 2E(b_2\bar{z})E(b_3\bar{t}) + 2\bar{T}E(b_2\bar{z})E(b_3) +$$

$$+2\bar{Z}E(b_2)E(b_3\bar{t}) - 2\bar{Z}\bar{T}E(b_2)E(b_3) + 2\bar{T}\,E(b_3)E(b_3\bar{t}) \qquad (33)$$

entonces el Error Cuadrático Medio es la suma de (31) y (33), es decir,

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) + \left(B(\hat{\bar{Y}}_{lr})\right)^2$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \left[E\left(\bar{y}^2\right) - \bar{Y}^2\right] + E\left(\bar{X}^2 b_1^2\right) + E\left(b_1^2 \bar{x}^2\right) + E\left(\bar{Z}^2 b_2^2\right) + E\left(b_2^2 \bar{z}^2\right) + E\left(\bar{T}^2 b_3^2\right) + E\left(b_3^2 \bar{t}^2\right) +$$

$$+2\bar{X}E(b_1\bar{y}) - 2E(b_1\bar{x}\bar{y}) + 2\bar{Z}E(b_2\bar{y}) - 2E(b_2\bar{y}\bar{z}) + 2\bar{T}E(b_3\bar{y}) - 2E(b_3\bar{y}\bar{t}) -$$

$$-2\bar{X}E(b_1^2\bar{x}) + 2\bar{X}\bar{Z}E(b_1 b_2) - 2\bar{X}E(b_1 b_2 \bar{z}) + 2\bar{X}\bar{T}E(b_1 b_3) - 2\bar{X}E(b_1 b_3 \bar{t}) -$$

$$-2\bar{Z}E(b_1 b_2 \bar{x}) + 2E(b_1 b_2 \bar{x}\bar{z}) - 2\bar{T}E(b_1 b_3 \bar{x}) + 2E(b_1 b_3 \bar{x}\bar{t}) -$$

$$-2\bar{Z}E(b_2^2\bar{z})+2\bar{Z}\bar{T}E(b_2b_3)-2\bar{Z}E(b_2b_3\bar{t})-$$

$$-2\bar{T}E(b_2b_3\bar{z})+2E(b_2b_3\bar{z}\bar{t})-2\bar{T}E(b_3^2\bar{t})$$

$$-\left(E(b_1\bar{x})\right)^2-\bar{X}^2\left(E(b_1)\right)^2-\left(E(b_2\bar{z})\right)^2-\bar{Z}^2\left(E(b_2)\right)^2-\left(E(b_3\bar{t})\right)^2-\bar{T}^2\left(E(b_3)\right)^2+$$

$$+2\bar{Y}E(b_1\bar{x})-2\overline{XY}\,E(b_1)+2\bar{Y}E(b_2\bar{z})-2\overline{YZ}\,E(b_2)+2\bar{Y}E(b_3\bar{t})-2\overline{YT}\,E(b_3)+$$

$$+2\bar{X}E(b_1\bar{x})E(b_1)-2E(b_1\bar{x})E(b_2\bar{z})+2\bar{Z}\,E(b_1\bar{x})E(b_2)-2E(b_1\bar{x})E(b_3\bar{t})+2\bar{T}\,E(b_1\bar{x})E(b_3)+$$

$$+2\bar{X}\,E(b_1)E(b_2\bar{z})-2\overline{XZ}E(b_1)E(b_2)+2\bar{X}\,E(b_1)E(b_3\bar{t})-2\overline{XT}E(b_1)E(b_3)+$$

$$+2\bar{Z}E(b_2\bar{z})E(b_2)-2E(b_2\bar{z})E(b_3\bar{t})+2\bar{T}E(b_2\bar{z})E(b_3)+$$

$$+2\bar{Z}E(b_2)E(b_3\bar{t})-2\bar{Z}\bar{T}E(b_2)E(b_3)+2\bar{T}\,E(b_3)E(b_3\bar{t})$$

$$+\left(E(b_1\bar{x})\right)^2+\bar{X}^2\left(E(b_1)\right)^2+\left(E(b_2\bar{z})\right)^2+\bar{Z}^2\left(E(b_2)\right)^2+\left(E(b_3\bar{t})\right)^2+\bar{T}^2\left(E(b_3)\right)^2-$$

$$-2\bar{X}\,E(b_1)E(b_1\bar{x})+2E(b_1\bar{x})E(b_2\bar{z})-2\bar{Z}E(b_1\bar{x})E(b_2)+2E(b_1\bar{x})E(b_3\bar{t})-$$

$$-2\bar{T}\,E(b_1\bar{x})E(b_3)-2\bar{X}E(b_1)E(b_2\bar{z})+2\overline{XZ}E(b_1)E(b_2)-2\bar{X}E(b_1)E(b_3\bar{t})+$$

$$+2\overline{XT}E(b_1)E(b_3)-2\bar{Z}E(b_2)E(b_2\bar{z})+2E(b_2\bar{z})\,E(b_3\bar{t})-2\bar{T}E(b_2\bar{z})E(b_3)-$$

$$-2\bar{Z}\,E(b_2)E(b_3\bar{t})+2\bar{Z}\bar{T}\,E(b_2)E(b_3)-2\bar{T}\,E(b_3)\,E(b_3\bar{t})$$

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr})=V(\bar{y})+E\left(\bar{X}^2b_1^2\right)+E\left(b_1^2\bar{x}^2\right)+E\left(\bar{Z}^2b_2^2\right)+E\left(b_2^2\bar{z}^2\right)+E\left(\bar{T}^2b_3^2\right)+E\left(b_3^2\bar{t}^2\right)+$$

$$+2\bar{X}E(b_1\bar{y})-2E(b_1\bar{x}\bar{y})+2\bar{Z}E(b_2\bar{y})-2E(b_2\bar{y}\bar{z})+2\bar{T}E(b_3\bar{y})-2E(b_3\bar{y}\bar{t})-$$

$$-2\bar{X}E(b_1^2\bar{x})+2\overline{XZ}E(b_1b_2)-2\bar{X}E(b_1b_2\bar{z})+2\overline{XT}E(b_1b_3)-2\bar{X}E(b_1b_3\bar{t})-$$

$$-2\bar{Z}E(b_1b_2\bar{x})+2E(b_1b_2\bar{x}\bar{z})-2\bar{T}E(b_1b_3\bar{x})+2E(b_1b_3\bar{x}\bar{t})-$$

$$-2\bar{Z}E(b_2^2\bar{z})+2\bar{Z}\bar{T}E(b_2b_3)-2\bar{Z}E(b_2b_3\bar{t})-$$

$$-2\bar{T}E(b_2b_3\bar{z})+2E(b_2b_3\bar{z}\bar{t})-2\bar{T}E(b_3^2\bar{t})+$$

$$+2\bar{Y}E(b_1\bar{x})-2\bar{X}\bar{Y}\ E(b_1)+2\bar{Y}E(b_2\bar{z})-2\bar{Y}\bar{Z}\ E(b_2)+2\bar{Y}E(b_3\bar{t})-2\bar{Y}\bar{T}\ E(b_3) \tag{34}$$

En el caso del estimador del total se tiene que, como se había mostrado en (27),

$$\hat{Y}_{lr} = N\hat{\bar{Y}}_{lr} = \hat{Y} + b_1(X-\hat{X}) + b_2(Z-\hat{Z}) + b_3(T-\hat{T}) \tag{35}$$

su respectiva esperanza, sesgo, varianza y Error Cuadrático Medio son:

$$E(\hat{Y}_{lr}) = E(\hat{Y}) - \left[E(b_1\hat{X}) - E(\hat{X})E(b_1)\right] - \left[E(b_2\hat{Z}) - E(\hat{Z})E(b_2)\right] - \left[E(b_3\hat{T}) - E(\hat{T})E(b_3)\right]$$

$$= Y - COV(b_1,\hat{X}) - COV(b_2,\hat{Z}) - COV(b_3,\hat{T})$$

$$B(\hat{Y}_{lr}) = COV(b_1,\hat{X}) + COV(b_2,\hat{Z}) + COV(b_3,\hat{T})$$

$$V(\hat{Y}_{lr}) = \left[E\left(\hat{Y}^2\right) - Y^2\right] + E\left(X^2b_1^2\right) + E\left(b_1^2\hat{X}^2\right) + E\left(Z^2b_2^2\right) + E\left(b_2^2\hat{Z}^2\right) + E\left(T^2b_3^2\right) + E\left(b_3^2\hat{T}^2\right) +$$

$$+2XE(b_1\hat{Y}) - 2E(b_1\hat{X}\hat{Y}) + 2ZE(b_2\hat{Y}) - 2E(b_2\hat{Y}\hat{Z}) + 2TE(b_3\hat{Y}) - 2E(b_3\hat{Y}\hat{T}) -$$

$$-2XE(b_1^2\hat{X}) + 2XZE(b_1b_2) - 2XE(b_1b_2\hat{Z}) + 2XTE(b_1b_3) - 2XE(b_1b_3\hat{T}) -$$

$$-2ZE(b_1b_2\hat{X}) + 2E(b_1b_2\hat{X}\hat{Z}) - 2TE(b_1b_3\hat{X}) + 2E(b_1b_3\hat{X}\hat{T}) -$$

$$-2ZE(b_2^2\hat{Z}) + 2ZTE(b_2b_3) - 2ZE(b_2b_3\hat{T}) -$$

$$-2TE(b_2b_3\hat{Z}) + 2E(b_2b_3\hat{Z}\hat{T}) - 2TE(b_3^2\hat{T})$$

$$-\left(E(b_1\hat{X})\right)^2 - X^2\left(E(b_1)\right)^2 - \left(E(b_2\hat{Z})\right)^2 - Z^2\left(E(b_2)\right)^2 - \left(E(b_3\hat{T})\right)^2 - T^2\left(E(b_3)\right)^2 +$$

$$+2YE(b_1\hat{X})-2XY\,E(b_1)+2YE(b_2\hat{Z})-2YZ\,E(b_2)+2YE(b_3\hat{T})-2YT\,E(b_3)+$$

$$+2XE(b_1\hat{X})E(b_1)-2E(b_1\hat{X})E(b_2\hat{Z})+2Z\,E(b_1\hat{X})E(b_2)-2E(b_1\hat{X})E(b_3\hat{T})+2T\,E(b_1\hat{X})E(b_3)+$$

$$+2X\,E(b_1)E(b_2\hat{Z})-2XZE(b_1)\,E(b_2)+2X\,E(b_1)E(b_3\hat{T})-2XTE(b_1)\,E(b_3)+$$

$$+2ZE(b_2\hat{Z})\,E(b_2)-2E(b_2\hat{Z})\,E(b_3\hat{T})+2TE(b_2\hat{Z})\,E(b_3)+$$

$$+2ZE(b_2)E(b_3\hat{T})-2ZTE(b_2)E(b_3)+2T\,E(b_3)E(b_3\hat{T})$$

$$ECM(\hat{Y}_{lr})=V(\hat{Y})+E\left(X^2b_1^2\right)+E\left(b_1^2\hat{X}^2\right)+E\left(Z^2b_2^2\right)+E\left(b_2^2\hat{Z}^2\right)+E\left(T^2b_3^2\right)+E\left(b_3^2\hat{T}^2\right)+$$

$$+2XE(b_1\hat{Y})-2E(b_1\hat{X}\hat{Y})+2ZE(b_2\hat{Y})-2E(b_2\hat{Y}\hat{Z})+2TE(b_3\hat{Y})-2E(b_3\hat{Y}\hat{T})-$$

$$-2XE(b_1^2\hat{X})+2XZE(b_1b_2)-2XE(b_1b_2\hat{Z})+2XTE(b_1b_3)-2XE(b_1b_3\hat{T})-$$

$$-2ZE(b_1b_2\hat{X})+2E(b_1b_2\hat{X}\hat{Z})-2TE(b_1b_3\hat{X})+2E(b_1b_3\hat{X}\hat{T})-$$

$$-2ZE(b_2^2\hat{Z})+2ZTE(b_2b_3)-2ZE(b_2b_3\hat{T})-$$

$$-2TE(b_2b_3\hat{Z})+2E(b_2b_3\hat{Z}\hat{T})-2TE(b_3^2\hat{T})+$$

$$+2YE(b_1\hat{X})-2XY\,E(b_1)+2YE(b_2\hat{Z})-2YZ\,E(b_2)+2YE(b_3\hat{T})-2YT\,E(b_3)$$

Igual que en el capítulo anterior, si se asumen b_1, b_2 y b_3 constantes, se tiene que entonces, el sesgo es cero,

$$B(\hat{\bar{Y}}_{lr})=E(b_1\bar{x})-\bar{X}E(b_1)+E(b_2\bar{z})-\bar{Z}E(b_2)+E(b_3\bar{t})-\bar{T}E(b_3)$$

$$=b_1E(\bar{x})-b_1\bar{X}+b_2E(\bar{z})-b_2\bar{Z}+b_3E(\bar{t})-b_3\bar{T}=b_1\bar{X}-b_1\bar{X}+b_2\bar{Z}-b_2\bar{Z}+b_3\bar{T}-b_3\bar{T}=0$$

En consecuencia, $\hat{\bar{Y}}_{lr}$ es un estimador insesgado de $\bar{Y}$. Entonces $ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr})=V(\hat{\bar{Y}}_{lr})$

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = V(\bar{y}) + b_1^2\bar{X}^2 + b_1^2E\left(\bar{x}^2\right) + b_2^2\bar{Z}^2 + b_2^2E\left(\bar{z}^2\right) + b_3^2\bar{T}^2 + b_3^2E\left(\bar{t}^2\right) +$$

$$+2b_1\bar{X}\bar{Y} - 2b_1E(\bar{x}\bar{y}) + 2b_2\bar{Y}\bar{Z} - 2b_2E(\bar{y}\bar{z}) + 2b_3\bar{Y}\bar{T} - 2b_3E(\bar{y}\bar{t}) -$$

$$-2b_1^2\bar{X}^2 + 2b_1b_2\bar{X}\bar{Z} - 2b_1b_2\bar{X}\bar{Z} + 2b_1b_3\bar{X}\bar{T} - 2b_1b_3\bar{X}\bar{T} -$$

$$-2b_1b_2\bar{X}\bar{Z} + 2b_1b_2E(\bar{x}\bar{z}) - 2b_1b_3\bar{X}\bar{T} + 2b_1b_3E(\bar{x}\bar{t}) -$$

$$-2b_2^2\bar{Z}^2 + 2b_2b_3\bar{Z}\bar{T} - 2b_2b_3\bar{Z}\bar{T} -$$

$$-2b_2b_3\bar{Z}\bar{T} + 2b_2b_3E(\bar{z}\bar{t}) - 2b_3^2\bar{T}^2 +$$

$$+2b_1\bar{X}\bar{Y} - 2b_1\bar{X}\bar{Y} + 2b_2\bar{Y}\bar{Z} - 2b_2\bar{Y}\bar{Z} + 2b_3\bar{Y}\bar{T} - 2b_3\bar{Y}\bar{T}$$

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = V(\bar{y}) - b_1^2\bar{X}^2 + b_1^2E\left(\bar{x}^2\right) - b_2^2\bar{Z}^2 + b_2^2E\left(\bar{z}^2\right) - b_3^2\bar{T}^2 + b_3^2E\left(\bar{t}^2\right) +$$

$$+2b_1\bar{X}\bar{Y} - 2b_1E(\bar{x}\bar{y}) + 2b_2\bar{Y}\bar{Z} - 2b_2E(\bar{y}\bar{z}) + 2b_3\bar{Y}\bar{T} - 2b_3E(\bar{y}\bar{t}) -$$

$$-2b_1b_2\bar{X}\bar{Z} + 2b_1b_2E(\bar{x}\bar{z}) - 2b_1b_3\bar{X}\bar{T} + 2b_1b_3E(\bar{x}\bar{t}) -$$

$$-2b_2b_3\bar{Z}\bar{T} + 2b_2b_3E(\bar{z}\bar{t})$$

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = V(\bar{y}) + b_1^2\left[E\left(\bar{x}^2\right) - \bar{X}^2\right] + b_2^2\left[E\left(\bar{z}^2\right) - \bar{Z}^2\right] + b_3^2\left[E\left(\bar{t}^2\right) - \bar{T}^2\right] -$$

$$-2b_1\left[E(\bar{x}\bar{y}) - \bar{X}\bar{Y}\right] - 2b_2\left[E(\bar{y}\bar{z}) - \bar{Y}\bar{Z}\right] - 2b_3\left[E(\bar{y}\bar{t}) - \bar{Y}\bar{T}\right] +$$

$$+2b_1b_2\left[E(\bar{x}\bar{z}) - \bar{X}\bar{Z}\right] + 2b_1b_3\left[E(\bar{x}\bar{t}) - \bar{X}\bar{T}\right] + 2b_2b_3\left[E(\bar{z}\bar{t}) - \bar{Z}\bar{T}\right]$$

Es decir,

$$EMC(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\bar{y}) + b_1^2 V(\bar{x}) + b_2^2 V(\bar{z}) + b_3^2 V(\bar{t}) -$$

$$-2b_1 COV(\bar{x},\bar{y}) - 2b_2 COV(\bar{y},\bar{z}) - 2b_3 COV(\bar{y},\bar{t}) +$$

$$+2b_1 b_2 COV(\bar{x},\bar{z}) + 2b_1 b_3 COV(\bar{x},\bar{t}) + 2b_2 b_3 COV(\bar{z},\bar{t})$$

como se sabe, en muestreo aleatorio simple,

$$V(\bar{y}) = \frac{N-n}{Nn} S_y^2 \quad , \quad V(\bar{x}) = \frac{N-n}{Nn} S_x^2 \quad , \quad V(\bar{z}) = \frac{N-n}{Nn} S_z^2 \quad , \quad V(\bar{t}) = \frac{N-n}{Nn} S_t^2$$

Y como se demostró en Martín-Caro (2006, pp. 104, 105)

$$COV(\bar{x},\bar{y}) = \left[E(\bar{x}\bar{y}) - \overline{X}\overline{Y}\right] = \frac{N-n}{Nn} S_{xy} \qquad \text{donde, } S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i - \overline{XY}}{N-1}$$

Análogamente,

$$COV(\bar{y},\bar{z}) = \left[E(\bar{y}\bar{z}) - \overline{Y}\overline{Z}\right] = \frac{N-n}{Nn} S_{yz} \quad , \ S_{yz} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \overline{Y})(z_i - \overline{Z})}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i\, z_i - \overline{YZ}}{N-1}$$

$$COV(\bar{y},\bar{t}) = \left[E(\bar{y}\bar{t}) - \overline{Y}\overline{T}\right] = \frac{N-n}{Nn} S_{yt} \quad , \ S_{yt} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - \overline{Y})(t_i - \overline{T})}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i\, t_i - \overline{Y}\overline{T}}{N-1}$$

$$COV(\bar{x},\bar{z}) = \left[E(\bar{x}\bar{z}) - \overline{XZ}\right] = \frac{N-n}{Nn} S_{xz} \quad , \ S_{xz} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{X})(z_i - \overline{Z})}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i\, z_i - \overline{XZ}}{N-1}$$

$$COV(\bar{x},\bar{t}) = \left[E(\bar{x}\bar{t}) - \overline{X}\overline{T}\right] = \frac{N-n}{Nn} S_{xt} \quad , \ S_{xt} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{X})(t_i - \overline{T})}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i\, t_i - \overline{X}\overline{T}}{N-1}$$

$$COV(\bar{z},\bar{t}) = \left[E(\bar{z}\bar{t}) - \bar{Z}\bar{T}\right] = \frac{N-n}{N\,n} S_{zt} \qquad , \; S_{zt} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(z_i - \bar{Z}\right)\left(t_i - \bar{T}\right)}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i t_i - \bar{X}\bar{T}}{N-1}$$

Entonces, se puede escribir

$$EMC(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2 + b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 + b_3^2 S_t^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} - 2b_3 S_{yt} + 2b_1 b_2 S_{xz} + 2b_1 b_3 S_{xt} + 2b_2 b_3 S_{zt}\right]$$

Y para el total,

$$\begin{aligned} EMC(\hat{Y}_{lr}) = V(\hat{Y}_{lr}) &= N^2 \frac{(N-n)}{Nn}\left[S_y^2 + b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 + b_3^2 S_t^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} - 2b_3 S_{yt} + 2b_1 b_2 S_{xz} + 2b_1 b_3 S_{xt} + 2b_2 b_3 S_{zt}\right] \\ &= \frac{N(N-n)}{n}\left[S_y^2 + b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 + b_3^2 S_t^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} - 2b_3 S_{yt} + 2b_1 b_2 S_{xz} + 2b_1 b_3 S_{xt} + 2b_2 b_3 S_{zt}\right] \end{aligned}$$

Los estimadores de los errores cuadráticos medios son,

$$E\hat{M}C(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \frac{N-n}{Nn}\left[s_y^2 + \hat{b}_1^2 s_x^2 + \hat{b}_2^2 s_z^2 + \hat{b}_3^2 s_t^2 - 2\hat{b}_1 s_{xy} - 2\hat{b}_2 s_{yz} - 2\hat{b}_3 s_{yt} + 2\hat{b}_1 \hat{b}_2 s_{xz} + 2\hat{b}_1 \hat{b}_3 s_{xt} + 2\hat{b}_2 \hat{b}_3 s_{zt}\right]$$

Y para el total,

$$\begin{aligned} E\hat{M}C(\hat{Y}_{lr}) = \hat{V}(\hat{Y}_{lr}) &= N^2 \frac{(N-n)}{Nn}\left[s_y^2 + \hat{b}_1^2 s_x^2 + \hat{b}_2^2 s_z^2 + \hat{b}_3^2 s_t^2 - 2\hat{b}_1 s_{xy} - 2\hat{b}_2 s_{yz} - 2\hat{b}_3 s_{yt} + 2\hat{b}_1 \hat{b}_2 s_{xz} + 2\hat{b}_1 \hat{b}_3 s_{xt} + 2\hat{b}_2 \hat{b}_3 s_{zt}\right] \\ &= \frac{N(N-n)}{n}\left[s_y^2 + \hat{b}_1^2 s_x^2 + \hat{b}_2^2 s_z^2 + \hat{b}_3^2 s_t^2 - 2\hat{b}_1 s_{xy} - 2\hat{b}_2 s_{yz} - 2\hat{b}_3 s_{yt} + 2\hat{b}_1 \hat{b}_2 s_{xz} + 2\hat{b}_1 \hat{b}_3 s_{xt} + 2\hat{b}_2 \hat{b}_3 s_{zt}\right] \end{aligned}$$

$$E\hat{M}C(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \frac{N-n}{Nn}\left[s_y^2 + \hat{b}_1^2 s_x^2 + \hat{b}_2^2 s_z^2 + \hat{b}_3^2 s_t^2 - 2\hat{b}_1 s_{xy} - 2\hat{b}_2 s_{yz} - 2\hat{b}_3 s_{yt} + 2\hat{b}_1 \hat{b}_2 s_{xz} + 2\hat{b}_1 \hat{b}_3 s_{xt} + 2\hat{b}_2 \hat{b}_3 s_{zt}\right]$$

Y para el total,

$$\begin{aligned} E\hat{M}C(\hat{Y}_{lr}) = \hat{V}(\hat{Y}_{lr}) &= N^2 \frac{(N-n)}{Nn}\left[s_y^2 + \hat{b}_1^2 s_x^2 + \hat{b}_2^2 s_z^2 + \hat{b}_3^2 s_t^2 - 2\hat{b}_1 s_{xy} - 2\hat{b}_2 s_{yz} - 2\hat{b}_3 s_{yt} + 2\hat{b}_1 \hat{b}_2 s_{xz} + 2\hat{b}_1 \hat{b}_3 s_{xt} + 2\hat{b}_2 \hat{b}_3 s_{zt}\right] \\ &= \frac{N(N-n)}{n}\left[s_y^2 + \hat{b}_1^2 s_x^2 + \hat{b}_2^2 s_z^2 + \hat{b}_3^2 s_t^2 - 2\hat{b}_1 s_{xy} - 2\hat{b}_2 s_{yz} - 2\hat{b}_3 s_{yt} + 2\hat{b}_1 \hat{b}_2 s_{xz} + 2\hat{b}_1 \hat{b}_3 s_{xt} + 2\hat{b}_2 \hat{b}_3 s_{zt}\right] \end{aligned}$$

A continuación se desarrollan algunos casos especiales y en cada uno de ellos se mostrarán los errores cuadráticos medios y sus estimadores.

3.4.- Casos Especiales de los Estimadores de Regresión Lineal con 3 variables auxiliares

De acuerdo a los valores que tomen de b_1, b_2. y b_3.se presentan los casos particulares del estimador de regresión lineal con 3 variables auxiliares.

3.4.1.- Estimador de Regresión Lineal con 2 variables auxiliares

En principio se demostrará que el estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares es un caso particular del estimador de regresión lineal con tres variables auxiliares.

Sea el estimador del promedio, de regresión lineal con 3 variables auxiliares,

$$\hat{\bar{Y}}_{lr} = \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) + b_2(\bar{Z} - \bar{z}) + b_3(\bar{T} - \bar{t})$$

Si b_3=0, $$\hat{\bar{Y}}_{lr} = \bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x}) + b_2(\bar{Z} - \bar{z})$$

que es el estimador lineal con dos variables auxiliares. Se estudiará la esperanza. De (28) y (29) se tiene que,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = E(\bar{y}) - \left[E(b_1\bar{x}) - E(\bar{x})E(b_1)\right] - \left[E(b_2\bar{z}) - E(\bar{z})E(b_2)\right] - \left[E(b_3\bar{t}) - E(\bar{t})E(b_3)\right]$$

$$= \bar{Y} - COV(b_1, \bar{x}) - COV(b_2, \bar{z}) - COV(b_3, \bar{t})$$

Si b_3=0, $E(b_3\bar{t})=0$, $E(b_3)=0$ entonces,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = E(\bar{y}) - [E(b_1\bar{x}) - E(\bar{x})E(b_1)] - [E(b_2\bar{z}) - E(\bar{z})E(b_2)]$$

$$= \bar{Y} - COV(b_1,\bar{x}) - COV(b_2,\bar{z})$$

por lo tanto, no es un estimador insesgado y su sesgo es

$$B(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = COV(b_1,\bar{x}) + COV(b_2,\bar{z})$$

Igual que el estimador de regresión lineal con dos variables auxiliares.

Por (33), la varianza del estimador de regresión lineal con 3 variables auxiliares es,

$$V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \left[E\left(\bar{y}^2\right) - \bar{Y}^2\right] + E\left(\bar{X}^2 b_1^2\right) + E\left(b_1^2 \bar{x}^2\right) + E\left(\bar{Z}^2 b_2^2\right) + E\left(b_2^2 \bar{z}^2\right) + E\left(\bar{T}^2 b_3^2\right) + E\left(b_3^2 \bar{t}^2\right) +$$

$$+ 2\bar{X}E(b_1\bar{y}) - 2E(b_1\bar{x}\bar{y}) + 2\bar{Z}E(b_2\bar{y}) - 2E(b_2\bar{y}\bar{z}) + 2\bar{T}E(b_3\bar{y}) - 2E(b_3\bar{y}\bar{t}) -$$

$$- 2\bar{X}E(b_1^2\bar{x}) + 2\bar{X}\bar{Z}E(b_1b_2) - 2\bar{X}E(b_1b_2\bar{z}) + 2\bar{X}\bar{T}E(b_1b_3) - 2\bar{X}E(b_1b_3\bar{t}) -$$

$$- 2\bar{Z}E(b_1b_2\bar{x}) + 2E(b_1b_2\bar{x}\bar{z}) - 2\bar{T}E(b_1b_3\bar{x}) + 2E(b_1b_3\bar{x}\bar{t}) -$$

$$- 2\bar{Z}E(b_2^2\bar{z}) + 2\bar{Z}\bar{T}E(b_2b_3) - 2\bar{Z}E(b_2b_3\bar{t}) -$$

$$- 2\bar{T}E(b_2b_3\bar{z}) + 2E(b_2b_3\bar{z}\bar{t}) - 2\bar{T}E(b_3^2\bar{t})$$

$$- \left(E(b_1\bar{x})\right)^2 - \bar{X}^2\left(E(b_1)\right)^2 - \left(E(b_2\bar{z})\right)^2 - \bar{Z}^2\left(E(b_2)\right)^2 - \left(E(b_3\bar{t})\right)^2 - \bar{T}^2\left(E(b_3)\right)^2 +$$

$$+ 2\bar{Y}E(b_1\bar{x}) - 2\bar{X}\bar{Y}E(b_1) + 2\bar{Y}E(b_2\bar{z}) - 2\bar{Y}\bar{Z}E(b_2) + 2\bar{Y}E(b_3\bar{t}) - 2\bar{Y}\bar{T}E(b_3) +$$

$$+ 2\bar{X}E(b_1\bar{x})E(b_1) - 2E(b_1\bar{x})E(b_2\bar{z}) + 2\bar{Z}E(b_1\bar{x})E(b_2) - 2E(b_1\bar{x})E(b_3\bar{t}) + 2\bar{T}E(b_1\bar{x})E(b_3) +$$

$$+ 2\bar{X}E(b_1)E(b_2\bar{z}) - 2\bar{X}\bar{Z}E(b_1)E(b_2) + 2\bar{X}E(b_1)E(b_3\bar{t}) - 2\bar{X}\bar{T}E(b_1)E(b_3) +$$

$$+ 2\bar{Z}E(b_2\bar{z})E(b_2) - 2E(b_2\bar{z})E(b_3\bar{t}) + 2\bar{T}E(b_2\bar{z})E(b_3) +$$

$$+ 2\bar{Z}E(b_2)E(b_3\bar{t}) - 2\bar{Z}\bar{T}E(b_2)E(b_3) + 2\bar{T}E(b_3)E(b_3\bar{t})$$

pero si b_3=0,

$$V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \left[E\left(\bar{y}^2\right) - \bar{Y}^2\right] + E\left(\bar{X}^2 b_1^2\right) + E\left(b_1^2 \bar{x}^2\right) + E\left(\bar{Z}^2 b_2^2\right) + E\left(b_2^2 \bar{z}^2\right) +$$

$$+ 2\bar{X}E(b_1\bar{y}) - 2E(b_1\overline{xy}) + 2\bar{Z}E(b_2\bar{y}) - 2E(b_2\overline{yz}) -$$

$$- 2\bar{X}E(b_1^2\bar{x}) + 2\overline{XZ}E(b_1b_2) - 2\bar{X}E(b_1b_2\bar{z}) -$$

$$- 2\bar{Z}E(b_1b_2\bar{x}) + 2E(b_1b_2\overline{xz}) -$$

$$- 2\bar{Z}E(b_2^2\bar{z}) -$$

$$- \left(E(b_1\bar{x})\right)^2 - \bar{X}^2\left(E(b_1)\right)^2 - \left(E(b_2\bar{z})\right)^2 - \bar{Z}^2\left(E(b_2)\right)^2 +$$

$$+ 2\bar{Y}E(b_1\bar{x}) - 2\overline{XY}\, E(b_1) + 2\bar{Y}E(b_2\bar{z}) - 2\overline{YZ}\, E(b_2) +$$

$$+ 2\bar{X}E(b_1\bar{x})E(b_1) - 2E(b_1\bar{x})E(b_2\bar{z}) + 2\bar{Z}\, E(b_1\bar{x})E(b_2) +$$

$$+ 2\bar{X}\, E(b_1)E(b_2\bar{z}) - 2\overline{XZ}E(b_1)\, E(b_2) +$$

$$+ 2\bar{Z}E(b_2\bar{z})\, E(b_2)$$

que es la varianza del estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares.

Y por (34), el error cuadrático medio del estimador es,

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\bar{y}) + E\left(\bar{X}^2 b_1^2\right) + E\left(b_1^2\bar{x}^2\right) + E\left(\bar{Z}^2 b_2^2\right) + E\left(b_2^2\bar{z}^2\right) + E\left(\bar{T}^2 b_3^2\right) + E\left(b_3^2\bar{t}^2\right) +$$

$$+ 2\bar{X}E(b_1\bar{y}) - 2E(b_1\overline{xy}) + 2\bar{Z}E(b_2\bar{y}) - 2E(b_2\overline{yz}) + 2\bar{T}E(b_3\bar{y}) - 2E(b_3\overline{yt}) -$$

$$- 2\bar{X}E(b_1^2\bar{x}) + 2\overline{XZ}E(b_1b_2) - 2\bar{X}E(b_1b_2\bar{z}) + 2\overline{XT}E(b_1b_3) - 2\bar{X}E(b_1b_3\bar{t}) -$$

$$- 2\bar{Z}E(b_1b_2\bar{x}) + 2E(b_1b_2\overline{xz}) - 2\bar{T}E(b_1b_3\bar{x}) + 2E(b_1b_3\overline{xt}) -$$

$$-2\bar{Z}E(b_2^2\bar{z})+2\bar{Z}\bar{T}E(b_2b_3)-2\bar{Z}E(b_2b_3\bar{t})-$$

$$-2\bar{T}E(b_2b_3\bar{z})+2E(b_2b_3\bar{z}\bar{t})-2\bar{T}E(b_3^2\bar{t})+$$

$$+2\bar{Y}E(b_1\bar{x})-2\overline{XY}\ E(b_1)+2\bar{Y}E(b_2\bar{z})-2\overline{YZ}\ E(b_2)+2\bar{Y}E(b_3\bar{t})-2\overline{YT}\ E(b_3)$$

pero si b_3=0,

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr})=V(\bar{y})+E\left(\bar{X}^2b_1^2\right)+E\left(b_1^2\bar{x}^2\right)+E\left(\bar{Z}^2b_2^2\right)+E\left(b_2^2\bar{z}^2\right)+$$

$$+2\bar{X}E(b_1\bar{y})-2E(b_1\overline{xy})+2\bar{Z}E(b_2\bar{y})-2E(b_2\overline{yz})-$$

$$-2\bar{X}E(b_1^2\bar{x})+2\overline{XZ}E(b_1b_2)-2\bar{X}E(b_1b_2\bar{z})-$$

$$-2\bar{Z}E(b_1b_2\bar{x})+2E(b_1b_2\overline{xz})-$$

$$-2\bar{Z}E(b_2^2\bar{z})-$$

$$+2\bar{Y}E(b_1\bar{x})-2\overline{XY}\ E(b_1)+2\bar{Y}E(b_2\bar{z})-2\overline{YZ}\ E(b_2)$$

que es el error cuadrático medio del estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares.

Ahora, si b_1 y b_2 son constantes,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lr})=E(\bar{y})-\left[E(b_1\bar{x})-E(\bar{x})E(b_1)\right]-\left[E(b_2\bar{z})-E(\bar{z})E(b_2)\right]$$

$$=E(\bar{y})-\left[b_1E(\bar{x})-b_1E(\bar{x})\right]-\left[b_2E(\bar{z})-b_2E(\bar{z})\right]$$

$$=\bar{Y}$$

y es un estimador insesgado, igual que el estimador de regresión lineal con dos variables auxiliares con b_1 y b_2 constantes.

Por lo tanto, el error cuadrático medio es igual a la varianza, la varianza es

$$V(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \left[E\left(\bar{y}^2\right) - \bar{Y}^2\right] + b_1^2 E\left(\bar{X}^2\right) + b_1^2 E\left(\bar{x}^2\right) + b_2^2 E\left(\bar{Z}^2\right) + b_2^2 E\left(\bar{z}^2\right) +$$

$$+ 2b_1 \bar{X} E(\bar{y}) - 2b_1 E(\overline{xy}) + 2b_2 \bar{Z} E(\bar{y}) - 2b_2 E(\overline{yz}) -$$

$$- 2b_1^2 \bar{X} E(\bar{x}) + 2b_1 b_2 \overline{XZ} - 2b_1 b_2 \bar{X} E(\bar{z}) -$$

$$- 2b_1 b_2 \bar{Z} E(\bar{x}) + 2b_1 b_2 E(\overline{xz}) -$$

$$- 2b_2^2 \bar{Z} E(\bar{z}) -$$

$$- b_1^2 \left(E(\bar{x})\right)^2 - b_1^2 \bar{X}^2 - b_2^2 \left(E(\bar{z})\right)^2 - b_2^2 \bar{Z}^2 +$$

$$+ 2b_1 \bar{Y} E(\bar{x}) - 2b_1 \overline{X}\overline{Y} + 2b_2 \bar{Y} E(\bar{z}) - 2b_2 \overline{YZ} +$$

$$+ 2b_1^2 \bar{X} E(\bar{x}) - 2b_1 b_2 E(\bar{x}) E(\bar{z}) + 2b_1 b_2 \bar{Z}\ E(\bar{x}) +$$

$$+ 2b_1 b_2 \bar{X}\ E(\bar{z}) - 2b_1 b_2 \overline{XZ} +$$

$$+ 2b_2^2 \bar{Z} E(\bar{z})$$

$$V(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \left[E\left(\bar{y}^2\right) - \bar{Y}^2\right] + b_1^2 \bar{X}^2 + b_1^2 E\left(\bar{x}^2\right) + b_2^2 \bar{Z}^2 + b_2^2 E\left(\bar{z}^2\right) +$$

$$+ 2b_1 \overline{X}\overline{Y} - 2b_1 E(\overline{xy}) + 2b_2 \overline{Z}\overline{Y} - 2b_2 E(\overline{yz}) -$$

$$- 2b_1^2 \bar{X}^2 + 2b_1 b_2 \overline{XZ} - 2b_1 b_2 \overline{XZ} -$$

$$- 2b_1 b_2 \overline{XZ} + 2b_1 b_2 E(\overline{xz}) -$$

$$- 2b_2^2 \bar{Z}^2 -$$

$$- b_1^2 \bar{X}^2 - b_1^2 \bar{X}^2 - b_2^2 \bar{Z}^2 - b_2^2 \bar{Z}^2 +$$

$$+ 2b_1 \overline{X}\overline{Y} - 2b_1 \overline{X}\overline{Y} + 2b_2 \overline{YZ} - 2b_2 \overline{YZ} +$$

$$+ 2b_1^2 \bar{X}^2 - 2b_1 b_2 \overline{XZ} + 2b_1 b_2 \overline{XZ} +$$

$$+ 2b_1 b_2 \overline{XZ} - 2b_1 b_2 \overline{XZ} +$$

$$+ 2b_2^2 \bar{Z}^2$$

$$V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \left[E\left(\bar{y}^2\right) - \bar{Y}^2\right] - b_1^2 \bar{X}^2 + b_1^2 E\left(\bar{x}^2\right) - b_2^2 \bar{Z}^2 + b_2^2 E\left(\bar{z}^2\right) +$$

$$+ 2b_1 \overline{X}\overline{Y} - 2b_1 E(\bar{x}\bar{y}) + 2b_2 \overline{Y}\overline{Z} - 2b_2 E(\bar{y}\bar{z}) - 2b_1 b_2 \overline{X}\overline{Z} + 2b_1 b_2 E(\bar{x}\bar{z})$$

$$V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \left[E\left(\bar{y}^2\right) - \bar{Y}^2\right] + b_1^2 \left[E\left(\bar{x}^2\right) - \bar{X}^2\right] + b_2^2 \left[E\left(\bar{z}^2\right) - \bar{Z}^2\right] -$$

$$- 2b_1 \left[E(\bar{x}\bar{y}) - \overline{X}\overline{Y}\right] - 2b_2 \left[E(\bar{y}\bar{z}) - \overline{Y}\overline{Z}\right] - 2b_1 b_2 \left[E(\bar{x}\bar{z}) - \overline{X}\overline{Z}\right]$$

$$V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\bar{y}) + b_1^2 V(\bar{x}) + b_2^2 V(\bar{z}) - 2b_1 COV(\bar{x}, \bar{y}) - 2b_2 COV(\bar{y}, \bar{z}) - 2b_1 b_2 COV(\bar{x}, \bar{z})$$

$$= \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} - 2b_1 b_2 S_{xz}\right)$$

que es la varianza del estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares. Y con el error cuadrático medio,

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\bar{y}) + b_1^2 \left[E\left(\bar{x}^2\right) - \bar{X}^2\right] + b_2^2 \left[E\left(\bar{z}^2\right) - \bar{Z}^2\right] -$$

$$- 2b_1 \left[E(\bar{x}\bar{y}) - \overline{X}\overline{Y}\right] - 2b_2 \left[E(\bar{y}\bar{z}) - \overline{Y}\overline{Z}\right] - 2b_1 b_2 \left[E(\bar{x}\bar{z}) - \overline{X}\overline{Z}\right]$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\bar{y}) + b_1^2 V(\bar{x}) + b_2^2 V(\bar{z}) - 2b_1 COV(\bar{x}, \bar{y}) - 2b_2 COV(\bar{y}, \bar{z}) - 2b_1 b_2 COV(\bar{x}, \bar{z})$$

$$= \left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} - 2b_1 b_2 S_{xz}\right)$$

que es el error cuadrático medio del estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares.

De manera que queda demostrado que el estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares es un caso particular del estimador de regresión lineal con 3 variables auxiliares, cuando b_3=0, también son casos particulares todos sus casos especiales desarrollados en el capítulo 2, que son los siguientes,

Tabla 1 - Valores de b_1, b_2, b_3 del estimador de regresión lineal con 3 variables auxiliares, según caso particular

	b_1	b_2	b_3
Estimador de Regresión Lineal Simple	b_1	0	0
Estimador directo	0	0	0
Estimador de razón	$\frac{\bar{y}}{\bar{x}}$	0	0
Estimador por diferencia	1	0	0
Estimador de varianza mínima para *b* constante	$\frac{S_{xy}}{S_x^2}$	0	0
Estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares	b_1	b_2	0
Estimador por diferencias (con 2 variables auxiliares)	1	1	0
Estimador de Razón-Regresión (*1)	$\frac{\bar{y}}{\bar{x}} - b\frac{\bar{z}}{\bar{x}}$	b	0
Estimador de Regresión-Razón (con *b*) (*2)	$b\left[1-\left(\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}\right)\right]$	$\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}$	0
Estimador de Regresión-Razón (con b_1 y b_2) (*3)	$b_y - b_z\left(\frac{\bar{y}+b_y(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b_z(\bar{X}-\bar{x})}\right)$	$\frac{\bar{y}+b_y(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b_z(\bar{X}-\bar{x})}$	0
Estimador de varianza mínima para b_1 y b_2 constantes	$\frac{S_{xy}S_z^2 - S_{yz}S_{xz}}{S_x^2S_z^2-(S_{xz})^2}$	$\frac{S_{yz}S_x^2 - S_{xy}S_{xz}}{S_z^2S_x^2-(S_{xz})^2}$	0

donde, (*1) b = es el coeficiente del estimador de Razón-Regresión

(*2) b = es el coeficiente del estimador de Regresión-Razón cuando éste tiene un coeficiente *b* único

(*3) b_y = coeficiente del estimador $\hat{\bar{Y}}_{lr}$ en el estimador de Regresión-Razón con dos coeficientes *b* diferentes

b_z = coeficiente del estimador $\hat{\bar{Z}}_{lr}$ en el estimador de Regresión-Razón con dos coeficientes *b* diferentes

3.4.2.- Estimador por Diferencias (con 3 variables auxiliares)

Este es el caso cuando $b_1=b_2=b_3=1$, entonces se corrige el promedio muestral sólo por la diferencia entre los promedios poblacional y muestral de las variables auxiliares; esto es,

$$\hat{\hat{Y}}_{lr} = \bar{y} + (\bar{X} - \bar{x}) + (\bar{Z} - \bar{z}) + (\bar{T} - \bar{t})$$

al sustituir $b_1=b_2=b_3=1$ en (28), se tiene,

$$\begin{aligned} E(\hat{\hat{Y}}_{lr}) &= E(\bar{y}) - [E(b_1\bar{x}) - E(\bar{x})\,E(b_1)] - [E(b_2\bar{z}) - E(\bar{z})\,E(b_2)] - [E(b_3\bar{t}) - E(\bar{t})\,E(b_3)] \\ &= E(\bar{y}) - [E(\bar{x}) - E(\bar{x})\,E(1)] - [E(\bar{z}) - E(\bar{z})\,E(1)] - [E(\bar{t}) - E(\bar{t})\,E(1)] \\ &= E(\bar{y}) = \bar{Y} \end{aligned}$$

por lo tanto, es un estimador insesgado. Haciendo lo propio en (34),

$$EMC(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = V(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = V(\bar{y}) + \bar{X}^2 + E(\bar{x}^2) + \bar{Z}^2 + E(\bar{z}^2) + 2\bar{X}\bar{Y} - 2E(\bar{x}\bar{y}) + 2\bar{Z}\bar{Y} - 2E(\bar{y}\bar{z}) -$$

$$-2\bar{X}^2 + 2\overline{XZ} - 2\overline{XZ} \;\; -2\overline{XZ} + 2E(\bar{x}\bar{z}) \;\; -2\bar{Z}^2 \;\; +2\overline{XY} - 2\overline{XY} + 2\overline{YZ} - 2\overline{YZ}$$

$$= V(\bar{y}) - \bar{X}^2 + E(\bar{x}^2) - \bar{Z}^2 + E(\bar{z}^2) + 2\bar{X}\bar{Y} - 2E(\bar{x}\bar{y}) + 2\bar{Z}\bar{Y} - 2E(\bar{y}\bar{z}) +$$

$$+2\overline{XZ} - 2\overline{XZ} \;\; -2\overline{XZ} + 2E(\bar{x}\bar{z})$$

$$= V(\bar{y}) + V(\bar{x})\bar{X}^2 + V(\bar{z}) - 2COV(\bar{x},\bar{y}) - 2COV(\bar{y},\bar{z}) + 2COV(\bar{x}\bar{z})$$

$$= \frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2 + S_x^2 + S_z^2 - 2S_{xy} - 2S_{yz} + 2S_{xz}\right]$$

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = V(\bar{y}) + E\left(\bar{X}^2\right) + E\left(\bar{x}^2\right) + E\left(\bar{Z}^2\right) + E\left(\bar{z}^2\right) + E\left(\bar{T}^2\right) + E\left(\bar{t}^2\right) +$$

$$+2\bar{X}E(\bar{y}) - 2E(\bar{x}\bar{y}) + 2\bar{Z}E(\bar{y}) - 2E(\bar{y}\bar{z}) + 2\bar{T}E(\bar{y}) - 2E(\bar{y}\bar{t}) -$$

$$-2\bar{X}E(\bar{x}) + 2\overline{X}\overline{Z} - 2\bar{X}E(\bar{z}) + 2\overline{X}\overline{T} - 2\bar{X}E(\bar{t}) - -2\bar{Z}E(\bar{x}) + 2E(\bar{x}\bar{z}) - 2\bar{T}E(\bar{x}) + 2E(\bar{x}\bar{t}) -$$

$$-2\bar{Z}E(\bar{z}) + 2\bar{Z}\bar{T} - 2\bar{Z}E(\bar{t}) - -2\bar{T}E(\bar{z}) + 2E(\bar{z}\bar{t}) - 2\bar{T}E(\bar{t}) +$$

$$+2\bar{Y}E(\bar{x}) - 2\overline{X}\overline{Y} + 2\bar{Y}E(\bar{z}) - 2\overline{Y}\overline{Z} + 2\bar{Y}E(\bar{t}) - 2\bar{Y}\bar{T}$$

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = V(\bar{y}) + \bar{X}^2 + E\left(\bar{x}^2\right) + \bar{Z}^2 + E\left(\bar{z}^2\right) + \bar{T}^2 + E\left(\bar{t}^2\right) +$$

$$+2\overline{X}\overline{Y} - 2E(\bar{x}\bar{y}) + 2\bar{Z}\bar{Y} - 2E(\bar{y}\bar{z}) + 2\bar{T}\bar{Y} - 2E(\bar{y}\bar{t}) -$$

$$-2\bar{X}^2 + 2\overline{X}\overline{Z} - 2\overline{X}\overline{Z} + 2\overline{X}\overline{T} - 2\overline{X}\overline{T} - -2\bar{Z}\bar{X} + 2E(\bar{x}\bar{z}) - 2\bar{T}\bar{X} + 2E(\bar{x}\bar{t}) -$$

$$-2\bar{Z}^2 + 2\bar{Z}\bar{T} - 2\bar{Z}\bar{T} - -2\bar{T}\bar{Z} + 2E(\bar{z}\bar{t}) - 2\bar{T}^2 + +2\bar{Y}\bar{X} - 2\overline{X}\overline{Y} + 2\overline{Y}\overline{Z} - 2\overline{Y}\overline{Z} + 2\bar{Y}\bar{T} - 2\bar{Y}\bar{T}$$

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = V(\bar{y}) - \bar{X}^2 + E\left(\bar{x}^2\right) - \bar{Z}^2 + E\left(\bar{z}^2\right) - \bar{T}^2 + E\left(\bar{t}^2\right) +$$

$$+2\overline{X}\overline{Y} - 2E(\bar{x}\bar{y}) + 2\bar{Z}\bar{Y} - 2E(\bar{y}\bar{z}) + 2\bar{T}\bar{Y} - 2E(\bar{y}\bar{t}) -$$

$$-2\bar{Z}\bar{X} + 2E(\bar{x}\bar{z}) - 2\bar{T}\bar{X} + 2E(\bar{x}\bar{t}) - -2\bar{T}\bar{Z} + 2E(\bar{z}\bar{t}) +$$

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = V(\bar{y}) + V(\bar{x}) + V(\bar{z}) + V(\bar{t}) - 2COV(\bar{x}\bar{y}) - 2COV(\bar{y}\bar{z}) - 2COV(\bar{y}\bar{t})$$

$$+COV(\bar{x}\bar{z}) + 2COV(\bar{x}\bar{t}) + 2COV(\bar{z}\bar{t})$$

$$EMC(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = V(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2 + S_x^2 + S_z^2 + S_t^2 - 2S_{xy} - 2S_{yz} - 2S_{yt} + 2S_{xz} + 2S_{xt} + 2S_{zt}\right]$$

y el estimador del error cuadrático medio,

$$E\hat{M}C(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \hat{V}(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \frac{N-n}{Nn}\left[s_y^2 + s_x^2 + s_z^2 + s_t^2 - 2s_{xy} - 2s_{yz} - 2s_{yt} + 2s_{xz} + 2s_{xt} + 2s_{zt}\right]$$

Para el total se tiene que,

$$\hat{Y}_{lr}=N\hat{\bar{Y}}_{lr}=N\bar{y}+N(\bar{X}-\bar{x})+N(\bar{Z}-\bar{z})+N(\bar{T}-\bar{t})=\hat{Y}+(X-\hat{X})+(Z-\hat{Z})+(T-\hat{T})$$

$$E(\hat{Y}_{lr})=Y+\left[E(X)-E(\hat{X})\right]+\left[E(Z)-E(\hat{Z})\right]+\left[E(T)-E(\hat{T})\right]=Y$$

por lo tanto, también es un estimador insesgado y su error cuadrático medio es,

$$EMC(\hat{Y}_{lr})=V(\hat{Y}_{lr})=\frac{N^2(N-n)}{Nn}\left[S_y^2+S_x^2+S_z^2+S_t^2-2S_{xy}-2S_{yz}-2S_{yt}+2S_{xz}+2S_{xt}+2S_{zt}\right]$$

$$=\frac{N(N-n)}{n}\left[S_y^2+S_x^2+S_z^2+S_t^2-2S_{xy}-2S_{yz}-2S_{yt}+2S_{xz}+2S_{xt}+2S_{zt}\right]$$

y su estimador,

$$E\hat{M}C(\hat{Y}_{lr})=\hat{V}(\hat{Y}_{lr})=\frac{N^2(N-n)}{Nn}\left[s_y^2+s_x^2+s_z^2+s_t^2-2s_{xy}-2s_{yz}-2s_{yt}+2s_{xz}+2s_{xt}+2s_{zt}\right]$$

$$=\frac{N(N-n)}{n}\left[s_y^2+s_x^2+s_z^2+s_t^2-2s_{xy}-2s_{yz}-2s_{yt}+2s_{xz}+2s_{xt}+2s_{zt}\right]$$

3.4.3.- Estimador de Varianza Mínima para b_1, b_2 y b_3 constantes

Sean $b_1=b_{10}$, $b_2=b_{20}$ y $b_3=b_{30}$ constantes, entonces, sustituyendo en (28),

$$\begin{aligned}E(\hat{\bar{Y}}_{lr}) &=E(\bar{y})-\left[E(b_1\bar{x})-E(\bar{x})E(b_1)\right]-\left[E(b_2\bar{z})-E(\bar{z})E(b_2)\right]-\left[E(b_3\bar{t})-E(\bar{t})E(b_3)\right]\\ &=E(\bar{y})-\left[b_{10}E(\bar{x})-E(\bar{x})b_{10}\right]-\left[b_{20}E(\bar{z})-E(\bar{z})b_{20}\right]-\left[b_{30}E(\bar{t})-E(\bar{t})b_{30}\right]\\ &=E(\bar{y})\\ &=\hat{\bar{Y}}\end{aligned}$$

se tiene que es un estimador insesgado. Sustituyendo $b_1 = b_{10}$, $b_2 = b_{20}$ y $b_3 = b_{30}$ en (34),

$$EMC(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = V(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2 + b_1^2 S_x^2 + b_2^2 S_z^2 + b_3^2 S_t^2 - 2b_1 S_{xy} - 2b_2 S_{yz} - 2b_3 S_{yt} + 2b_1 b_2 S_{xz} + 2b_1 b_3 S_{xt} + 2b_2 b_3 S_{zt}\right]$$

$$= \frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2 + b_{10}^2 S_x^2 + b_{20}^2 S_z^2 + b_{30}^2 S_t^2 - 2b_{10} S_{xy} - 2b_{20} S_{yz} - 2b_{30} S_{yt} + 2b_{10} b_{20} S_{xz} + 2b_{10} b_{30} S_{xt} + 2b_{20} b_{30} S_{zt}\right]$$

Para minimizar la varianza, en principio se hallan las derivadas parciales, se igualan a cero y se obtienen los valores de b_{10} , b_{20} y b_{30}.

Derivando respecto de b_{10},

$$\frac{\partial V(\hat{\hat{Y}}_{lr})}{\partial b_{10}} = \frac{N-n}{Nn}\left[2b_{10} S_x^2 - 2S_{xy} + 2b_{20} S_{xz} + 2b_{30} S_{xt}\right] = 0$$

para que se cumpla la igualdad debe ocurrir uno de los siguientes casos,

$$\begin{cases} a)\ n = N \\ ó \\ b)\ 2b_{10} S_x^2 - 2S_{xy} + 2b_{20} S_{xz} + 2b_{30} S_{xt} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} a)\ n = N \\ ó \\ b)\ b_{10} S_x^2 - S_{xy} + b_{20} S_{xz} + b_{30} S_{xt} = 0 \end{cases}$$

no tiene sentido hacer $n=N$, ya que la investigación sería por enumeración completa y la varianza del estimador es igual a cero, porque se tiene el valor poblacional. Tomando el caso (b) y despejando b_{10} ,

$$b_{10} = \frac{S_{xy} - b_{20} S_{xz} - b_{30} S_{xt}}{S_x^2}$$

Derivando respecto de b_{20},

$$\frac{\partial V(\hat{\hat{Y}}_{lr})}{\partial b_{20}} = \frac{N-n}{Nn}\left[2b_{20} S_z^2 - 2S_{yz} + 2b_{10} S_{xz} + 2b_{30} S_{zt}\right] = 0$$

para que se cumpla la igualdad debe ocurrir uno de los siguientes casos,

$$\begin{cases} a)\ n=N \\ ó \\ b)\ 2b_{20}S_z^2 - 2S_{yz} + 2b_{10}S_{xz} + 2b_{30}S_{zt} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} a)\ n=N \\ ó \\ b)\ b_{20}S_z^2 - S_{yz} + b_{10}S_{xz} + b_{30}S_{zt} = 0 \end{cases}$$

igual que para b_{10}, no tiene sentido hacer $n=N$ y se toma el caso (b), que despejando b_{20}, se tiene

$$b_{20} = \frac{S_{yz} - b_{10}S_{xz} - b_{30}S_{zt}}{S_z^2}$$

y finalmente, derivando respecto de b_{30},

$$\frac{\partial V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_{30}} = \frac{N-n}{Nn}\left[2b_{30}S_t^2 - 2S_{yt} + 2b_{10}S_{xt} + 2b_{20}S_{zt}\right] = 0$$

para que se cumpla la igualdad debe ocurrir uno de los siguientes casos,

$$\begin{cases} a)\ n=N \\ ó \\ b)\ 2b_{30}S_t^2 - 2S_{yt} + 2b_{10}S_{xt} + 2b_{20}S_{zt} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} a)\ n=N \\ ó \\ b)\ b_{30}S_t^2 - S_{yt} + b_{10}S_{xt} + b_{20}S_{zt} = 0 \end{cases}$$

tomando el caso (b), por las razones antes explicadas, y despejando b_{30}, se tiene

$$b_{30} = \frac{S_{yt} - b_{10}S_{xt} - b_{20}S_{zt}}{S_t^2}$$

Entonces se tiene,

$$b_{10} = \frac{S_{xy} - b_{20}S_{xz} - b_{30}S_{xt}}{S_x^2} \qquad b_{20} = \frac{S_{yz} - b_{10}S_{xz} - b_{30}S_{zt}}{S_z^2} \qquad b_{30} = \frac{S_{yt} - b_{10}S_{xt} - b_{20}S_{zt}}{S_t^2}$$

Debido a lo laborioso de hacer tantas sustituciones, se trabajará como un sistema de ecuaciones, tomando las opciones (b) de cada caso, que resulta,

$$b_{10}S_x^2 - S_{xy} + b_{20}S_{xz} + b_{30}S_{xt} = 0$$

$$b_{20}S_z^2 - S_{yz} + b_{10}S_{xz} + b_{30}S_{zt} = 0$$

$$b_{30}S_t^2 - S_{yt} + b_{10}S_{xt} + b_{20}S_{zt} = 0$$

Si se reescriben las ecuaciones resultantes como,

$$\begin{cases} b_{10}S_x^2 + b_{20}S_{xz} + b_{30}S_{xt} = S_{xy} \\ b_{20}S_z^2 + b_{10}S_{xz} + b_{30}S_{zt} = S_{yz} \\ b_{30}S_t^2 + b_{10}S_{xt} + b_{20}S_{zt} = S_{yt} \end{cases} \equiv \begin{cases} b_1S_x^2 + b_2S_{xz} + b_3S_{xt} = S_{xy} \\ b_2S_z^2 + b_1S_{xz} + b_3S_{zt} = S_{yz} \\ b_3S_t^2 + b_1S_{xt} + b_2S_{zt} = S_{yt} \end{cases} \equiv \begin{cases} b_1S_x^2 + b_2S_{xz} + b_3S_{xt} = S_{yx} \\ b_1S_{xz} + b_2S_z^2 + b_3S_{zt} = S_{yz} \\ b_1S_{xt} + b_2S_{zt} + b_3S_t^2 = S_{yt} \end{cases}$$

Y se resuelve el sistema de ecuaciones. En forma matricial es,

$$\begin{pmatrix} S_x^2 & S_{xz} & S_{xt} \\ S_{xz} & S_z^2 & S_{zt} \\ S_{xt} & S_{zt} & S_t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{yx} \\ S_{yz} \\ S_{yt} \end{pmatrix} \text{ entonces, } \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x^2 & S_{xz} & S_{xt} \\ S_{xz} & S_z^2 & S_{zt} \\ S_{xt} & S_{zt} & S_t^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_{yx} \\ S_{yz} \\ S_{yt} \end{pmatrix}.$$

Al desarrollar, se tiene,

$$\begin{pmatrix} S_x^2 & S_{xz} & S_{xt} \\ S_{xz} & S_z^2 & S_{zt} \\ S_{xt} & S_{zt} & S_t^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{S_x^2S_z^2S_t^2 - S_x^2S_{zt}^2 - S_z^2S_{xt}^2 - S_t^2S_{xz}^2 + 2S_{xz}S_{xt}S_{zt}} \begin{pmatrix} S_z^2S_t^2 - S_{zt}^2 & S_{xt}S_{zt} - S_t^2S_{xz} & S_{xz}S_{zt} - S_z^2S_{xt} \\ S_{xt}S_{zt} - S_t^2S_{xz} & S_x^2S_t^2 - S_{xt}^2 & S_{xz}S_{xt} - S_x^2S_{zt} \\ S_{xz}S_{zt} - S_z^2S_{xt} & S_{xz}S_{xt} - S_x^2S_{zt} & S_x^2S_z^2 - S_{xz}^2 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{S_x^2S_z^2S_t^2 - S_x^2S_{zt}^2 - S_z^2S_{xt}^2 - S_t^2S_{xz}^2 + 2S_{xz}S_{xt}S_{zt}} \begin{pmatrix} S_z^2S_t^2 - S_{zt}^2 & S_{xt}S_{zt} - S_t^2S_{xz} & S_{xz}S_{zt} - S_z^2S_{xt} \\ S_{xt}S_{zt} - S_t^2S_{xz} & S_x^2S_t^2 - S_{xt}^2 & S_{xz}S_{xt} - S_x^2S_{zt} \\ S_{xz}S_{zt} - S_z^2S_{xt} & S_{xz}S_{xt} - S_x^2S_{zt} & S_x^2S_z^2 - S_{xz}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{yx} \\ S_{yz} \\ S_{yt} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$b_1 = \frac{S_{yx}\left(S_z^2 S_t^2 - S_{zt}^2\right) + S_{yz}\left(S_{xt}S_{zt} - S_t^2 S_{xz}\right) + S_{yt}\left(S_{xz}S_{zt} - S_z^2 S_{xt}\right)}{S_x^2 S_z^2 S_t^2 - S_x^2 S_{zt}^2 - S_z^2 S_{xt}^2 - S_t^2 S_{xz}^2 + 2S_{xz}S_{xt}S_{zt}}$$

$$b_2 = \frac{S_{yx}\left(S_{xt}S_{zt} - S_t^2 S_{xz}\right) + S_{yz}\left(S_x^2 S_t^2 - S_{xt}^2\right) + S_{yt}\left(S_{xz}S_{xt} - S_x^2 S_{zt}\right)}{S_x^2 S_z^2 S_t^2 - S_x^2 S_{zt}^2 - S_z^2 S_{xt}^2 - S_t^2 S_{xz}^2 + 2S_{xz}S_{xt}S_{zt}}$$

$$b_3 = \frac{S_{yx}\left(S_{xz}S_{zt} - S_z^2 S_{xt}\right) + S_{yz}\left(S_{xz}S_{xt} - S_x^2 S_{zt}\right) + S_{yt}\left(S_x^2 S_z^2 - S_{xz}^2\right)}{S_x^2 S_z^2 S_t^2 - S_x^2 S_{zt}^2 - S_z^2 S_{xt}^2 - S_t^2 S_{xz}^2 + 2S_{xz}S_{xt}S_{zt}}$$

Para determinar si se alcanza un mínimo, se debe hallar la matriz hessiana y verificar que sus menores principales son mayores que cero. Esto es

$$H(V(\hat{\bar{Y}}_{lr})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_1^2} & \frac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_1 b_2} & \frac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_1 b_3} \\ \frac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_2 b_1} & \frac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_2^2} & \frac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_2 b_3} \\ \frac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_3 b_1} & \frac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_3 b_2} & \frac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_3^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N-n}{Nn}2S_x^2 & \frac{N-n}{Nn}2S_{xz} & \frac{N-n}{Nn}2S_{xt} \\ \frac{N-n}{Nn}2S_{xz} & \frac{N-n}{Nn}2S_z^2 & \frac{N-n}{Nn}2S_{zt} \\ \frac{N-n}{Nn}2S_{xt} & \frac{N-n}{Nn}2S_{zt} & \frac{N-n}{Nn}2S_t^2 \end{bmatrix}$$

Analizando el menor principal de orden 1,

$H_1(V(\hat{\bar{Y}}_{lr})) = \frac{N-n}{Nn}2S_x^2 \geq 0$, y será estrictamente mayor que cero si $n < N \ \wedge \ S_x^2 > 0$.

Analizando el menor principal de orden 2,

$$H_2(V(\hat{\bar{Y}}_{lr})) = \begin{vmatrix} \frac{N-n}{Nn}2S_x^2 & \frac{N-n}{Nn}2S_{xz} \\ \frac{N-n}{Nn}2S_{xz} & \frac{N-n}{Nn}2S_z^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{N-n}{Nn}2S_x^2\right)\left(\frac{N-n}{Nn}2S_z^2\right) - \left(\frac{N-n}{Nn}2S_{xz}\right)\left(\frac{N-n}{Nn}2S_{xz}\right)$$

$$= 2^2\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^2 S_x^2 S_z^2 - 2^2\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^2 S_{xz}S_{xz} = 2^2\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^2\left(S_x^2 S_z^2 - S_{xz}^2\right)$$

$$= 2^2\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^2 S_x^2 S_z^2\left(1-\frac{S_{xz}^2}{S_x^2 S_z^2}\right)$$

$$= 2^2\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^2 S_x^2 S_z^2\left(1-\rho_{xz}^2\right)\geq 0$$

porque

$$\left.\begin{array}{ll} 2^2\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^2 & \geq 0 \\ S_x^2 & \geq 0 \\ S_z^2 & \geq 0 \\ 1-\rho_{xz}^2 & \geq 0 \quad (\text{ya que } -1\leq \rho_{xz}\leq 1 \ \Rightarrow \ 0\leq \rho_{xz}^2 \leq 1) \end{array}\right\} \Rightarrow H_2(V(\hat{\hat{Y}}_{lr})) \geq 0$$

y será estrictamente $H_2(V(\hat{\hat{Y}}_{lr}))>0$ si $n<N$, $S_x^2>0$, $S_z^2>0$ $\wedge$ $-1<\rho_{xz}<1$.

Analizando el menor principal de orden 3, que es el determinante,

$$H_3(V(\hat{\hat{Y}}_{lr}))=\begin{vmatrix} \frac{N-n}{Nn}2S_x^2 & \frac{N-n}{Nn}2S_{xz} & \frac{N-n}{Nn}2S_{xt} \\ \frac{N-n}{Nn}2S_{xz} & \frac{N-n}{Nn}2S_z^2 & \frac{N-n}{Nn}2S_{zt} \\ \frac{N-n}{Nn}2S_{xt} & \frac{N-n}{Nn}2S_{zt} & \frac{N-n}{Nn}2S_t^2 \end{vmatrix} = 2^3\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^3\left(S_x^2S_z^2S_t^2+2S_{xt}S_{xz}S_{zt}-S_x^2S_{zt}^2-S_z^2S_{xt}^2-S_t^2S_{xz}^2\right)$$

$$=2^3\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^3 S_x^2S_z^2S_t^2\left(\frac{S_x^2S_z^2S_t^2+2S_{xt}S_{xz}S_{zt}-S_x^2S_{zt}^2-S_z^2S_{xt}^2-S_t^2S_{xz}^2}{S_x^2S_z^2S_t^2}\right)$$

$$=2^3\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^3 S_x^2S_z^2S_t^2\left(1+2\frac{S_{xt}S_{xz}S_{zt}}{S_x^2S_z^2S_t^2}-\frac{S_{zt}^2}{S_z^2S_t^2}-\frac{S_{xt}^2}{S_x^2S_t^2}-\frac{S_{xz}^2}{S_x^2S_z^2}\right)$$

$$=2^3\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^3 S_x^2S_z^2S_t^2\left(1+2\rho_{xt}\rho_{xz}\rho_{zt}-\rho_{zt}^2-\rho_{xt}^2-\rho_{xz}^2\right)$$

Como

$$\left.\begin{array}{ll} 2^3\left(\dfrac{N-n}{Nn}\right)^3 & \geq 0 \\ S_x^2 & \geq 0 \\ S_z^2 & \geq 0 \\ S_t^2 & \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow H_3(V(\hat{\bar{Y}}_{lr})) \geq 0 \quad \text{si y sólo si} \quad 1+2\rho_{xt}\rho_{xz}\rho_{zt}-\rho_{zt}^2-\rho_{xt}^2-\rho_{xz}^2 \geq 0$$

y será estrictamente $H_3(V(\hat{\bar{Y}}_{lr})) > 0$ si $\left\{\begin{array}{c} n<N \\ S_x^2>0 \\ S_z^2>0 \\ S_t^2>0 \\ 1+2\rho_{xt}\rho_{xz}\rho_{zt}-\rho_{zt}^2-\rho_{xt}^2-\rho_{xz}^2>0 \end{array}\right.$

considerando todas las condiciones encontradas en los menores principales de orden 1, 2 y 3, se tiene que,

$$\text{si} \quad \left\{\begin{array}{c} n<N \\ S_x^2>0 \\ S_z^2>0 \\ S_t^2>0 \\ -1<\rho_{xz}<1 \\ 1+2\rho_{xt}\rho_{xz}\rho_{zt}-\rho_{zt}^2-\rho_{xt}^2-\rho_{xz}^2>0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow b_{10},\ b_{20} \text{ y } b_{30} \text{ minimizan } V(\hat{\bar{Y}}_{lr})$$

Como tiene que ocurrir que $-1<\rho_{xz}<1$, es decir $\rho_{xz}\neq -1 \wedge \rho_{xz}\neq 1$, se evaluará que ocurre con la última condición, si las otras relaciones entre variables auxiliares son perfectas,

si $\rho_{xt}=1$, $1+2\rho_{xz}\rho_{zt}-\rho_{zt}^2-1-\rho_{xz}^2=2\rho_{xz}\rho_{zt}-\rho_{zt}^2-\rho_{xz}^2=-(\rho_{xz}-\rho_{zt})^2>0$ => $(\rho_{xz}-\rho_{zt})^2<0$

si $\rho_{xt}=-1$, $1-2\rho_{xz}\rho_{zt}-\rho_{zt}^2-1-\rho_{xz}^2=-2\rho_{xz}\rho_{zt}-\rho_{zt}^2-\rho_{xz}^2=-(\rho_{xz}+\rho_{zt})^2>0$ => $(\rho_{xz}+\rho_{zt})^2<0$

si $\rho_{zt}=1$, $1+2\rho_{xt}\rho_{zx}-1-\rho_{xt}^2-\rho_{xz}^2=2\rho_{xt}\rho_{xz}-\rho_{xt}^2-\rho_{xz}^2=-(\rho_{xt}-\rho_{xz})^2>0$ => $(\rho_{xt}-\rho_{xz})^2<0$

si $\rho_{zt}=-1$, $1-2\rho_{xt}\rho_{zx}-1-\rho_{xt}^2-\rho_{xz}^2=-2\rho_{xt}\rho_{xz}-\rho_{xt}^2-\rho_{xz}^2=-(\rho_{xt}-\rho_{xz})^2>0$ => $(\rho_{xt}+\rho_{xz})^2<0$

si $\rho_{xt}=\rho_{zt}=1$, $1+2\rho_{xz}-1-1-\rho_{xz}^2=-1+2\rho_{xz}-\rho_{xz}^2=-(1-\rho_{xz})^2>0$ => $(1-\rho_{xz})^2<0$

si $\rho_{xt}=\rho_{zt}=-1$, $1+2\rho_{xz}-1-1-\rho_{xz}^2=-1+2\rho_{xz}-\rho_{xz}^2=-(1-\rho_{xz})^2>0$ => $(1-\rho_{xz})^2<0$

si $\rho_{xt}=1, \rho_{zt}=-1$, $1-2\rho_{xz}-1-1-\rho_{xz}^2=-1-2\rho_{xz}-\rho_{xz}^2=-(1+\rho_{xz})^2>0$ => $(1+\rho_{xz})^2<0$

si $\rho_{xt}=-1, \rho_{zt}=1$, $1-2\rho_{xz}-1-1-\rho_{xz}^2=-1-2\rho_{xz}-\rho_{xz}^2=-(1+\rho_{xz})^2>0$ => $(1+\rho_{xz})^2<0$

y ninguno de estos casos son válidos, es decir, que $\rho_{xt} \neq -1 \wedge \rho_{xt} \neq 1$ y $\rho_{zt} \neq -1 \wedge \rho_{zt} \neq 1$.

Entonces, b_{10}, b_{20} y b_{30} minimizan $V(\hat{\bar{Y}}_{lr})$ si $\begin{cases} n < N \\ S_x^2 > 0 \\ S_z^2 > 0 \\ S_t^2 > 0 \\ -1 < \rho_{xz} < 1 \\ -1 < \rho_{xt} < 1 \\ -1 < \rho_{zt} < 1 \\ 1 + 2\rho_{xt}\rho_{xz}\rho_{zt} - \rho_{zt}^2 - \rho_{xt}^2 - \rho_{xz}^2 > 0 \end{cases}$

es decir, si $n<N$, las variables auxiliares x, z, t no son constantes ($S_x^2>0, S_z^2>0, S_t^2>0$), sus correlaciones no son perfectas ($-1<\rho_{xz}<1, -1<\rho_{xt}<1, -1<\rho_{zt}<1$) y

$1+2\rho_{xt}\rho_{xz}\rho_{zt} - \rho_{zt}^2 - \rho_{xt}^2 - \rho_{xz}^2 > 0$.

Cabe destarcar que los mismos coeficientes b_{10}, b_{20} y b_{30} , con las mismas condiciones, minimizan $V(\hat{Y}_{lr})$.

3.5.- Comparación con otros Estimadores

Tal como se ha hecho en otros capítulos, se debe comparar la precisión del estimador de regresión lineal con 3 variables auxiliares contra la precisión de diversos estimadores, sin embargo, al tener 4 variables (y, x, z, t) y 3 coeficientes (b_1, b_2, b_3), en todas las comparaciones se llega a resultados muy difíciles de aplicar, por lo tanto, se compararán unos pocos casos, básicamente para reflejar la complejidad de dichas comparaciones.

3.5.1.- Comparación del Estimador de Regresión Lineal con 3 variables auxiliares con el Estimador Directo

La primera comparación se hará con el estimador directo, por ser el más sencillo. A continuación se tienen los errores cuadrático medios que se van a comparar.

$$EMC(\hat{\bar{Y}}_{lr})=V(\hat{\bar{Y}}_{lr})=\frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2+b_1^2S_x^2+b_2^2S_z^2+b_3^2S_t^2-2b_1S_{xy}-2b_2S_{yz}-2b_3S_{yt}+2b_1b_2S_{xz}+2b_1b_3S_{xt}+2b_2b_3S_{zt}\right]$$

vs

$$EMC(\hat{\bar{Y}})=V(\hat{\bar{Y}})=\frac{N-n}{Nn}S_y^2$$

Para que el estimador de regresión lineal con 3 variables auxiliares sea más preciso que el estimador directo, debe ocurrir que,

$$EMC(\hat{\bar{Y}}_{lr})<ECM(\hat{\bar{Y}})$$

y esto es

$$\frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2+b_1^2S_x^2+b_2^2S_z^2+b_3^2S_t^2-2b_1S_{xy}-2b_2S_{yz}-2b_3S_{yt}+2b_1b_2S_{xz}+2b_1b_3S_{xt}+2b_2b_3S_{zt}\right]<\frac{N-n}{Nn}S_y^2$$

$$S_y^2+b_1^2S_x^2+b_2^2S_z^2+b_3^2S_t^2-2b_1S_{xy}-2b_2S_{yz}-2b_3S_{yt}+2b_1b_2S_{xz}+2b_1b_3S_{xt}+2b_2b_3S_{zt}<S_y^2$$

$$b_1^2S_x^2+b_2^2S_z^2+b_3^2S_t^2-2b_1S_{xy}-2b_2S_{yz}-2b_3S_{yt}+2b_1b_2S_{xz}+2b_1b_3S_{xt}+2b_2b_3S_{zt}<0$$

$$b_1^2S_x^2-2b_1\left(S_{xy}+b_2S_{xz}+b_3S_{xt}\right)+b_2^2S_z^2+b_3^2S_t^2-2b_2S_{yz}-2b_3S_{yt}+2b_2b_3S_{zt}<0$$

Como puede observarse, resulta complejo establecer una condición sencilla que indique cuando el estimador de regresión lineal con 3 variables auxiliares es más preciso que el estimador directo. Igual ocurrirá con las otras comparaciones.

3.5.2.- Comparación de los Estimadores de Regresión Lineal con 1 y 3 variables auxiliares

A efectos de diferenciar ambos estimadores, se modificará ligeramente la notación, entonces,

$EMC(\hat{\bar{Y}}_{lr1}) =$ error cuadrático medio del estimador de regresión lineal con 1 variable auxiliar

$EMC(\hat{\bar{Y}}_{lr3}) =$ error cuadrático medio del estimador de regresión lineal con 3 variables auxiliares

$b_{11} =$ coeficiente "b_1" del estimador de regresión lineal con 1 variables auxiliares

$b_{13} =$ coeficiente "b_1" del estimador de regresión lineal con 3 variables auxiliares

$b_{23} =$ coeficiente "b_2" del estimador de regresión lineal con 3 variables auxiliares

$b_{33} =$ coeficiente "b_3" del estimador de regresión lineal con 3 variables auxiliares

Los errores cuadrático medios que se van a comparar son los siguientes,

$$EMC(\hat{\bar{Y}}_{lr3})=V(\hat{\bar{Y}}_{lr3})=\frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2+b_{13}^2S_x^2+b_{23}^2S_z^2+b_{33}^2S_t^2-2b_{13}S_{xy}-2b_{23}S_{yz}-2b_{33}S_{yt}+2b_{13}b_{23}S_{xz}+2b_{13}b_{33}S_{xt}+2b_{23}b_{33}S_{zt}\right]$$

vs

$$EMC(\hat{\bar{Y}}_{lr1})=V(\hat{\bar{Y}}_{lr1}) = \frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2+b_{11}^2S_x^2-2b_{11}S_{xy}\right]$$

Para que el estimador de regresión lineal con 3 variables auxiliares sea más preciso que el estimador de regresión lineal con 1 variable auxiliar, debe cumplirse que,

$$EMC(\hat{\bar{Y}}_{lr3}) < EMC(\hat{\bar{Y}}_{lr1})$$

y esto es,

$$\frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2+b_{13}^2S_x^2+b_{23}^2S_z^2+b_{33}^2S_t^2-2b_{13}S_{xy}-2b_{23}S_{yz}-2b_{33}S_{yt}+2b_{13}b_{23}S_{xz}+2b_{13}b_{33}S_{xt}+2b_{23}b_{33}S_{zt}\right]<$$
$$\frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2+b_{11}^2S_x^2-2b_{11}S_{xy}\right]$$

$$S_y^2+b_{13}^2S_x^2+b_{23}^2S_z^2+b_{33}^2S_t^2-2b_{13}S_{xy}-2b_{23}S_{yz}-2b_{33}S_{yt}+2b_{13}b_{23}S_{xz}+2b_{13}b_{33}S_{xt}+2b_{23}b_{33}S_{zt}<$$
$$S_y^2+b_{11}^2S_x^2-2b_{11}S_{xy}$$

$$b_{13}^2S_x^2+b_{23}^2S_z^2+b_{33}^2S_t^2-2b_{13}S_{xy}-2b_{23}S_{yz}-2b_{33}S_{yt}+2b_{13}b_{23}S_{xz}+2b_{13}b_{33}S_{xt}+2b_{23}b_{33}S_{zt}<$$
$$b_{11}^2S_x^2-2b_{11}S_{xy}$$

$$\left(b_{13}^2-b_{11}^2\right)S_x^2+b_{23}^2S_z^2+b_{33}^2S_t^2-2\left(b_{13}-b_{11}\right)S_{xy}-2b_{23}S_{yz}-2b_{33}S_{yt}+2b_{13}b_{23}S_{xz}+2b_{13}b_{33}S_{xt}+2b_{23}b_{33}S_{zt}<0$$

Como puede observarse, existen infinitas combinaciones que cumplen la condición, y es complicado establecer una condición más sencilla. Se pueden comparar los errores cuadráticos medios, cuando los valores de b_i son los que minimizan la varianza en ambos casos, aunque también resulta poco manejable,

$$b_{13}^2S_x^2+b_{23}^2S_z^2+b_{33}^2S_t^2-2b_{13}S_{xy}-2b_{23}S_{yz}-2b_{33}S_{yt}+2b_{13}b_{23}S_{xz}+2b_{13}b_{33}S_{xt}+2b_{23}b_{33}S_{zt}<$$
$$\frac{S_{xy}^2}{S_x^4}S_x^2-2\frac{S_{xy}}{S_x^2}S_{xy}$$

$$b_{13}^2S_x^2+b_{23}^2S_z^2+b_{33}^2S_t^2-2b_{13}S_{xy}-2b_{23}S_{yz}-2b_{33}S_{yt}+2b_{13}b_{23}S_{xz}+2b_{13}b_{33}S_{xt}+2b_{23}b_{33}S_{zt}<$$
$$\frac{S_{xy}^2}{S_x^2}-2\frac{S_{xy}^2}{S_x^2}$$

$$b_{13}^2S_x^2+b_{23}^2S_z^2+b_{33}^2S_t^2-2b_{13}S_{xy}-2b_{23}S_{yz}-2b_{33}S_{yt}+2b_{13}b_{23}S_{xz}+2b_{13}b_{33}S_{xt}+2b_{23}b_{33}S_{zt}<-\frac{S_{xy}^2}{S_x^2}$$

$$b_{13}^2 S_x^2 + b_{23}^2 S_z^2 + b_{33}^2 S_t^2 - 2b_{13}S_{xy} - 2b_{23}S_{yz} - 2b_{33}S_{yt} + 2b_{13}b_{23}S_{xz} + 2b_{13}b_{33}S_{xt} + 2b_{23}b_{33}S_{zt} + \frac{S_{xy}^2}{S_x^2} < 0$$

donde,

$$b_{13} = \frac{S_{yx}\left(S_z^2 S_t^2 - S_{zt}^2\right) + S_{yz}\left(S_{xt}S_{zt} - S_t^2 S_{xz}\right) + S_{yt}\left(S_{xz}S_{zt} - S_z^2 S_{xt}\right)}{S_x^2 S_z^2 S_t^2 - S_x^2 S_{zt}^2 - S_z^2 S_{xt}^2 - S_t^2 S_{xz}^2 + 2S_{xz}S_{xt}S_{zt}}$$

$$b_{23} = \frac{S_{yx}\left(S_{xt}S_{zt} - S_t^2 S_{xz}\right) + S_{yz}\left(S_x^2 S_t^2 - S_{xt}^2\right) + S_{yt}\left(S_{xz}S_{xt} - S_x^2 S_{zt}\right)}{S_x^2 S_z^2 S_t^2 - S_x^2 S_{zt}^2 - S_z^2 S_{xt}^2 - S_t^2 S_{xz}^2 + 2S_{xz}S_{xt}S_{zt}}$$

$$b_{33} = \frac{S_{yx}\left(S_{xz}S_{zt} - S_z^2 S_{xt}\right) + S_{yz}\left(S_{xz}S_{xt} - S_x^2 S_{zt}\right) + S_{yt}\left(S_x^2 S_z^2 - S_{xz}^2\right)}{S_x^2 S_z^2 S_t^2 - S_x^2 S_{zt}^2 - S_z^2 S_{xt}^2 - S_t^2 S_{xz}^2 + 2S_{xz}S_{xt}S_{zt}}$$

$$b_{13}^2 = \frac{\left[S_{yx}\left(S_z^2 S_t^2 - S_{zt}^2\right) + S_{yz}\left(S_{xt}S_{zt} - S_t^2 S_{xz}\right) + S_{yt}\left(S_{xz}S_{zt} - S_z^2 S_{xt}\right)\right]^2}{\left[S_x^2 S_z^2 S_t^2 - S_x^2 S_{zt}^2 - S_z^2 S_{xt}^2 - S_t^2 S_{xz}^2 + 2S_{xz}S_{xt}S_{zt}\right]^2}$$

$$b_{23}^2 = \frac{\left[S_{yx}\left(S_{xt}S_{zt} - S_t^2 S_{xz}\right) + S_{yz}\left(S_x^2 S_t^2 - S_{xt}^2\right) + S_{yt}\left(S_{xz}S_{xt} - S_x^2 S_{zt}\right)\right]^2}{\left[S_x^2 S_z^2 S_t^2 - S_x^2 S_{zt}^2 - S_z^2 S_{xt}^2 - S_t^2 S_{xz}^2 + 2S_{xz}S_{xt}S_{zt}\right]^2}$$

$$b_{33}^2 = \frac{\left[S_{yx}\left(S_{xz}S_{zt} - S_z^2 S_{xt}\right) + S_{yz}\left(S_{xz}S_{xt} - S_x^2 S_{zt}\right) + S_{yt}\left(S_x^2 S_z^2 - S_{xz}^2\right)\right]^2}{\left[S_x^2 S_z^2 S_t^2 - S_x^2 S_{zt}^2 - S_z^2 S_{xt}^2 - S_t^2 S_{xz}^2 + 2S_{xz}S_{xt}S_{zt}\right]^2}$$

$$b_{13}b_{23} = \frac{\left[S_{yx}\left(S_z^2 S_t^2 - S_{zt}^2\right) + S_{yz}\left(S_{xt}S_{zt} - S_t^2 S_{xz}\right) + S_{yt}\left(S_{xz}S_{zt} - S_z^2 S_{xt}\right)\right]\left[S_{yx}\left(S_{xt}S_{zt} - S_t^2 S_{xz}\right) + S_{yz}\left(S_x^2 S_t^2 - S_{xt}^2\right) + S_{yt}\left(S_{xz}S_{xt} - S_x^2 S_{zt}\right)\right]}{\left[S_x^2 S_z^2 S_t^2 - S_x^2 S_{zt}^2 - S_z^2 S_{xt}^2 - S_t^2 S_{xz}^2 + 2S_{xz}S_{xt}S_{zt}\right]^2}$$

$$b_{13}b_{33} = \frac{\left[S_{yx}\left(S_z^2 S_t^2 - S_{zt}^2\right) + S_{yz}\left(S_{xt}S_{zt} - S_t^2 S_{xz}\right) + S_{yt}\left(S_{xz}S_{zt} - S_z^2 S_{xt}\right)\right]\left[S_{yx}\left(S_{xz}S_{zt} - S_z^2 S_{xt}\right) + S_{yz}\left(S_{xz}S_{xt} - S_x^2 S_{zt}\right) + S_{yt}\left(S_x^2 S_z^2 - S_{xz}^2\right)\right]}{\left[S_x^2 S_z^2 S_t^2 - S_x^2 S_{zt}^2 - S_z^2 S_{xt}^2 - S_t^2 S_{xz}^2 + 2S_{xz}S_{xt}S_{zt}\right]^2}$$

$$b_{23}b_{33} = \frac{\left[S_{yx}\left(S_{xt}S_{zt} - S_t^2 S_{xz}\right) + S_{yz}\left(S_x^2 S_t^2 - S_{xt}^2\right) + S_{yt}\left(S_{xz}S_{xt} - S_x^2 S_{zt}\right)\right]\left[S_{yx}\left(S_{xz}S_{zt} - S_z^2 S_{xt}\right) + S_{yz}\left(S_{xz}S_{xt} - S_x^2 S_{zt}\right) + S_{yt}\left(S_x^2 S_z^2 - S_{xz}^2\right)\right]}{\left[S_x^2 S_z^2 S_t^2 - S_x^2 S_{zt}^2 - S_z^2 S_{xt}^2 - S_t^2 S_{xz}^2 + 2S_{xz}S_{xt}S_{zt}\right]^2}$$

3.5.3.- Comparación de los Estimadores de Regresión Lineal con 2 y 3 variables auxiliares

A efectos de diferenciar ambos estimadores, se modificará ligeramente la notación, entonces,

$EMC(\hat{\hat{Y}}_{lr2}) =$ error cuadrático medio del estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares

$EMC(\hat{\hat{Y}}_{lr3}) =$ error cuadrático medio del estimador de regresión lineal con 3 variables auxiliares

$b_{12} =$ coeficiente "b_1" del estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares

$b_{22} =$ coeficiente "b_2" del estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares

$b_{13} =$ coeficiente "b_1" del estimador de regresión lineal con 3 variables auxiliares

$b_{23} =$ coeficiente "b_2" del estimador de regresión lineal con 3 variables auxiliares

$b_{33} =$ coeficiente "b_3" del estimador de regresión lineal con 3 variables auxiliares

Los errores cuadrático medios que se van a comparar son los siguientes,

$$EMC(\hat{\hat{Y}}_{lr3}) = V(\hat{\hat{Y}}_{lr3}) = \frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2 + b_{13}^2 S_x^2 + b_{23}^2 S_z^2 + b_{33}^2 S_t^2 - 2b_{13}S_{xy} - 2b_{23}S_{yz} - 2b_{33}S_{yt} + 2b_{13}b_{23}S_{xz} + 2b_{13}b_{33}S_{xt} + 2b_{23}b_{33}S_{zt}\right]$$

vs

$$EMC(\hat{\hat{Y}}_{lr2}) = V(\hat{\hat{Y}}_{lr2}) = \frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2 + b_{12}^2 S_x^2 + b_{22}^2 S_z^2 - 2b_{12}S_{xy} - 2b_{22}S_{yz} + 2b_{12}b_{22}S_{xz}\right]$$

Para que el estimador de regresión lineal con 3 variables auxiliares sea más preciso que el estimador de regresión lineal con 1 variable auxiliar, debe cumplirse que,

$$EMC(\hat{\hat{Y}}_{lr3}) < EMC(\hat{\hat{Y}}_{lr2})$$

y esto es,

$$\frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2+b_{13}^2S_x^2+b_{23}^2S_z^2+b_{33}^2S_t^2-2b_{13}S_{xy}-2b_{23}S_{yz}-2b_{33}S_{yt}+2b_{13}b_{23}S_{xz}+2b_{13}b_{33}S_{xt}+2b_{23}b_{33}S_{zt}\right]<$$

$$\frac{N-n}{Nn}\left[S_y^2+b_{12}^2S_x^2+b_{22}^2S_z^2-2b_{12}S_{xy}-2b_{22}S_{yz}+2b_{12}b_{22}S_{xz}\right]$$

$$S_y^2+b_{13}^2S_x^2+b_{23}^2S_z^2+b_{33}^2S_t^2-2b_{13}S_{xy}-2b_{23}S_{yz}-2b_{33}S_{yt}+2b_{13}b_{23}S_{xz}+2b_{13}b_{33}S_{xt}+2b_{23}b_{33}S_{zt}<$$

$$S_y^2+b_{12}^2S_x^2+b_{22}^2S_z^2-2b_{12}S_{xy}-2b_{22}S_{yz}+2b_{12}b_{22}S_{xz}$$

$$b_{13}^2S_x^2+b_{23}^2S_z^2+b_{33}^2S_t^2-2b_{13}S_{xy}-2b_{23}S_{yz}-2b_{33}S_{yt}+2b_{13}b_{23}S_{xz}+2b_{13}b_{33}S_{xt}+2b_{23}b_{33}S_{zt}<$$

$$b_{12}^2S_x^2+b_{22}^2S_z^2-2b_{12}S_{xy}-2b_{22}S_{yz}+2b_{12}b_{22}S_{xz}$$

$$\left(b_{13}^2-b_{12}^2\right)S_x^2+\left(b_{23}^2-b_{22}^2\right)S_z^2+b_{33}^2S_t^2-2\left(b_{13}-b_{12}\right)S_{xy}-2\left(b_{23}-b_{22}\right)S_{yz}-2b_{33}S_{yt}+2\left(b_{13}b_{23}-b_{12}b_{22}\right)S_{xz}+$$
$$+2b_{13}b_{33}S_{xt}+2b_{23}b_{33}S_{zt}<0$$

4.- ESTIMADOR DE REGRESIÓN LINEAL CON *K* VARIABLES AUXILIARES EN MUESTREO ALEATORIO SIMPLE

Luego de desarrollar el estimador con 3 variables auxiliares, ahora se procederá a generalizar el estimador, incluyendo *k* variables auxiliares. A los efectos de este desarrollo, las variables auxiliares se denominarán x_1, x_2, x_3, …, x_k.

La estructura de los estimadores es la siguiente,

$$\hat{\bar{Y}}_{lr} = \bar{y} + b_1(\bar{X}_1 - \bar{x}_1) + b_2(\bar{X}_2 - \bar{x}_2) + b_3(\bar{X}_3 - \bar{x}_3) + \cdots + b_k(\bar{X}_k - \bar{x}_k)$$

$$\hat{Y}_{lr} = N\hat{\bar{Y}}_{lr} = N\left[\bar{y} + b_1(\bar{X}_1 - \bar{x}_1) + b_2(\bar{X}_2 - \bar{x}_2) + b_3(\bar{X}_3 - \bar{x}_3) + \cdots + b_k(\bar{X}_k - \bar{x}_k)\right]$$

$$\hat{Y}_{lr} = N\hat{\bar{Y}}_{lr} = \hat{Y} + b_1(X_1 - \hat{X}_1) + b_2(X_2 - \hat{X}_2) + b_3(X_3 - \hat{X}_3) + \cdots + b_k(X_k - \hat{X}_k)$$

A continuación se muestra el desarrollo de los mismos.

4.1.- Estimadores

Sea un universo de *N* elementos y sean las observaciones de las variables y , x_1 , x_2, x_3, … , x_k, sobre cada uno de ellos,

$$\begin{array}{cccc}
y_1 & , y_2 & ,\ldots, & y_{\mathrm{N}} \\
x_{11} & , x_{12} & ,\ldots, & x_{1\mathrm{N}} \\
x_{21} & , x_{22} & ,\ldots, & x_{2\mathrm{N}} \\
x_{31} & , x_{32} & ,\ldots, & x_{3\mathrm{N}} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_{k1} & , x_{k2} & ,\ldots, & x_{k\mathrm{N}}
\end{array}$$

Entonces, la variable *"y"* se puede expresar como una función lineal de x_1 , x_2, x_3, … , x_k, de la siguiente manera,

$$y_i = a + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} + \cdots\ b_k x_{ki} + e_i \tag{36}$$

donde *"a"* es el punto de corte del hiperplano en el eje de la variable *"y"*; *"b_1", "b_2", "b_3", …, "b_k"* son las pendientes del hiperplano, y *"e_i"* es el desvío que tiene *"y_i"* respecto del hiperplano, además,

$$e_i \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{N} e_i = 0$$

Sea
$$y'_i = a + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} + \cdots\ b_k x_{ki} \tag{37}$$

un estimador de y_i , y se cumple que
$$\sum_{i=1}^{N} y_i = \sum_{i=1}^{N} y'_i$$

ya que,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=}^{N} y_i &= \sum_{i=1}^{N} (a + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} + \cdots + b_k x_{ki} + e_i) \\
&= N\,a + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^{N} x_{2i} + b_3 \sum_{i=1}^{N} x_{3i} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{N} x_{ki} + \sum_{i=1}^{N} e_i \\
&= N\,a + b_1 \sum_{i=1}^{N} x_{1i} + b_2 \sum_{i=1}^{N} x_{2i} + b_3 \sum_{i=1}^{N} x_{3i} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{N} x_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{N} (a + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + b_3 x_{3i} + \cdots + b_k x_{ki}) \\
&= \sum_{i=1}^{N} y'_i
\end{aligned}$$

Si se aplica a (36) sumatoria hasta N y luego se divide entre N, se tiene,

$$Y=\sum_{i=}^{N} y_i = N\,a + b_1\sum_{i=1}^{N} x_{1i} + b_2\sum_{i=1}^{N} x_{2i} + b_3\sum_{i=1}^{N} x_{3i} + \cdots + b_k\sum_{i=1}^{N} x_{ki} + \sum_{i=1}^{N} e_i$$

$$=\sum_{i=}^{N} y_i = N\,a + b_1\sum_{i=1}^{N} x_{1i} + b_2\sum_{i=1}^{N} x_{2i} + b_3\sum_{i=1}^{N} x_{3i} + \cdots + b_k\sum_{i=1}^{N} x_{ki} \qquad (38)$$

$$\overline{Y} = a + b_1\overline{X}_1 + b_2\overline{X}_2 + b_3\overline{X}_3 + \cdots + b_k\overline{X}_k \qquad (39)$$

si se toma una muestra de tamaño n, $n \leq N$, y se le aplica a (36) las mismas operaciones anteriores, pero hasta n, se tiene que,

$$\sum_{i=}^{n} y_i = n\,a + b_1\sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_2\sum_{i=1}^{n} x_{2i} + b_3\sum_{i=1}^{n} x_{3i} + \cdots + b_k\sum_{i=1}^{n} x_{ki} + \sum_{i=1}^{n} e_i \qquad (40)$$

$$\bar{y} = a + b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2 + b_3\bar{x}_3 + \cdots + b_k\bar{x}_k + \bar{e} \qquad (41)$$

donde $\bar{e}$ es el promedio muestral de los desvíos y además es diferente de cero. Restando (41) de (39),

$$\overline{Y} - \bar{y} = b_1\overline{X}_1 - b_1\bar{x}_1 + b_2\overline{X}_2 - b_2\bar{x}_2 + b_3\overline{X}_3 - b_3\bar{x}_3 + \cdots + b_k\overline{X}_k - b_k\bar{x}_k - \bar{e}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{Y} = \bar{y} + b_1\overline{X}_1 - b_1\bar{x}_1 + b_2\overline{X}_2 - b_2\bar{x}_2 + b_3\overline{X}_3 - b_3\bar{x}_3 + \cdots + b_k\overline{X}_k - b_k\bar{x}_k - \bar{e}$$

si se hace $e'_i = -e_i$, entonces,

$$\overline{Y} = \bar{y} + b_1\overline{X}_1 - b_1\bar{x}_1 + b_2\overline{X}_2 - b_2\bar{x}_2 + b_3\overline{X}_3 - b_3\bar{x}_3 + \cdots + b_k\overline{X}_k - b_k\bar{x}_k + \bar{e}' \qquad (42)$$

El valor de *"a"* se puede obtener igualando (42) a (39),

$$a = \bar{y} - b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2 + b_3\bar{x}_3 - \cdots - b_k\bar{x}_k + \bar{e}'$$

Si los datos se comportan como un hiperplano, entonces $\bar{e} = \bar{e}' = 0$

de lo que puede decirse que un estimador del promedio poblacional es,

$$\hat{\hat{Y}}_{lr} = \bar{y} + b_1(\bar{X}_1 - \bar{x}_1) + b_2(\bar{X}_2 - \bar{x}_2) + b_3(\bar{X}_3 - \bar{x}_3) + \cdots + b_k(\bar{X}_k - \bar{x}_k) \quad (43)$$

y será bueno en la medida que e_i converja a cero, es decir, cuando y_i se aproxime al hiperplano $a+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+\ldots+b_kx_k$. El estimador mostrado en (43) es el "estimador de regresión lineal del promedio poblacional", y el estimador del total viene dado por la expresión,

$$\hat{Y}_{lr} = N\hat{\hat{Y}}_{lr} = \hat{Y} + b_1(X_1 - \hat{X}_1) + b_2(X_2 - \hat{X}_2) + b_3(X_3 - \hat{X}_3) + \cdots + b_k(X_k - \hat{X}_k)$$

4.2.- Esperanza de los Estimadores

Aquí se desarrollará la esperanza para el estimador del promedio.

$$\begin{aligned}
E(\hat{\hat{Y}}_{lr}) &= E\left[\bar{y} + b_1(\bar{X}_1 - \bar{x}_1) + b_2(\bar{X}_2 - \bar{x}_2) + b_3(\bar{X}_3 - \bar{x}_3) + \cdots + b_k(\bar{X}_k - \bar{x}_k)\right] \\
&= E(\bar{y}) + \bar{X}_1E(b_1) - E(b_1\bar{x}) + \bar{X}_2E(b_2) - E(b_2\bar{x}_2) + \bar{X}_3E(b_3) - E(b_3\bar{x}_3) + \cdots + \bar{X}_kE(b_k) - E(b_k\bar{x}_k) \\
&= E(\bar{y}) + E(\bar{x}_1)E(b_1) - E(b_1\bar{x}) + E(\bar{x}_2)E(b_2) - E(b_2\bar{x}_2) + E(\bar{x}_3)E(b_3) - E(b_3\bar{x}_3) + \cdots + E(\bar{x}_k)E(b_k) - E(b_k\bar{x}_k) \\
&= E(\bar{y}) - \left[E(b_1\bar{x}_1) - E(\bar{x}_1)E(b_1)\right] - \left[E(b_2\bar{x}_2) - E(\bar{x}_2)E(b_2)\right] - \left[E(b_3\bar{x}_3) - E(\bar{x}_3)E(b_3)\right] - \cdots - \left[E(b_k\bar{x}_k) - E(\bar{x}_k)E(b_k)\right] \\
&= \bar{Y} - COV(b_1,\bar{x}_1) - COV(b_2,\bar{x}_2) - COV(b_3,\bar{x}_3) - \cdots - COV(b_k,\bar{x}_k)
\end{aligned}$$

Que resulta un estimador sesgado, pero si b_1, b_2, b_3, …, b_k son constantes, el estimador es insesgado.

Se puede desarrollar desde un principio la esperanza para b_1, b_2, b_3, …, b_k constantes.

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\bar{Y}}_{lr}) &= E\left[\bar{y} + b_1(\bar{X}_1 - \bar{x}_1) + b_2(\bar{X}_2 - \bar{x}_2) + b_3(\bar{X}_3 - \bar{x}_3) + \cdots + b_k(\bar{X}_k - \bar{x}_k)\right] \\
&= E(\bar{y}) + b_1\bar{X}_1 - b_1E(\bar{x}_1) + b_2\bar{X}_2 - E(\bar{x}_2) + b_3\bar{X}_3 - E(\bar{x}_3) + \cdots + b_k\bar{X}_k - E(\bar{x}_k) \\
&= E(\bar{y}) + b_1\bar{X}_1 - b_1\bar{X}_1 + b_2\bar{X}_2 - b_2\bar{X}_2 + b_3\bar{X}_3 - b_3\bar{X}_3 + \cdots + b_k\bar{X}_k - b_k\bar{X}_k \\
&= E(\bar{y}) \\
&= \bar{Y}
\end{aligned}
$$

Resultando un estimador insesgado, mismo resultado que se llegó anteriormente.

4.3.- Error Cuadrático Medio de los Estimadores

Debido a la complicación que implica el desarrollo de la varianza y el error cuadrático medio con k variables auxiliares, que ya se ha visto en sus desarrollos con 1, 2 y 3 variables auxiliares, y que, tal como se ha comentado, en la mayoría de los casos los valores de los coeficientes b_i son constantes, aquí se desarrollará sólo el caso para b_1, b_2, b_3, …, b_k constantes, que el estimador es insesgado, de manera que la varianza coincide con el error cuadrático medio.

$$V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = E\left[\hat{\bar{Y}}_{lr} - E(\hat{\bar{Y}}_{lr})\right]^2 = E\left(\hat{\bar{Y}}_{lr}^2\right) - \left[E(\hat{\bar{Y}}_{lr})\right]^2$$

$$= E(\hat{\bar{Y}}_{lr}^2) - \left[\bar{Y} - \left[E(b_1\bar{x}_1) - E(\bar{x}_1)E(b_1)\right] - \left[E(b_2\bar{x}_2) - E(\bar{x}_2)E(b_2)\right] - \left[E(b_3\bar{x}_3) - E(\bar{x}_3)E(b_3)\right] - \cdots - \left[E(b_k\bar{x}_k) - E(\bar{x}_k)E(b_k)\right]\right]^2$$

$$= E(\hat{\bar{Y}}_{lr}^2) - \left[\bar{Y} - \left[b_1E(\bar{x}_1) - E(\bar{x}_1)b_1\right] - \left[b_2E(\bar{x}_2) - E(\bar{x}_2)b_2\right] - \left[b_3E(\bar{x}_3) - E(\bar{x}_3)b_3\right] - \cdots - \left[E(b_k\bar{x}_k) - E(\bar{x}_k)E(b_k)\right]\right]^2$$

$$= E(\hat{\bar{Y}}_{lr}^2) - \left[\bar{Y}\right]^2 \tag{44}$$

desarrollando $E(\hat{\bar{Y}}_{lr}^2)$, se tiene,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lr}^2) = E\left[\left(\bar{y} + b_1(\bar{X}_1 - \bar{x}_1) + b_2(\bar{X}_2 - \bar{x}_2) + b_3(\bar{X}_3 - \bar{x}_3) + \cdots + b_k(\bar{X}_k - \bar{x}_k)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\bar{y} + b_1\bar{X}_1 - b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{X}_2 - b_2\bar{x}_2 + b_3\bar{X}_3 - b_3\bar{x}_3 + \cdots + b_k\bar{X}_k - b_k\bar{x}_k\right)^2\right]$$

$$= E\Big[\bar{y}^2 + b_1^2\bar{X}_1^2 + b_1^2\bar{x}_1^2 + b_2^2\bar{X}_2^2 + b_2^2\bar{x}_2^2 + b_3^2\bar{X}_3^2 + b_3^2\bar{x}_3^2 + \cdots + b_k^2\bar{X}_k^2 + b_k^2\bar{x}_k^2 +$$

$$+ 2b_1\bar{y}\bar{X}_1 - 2b_1\bar{y}\bar{x}_1 + 2b_2\bar{y}\bar{X}_2 - 2b_2\bar{y}\bar{x}_2 + 2b_3\bar{y}\bar{X}_3 - 2b_3\bar{y}\bar{x}_3 + \cdots + 2b_k\bar{y}\bar{X}_k - 2b_k\bar{y}\bar{x}_k -$$

$$- 2b_1^2\bar{X}_1\bar{x}_1 + 2b_1b_2\bar{X}_1\bar{X}_2 - 2b_1b_2\bar{X}_1\bar{x}_2 + 2b_1b_3\bar{X}_1\bar{X}_3 - 2b_1b_3\bar{X}_1\bar{x}_3 + \cdots + 2b_1b_k\bar{X}_1\bar{X}_k - 2b_1b_k\bar{X}_1\bar{x}_k -$$

$$- 2b_1b_2\bar{x}_1\bar{X}_2 + 2b_1b_2\bar{x}_1\bar{x}_2 - 2b_1b_3\bar{x}_1\bar{X}_3 + 2b_1b_3\bar{x}_1\bar{x}_3 + \cdots - 2b_1b_k\bar{x}_1\bar{X}_k + 2b_1b_k\bar{x}_1\bar{x}_k -$$

$$- 2b_2^2\bar{X}_2\bar{x}_2 + 2b_2b_3\bar{X}_2\bar{X}_3 - 2b_2b_3\bar{X}_2\bar{x}_3 + \cdots + 2b_2b_k\bar{X}_2\bar{X}_k - 2b_2b_k\bar{X}_2\bar{x}_k -$$

$$- 2b_2b_3\bar{x}_2\bar{X}_3 + 2b_2b_3\bar{x}_2\bar{x}_3 + \cdots - 2b_2b_k\bar{x}_2\bar{X}_k + 2b_2b_k\bar{x}_2\bar{x}_k -$$

$$- 2b_3^2\bar{X}_3\bar{x}_3 + \cdots + 2b_3b_k\bar{X}_3\bar{X}_k - 2b_3b_k\bar{X}_3\bar{x}_k -$$

$$- \cdots - 2b_3b_k\bar{x}_3\bar{X}_k + 2b_3b_k\bar{x}_3\bar{x}_k - \cdots - 2b_k^2\bar{X}_k\bar{x}_k\Big]$$

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\bar{Y}}_{lr}^{2}) = {} & E\left(\bar{y}^{2}\right)+b_1^2\bar{X}_1^{2}+b_1^2E\left(\bar{x}_1^2\right)+b_2^2\bar{X}_2^{2}+b_2^2E\left(\bar{x}_2^2\right)+b_3^2\bar{X}_3^{2}+b_3^2E\left(\bar{x}_3^2\right)+\cdots+b_k^2\bar{X}_k^{2}+b_k^2E\left(\bar{x}_k^2\right)+\\
& +2b_1\bar{X}_1E(\bar{y})-2b_1E(\bar{y}\bar{x}_1)+2b_2\bar{X}_2E(\bar{y})-2b_2E(\bar{y}\bar{x}_2)+2b_3\bar{X}_3E(\bar{y})-2b_3E(\bar{y}\bar{x}_3)+\cdots+2b_k\bar{X}_kE(\bar{y})-2b_kE(\bar{y}\bar{x}_k)-\\
& -2b_1^2\bar{X}_1E(\bar{x}_1)+2b_1b_2\bar{X}_1\bar{X}_2-2b_1b_2\bar{X}_1E(\bar{x}_2)+2b_1b_3\bar{X}_1\bar{X}_3-2b_1b_3\bar{X}_1E(\bar{x}_3)+\cdots+2b_1b_k\bar{X}_1\bar{X}_k-2b_1b_k\bar{X}_1E(\bar{x}_k)-\\
& -2b_1b_2\bar{X}_2E(\bar{x}_1)+2b_1b_2E(\bar{x}_1\bar{x}_2)-2b_1b_3\bar{X}_3E(\bar{x}_1)+2b_1b_3E(\bar{x}_1\bar{x}_3)+\cdots-2b_1b_k\bar{X}_kE(\bar{x}_1)+2b_1b_kE(\bar{x}_1\bar{x}_k)-\\
& -2b_2^2\bar{X}_2E(\bar{x}_2)+2b_2b_3\bar{X}_2\bar{X}_3-2b_2b_3\bar{X}_2E(\bar{x}_3)+\cdots+2b_2b_k\bar{X}_2\bar{X}_k-2b_2b_k\bar{X}_2E(\bar{x}_k)-\\
& -2b_2b_3\bar{X}_3E(\bar{x}_2)+2b_2b_3E(\bar{x}_2\bar{x}_3)+\cdots-2b_2b_k\bar{X}_kE(\bar{x}_2)+2b_2b_kE(\bar{x}_2\bar{x}_k)-\\
& -2b_3^2\bar{X}_3E(\bar{x}_3)+\cdots+2b_3b_k\bar{X}_3\bar{X}_k-2b_3b_k\bar{X}_3E(\bar{x}_k)-\\
& -\cdots-2b_3b_k\bar{X}_kE(\bar{x}_3)+2b_3b_kE(\bar{x}_3\bar{x}_k)-\cdots-2b_k^2\bar{X}_kE(\bar{x}_k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\bar{Y}}_{lr}^{2}) = {} & E\left(\bar{y}^{2}\right)+b_1^2[E(\bar{x}_1)]^2+b_1^2E\left(\bar{x}_1^2\right)+b_2^2[E(\bar{x}_2)]^2+b_2^2E\left(\bar{x}_2^2\right)+b_3^2[E(\bar{x}_3)]^2+b_3^2E\left(\bar{x}_3^2\right)+\\
& +\cdots+b_k^2[E(\bar{x}_k)]^2+b_k^2E\left(\bar{x}_k^2\right)+\\
& +2b_1E(\bar{x}_1)E(\bar{y})-2b_1E(\bar{y}\bar{x}_1)+2b_2E(\bar{x}_2)E(\bar{y})-2b_2E(\bar{y}\bar{x}_2)+2b_3E(\bar{x}_3)E(\bar{y})-2b_3E(\bar{y}\bar{x}_3)+\\
& +\cdots+2b_kE(\bar{x}_k)E(\bar{y})-2b_kE(\bar{y}\bar{x}_k)-\\
& -2b_1^2[E(\bar{x}_1)]^2+2b_1b_2E(\bar{x}_1)E(\bar{x}_2)-2b_1b_2E(\bar{x}_1)E(\bar{x}_2)+2b_1b_3E(\bar{x}_1)E(\bar{x}_3)-2b_1b_3E(\bar{x}_1)E(\bar{x}_3)+\\
& +\cdots+2b_1b_kE(\bar{x}_1)E(\bar{x}_k)-2b_1b_kE(\bar{x}_1)E(\bar{x}_k)-\\
& -2b_1b_2E(\bar{x}_1)E(\bar{x}_2)+2b_1b_2E(\bar{x}_1\bar{x}_2)-2b_1b_3E(\bar{x}_1)E(\bar{x}_3)+2b_1b_3E(\bar{x}_1\bar{x}_3)+\\
& +\cdots-2b_1b_kE(\bar{x}_1)E(\bar{x}_k)+2b_1b_kE(\bar{x}_1\bar{x}_k)-\\
& -2b_2^2[E(\bar{x}_2)]^2+2b_2b_3E(\bar{x}_2)E(\bar{x}_3)-2b_2b_3E(\bar{x}_2)E(\bar{x}_3)+\cdots+2b_2b_kE(\bar{x}_2)E(\bar{x}_k)-2b_2b_kE(\bar{x}_2)E(\bar{x}_K)-\\
& -2b_2b_3E(\bar{x}_2)E(\bar{x}_3)+2b_2b_3E(\bar{x}_2\bar{x}_3)+\cdots-2b_2b_kE(\bar{x}_2)E(\bar{x}_k)+2b_2b_kE(\bar{x}_2\bar{x}_k)-\\
& -2b_3^2[E(\bar{x}_3)]^2+\cdots+2b_3b_kE(\bar{x}_3)E(\bar{x}_k)-2b_3b_kE(\bar{x}_3)E(\bar{x}_k)-\\
& -\cdots-2b_3b_kE(\bar{x}_3)E(\bar{x}_k)+2b_3b_kE(\bar{x}_3\bar{x}_k)-\cdots-2b_k^2[E(\bar{x}_k)]^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\bar{Y}}_{lr}^{2}) = {} & E\left(\bar{y}^{2}\right)+b_1^2\left[E(\bar{x}_1)\right]^2+b_1^2E\left(\bar{x}_1^2\right)+b_2^2\left[E(\bar{x}_2)\right]^2+b_2^2E\left(\bar{x}_2^2\right)+b_3^2\left[E(\bar{x}_3)\right]^2+b_3^2E\left(\bar{x}_3^2\right)+\\
& +\cdots+b_k^2\left[E(\bar{x}_k)\right]^2+b_k^2E\left(\bar{x}_k^2\right)+\\
& +2b_1E(\bar{x}_1)E(\bar{y})-2b_1E(\bar{y}\bar{x}_1)+2b_2E(\bar{x}_2)E(\bar{y})-2b_2E(\bar{y}\bar{x}_2)+2b_3E(\bar{x}_3)E(\bar{y})-2b_3E(\bar{y}\bar{x}_3)+\\
& +\cdots+2b_kE(\bar{x}_k)E(\bar{y})-2b_kE(\bar{y}\bar{x}_k)-\\
& -2b_1^2\left[E(\bar{x}_1)\right]^2-2b_1b_2E(\bar{x}_1)E(\bar{x}_2)+2b_1b_2E(\bar{x}_1\bar{x}_2)-2b_1b_3E(\bar{x}_1)E(\bar{x}_3)+2b_1b_3E(\bar{x}_1\bar{x}_3)+\\
& +\cdots-2b_1b_kE(\bar{x}_1)E(\bar{x}_k)+2b_1b_kE(\bar{x}_1\bar{x}_k)-\\
& -2b_2^2\left[E(\bar{x}_2)\right]^2-2b_2b_3E(\bar{x}_2)E(\bar{x}_3)+2b_2b_3E(\bar{x}_2\bar{x}_3)+\cdots-2b_2b_kE(\bar{x}_2)E(\bar{x}_k)+2b_2b_kE(\bar{x}_2\bar{x}_k)-\\
& -2b_3^2\left[E(\bar{x}_3)\right]^2+\cdots-2b_3b_kE(\bar{x}_3)E(\bar{x}_k)+2b_3b_kE(\bar{x}_3\bar{x}_k)-\cdots-2b_k^2\left[E(\bar{x}_k)\right]^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\bar{Y}}_{lr}^{2}) = {} & E\left(\bar{y}^{2}\right)-b_1^2\left[E(\bar{x}_1)\right]^2+b_1^2E\left(\bar{x}_1^2\right)-b_2^2\left[E(\bar{x}_2)\right]^2+b_2^2E\left(\bar{x}_2^2\right)-b_3^2\left[E(\bar{x}_3)\right]^2+b_3^2E\left(\bar{x}_3^2\right)+\\
& +\cdots-b_k^2\left[E(\bar{x}_k)\right]^2+b_k^2E\left(\bar{x}_k^2\right)+\\
& +2b_1E(\bar{x}_1)E(\bar{y})-2b_1E(\bar{y}\bar{x}_1)+2b_2E(\bar{x}_2)E(\bar{y})-2b_2E(\bar{y}\bar{x}_2)+2b_3E(\bar{x}_3)E(\bar{y})-2b_3E(\bar{y}\bar{x}_3)+\\
& +\cdots+2b_kE(\bar{x}_k)E(\bar{y})-2b_kE(\bar{y}\bar{x}_k)-\\
& -2b_1b_2E(\bar{x}_1)E(\bar{x}_2)+2b_1b_2E(\bar{x}_1\bar{x}_2)-2b_1b_3E(\bar{x}_1)E(\bar{x}_3)+2b_1b_3E(\bar{x}_1\bar{x}_3)+\\
& +\cdots-2b_1b_kE(\bar{x}_1)E(\bar{x}_k)+2b_1b_kE(\bar{x}_1\bar{x}_k)-\\
& -2b_2b_3E(\bar{x}_2)E(\bar{x}_3)+2b_2b_3E(\bar{x}_2\bar{x}_3)+\cdots-2b_2b_kE(\bar{x}_2)E(\bar{x}_k)+2b_2b_kE(\bar{x}_2\bar{x}_k)-\\
& -2b_3b_4E(\bar{x}_3)E(\bar{x}_4)+2b_3b_4E(\bar{x}_3\bar{x}_4)+\cdots-2b_3b_kE(\bar{x}_3)E(\bar{x}_k)+2b_3b_kE(\bar{x}_3\bar{x}_k)-\\
& -\cdots-2b_{k-1}b_kE(\bar{x}_{k-1})E(\bar{x}_k)+2b_{k-1}b_kE(\bar{x}_{k-1}\bar{x}_k)
\end{aligned}
$$

$$E(\hat{\hat{Y}}_{lr}^2) = E\left(\bar{y}^2\right) + b_1^2\left[E\left(\bar{x}_1^2\right) - \left(E(\bar{x}_1)\right)^2\right] + b_2^2\left[E\left(\bar{x}_2^2\right) - \left(E(\bar{x}_2)\right)^2\right] + b_3^2\left[E\left(\bar{x}_3^2\right) - \left(E(\bar{x}_3)\right)^2\right] + \cdots +$$

$$+ \cdots + b_k^2\left[E\left(\bar{x}_k^2\right) - \left(E(\bar{x}_k)\right)^2\right] -$$

$$- 2b_1\left[E(\bar{y}\bar{x}_1) - E(\bar{x}_1)E(\bar{y})\right] - 2b_2\left[E(\bar{y}\bar{x}_2) - E(\bar{x}_2)E(\bar{y})\right] - 2b_3\left[E(\bar{y}\bar{x}_3) - E(\bar{x}_3)E(\bar{y})\right] - \cdots -$$

$$- \cdots - 2b_k\left[E(\bar{y}\bar{x}_k) - E(\bar{x}_k)E(\bar{y})\right] +$$

$$+ 2b_1b_2\left[E(\bar{x}_1\bar{x}_2) - E(\bar{x}_1)E(\bar{x}_2)\right] + 2b_1b_3\left[E(\bar{x}_1\bar{x}_3) - E(\bar{x}_1)E(\bar{x}_3)\right] + \cdots + 2b_1b_k\left[E(\bar{x}_1\bar{x}_k) - E(\bar{x}_1)E(\bar{x}_k)\right] +$$

$$+ 2b_2b_3\left[E(\bar{x}_2\bar{x}_3) - E(\bar{x}_2)E(\bar{x}_3)\right] + \cdots + 2b_2b_k\left[E(\bar{x}_2\bar{x}_k) - E(\bar{x}_2)E(\bar{x}_k)\right] +$$

$$+ 2b_3b_4\left[E(\bar{x}_3\bar{x}_4) - E(\bar{x}_3)E(\bar{x}_4)\right] + \cdots + 2b_3b_k\left[E(\bar{x}_3\bar{x}_k) - E(\bar{x}_3)E(\bar{x}_k)\right] +$$

$$+ \cdots + 2b_{k-1}b_k\left[E(\bar{x}_{k-1}\bar{x}_k) - E(\bar{x}_{k-1})E(\bar{x}_k)\right]$$

$$E(\hat{\hat{Y}}_{lr}^2) = E\left(\bar{y}^2\right) + b_1^2V(\bar{x}_1) + b_2^2V(\bar{x}_2) + b_3^2V(\bar{x}_3) + \cdots + b_k^2V(\bar{x}_k) -$$

$$- 2b_1COV(\bar{y}, \bar{x}_1) - 2b_2COV(\bar{y}, \bar{x}_2) - 2b_3COV(\bar{y}, \bar{x}_3) - \cdots - 2b_kCOV(\bar{y}, \bar{x}_k) +$$

$$+ 2b_1b_2COV(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + 2b_1b_3COV(\bar{x}_1, \bar{x}_3) + \cdots + 2b_1b_kCOV(\bar{x}_1, \bar{x}_k) +$$

$$+ 2b_2b_3COV(\bar{x}_2, \bar{x}_3) + \cdots + 2b_2b_kCOV(\bar{x}_2, \bar{x}_k) +$$

$$+ 2b_3b_4COV(\bar{x}_3, \bar{x}_4) + \cdots + 2b_3b_kCOV(\bar{x}_3, \bar{x}_k) + \cdots + 2b_{k-1}b_kCOV(\bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k)$$

al sustituir en (44), se tiene que,

$$V(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = E\left(\bar{y}^2\right) + b_1^2V(\bar{x}_1) + b_2^2V(\bar{x}_2) + b_3^2V(\bar{x}_3) + \cdots + b_k^2V(\bar{x}_k) -$$

$$- 2b_1COV(\bar{y}, \bar{x}_1) - 2b_2COV(\bar{y}, \bar{x}_2) - 2b_3COV(\bar{y}, \bar{x}_3) - \cdots - 2b_kCOV(\bar{y}, \bar{x}_k) +$$

$$+ 2b_1b_2COV(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + 2b_1b_3COV(\bar{x}_1, \bar{x}_3) + \cdots + 2b_1b_kCOV(\bar{x}_1, \bar{x}_k) +$$

$$+ 2b_2b_3COV(\bar{x}_2, \bar{x}_3) + \cdots + 2b_2b_kCOV(\bar{x}_2, \bar{x}_k) +$$

$$+ 2b_3b_4COV(\bar{x}_3, \bar{x}_4) + \cdots + 2b_3b_kCOV(\bar{x}_3, \bar{x}_k) + \cdots + 2b_{k-1}b_kCOV(\bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k) - \bar{Y}^2$$

$$
\begin{aligned}
V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) &= V(\bar{y}) + b_1^2 V(\bar{x}_1) + b_2^2 V(\bar{x}_2) + b_3^2 V(\bar{x}_3) + \cdots + b_k^2 V(\bar{x}_k) - \\
&- 2b_1 COV(\bar{y},\bar{x}_1) - 2b_2 COV(\bar{y},\bar{x}_2) - 2b_3 COV(\bar{y},\bar{x}_3) - \cdots - 2b_k COV(\bar{y},\bar{x}_k) + \\
&+ 2b_1 b_2 COV(\bar{x}_1,\bar{x}_2) + 2b_1 b_3 COV(\bar{x}_1,\bar{x}_3) + \cdots + 2b_1 b_k COV(\bar{x}_1,\bar{x}_k) + \\
&+ 2b_2 b_3 COV(\bar{x}_2,\bar{x}_3) + \cdots + 2b_2 b_k COV(\bar{x}_2,\bar{x}_k) + \\
&+ 2b_3 b_4 COV(\bar{x}_3,\bar{x}_4) + \cdots + 2b_3 b_k COV(\bar{x}_3,\bar{x}_k) + \cdots + 2b_{k-1} b_k COV(\bar{x}_{k-1},\bar{x}_k)
\end{aligned}
$$

y como $V(\bar{y}) = \dfrac{1-f}{n} S_y^2$, $V(\bar{x}_i) = \dfrac{1-f}{n} S_{x_i}^2$, *i=1,2,...,k*

$COV(\bar{y},\bar{x}_i) = \dfrac{1-f}{n} S_{yx_i}$, $COV(\bar{x}_i,\bar{x}_j) = \dfrac{1-f}{n} S_{x_i x_j}$, *i=1,2,...,k , j=1,2,...,k , i≠j*

Entonces,

$$
ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \frac{1-f}{n}\left(S_y^2 + \sum_{i=1}^{k} b_i^2 S_{x_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} b_i S_{yx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} b_i b_j S_{x_i x_j} \right)
$$

y su estimador,

$$
E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \frac{1-f}{n}\left(s_y^2 + \sum_{i=1}^{k} \hat{b}_i^2 s_{x_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} \hat{b}_i s_{yx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} \hat{b}_i \hat{b}_j s_{x_i x_j} \right)
$$

Para el total se tiene,

$$
ECM(\hat{Y}_{lr}) = V(\hat{Y}_{lr}) = N^2\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + \sum_{i=1}^{k} b_i^2 S_{x_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} b_i S_{yx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} b_i b_j S_{x_i x_j} \right)
$$

y su estimador,

$$
E\hat{C}M(\hat{Y}_{lr}) = \hat{V}(\hat{Y}_{lr}) = N^2\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(s_y^2 + \sum_{i=1}^{k} \hat{b}_i^2 s_{x_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} \hat{b}_i s_{yx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} \hat{b}_i \hat{b}_j s_{x_i x_j} \right)
$$

4.4.- Casos Especiales de los Estimadores de Regresión Lineal con *k* variables auxiliares

Tal como en los capítulos anteriores, se presentan unos casos especiales, que será los estimadores de regresión lineal múltiple con menos de k variables auxiliares, el estimador por diferencias y el de varianza mínima.

4.4.1.- Estimador de Regresión Lineal con 1, 2, …, *k*-1 variables auxiliares

En los capítulos anteriores se demostró que el estimador de regresión lineal con 1 variable auxiliar es un caso particular del estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares, y este un caso particular del estimador de regresión lineal con 3 variables auxiliares, cada uno incluyendo sus casos especiales. De manera que haciendo uso del principio de inducción, se continúa hasta llegar a que el estimador de regresión lineal con *k*-1 variables auxiliares es un caso particular del estimador de regresión lineal con *k* variables auxiliares, incluyendo todos sus casos especiales.

Así, se llega a la siguiente tabla,

Tabla 2 - Valores de b_1, b_2, …, b_k del estimador de regresión lineal múltiple, según caso particular

	b_1	b_2	b_3	…	b_{k-1}	b_k
Estimador de Regresión Lineal Simple	b_1	0	0	…	0	0
Estimador directo	0	0	0	…	0	0
Estimador de razón	$\frac{\bar{y}}{\bar{x}}$	0	0	…	0	0
Estimador por diferencia	1	0	0	…	0	0
Estimador de varianza mínima para b constante	$\frac{S_{xy}}{S_x^2}$	0	0	…	0	0
Estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares	b_1	b_2	0	…	0	0
Estimador por diferencias (con 2 variables auxiliares)	1	1	0	…	0	0
Estimador de Razón-Regresión (*1)	$\frac{\bar{y}}{\bar{x}} - b\frac{\bar{z}}{\bar{x}}$	b	0	…	0	0
Estimador de Regresión-Razón (con b) (*2)	$b\left[1-\left(\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}\right)\right]$	$\frac{\bar{y}+b(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b(\bar{X}-\bar{x})}$	0	…	0	0
Estimador de Regresión-Razón (con b_1 y b_2) (*3)	$b_y - b_z\left(\frac{\bar{y}+b_y(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b_z(\bar{X}-\bar{x})}\right)$	$\frac{\bar{y}+b_y(\bar{X}-\bar{x})}{\bar{z}+b_z(\bar{X}-\bar{x})}$	0	…	0	0
Estimador de varianza mínima para b_1 y b_2 constantes	$\frac{S_{xy}S_z^2 - S_{yz}S_{xz}}{S_x^2 S_z^2 - (S_{xz})^2}$	$\frac{S_{yz}S_x^2 - S_{xy}S_{xz}}{S_z^2 S_x^2 - (S_{xz})^2}$	0	…	0	0
Estimador de regresión lineal con 3 variables auxiliares	b_1	b_2	b_3	…	0	0
Estimador por Diferencias (con 3 variables auxiliares)	1	1	1	...	0	0
Estimador de Varianza Mínima para b_1, b_2 y b_3 constantes (*4)	b_1	b_2	b_3	…	0	0
…	…	…	…	…	…	…
Estimador de regresión lineal con k-1 variables auxiliares	b_1	b_2	b_3	…	b_{k-1}	0
Estimador por Diferencias (con k-1 variables auxiliares)	1	1	1	…	1	0

(*1) b = coeficiente del estimador de Regresión-Razón
(*2) b = coeficiente del estimador de Razón-Regresión cuando éste tiene un coeficiente b único
(*3) b_y = coeficiente del estimador $\hat{\bar{Y}}_{lr}$ en el estimador de Razón-Regresión cuando éste tiene dos coeficientes b diferentes

b_z = coeficiente del estimador $\hat{\bar{Z}}_{lr}$ en el estimador de Razón-Regresión cuando éste tiene dos coeficientes b diferentes

(*4)
$$b_1 = \frac{S_{yx}\left(S_z^2 S_t^2 - S_{zt}^2\right) + S_{yz}\left(S_{xt}S_{zt} - S_t^2 S_{xz}\right) + S_{yt}\left(S_{xz}S_{zt} - S_z^2 S_{xt}\right)}{S_x^2 S_z^2 S_t^2 - S_x^2 S_{zt}^2 - S_z^2 S_{xt}^2 - S_t^2 S_{xz}^2 + 2S_{xz}S_{xt}S_{zt}}$$
$$b_2 = \frac{S_{yx}\left(S_{xt}S_{zt} - S_t^2 S_{xz}\right) + S_{yz}\left(S_x^2 S_t^2 - S_{xt}^2\right) + S_{yt}\left(S_{xz}S_{xt} - S_x^2 S_{zt}\right)}{S_x^2 S_z^2 S_t^2 - S_x^2 S_{zt}^2 - S_z^2 S_{xt}^2 - S_t^2 S_{xz}^2 + 2S_{xz}S_{xt}S_{zt}}$$
$$b_3 = \frac{S_{yx}\left(S_{xz}S_{zt} - S_z^2 S_{xt}\right) + S_{yz}\left(S_{xz}S_{xt} - S_x^2 S_{zt}\right) + S_{yt}\left(S_x^2 S_z^2 - S_{xz}^2\right)}{S_x^2 S_z^2 S_t^2 - S_x^2 S_{zt}^2 - S_z^2 S_{xt}^2 - S_t^2 S_{xz}^2 + 2S_{xz}S_{xt}S_{zt}}$$

4.4.2.- Estimador por Diferencias (con *k* variables auxiliares)

Este es el caso cuando $b_1=b_2=b_3=\ldots=b_k=1$, entonces se corrige el promedio muestral sólo por la diferencia entre los promedios poblacional y muestral de las variables auxiliares; esto es, para el estimador del promedio y del total respectivamente,

$$\hat{\bar{Y}}_{lr} = \bar{y} + (\bar{X}_1 - \bar{x}_1) + (\bar{X}_2 - \bar{x}_2) + (\bar{X}_3 - \bar{x}_3) + \cdots + (\bar{X}_k - \bar{x}_k)$$

$$\hat{Y}_{lr} = N\hat{\bar{Y}}_{lr} = \hat{Y} + (X_1 - \hat{X}_1) + (X_2 - \hat{X}_2) + (X_3 - \hat{X}_3) + \cdots + (X_k - \hat{X}_k)$$

Como b_1, b_2, b_3, …, b_k son constantes, entonces el estimador es insesgado. Sustituyendo $b_1=b_2=b_3=\ldots=b_k=1$ en la varianza, se tiene,

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \frac{1-f}{n}\left(S_y^2 + \sum_{i=1}^{k} S_{x_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} S_{yx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} S_{x_i x_j} \right)$$

y su estimador,

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \frac{1-f}{n}\left(s_y^2 + \sum_{i=1}^{k} s_{x_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} s_{yx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} s_{x_i x_j} \right)$$

Replicando para el total,

$$ECM(\hat{Y}_{lr}) = V(\hat{Y}_{lr}) = N^2\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + \sum_{i=1}^{k} S_{x_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} S_{yx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} S_{x_i x_j} \right)$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{lr}) = \hat{V}(\hat{Y}_{lr}) = N^2\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(s_y^2 + \sum_{i=1}^{k} s_{x_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} s_{yx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} s_{x_i x_j} \right)$$

4.4.3.- Estimador de Varianza Mínima para b_1, b_2, b_3, … , b_k constantes

Ahora se buscarán los valores de b_1, b_2, b_3, …, b_k, que minimicen la varianza del estimador $V(\hat{\hat{Y}}_{lr})$. Sean $b_1 = b_{10}$, $b_2 = b_{20}$, $b_3 = b_{30}$, … , $b_k = b_{k0}$ constantes, entonces,

$$E(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \hat{\hat{Y}}$$

el estimador es insesgado. Sustituyendo $b_1 = b_{10}$, $b_2 = b_{20}$ y $b_3 = b_{30}$ y su varianza es,

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = V(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \frac{1-f}{n}\left(S_y^2 + \sum_{i=1}^{k} b_{i0}^2 S_{x_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} b_{i0} S_{yx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} b_{i0} b_{j0} S_{x_i x_j} \right)$$

Para minimizar la varianza, en principio se hallan las derivadas parciales, se igualan a cero y se obtienen los valores de b_{10} , b_{20} , b_{30} , …, b_{k0} .

Derivando respecto de b_{10},

$$\frac{\partial V(\hat{\hat{Y}}_{lr})}{\partial b_{10}} = \frac{N-n}{Nn}\left[2b_{10}S_{x_1}^2 - 2S_{yx_1} + 2b_{20}S_{x_1x_2} + 2b_{30}S_{x_1x_3} + \cdots + 2b_{k0}S_{x_1x_k} \right] = 0$$

para que se cumpla la igualdad debe ocurrir uno de los siguientes casos,

$$\begin{cases} a)\ \ n = N \\ ó \\ b)\ \ 2b_{10}S_{x_1}^2 - 2S_{yx_1} + 2b_{20}S_{x_1x_2} + 2b_{30}S_{x_1x_3} + \cdots + 2b_{k0}S_{x_1x_k} = 0 \end{cases}$$

que es equivalente a

$$\begin{cases} a) \ \ n = N \\ ó \\ b) \ \ b_{10}S_{x_1}^2 - S_{yx_1} + b_{20}S_{x_1x_2} + b_{30}S_{x_1x_3} + \cdots + b_{k0}S_{x_1x_k} = 0 \end{cases}$$

no tiene sentido hacer *n=N*, ya que la investigación sería por enumeración completa y la varianza del estimador es igual a cero, porque se tiene el valor poblacional. Tomando el caso (b), se tiene,

$$b_{10}S_{x_1}^2 + b_{20}S_{x_1x_2} + b_{30}S_{x_1x_3} + \cdots + b_{k0}S_{x_1x_k} = S_{yx_1}$$

Análogamente, derivando respecto de b_{20},

$$\frac{\partial V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_{20}} = \frac{N-n}{Nn}\left[2b_{20}S_{x_2}^2 - 2S_{yx_2} + 2b_{10}S_{x_1x_2} + 2b_{30}S_{x_2x_3} + \cdots + 2b_{k0}S_{x_2x_k}\right] = 0$$

y se tiene,

$$\begin{cases} a) \ \ n = N \\ ó \\ b) \ \ b_{20}S_{x_2}^2 - S_{yx_2} + b_{10}S_{x_1x_2} + b_{30}S_{x_2x_3} + \cdots + b_{k0}S_{x_2x_k} = 0 \end{cases}$$

Igual que para b_1, no tiene sentido hacer *n=N*, entonces se toma caso (b), y se obtiene,

$$b_{20}S_{x_2}^2 + b_{10}S_{x_1x_2} + b_{30}S_{x_2x_3} + \cdots + b_{k0}S_{x_2x_k} = S_{yx_2}$$

y así sucesivamente hasta finalmente derivar respecto de b_{k0},

$$\frac{\partial V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_{k0}} = \frac{N-n}{Nn}\left[2b_{k0}S_{x_k}^2 - 2S_{yx_k} + 2b_{10}S_{x_1x_k} + 2b_{20}S_{x_2x_k} + \cdots + 2b_{k0}S_{x_{k-1}x_k}\right] = 0$$

y se tiene,

$$\begin{cases} a)\ \ n = N \\ ó \\ b)\ \ 2b_{k0}S^2_{x_k} - 2S_{yx_k} + 2b_{10}S_{x_1x_k} + 2b_{20}S_{x_2x_k} + \cdots + 2b_{k0}S_{x_{K-1}x_k} = 0 \end{cases}$$

Igual que para b_1, no tiene sentido hacer $n=N$, entonces se toma caso (b), y se obtiene,

$$b_{k0}S^2_{x_k} + b_{10}S_{x_1x_k} + b_{20}S_{x_2x_k} + \cdots + b_{k0}S_{x_{K-1}x_k} = S_{yx_k}$$

Entonces se tiene el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} b_{10}S^2_{x_1} + b_{20}S_{x_1x_2} + b_{30}S_{x_1x_3} + \cdots + b_{i0}S_{x_1x_i} + \cdots + b_{k0}S_{x_1x_k} = S_{yx_1} \\ b_{20}S^2_{x_2} + b_{10}S_{x_1x_2} + b_{30}S_{x_2x_3} + \cdots + b_{i0}S_{x_2x_i} + \cdots + b_{k0}S_{x_2x_k} = S_{yx_2} \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ b_{i0}S^2_{x_i} + b_{10}S_{x_1x_i} + b_{20}S_{x_2x_i} + \cdots + b_{i0}S^2_{x_i} + \cdots + b_{k0}S_{x_ix_k} = S_{yx_i} \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ b_{k0}S^2_{x_k} + b_{10}S_{x_1x_k} + b_{20}S_{x_2x_k} + \cdots + b_{i0}S_{x_ix_k} + \cdots + b_{k0}S_{x_{k-1}x_k} = S_{yx_k} \end{cases}$$

Que reordenándolo queda,

$$\begin{cases} b_{10}S^2_{x_1} + b_{20}S_{x_1x_2} + b_{30}S_{x_1x_3} + \cdots + b_{i0}S_{x_1x_i} + \cdots + b_{k0}S_{x_1x_k} = S_{yx_1} \\ b_{10}S_{x_1x_2} + b_{20}S^2_{x_2} + b_{30}S_{x_2x_3} + \cdots + b_{i0}S_{x_2x_i} + \cdots + b_{k0}S_{x_2x_k} = S_{yx_2} \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ b_{10}S_{x_1x_i} + b_{20}S_{x_2x_i} + b_{30}S_{x_3x_i} + \cdots + b_{i0}S^2_{x_i} + \cdots + b_{k0}S_{x_ix_k} = S_{yx_i} \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ b_{10}S_{x_1x_k} + b_{20}S_{x_2x_k} + b_{30}S_{x_3x_k} + \cdots + b_{k0}S_{x_ix_k} + \cdots + b_{k0}S^2_{x_k} = S_{yx_k} \end{cases}$$

En forma matricial es,

$$\begin{pmatrix} S^2_{x_1} & S_{x_1x_2} & S_{x_1x_3} & \cdots & S_{x_1x_i} & \cdots & S_{x_1x_k} \\ S_{x_1x_2} & S^2_{x_2} & S_{x_2x_3} & \cdots & S_{x_2x_i} & \cdots & S_{x_2x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{x_1x_i} & S_{x_2x_i} & S_{x_3x_i} & \cdots & S^2_{x_i} & \cdots & S_{x_ix_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{x_1x_k} & S_{x_2x_k} & S_{x_3x_k} & \cdots & S_{x_ix_k} & \cdots & S^2_{x_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{yx_1} \\ S_{yx_2} \\ S_{yx_3} \\ \vdots \\ S_{yx_i} \\ \vdots \\ S_{yx_k} \end{pmatrix}$$

y su solución,

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{x_1}^2 & S_{x_1x_2} & S_{x_1x_3} & \cdots & S_{x_1x_i} & \cdots & S_{x_1x_k} \\ S_{x_1x_2} & S_{x_2}^2 & S_{x_2x_3} & \cdots & S_{x_2x_i} & \cdots & S_{x_2x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{x_1x_i} & S_{x_2x_i} & S_{x_3x_i} & \cdots & S_{x_i}^2 & \cdots & S_{x_ix_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{x_1x_k} & S_{x_2x_k} & S_{x_3x_k} & \cdots & S_{x_ix_k} & \cdots & S_{x_k}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_{yx_1} \\ S_{yx_2} \\ S_{yx_3} \\ \vdots \\ S_{yx_i} \\ \vdots \\ S_{yx_k} \end{pmatrix}$$

donde $\begin{pmatrix} S_{x_1}^2 & S_{x_1x_2} & S_{x_1x_3} & \cdots & S_{x_1x_i} & \cdots & S_{x_1x_k} \\ S_{x_1x_2} & S_{x_2}^2 & S_{x_2x_3} & \cdots & S_{x_2x_i} & \cdots & S_{x_2x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{x_1x_i} & S_{x_2x_i} & S_{x_3x_i} & \cdots & S_{x_i}^2 & \cdots & S_{x_ix_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{x_1x_k} & S_{x_2x_k} & S_{x_3x_k} & \cdots & S_{x_ix_k} & \cdots & S_{x_k}^2 \end{pmatrix}^{-1}$ es la inversa de la matriz de varianzas y covarianzas de las variables auxiliares. Si se denota por C a dicha matriz,

$$C = \begin{pmatrix} S_{x_1}^2 & S_{x_1x_2} & S_{x_1x_3} & \cdots & S_{x_1x_i} & \cdots & S_{x_1x_k} \\ S_{x_1x_2} & S_{x_2}^2 & S_{x_2x_3} & \cdots & S_{x_2x_i} & \cdots & S_{x_2x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{x_1x_i} & S_{x_2x_i} & S_{x_3x_i} & \cdots & S_{x_i}^2 & \cdots & S_{x_ix_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{x_1x_k} & S_{x_2x_k} & S_{x_3x_k} & \cdots & S_{x_ix_k} & \cdots & S_{x_k}^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2i} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & c_{k3} & \cdots & c_{ki} & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1i} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2i} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \cdots & c_{ii} & \cdots & c_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & c_{k3} & \cdots & c_{ki} & \cdots & c_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{yx_1} \\ S_{yx_2} \\ S_{yx_3} \\ \vdots \\ S_{yx_i} \\ \vdots \\ S_{yx_k} \end{pmatrix}$$

es decir, que los valores de b_1, b_2, …, b_k, que minimizan la varianza del estimador son,

$$\begin{cases} b_{10} = c_{11}S_{yx_1} + c_{12}S_{yx_2} + c_{13}S_{yx_3} + \cdots + c_{1i}S_{yx_i} + c_{1k}S_{yx_k} \\ b_{20} = c_{21}S_{yx_1} + c_{22}S_{yx_2} + c_{23}S_{yx_3} + \cdots + c_{2i}S_{yx_i} + c_{2k}S_{yx_k} \\ b_{30} = c_{31}S_{yx_1} + c_{32}S_{yx_2} + c_{33}S_{yx_3} + \cdots + c_{3i}S_{yx_i} + c_{3k}S_{yx_k} \\ \quad\vdots \\ b_{i0} = c_{i1}S_{yx_1} + c_{i2}S_{yx_2} + c_{i3}S_{yx_3} + \cdots + c_{ii}S_{yx_i} + c_{ik}S_{yx_k} \\ \quad\vdots \\ b_{k0} = c_{k1}S_{yx_1} + c_{k2}S_{yx_2} + c_{k3}S_{yx_3} + \cdots + c_{ki}S_{yx_i} + c_{kk}S_{yx_k} \end{cases}$$

Para determinar si se alcanza un mínimo, se debe hallar la matriz hessiana, y verificar que sus menores principales son mayores que cero. Esto es

$$H(V(\hat{\bar{Y}}_{lr})) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_1^2} & \dfrac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_1 b_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_1 b_k} \\ \dfrac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_2 b_1} & \dfrac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_2 b_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_k b_1} & \dfrac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_k b_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lr})}{\partial b_k^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{N-n}{Nn}2S_{x_1}^2 & \dfrac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_2}^2 & \cdots & \dfrac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_k}^2 \\ \dfrac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_2}^2 & \dfrac{N-n}{Nn}2S_{x_2}^2 & \cdots & \dfrac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_k}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_k}^2 & \dfrac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_k}^2 & \cdots & \dfrac{N-n}{Nn}2S_{x_k}^2 \end{bmatrix}$$

En el apartado 3.4.3. (Estimador de Varianza Mínima para b_1, b_2 y b_3 constantes), se analizaron los menores principales de orden 1, 2 y 3, encontrándose unas condiciones que deben cumplirse para que b_{10}, b_{20}, …, b_{k0} sean los valores que minimicen la varianza del estimador. Generalizar estas condiciones es sumamente engorroso e impráctico, como muestra, a continuación se hará el desarrollo para 4 variables auxiliares y se mostrará, a manera de resumen, las condiciones para 1, 2, 3 (encontradas en capítulos anteriores) y 4 variables auxiliares.

Para las condiciones que se deben cumplir para 4 variables auxiliares, se tiene la matriz hessiana,

$$\begin{pmatrix} \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1}^2 & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_2} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_3} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_4} \\ \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_2} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2}^2 & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_3} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_4} \\ \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_3} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_3} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_3}^2 & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_3x_4} \\ \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_4} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_4} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_3x_4} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_4}^2 \end{pmatrix}$$

Se debe verificar que los menores principales. Ya se ha trabajado las condiciones que deben cumplir los menores principales de orden 1, 2 y 3, en casos anteriores, que por ser los mismos menores principales, se mantienen. Analizando el menor principal de orden 4, que es el determinante,

$$H_4(V(\hat{\bar{Y}}_{lr})) = \begin{vmatrix} \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1}^2 & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_2} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_3} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_4} \\ \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_2} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2}^2 & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_3} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_4} \\ \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_3} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_3} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_3}^2 & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_3x_4} \\ \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_4} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_4} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_3x_4} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_4}^2 \end{vmatrix}$$

Tomando la 4ta fila para trabajar, se tiene que el determinante es,

$$(-1)\frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_4}\begin{vmatrix} \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_2} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_3} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_4} \\ \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2}^2 & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_3} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_4} \\ \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_3} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_3}^2 & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_3x_4} \end{vmatrix} + \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_4}\begin{vmatrix} \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1}^2 & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_3} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_4} \\ \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_2} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_3} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_4} \\ \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_3} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_3}^2 & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_3x_4} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)\frac{N-n}{Nn}2S_{x_3x_4}^2\begin{vmatrix} \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1}^2 & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_2} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_4} \\ \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_2} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2}^2 & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_4} \\ \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_3} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_3} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_3x_4} \end{vmatrix} + \frac{N-n}{Nn}2S_{x_4}^2\begin{vmatrix} \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1}^2 & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_2} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_3} \\ \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_2} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2}^2 & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_3}^2 \\ \frac{N-n}{Nn}2S_{x_1x_3} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_2x_3} & \frac{N-n}{Nn}2S_{x_3}^2 \end{vmatrix}$$

resolviendo,

$$= -2^4\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^4 S_{x_1x_4}\left(S_{x_1x_2}S_{x_2x_3}S_{x_3x_4} + S_{x_1x_3}S_{x_2x_4}S_{x_2x_3} + S_{x_2}^2S_{x_3}^2S_{x_1x_4} - S_{x_2x_3}S_{x_2x_3}S_{x_1x_4} - S_{x_2}^2S_{x_1x_3}S_{x_3x_4} - S_{x_3}^2S_{x_2x_4}S_{x_1x_2}\right)+$$

$$+2^4\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^4 S_{x_2x_4}\left(S_{x_1}^2S_{x_2x_3}S_{x_3x_4} + S_{x_1x_3}S_{x_2x_4}S_{x_1x_3} + S_{x_1x_2}S_{x_3}^2S_{x_1x_4} - S_{x_1x_3}S_{x_2x_3}S_{x_1x_4} - S_{x_1x_2}S_{x_1x_3}S_{x_3x_4} - S_{x_3}^2S_{x_2x_4}S_{x_1}^2\right)-$$

$$-2^4\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^4 S_{x_3x_4}\left(S_{x_1}^2 S_{x_2}^2 S_{x_3x_4} + S_{x_1x_2} S_{x_2x_4} S_{x_1x_3} + S_{x_1x_2} S_{x_2x_3} S_{x_1x_4} - S_{x_1x_3} S_{x_2}^2 S_{x_1x_4} - S_{x_1x_2} S_{x_1x_2} S_{x_3x_4} - S_{x_2x_3} S_{x_2x_4} S_{x_1}^2\right)+$$

$$+2^4\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^4 S_{x_4}^2\left(S_{x_1}^2 S_{x_2}^2 S_{x_3}^2 + S_{x_1x_2} S_{x_2x_3} S_{x_1x_3} + S_{x_1x_2} S_{x_2x_3} S_{x_1x_3} - S_{x_1x_3} S_{x_2}^2 S_{x_1x_3} - S_{x_2x_3} S_{x_2x_3} S_{x_1}^2 - S_{x_1x_2} S_{x_1x_2} S_{x_3}^2\right)$$

$$=2^4\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^4 \Big(- S_{x_1x_2} S_{x_1x_4} S_{x_2x_3} S_{x_3x_4} - S_{x_1x_3} S_{x_1x_4} S_{x_2x_3} S_{x_2x_4} - S_{x_2}^2 S_{x_3}^2 S_{x_1x_4}^2 + S_{x_2x_3}^2 S_{x_1x_4}^2 + S_{x_2}^2 S_{x_1x_3} S_{x_1x_4} S_{x_3x_4} + S_{x_3}^2 S_{x_1x_2} S_{x_1x_4} S_{x_2x_4} +$$

$$+S_{x_1}^2 S_{x_2x_3} S_{x_2x_4} S_{x_3x_4} + S_{x_1x_3}^2 S_{x_2x_4}^2 + S_{x_3}^2 S_{x_1x_2} S_{x_1x_4} S_{x_2x_4} - S_{x_1x_3} S_{x_2x_3} S_{x_1x_4} S_{x_2x_4} - S_{x_1x_2} S_{x_1x_3} S_{x_2x_4} S_{x_3x_4} - S_{x_1}^2 S_{x_3}^2 S_{x_2x_4}^2 -$$

$$-S_{x_1}^2 S_{x_2}^2 S_{x_3x_4}^2 - S_{x_1x_2} S_{x_1x_3} S_{x_2x_4} S_{x_3x_4} - S_{x_1x_2} S_{x_1x_4} S_{x_2x_3} S_{x_3x_4} + S_{x_2}^2 S_{x_1x_3} S_{x_1x_4} S_{x_3x_4} + S_{x_1x_2}^2 S_{x_3x_4}^2 + S_{x_1}^2 S_{x_2x_3} S_{x_2x_4} S_{x_3x_4} +$$

$$+S_{x_1}^2 S_{x_2}^2 S_{x_3}^2 S_{x_4}^2 + S_{x_4}^2 S_{x_1x_2} S_{x_1x_3} S_{x_2x_3} + S_{x_4}^2 S_{x_1x_2} S_{x_1x_3} S_{x_2x_3} - S_{x_2}^2 S_{x_4}^2 S_{x_1x_3}^2 - S_{x_1}^2 S_{x_4}^2 S_{x_2x_3}^2 - S_{x_3}^2 S_{x_4}^2 S_{x_1x_2}^2\Big)$$

$$=2^4\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^4 \Big(S_{x_1}^2 S_{x_2}^2 S_{x_3}^2 S_{x_4}^2 - S_{x_1}^2 S_{x_2}^2 S_{x_3x_4}^2 - S_{x_1}^2 S_{x_3}^2 S_{x_2x_4}^2 - S_{x_1}^2 S_{x_4}^2 S_{x_2x_3}^2 - S_{x_2}^2 S_{x_3}^2 S_{x_1x_4}^2 - S_{x_2}^2 S_{x_4}^2 S_{x_1x_3}^2 - S_{x_3}^2 S_{x_4}^2 S_{x_1x_2}^2$$

$$+2S_{x_1}^2 S_{x_2x_3} S_{x_2x_4} S_{x_3x_4} + 2S_{x_2}^2 S_{x_1x_3} S_{x_1x_4} S_{x_3x_4} + 2S_{x_3}^2 S_{x_1x_2} S_{x_1x_4} S_{x_2x_4} + 2S_{x_4}^2 S_{x_1x_2} S_{x_1x_3} S_{x_2x_3}$$

$$+S_{x_1x_2}^2 S_{x_3x_4}^2 + S_{x_1x_3}^2 S_{x_2x_4}^2 + S_{x_1x_4}^2 S_{x_2x_3}^2 - 2S_{x_1x_2} S_{x_1x_3} S_{x_2x_4} S_{x_3x_4} - 2S_{x_1x_2} S_{x_1x_4} S_{x_2x_3} S_{x_3x_4} - 2S_{x_1x_3} S_{x_1x_4} S_{x_2x_3} S_{x_2x_4}\Big)$$

Multiplicando y dividiendo por $S_{x_1}^2 S_{x_2}^2 S_{x_3}^2 S_{x_4}^2$,

$$=2^4\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^4 S_{x_1}^2 S_{x_2}^2 S_{x_3}^2 S_{x_4}^2 \left(\frac{S_{x_1}^2 S_{x_2}^2 S_{x_3}^2 S_{x_4}^2 - S_{x_1}^2 S_{x_2}^2 S_{x_3x_4}^2 - S_{x_1}^2 S_{x_3}^2 S_{x_2x_4}^2 - S_{x_1}^2 S_{x_4}^2 S_{x_2x_3}^2 - S_{x_2}^2 S_{x_3}^2 S_{x_1x_4}^2 - S_{x_2}^2 S_{x_4}^2 S_{x_1x_3}^2 - S_{x_3}^2 S_{x_4}^2 S_{x_1x_2}^2}{S_{x_1}^2 S_{x_2}^2 S_{x_3}^2 S_{x_4}^2}\right.$$

$$\frac{+2S_{x_1}^2 S_{x_2x_3} S_{x_2x_4} S_{x_3x_4} + 2S_{x_2}^2 S_{x_1x_3} S_{x_1x_4} S_{x_3x_4} + 2S_{x_3}^2 S_{x_1x_2} S_{x_1x_4} S_{x_2x_4} + 2S_{x_4}^2 S_{x_1x_2} S_{x_1x_3} S_{x_2x_3}}{S_{x_1}^2 S_{x_2}^2 S_{x_3}^2 S_{x_4}^2}$$

$$\left.\frac{+S_{x_1x_2}^2 S_{x_3x_4}^2 + S_{x_1x_3}^2 S_{x_2x_4}^2 + S_{x_1x_4}^2 S_{x_2x_3}^2 - 2S_{x_1x_2} S_{x_1x_3} S_{x_2x_4} S_{x_3x_4} - 2S_{x_1x_2} S_{x_1x_4} S_{x_2x_3} S_{x_3x_4} - 2S_{x_1x_3} S_{x_1x_4} S_{x_2x_3} S_{x_2x_4}}{S_{x_1}^2 S_{x_2}^2 S_{x_3}^2 S_{x_4}^2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^4\left(\frac{N-n}{Nn}\right)^4 S_{x_1}^2 S_{x_2}^2 S_{x_3}^2 S_{x_4}^2 \big(1-\rho_{x_1x_2}^2-\rho_{x_1x_3}^2-\rho_{x_1x_4}^2-\rho_{x_2x_3}^2-\rho_{x_2x_4}^2-\rho_{x_3x_4}^2\\
&+2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_3}\rho_{x_2x_3}+2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_2x_4}+2\rho_{x_1x_3}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_3x_4}+2\rho_{x_2x_3}\rho_{x_2x_4}\rho_{x_3x_4}\\
&+\rho_{x_1x_2}^2\rho_{x_3x_4}^2+\rho_{x_1x_3}^2\rho_{x_2x_4}^2+\rho_{x_1x_4}^2\rho_{x_2x_3}^2-2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_3}\rho_{x_2x_4}\rho_{x_3x_4}-2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_2x_3}\rho_{x_3x_4}-2\rho_{x_1x_3}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_2x_3}\rho_{x_2x_4}\big)
\end{aligned}
$$

Como

$$
\left.\begin{array}{ll}
2^4\left(\dfrac{N-n}{Nn}\right)^4 & \geq 0\\
S_{x_1}^2 & \geq 0\\
S_{x_2}^2 & \geq 0\\
S_{x_3}^2 & \geq 0\\
S_{x_4}^2 & \geq 0
\end{array}\right\} \Rightarrow H_4(V(\hat{\bar{Y}}_{lr}))\geq 0 \quad \text{si y sólo si}
$$

$$
\begin{aligned}
&1-\rho_{x_1x_2}^2-\rho_{x_1x_3}^2-\rho_{x_1x_4}^2-\rho_{x_2x_3}^2-\rho_{x_2x_4}^2-\rho_{x_3x_4}^2+2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_3}\rho_{x_2x_3}+2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_2x_4}+2\rho_{x_1x_3}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_3x_4}+2\rho_{x_2x_3}\rho_{x_2x_4}\rho_{x_3x_4}\\
&+\rho_{x_1x_2}^2\rho_{x_3x_4}^2+\rho_{x_1x_3}^2\rho_{x_2x_4}^2+\rho_{x_1x_4}^2\rho_{x_2x_3}^2-2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_3}\rho_{x_2x_4}\rho_{x_3x_4}-2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_2x_3}\rho_{x_3x_4}-2\rho_{x_1x_3}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_2x_3}\rho_{x_2x_4} \geq 0
\end{aligned}
$$

y será estrictamente $H_4(V(\hat{\bar{Y}}_{lr}))>0$ si,

$$
\left.\begin{array}{l}
n<N\\
S_{x_1}^2>0\\
S_{x_2}^2>0\\
S_{x_3}^2>0\\
S_{x_4}^2>0
\end{array}\right\} \quad \text{y}
$$

$$
\begin{aligned}
&1-\rho_{x_1x_2}^2-\rho_{x_1x_3}^2-\rho_{x_1x_4}^2-\rho_{x_2x_3}^2-\rho_{x_2x_4}^2-\rho_{x_3x_4}^2+2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_3}\rho_{x_2x_3}+2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_2x_4}+2\rho_{x_1x_3}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_3x_4}+2\rho_{x_2x_3}\rho_{x_2x_4}\rho_{x_3x_4}\\
&+\rho_{x_1x_2}^2\rho_{x_3x_4}^2+\rho_{x_1x_3}^2 S_{x_2x_4}^2+\rho_{x_1x_4}^2\rho_{x_2x_3}^2-2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_3}\rho_{x_2x_4}\rho_{x_3x_4}-2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_2x_3}\rho_{x_3x_4}-2\rho_{x_1x_3}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_2x_3}\rho_{x_2x_4} > 0
\end{aligned}
$$

Resumiendo, las condiciones que se debe cumplir para que los valores de los coeficientes *b*, para 1, 2, 3 y 4 variables auxiliares minimicen la varianza son, 1 variable auxiliar: $n < N \ , \ S^2_{x_1} > 0$

2 variables auxiliares: $n < N \ , \ S^2_{x_1} > 0 \ , \ S^2_{x_2} > 0 \ , \ \left|\rho_{x_1x_2}\right| \neq 1 \ , \ 1-\rho^2_{x_1x_2} > 0$

3 variables auxiliares: $n < N \ , \ S^2_{x_1} > 0 \ , \ S^2_{x_2} > 0 \ , \ S^2_{x_3} > 0 \ , \ \left|\rho_{x_1x_2}\right| \neq 1, \left|\rho_{x_1x_3}\right| \neq 1, \left|\rho_{x_2x_3}\right| \neq 1$

$$1-\rho^2_{x_1x_2}-\rho^2_{x_1x_3}-\rho^2_{x_2x_3}+2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_3}\rho_{x_2x_3} > 0$$

4 variables auxiliares: $n < N \ , \ S^2_{x_1} > 0 \ , \ S^2_{x_2} > 0 \ , \ S^2_{x_3} > 0 \ , \ S^2_{x_4} > 0 \ , \ \left|\rho_{x_1x_2}\right| \neq 1 \ ,$

$$\begin{aligned}&1-\rho^2_{x_1x_2}-\rho^2_{x_1x_3}-\rho^2_{x_1x_4}-\rho^2_{x_2x_3}-\rho^2_{x_2x_4}-\rho^2_{x_3x_4}+\\&+2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_3}\rho_{x_2x_3}+2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_2x_4}+2\rho_{x_1x_3}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_3x_4}+2\rho_{x_2x_3}\rho_{x_2x_4}\rho_{x_3x_4}+\\&+\rho^2_{x_1x_2}\rho^2_{x_3x_4}+\rho^2_{x_1x_3}\rho^2_{x_2x_4}+\rho^2_{x_1x_4}\rho^2_{x_2x_3}-\\&-2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_3}\rho_{x_2x_4}\rho_{x_3x_4}-2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_2x_3}\rho_{x_3x_4}-2\rho_{x_1x_3}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_2x_3}\rho_{x_2x_4} > 0\end{aligned}$$

que puede observarse la complicación en la última condición que involucra ir aumentando el número de variables auxiliares, de manera que llegar a una expresión genérica resulta engorroso. Lo que puede decirse es que las varianzas de las variables auxiliares deben ser estrictamente mayor que debe cero, y que los coeficientes de correlación entre variables auxiliares sean diferentes a 1 o -1. De resto se deben calcular las varianzas de los estimadores, contrastar y verificar si se reduce la varianza al incorporar nuevas variables.

4.5.- Enfoque matricial

Como ya se ha indicado, el estimador del promedio y del total son,

$$\hat{\bar{Y}}_{lr} = \bar{y} + b_1(\bar{X}_1 - \bar{x}_1) + b_2(\bar{X}_2 - \bar{x}_2) + b_3(\bar{X}_3 - \bar{x}_3) + \cdots + b_k(\bar{X}_k - \bar{x}_k)$$

$$\hat{Y}_{lr} = N\hat{\bar{Y}}_{lr} = \hat{Y} + b_1(X_1 - \hat{X}_1) + b_2(X_2 - \hat{X}_2) + b_3(X_3 - \hat{X}_3) + \cdots + b_k(X_k - \hat{X}_k)$$

Y sus errores cuadráticos medios y errores cuadráticos medios estimados,

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = V(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \frac{1-f}{n}\left(S_y^2 + \sum_{i=1}^{k} b_i^2 S_{x_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} b_i S_{yx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} b_i b_j S_{x_i x_j}\right)$$

$$ECM(\hat{Y}_{lr}) = V(\hat{Y}_{lr}) = N^2\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(S_y^2 + \sum_{i=1}^{k} b_i^2 S_{x_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} b_i S_{yx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} b_i b_j S_{x_i x_j}\right)$$

$$E\hat{C}M(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \hat{V}(\hat{\hat{Y}}_{lr}) = \frac{1-f}{n}\left(s_y^2 + \sum_{i=1}^{k} \hat{b}_i^2 s_{x_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} \hat{b}_i s_{yx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} \hat{b}_i \hat{b}_j s_{x_i x_j}\right)$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{lr}) = \hat{V}(\hat{Y}_{lr}) = N^2\left(\frac{1-f}{n}\right)\left(s_y^2 + \sum_{i=1}^{k} \hat{b}_i^2 s_{x_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} \hat{b}_i s_{yx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k} \hat{b}_i \hat{b}_j s_{x_i x_j}\right)$$

Bajo el enfoque matricial, se deben definir algunas matrices y vectores,

$S^2_{y\,(1x1)}$ = cuasivarianza de la variable *"y"*

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}_{(kx1)}$$ = vector de coeficientes de regresión

$$\mathbf{S}_{yx} = \begin{pmatrix} S_{yx_1} \\ S_{yx_2} \\ S_{yx_3} \\ \vdots \\ S_{yx_k} \end{pmatrix}_{(kx1)}$$ = matriz de covarianzas entre la variable *"y"* y las variables auxiliares

$$\mathbf{S}_x = \begin{pmatrix} S_{x_1}^2 & S_{x_1x_2} & S_{x_1x_3} & \cdots & S_{x_1x_k} \\ S_{x_1x_2} & S_{x_2}^2 & S_{x_2x_3} & \cdots & S_{x_2x_k} \\ S_{x_1x_3} & S_{x_2x_3} & S_{x_3}^2 & \cdots & S_{x_3x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{x_1x_k} & S_{x_2x_k} & S_{x_3x_k} & \cdots & S_{x_k}^2 \end{pmatrix}_{(kxk)}$$

= matriz de varianzas y covarianzas entre variable auxiliares

$$\mathbf{S} = \left(\begin{array}{c|ccccc} S_y^2 & -S_{yx_1} & -S_{yx_2} & -S_{yx_3} & \cdots & -S_{yx_k} \\ \hline -S_{yx_1} & S_{x_1}^2 & S_{x_1x_2} & S_{x_1x_3} & \cdots & S_{x_1x_k} \\ -S_{yx_2} & S_{x_1x_2} & S_{x_2}^2 & S_{x_2x_3} & \cdots & S_{x_2x_k} \\ -S_{yx_3} & S_{x_1x_3} & S_{x_2x_3} & S_{x_3}^2 & \cdots & S_{x_3x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ -S_{yx_k} & S_{x_1x_k} & S_{x_2x_k} & S_{x_3x_k} & \cdots & S_{x_k}^2 \end{array}\right)_{((k+1)x(k+1))} = \left(\begin{array}{c|c} S_y^2 & -\mathbf{S}'_{yx} \\ \hline -\mathbf{S}_{yx} & \mathbf{S}_x \end{array}\right)_{((k+1)x(k+1))}$$

= matriz de varianzas y covarianzas ampliada y modificada. $\mathbf{S}'_{yx}$ es la matriz traspuesta de $\mathbf{S}_{yx}$.

$$\boldsymbol{b}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}_{((k+1)x1)}$$

= vector ampliado de coeficientes de regresión

$\bar{y}_{(1x1)}$ = promedio muestral de la variable *"y"*

$$\overline{\boldsymbol{X}}_N = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \overline{X}_2 \\ \overline{X}_3 \\ \vdots \\ \overline{X}_k \end{pmatrix}_{(kx1)}$$

= vector de promedios poblacionales de las variables auxiliares

$$\overline{\boldsymbol{X}}_n = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \vdots \\ \bar{x}_k \end{pmatrix}_{(kx1)}$$

= vector de promedios muestrales de las variables auxiliares

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} \overline{X}_1 - \bar{x}_1 \\ \overline{X}_2 - \bar{x}_2 \\ \overline{X}_3 - \bar{x}_3 \\ \vdots \\ \overline{X}_k - \bar{x}_k \end{pmatrix}_{(kx1)}$$ = vector de diferencias de promedios poblacionales y muestrales de las variables auxiliares

$$\overline{\boldsymbol{X}}_a = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \overline{X}_1 - \bar{x}_1 \\ \overline{X}_2 - \bar{x}_2 \\ \overline{X}_3 - \bar{x}_3 \\ \vdots \\ \overline{X}_k - \bar{x}_k \end{pmatrix}_{((k+1)x1)}$$ = vector ampliado de diferencias de promedios poblacionales y muestrales

Entonces,

$$\hat{\overline{Y}}_{lr} = \bar{y} + \boldsymbol{b}(\overline{\boldsymbol{X}}_N - \overline{\boldsymbol{X}}_n) = \bar{y} + \boldsymbol{b}\overline{\boldsymbol{X}}$$

Y el error cuadrático medio,

$$ECM\left(\hat{\overline{Y}}_{lr}\right) = V\left(\hat{\overline{Y}}_{lr}\right) = \left(\frac{1-f}{n}\right)\left[S_y^2 + \boldsymbol{b}'\mathbf{S}_x\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{b}'\mathbf{S}_{yx}\right]$$

De otra forma,

$$\hat{\overline{Y}}_{lr} = \boldsymbol{b}'_a\ \overline{\boldsymbol{X}}_a$$

Y el error cuadrático medio,

$$ECM\left(\hat{\overline{Y}}_{lr}\right) = V\left(\hat{\overline{Y}}_{lr}\right) = \left(\frac{1-f}{n}\right)\boldsymbol{b}'_a\,\mathbf{S}\,\boldsymbol{b}_a$$

5.- ESTIMADORES DE REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE EN MUESTREO ESTRATIFICADO

En este capítulo se desarrollarán los estimadores de regresión lineal en el muestreo estratificado, contemplando los siguientes casos,

i.- que los coeficientes de regresión se consideren “separados” o independientes para cada estrato

ii.- que los coeficientes de regresión se consideren “combinados” o globales para todo el universo

A los primeros se les denomina “estimadores de regresión lineal separado”, y a los segundos “estimadores de regresión lineal combinado”. Se desarrollarán ambos estimadores, considerando que al utilizar más de una variable auxiliar los coeficientes para cada variable serán o todos separados o todos combinados.

Tal como se hizo en los capítulos previos, en primer lugar se trabajará los estimadores de regresión lineal simple (con una variable auxiliar), luego con 2 variables auxiliares, luego 3 y por último se generalizará con *k* variables auxiliares.

Como es sabido, la muestra en cada estrato es aleatoria e independiente, y tal como se expone en la bibliografía sobre el tema, en este trabajo se supondrá que dichas muestras, en cada estrato, serán aleatorias simples. Cabe destacar que la misma pudiera ser sistemática o por conglomerados en una o varias etapas, o incluso diferente en cada estrato, pero estos casos ameritan diversos desarrollos para cada uno, y se haría demasiado extenso para mostrarlo.

5.1.- Estimadores de Regresión Lineal Simple en Muestreo Estratificado

Sea un universo de N elementos, agrupados en L estratos, exhaustivos y mutuamente excluyentes, de N_1, N_2,…, N_L elementos respectivamente, y se extrae una muestra aleatoria e independiente en cada estrato, de tamaños n_1, n_2,…, n_L respectivamente. Para cada estrato h, h=1,2,…,L, se tiene,

$$\hat{\bar{Y}}_{lrh} = \bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h) \quad , \quad \hat{Y}_{lrh} = N_h\hat{\bar{Y}}_{lrh} = \hat{Y}_h + b_h(X_h - \hat{X}_h)$$

Tal como se comentó, cuando la muestra es estratificada, se tienen los estimadores de regresión lineal separado y combinado.

5.1.1.- Estimadores de Regresión Lineal Simple Separado

Los estimadores de regresión lineal simple separados para el promedio y para el total son,

$$\hat{\bar{Y}}_{lrs} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right]$$

$$\hat{Y}_{lrs} = N\hat{\bar{Y}}_{lrs} = \sum_{h=1}^{L} \hat{Y}_{lr_h} = \sum_{h=1}^{L} \hat{Y}_h + b_h(X_h - \hat{X}_h)$$

y sus esperanzas, sesgos, varianzas y errores cuadráticos medios son,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) = \bar{Y} - \sum_{h=1}^{L} W_h COV(b_h, \bar{x}_h)$$

$$B(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} W_h COV(b_h, \bar{x}_h)$$

$$V(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\sum_{h=1}^{L}W_h^2V(\hat{\bar{Y}}_{lr_h})+2\sum_{h=1}^{L-1}\sum_{k=h+1}^{L}W_hW_kCOV(\hat{\bar{Y}}_{lr_h},\hat{\bar{Y}}_{lr_k})=\sum_{h=1}^{L}W_h^2V(\hat{\bar{Y}}_{lr_h})$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\sum_{h=1}^{L}W_h^2V(\hat{\bar{Y}}_{lr_h})+\left(\sum_{h=1}^{L}W_hCOV(b_h,\bar{x}_h)\right)^2$$

$$E(\hat{Y}_{lrs})=Y-\sum_{h=1}^{L}W_hCOV(b_h,\hat{X}_h)$$

$$B(\hat{Y}_{lrs})=\sum_{h=1}^{L}W_hCOV(b_h,\hat{X}_h)$$

$$V(\hat{Y}_{lrs})=\sum_{h=1}^{L}V(\hat{Y}_{lr_h})+2\sum_{h=1}^{L-1}\sum_{k=h+1}^{L}W_hW_kCOV(\hat{Y}_{lr_h},\hat{Y}_{lr_k})=\sum_{h=1}^{L}V(\hat{Y}_{lr_h})$$

$$ECM(\hat{Y}_{lrs})=\sum_{h=1}^{L}V(\hat{Y}_{lr_h})+\left(\sum_{h=1}^{L}COV(b_h,\hat{X}_h)\right)^2$$

considerando b_h como una constante en cada estrato, se tiene,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\bar{Y}$$

$$B(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=0$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=V(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\frac{(N_h-n_h)}{N_hn_h}\left[S_{y_h}^2+b_h^2S_{x_h}^2-2b_hS_{xy_h}\right]$$

$$E(\hat{Y}_{lrs})=Y$$

$$B(\hat{Y}_{lrs})=0$$

$$ECM(\hat{Y}_{lrs})=V(\hat{Y}_{lrs})=\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h(N_h-n_h)}{n_h}\left[S_{y_h}^2+b_h^2S_{x_h}^2-2b_hS_{xy_h}\right]$$

y son estimadores insesgados, además,

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\frac{(N_h-n_h)}{N_hn_h}\left[s_{y_h}^2+b_h^2s_{x_h}^2-2b_hs_{xy_h}\right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{lrs})=\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h(N_h-n_h)}{n_h}\left[s_{y_h}^2+b_h^2s_{x_h}^2-2b_hs_{xy_h}\right]$$

Se presentan los mismos casos especiales que en el muestreo aleatorio simple.

5.1.1.1.- Estimador Directo

Cuando $b_h=0$, para todo h, $h=1,2,\ldots;L$, el estimador de regresión se transforma en el estimador directo, que es un estimador insesgado.

$$\hat{\bar{Y}}_{lrs}=\sum_{h=1}^{L}W_h\left[\bar{y}_h+0(\bar{X}_h-\bar{x}_h)\right]=\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{y}_h=\hat{\bar{Y}}_{st}$$

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\bar{Y}$$

$$B(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=0$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=V(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\frac{(N_h-n_h)}{N_h}S_{y_h}^2$$

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\frac{(N_h-n_h)}{N_h}s_{y_h}^2$$

5.1.1.2.- Estimador por Diferencia

Si $b_h=1$, para todo h, h=1,2,…;L, se denomina el estimador por diferencia, que es un estimador insesgado.

$$\hat{\bar{Y}}_{lrs}=\sum_{h=1}^{L}W_h\left[\bar{y}_h+(\bar{X}_h-\bar{x}_h)\right]=\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{y}_h+\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{X}_h-\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{x}_h=\hat{\bar{Y}}_{st}+\left(\bar{X}-\hat{\bar{X}}_{st}\right)$$

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\bar{Y}$$

$$B(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=0$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=V(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\frac{(N_h-n_h)}{N_h}\left[S_{y_h}^2+S_{x_h}^2-2S_{xy_h}\right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\frac{(N_h-n_h)}{N_h\,n_h}\left[s_{y_h}^2+s_{x_h}^2-2s_{xy_h}\right]$$

5.1.1.3.- Estimador de Razón

Si $b_h=\dfrac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}$, para todo h, h=1,2,…;L, entonces b_h no es constante, y el estimador de regresión lineal separado toma la forma del estimador de razón separado,

$$\hat{\bar{Y}}_{lrs}=\sum_{h=1}^{L}W_h\left[\bar{y}_h+\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}(\bar{X}_h-\bar{x}_h)\right]=\sum_{h=1}^{L}W_h\left[\bar{y}_h+\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}\bar{X}_h-\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}\bar{x}_h\right]=\sum_{h=1}^{L}W_h\left[\bar{y}_h+\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}\bar{X}_h-\bar{y}_h\right]=\sum_{h=1}^{L}W_h\left[\frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}\bar{X}_h\right]=\hat{\bar{Y}}_{Rs}$$
$$=\sum_{h=1}^{L}W_h\hat{\bar{Y}}_{R_h}=\hat{\bar{Y}}_{Rs}$$

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{Y}_h\left[1+\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)\left(\frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2}-\frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h\bar{Y}_h}\right)\right]$$

$$B(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{Y}_h\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)\left(\frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h\bar{Y}_h}-\frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2}\right)$$

$$V(\hat{\bar{Y}}_{lrs})\approx\sum_{h=1}^{L}W_h^2\bar{Y}_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)\left[\frac{S_{y_h}^2}{\bar{Y}_h^2}+\frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2}-2\frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h\bar{Y}_h}-\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)\left(\frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2}-\frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h\bar{Y}_h}\right)^2\right]$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrs})\approx\sum_{h=1}^{L}W_h^2\bar{Y}_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)\left(\frac{S_{y_h}^2}{\bar{Y}_h^2}+\frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2}-2\frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h\bar{Y}_h}\right)+$$
$$+2\sum_{h=1}^{L-1}\sum_{k=h+1}^{L}W_hW_k\bar{Y}_h\bar{Y}_k\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)\left(\frac{1-f_k}{n_k}\right)\left(\frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h\bar{Y}_h}-\frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2}\right)\left(\frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k\bar{Y}_k}-\frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2}\right)$$

$$\approx\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)\left(S_{y_h}^2+R_h^2S_{x_h}^2-2R_hS_{xy_h}\right)+$$
$$+2\sum_{h=1}^{L-1}\sum_{k=h+1}^{L}W_hW_k\bar{Y}_h\bar{Y}_k\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)\left(\frac{1-f_k}{n_k}\right)\left(\frac{S_{xy_h}}{\bar{X}_h\bar{Y}_h}-\frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}_h^2}\right)\left(\frac{S_{xy_k}}{\bar{X}_k\bar{Y}_k}-\frac{S_{x_k}^2}{\bar{X}_k^2}\right)$$

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lrs})\approx\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)\left(s_{y_h}^2+\hat{R}_h^2s_{x_h}^2-2\hat{R}_hs_{xy_h}\right)+$$
$$+2\sum_{h=1}^{L-1}\sum_{k=h+1}^{L}W_hW_k\bar{y}_h\bar{y}_k\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)\left(\frac{1-f_k}{n_k}\right)\left(\frac{s_{xy_h}}{\bar{x}_h\bar{y}_h}-\frac{s_{x_h}^2}{\bar{x}_h^2}\right)\left(\frac{s_{xy_k}}{\bar{x}_k\bar{y}_k}-\frac{s_{x_k}^2}{\bar{x}_k^2}\right)$$

que son la esperanza, sesgo, varianza y error cuadrático medio del estimador de razón separado. Cabe destacar que de esta manera se demuestra en Martín-Caro (2006, p. 88), pero en la bibliografía sobre el tema, y en los apartados (1.2.3.- Estimador de Razón y 1.4.- Comparación con el Estimador de Razón) se muestra la fórmula el error cuadrático medio es

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrs})\approx\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)\left(S_{y_h}^2+R_h^2S_{x_h}^2-2R_hS_{xy_h}\right)$$

descartando el segundo término. Si bien es cierto que con dicho término se aproxima mejor al verdadero valor del $ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrs})$, suele ser pequeño, y descartándolo simplifica la fórmula.

5.1.1.4.- Estimador de Varianza Mínima para b_h constante

El último caso es el estimador de varianza mínima para b_h constante, para todo h, h=1,2,…;L. Como b_h para todo h, el estimador es insesgado, entonces se debe derivar la varianza para hallar el valor de b_h que la minimice. El resultado es,

$$b_{h0}=\frac{S_{xy_h}}{S^2_{x_h}} \qquad , \qquad \hat{b}_{h0}=\frac{s_{xy_h}}{s^2_{x_h}} \qquad \forall h,\ h=1,2,...L$$

$$\hat{\bar{Y}}_{lrs}=\sum_{h=1}^{L}W_h\left[\bar{y}_h+b_{h0}(\bar{X}_h-\bar{x}_h)\right]=\sum_{h=1}^{L}W_h\left[\bar{y}_h+\frac{S_{xy_h}}{S^2_{x_h}}(\bar{X}_h-\bar{x}_h)\right]$$

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\bar{Y}$$

$$B(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=0$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=V(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\frac{(N_h-n_h)}{N_h}\left[S^2_{y_h}-\frac{S^2_{xy_h}}{S^2_{x_h}}\right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\frac{(N_h-n_h)}{N_h}\left[s^2_{y_h}-\frac{s^2_{xy_h}}{s^2_{x_h}}\right]$$

5.1.2.- Estimadores de Regresión Lineal Simple Combinado

Los estimadores de regresión lineal combinado utilizan un único valor de b para todos los estratos, que se denotará como b_c, y los estimadores para el promedio y para el total son,

$$\hat{\bar{Y}}_{lrc}=\sum_{h=1}^{L}W_h\left[\bar{y}_h+b_c(\bar{X}_h-\bar{x}_h)\right]=\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{y}_h+b_c\left[\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{X}_h-\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{x}_h\right]=\hat{\bar{Y}}_{st}+b_c\left(\bar{X}-\hat{\bar{X}}_{st}\right)$$

$$\hat{Y}_{lrc}=N\hat{\bar{Y}}_{lrc}=\sum_{h=1}^{L}\hat{Y}_h+b_c(X_h-\hat{X}_h)=\hat{Y}_{st}+b_c\left(X-\hat{X}_{st}\right)$$

y sus esperanzas, sesgos, varianzas y errores cuadráticos medios son,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lrc})=\bar{Y}-\sum_{h=1}^{L}W_h COV(b_c,\bar{x}_h)$$

$$B(\hat{\bar{Y}}_{lrc})=\sum_{h=1}^{L}W_h COV(b_c,\bar{x}_h)$$

$$V(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L}W_h^2\Big[V(\bar{y}_h)+E(b_c^2\bar{x}_h^2)-\left(E(b_c\bar{x}_h)\right)^2+\bar{X}_h^2E(b_c^2)-\bar{X}_h^2\left(E(b_c)\right)^2+2\bar{X}_hE(b_c\bar{y}_h)-$$

$$-2E(b_c\bar{x}_h\bar{y}_h)-2\bar{X}_hE(b_c^2\bar{x}_h)+2\bar{Y}_hE(b_c\bar{x}_c)-2\bar{X}_h\bar{Y}_hE(b_c)+2\bar{X}_hE(b_c)E(b_c\bar{x}_h)\Big]$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L}W_h^2\Big[V(\bar{y}_h)+E(b_c^2\bar{x}_h^2)+\bar{X}_h^2E(b_c^2)+2\bar{X}_hE(b_c\bar{y}_h)$$

$$-2E(b_c\bar{x}_h\bar{y}_h)-2\bar{X}_hE(b_c^2\bar{x}_h)+2\bar{Y}_hE(b_c\bar{x}_c)-2\bar{X}_h\bar{Y}_hE(b_c)\Big]$$

considerando b_c como una constante, se tiene que los estimadores son insesgados,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lrc})=\bar{Y}$$

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = E\left[\sum_{h=1}^{L}W_h\left(\bar{y}_h+b_c(\bar{X}_h-\bar{x}_h)\right)\right]=\sum_{h=1}^{L}E\left[W_h\left(\bar{y}_h+b_c(\bar{X}_h-\bar{x}_h)\right)\right]=\bar{Y}$$

$$=\sum_{h=1}^{L}\left[E\left(W_h\bar{y}_h\right)+b_cE\left(W_h\bar{X}_h\right)-b_cE\left(W_h\bar{x}_h\right)\right]=\sum_{h=1}^{L}E\left(W_h\bar{y}_h\right)+b_c\sum_{h=1}^{L}E\left(W_h\bar{X}_h\right)-b_c\sum_{h=1}^{L}E\left(W_h\bar{x}_h\right)$$

$$=\sum_{h=1}^{L}W_hE\left(\bar{y}_h\right)+b_c\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{X}_h-b_c\sum_{h=1}^{L}W_hE\left(\bar{x}_h\right)=\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{Y}_h+b_c\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{X}_h-b_c\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{X}_h$$

$$=\bar{Y}+b_c\bar{X}-b_c\bar{X}=\bar{Y}$$

$$B(\hat{\bar{Y}}_{lrc})=0$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrc})=V(\hat{\bar{Y}}_{lrc})=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\frac{(N_h-n_h)}{N_h n_h}\left[S_{y_h}^2+b_c^2S_{x_h}^2-2b_cS_{xy_h}\right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lrc})=\hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lrc})=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\frac{(N_h-n_h)}{N_h n_h}\left[s_{y_h}^2+b_h^2s_{x_h}^2-2b_hs_{xy_h}\right]$$

$$E(\hat{Y}_{lrc})=Y$$

$$B(\hat{Y}_{lrc})=0$$

$$ECM(\hat{Y}_{lrc})=V(\hat{Y}_{lrc})=\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h(N_h-n_h)}{n_h}\left[S_{y_h}^2+b_c^2S_{x_h}^2-2b_cS_{xy_h}\right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{lrc})=\hat{V}(\hat{Y}_{lrc})=\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h(N_h-n_h)}{n_h}\left[s_{y_h}^2+b_c^2s_{x_h}^2-2b_cs_{xy_h}\right]$$

Se presentan los mismos casos especiales que para el estimador de regresión lineal separado.

5.1.2.1.- Estimador Directo

Cuando $b_c=0$, el estimador de regresión combinado se transforma en el estimador directo, que es un estimador insesgado.

$$\hat{\bar{Y}}_{lrc}=\sum_{h=1}^{L}W_h\left[\bar{y}_h+0(\bar{X}_h-\bar{x}_h)\right]=\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{y}_h=\hat{\bar{Y}}_{st}$$

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lrc})=\bar{Y}$$

$$B(\hat{\bar{Y}}_{lrc})=0$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(N_h - n_h)}{N_h} S_{y_h}^2$$

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(N_h - n_h)}{N_h} s_{y_h}^2$$

es decir, que si $b_c=0$ es equivalente a que $b_h=0$, para todo h, $h=1,2,\ldots;L$, entonces, estimador de regresión combinado se iguala con el estimador de regresión lineal separado, y a su vez, ambos se igualan al estimador directo.

5.1.2.2.- Estimador por Diferencia

Cuando $b_c=1$, se denomina el estimador por diferencia, y al ser constante b_c, es un estimador insesgado.

$$\hat{\bar{Y}}_{lrc} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + (\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right] = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_h + \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{X}_h - \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{x}_h = \hat{\bar{Y}}_{st} + \left(\bar{X} - \hat{\bar{X}}_{st}\right)$$

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \bar{Y}$$

$$B(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = 0$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(N_h - n_h)}{N_h} \left[S_{y_h}^2 + S_{x_h}^2 - 2S_{xy_h}\right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(N_h - n_h)}{N_h n_h} \left[s_{y_h}^2 + s_{x_h}^2 - 2s_{xy_h}\right]$$

que además resulta exactamente igual al estimador por diferencia separado, es decir, es decir, que si $b_c=1$ es exactamente igual a que $b_h=1$, para todo h, $h=1,2,\ldots;L$.

5.1.2.3.- Estimador de Razón

Si $b_c = \dfrac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}}$, entonces b_c no es constante, y el estimador de regresión lineal combinado toma la forma del estimador de razón combinado,

$$\hat{\bar{Y}}_{lrc} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + \frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} (\bar{X}_h - \bar{x}_h) \right] = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + \frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \bar{X}_h - \frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \bar{x}_h \right] = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_h + \frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{X}_h - \frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{x}_h$$

$$= \bar{Y}_{st} + \frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \bar{X} - \frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \hat{\bar{X}}_{st} = \frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \bar{X} = \hat{\bar{Y}}_{Rc}$$

$$\hat{\bar{Y}}_{lrc} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + \frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} (\bar{X}_h - \bar{x}_h) \right] = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + \frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \bar{X}_h - \frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \bar{x}_h \right] =$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_h + \frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{X}_h - \frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{x}_h = \bar{Y}_{st} + \frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \bar{X} - \frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \hat{\bar{X}}_{st} = \frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \bar{X} = \hat{\bar{Y}}_{Rc}$$

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \bar{Y} + \frac{1}{\bar{X}} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) \left(\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{x_h}^2 - S_{xy_h} \right) = \bar{Y} + \bar{Y} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) \left(\frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xy_h}}{\bar{X}\bar{Y}} \right)$$

$$B(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \frac{1}{\bar{X}} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) \left(S_{xy_h} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} S_{x_h}^2 \right) = \bar{Y} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) \left(\frac{S_{xy_h}}{\bar{X}^2} - \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}\bar{Y}} \right)$$

$$V(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) \approx \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) \left(S_{y_h}^2 + R_c^2 S_{x_h}^2 - 2R_c S_{xy_h} \right) - \bar{Y}^2 \left[\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) \left(\frac{S_{xy_h}}{\bar{X}\bar{Y}} - \frac{S_{x_h}^2}{\bar{X}^2} \right) \right]^2$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) + \left[B(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) \right]^2 \approx \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) \left(S_{y_h}^2 + R_c^2 S_{x_h}^2 - 2R_c S_{xy_h} \right)$$

$$E\hat{C}M(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lrc}) \approx \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) \left(s_{y_h}^2 + \hat{R}_c^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{R}_c s_{xy_h} \right)$$

5.1.2.4.- Estimador de Varianza Mínima para b_c constante

El último caso es el de varianza mínima para b_c constante, que se denotará por b_{c0}, entonces se deriva la varianza respecto de b_{c0} y se iguala a cero, y se despeja b_{c0}, entonces,

$$b_{c0} = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h\, n_h} S_{xy_h}}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h\, n_h} S_{x_h}^2} = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{xy_h}}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{x_h}^2}$$

$$\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lrc} = \hat{\bar{Y}}_{st} + b_{c0}\left(\bar{X} - \hat{\bar{X}}_{st} \right)$$

$$E(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lrc}) = \bar{Y}$$

$$B(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lrc}) = 0$$

$$ECM(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lrc}) = V(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(N_h - n_h)}{N_h} \left[S_{y_h}^2 + b_{c0}^2 S_{x_h}^2 - 2 b_{c0} S_{xy_h} \right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lrc}) = \hat{V}(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(N_h - n_h)}{N_h} \left[s_{y_h}^2 + \hat{b}_{c0}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_{c0} s_{xy_h} \right]$$

donde,

$$\hat{b}_{c0} = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h\, n_h} s_{xy_h}}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{N_h - n_h}{N_h\, n_h} s_{x_h}^2} = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} s_{xy_h}}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} s_{x_h}^2}$$

y para que haya realmente un mínimo, la segunda derivada debe ser mayor que cero, y esto se cumple si,

$$2\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(N_h - n_h)}{N_h} S_{x_h}^2 > 0 \qquad \text{es decir} \qquad \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(N_h - n_h)}{N_h} S_{x_h}^2 > 0$$

De manera que la varianza de la variable auxiliar puede ser constante en algún o algunos estratos, siempre y cuando no lo sea en todos. Esto es una gran ventaja sobre el estimador de regresión lineal separado.

5.2.- Estimadores de Regresión Lineal con 2 variables auxiliares en Muestreo Estratificado

Igual que para una variable auxiliar, aquí se tienen dos planteamientos, pero con dos variables auxiliares, el estimador de regresión lineal separado y el estimador de regresión lineal combinado, en el primero tanto b_1 como b_2 se calculan o establecen de forma separada para cada estrato, y en el segundo, ambos se calculan de forma combinada o global para todo el universo.

5.2.1.- Estimadores de Regresión Lineal Separado con 2 variables auxiliares

Este caso es relativamente sencillo de desarrollar, ya que, al ser la muestras de cada estrato independientes y aleatorias simples (tal como se asumió en un principio) y los coeficientes separados, lo que se tiene en cada estrato es el mismo caso de una muestra aleatoria simple, y sólo se requiere consolidarlo en todo el universo.

Sean, $\hat{\bar{Y}}_{lrh} = \bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + b_{h2}(\bar{Z}_h - \bar{z}_h)$

$$\hat{Y}_{lrh} = N\hat{\bar{Y}}_{lrh} = \hat{Y}_h + b_{h1}(X_h - \hat{X}_h) + b_{h2}(Z_h - \hat{Z}_h)$$

los estimadores del promedio y del total en el estrato h, h=1, 2, … , L, donde,

$$\bar{y}_h = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}}{n_h} \qquad \bar{x}_h = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} x_{hi}}{n_h} \qquad \bar{z}_h = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} z_{hi}}{n_h}$$

$$\bar{X}_h = \frac{\sum_{i=1}^{N_h} x_{hi}}{N_h} \qquad \bar{Z}_h = \frac{\sum_{i=1}^{N_h} z_{hi}}{N_h}$$

$$X_h = \sum_{i=1}^{N_h} x_{hi} \qquad Z_h = \sum_{i=1}^{N_h} z_{hi}$$

$$\hat{Y}_h = N_h\ \bar{y}_h \qquad \hat{X}_h = N_h\ \bar{x}_h \qquad \hat{Z}_h = N_h\ \bar{z}_h$$

Y sus esperanzas, sesgos, varianzas y errores cuadráticos medio,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lrh}) = \bar{Y}_h - COV(b_{h1}, \bar{x}_h) - COV(b_{h2}, \bar{z}_h)$$

$$B(\hat{\bar{Y}}_{lrh}) = COV(b_{h1}, \bar{x}_h) + COV(b_{h2}, \bar{z}_h)$$

$$\begin{aligned}
V(\hat{\bar{Y}}_{lrh}) = {} & \left[E\left(\bar{y}_h^2\right) - \bar{Y}_h^2\right] + E\left(\bar{X}_h^2 b_{h1}^2\right) + E\left(b_{h1}^2 \bar{x}_h^2\right) + E\left(\bar{Z}_h^2 b_{h2}^2\right) + E\left(b_{h2}^2 \bar{z}_h^2\right) + \\
& + 2\bar{X}_h E(b_{h1}\bar{y}_h) - 2E(b_{h1}\bar{x}_h\bar{y}_h) + 2\bar{Z}_h E(b_{h2}\bar{y}_h) - 2E(b_{h2}\bar{y}_h\bar{z}_h) - \\
& - 2\bar{X}_h E(b_{h1}^2\bar{x}_h) + 2\bar{X}_h\bar{Z}_h E(b_{h1}b_{h2}) - 2\bar{X}_h E(b_{h1}b_{h2}\bar{z}_h) - \\
& - 2\bar{Z}_h E(b_{h1}b_{h2}\bar{x}_h) + 2E(b_{h1}b_{h2}\bar{x}_h\bar{z}_h) - \\
& - 2\bar{Z}_h E(b_{h2}^2\bar{z}_h) \\
& - \left(E(b_{h1}\bar{x}_h)\right)^2 - \bar{X}_h^2\left(E(b_{h1})\right)^2 - \left(E(b_{h2}\bar{z}_h)\right)^2 - \bar{Z}_h^2\left(E(b_{h2})\right)^2 + \\
& + 2\bar{Y}_h E(b_{h1}\bar{x}_h) - 2\bar{X}_h\bar{Y}_h\ E(b_{h1}) + 2\bar{Y}_h E(b_{h2}\bar{z}_h) - 2\bar{Y}_h\bar{Z}_h\ E(b_{h2}) + \\
& + 2\bar{X}_h E(b_{h1}\bar{x}_h)E(b_{h1}) - 2E(b_{h1}\bar{x}_h)E(b_{h2}\bar{z}_h) + 2\bar{Z}_h\ E(b_{h1}\bar{x}_h)E(b_{h2}) + \\
& + 2\bar{X}_h\ E(b_{h1})E(b_{h2}\bar{z}_h) - 2\bar{X}_h\bar{Z}_h E(b_{h1})\ E(b_{h2}) + \\
& + 2\bar{Z}_h E(b_{h2}\bar{z}_h)\ E(b_{h2})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrh}) &= V(\bar{y}_h) + E\left(\bar{X}_h^2 b_{h1}^2\right) + E\left(b_{h1}^2 \bar{x}_h^2\right) + E\left(\bar{Z}_h^2 b_{h2}^2\right) + E\left(b_{h2}^2 \bar{z}_h^2\right) + \\
&+ 2\bar{X}_h E(b_{h1}\bar{y}_h) - 2E(b_{h1}\bar{x}_h\bar{y}_h) + 2\bar{Z}_h E(b_{h2}\bar{y}_h) - 2E(b_{h2}\bar{y}_h\bar{z}_h) - \\
&- 2\bar{X}_h E(b_{h1}^2\bar{x}_h) + 2\bar{X}_h\bar{Z}_h E(b_{h1}b_{h2}) - 2\bar{X}_h E(b_{h1}b_{h2}\bar{z}_h) - \\
&- 2\bar{Z}_h E(b_{h1}b_{h2}\bar{x}_h) + 2E(b_{h1}b_{h2}\bar{x}_h\bar{z}_h) - \\
&- 2\bar{Z}_h E(b_{h2}^2\bar{z}_h) \\
&+ 2\bar{Y}_h E(b_{h1}\bar{x}_h) - 2\bar{X}_h\bar{Y}_h\ E(b_{h1}) + 2\bar{Y}_h E(b_{h2}\bar{z}_h) - 2\bar{Y}_h\bar{Z}_h\ E(b_{h2})
\end{aligned}
$$

pero si b_{h1} y b_{h2} son constantes para todo h, h=1,2,…,L, entonces, el estimador es insesgado, y su error cuadrático medio es,

$$
EMC(\hat{\bar{Y}}_{lrh}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lrh}) = \frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\left[S_{y_h}^2 + b_{h1}^2 S_{x_h}^2 + b_{h2}^2 S_{z_h}^2 - 2b_{h1}S_{xy_h} - 2b_{h2}S_{yz_h} + 2b_{h1}b_{h2}S_{xz_h}\right]
$$

y su estimador,

$$
E\hat{M}C(\hat{\bar{Y}}_{lrh}) = \hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lrh}) = \frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\left[s_{y_h}^2 + \hat{b}_{h1}^2 s_{x_h}^2 + \hat{b}_{h2}^2 s_{z_h}^2 - 2\hat{b}_{h1}s_{xy_h} - 2\hat{b}_{h2}s_{yz_h} + 2\hat{b}_{h1}\hat{b}_{h2}s_{xz_h}\right]
$$

Para el estimador del total,

$$
ECM(\hat{Y}_{lrh}) = V(\hat{Y}_{lrh}) = N_n^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lrh}) = \frac{N_h(N_h - n_h)}{n_h}\left[S_{y_h}^2 + b_{h1}^2 S_{x_h}^2 + b_{h2}^2 S_{z_h}^2 - 2b_{h1}S_{xy_h} - 2b_{h2}S_{yz_h} + 2b_{h1}b_{h2}S_{xz_h}\right]
$$

$$
E\hat{C}M(\hat{Y}_{lrh}) = \hat{V}(\hat{Y}_{lrh}) = N_n^2 \hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lrh}) = \frac{N_h(N_h - n_h)}{n_h}\left[s_{y_h}^2 + \hat{b}_{h1}^2 s_{x_h}^2 + \hat{b}_{h2}^2 s_{z_h}^2 - 2\hat{b}_{h1}s_{xy_h} - 2\hat{b}_{h2}s_{yz_h} + 2\hat{b}_{h1}\hat{b}_{h2}s_{xz_h}\right]
$$

donde,

$$V(\bar{y}_h) = \frac{N_h - n_h}{N_h\, n_h} S_{y_h}^2 \quad , \quad V(\bar{x}_h) = \frac{N_h - n_h}{N_h\, n_h} S_{x_h}^2 \quad , \quad V(\bar{z}_h) = \frac{N_h - n_h}{N_h\, n_h} S_{z_h}^2$$

$$COV(x_h, \bar{y}_h) = \frac{N_h - n_h}{N_h\, n_h} S_{xy_h}^2 \quad , \quad COV(\bar{y}_h, \bar{z}_h) = \frac{N_h - n_h}{N_h\, n_h} S_{yz_h}^2 \quad ,$$

$$COV(\bar{x}_h, \bar{z}_h) = \frac{N_h - n_h}{N_h\, n_h} S_{xz_h}^2$$

$$S_{y_h}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_h}\left(y_{hi} - \bar{Y}_h\right)^2}{N_h - 1} \quad , \quad S_{x_h}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_h}\left(x_{hi} - \bar{X}_h\right)^2}{N_h - 1} \quad , \quad S_{z_h}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_h}\left(z_{hi} - \bar{Z}_h\right)^2}{N_h - 1}$$

$$S_{xy_h} = \frac{\sum_{i=1}^{N_h}\left(x_{hi} - \bar{X}_h\right)\left(y_{hi} - \bar{Y}_h\right)}{N_h - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{N_h} x_{hi}\, y_{hi} - \bar{X}_h \bar{Y}_h}{N_h - 1}$$

$$S_{yz_h} = \frac{\sum_{i=1}^{N_h}\left(y_{hi} - \bar{Y}_h\right)\left(z_{hi} - \bar{Z}_h\right)}{N_h - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{N_h} y_{hi}\, z_{hi} - \bar{Y}_h \bar{Z}_h}{N_h - 1}$$

$$S_{xz_h} = \frac{\sum_{i=1}^{N_h}\left(x_{hi} - \bar{X}_h\right)\left(z_{hi} - \bar{Z}_h\right)}{N_h - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{N_h} x_{hi}\, z_{hi} - \bar{X}_h \bar{Z}_h}{N_h - 1}$$

$$s_{y_h}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_h}\left(y_{hi} - \bar{y}_h\right)^2}{n_h - 1} \quad , \quad s_{x_h}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_h}\left(x_{hi} - \bar{x}_h\right)^2}{n_h - 1} \quad , \quad s_{z_h}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_h}\left(z_{hi} - \bar{z}_h\right)^2}{n_h - 1}$$

$$s_{xy_h} = \frac{\sum_{i=1}^{n_h}\left(x_{hi} - \bar{x}_h\right)\left(y_{hi} - \bar{y}_h\right)}{n_h - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} x_{hi}\, y_{hi} - \bar{x}_h \bar{y}_h}{n_h - 1}$$

$$s_{yz_h} = \frac{\sum_{i=1}^{n_h}\left(y_{hi} - \bar{y}_h\right)\left(z_{hi} - \bar{z}_h\right)}{n_h - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}\, z_{hi} - \bar{y}_h \bar{z}_h}{n_h - 1}$$

$$s_{xz_h} = \frac{\sum_{i=1}^{n_h}\left(x_{hi} - \bar{x}_h\right)\left(z_{hi} - \bar{z}_h\right)}{n_h - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} x_{hi}\, z_{hi} - \bar{x}_h \bar{z}_h}{n_h - 1}$$

Tomando el caso de b_{h1} y b_{h2} constantes para todo h, h=1,2,…,L, al consolidar se tiene que,

$$\hat{\bar{Y}}_{lrs} = \sum_{h=1}^{L} W_h \hat{\bar{Y}}_{lrh} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + b_{h2}(\bar{Z}_h - \bar{z}_h) \right] = \hat{\bar{Y}}_{st} + \sum_{h=1}^{L} W_h \left[b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + b_{h2}(\bar{Z}_h - \bar{z}_h) \right]$$

$$\hat{Y}_{lrs} = \sum_{h=1}^{L} \hat{Y}_{lrh} = \sum_{h=1}^{L} \left[\hat{Y}_h + b_{h1}(X_h - \hat{X}_h) + b_{h2}(Z_h - \hat{Z}_h) \right] = \hat{Y}_{st} + \sum_{h=1}^{L} \left[b_{h1}(X_h - \hat{X}_h) + b_{h2}(Z_h - \hat{Z}_h) \right]$$

que son estimadores insesgados, y sus errores cuadráticos medio,

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lrh}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + b_{h1}^2 S_{x_h}^2 + b_{h2}^2 S_{z_h}^2 - 2b_{h1} S_{xy_h} - 2b_{h2} S_{yz_h} + 2b_{h1} b_{h2} S_{xz_h} \right]$$

$$ECM(\hat{Y}_{lrs}) = V(\hat{Y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} V(\hat{Y}_{lrh}) = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + b_{h1}^2 S_{x_h}^2 + b_{h2}^2 S_{z_h}^2 - 2b_{h1} S_{xy_h} - 2b_{h2} S_{yz_h} + 2b_{h1} b_{h2} S_{xz_h} \right]$$

y sus estimadores,

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) = \hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[s_{y_h}^2 + \hat{b}_{h1}^2 s_{x_h}^2 + \hat{b}_{h2}^2 s_{z_h}^2 - 2\hat{b}_{h1} s_{xy_h} - 2\hat{b}_{h2} s_{yz_h} + 2\hat{b}_{h1} \hat{b}_{h2} s_{xz_h} \right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) = \hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[s_{y_h}^2 + \hat{b}_{h1}^2 s_{x_h}^2 + \hat{b}_{h2}^2 s_{z_h}^2 - 2\hat{b}_{h1} s_{xy_h} - 2\hat{b}_{h2} s_{yz_h} + 2\hat{b}_{h1} \hat{b}_{h2} s_{xz_h} \right]$$

Se presentan los mismos casos especiales que con 1 variable auxiliar. Se desarrollarán sólo para el estimador del promedio, para el estimador del total basta con hacer

$$\hat{Y}_{lrs} = N\,\hat{\bar{Y}}_{lrs} \quad , \quad V(\hat{Y}_{lrs}) = N^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) \quad , \quad \hat{V}(\hat{Y}_{lrs}) = N^2 \hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) \ .$$

5.2.1.1.- Estimador de Regresión Lineal Simple

Cuando $b_{h2}=0$, para todo h, h=1,2,…;L, el estimador de regresión con 2 variables auxiliares se transforma en el estimador de regresión lineal simple, en muestreo estratificado, resultando,

$$\hat{\bar{Y}}_{lrs} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + b_{h2}(\bar{Z}_h - \bar{z}_h)\right] = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + 0(\bar{Z}_h - \bar{z}_h)\right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right]$$

que tiene la misma estructura que el estimador de regresión lineal simple.

Su esperanza es,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{Y}_h - COV(b_{h1}, \bar{x}_h) - COV(b_{h2}, \bar{z}_h)\right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h - \sum_{h=1}^{L} W_h COV(b_{h1}, \bar{x}_h) - \sum_{h=1}^{L} W_h COV(b_{h2}, \bar{z}_h)$$

Como $b_{h2}=0$,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h - \sum_{h=1}^{L} W_h COV(b_{h1}, \bar{x}_h) = \bar{Y} - \sum_{h=1}^{L} W_h COV(b_{h1}, \bar{x}_h)$$

si b_1 es constante $COV(b_{h1}, \bar{x}) = 0$, para todo h, h=1,2,…,L, entonces,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lr}) = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h = \bar{Y}$$

que es un estimador insesgado, y su error cuadrático medio es,

$$EMC(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lrs}) = V(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + b_{h1}^2 S_{x_h}^2 + 0 S_{z_h}^2 - 2b_{h1} S_{xy_h} - 20 S_{yz_h} + 2b_{h1} 0 S_{xz_h} \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + b_{h1}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{h1} S_{xy_h} \right]$$

y su estimador,

$$E\hat{M}C(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lr}) = \hat{V}(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[s_{y_h}^2 + \hat{b}_{h1}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{b}_{h1} s_{xy_h} \right]$$

Para el estimador del total, si b_{h1} es constante y b_{h2}=0 para todo h, h=1,2,…,L,

$$\hat{Y}_{lrs} = \sum_{h=1}^{L} N_h \left[\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + b_{h2}(\bar{Z}_h - \bar{z}_h) \right] = \sum_{h=1}^{L} N_h \left[\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + 0(\bar{Z}_h - \bar{z}_h) \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} N_h \left[\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) \right] = \sum_{h=1}^{L} \hat{Y}_h + \sum_{h=1}^{L} b_{h1}(X_h - \hat{X}_h) = \hat{Y}_{st} + \sum_{h=1}^{L} b_{h1}(X_h - \hat{X}_h)$$

que es un estimador insesgado, y su error cuadrático medio es,

$$EMC(\hat{Y}_{lr}) = V(\hat{Y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + b_{h1}^2 S_{x_h}^2 + 0 S_{z_h}^2 - 2b_{h1} S_{xy_h} - 20 S_{yz_h} + 2b_{h1} 0 S_{xz_h} \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + b_{h1}^2 S_{x_h}^2 - 2b_{h1} S_{xy_h} \right]$$

Que se corresponde con el estimador de regresión lineal simple separado. Por lo tanto, se demuestra que el estimador lineal simple separado es un caso particular del estimador de regresión lineal separado con 2 variables auxiliares, e incluye todos sus casos especiales, que son,

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{Estimador Directo:} & b_{h1}=0 & b_{h2}=0 \\
\text{Estimador de Razón:} & b_{h1}=\dfrac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} & b_{h2}=0 \\
\text{Estimador por Diferencia:} & b_{h1}=1 & b_{h2}=0 \\
\text{Estimador de Varianza mínima para constante:} & b_{h1}=\dfrac{S_{xy_h}}{S^2_{x_h}} & b_{h2}=0
\end{array}\right\} \forall\, h,\, h=1, 2,\ldots, L$$

5.2.1.2.- Estimador por Diferencias

Si $b_{h1}= b_{h2}=1$, para todo h, $h=1,2,\ldots;L$, se denomina el estimador por diferencia, que es un estimador insesgado.

$$\hat{\bar{Y}}_{lrs}=\sum_{h=1}^{L}W_h\left[\bar{y}_h+(\bar{X}_h-\bar{x}_h)+(\bar{Z}_h-\bar{z}_h)\right]=\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{y}_h+\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{X}_h-\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{x}_h+\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{Z}_h-\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{z}_h$$
$$=\hat{\bar{Y}}_{st}+\left(\bar{X}-\hat{\bar{X}}_{st}\right)+\left(\bar{Z}-\hat{\bar{Z}}_{st}\right)$$

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\bar{Y}$$

$$B(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=0$$

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=V(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\frac{(N_h-n_h)}{N_h}\left[S^2_{y_h}+S^2_{x_h}-2S_{xy_h}\right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lrs})=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\frac{(N_h-n_h)}{N_h\,n_h}\left[s^2_{y_h}+s^2_{x_h}-2s_{xy_h}\right]$$

5.2.1.3.- Estimador de Razón-Regresión Separado-Separado

Los estimadores del tipo Razón-Regresión en muestreo estratificado se presentan en Martín-Caro (2010, p. 37), y pueden ser del tipo separado-separado, separado-combinado y combinado-combinado, en este apartado se tratará el estimador de Razón-Regresión separado-separado, ya que los otros son combinados, y este es,

$$\hat{\hat{Y}}_{Rrss} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\hat{\hat{Y}}_{Rh} + b_h (\overline{Z}_h - \hat{\hat{Z}}_{Rh}) \right] \qquad ; \qquad \hat{Y}_{Rrss} = \sum_{i=1}^{L} \left[\hat{Y}_{R_h} + b_h (Z_h - \hat{Z}_{R_h}) \right]$$

Donde $\hat{\hat{Y}}_{Rh} = \dfrac{\overline{y}_h}{\overline{x}_h} \overline{X}_h$ y $\hat{\hat{Z}}_{Rh} = \dfrac{\overline{z}_h}{\overline{x}_h} \overline{X}_h$, son estimadores de razón, que tal como se ha demostrado en el capítulo 1, pero aplicado al estrato *h*, pueden escribirse como

$$\hat{\hat{Y}}_{Rh} = \overline{y}_h + c_h (\overline{X}_h - \overline{x}_h) \quad , \quad \hat{\hat{Z}}_{Rh} = \overline{z}_h + d_h (\overline{X}_h - \overline{x}_h) \quad \text{donde } c_h = \frac{\overline{y}_h}{\overline{x}_h} \quad \text{y} \quad d_h = \frac{\overline{z}_h}{\overline{x}_h}$$

De manera que

$$\hat{\hat{Y}}_{Rrss} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\left(\overline{y}_h + c_h (\overline{X}_h - \overline{x}_h) \right) + b_h (\overline{Z}_h - (\overline{z}_h + d_h (\overline{X}_h - \overline{x}_h))) \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\overline{y}_h + c_h (\overline{X}_h - \overline{x}_h) + b_h \overline{Z}_h - b_h \overline{z}_h - b_h d_h (\overline{X}_h - \overline{x}_h) \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\overline{y}_h + (c_h - b_h d_h)(\overline{X}_h - \overline{x}_h) + b_h (\overline{Z}_h - \overline{z}_h) \right]$$

Que es un estimador de regresión lineal separado con 2 variables auxiliares, donde

$$b_{h1} = c_h - b_h d_h \qquad \text{y} \qquad b_{h2} = b_h$$

de forma que $\hat{\hat{Y}}_{Rrss} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\overline{y}_h + b_{h1} (\overline{X}_h - \overline{x}_h) + b_{h2} (\overline{Z}_h - \overline{z}_h) \right]$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\overline{y}_h + \left(\frac{\overline{y}_h}{\overline{x}_h} - b_h \frac{\overline{z}_h}{\overline{x}_h} \right) (\overline{X}_h - \overline{x}_h) + b_h (\overline{Z}_h - \overline{z}_h) \right]$$

$$= \hat{\hat{Y}}_{st} + \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\left(\frac{\overline{y}_h}{\overline{x}_h} - b_h \frac{\overline{z}_h}{\overline{x}_h} \right) (\overline{X}_h - \overline{x}_h) + b_h (\overline{Z}_h - \overline{z}_h) \right]$$

que no es un estimador insesgado.

Considerando b_h constante, y aplicando la aproximación de series de Taylor ya desarrolladas en Martín-Caro (2006 y 2010) donde $b_{h1} = \dfrac{\overline{Y}_h}{\overline{X}_h}$ y $b_{h2} = \dfrac{\overline{Z}_h}{\overline{X}_h}$, utilizando en el ECM los valores poblaciones y no los muestrales, entonces,

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{Rrss}) \approx \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + b_{h1}^2 S_{x_h}^2 + b_{h2}^2 S_{z_h}^2 - 2b_{h1} S_{xy_h} - 2b_{h2} S_{yz_h} + 2b_{h1} b_{h2} S_{xz_h} \right]$$

$$\approx \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + \left(\frac{\overline{Y}_h}{\overline{X}_h} - b_h \frac{\overline{Z}_h}{\overline{X}_h} \right)^2 S_{x_h}^2 + b_h^2 S_{z_h}^2 - 2\left(\frac{\overline{Y}_h}{\overline{X}_h} - b_h \frac{\overline{Z}_h}{\overline{X}_h} \right) S_{xy_h} - 2b_h S_{yz_h} + 2\left(\frac{\overline{Y}_h}{\overline{X}_h} - b_h \frac{\overline{Z}_h}{\overline{X}_h} \right) b_h S_{xz_h} \right]$$

Que es el ECM de un estimador de regresión lineal con dos variables auxiliares. Y su estimador,

$$E\hat{C}M(\hat{\hat{Y}}_{Rrss}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[s_{y_h}^2 + \hat{b}_{h1}^2 s_{x_h}^2 + \hat{b}_{h2}^2 s_{z_h}^2 - 2\hat{b}_{h1} s_{xy_h} - 2\hat{b}_{h2} s_{yz_h} + 2\hat{b}_{h1} \hat{b}_{h2} s_{xz_h} \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[s_{y_h}^2 + \left(\frac{\overline{y}_h}{\overline{x}_h} - \hat{b}_h \frac{\overline{z}_h}{\overline{x}_h} \right)^2 s_{x_h}^2 + b_h^2 s_{z_h}^2 - 2\left(\frac{\overline{y}_h}{\overline{x}_h} - \hat{b}_h \frac{\overline{z}_h}{\overline{x}_h} \right) s_{xy_h} - 2b_h s_{yz_h} + 2\left(\frac{\overline{y}_h}{\overline{x}_h} - \hat{b}_h \frac{\overline{z}_h}{\overline{x}_h} \right) b_h s_{xz_h} \right]$$

Con lo que se demuestra que el estimador del tipo Razón-Regresión separado-separado es un caso particular del estimador de regresión lineal separado con dos variables auxiliares.

5.2.1.4.- Estimador de Regresión-Razón Separado-Separado

El estimador de Regresión-Razón consiste en aplicar el estimador de razón a estimadores de regresión lineal, y el estimador de Regresión-Razón separado-separado en muestreo estratificado, aplica un tratamiento separado en cada estrato, tanto de las razones como de los coeficientes de regresión (Martín-Caro, 2010), esto es,

$$\hat{\hat{Y}}_{rRss} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left(\frac{\hat{\hat{Y}}_{rlh}}{\hat{\hat{Z}}_{rlh}} \overline{Z}_h \right) = \sum_{h=1}^{L} W_h \left(\frac{\overline{y}_h + b_h(\overline{X}_h - \overline{x}_h)}{\overline{z}_h + b_h(\overline{X}_h - \overline{x}_h)} \overline{Z}_h \right)$$

y con 2 coeficientes,

$$\hat{\hat{Y}}'_{rRss} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left(\frac{\hat{\hat{Y}}_{rlh}}{\hat{\hat{Z}}_{rlh}} \overline{Z}_h \right) = \sum_{h=1}^{L} W_h \left(\frac{\overline{y}_h + b_{h1}(\overline{X}_h - \overline{x}_h)}{\overline{z}_h + b_{h2}(\overline{X}_h - \overline{x}_h)} \overline{Z}_h \right)$$

Para el estimador del total se tiene,

$$\hat{Y}_{rRss} = \sum_{h=1}^{L} \frac{\hat{\hat{Y}}_{rlh}}{\hat{\hat{Z}}_{rlh}} Z_h = \sum_{h=1}^{L} \frac{\overline{y}_h + b_h(\overline{X}_h - \overline{x}_h)}{\overline{z}_h + b_h(\overline{X}_h - \overline{x}_h)} Z_h$$

y con 2 coeficientes,

$$\hat{Y}'_{rRss} = \sum_{h=1}^{L} \frac{\hat{\hat{Y}}_{rlh}}{\hat{\hat{Z}}_{rlh}} Z_h = \sum_{h=1}^{L} \frac{\overline{y}_h + b_{h1}(\overline{X}_h - \overline{x}_h)}{\overline{z}_h + b_{h2}(\overline{X}_h - \overline{x}_h)} Z_h$$

En el apartado 2.4.4. se demostró que ambos eran casos particulares del estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares en muestreo aleatorio simple, pero como aquí se seleccionan muestras aleatorias simples independientes en cada estrato, se aplica lo demostrado en cada estrato, y luego se consolida en todo el universo, y resulta,

Para el primer caso, el estimador puede escribirse como

$$\hat{\hat{Y}}_{rRss} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\hat{\hat{Y}}_{rlh} + \left(\frac{\hat{\hat{Y}}_{rlh}}{\hat{\hat{Z}}_{rlh}} \right) \left(\overline{Z}_h - \hat{\hat{Z}}_{rlh} \right) \right]$$

como se verá,

$$\hat{\hat{Y}}_{rRss} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\left(\overline{y}_h + b_h(\overline{X}_h - \overline{x}_h) \right) + \left(\frac{\overline{y}_h + b_h(\overline{X}_h - \overline{x}_h)}{\overline{z}_h + b_h(\overline{X}_h - \overline{x}_h)} \right) \left(\overline{Z}_h - \hat{\hat{Z}}_{rlh} \right) \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + \left(\frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) \left(\bar{Z}_h - \left(\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h) \right) \right) \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + \left(\frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) \bar{Z}_h - \left(\frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) \left(\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h) \right) \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \bar{Z}_h \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\frac{\hat{\bar{Y}}_{lrh}}{\hat{\bar{Z}}_{lrh}} \bar{Z}_h \right]$$

que es el estimador de Regresión-Razón con un valor de b_h. Pero nótese que

$$\hat{\bar{Y}}_{rRss} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + \left(\frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) \bar{Z}_h - \left(\frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) \left(\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h) \right) \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + \left(\frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) \bar{Z}_h - \left(\frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) \bar{z}_h - \left(\frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) \left(b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h) \right) \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + \left(1 - \left(\frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) \right) b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + \left(\frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) (\bar{Z}_h - \bar{z}_h) \right]$$

que es un estimador de regresión lineal separado con dos variables auxiliares (“*x*” y “*z*”), y los coeficientes son,

$$c_{h1} = b_h \left[1 - \left(\frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) \right] \quad , \quad c_{h2} = \frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}$$

Su error cuadrático medio y su estimador son,

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{rRss}) \approx \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + c_{h1}^2 S_{x_h}^2 + c_{h2}^2 S_{z_h}^2 - 2c_{h1} S_{xy_h} - 2c_{h2} S_{yz_h} + 2c_{h1} c_{h2} S_{xz_h} \right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{rRss}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right)\left[s_{y_h}^2 + \hat{c}_{h1}^2 s_{x_h}^2 + \hat{c}_{h2}^2 s_{z_h}^2 - 2\hat{c}_{h1} s_{xy_h} - 2\hat{c}_{h2} s_{yz_h} + 2\hat{c}_{h1}\hat{c}_{h2} s_{xz_h}\right]$$

para el estimador del total,

$$\hat{Y}_{rRss} = \sum_{h=1}^{L} N_h \left[\bar{y}_h + \left(b_h - b_h\left(\frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}\right)\right)(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + \left(\frac{\bar{y}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}\right)(\bar{Z}_h - \bar{z}_h)\right]$$

$$ECM(\hat{Y}_{rRss}) \approx \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right)\left[S_{y_h}^2 + c_{h1}^2 S_{x_h}^2 + c_{h2}^2 S_{z_h}^2 - 2c_{h1} S_{xy_h} - 2c_{h2} S_{yz_h} + 2c_{h1}c_{h2} S_{xz_h}\right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{rRss}) = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right)\left[s_{y_h}^2 + \hat{c}_{h1}^2 s_{x_h}^2 + \hat{c}_{h2}^2 s_{z_h}^2 - 2\hat{c}_{h1} s_{xy_h} - 2\hat{c}_{h2} s_{yz_h} + 2\hat{c}_{h1}\hat{c}_{h2} s_{xz_h}\right]$$

Para el segundo estimador, se puede reescribir como

$$\hat{\bar{Y}}'_{rRss} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\hat{\bar{Y}}_{rlh} + \left(\frac{\hat{\bar{Y}}_{rlh}}{\hat{\bar{Z}}_{rlh}}\right)\left(\bar{Z}_h - \hat{\bar{Z}}_{rlh}\right)\right]$$

ya que al desarrollarlo se verifica,

$$\hat{\bar{Y}}'_{rRss} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\left(\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right) + \left(\frac{\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}\right)\left(\bar{Z}_h - \hat{\bar{Z}}_{rlh}\right)\right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + \left(\frac{\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}\right)\left(\bar{Z}_h - \left(\bar{z}_h + b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right)\right)\right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + \left(\frac{\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}\right)\bar{Z}_h - \left(\frac{\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}\right)\left(\bar{z}_h + b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right)\right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\frac{\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \bar{Z}_h\right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\frac{\hat{\bar{Y}}_{lrh}}{\hat{\bar{Z}}_{lrh}} \bar{Z}_h\right]$$

que es el estimador de Regresión-Razón con dos valores diferentes de b_h. Pero nótese que

$$\hat{\bar{Y}}'_{rRss} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + \left(\frac{\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) \bar{Z}_h - \left(\frac{\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) \left(\bar{z}_h + b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) \right) \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + \left(\frac{\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) \bar{Z}_h - \left(\frac{\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) \bar{z}_h - \left(\frac{\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) \left(b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) \right) \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + \left(b_{h1} - b_{h2} \left(\frac{\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) \right) (\bar{X}_h - \bar{x}_h) + \left(\frac{\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) (\bar{Z}_h - \bar{z}_h) \right]$$

que es un estimador de regresión lineal separado con dos variables auxiliares (“x” y “z”), y los coeficientes son,

$$c_{h1} = b_{h1} - b_{h2} \left(\frac{\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) \quad , \quad c_{h2} = \frac{\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}$$

y el error cuadrático medio es y su estimador son,

$$ECM(\hat{\bar{Y}}'_{rRss}) \approx \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + c_{h1}^2 S_{x_h}^2 + c_{h2}^2 S_{z_h}^2 - 2c_{h1} S_{xy_h} - 2c_{h2} S_{yz_h} + 2c_{h1}c_{h2} S_{xz_h} \right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}'_{rRss}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[s_{y_h}^2 + \hat{c}_{h1}^2 s_{x_h}^2 + \hat{c}_{h2}^2 s_{z_h}^2 - 2\hat{c}_{h1} s_{xy_h} - 2\hat{c}_{h2} s_{yz_h} + 2\hat{c}_{h1}\hat{c}_{h2} s_{xz_h} \right]$$

para el estimador del total,

$$\hat{Y}'_{rRss} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + \left(b_{h1} - b_{h2} \left(\frac{\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) \right) (\bar{X}_h - \bar{x}_h) + \left(\frac{\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)}{\bar{z}_h + b_{h2}(\bar{X}_h - \bar{x}_h)} \right) (\bar{Z}_h - \bar{z}_h) \right]$$

$$ECM(\hat{Y}'_{rRss}) \approx \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + c_{h1}^2 S_{x_h}^2 + c_{h2}^2 S_{z_h}^2 - 2c_{h1} S_{xy_h} - 2c_{h2} S_{yz_h} + 2c_{h1}c_{h2} S_{xz_h} \right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}'_{rRss}) = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[s_{y_h}^2 + \hat{c}_{h1}^2 s_{x_h}^2 + \hat{c}_{h2}^2 s_{z_h}^2 - 2\hat{c}_{h1} s_{xy_h} - 2\hat{c}_{h2} s_{yz_h} + 2\hat{c}_{h1}\hat{c}_{h2} s_{xz_h} \right]$$

5.2.1.5.- Estimador de Varianza Mínima para b_1 y b_2 constantes

En este caso, se debe minimizar la varianza del estimador, para b_{h1} *y* b_{h2} constantes, para todo h, h=1,2,…;L. Si se logra minimizar la varianza del estimador en cada estrato ($V(\hat{\bar{Y}}_{lrs})$), entonces la varianza global ($V(\hat{\bar{Y}}_{lrs})$) también será mínima, y esto se cumple cuando,

$$b_{h10} = \frac{S_{xy_h} S_{z_h}^2 - S_{yz_h} S_{xz_h}}{S_{x_h}^2 S_{z_h}^2 - \left(S_{xz_h}\right)^2} \quad , \quad b_{h20} = \frac{S_{yz_h} S_{x_h}^2 - S_{xy_h} S_{xz_h}}{S_{z_h}^2 S_{x_h}^2 - \left(S_{xz_h}\right)^2} \qquad \forall h, \ h = 1,2,...L$$

Que son los valores de b_1 y b_2 desarrollados en el apartado (2.4.5.) para muestreo aleatorio simple, que es el caso en cada estrato.

5.2.2.- Estimadores de Regresión Lineal Combinado con 2 variables auxiliares

Ahora se tiene que, aun cuando las muestras de cada estrato son independientes y aleatorias simples (tal como se asumió en un principio), los coeficientes son iguales para todos los estratos, porque son combinados, y se identificarán como b_{c1} y b_{c2}.

Considerando b_{c1} y b_{c2} constantes, los estimadores del promedio y del total son,

$$\hat{\bar{Y}}_{lrc} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_{c1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + b_{c2}(\bar{Z}_h - \bar{z}_h) \right] = \hat{\bar{Y}}_{st} + \sum_{h=1}^{L} W_h \left[b_{c1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + b_{c2}(\bar{Z}_h - \bar{z}_h) \right]$$

$$\hat{Y}_{lrc} = \sum_{h=1}^{L} \left[\hat{Y}_h + b_{c1}(X_h - \hat{X}_h) + b_{c2}(Z_h - \hat{Z}_h) \right] = \hat{Y}_{st} + \sum_{h=1}^{L} \left[b_{c1}(X_h - \hat{X}_h) + b_{c2}(Z_h - \hat{Z}_h) \right]$$

que son estimadores insesgados. Los errores cuadráticos medio y sus estimadores son

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + b_{c1}^2 S_{x_h}^2 + b_{c2}^2 S_{z_h}^2 - 2b_{c1} S_{xy_h} - 2b_{c2} S_{yz_h} + 2b_{c1} b_{c2} S_{xz_h} \right]$$

$$ECM(\hat{Y}_{lrc}) = V(\hat{Y}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + b_{c1}^2 S_{x_h}^2 + b_{c2}^2 S_{z_h}^2 - 2b_{c1} S_{xy_h} - 2b_{c2} S_{yz_h} + 2b_{c1} b_{c2} S_{xz_h} \right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[s_{y_h}^2 + \hat{b}_{c1}^2 s_{x_h}^2 + \hat{b}_{c2}^2 s_{z_h}^2 - 2\hat{b}_{c1} s_{xy_h} - 2\hat{b}_{c2} s_{yz_h} + 2\hat{b}_{c1} \hat{b}_{c2} s_{xz_h} \right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[s_{y_h}^2 + \hat{b}_{c1}^2 s_{x_h}^2 + \hat{b}_{c2}^2 s_{z_h}^2 - 2\hat{b}_{c1} s_{xy_h} - 2\hat{b}_{c2} s_{yz_h} + 2\hat{b}_{c1} \hat{b}_{c2} s_{xz_h} \right]$$

5.2.2.1.- Estimador de Regresión Lineal Simple

Cuando $b_{c2}=0$, el estimador de regresión con 2 variables auxiliares se transforma en el estimador de regresión lineal combinado, resultando,

$$\hat{\bar{Y}}_{lrc} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_{c1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + b_{c2}(\bar{Z}_h - \bar{z}_h) \right] = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_{c1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + 0(\bar{Z}_h - \bar{z}_h) \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_{c1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) \right]$$

que tiene la misma estructura que el estimador de regresión lineal combinado con 1 variable auxiliar.

Su esperanza es,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{Y}_h - COV(b_{c1}, \bar{x}_h) - COV(b_{c2}, \bar{z}_h) \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h - \sum_{h=1}^{L} W_h COV(b_{c1}, \bar{x}_h) - \sum_{h=1}^{L} W_h COV(b_{c2}, \bar{z}_h)$$

Como b_{c2}=0,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h - \sum_{h=1}^{L} W_h COV(b_{c1}, \bar{x}_h) = \bar{Y} - \sum_{h=1}^{L} W_h COV(b_{h1}, \bar{x}_h)$$

como b_{c1} es constante $COV(b_{c1}, \bar{x}) = 0$, entonces,

$$E(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) \qquad = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h = \bar{Y}$$

que es un estimador insesgado, y su error cuadrático medio es,

$$EMC(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + b_{c1}^2 S_{x_h}^2 + 0 S_{z_h}^2 - 2 b_{c1} S_{xy_h} - 20 S_{yz_h} + 2 b_{c1} 0 S_{xz_h} \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + b_{c1}^2 S_{x_h}^2 - 2 b_{c1} S_{xy_h} \right]$$

y su estimador,

$$E\hat{M}C(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \hat{V}(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[s_{y_h}^2 + \hat{b}_{c1}^2 s_{x_h}^2 - 2 \hat{b}_{c1} s_{xy_h} \right]$$

Para el estimador del total, si b_{c1} es constante y b_{c2}=0,

$$\hat{Y}_{lrc} = \sum_{h=1}^{L} N_h \left[\bar{y}_h + b_{c1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + b_{c2}(\bar{Z}_h - \bar{z}_h) \right] = \sum_{h=1}^{L} N_h \left[\bar{y}_h + b_{c1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + 0(\bar{Z}_h - \bar{z}_h) \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} N_h \left[\bar{y}_h + b_{c1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) \right] = \sum_{h=1}^{L} \hat{Y}_h + \sum_{h=1}^{L} b_{c1}(X_h - \hat{X}_h) = \hat{Y}_{st} + \sum_{h=1}^{L} b_{c1}(X_h - \hat{X}_h)$$

que es un estimador insesgado, y su error cuadrático medio es,

$$EMC(\hat{Y}_{lrc}) = V(\hat{Y}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + b_{c1}^2 S_{x_h}^2 + 0 S_{z_h}^2 - 2 b_{c1} S_{xy_h} - 20 S_{yz_h} + 2 b_{c1} 0 S_{xz_h} \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + b_{c1}^2 S_{x_h}^2 - 2 b_{c1} S_{xy_h} \right]$$

Que se corresponde con el estimador de regresión lineal simple combinado. Por lo tanto, se demuestra que el estimador lineal simple combinado es un caso particular del estimador de regresión lineal combinado con 2 variables auxiliares, e incluye todos sus casos especiales, que son,

Estimador Directo:	$b_{c1} = 0$	$b_{c2} = 0$	$\forall\ h, h=1, 2, \ldots, L$
Estimador de Razón:	$b_{c1} = \dfrac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}}$	$b_{c2} = 0$	
Estimador por Diferencia:	$b_{c1} = 1$	$b_{c2} = 0$	
Estimador de Varianza mínima para b_c constante:	$b_{c1} = \dfrac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{xy_h}}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{1-f_h}{n_h} S_{x_h}^2}$	$b_{c2} = 0$	

5.2.2.2.- Estimador por Diferencias

Si $b_{c1}= b_{c2}=1$, se denomina el estimador por diferencias, que es un estimador insesgado.

$$\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lrc} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + (\bar{X}_h - \bar{x}_h) + (\bar{Z}_h - \bar{z}_h)\right] = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_h + \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{X}_h - \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{x}_h + \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Z}_h - \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{z}_h$$

$$= \hat{\hat{\bar{Y}}}_{st} + \left(\bar{X} - \hat{\hat{\bar{X}}}_{st}\right) + \left(\bar{Z} - \hat{\hat{\bar{Z}}}_{st}\right)$$

$$E(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lrc}) = \bar{Y}$$

$$B(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lrc}) = 0$$

$$ECM(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lrc}) = V(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(N_h - n_h)}{N_h n_h}\left[S_{y_h}^2 + S_{x_h}^2 - 2S_{xy_h}\right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lrc}) = \hat{V}(\hat{\hat{\bar{Y}}}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(N_h - n_h)}{N_h n_h}\left[s_{y_h}^2 + s_{x_h}^2 - 2s_{xy_h}\right]$$

5.2.2.3.- Estimador de Razón-Regresión Combinado-Combinado

En Martín-Caro (2010), dentro de los estimadores de Razón-Regresión Combinados, se establece el Estimador de Razón-Regresión Separado-Combinado, el Estimador de Razón-Regresión Combinado-Separado y el Estimador de Razón-Regresión Combinado-Combinado, y se determina que el segundo es exactamente igual al tercero. Aquí se verificará que el tercero de ellos es un caso particular del estimador de regresión lineal combinado con 2 variables auxiliares.

Los estimadores del promedio y del total son,

$$\hat{\hat{\bar{Y}}}_{Rrcc} = \hat{\hat{\bar{Y}}}_{Rc} + b_c(\bar{Z} - \hat{\hat{\bar{Z}}}_{Rc}) \qquad , \qquad \hat{Y}_{Rrcc} = \hat{Y}_{Rc} + b_c(Z - \hat{Z}_{Rc})$$

que son estimadores sesgados. Siendo b_c constante, sus respectivos errores cuadráticos medio son,

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{Rrcc}) \approx \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(N_h - n_h)}{N_h\ n_h}\Big[\Big(S_{y_h}^2 + R_{yc}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{yc} S_{xy_h}\Big) + b_c^2 \Big(S_{z_h}^2 + R_{zc}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{zc} S_{xz_h}\Big) -$$

$$-\,2b_c\Big(S_{yz_h} - R_{zc}S_{xy_h} - R_{yc}S_{xz_h} + R_{yc}R_{yc}S_{x_h}^2\Big)\Big]$$

$$ECM(\hat{Y}_{Rrcc}) \approx \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{(N_h - n_h)}{N_h\ n_h}\Big[\Big(S_{y_h}^2 + R_{yc}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{yc} S_{xy_h}\Big) + b_c^2 \Big(S_{z_h}^2 + R_{zc}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{zc} S_{xz_h}\Big) -$$

$$-\,2b_c\Big(S_{yz_h} - R_{zc}S_{xy_h} - R_{yc}S_{xz_h} + R_{yc}R_{yc}S_{x_h}^2\Big)\Big]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\hat{Y}}_{Rrcc}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(N_h - n_h)}{N_h\ n_h}\Big[\Big(s_{y_h}^2 + \hat{R}_{yc}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{R}_{yc} s_{xy_h}\Big) + \hat{b}_c^2 \Big(s_{z_h}^2 + \hat{R}_{zc}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{R}_{zc} s_{xz_h}\Big) -$$

$$-\,2\hat{b}_c\Big(s_{yz_h} - \hat{R}_{zc}s_{xy_h} - \hat{R}_{yc}s_{xz_h} + \hat{R}_{yc}\hat{R}_{yc}s_{x_h}^2\Big)\Big]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\hat{Y}}_{Rrcc}) = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \frac{(N_h - n_h)}{N_h\ n_h}\Big[\Big(s_{y_h}^2 + \hat{R}_{yc}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{R}_{yc} s_{xy_h}\Big) + \hat{b}_c^2 \Big(s_{z_h}^2 + \hat{R}_{zc}^2 s_{x_h}^2 - 2\hat{R}_{zc} s_{xz_h}\Big) -$$

$$-\,2\hat{b}_c\Big(s_{yz_h} - \hat{R}_{zc}s_{xy_h} - \hat{R}_{yc}s_{xz_h} + \hat{R}_{yc}\hat{R}_{yc}s_{x_h}^2\Big)\Big]$$

Donde $R_{yc} = \dfrac{\overline{Y}}{\overline{\overline{X}}}$, $R_{zc} = \dfrac{\overline{Z}}{\overline{\overline{X}}}$, $\hat{R}_{yc} = \dfrac{\hat{\hat{Y}}_{st}}{\hat{\hat{X}}_{st}}$, $\hat{R}_{zc} = \dfrac{\hat{\hat{Z}}_{st}}{\hat{\hat{X}}_{st}}$.

Pero como $\hat{\hat{Y}}_{Rc}$ y $\hat{\hat{Z}}_{Rc}$, que son estimadores de razón, pueden escribirse como,

$\hat{\hat{Y}}_{Rc} = \hat{\hat{Y}}_{st} + c_c(\overline{X} - \hat{\hat{X}}_{st})$, $\hat{\hat{Z}}_{Rc} = \hat{\hat{Z}}_{st} + d_c(\overline{X} - \hat{\hat{X}}_{st})$ donde $c_c = \dfrac{\hat{\hat{Y}}_{st}}{\hat{\hat{X}}_{st}}$ y $d_c = \dfrac{\hat{\hat{Z}}_{st}}{\hat{\hat{X}}_{st}}$

ya que,

$$\hat{\hat{Y}}_{Rc} = \hat{\hat{Y}}_{st} + \frac{\hat{\hat{Y}}_{st}}{\hat{\hat{X}}_{st}}(\overline{X} - \hat{\hat{X}}_{st}) = \hat{\hat{Y}}_{st} + \frac{\hat{\hat{Y}}_{st}}{\hat{\hat{X}}_{st}}\overline{X} - \frac{\hat{\hat{Y}}_{st}}{\hat{\hat{X}}_{st}}\hat{\hat{X}}_{st} = \frac{\hat{\hat{Y}}_{st}}{\hat{\hat{X}}_{st}}\overline{X}$$

También ocurre con el error cuadrático medio, tal como se demuestra en Martín-Caro (2010, p. 153), pero llevándolo al estimador de razón combinado. Análogamente pasa con $\hat{\bar{Z}}_{Rc}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\hat{\bar{Y}}_{Rrcc} &= \hat{\bar{Y}}_{st} + c_c(\bar{X} - \hat{\bar{X}}_{st}) + b_c(\bar{Z} - (\hat{\bar{Z}}_{st} + d_c(\bar{X} - \hat{\bar{X}}_{st}))) \\
&= \hat{\bar{Y}}_{st} + c_c(\bar{X} - \hat{\bar{X}}_{st}) + b_c(\bar{Z} - \hat{\bar{Z}}_{st} - d_c(\bar{X} - \hat{\bar{X}}_{st})) \\
&= \hat{\bar{Y}}_{st} + (c_c - b_c d_c)(\bar{X} - \hat{\bar{X}}_{st}) + b_c(\bar{Z} - \hat{\bar{Z}}_{st})
\end{aligned}$$

Que es un estimador de regresión lineal con dos variables auxiliares. Los coeficientes son,

$$b_{c1} = c_c - b_c d_c = \frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} - b_c \frac{\hat{\bar{Z}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \qquad , \qquad b_{c2} = b_c$$

Entonces, su error cuadrático medio es,

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{Rrcc}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + b_{c1}^2 S_{x_h}^2 + b_{c2}^2 S_{z_h}^2 - 2b_{c1} S_{xy_h} - 2b_{c2} S_{yz_h} + 2b_{c1} b_{c2} S_{xz_h} \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + \left(\frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} - b_c \frac{\hat{\bar{Z}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \right)^2 S_{x_h}^2 + b_c^2 S_{z_h}^2 - \right.$$

$$\left. - 2\left(\frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} - b_c \frac{\hat{\bar{Z}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \right) S_{xy_h} - 2b_c S_{yz_h} + 2\left(\frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} - b_c \frac{\hat{\bar{Z}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \right) b_c S_{xz_h} \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + \left(\frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \right)^2 S_{x_h}^2 + b_c^2 \left(\frac{\hat{\bar{Z}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \right)^2 S_{x_h}^2 - 2b_c \left(\frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \right) \left(\frac{\hat{\bar{Z}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \right) S_{x_h}^2 + b_c^2 S_{z_h}^2 - \right.$$

$$\left. - 2\left(\frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \right) S_{xy_h} + 2b_c \left(\frac{\hat{\bar{Z}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \right) S_{xy_h} - 2b_c S_{yz_h} + 2b_c \left(\frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \right) S_{xz_h} - 2b_c^2 \left(\frac{\hat{\bar{Z}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}} \right) S_{xz_h} \right]$$

Reordenando términos,

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right)\left[\left(S_{y_h}^2 + \left(\frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}}\right)^2 S_{x_h}^2 - 2\left(\frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}}\right) S_{xy_h}\right) + b_c^2\left(S_{z_h}^2 + \left(\frac{\hat{\bar{Z}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}}\right)^2 S_{x_h}^2 - 2\left(\frac{\hat{\bar{Z}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}}\right) S_{xz_h}\right)\right.$$

$$\left. - 2b_c\left(S_{yz_h} - \left(\frac{\hat{\bar{Z}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}}\right) S_{xy_h} - \left(\frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}}\right) S_{xz_h} + \left(\frac{\hat{\bar{Y}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}}\right)\left(\frac{\hat{\bar{Z}}_{st}}{\hat{\bar{X}}_{st}}\right) S_{x_h}^2\right)\right]$$

Aplicando la aproximación de series de Taylor ya desarrolladas en Martín-Caro (2006 y 2010) y utilizando en el ECM los valores poblaciones y no los muestrales, entonces,

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{Rrcc}) \approx \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \frac{(N_h - n_h)}{N_h \; n_h}\left[\left(S_{y_h}^2 + R_{yc}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{yc} S_{xy_h}\right) + b_c^2\left(S_{z_h}^2 + R_{zc}^2 S_{x_h}^2 - 2R_{zc} S_{xz_h}\right) - \right.$$

$$\left. - 2b_c\left(S_{yz_h} - R_{zc} S_{xy_h} - R_{yc} S_{xz_h} + R_{yc} R_{yc} S_{x_h}^2\right)\right]$$

Que es el error cuadrático medio del estimador del estimador de Razón-Regresión Combinado-Combinado, es decir, que se demuestra que dicho estimador es un caso particular del Estimador de Regresión Lineal Combinado con 2 variables auxiliares.

Análogamente ocurre con el estimador del total.

5.2.2.4.- Estimador de Regresión-Razón Combinado-Combinado

Igual que con los estimadores de Razón-Regresión, en Martín-Caro (2010) se desarrollan los estimadores de Regresión-Razón Combinados, contemplando tres casos, el Estimador de Regresión-Razón Separado-Combinado, el Estimador de Regresión-Razón Combinado-Separado y el Estimador de Regresión-Razón Combinado-Combinado, pero el segundo caso coincide con el tercero, igual que ocurre con los estimadores de Razón-Regresión. En este apartado se verificará que el Estimador de

Regresión-Razón Combinado-Combinado es un caso particular del estimador de regresión lineal combinado con 2 variables auxiliares.

Tal como se ha presentado en otros capítulos, en el estimador de regresión-razón se tienen dos casos, con un coeficiente único ($\hat{\hat{Y}}_{rRcc}$) y con dos coeficientes ($\hat{\hat{Y}}'_{rRcc}$), que para el estimador del promedio, respectivamente son,

$$\hat{\hat{Y}}_{rRcc} = \left(\frac{\hat{\hat{Y}}_{rlc}}{\hat{\hat{Z}}_{rlc}} \right) \overline{Z} = \left[\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h \left(\overline{y}_h + b_c (\overline{X}_h - \overline{x}_h) \right)}{\sum_{h=1}^{L} W_h \left(\overline{z}_h + b_c (\overline{X}_h - \overline{x}_h) \right)} \right] \overline{Z} \;\; , \;\; \hat{\hat{Y}}'_{rRcc} = \left(\frac{\hat{\hat{Y}}_{rlc}}{\hat{\hat{Z}}_{rlc}} \right) \overline{Z} = \left[\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h \left(\overline{y}_h + b_{cy} (\overline{X}_h - \overline{x}_h) \right)}{\sum_{h=1}^{L} W_h \left(\overline{z}_h + b_{cz} (\overline{X}_h - \overline{x}_h) \right)} \right] \overline{Z}$$

Y para el estimador del total,

$$\hat{Y}_{rRcc} = \left(\frac{\hat{\hat{Y}}_{rlc}}{\hat{\hat{Z}}_{rlc}} \right) \overline{Z} = \left[\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h \left(\overline{y}_h + b_c (\overline{X}_h - \overline{x}_h) \right)}{\sum_{h=1}^{L} W_h \left(\overline{z}_h + b_c (\overline{X}_h - \overline{x}_h) \right)} \right] \overline{Z} \;\; , \;\; \hat{\hat{Y}}'_{rRcc} = \left(\frac{\hat{\hat{Y}}_{rlc}}{\hat{\hat{Z}}_{rlc}} \right) \overline{Z} = \left[\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h \left(\overline{y}_h + b_{cy} (\overline{X}_h - \overline{x}_h) \right)}{\sum_{h=1}^{L} W_h \left(\overline{z}_h + b_{cz} (\overline{X}_h - \overline{x}_h) \right)} \right] \overline{Z}$$

El primer estimador puede escribirse como $\hat{\hat{Y}}_{rRcc} = \hat{\hat{Y}}_{rlc} + \left(\frac{\hat{\hat{Y}}_{rlc}}{\hat{\hat{Z}}_{rlc}} \right) \left(\overline{Z} - \hat{\hat{Z}}_{rlc} \right)$,

Véase,

$$\hat{\hat{Y}}_{rRcc} = \hat{\hat{Y}}_{rlc} + \left(\frac{\hat{\hat{Y}}_{rlc}}{\hat{\hat{Z}}_{rlc}} \right) \overline{Z} - \left(\frac{\hat{\hat{Y}}_{rlc}}{\hat{\hat{Z}}_{rlc}} \right) \hat{\hat{Z}}_{rlc} = \hat{\hat{Y}}_{rlc} + \left(\frac{\hat{\hat{Y}}_{rlc}}{\hat{\hat{Z}}_{rlc}} \right) \overline{Z} - \hat{\hat{Y}}_{rlc} = \left(\frac{\hat{\hat{Y}}_{rlc}}{\hat{\hat{Z}}_{rlc}} \right) \overline{Z}$$

Pero,

$$\hat{\bar{Y}}_{rRcc} = \hat{\bar{Y}}_{rlc} + \left(\frac{\hat{\bar{Y}}_{rlc}}{\hat{\bar{Z}}_{rlc}}\right)\left(\bar{Z} - \hat{\bar{Z}}_{rlc}\right)$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h\left(\bar{y}_h + b_c(\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right) + \left[\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\bar{y}_h + b_c(\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right)}{\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\bar{z}_h + b_c(\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right)}\right]\left(\bar{Z} - \sum_{h=1}^{L} W_h\left(\bar{z}_h + b_c(\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right)\right)$$

$$= \hat{\bar{Y}}_{st} + b_c\left(\bar{X} - \hat{\bar{X}}_{st}\right) + \left[\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\bar{y}_h + b_c(\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right)}{\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\bar{z}_h + b_c(\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right)}\right]\left(\bar{Z} - \hat{\bar{Z}}_{st} - b_c\left(\bar{X} - \hat{\bar{X}}_{st}\right)\right)$$

$$= \hat{\bar{Y}}_{st} + b_c\left[1 - \left[\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\bar{y}_h + b_c(\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right)}{\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\bar{z}_h + b_c(\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right)}\right]\right]\left(\bar{X} - \hat{\bar{X}}_{st}\right) + \left[\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\bar{y}_h + b_c(\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right)}{\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\bar{z}_h + b_c(\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right)}\right]\left(\bar{Z} - \hat{\bar{Z}}_{st}\right)$$

Que es un estimador lineal con 2 variables auxiliares, cuyos coeficientes son,

$$d_{c1} = b_c\left[1 - \left[\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\bar{y}_h + b_c(\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right)}{\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\bar{z}_h + b_c(\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right)}\right]\right] \quad , \quad d_{c2} = \left[\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\bar{y}_h + b_c(\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right)}{\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\bar{z}_h + b_c(\bar{X}_h - \bar{x}_h)\right)}\right]$$

Por lo tanto, su error cuadrático medio y su respectivo estimador son,

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{rRcc}) \approx \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right)\left[S_{y_h}^2 + d_{c1}^2 S_{x_h}^2 + d_{c2}^2 S_{z_h}^2 - 2d_{c1}S_{xy_h} - 2d_{c2}S_{yz_h} + 2d_{c1}d_{c2}S_{xz_h}\right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{rRss}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right)\left[s_{y_h}^2 + \hat{d}_{c1}^2 s_{x_h}^2 + \hat{d}_{c2}^2 s_{z_h}^2 - 2\hat{d}_{c1}s_{xy_h} - 2\hat{d}_{c2}s_{yz_h} + 2\hat{d}_{c1}\hat{d}_{c2}s_{xz_h}\right]$$

Para el estimador del total,

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{rRcc}) \approx \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + d_{c1}^2 S_{x_h}^2 + d_{c2}^2 S_{z_h}^2 - 2d_{c1} S_{xy_h} - 2d_{c2} S_{yz_h} + 2d_{c1} d_{c2} S_{xz_h} \right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\hat{Y}}_{rRcc}) = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[s_{y_h}^2 + \hat{d}_{c1}^2 s_{x_h}^2 + \hat{d}_{c2}^2 s_{z_h}^2 - 2\hat{d}_{c1} s_{xy_h} - 2\hat{d}_{c2} s_{yz_h} + 2\hat{d}_{c1} \hat{d}_{c2} s_{xz_h} \right]$$

De manera que el Estimador de Regresión-Razón Combinado-Combinado es un caso particular del Estimador de Regresión Lineal Combinado con 2 variables auxiliares.

5.2.2.5.- Estimador de Varianza Mínima para b_1 y b_2 constantes

En este caso, se debe minimizar la varianza del estimador, para b_{c1} *y* b_{c2} constantes. Para ello se debe minimizar la varianza del estimador, derivando parcialmente e igualando a cero.

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lrs}) = V(\hat{\hat{Y}}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + b_{c1}^2 S_{x_h}^2 + b_{c2}^2 S_{z_h}^2 - 2b_{c1} S_{xy_h} - 2b_{c2} S_{yz_h} + 2b_{c1} b_{c2} S_{xz_h} \right]$$

$$\frac{\partial V(\hat{\hat{Y}}_{lrs})}{\partial b_{c1}} = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[2b_{c1} S_{x_h}^2 - 2S_{xy_h} + 2b_{c2} S_{xz_h} \right] = 0 \qquad (45)$$

$$\frac{\partial V(\hat{\hat{Y}}_{lrs})}{\partial b_{c2}} = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[2b_{c2} S_{z_h}^2 - 2S_{yz_h} + 2b_{c1} S_{xz_h} \right] = 0 \qquad (46)$$

De (45), $2\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[b_{c1} S_{x_h}^2 - S_{xy_h} + b_{c2} S_{xz_h} \right] = 0$

$$b_{c1} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) S_{x_h}^2 - \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) S_{xy_h} + b_{c2} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) S_{xz_h} = 0$$

$$b_{c1} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) S_{x_h}^2 = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) S_{xy_h} - b_{c2} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) S_{xz_h}$$

$$b_{c1} = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xy_h} - b_{c2} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{x_h}^2}$$

De (46), $\quad 2\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right)\left[b_{c2} S_{z_h}^2 - S_{yz_h} + b_{c1} S_{xz_h}\right] = 0$

$$b_{c2} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2 - \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{yz_h} + b_{c1} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h} = 0$$

$$b_{c2} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2 = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{yz_h} - b_{c1} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}$$

$$b_{c2} = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{yz_h} - b_{c1} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2}$$

Sustituyendo b_{c2} en b_{c1},

$$b_{c1} = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xy_h} - \left[\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{yz_h} - b_{c1} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2}\right] \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{x_h}^2}$$

$$= \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xy_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2\right)}{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2\right)} -$$

$$- \frac{\left[\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{yz_h} - b_{c1} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}\right] \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}}{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2\right)}$$

$$=\frac{\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{xy_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{z_h}^2\right)-\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{yz_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{xz_h}\right)}{\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{z_h}^2\right)}+$$

$$+\frac{b_{c1}\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{xz_h}\right)^2}{\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{z_h}^2\right)}$$

Despejando b_{c1},

$$b_{c1}\left[1-\frac{\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{xz_h}\right)^2}{\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{z_h}^2\right)}\right]=$$

$$=\frac{\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{xy_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{z_h}^2\right)-\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{yz_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{xz_h}\right)}{\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{z_h}^2\right)}$$

$$b_{c1}\left[\frac{\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{z_h}^2\right)-\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{xz_h}\right)^2}{\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{z_h}^2\right)}\right]=$$

$$=\frac{\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{xy_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{z_h}^2\right)-\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{yz_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{xz_h}\right)}{\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{z_h}^2\right)}$$

Entonces,

$$b_{c1}=\frac{\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{xy_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{z_h}^2\right)-\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{yz_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{xz_h}\right)}{\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{z_h}^2\right)-\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{xz_h}\right)^2}$$

Sustituyendo b_{c1} en b_{c2},

$$b_{c2}=\frac{\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{yz_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{x_h}^2\right)-\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{xy_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{xz_h}\right)}{\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{z_h}^2\right)-\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{xz_h}\right)^2}$$

Ahora se debe verificar que en dichos valores hay un mínimo. Se halla la matriz hessiana y se verifica si los menores principales son mayores que cero.

$$H(V(\hat{\bar{Y}}_{lr}))=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2V(\hat{\bar{Y}}_{lrc})}{\partial b_1^2} & \frac{\partial^2V(\hat{\bar{Y}}_{lrc})}{\partial b_1b_2}\\ \frac{\partial^2V(\hat{\bar{Y}}_{lrc})}{\partial b_2b_1} & \frac{\partial^2V(\hat{\bar{Y}}_{lrc})}{\partial b_2^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{x_h}^2 & 2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{xz_h}\\ 2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{xz_h} & 2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{z_h}^2\end{bmatrix}$$

$$H_1(V(\hat{\bar{Y}}_{lr}))=2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{x_h}^2\ \geq 0\,,$$

y será estrictamente mayor que cero si $n_h<N_h\ \wedge\ S_{x_h}^2>0$, para todo h, h=1, 2, …, L.

Para el menor principal de orden 2,

$$H_2(V(\hat{\bar{Y}}_{lr})) = \begin{vmatrix} 2\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{x_h}^2 & 2\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h} \\ 2\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h} & 2\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2^2 \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2\right) - 2^2 \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}\right)^2$$

$$= 2^2 \left[\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2\right) - \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}\right)^2\right]$$

que será mayor que cero si

$$\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2\right) - \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}\right) > 0$$

es decir, $\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2\right) > \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}\right)$

Luego, si $\left.\begin{matrix} n_h < N_h \\ S_{x_h}^2 > 0 \end{matrix}\right\} \forall h, \; h = 1,2,\ldots,L$

$$\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2\right) > \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}\right)$$

entonces,

$$b_{c01} = \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xy_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2\right) - \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{yz_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}\right)}{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2\right) - \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}\right)^2}$$

$$b_{c02} = \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{yz_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{x_h}^2\right) - \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xy_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}\right)}{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2\right) - \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}\right)^2}$$

son los valores de b_{c1} y b_{c2} que minimizan $V(\hat{\bar{Y}}_{lrs})$, y sus estimadores son,

$$\hat{b}_{c01} = \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) s_{xy_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) s_{z_h}^2\right) - \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) s_{yz_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) s_{xz_h}\right)}{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) s_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) s_{z_h}^2\right) - \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) s_{xz_h}\right)^2}$$

$$\hat{b}_{c02} = \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) s_{yz_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) s_{x_h}^2\right) - \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) s_{xy_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) s_{xz_h}\right)}{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) s_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) s_{z_h}^2\right) - \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) s_{xz_h}\right)^2}$$

Cabe destacar que estos mismos valores, bajo las mismas condiciones, minimizan $V(\hat{Y}_{lrs})$.

5.3.- Estimadores de Regresión Lineal con 3 variables auxiliares en Muestreo Estratificado

Tal como ocurre con 1 y 2 variables auxiliares, con 3 variables auxiliares se tienen los mismos dos planteamientos, el estimador de regresión lineal separado y el estimador de regresión lineal combinado, en el primero tanto b_1 , b_2 y b_3 se trabajan de forma separada para cada estrato, y en el forma combinada o global para todo el universo.

5.3.1.- Estimadores de Regresión Lineal Separado con 3 variables auxiliares

Los estimadores de Regresión Lineal Separado con 3 variables auxiliares, para el promedio y el total, son,

$$\hat{\bar{Y}}_{lrs} = \sum_{h=1}^{L} W_h \hat{\bar{Y}}_{lrh} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + b_{h2}(\bar{Z}_h - \bar{z}_h) + b_{h3}(\bar{T}_h - \bar{t}_h)\right]$$

$$= \hat{\bar{Y}}_{st} + \sum_{h=1}^{L} W_h \left[b_{h1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + b_{h2}(\bar{Z}_h - \bar{z}_h) + b_{h3}(\bar{T}_h - \bar{t}_h)\right]$$

$$\hat{Y}_{lrs} = \sum_{h=1}^{L} \hat{Y}_{lrh} = \sum_{h=1}^{L} \left[\hat{Y}_h + b_{h1}(X_h - \hat{X}_h) + b_{h2}(Z_h - \hat{Z}_h) + b_{h3}(T_h - \hat{T}_h)\right]$$

$$= \hat{Y}_{st} + \sum_{h=1}^{L} \left[b_{h1}(X_h - \hat{X}_h) + b_{h2}(Z_h - \hat{Z}_h) + b_{h3}(T_h - \hat{T}_h)\right]$$

Si b_{h1}, b_{h2} y b_{h3} son constantes para todo h, h=1, 2, …, L, son estimadores insesgados, y sus errores cuadráticos medio son,

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lrh})$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right)\left[S_{y_h}^2 + b_{h1}^2 S_{x_h}^2 + b_{h2}^2 S_{z_h}^2 + b_{h3}^2 S_{t_h}^2 - 2b_{h1}S_{xy_h} - 2b_{h2}S_{yz_h} - 2b_{h3}S_{yt_h} + \right.$$

$$\left. + 2b_{h1}b_{h2}S_{xz_h} + 2b_{h1}b_{h3}S_{xt_h} + 2b_{h2}b_{h3}S_{zt_h}\right]$$

$$ECM(\hat{Y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right)\left[S_{y_h}^2 + b_{h1}^2 S_{x_h}^2 + b_{h2}^2 S_{z_h}^2 + b_{h3}^2 S_{t_h}^2 - 2b_{h1}S_{xy_h} - 2b_{h2}S_{yz_h} - 2b_{h3}S_{yt_h} + \right.$$

$$\left. + 2b_{h1}b_{h2}S_{xz_h} + 2b_{h1}b_{h3}S_{xt_h} + 2b_{h2}b_{h3}S_{zt_h}\right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right)\left[s_{y_h}^2 + \hat{b}_{h1}^2 s_{x_h}^2 + \hat{b}_{h2}^2 s_{z_h}^2 + \hat{b}_{h3}^2 s_{t_h}^2 - 2\hat{b}_{h1}s_{xy_h} - 2\hat{b}_{h2}s_{yz_h} - 2\hat{b}_{h3}s_{yt_h} + \right.$$

$$\left. + 2\hat{b}_{h1}\hat{b}_{h2}s_{xz_h} + 2\hat{b}_{h1}\hat{b}_{h3}s_{xt_h} + 2\hat{b}_{h2}\hat{b}_{h3}s_{zt_h}\right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right)\Big[s_{y_h}^2 + \hat{b}_{h1}^2 s_{x_h}^2 + \hat{b}_{h2}^2 s_{z_h}^2 + \hat{b}_{h3}^2 s_{t_h}^2 - 2\hat{b}_{h1} s_{xy_h} - 2\hat{b}_{h2} s_{yz_h} - 2\hat{b}_{h3} s_{yt_h} +$$

$$+ 2\hat{b}_{h1}\hat{b}_{h2} s_{xz_h} + 2\hat{b}_{h1}\hat{b}_{h3} s_{xt_h} + 2\hat{b}_{h2}\hat{b}_{h3} s_{zt_h}\Big]$$

5.3.2.- Casos especiales de los Estimadores de Regresión Lineal Separado con 3 variables auxiliares

En primer lugar, se tiene que si b_{h3}=0, para todo h, h=1, 2, …, L, se tiene el estimador de regresión lineal separado con 2 variables auxiliares, incluyendo todos sus casos.

Si $b_{h1}=b_{h2}=b_{h3}=1$ se tiene el estimador por diferencias con 3 variables auxiliares.

El estimador de varianza mínima para b_{h1}, b_{h2} y b_{h3} constantes para todo h, se tiene cuando en cada estrato se cumplen las condiciones establecidas en (4.4.3.- Estimador de Varianza Mínima para b_1, b_2, b_3, … , b_k constantes), esto es,

$$b_{h10} = \frac{S_{yx_h}\left(S_{z_h}^2 S_{t_h}^2 - S_{zt_h}^2\right) + S_{yz_h}\left(S_{xt_h} S_{zt_h} - S_{t_h}^2 S_{xz_h}\right) + S_{yt_h}\left(S_{xz_h} S_{zt_h} - S_{z_h}^2 S_{xt_h}\right)}{S_{x_h}^2 S_{z_h}^2 S_{t_h}^2 - S_{x_h}^2 S_{zt_h}^2 - S_{z_h}^2 S_{xt_h}^2 - S_{t_h}^2 S_{xz_h}^2 + 2 S_{xz_h} S_{xt_h} S_{zt_h}}$$

$$b_{h20} = \frac{S_{yx_h}\left(S_{xt_h} S_{zt_h} - S_{t_h}^2 S_{xz_h}\right) + S_{yz_h}\left(S_{x_h}^2 S_{t_h}^2 - S_{xt_h}^2\right) + S_{yt_h}\left(S_{xz_h} S_{xt_h} - S_{x_h}^2 S_{zt_h}\right)}{S_{x_h}^2 S_{z_h}^2 S_{t_h}^2 - S_{x_h}^2 S_{zt_h}^2 - S_{z_h}^2 S_{xt_h}^2 - S_{t_h}^2 S_{xz_h}^2 + 2 S_{xz_h} S_{xt_h} S_{zt_h}}$$

$$b_{h30} = \frac{S_{yx_h}\left(S_{xz_h} S_{zt_h} - S_{z_h}^2 S_{xt_h}\right) + S_{yz_h}\left(S_{xz_h} S_{xt_h} - S_{x_h}^2 S_{zt_h}\right) + S_{yt_h}\left(S_{x_h}^2 S_{z_h}^2 - S_{xz_h}^2\right)}{S_{x_h}^2 S_{z_h}^2 S_{t_h}^2 - S_{x_h}^2 S_{zt_h}^2 - S_{z_h}^2 S_{xt_h}^2 - S_{t_h}^2 S_{xz_h}^2 + 2 S_{xz_h} S_{xt_h} S_{zt_h}}$$

$$\text{minimizan } V(\hat{\bar{Y}}_{lr}) \text{ si } \begin{cases} n_h < N_h \\ S^2_{x_h} > 0 \\ S^2_{z_h} > 0 \\ S^2_{t_h} > 0 \\ -1 < \rho_{xz_h} < 1 \\ -1 < \rho_{xt_h} < 1 \\ -1 < \rho_{zt_h} < 1 \\ 1 + 2\rho_{xt_h}\rho_{xz_h}\rho_{zt_h} - \rho^2_{zt_h} - \rho^2_{xt_h} - \rho^2_{xz_h} > 0 \end{cases}.$$

5.3.3.- Estimadores de Regresión Lineal Combinado con 3 variables auxiliares

Los estimadores de Regresión Lineal Combinado con 3 variables auxiliares, para el promedio y el total, son,

$$\hat{\bar{Y}}_{lrc} = \sum_{h=1}^{L} W_h\left[\bar{y}_h + b_{c1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + b_{c2}(\bar{Z}_h - \bar{z}_h) + b_{c3}(\bar{T}_h - \bar{t}_h)\right]$$

$$= \hat{\bar{Y}}_{st} + \sum_{h=1}^{L} W_h\left[b_{c1}(\bar{X}_h - \bar{x}_h) + b_{c2}(\bar{Z}_h - \bar{z}_h) + b_{c3}(\bar{T}_h - \bar{t}_h)\right]$$

$$= \hat{\bar{Y}}_{st} + b_{c1}(\bar{X} - \hat{\bar{X}}_{st}) + b_{c2}(\bar{Z} - \hat{\bar{Z}}_{st}) + b_{c3}(\bar{T}_h - \hat{\bar{T}}_{st})$$

$$\hat{Y}_{lrs} = \sum_{h=1}^{L}\left[\hat{Y}_h + b_{c1}(X_h - \hat{X}_h) + b_{c2}(Z_h - \hat{Z}_h) + b_{c3}(T_h - \hat{T}_h)\right]$$

$$= \hat{Y}_{st} + b_{c1}(\hat{X} - \hat{X}_{st}) + b_{c2}(\hat{Z} - \hat{Z}_{st}) + b_{c3}(T_h - \hat{T}_{st})$$

Si b_{c1}, b_{c2} y b_{c3} son constantes, son estimadores insesgados, y sus errores cuadráticos medio son,

$$ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lrs})$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + b_{c1}^2 S_{x_h}^2 + b_{c2}^2 S_{z_h}^2 + b_{c3}^2 S_{t_h}^2 - 2b_{c1} S_{xy_h} - 2b_{c2} S_{yz_h} - 2b_{c3} S_{yt_h} + \right.$$

$$\left. + 2b_{c1} b_{c2} S_{xz_h} + 2b_{c1} b_{c3} S_{xt_h} + 2b_{c2} b_{c3} S_{zt_h} \right]$$

$$ECM(\hat{Y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[S_{y_h}^2 + b_{c1}^2 S_{x_h}^2 + b_{c2}^2 S_{z_h}^2 + b_{c3}^2 S_{t_h}^2 - 2b_{c1} S_{xy_h} - 2b_{c2} S_{yz_h} - 2b_{c3} S_{yt_h} + \right.$$

$$\left. + 2b_{c1} b_{c2} S_{xz_h} + 2b_{c1} b_{c3} S_{xt_h} + 2b_{c2} b_{c3} S_{zt_h} \right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[s_{y_h}^2 + \hat{b}_{c1}^2 s_{x_h}^2 + \hat{b}_{c2}^2 s_{z_h}^2 + \hat{b}_{c3}^2 s_{t_h}^2 - 2\hat{b}_{c1} s_{xy_h} - 2\hat{b}_{c2} s_{yz_h} - 2\hat{b}_{c3} s_{yt_h} + \right.$$

$$\left. + 2\hat{b}_{c1} \hat{b}_{c2} s_{xz_h} + 2\hat{b}_{c1} \hat{b}_{c3} s_{xt_h} + 2\hat{b}_{c2} \hat{b}_{c3} s_{zt_h} \right]$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h} \right) \left[s_{y_h}^2 + \hat{b}_{c1}^2 s_{x_h}^2 + \hat{b}_{c2}^2 s_{z_h}^2 + \hat{b}_{c3}^2 s_{t_h}^2 - 2\hat{b}_{c1} s_{xy_h} - 2\hat{b}_{c2} s_{yz_h} - 2\hat{b}_{c3} s_{yt_h} + \right.$$

$$\left. + 2\hat{b}_{c1} \hat{b}_{h2} s_{xz_h} + 2\hat{b}_{c1} \hat{b}_{c3} s_{xt_h} + 2\hat{b}_{c2} \hat{b}_{c3} s_{zt_h} \right]$$

5.3.4.- Casos especiales de los Estimadores de Regresión Lineal Combinado con 3 variables auxiliares

En primer lugar, se tiene que si b_{c3}=0, se tiene el estimador de regresión lineal combinado con 2 variables auxiliares, incluyendo todos sus casos.

Si b_{c1}=b_{c2}=b_{c3}=1 se tiene el estimador por diferencias con 3 variables auxiliares, que además coincide con el estimador por diferencias del estimador de regresión lineal separado con 3 variables auxiliares. Cabe destacar que esto también se cumple, para 1 y 2 variables auxiliares.

El estimador de varianza mínima para b_{c1}, b_{c2} y b_{c3} constantes, requiere un desarrollo complejo, algo más que lo desarrollado en (3.4.3.- Estimador de Varianza Mínima para b_1, b_2 y b_3 constantes), ya que se tienen L estratos, sin embargo, haciendo uso del principio de inducción, se puede decir que los valores que minimizan la varianza de los estimadores del promedio y el total son,

$$b_1 = \frac{S_{yx}\left(S_z^2 S_t^2 - S_{zt}^2\right) + S_{yz}\left(S_{xt} S_{zt} - S_t^2 S_{xz}\right) + S_{yt}\left(S_{xz} S_{zt} - S_z^2 S_{xt}\right)}{S_x^2 S_z^2 S_t^2 - S_x^2 S_{zt}^2 - S_z^2 S_{xt}^2 - S_t^2 S_{xz}^2 + 2 S_{xz} S_{xt} S_{zt}}$$

$$b_2 = \frac{S_{yx}\left(S_{xt} S_{zt} - S_t^2 S_{xz}\right) + S_{yz}\left(S_x^2 S_t^2 - S_{xt}^2\right) + S_{yt}\left(S_{xz} S_{xt} - S_x^2 S_{zt}\right)}{S_x^2 S_z^2 S_t^2 - S_x^2 S_{zt}^2 - S_z^2 S_{xt}^2 - S_t^2 S_{xz}^2 + 2 S_{xz} S_{xt} S_{zt}}$$

$$b_3 = \frac{S_{yx}\left(S_{xz} S_{zt} - S_z^2 S_{xt}\right) + S_{yz}\left(S_{xz} S_{xt} - S_x^2 S_{zt}\right) + S_{yt}\left(S_x^2 S_z^2 - S_{xz}^2\right)}{S_x^2 S_z^2 S_t^2 - S_x^2 S_{zt}^2 - S_z^2 S_{xt}^2 - S_t^2 S_{xz}^2 + 2 S_{xz} S_{xt} S_{zt}}$$

entonces,

$$b_{c01} = \frac{\Sigma_{yx}\left(\Sigma_z^2 \Sigma_t^2 - \Sigma_{zt}^2\right) + \Sigma_{yz}\left(\Sigma_{xt} \Sigma_{zt} - \Sigma_t^2 \Sigma_{xz}\right) + \Sigma_{yt}\left(\Sigma_{xz} \Sigma_{zt} - \Sigma_z^2 \Sigma_{xt}\right)}{\Sigma_x^2 \Sigma_z^2 \Sigma_t^2 - \Sigma_x^2 \Sigma_{zt}^2 - \Sigma_z^2 \Sigma_{xt}^2 - \Sigma_t^2 \Sigma_{xz}^2 + \Sigma_{xz} \Sigma_{xt} \Sigma_{zt}}$$

$$b_{c02} = \frac{\Sigma_{yx}\left(\Sigma_{xt} \Sigma_{zt} - \Sigma_t^2 \Sigma_{xz}\right) + \Sigma_{yz}\left(\Sigma_x^2 \Sigma_t^2 - \Sigma_{xt}^2\right) + \Sigma_{yt}\left(\Sigma_{xz} \Sigma_{xt} - \Sigma_z^2 \Sigma_{zt}\right)}{\Sigma_x^2 \Sigma_z^2 \Sigma_t^2 - \Sigma_x^2 \Sigma_{zt}^2 - \Sigma_z^2 \Sigma_{xt}^2 - \Sigma_t^2 \Sigma_{xz}^2 + \Sigma_{xz} \Sigma_{xt} \Sigma_{zt}}$$

$$b_{c03} = \frac{\Sigma_{yx}\left(\Sigma_{xz} \Sigma_{zt} - \Sigma_z^2 \Sigma_{xt}\right) + \Sigma_{yz}\left(\Sigma_{xz} \Sigma_{xt} - \Sigma_x^2 \Sigma_{zt}\right) + \Sigma_{yt}\left(\Sigma_x^2 \Sigma_z^2 - \Sigma_{xz}^2\right)}{\Sigma_x^2 \Sigma_z^2 \Sigma_t^2 - \Sigma_x^2 \Sigma_{zt}^2 - \Sigma_z^2 \Sigma_{xt}^2 - \Sigma_t^2 \Sigma_{xz}^2 + \Sigma_{xz} \Sigma_{xt} \Sigma_{zt}}$$

Donde,

$$\Sigma_{yx} = \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xy_h}\right) \quad \Sigma_{yz} = \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{yz_h}\right) \quad \Sigma_{yt} = \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{yt_h}\right)$$

$$\Sigma_x^2 = \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{x_h}^2\right) \quad \Sigma_z^2 = \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2\right) \quad \Sigma_t^2 = \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2\right)$$

$$\Sigma_{xz} = \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}\right) \quad \Sigma_{xt} = \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xt_h}\right) \quad \Sigma_{zt} = \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{zt_h}\right)$$

$$\Sigma_{xz}^2 = \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}\right)^2 \quad \Sigma_{xt}^2 = \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xt_h}\right)^2 \quad \Sigma_{zt}^2 = \left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{zt_h}\right)^2$$

Ahora se debe verificar que en dichos valores hay un mínimo. Se halla la matriz hessiana y se verifica si los menores principales son mayores que cero. Sea la matriz hessiana,

$$H(V(\hat{\bar{Y}}_{lr}))=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lrc})}{\partial b_{c1}^2} & \dfrac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lrc})}{\partial b_{c1}b_{c2}} & \dfrac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lrc})}{\partial b_{c1}b_{c3}} \\ \dfrac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lrc})}{\partial b_{c2}b_{c1}} & \dfrac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lrc})}{\partial b_{c2}^2} & \dfrac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lrc})}{\partial b_{c2}b_{c3}} \\ \dfrac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lrc})}{\partial b_{c1}b_{c3}} & \dfrac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lrc})}{\partial b_{c2}b_{c3}} & \dfrac{\partial^2 V(\hat{\bar{Y}}_{lrc})}{\partial b_{c3}^2} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\dfrac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{x_h}^2 & 2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\dfrac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{xz_h} & 2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\dfrac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{xt_h} \\ 2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\dfrac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{xz_h} & 2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\dfrac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{z_h}^2 & 2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\dfrac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{zt_h} \\ 2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\dfrac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{xt_h} & 2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\dfrac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{zt_h} & 2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\dfrac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{z_h}^2 \end{bmatrix}$$

Los menores principales de orden 1 y 2 coinciden con los trabajados en el estimador de regresión lineal combinado, de varianza mínima con 2 variables artificiales (5.2.1.5.- Estimador de Varianza Mínima para b_1 y b_2 constantes), llegándose a que deben cumplirse las siguientes condiciones,

$$\left.\begin{array}{l} n_h < N_h \\ S_{x_h}^2 > 0 \end{array}\right\}\forall h,\ h=1,2,\ldots,L$$

$$\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{z_h}^2\right) > \left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{xz_h}\right)$$

Al resolver el determinante, se tiene que debe cumplirse que

$$2^3\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{z_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{z_h}^2\right)+$$

$$+\,2^3\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{xz_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{zt_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\right)S_{xt_h}\right)+$$

$$+2^3\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{xz_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{zt_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{xt_h}\right)-$$

$$-2^3\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{xt_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{z_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{xt_h}\right)-$$

$$-2^3\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{zt_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{zt_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{x_h}^2\right)-$$

$$-2^3\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{xz_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{xz_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{z_h}^2\right)>0$$

Es decir, que,

$$\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{z_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{z_h}^2\right)+$$

$$+2\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{xz_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{zt_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{xt_h}\right)+$$

$$-\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{z_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{xt_h}\right)^2-$$

$$-\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{zt_h}\right)^2-$$

$$-\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{z_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{xz_h}\right)^2>0$$

Generalizando las condiciones,

$$\left.\begin{array}{l} n_h<N_h \\ S_{x_h}^2>0 \end{array}\right\}\forall h,\;\; h=1,2,\ldots,L$$

$$\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{z_h}^2\right)>\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\frac{N_h-n_h}{N_hn_h}\right)S_{xz_h}\right)$$

$$\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2\right) +$$

$$+2\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{zt_h}\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xt_h}\right) +$$

$$-\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xt_h}\right)^2 -$$

$$-\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{x_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{zt_h}\right)^2 -$$

$$-\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{z_h}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{N_h - n_h}{N_h n_h}\right) S_{xz_h}\right)^2 \quad > 0$$

5.4.- Estimadores de Regresión Lineal con *k* variables auxiliares en Muestreo Estratificado

El caso general se trata de *k* variables auxiliares. En el capítulo 4 se trabajaron estos estimadores en el muestreo aleatorio simple, aquí se verán en el muestreo estratificado. Igual que en los casos anteriores, se tienen los dos planteamientos conocidos, el estimador de regresión lineal separado y el estimador de regresión lineal combinado. Además, se tienen varios casos en cada uno de ellos.

En principio se asumirá que los valores de b_1, b_2, …, b_k, son constantes, para ambos planteamientos, y tal como se ha hecho en los casos anteriores, se supondrá que las muestras en cada estrato son aleatorias simples.

Sea un universo de N elementos, agrupados en L estratos, de N_1, N_2, … N_L elementos respectivamente, y sean las observaciones de las variables y , x_1 , x_2, x_3, … , x_k, sobre cada uno de ellos,

$$
\begin{array}{llll}
y_{h1} & ,y_{h2} & ,\ldots, & y_{hN_h} \\
x_{h11} & ,x_{h12} & ,\ldots, & x_{h1N_h} \\
x_{h21} & ,x_{h22} & ,\ldots, & x_{h2N_h} \\
x_{h31} & ,x_{h32} & ,\ldots, & x_{h3N_h} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
x_{hk1} & ,x_{hk2} & ,\ldots, & x_{hkN_h}
\end{array}
\qquad h=1,2,\ldots,L \quad , N_1+N_2+\ldots+N_L=N
$$

5.4.1.- Estimadores de Regresión Lineal Separado con *k* variables auxiliares

La estructura de los estimadores es la siguiente,

$$
\hat{\bar{Y}}_{lrs} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_{h1} - \bar{x}_{h1}) + b_{h2}(\bar{X}_{h2} - \bar{x}_{h2}) + b_{h3}(\bar{X}_{h3} - \bar{x}_{h3}) + \cdots + b_{hk}(\bar{X}_{hk} - \bar{x}_{hk}) \right]
$$

$$
= \hat{\bar{Y}}_{st} + \sum_{h=1}^{L} W_h \left[b_{h1}(\bar{X}_{h1} - \bar{x}_{h1}) + b_{h2}(\bar{X}_{h2} - \bar{x}_{h2}) + b_{h3}(\bar{X}_{h3} - \bar{x}_{h3}) + \cdots + b_{hk}(\bar{X}_{hk} - \bar{x}_{hk}) \right]
$$

$$
\hat{Y}_{lrs} = \sum_{h=1}^{L} N_h \left[\bar{y}_h + b_{h1}(\bar{X}_{h1} - \bar{x}_{h1}) + b_{h2}(\bar{X}_{h2} - \bar{x}_{h2}) + b_{h3}(\bar{X}_{h3} - \bar{x}_{h3}) + \cdots + b_{hk}(\bar{X}_{hk} - \bar{x}_{hk}) \right]
$$

$$
= \hat{Y}_{st} + \sum_{h=1}^{L} \left[b_{h1}(X_{h1} - \hat{X}_{h1}) + b_{h2}(X_{h2} - \hat{X}_{h2}) + b_{h3}(X_{h3} - \hat{X}_{h3}) + \cdots + b_{hk}(X_{hk} - \hat{X}_{hk}) \right]
$$

Sus errores cuadráticos medio y sus respectivos estimadores son los siguientes,

$$
ECM(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) = V(\hat{\bar{Y}}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) \left(S_{hy}^2 + \sum_{i=1}^{k} b_{hi}^2 S_{hx_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} b_{hi} S_{hyx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} b_{hi} b_{hj} S_{hx_i x_j} \right)
$$

$$
ECM(\hat{Y}_{lrs}) = V(\hat{Y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) \left(S_{hy}^2 + \sum_{i=1}^{k} b_{hi}^2 S_{hx_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} b_{hi} S_{hyx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} b_{hi} b_{hj} S_{hx_i x_j} \right)
$$

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{\bar{Y}}}_{lrs}) = \hat{V}(\hat{\bar{\bar{Y}}}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)\left(s_{hy}^2 + \sum_{i=1}^{k}\hat{b}_{hi}^2 s_{hx_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k}\hat{b}_{hi} s_{hyx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}\hat{b}_{hi}\hat{b}_{hj} s_{hx_i x_j}\right)$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{lrs}) = \hat{V}(\hat{Y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)\left(s_{hy}^2 + \sum_{i=1}^{k}\hat{b}_{hi}^2 s_{hx_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k}\hat{b}_{hi} s_{hyx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}\hat{b}_{hi}\hat{b}_{hj} s_{hx_i x_j}\right)$$

5.4.2.- Casos especiales de los Estimadores de Regresión Lineal Separado con *k* variables auxiliares

En primer lugar, se tiene que si b_{hk}=0, para todo h, h=1, 2, …, L, se tiene el estimador de regresión lineal separado con k-1 variables auxiliares, y si b_{hk}= b_{hk-1}=0, para todo h, h=1, 2, …, L, se tiene el estimador de regresión lineal separado con k-2, y así sucesivamente, b_{hk}= b_{hk-1}=…= b_{h2} =0, para todo h, h=1, 2, …, L, se tiene el estimador de regresión lineal simple separado, incluyendo todos sus casos.

Si b_{h1}=b_{h2}=…=b_{h3}=1 se tiene el estimador por diferencias con k variables auxiliares.

El estimador de varianza mínima para b_{h1}, b_{h2}, … , b_{hk} constantes para todo h, se hará bajo el enfoque matricial, y se tiene cuando en cada estrato se cumplen las condiciones establecidas en (4.4.3.- Estimador de Varianza Mínima para b_1, b_2, b_3, … , b_k constantes), para ello debe resolverse el siguiente sistema de ecuaciones, para el estrato h, h=1, 2, …, L,

$$\begin{pmatrix} S_{hx_1}^2 & S_{hx_1x_2} & S_{hx_1x_3} & \cdots & S_{hx_1x_i} & \cdots & S_{hx_1x_k} \\ S_{hx_1x_2} & S_{hx_2}^2 & S_{hx_2x_3} & \cdots & S_{hx_2x_i} & \cdots & S_{hx_2x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{hx_1x_i} & S_{hx_2x_i} & S_{hx_3x_i} & \cdots & S_{hx_i}^2 & \cdots & S_{hx_ix_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{hx_1x_k} & S_{hx_2x_k} & S_{hx_3x_k} & \cdots & S_{hx_ix_k} & \cdots & S_{hx_k}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{h1} \\ b_{h2} \\ b_{h3} \\ \vdots \\ b_{hi} \\ \vdots \\ b_{hk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{hyx_1} \\ S_{hyx_2} \\ S_{hyx_3} \\ \vdots \\ S_{hyx_i} \\ \vdots \\ S_{hyx_k} \end{pmatrix}$$

y su solución es,

$$\begin{pmatrix} b_{h1} \\ b_{h2} \\ b_{h3} \\ \vdots \\ b_{hi} \\ \vdots \\ b_{hk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^2_{hx_1} & S_{hx_1x_2} & S_{hx_1x_3} & \cdots & S_{hx_1x_i} & \cdots & S_{hx_1x_k} \\ S_{hx_1x_2} & S^2_{hx_2} & S_{hx_2x_3} & \cdots & S_{hx_2x_i} & \cdots & S_{hx_2x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{hx_1x_i} & S_{hx_2x_i} & S_{hx_3x_i} & \cdots & S^2_{hx_i} & \cdots & S_{hx_ix_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{hx_1x_k} & S_{hx_2x_k} & S_{hx_3x_k} & \cdots & S_{hx_ix_k} & \cdots & S^2_{hx_k} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} S_{hyx_1} \\ S_{hyx_2} \\ S_{hyx_3} \\ \vdots \\ S_{hyx_i} \\ \vdots \\ S_{hyx_k} \end{pmatrix}$$

donde $\begin{pmatrix} S^2_{hx_1} & S_{hx_1x_2} & S_{hx_1x_3} & \cdots & S_{hx_1x_i} & \cdots & S_{hx_1x_k} \\ S_{hx_1x_2} & S^2_{hx_2} & S_{hx_2x_3} & \cdots & S_{hx_2x_i} & \cdots & S_{hx_2x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{hx_1x_i} & S_{hx_2x_i} & S_{hx_3x_i} & \cdots & S^2_{hx_i} & \cdots & S_{hx_ix_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{hx_1x_k} & S_{hx_2x_k} & S_{hx_3x_k} & \cdots & S_{hx_ix_k} & \cdots & S^2_{hx_k} \end{pmatrix}^{-1}$ es la inversa de la matriz de varianzas y covarianzas de las variables auxiliares. Si se denota por C_h a dicha matriz,

$$C_h = \begin{pmatrix} S^2_{hx_1} & S_{hx_1x_2} & S_{hx_1x_3} & \cdots & S_{hx_1x_i} & \cdots & S_{hx_1x_k} \\ S_{hx_1x_2} & S^2_{hx_2} & S_{hx_2x_3} & \cdots & S_{hx_2x_i} & \cdots & S_{hx_2x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{hx_1x_i} & S_{hx_2x_i} & S_{hx_3x_i} & \cdots & S^2_{hx_i} & \cdots & S_{hx_ix_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S_{hx_1x_k} & S_{hx_2x_k} & S_{hx_3x_k} & \cdots & S_{hx_ix_k} & \cdots & S^2_{hx_k} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c_{h11} & c_{h12} & c_{h13} & \cdots & c_{h1i} & \cdots & c_{h1k} \\ c_{h21} & c_{h22} & c_{h23} & \cdots & c_{h2i} & \cdots & c_{h2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{hi1} & c_{hi2} & c_{hi3} & \cdots & c_{hii} & \cdots & c_{hik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{hk1} & c_{hk2} & c_{hk3} & \cdots & c_{hki} & \cdots & c_{hkk} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} b_{h1} \\ b_{h2} \\ b_{h3} \\ \vdots \\ b_{hi} \\ \vdots \\ b_{hk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{h11} & c_{h12} & c_{h13} & \cdots & c_{h1i} & \cdots & c_{h1k} \\ c_{h21} & c_{h22} & c_{h23} & \cdots & c_{h2i} & \cdots & c_{h2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{hi1} & c_{hi2} & c_{hi3} & \cdots & c_{hii} & \cdots & c_{hik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{hk1} & c_{hk2} & c_{hk3} & \cdots & c_{hki} & \cdots & c_{hkk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{hyx_1} \\ S_{hyx_2} \\ S_{hyx_3} \\ \vdots \\ S_{hyx_i} \\ \vdots \\ S_{hyx_k} \end{pmatrix}$$

es decir, que los valores de b_{h1}, b_{h2}, …, b_{hk}, que minimizan la varianza del estimador son,

$$\begin{cases} b_{h10} = c_{h11}S_{hyx_1} + c_{h12}S_{hyx_2} + c_{h13}S_{hyx_3} + \cdots + c_{h1i}S_{hyx_i} + c_{h1k}S_{hyx_k} \\ b_{h20} = c_{h21}S_{hyx_1} + c_{h22}S_{hyx_2} + c_{h23}S_{hyx_3} + \cdots + c_{h2i}S_{hyx_i} + c_{h2k}S_{hyx_k} \\ b_{h30} = c_{h31}S_{hyx_1} + c_{h32}S_{hyx_2} + c_{h33}S_{hyx_3} + \cdots + c_{h3i}S_{hyx_i} + c_{h3k}S_{hyx_k} \\ \quad\vdots \\ b_{hi0} = c_{hi1}S_{hyx_1} + c_{hi2}S_{hyx_2} + c_{hi3}S_{hyx_3} + \cdots + c_{hii}S_{hyx_i} + c_{hik}S_{hyx_k} \\ \quad\vdots \\ b_{hk0} = c_{hk1}S_{hyx_1} + c_{hk2}S_{hyx_2} + c_{hk3}S_{hyx_3} + \cdots + c_{hki}S_{hyx_i} + c_{hkk}S_{hyx_k} \end{cases}$$

Y para que realmente haya un mínimo en cada estrato, debe cumplirse,

$$n_h < N_h \quad ,$$

$$S^2_{hx_i} > 0 \quad \forall h,\ h = 1,2,\ldots,L$$

$$\left|\rho_{hx_i x_j}\right| \neq 1 \quad \forall h,\ h = 1,2,\ldots L \quad , \ i = 1,2,\ldots,k-1 \quad , \ j = i, i+1,\ldots,k$$

Además de otra condición que complica en la medida que aumenta el número de variables auxiliares.

De manera que deben calcularse las varianzas, contrastar y verificar si se reduce la varianza al incorporar nuevas variables, pero cumpliendo con las condiciones expuestas arriba.

5.4.3.- Enfoque matricial de los Estimadores de Regresión Lineal Separado con *k* variables auxiliares

Aplicando el enfoque matricial, se tiene lo siguiente, para cada estrato h, h=1,2,…,L,

$S^2_{hy_{(1x1)}}$ = cuasivarianza de la variable *"y"* en el estrato h

$$\boldsymbol{b}_h = \begin{pmatrix} b_{h1} \\ b_{h2} \\ b_{h3} \\ \vdots \\ b_{hk} \end{pmatrix}_{(kx1)}$$ = vector de coeficientes de regresión en el estrato h

$$\mathbf{S}_{hyx} = \begin{pmatrix} S_{hyx_1} \\ S_{hyx_2} \\ S_{hyx_3} \\ \vdots \\ S_{hyx_k} \end{pmatrix}_{(kx1)}$$ = vector de covarianzas entre la variable "y" y las variables auxiliares en el estrato h

$$\mathbf{S}_{hx} = \begin{pmatrix} S^2_{hx_1} & S_{hx_1x_2} & S_{hx_1x_3} & \cdots & S_{hx_1x_k} \\ S_{hx_1x_2} & S^2_{hx_2} & S_{hx_2x_3} & \cdots & S_{hx_2x_k} \\ S_{hx_1x_3} & S_{hx_2x_3} & S^2_{hx_3} & \cdots & S_{hx_3x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{hx_1x_k} & S_{hx_2x_k} & S_{hx_3x_k} & \cdots & S^2_{hx_k} \end{pmatrix}_{(kxk)}$$ = matriz de varianzas y covarianzas entre variables auxiliares en el estrato h

$$\mathbf{S}_h = \left(\begin{array}{c|ccccc} S^2_{hy} & -S_{hyx_1} & -S_{hyx_2} & -S_{hyx_3} & \cdots & -S_{hyx_k} \\ \hline -S_{hyx_1} & S^2_{hx_1} & S_{hx_1x_2} & S_{hx_1x_3} & \cdots & S_{hx_1x_k} \\ -S_{hyx_2} & S_{hx_1x_2} & S^2_{hx_2} & S_{hx_2x_3} & \cdots & S_{hx_2x_k} \\ -S_{hyx_3} & S_{hx_1x_3} & S_{hx_2x_3} & S^2_{hx_3} & \cdots & S_{hx_3x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ -S_{hyx_k} & S_{hx_1x_k} & S_{hx_2x_k} & S_{hx_3x_k} & \cdots & S^2_{hx_k} \end{array}\right)_{(kxk)} = \left(\begin{array}{c|c} S^2_{hy} & -\mathbf{S}'_{hyx} \\ \hline -\mathbf{S}_{hyx} & \mathbf{S}_{hx} \end{array}\right)_{(kxk)}$$

= matriz de varianzas y covarianzas ampliada y modificada. Donde $\mathbf{S}'_{yx}$ es la matriz traspuesta de $\mathbf{S}_{yx}$ en el estrato h.

$$\boldsymbol{b}_{ha} = \begin{pmatrix} 1 \\ b_{h1} \\ b_{h2} \\ b_{h3} \\ \vdots \\ b_{hk} \end{pmatrix}_{(kx1)}$$ = vector ampliado de coeficientes de regresión en el estrato h

$\bar{y}_{h(1x1)}$ = promedio muestral de la variable *"y"* en el estrato h

$$\overline{\boldsymbol{X}}_{hN} = \begin{pmatrix} \overline{X}_{h1} \\ \overline{X}_{h2} \\ \overline{X}_{h3} \\ \vdots \\ \overline{X}_{hk} \end{pmatrix}_{(kx1)}$$ = vector de promedios poblacionales de las variables auxiliares en el estrato h

$$\overline{\boldsymbol{X}}_{hn} = \begin{pmatrix} \overline{x}_{h1} \\ \overline{x}_{h2} \\ \overline{x}_{h3} \\ \vdots \\ \overline{x}_{hk} \end{pmatrix}_{(kx1)}$$ = vector de promedios muestrales de las variables auxiliares en el estrato h

$$\overline{\boldsymbol{X}}_{h} = \begin{pmatrix} \overline{X}_{h1} - \overline{x}_{h1} \\ \overline{X}_{h2} - \overline{x}_{h2} \\ \overline{X}_{h3} - \overline{x}_{h3} \\ \vdots \\ \overline{X}_{hk} - \overline{x}_{hk} \end{pmatrix}_{(kx1)}$$ = vector de diferencias de promedios poblacionales y muestrales de las variables auxiliares en el estrato h

$$\overline{\boldsymbol{X}}_{ha} = \begin{pmatrix} \overline{y}_{h} \\ \overline{X}_{h1} - \overline{x}_{h1} \\ \overline{X}_{h2} - \overline{x}_{h2} \\ \overline{X}_{h3} - \overline{x}_{h3} \\ \vdots \\ \overline{X}_{hk} - \overline{x}_{hk} \end{pmatrix}_{(kx1)}$$ = vector ampliado de diferencias de promedios poblacionales y muestrales en el estrato h

Entonces, $\hat{\overline{Y}}_{lrh} = \overline{y}_h + \boldsymbol{b}_h(\overline{\boldsymbol{X}}_{hN} - \overline{\boldsymbol{X}}_{hn}) = \overline{y}_h + \boldsymbol{b}_h \overline{\boldsymbol{X}}_h$

$$ECM\left(\hat{\overline{Y}}_{lrh}\right) = V\left(\hat{\overline{Y}}_{lrh}\right) = \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)\left[\boldsymbol{S}_{hy}^2 + \boldsymbol{b}'_h\,\mathbf{S}_{hx}\boldsymbol{b}_h - 2\boldsymbol{b}'_h\,\mathbf{S}_{hyx}\right]$$

De otra forma, $\hat{\overline{Y}}_{lrh} = \boldsymbol{b}'_{ha}\,\overline{\boldsymbol{X}}_{ha}$

$$ECM\left(\hat{\overline{Y}}_{lrh}\right) = V\left(\hat{\overline{Y}}_{lrh}\right) = \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)\boldsymbol{b}'_{ha}\,\mathbf{S}_h\,\boldsymbol{b}_{ha}$$

Para todo el universo, $\hat{\hat{Y}}_{lrs} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + \boldsymbol{b}_h (\overline{\boldsymbol{X}}_{hN} - \overline{\boldsymbol{X}}_{hn}) \right] = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + \boldsymbol{b}_h \overline{\boldsymbol{X}}_h \right]$

$$ECM\left(\hat{\hat{Y}}_{lrs}\right) = V\left(\hat{\hat{Y}}_{lrs}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) \left[S_{hy}^2 + \boldsymbol{b}'_h \mathbf{S}_{hx} \boldsymbol{b}_h - 2\boldsymbol{b}'_h \mathbf{S}_{hyx} \right]$$

o de otra forma, $\hat{\hat{Y}}_{lrs} = \sum_{h=1}^{L} W_h \boldsymbol{b}'_{ha} \overline{\boldsymbol{X}}_{ha}$

$$ECM\left(\hat{\hat{Y}}_{lrs}\right) = V\left(\hat{\hat{Y}}_{lrs}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) \boldsymbol{b}'_{ha} \mathbf{S}_h \boldsymbol{b}_{ha} .$$

5.4.4.- Estimadores de Regresión Lineal Combinado con *k* variables auxiliares

La estructura de los estimadores es la siguiente,

$$\hat{\hat{Y}}_{lrc} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + b_{c1}(\overline{X}_{h1} - \bar{x}_{h1}) + b_{c2}(\overline{X}_{h2} - \bar{x}_{h2}) + b_{c3}(\overline{X}_{h3} - \bar{x}_{h3}) + \cdots + b_{ck}(\overline{X}_{hk} - \bar{x}_{hk}) \right]$$

$$= \hat{\hat{Y}}_{st} + \sum_{h=1}^{L} W_h \left[b_{c1}(\overline{X}_{h1} - \bar{x}_{h1}) + b_{c2}(\overline{X}_{h2} - \bar{x}_{h2}) + b_{c3}(\overline{X}_{h3} - \bar{x}_{h3}) + \cdots + b_{ck}(\overline{X}_{hk} - \bar{x}_{hk}) \right]$$

$$\hat{Y}_{lrc} = \sum_{h=1}^{L} N_h \left[\bar{y}_h + b_{c1}(\overline{X}_{h1} - \bar{x}_{h1}) + b_{c2}(\overline{X}_{h2} - \bar{x}_{h2}) + b_{c3}(\overline{X}_{h3} - \bar{x}_{h3}) + \cdots + b_{ck}(\overline{X}_{hk} - \bar{x}_{hk}) \right]$$

$$= \hat{Y}_{st} + \sum_{h=1}^{L} \left[b_{c1}(X_{h1} - \hat{X}_{h1}) + b_{c2}(X_{h2} - \hat{X}_{h2}) + b_{c3}(X_{h3} - \hat{X}_{h3}) + \cdots + b_{ck}(X_{hk} - \hat{X}_{hk}) \right]$$

Los respectivos errores cuadráticos medios son,

$$ECM(\hat{\hat{Y}}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) \left(S_{hy}^2 + \sum_{i=1}^{k} b_{ci}^2 S_{hx_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} b_{ci} S_{hyx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} b_{ci} b_{cj} S_{hx_i x_j} \right)$$

$$ECM(\hat{Y}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) \left(S_{hy}^2 + \sum_{i=1}^{k} b_{ci}^2 S_{hx_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} b_{ci} S_{hyx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} b_{ci} b_{cj} S_{hx_i x_j} \right)$$

y sus estimadores,

$$E\hat{C}M(\hat{\bar{Y}}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)\left(s_{hy}^2 + \sum_{i=1}^{k} \hat{b}_{ci}^2 s_{hx_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} \hat{b}_{ci} s_{hyx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} \hat{b}_{ci} \hat{b}_{cj} s_{hx_i x_j}\right)$$

$$E\hat{C}M(\hat{Y}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} N_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)\left(s_{hy}^2 + \sum_{i=1}^{k} \hat{b}_{ci}^2 s_{hx_i}^2 - 2\sum_{i=1}^{k} \hat{b}_{ci} s_{hyx_i} + 2\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} \hat{b}_{ci} \hat{b}_{cj} s_{hx_i x_j}\right)$$

5.4.5.- Casos especiales de los Estimadores de Regresión Lineal Combinado con *k* variables auxiliares

En primer lugar, se tiene que si $b_{ck}=0$, se tiene el estimador de regresión lineal combinado con k-1 variables auxiliares, y si $b_{ck}= b_{ck-1}=0$, se tiene el estimador de regresión lineal separado con k-2, y así sucesivamente, si $b_{ck}= b_{ck-1}=\ldots= b_{c2} =0$, se tiene el estimador de regresión lineal simple separado, incluyendo todos sus casos.

Si $b_{c1}=b_{c2}=\ldots=b_{c3}=1$ se tiene el estimador por diferencias con k variables auxiliares, que además coincide con el estimador por diferencias del estimador de regresión lineal separado, visto en (5.4.2- Casos especiales de los Estimadores de Regresión Lineal Separado con *k* variables auxiliares), ya que todos los b_{hi} son constantes, en este caso 1.

El estimador de varianza mínima para b_{c1}, b_{c2} , … , b_{ck} constantes, se hará bajo el enfoque matricial, para ello debe resolverse el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{pmatrix} \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_1}^2 & \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_1x_2} & \cdots & \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_1x_k} \\ \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_1x_2} & \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_2}^2 & \cdots & \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_2x_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_1x_k} & \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_2x_k} & \cdots & \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_k}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{c1} \\ b_{c2} \\ \vdots \\ b_{ck} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hyx_1} \\ \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hyx_2} \\ \vdots \\ \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hyx_k} \end{pmatrix}$$

y su solución es,

$$\begin{pmatrix} b_{c1} \\ b_{c2} \\ \vdots \\ b_{ck} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_1}^2 & \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_1x_2} & \cdots & \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_1x_k} \\ \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_1x_2} & \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_2}^2 & \cdots & \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_2x_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_1x_k} & \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_2x_k} & \cdots & \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_k}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hyx_1} \\ \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hyx_2} \\ \vdots \\ \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hyx_k} \end{pmatrix}$$

Si se denota por D a dicha matriz inversa,

$$D = \begin{pmatrix} \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_1}^2 & \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_1x_2} & \cdots & \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_1x_k} \\ \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_1x_2} & \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_2}^2 & \cdots & \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_2x_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_1x_k} & \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_2x_k} & \cdots & \sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)S_{hx_k}^2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{k1} & d_{k1} & \cdots & d_{kk} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} b_{c1} \\ b_{c2} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{ci} \\ \vdots \\ b_{ck} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & \cdots & d_{1i} & \cdots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & \cdots & d_{2i} & \cdots & d_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ d_{i1} & d_{i2} & \cdots & \cdots & d_{ii} & \cdots & d_{ik} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \cdots & \cdots & d_{ki} & \cdots & d_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_1} \\ \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_i} \\ \vdots \\ \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_k} \end{pmatrix}$$

es decir, que los valores de b_{c1}, b_{c2}, …, b_{ck}, que minimizan la varianza del estimador son,

$$\begin{cases} b_{c10} = d_{11} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_1} + d_{12} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_2} + \cdots + d_{1i} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_i} + d_{1k} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_k} \\ b_{c20} = d_{21} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_1} + d_{22} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_2} + \cdots + d_{2i} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_i} + d_{2k} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_k} \\ \quad \vdots \\ \quad \vdots \\ b_{ci0} = d_{i1} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_1} + d_{i2} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_2} + \cdots + d_{ii} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_i} + d_{ik} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_k} \\ \quad \vdots \\ b_{ck0} = d_{k1} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_1} + d_{k2} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_2} + \cdots + d_{ki} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_i} + d_{kk} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h} \right) S_{hyx_k} \end{cases}$$

Las condiciones que deben cumplirse para que haya realmente un mínimo, resultan complicadas, no sólo por la cantidad de variables, sino por ser un estimador combinado. Entonces, la forma de operar es calcular las varianzas, contrastar y verificar si se reduce la varianza al incorporar nuevas variables.

5.4.6.- Enfoque matricial de los Estimadores de Regresión Lineal Combinado con *k* variables auxiliares

Aplicando el enfoque matricial, además de utilizar los vectores y matrices definidos en (5.4.3.- Enfoque matricial de los Estimadores de Regresión Lineal Separado con *k* variables auxiliares), se definirá lo siguiente,

$$\boldsymbol{b}_c = \begin{pmatrix} b_{c1} \\ b_{c2} \\ b_{c3} \\ \vdots \\ b_{ck} \end{pmatrix}_{(kx1)}$$ = vector de coeficientes de regresión

$$\boldsymbol{b}_{ca} = \begin{pmatrix} 1 \\ b_{c1} \\ b_{c2} \\ b_{c3} \\ \vdots \\ b_{ck} \end{pmatrix}_{(kx1)}$$ = vector ampliado de coeficientes de regresión en el estrato h

$$\hat{\bar{Y}}_{lrc} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + \boldsymbol{b}_c (\overline{\boldsymbol{X}}_{hN} - \overline{\boldsymbol{X}}_{hn})\right] = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + \boldsymbol{b}_c \overline{\boldsymbol{X}}_h\right]$$

$$ECM\left(\hat{\bar{Y}}_{lrc}\right) = V\left(\hat{\bar{Y}}_{lrc}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right)\left[S_{hy}^2 + \boldsymbol{b}'_c\, \mathbf{S}_{hx} \boldsymbol{b}_c - 2\boldsymbol{b}'_c\, \mathbf{S}_{hyx}\right]$$

o de otra forma, $$\hat{\bar{Y}}_{lrc} = \sum_{h=1}^{L} W_h \boldsymbol{b}'_{ca}\, \overline{\boldsymbol{X}}_{ha}$$

$$ECM\left(\hat{\bar{Y}}_{lrc}\right) = V\left(\hat{\bar{Y}}_{lrc}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\frac{1-f_h}{n_h}\right) \boldsymbol{b}'_{ca}\, \mathbf{S}_h\, \boldsymbol{b}_{ca}\,.$$

6.- PRUEBAS PRÁCTICAS

En el presente capítulo se realizan una serie de ejercicios con diferentes datas, a efectos de analizar el comportamiento de los estimadores de regresión lineal múltiple, y además compararlo con otros estimadores. Los ejercicios o pruebas se dividen en dos, la primera consta de data artificial, donde se generan universos compuestos de diversas variables, con diferentes tendencias, en segunda instancia, se tiene una data real, del XIII Censo General de Población y Vivienda de Venezuela, llevado a cabo en 2001.

6.1.- Pruebas con data artificial

Para estudiar el comportamiento de los estimadores, se generaron 4 grupos o set de datos, tres con variables cuantitativas, y otro con variables dicotómicas, que muestran la presencia o no de una determinada característica, y se trabajó en Excel.

Al comienzo de cada grupo de datos, se tiene una tabla que muestra las observaciones de un universo artificial de 20 elementos, cada uno con 8 variables, denotadas por y_1, y_2, y_3, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 y x_6, seguida por dos tablas, la primera muestra las cuasivarianzas y cuasicovarianzas entre todas las variables, la segunda contiene los coeficientes de correlación de Pearson entre ellas. Luego se tienen otras tablas con los coeficientes de variación del estimador del promedio de y_1, y_2 y y_3, para una muestra de 5 elementos, a través de 10 diferentes estimadores, utilizando a x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 y x_6 como variables auxiliares. De los 10 estimadores, el primero que se muestra es el estimador directo, el resto son estimadores indirectos, que utilizan desde 1 hasta 6 variables auxiliares. Para cada estimador, se tienen por filas las variables auxiliares utilizadas.

A continuación se tiene la lista de estimadores y la cantidad de variables auxiliares utilizadas por cada uno,

Tabla 3 - Estimadores que se van a trabajar, con la cantidad de variables auxiliares utilizadas

Estimador	Cantidad de variables auxiliares a utilizar
Directo	0
de Razón	1
de Regresión Lineal	1 a 6
por Diferencias	1 a 6
de Razón-Regresión (1,2)	2
de Razón-Regresión (2,1)	2
de Regresión- Razón con 1 coeficiente (1,2)	2
de Regresión- Razón con 1 coeficiente (2,1)	2
de Regresión- Razón con 2 coeficientes (1,2)	2
de Regresión- Razón con 2 coeficientes (2,1)	2

En los cuadros de los coeficientes de variación, pueden encontrarse dos símbolos; “-“ cuando no aplica el cálculo de un estimador, por ejemplo, el coeficiente de variación del estimador directo con 1, 2, 3, 4 , 5 y 6 variables auxiliares; y “//” cuando el cálculo no puede realizarse, generalmente porque se tiene cero en un denominador, esto se explicará en cada caso.

En dichas tablas, se demarca con un recuadro, los cálculos de acuerdo a la cantidad de variables auxiliares utilizadas, que se denominarán “bloques”, y se sombrea en verde el menor coeficiente de variación para cada estimador y en rojo el mayor, adicionalmente, se demarca en línea punteada el menor coeficiente para cada bloque, y en línea continua el menor de todo el cuadro.

En la tabla 3 se puede observar que se tienen 2 estimadores de Razón-Regresión y 4 de Regresión-Razón. Los dos de Razón-Regresión, responden a simple hecho de considerar la primera variable mencionada como variable auxiliar para el estimador de razón y la segunda como variable auxiliar para el estimador de regresión (1,2) o de considerar el caso contrario (2,1). Igual ocurre para los estimadores de Regresión-Razón, añadiendo el hecho que en este estimador se puede trabajar con un único coeficiente *b* o con dos. Resumiendo, se tiene,

Tabla 4 - Estimadores que se van a trabajar, con la cantidad de variables auxiliares utilizadas

Nombre del Estimador	Fórmula del Estimador
Directo	$\hat{\bar{Y}} = \bar{y}$
de Razón	$\hat{\bar{Y}}_R = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{X}$
de Regresión Lineal	$\hat{\bar{Y}}_{lr} = \bar{y} + b_1(\bar{X}_1 - \bar{x}_1) + b_2(\bar{X}_2 - \bar{x}_2) + b_3(\bar{X}_3 - \bar{x}_3) + \cdots + b_k(\bar{X}_k - \bar{x}_k)$
por Diferencias	$\hat{\bar{Y}}_{lr} = \bar{y} + (\bar{X}_1 - \bar{x}_1) + (\bar{X}_2 - \bar{x}_2) + (\bar{X}_3 - \bar{x}_3) + \cdots + (\bar{X}_k - \bar{x}_k)$
de Razón-Regresión (1,2)	$\hat{\bar{Y}}_{Rr} = \hat{\bar{Y}}_R + b(\bar{Z} - \hat{\bar{Z}}_R) = \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\bar{X}\right) + b\left(\bar{Z} - \left(\frac{\bar{z}}{\bar{x}}\bar{X}\right)\right)$
de Razón-Regresión (2,1)	$\hat{\bar{Y}}_{Rr} = \hat{\bar{Y}}_R + b(\bar{X} - \hat{\bar{X}}_R) = \left(\frac{\bar{y}}{\bar{z}}\bar{Z}\right) + b\left(\bar{X} - \left(\frac{\bar{x}}{\bar{z}}\bar{Z}\right)\right)$
de Regresión- Razón con 1 coeficiente (1,2)	$\hat{\bar{Y}}_{rR} = \frac{\hat{\bar{Y}}_{rl}}{\hat{\bar{Z}}_{rl}}\bar{Z} = \frac{\bar{y} + b(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b(\bar{X} - \bar{x})}\bar{Z}$
de Regresión- Razón con 1 coeficiente (2,1)	$\hat{\bar{Y}}_{rR} = \frac{\hat{\bar{Y}}_{rl}}{\hat{\bar{X}}_{rl}}\bar{X} = \frac{\bar{y} + b(\bar{Z} - \bar{z})}{\bar{x} + b(\bar{Z} - \bar{z})}\bar{X}$
de Regresión- Razón con 2 coeficientes (1,2)	$\hat{\bar{Y}}'_{rR} = \frac{\hat{\bar{Y}}_{rl}}{\hat{\bar{Z}}_{rl}}\bar{Z} = \frac{\bar{y} + b_1(\bar{X} - \bar{x})}{\bar{z} + b_2(\bar{X} - \bar{x})}\bar{Z}$
de Regresión- Razón con 2 coeficientes (2,1)	$\hat{\bar{Y}}_{rR} = \frac{\hat{\bar{Y}}_{rl}}{\hat{\bar{X}}_{rl}}\bar{X} = \frac{\bar{y} + b_1(\bar{Z} - \bar{z})}{\bar{x} + b_2(\bar{Z} - \bar{z})}\bar{X}$

Es importante destacar, que en todos los casos de estimador de regresión lineal, los coeficientes b son calculados por la fórmula que minimiza la varianza, excepto el estimador por diferencias, en el cual b=1.

En la tabla 5 se tiene el primer set de datos, se observa que los valores de todas las variables son similares, los promedios varían un poco, pero están entre 10 y 14,45, y las cuasivarianzas también varían, teniendo y_1 tiene una variabilidad intermedia, mayor en y_2 y mucho menor en y_3, en cuanto a las variables auxiliares x, también se tienen diferencias, la mayor la tiene x_5 y la menor x_6, que es constante. En la tabla 7 se pueden observar las correlaciones, que para y_1 con todas las variables auxiliares, comienza con una correlación alta negativa (x_1) y paulatinamente llega hasta una alta positiva (x_5), pasando por una muy baja (x_3), aparte x_6, que por ser constante es cero.

Tabla 5 - Valores de las variables para cada elemento - Set 1

No.	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	10	9	13	12	12	17	8	7	10
2	12	13	15	11	11	16	14	10	10
3	14	10	14	9	10	9	13	16	10
4	9	14	13	13	15	13	13	10	10
5	11	18	14	12	13	14	11	11	10
6	8	12	15	15	14	15	10	7	10
7	16	10	15	5	11	16	16	15	10
8	13	5	16	9	10	7	10	19	10
9	7	10	13	15	15	7	9	5	10
10	10	17	12	15	11	10	10	11	10
11	11	14	16	10	11	10	10	10	10
12	14	8	13	11	11	13	13	17	10
13	10	18	14	13	13	18	12	10	10
14	9	15	16	12	14	10	10	8	10
15	7	14	12	16	16	14	10	6	10
16	14	12	16	10	12	14	14	18	10
17	13	8	18	10	9	18	14	16	10
18	12	20	15	10	10	14	14	13	10
19	12	15	14	13	12	12	10	14	10
20	17	14	15	8	14	14	14	19	10
Promedio	11,45	12,80	14,45	11,45	12,20	13,05	11,75	12,10	10,00
Cuasivarianza	7,7342	15,0105	2,3658	7,4184	3,8526	10,9974	4,8290	19,6737	0,0000

Tabla 6 - Cuasivarianzas y Cuasicovarianzas - Set 1

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
y_1	7,7342	-2,6947	1,7868	-6,6868	-3,2000	1,3974	4,3290	11,1105	0,0000
y_2		15,0105	-1,3263	3,2000	2,0421	2,1684	0,1053	-5,2947	0,0000
y_3			2,3658	-2,3711	-1,4105	0,7132	1,2237	2,9526	0,0000
x_1				7,4184	3,1158	-0,9711	-4,0395	-8,7842	0,0000
x_2					3,8526	-0,2737	-1,5263	-5,1263	0,0000
x_3						10,9974	3,0132	-0,3737	0,0000
x_4							4,8290	5,8684	0,0000
x_5								19,6737	0,0000
x_6									0,0000

Tabla 7 - Coeficientes de Correlación - Set 1

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
y_1	1,0000	-0,2501	0,4177	-0,8828	-0,5862	0,1515	0,7084	0,9007	//
y_2		1,0000	-0,2226	0,3033	0,2685	0,1688	0,0124	-0,3081	//
y_3			1,0000	-0,5660	-0,4672	0,1398	0,3620	0,4328	//
x_1				1,0000	0,5828	-0,1075	-0,6749	-0,7271	//
x_2					1,0000	-0,0421	-0,3539	-0,5888	//
x_3						1,0000	0,4135	-0,0254	//
x_4							1,0000	0,6021	//
x_5								1,0000	//
x_6									1,0000

Tabla 8 - Coeficientes de Variación de $\hat{\bar{Y}}_1$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 1

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	Por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
-	0,09407	-	-	-	-	-	-	-	-	-
x_1	-	0,18066	0,04419	0,18066	-	-	-	-	-	-
x_2	-	0,14001	0,07621	0,14346	-	-	-	-	-	-
x_3	-	0,12542	0,09298	0,13503	-	-	-	-	-	-
x_4	-	0,06665	0,06640	0,06684	-	-	-	-	-	-
x_5	-	0,07033	0,04087	0,07704	-	-	-	-	-	-
x_6	-	0,09407	//	0,09407	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2$	-	-	0,04340	0,22693	0,13123	0,13123	0,07319	//	0,14057	0,14419
$x_1\ x_3$	-	-	0,04386	0,19950	0,12491	0,12491	0,10237	//	0,15774	0,17904
$x_1\ x_4$	-	-	0,04180	0,13789	0,06415	0,06415	0,05723	//	0,13296	0,12667
$x_1\ x_5$	-	-	0,02637	0,09810	0,05343	0,05343	0,06737	//	0,13763	0,09808
$x_1\ x_6$	-	-	//	0,18066	0,04419	0,04419	0,04419	//	0,12788	//
$x_2\ x_3$	-	-	0,07527	0,17128	0,11781	0,11781	0,11458	0,13899	0,14206	0,13899
$x_2\ x_4$	-	-	0,05718	0,11272	0,06542	0,06542	0,05976	0,10835	0,10308	0,10835
$x_2\ x_5$	-	-	0,04035	0,07704	0,04585	0,04585	0,06432	0,06972	0,10579	0,06972
$x_2\ x_6$	-	-	//	0,14346	0,07621	0,07621	0,07621	//	0,11341	//
$x_3\ x_4$	-	-	0,06477	0,14404	0,06559	0,06559	0,06478	0,12271	0,06545	0,12271
$x_3\ x_5$	-	-	0,03743	0,12027	0,04182	0,04182	0,06803	0,09012	0,06867	0,09012
$x_3\ x_6$	-	-	//	0,13503	0,09298	0,09298	0,09298	//	0,09345	//
$x_4\ x_5$	-	-	0,03588	0,12240	0,03788	0,03788	0,06776	0,05246	0,10315	0,05246
$x_4\ x_6$	-	-	//	0,06684	0,06640	0,06640	0,06640	//	0,10226	//
$x_5\ x_6$	-	-	//	0,07704	0,04087	0,04087	0,04087	//	0,12875	//
$x_1\ x_2\ x_3$	-	-	0,04305	0,24090	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4$	-	-	0,04076	0,18542	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_5$	-	-	0,02627	0,12943	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_6$	-	-	//	0,22693	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4$	-	-	0,04177	0,18186	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_5$	-	-	0,02402	0,12622	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_6$	-	-	//	0,19950	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_5$	-	-	0,02549	0,09709	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_6$	-	-	//	0,13789	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_5\ x_6$	-	-	//	0,09810	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4$	-	-	0,05620	0,16840	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_5$	-	-	0,03704	0,11764	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_6$	-	-	//	0,17128	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_5$	-	-	0,03528	0,10719	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_6$	-	-	//	0,11272	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_5\ x_6$	-	-	//	0,07704	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,03519	0,17438	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_6$	-	-	//	0,14404	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_5\ x_6$	-	-	//	0,12027	-	-	-	-	-	-
$x_4\ x_5\ x_6$	-	-	//	0,12240	-	-	-	-	-	-

Tabla 8 - Coeficientes de Variación de $\hat{\bar{Y}}_1$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 1 (cont.)

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
$x_1\,x_2\,x_3\,x_4$	-	-	0,04073	0,21866	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_3\,x_5$	-	-	0,02389	0,14978	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_3\,x_6$	-	-	//	0,24090	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_4\,x_5$	-	-	0,02546	0,11430	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_4\,x_6$	-	-	//	0,18542	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_5\,x_6$	-	-	//	0,12943	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_3\,x_4\,x_5$	-	-	0,02399	0,15043	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_3\,x_4\,x_6$	-	-	//	0,18186	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_3\,x_5\,x_6$	-	-	//	0,12622	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	//	0,09709	-	-	-	-	-	-
$x_2\,x_3\,x_4\,x_5$	-	-	0,03468	0,16214	-	-	-	-	-	-
$x_2\,x_3\,x_4\,x_6$	-	-	//	0,16840	-	-	-	-	-	-
$x_2\,x_3\,x_5\,x_6$	-	-	//	0,11764	-	-	-	-	-	-
$x_2\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	//	0,10719	-	-	-	-	-	-
$x_3\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	//	0,17438	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5$	-	-	0,02388	0,16013	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_6$	-	-	//	0,21866	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_3\,x_5\,x_6$	-	-	//	0,14978	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	//	0,11430	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	//	0,15043	-	-	-	-	-	-
$x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	//	0,16214	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	//	0,16013	-	-	-	-	-	-

Tabla 9 - Coeficientes de Variación de $\hat{\hat{Y}}_2$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 1

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
-	0,11723	-	-	-	-	-	-	-	-	-
x_1	-	0,12522	0,11171	0,12114	-	-	-	-	-	-
x_2	-	0,11706	0,11292	0,11632	-	-	-	-	-	-
x_3	-	0,13977	0,11555	0,14086	-	-	-	-	-	-
x_4	-	0,13704	0,11722	0,13406	-	-	-	-	-	-
x_5	-	0,21013	0,11153	0,20359	-	-	-	-	-	-
x_6	-	0,11723		0,11723	-	-	-	-	-	-
x_1 x_2	-	-	0,11092	0,14201	0,11445	0,11445	0,11705	0,12323	0,11705	0,12323
x_1 x_3	-	-	0,10916	0,13782	0,11132	0,11132	0,13193	0,12165	0,13193	0,12165
x_1 x_4	-	-	0,10625	0,10727	0,10695	0,10695	0,10793	0,10785	0,10793	0,10785
x_1 x_5	-	-	0,11070	0,16216	0,11725	0,11725	0,15778	0,12136	0,15778	0,12136
x_1 x_6	-	-		0,12114	0,11171	0,11171	0,11171		0,11171	
x_2 x_3	-	-	0,11093	0,13830	0,11177	0,11177	0,13515	0,11489	0,13515	0,11489
x_2 x_4	-	-	0,11212	0,12233	0,11241	0,11241	0,12457	0,11467	0,12457	0,11467
x_2 x_5	-	-	0,11081	0,17847	0,11656	0,11656	0,17582	0,11705	0,17582	0,11705
x_2 x_6	-	-		0,11632	0,11292	0,11292	0,11292		0,11292	
x_3 x_4	-	-	0,11531	0,17201	0,12993	0,12993	0,13666	0,13414	0,13666	0,13414
x_3 x_5	-	-	0,10992	0,21648	0,13873	0,13873	0,20882	0,13566	0,20882	0,13566
x_3 x_6	-	-		0,14086	0,11555	0,11555	0,11555		0,11555	
x_4 x_5	-	-	0,10768	0,23754	0,12589	0,12589	0,19260	0,11146	0,19260	0,11146
x_4 x_6	-	-		0,13406	0,11722	0,11722	0,11722		0,11722	
x_5 x_6	-	-		0,20359	0,11153	0,11153	0,11153		0,11153	
x_1 x_2 x_3	-	-	0,10842	0,15488	-	-	-	-	-	-
x_1 x_2 x_4	-	-	0,10568	0,11919	-	-	-	-	-	-
x_1 x_2 x_5	-	-	0,11032	0,14968	-	-	-	-	-	-
x_1 x_2 x_6	-	-		0,14201	-	-	-	-	-	-
x_1 x_3 x_4	-	-	0,10590	0,14610	-	-	-	-	-	-
x_1 x_3 x_5	-	-	0,10855	0,17301	-	-	-	-	-	-
x_1 x_3 x_6	-	-		0,13782	-	-	-	-	-	-
x_1 x_4 x_5	-	-	0,10371	0,18405	-	-	-	-	-	-
x_1 x_4 x_6	-	-		0,10727	-	-	-	-	-	-
x_1 x_5 x_6	-	-		0,16216	-	-	-	-	-	-
x_2 x_3 x_4	-	-	0,11082	0,16149	-	-	-	-	-	-
x_2 x_3 x_5	-	-	0,10902	0,19174	-	-	-	-	-	-
x_2 x_3 x_6	-	-		0,13830	-	-	-	-	-	-
x_2 x_4 x_5	-	-	0,10693	0,20983	-	-	-	-	-	-
x_2 x_4 x_6	-	-		0,12233	-	-	-	-	-	-
x_2 x_5 x_6	-	-		0,17847	-	-	-	-	-	-
x_3 x_4 x_5	-	-	0,10761	0,25953	-	-	-	-	-	-
x_3 x_4 x_6	-	-		0,17201	-	-	-	-	-	-
x_3 x_5 x_6	-	-		0,21648	-	-	-	-	-	-
x_4 x_5 x_6	-	-		0,23754	-	-	-	-	-	-

Tabla 9 - Coeficientes de Variación de $\hat{\bar{Y}}_2$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 1 (cont.)

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	-	-	0,10532	0,15343	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_5$	-	-	0,10812	0,15981	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_6$	-	-		0,15488	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4\ x_5$	-	-	0,10364	0,16488	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4\ x_6$	-	-		0,11919	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_5\ x_6$	-	-		0,14968	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,10369	0,20743	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4\ x_6$	-	-		0,14610	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_5\ x_6$	-	-		0,17301	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-		0,18405	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,10682	0,23337	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4\ x_6$	-	-		0,16149	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_5\ x_6$	-	-		0,19174	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-		0,20983	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-		0,25953	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,10361	0,18931	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_6$	-	-		0,15343	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_5\ x_6$	-	-		0,15981	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-		0,16488	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-		0,20743	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-		0,23337	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-		0,18931	-	-	-	-	-	-

Tabla 10 - Coeficientes de Variación de $\hat{\hat{Y}}_3$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 1

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
-	0,04123	-	-	-	-	-	-	-	-	-
x_1	-	0,12036	0,03399	0,10215	-	-	-	-	-	-
x_2	-	0,08935	0,03645	0,08058	-	-	-	-	-	-
x_3	-	0,10125	0,04082	0,09260	-	-	-	-	-	-
x_4	-	0,06917	0,03843	0,05840	-	-	-	-	-	-
x_5	-	0,12957	0,03716	0,10766	-	-	-	-	-	-
x_6	-	0,04123	//	0,04123	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2$	-	-	0,03327	0,14038	0,08918	0,08918	0,06652	0,09573	0,08482	0,09573
$x_1\ x_3$	-	-	0,03383	0,12616	0,08435	0,08435	0,10044	0,11934	0,11339	0,11934
$x_1\ x_4$	-	-	0,03397	0,07964	0,05399	0,05399	0,06427	0,09242	0,08307	0,09242
$x_1\ x_5$	-	-	0,03396	0,08778	0,06078	0,06078	0,10201	0,08538	0,11478	0,08538
$x_1\ x_6$	-	-	//	0,10215	0,03399	0,03399	0,03399	//	0,06264	//
$x_2\ x_3$	-	-	0,03611	0,11391	0,07419	0,07419	0,10011	0,08895	0,10861	0,08895
$x_2\ x_4$	-	-	0,03540	0,07754	0,05563	0,05563	0,06887	0,08134	0,08073	0,08134
$x_2\ x_5$	-	-	0,03555	0,09497	0,05665	0,05665	0,11247	0,07077	0,12010	0,07077
$x_2\ x_6$	-	-	//	0,08058	0,03645	0,03645	0,03645	//	0,05570	//
$x_3\ x_4$	-	-	0,03843	0,12089	0,06657	0,06657	0,06480	0,09791	0,06608	0,09791
$x_3\ x_5$	-	-	0,03664	0,13390	0,07438	0,07438	0,12923	0,09918	0,12988	0,09918
$x_3\ x_6$	-	-	//	0,09260	0,04082	0,04082	0,04082	//	0,04282	//
$x_4\ x_5$	-	-	0,03679	0,14742	0,06902	0,06902	0,10868	0,06419	0,11125	0,06419
$x_4\ x_6$	-	-	//	0,05840	0,03843	0,03843	0,03843	//	0,04518	//
$x_5\ x_6$	-	-	//	0,10766	0,03716	0,03716	0,03716	//	0,06027	//
$x_1\ x_2\ x_3$	-	-	0,03309	0,15746	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4$	-	-	0,03326	0,11585	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_5$	-	-	0,03326	0,09804	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_6$	-	-	//	0,14038	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4$	-	-	0,03370	0,12709	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_5$	-	-	0,03378	0,11247	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_6$	-	-	//	0,12616	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_5$	-	-	0,03393	0,10975	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_6$	-	-	//	0,07964	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_5\ x_6$	-	-	//	0,08778	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4$	-	-	0,03538	0,12970	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_5$	-	-	0,03513	0,12233	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_6$	-	-	//	0,11391	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_5$	-	-	0,03516	0,13026	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_6$	-	-	//	0,07754	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_5\ x_6$	-	-	//	0,09497	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,03657	0,18000	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_6$	-	-	//	0,12089	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_5\ x_6$	-	-	//	0,13390	-	-	-	-	-	-
$x_4\ x_5\ x_6$	-	-	//	0,14742	-	-	-	-	-	-

Tabla 10 - Coeficientes de Variación de $\hat{\bar{Y}}_3$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 1 (cont.)

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
$x_1\, x_2\, x_3\, x_4$	-	-	0,03299	0,15112	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_3\, x_5$	-	-	0,03308	0,11900	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_3\, x_6$	-	-	//	0,15746	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_4\, x_5$	-	-	0,03325	0,10843	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_4\, x_6$	-	-	//	0,11585	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_5\, x_6$	-	-	//	0,09804	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_3\, x_4\, x_5$	-	-	0,03357	0,14600	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_3\, x_4\, x_6$	-	-	//	0,12709	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_3\, x_5\, x_6$	-	-	//	0,11247	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	//	0,10975	-	-	-	-	-	-
$x_2\, x_3\, x_4\, x_5$	-	-	0,03502	0,16506	-	-	-	-	-	-
$x_2\, x_3\, x_4\, x_6$	-	-	//	0,12970	-	-	-	-	-	-
$x_2\, x_3\, x_5\, x_6$	-	-	//	0,12233	-	-	-	-	-	-
$x_2\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	//	0,13026	-	-	-	-	-	-
$x_3\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	//	0,18000	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5$	-	-	0,03298	0,14365	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_6$	-	-	//	0,15112	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_3\, x_5\, x_6$	-	-	//	0,11900	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	//	0,10843	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	//	0,14600	-	-	-	-	-	-
$x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	//	0,16506	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	//	0,14365	-	-	-	-	-	-

En las tablas 8, 9 y 10, se tienen los coeficientes de variación de $\hat{\bar{Y}}_1, \hat{\bar{Y}}_2$ y $\hat{\bar{Y}}_3$, separado en bloques de acuerdo a la cantidad de variables auxiliares utilizadas, sombreado en gris claro el menor coeficiente de cada estimador en cada bloque, y en gris oscuro el mayor, además está enmarcado en líneas punteadas el menor coeficiente del bloque, y en línea continua el menor coeficiente de toda la tabla. El coeficiente de variación no puede calcularse en los estimadores de regresión lineal, cuando alguna de las variables auxiliares es x_6, ya que los respectivos coeficientes *b* son calculados para minimizar la varianza, y en el denominador se tiene la desviación de x_6, que es cero, y están identificados como "//", a diferencia de los que están con "-", que no pueden calcularse porque no están definidos.

Analizando los resultados, puede notarse como el estimador de regresión lineal tiene el menor coeficiente de variación en cada bloque, así como de toda la tabla, además se observa como consistentemente va disminuyendo a medida que se agregan variables, y la mayoría de las veces en el menor de cada bloque, mantiene las variables que generan el menor en el bloque anterior.

Adicionalmente, el estimador de regresión lineal tiene la menor diferencia o rango que existe entre el menor y mayor valor del coeficiente de variación en cada bloque. Este comportamiento se mantiene utilizando de 1 a 5 variables auxiliares, pero no puede contrastarse con 6 ya que x_6 es constante, y su cuasivarianza es cero.

En contraposición, los mayores coeficientes de variación en cada bloque los tiene el estimador por diferencia, así como el mayor rango en la mayoría de los casos. También presenta mucha inestabilidad al agregar variables, puede aumentar o disminuir, sin presentar un patrón.

Otro aspecto importante es la cantidad de estimadores que se tienen cuando se utilizan 2 variables auxiliares (8 estimadores), y a excepción del estimador por diferencia, el resto presenta buenas precisiones y bajo rango, resultando los estimadores indirectos compuestos (razón-regresión y regresión-razón) estables y precisos. Todo esto se muestra en la tabla 11.

Tabla 11 - Menor, mayor y rangos de coeficientes de variación según bloque y estimador - Set 1

	$CV(\hat{\bar{Y}}_1)$			$CV(\hat{Y}_2)$			$CV(\hat{Y}_3)$		
	Menor	Mayor	Rango	Menor	Mayor	Rango	Menor	Mayor	Rango
Sin variables auxiliares									
Directo	0,09407	-	-	0,11723	-	-	0,04123	-	-
Con 1 variable auxiliar									
Razón	0,06665	0,18066	0,11401	0,11706	0,21013	0,09307	0,04123	0,12957	0,08835
Regresión Lineal	0,04087	0,09298	0,05212	0,11153	0,11722	0,00569	0,03399	0,04082	0,00683
por Diferencias	0,06684	0,18066	0,11382	0,11632	0,20359	0,08727	0,04123	0,10766	0,06643
Con 2 variables auxiliares									
Regresión Lineal	0,02637	0,07527	0,04890	0,10625	0,11531	0,00906	0,03327	0,03843	0,00516
por Diferencias	0,06684	0,22693	0,16009	0,10727	0,23754	0,13027	0,05840	0,14742	0,08902
Razón-Regresión (1,2)	0,03788	0,13123	0,09335	0,10695	0,13873	0,03178	0,03399	0,08918	0,05519
Razón-Regresión (2,1)	0,03788	0,13123	0,09335	0,10695	0,13873	0,03178	0,03399	0,08918	0,05519
Regresión-Razón 1 coeficiente (1,2)	0,04087	0,11458	0,07371	0,10793	0,20882	0,10089	0,03399	0,12923	0,09525
Regresión-Razón 1 coeficiente. (2,1)	0,05246	0,13899	0,08654	0,10785	0,13566	0,02781	0,06419	0,11934	0,05515
Regresión-Razón 2 coeficientes (1,2)	0,06545	0,15774	0,09229	0,10796	0,20883	0,10086	0,04282	0,12988	0,08706
Regresión-Razón 2 coeficientes (2,1)	0,05246	0,17904	0,12658	0,10785	0,13566	0,02781	0,06419	0,11934	0,05515
Con 3 variables auxiliares									
Regresión Lineal	0,02402	0,05620	0,03218	0,10371	0,11082	0,00711	0,03309	0,03657	0,00349
por Diferencias	0,07704	0,24090	0,16387	0,10727	0,25953	0,15226	0,07754	0,18000	0,10247
Con 4 variables auxiliares									
Regresión Lineal	0,02389	0,04073	0,01684	0,10364	0,10812	0,00448	0,03299	0,03502	0,00203
por Diferencias	0,09709	0,24090	0,14381	0,11919	0,25953	0,14034	0,09804	0,18000	0,08197
Con 5 variables auxiliares									
Regresión Lineal	0,02388	-	-	0,10361	-	-	0,03298	-	-
por Diferencias	0,11430	0,21866	0,10436	0,15343	0,23337	0,07993	0,10843	0,16506	0,05663
Con 6 variables auxiliares									
Regresión Lineal	-	-	-	-	-	-	-	-	-
por Diferencias	0,16013	-	-	0,18931	-	-	0,14365	-	-

En líneas generales, se puede decir que en este grupo de datos, el estimador de regresión lineal múltiple es el más preciso y estable, aunque es necesario recalcar que se está trabajando con el estimador de regresión lineal múltiple de varianza mínima.

El estimador de regresión lineal siempre tiene el menor coeficiente de variación, y este disminuye a medida que se agregan variables auxiliares, aunque dicha ganancia en precisión va desacelerando, y además, casi siempre conserva las variables que minimizaron la varianza con una variable menos, esto es, $CV(\hat{\bar{Y}}_1)$ pasa de 0,09407 con el estimador directo (caso particular del estimador de regresión lineal con b=0, es decir, sin variables auxiliares), a 0,04087 con 1 variable auxiliar 8(x_5), a 0,02637 con 2 variables auxiliares (x_5, x_1), a 0,2402 con 3 variables auxiliares (x_5, x_1, x_3), a 0,02389 con 4 variables auxiliares (x_5, x_1, x_3, x_2), a 0,02388 con 5 variables auxiliares (x_5, x_1, x_3, x_2, x_4), a partir de 3 variables auxiliares la ganancia por agregar una variable auxiliar no es tan grande. Análogamente, $CV(\hat{\bar{Y}}_2)$ comienza con 0,11723 con el estimador directo, y luego 0,11153 (x_5), 0,10625 (x_1, x_4), 0,10371 (x_1, x_4, x_5), 0,10364 (x_1, x_4, x_5, x_2) y 0,10361 (x_1, x_4, x_5, x_2, x_3), y para $CV(\hat{\bar{Y}}_3)$, 0,4123 (directo), 0,3399 (x_1), 0,3327 (x_1, x_2), 0,3309 (x_1, x_2, x_3), 0,3299 (x_1, x_2, x_3, x_4) y 0,3298 (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).

El asunto es determinar cuál es el punto en el cual agregar más variables auxiliares no aporta mucho en ganancia en precisión, y en el caso de varias variables a estimar, escoger las variables auxiliares que funcionen bien en conjunto para estimar varias variables. En este set de datos, tomar las variables auxiliares x_1, x_3 y x_5 o x_1, x_4 y x_5, da buenos resultados, y el coeficiente de variación respectivo para estimar el promedio de y_1, y_2 y y_3 son 0,02402, 0,10855, 0,03378 en el primer caso, y 0,02549, 0,10371 y 0,03393, en el segundo, que son razonablemente buenos.

Para verificar que con 6 variables auxiliares se mantiene la tendencia de reducción del coeficiente de variación, se incluirá un nuevo grupo de datos, igual al anterior, pero donde x_6 no es constante, sino que por el contrario tiene una variabilidad alta.

Tabla 12 - Valores de las variables para cada elemento - Set 2

No.	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	10	9	13	12	12	17	8	7	5
2	12	13	15	11	11	16	14	10	14
3	14	10	14	9	10	9	13	16	10
4	9	14	13	13	15	13	13	10	7
5	11	18	14	12	13	14	11	11	13
6	8	12	15	15	14	15	10	7	17
7	16	10	15	5	11	16	16	15	15
8	13	5	16	9	10	7	10	19	11
9	7	10	13	15	15	7	9	5	6
10	10	17	12	15	11	10	10	11	9
11	11	14	16	10	11	10	10	10	12
12	14	8	13	11	11	13	13	17	16
13	10	18	14	13	13	18	12	10	18
14	9	15	16	12	14	10	10	8	14
15	7	14	12	16	16	14	10	6	10
16	14	12	16	10	12	14	14	18	5
17	13	8	18	10	9	18	14	16	8
18	12	20	15	10	10	14	14	13	12
19	12	15	14	13	12	12	10	14	14
20	17	14	15	8	14	14	14	19	17
Promedio	11,45	12,80	14,45	11,45	12,20	13,05	11,75	12,10	11,65
Cuasivarianz	7,7342	15,0105	2,3658	7,4184	3,8527	10,9974	4,8290	19,6737	16,5553

Tabla 13 - Cuasivarianzas y Cuasicovarianzas - Set 2

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
y_1	7,7342	-2,6947	1,7868	-6,6868	-3,2000	1,3974	4,3290	11,1105	2,8500
y_2		15,0105	-1,3263	3,2000	2,0421	2,1684	0,1053	-5,2947	4,2421
y_3			2,3658	-2,3711	-1,4105	0,7132	1,2237	2,9526	0,7447
x_1				7,4184	3,1158	-0,9712	-4,0395	-8,7842	-1,9395
x_2					3,8526	-0,2737	-1,5263	-5,1263	0,1790
x_3						10,9974	3,0132	-0,3737	2,9132
x_4							4,8290	5,8684	2,0132
x_5								19,6737	2,5105
x_6									16,5552

Tabla 14 - Coeficientes de Correlación - Set 2

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
y_1	1,0000	-0,2501	0,4177	-0,8828	-0,5862	0,1515	0,7084	0,9007	0,2519
y_2		1,0000	-0,2226	0,3033	0,2685	0,1688	0,0124	-0,3081	0,2691
y_3			1,0000	-0,5660	-0,4672	0,1398	0,3620	0,4328	0,1190
x_1				1,0000	0,5828	-0,1075	-0,6749	-0,7271	-0,1750
x_2					1,0000	-0,0421	-0,3539	-0,5888	0,0224
x_3						1,0000	0,4135	-0,0254	0,2159
x_4							1,0000	0,6021	0,2252
x_5								1,0000	0,1391
x_6									1,0000

Tabla 15 - Coeficientes de Variación de $\hat{\hat{Y}}_1$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 2

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
-	0,09407	-	-	-	-	-	-	-	-	-
x_1	-	0,18066	0,04419	0,18066	-	-	-	-	-	-
x_2	-	0,14001	0,07621	0,14346	-	-	-	-	-	-
x_3	-	0,12542	0,09298	0,13503	-	-	-	-	-	-
x_4	-	0,06665	0,06640	0,06684	-	-	-	-	-	-
x_5	-	0,07033	0,04087	0,07704	-	-	-	-	-	-
x_6	-	0,14400	0,09104	0,14584	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2$	-	-	0,04340	0,22693	0,13123	0,13123	0,07319	//	0,14295	0,14419
$x_1\ x_3$	-	-	0,04386	0,19950	0,12491	0,12491	0,10237	//	0,15986	0,17904
$x_1\ x_4$	-	-	0,04180	0,13789	0,06415	0,06415	0,05723	//	0,13547	0,12667
$x_1\ x_5$	-	-	0,02637	0,09810	0,05343	0,05343	0,06737	//	0,14005	0,09808
$x_1\ x_6$	-	-	0,04320	0,20154	0,13328	0,13328	0,13119	//	0,17969	0,17622
$x_2\ x_3$	-	-	0,07527	0,17128	0,11781	0,11781	0,11458	0,13899	0,14591	0,13899
$x_2\ x_4$	-	-	0,05718	0,11272	0,06542	0,06542	0,05976	0,10835	0,10832	0,10835
$x_2\ x_5$	-	-	0,04035	0,07704	0,04585	0,04585	0,06432	0,06972	0,11090	0,06972
$x_2\ x_6$	-	-	0,07202	0,18278	0,12126	0,12126	0,13173	0,13823	0,15973	0,13823
$x_3\ x_4$	-	-	0,06477	0,14404	0,06559	0,06559	0,06478	0,12271	0,06525	0,12271
$x_3\ x_5$	-	-	0,03743	0,12027	0,04182	0,04182	0,06803	0,09012	0,06848	0,09012
$x_3\ x_6$	-	-	0,09055	0,19318	0,11132	0,11132	0,14322	0,12539	0,14344	0,12539
$x_4\ x_5$	-	-	0,03588	0,12240	0,03788	0,03788	0,06776	0,05246	0,09391	0,05246
$x_4\ x_6$	-	-	0,06580	0,14661	0,06586	0,06586	0,13938	0,06624	0,15380	0,06624
$x_5\ x_6$	-	-	0,03906	0,15524	0,05178	0,05178	0,12803	0,07022	0,17901	0,07022
$x_1\ x_2\ x_3$	-	-	0,04305	0,24090	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4$	-	-	0,04076	0,18542	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_5$	-	-	0,02627	0,12943	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_6$	-	-	0,04206	0,24472	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4$	-	-	0,04177	0,18186	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_5$	-	-	0,02402	0,12622	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_6$	-	-	0,04305	0,23334	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_5$	-	-	0,02549	0,09709	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_6$	-	-	0,04116	0,17777	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_5\ x_6$	-	-	0,02489	0,15281	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4$	-	-	0,05620	0,16840	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_5$	-	-	0,03704	0,11764	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_6$	-	-	0,07170	0,22098	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_5$	-	-	0,03528	0,10719	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_6$	-	-	0,05574	0,17361	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_5\ x_6$	-	-	0,03820	0,15655	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,03519	0,17438	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,06382	0,21081	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,03642	0,19823	-	-	-	-	-	-
$x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,03482	0,19430	-	-	-	-	-	-

Tabla 15 - Coeficientes de Variación de $\hat{\hat{Y}}_1$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 2 (cont.)

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
$x_1\,x_2\,x_3\,x_4$	-	-	0,04073	0,21866	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_3\,x_5$	-	-	0,02389	0,14978	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_3\,x_6$	-	-	0,04191	0,27036	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_4\,x_5$	-	-	0,02546	0,11430	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_4\,x_6$	-	-	0,03981	0,21767	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_5\,x_6$	-	-	0,02488	0,17575	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_3\,x_4\,x_5$	-	-	0,02399	0,15043	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_3\,x_4\,x_6$	-	-	0,04789	0,22875	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_3\,x_5\,x_6$	-	-	0,03375	0,19059	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	0,03437	0,16661	-	-	-	-	-	-
$x_2\,x_3\,x_4\,x_5$	-	-	0,03468	0,16214	-	-	-	-	-	-
$x_2\,x_3\,x_4\,x_6$	-	-	0,05970	0,22905	-	-	-	-	-	-
$x_2\,x_3\,x_5\,x_6$	-	-	0,04356	0,19768	-	-	-	-	-	-
$x_2\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	0,04188	0,18620	-	-	-	-	-	-
$x_3\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	0,04224	0,24463	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5$	-	-	0,02388	0,16013	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_6$	-	-	0,16513	0,25976	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_3\,x_5\,x_6$	-	-	0,02306	0,20793	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	0,02428	0,17835	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	0,02308	0,21824	-	-	-	-	-	-
$x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	0,03358	0,23693	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	0,02305	0,22594	-	-	-	-	-	-

Tabla 16 - Coeficientes de Variación de $\hat{\hat{Y}}_2$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 2

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
-	0,11723	-	-	-	-	-	-	-	-	-
x_1	-	0,12522	0,11171	0,12114	-	-	-	-	-	-
x_2	-	0,11706	0,11292	0,11632	-	-	-	-	-	-
x_3	-	0,13977	0,11555	0,14086	-	-	-	-	-	-
x_4	-	0,13704	0,11722	0,13406	-	-	-	-	-	-
x_5	-	0,21013	0,11153	0,20359	-	-	-	-	-	-
x_6	-	0,15331	0,11290	0,14537	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2$	-	-	0,11092	0,14201	0,11445	0,11445	0,11705	0,12323	0,11705	0,12323
$x_1\ x_3$	-	-	0,10916	0,13782	0,11132	0,11132	0,13193	0,12165	0,13193	0,12165
$x_1\ x_4$	-	-	0,10625	0,10727	0,10695	0,10695	0,10793	0,10785	0,10793	0,10785
$x_1\ x_5$	-	-	0,11070	0,16216	0,11725	0,11725	0,15778	0,12136	0,15778	0,12136
$x_1\ x_6$	-	-	0,10492	0,13606	0,10637	0,10637	0,14141	0,11579	0,14141	0,11579
$x_2\ x_3$	-	-	0,11093	0,13830	0,11177	0,11177	0,13515	0,11489	0,13515	0,11489
$x_2\ x_4$	-	-	0,11212	0,12233	0,11241	0,11241	0,12457	0,11467	0,12457	0,11467
$x_2\ x_5$	-	-	0,11081	0,17847	0,11656	0,11656	0,17582	0,11705	0,17582	0,11705
$x_2\ x_6$	-	-	0,10863	0,14577	0,10978	0,10978	0,15065	0,11311	0,15065	0,11311
$x_3\ x_4$	-	-	0,11531	0,17201	0,12993	0,12993	0,13666	0,13414	0,13666	0,13414
$x_3\ x_5$	-	-	0,10992	0,21648	0,13873	0,13873	0,20882	0,13566	0,20882	0,13566
$x_3\ x_6$	-	-	0,11212	0,18045	0,12563	0,12563	0,15302	0,13939	0,15302	0,13939
$x_4\ x_5$	-	-	0,10768	0,23754	0,12589	0,12589	0,19260	0,11146	0,19260	0,11146
$x_4\ x_6$	-	-	0,11276	0,17043	0,12676	0,12676	0,15054	0,13619	0,15054	0,13619
$x_5\ x_6$	-	-	0,10523	0,23116	0,14944	0,14944	0,14313	0,20980	0,14313	0,20980
$x_1\ x_2\ x_3$	-	-	0,10842	0,15488	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4$	-	-	0,10568	0,11919	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_5$	-	-	0,11032	0,14968	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_6$	-	-	0,10466	0,15599	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4$	-	-	0,10590	0,14610	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_5$	-	-	0,10855	0,17301	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_6$	-	-	0,10363	0,16783	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_5$	-	-	0,10371	0,18405	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_6$	-	-	0,10079	0,13795	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_5\ x_6$	-	-	0,10374	0,18637	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4$	-	-	0,11082	0,16149	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_5$	-	-	0,10902	0,19174	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_6$	-	-	0,10762	0,17938	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_5$	-	-	0,10693	0,20983	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_6$	-	-	0,10846	0,16238	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_5\ x_6$	-	-	0,10494	0,21015	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,10761	0,25953	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,11150	0,21447	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,10466	0,25334	-	-	-	-	-	-
$x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,10273	0,26851	-	-	-	-	-	-

Tabla 16 - Coeficientes de Variación de $\hat{\bar{Y}}_2$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 2

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	-	-	0,10532	0,15343	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_5$	-	-	0,10812	0,15981	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_6$	-	-	0,10336	0,18299	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4\ x_5$	-	-	0,10364	0,16488	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4\ x_6$	-	-	0,10060	0,14852	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_5\ x_6$	-	-	0,10371	0,17654	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,10369	0,20743	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,10592	0,18494	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,10788	0,20905	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,10343	0,21447	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,10682	0,23337	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,11252	0,20692	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,10938	0,23326	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,10747	0,24501	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,10782	0,29725	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,10361	0,18931	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,15212	0,19164	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,10273	0,19909	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,09822	0,19909	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,09817	0,24593	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,10239	0,27531	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,09816	0,23156	-	-	-	-	-	-

Tabla 17 - Coeficientes de Variación de $\hat{\bar{Y}}_3$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 2

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
-	0,04123	-	-	-	-	-	-	-	-	-
x_1	-	0,12036	0,03399	0,10215	-	-	-	-	-	-
x_2	-	0,08935	0,03645	0,08058	-	-	-	-	-	-
x_3	-	0,10125	0,04082	0,09260	-	-	-	-	-	-
x_4	-	0,06917	0,03843	0,05840	-	-	-	-	-	-
x_5	-	0,12957	0,03716	0,10766	-	-	-	-	-	-
x_6	-	0,13664	0,04093	0,11190	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2$	-	-	0,03327	0,14038	0,08918	0,08918	0,06652	0,09573	0,08620	0,09573
$x_1\ x_3$	-	-	0,03383	0,12616	0,08435	0,08435	0,10044	0,11934	0,11443	0,11934
$x_1\ x_4$	-	-	0,03397	0,07964	0,05399	0,05399	0,06427	0,09242	0,08448	0,09242
$x_1\ x_5$	-	-	0,03396	0,08778	0,06078	0,06078	0,10201	0,08538	0,11581	0,08538
$x_1\ x_6$	-	-	0,03398	0,13591	0,09301	0,09301	0,13663	0,11851	0,14722	0,11851
$x_2\ x_3$	-	-	0,03611	0,11391	0,07419	0,07419	0,10011	0,08895	0,11066	0,08895
$x_2\ x_4$	-	-	0,03540	0,07754	0,05563	0,05563	0,06887	0,08134	0,08346	0,08134
$x_2\ x_5$	-	-	0,03555	0,09497	0,05665	0,05665	0,11247	0,07077	0,12196	0,07077
$x_2\ x_6$	-	-	0,03606	0,13257	0,08103	0,08103	0,13480	0,08928	0,14281	0,08928
$x_3\ x_4$	-	-	0,03843	0,12089	0,06657	0,06657	0,06480	0,09791	0,06586	0,09791
$x_3\ x_5$	-	-	0,03664	0,13390	0,07438	0,07438	0,12923	0,09918	0,12977	0,09918
$x_3\ x_6$	-	-	0,04065	0,15357	0,09003	0,09003	0,13461	0,09992	0,13512	0,09992
$x_4\ x_5$	-	-	0,03679	0,14742	0,06902	0,06902	0,10868	0,06419	0,10953	0,06419
$x_4\ x_6$	-	-	0,03840	0,13087	0,06652	0,06652	0,13575	0,06822	0,13643	0,06822
$x_5\ x_6$	-	-	0,03708	0,16131	0,09708	0,09708	0,13663	0,12872	0,14544	0,12872
$x_1\ x_2\ x_3$	-	-	0,03309	0,15746	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4$	-	-	0,03326	0,11585	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_5$	-	-	0,03326	0,09804	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_6$	-	-	0,03321	0,16733	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4$	-	-	0,03370	0,12709	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_5$	-	-	0,03378	0,11247	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_6$	-	-	0,03383	0,16774	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_5$	-	-	0,03393	0,10975	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_6$	-	-	0,03395	0,13142	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_5\ x_6$	-	-	0,03395	0,13910	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4$	-	-	0,03538	0,12970	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_5$	-	-	0,03513	0,12233	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_6$	-	-	0,03585	0,16805	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_5$	-	-	0,03516	0,13026	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_6$	-	-	0,03525	0,14137	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_5\ x_6$	-	-	0,03534	0,15397	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,03657	0,18000	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,03839	0,18032	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,03662	0,19117	-	-	-	-	-	-
$x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,03676	0,19762	-	-	-	-	-	-

Tabla 17 - Coeficientes de Variación de $\hat{\hat{Y}}_3$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 2

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
$x_1\, x_2\, x_3\, x_4$	-	-	0,03299	0,15112	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_3\, x_5$	-	-	0,03308	0,11900	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_3\, x_6$	-	-	0,03306	0,19306	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_4\, x_5$	-	-	0,03325	0,10843	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_4\, x_6$	-	-	0,03320	0,15686	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_5\, x_6$	-	-	0,03319	0,14667	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_3\, x_4\, x_5$	-	-	0,03357	0,14600	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_3\, x_4\, x_6$	-	-	0,03408	0,17682	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_3\, x_5\, x_6$	-	-	0,03416	0,16875	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	0,03429	0,16303	-	-	-	-	-	-
$x_2\, x_3\, x_4\, x_5$	-	-	0,03502	0,16506	-	-	-	-	-	-
$x_2\, x_3\, x_4\, x_6$	-	-	0,03561	0,18703	-	-	-	-	-	-
$x_2\, x_3\, x_5\, x_6$	-	-	0,03540	0,18395	-	-	-	-	-	-
$x_2\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	0,03540	0,18587	-	-	-	-	-	-
$x_3\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	0,03691	0,23218	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5$	-	-	0,03298	0,14365	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_6$	-	-	0,04620	0,19547	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_3\, x_5\, x_6$	-	-	0,03306	0,17392	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	0,03319	0,16294	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	0,03357	0,20010	-	-	-	-	-	-
$x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	0,03493	0,22138	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	0,03295	0,19904	-	-	-	-	-	-

Tabla 18 - Menor, mayor y rangos de coeficientes de variación según bloque y estimador - Set 2

	$CV(\hat{\hat{Y}}_1)$			$CV(\hat{\hat{Y}}_2)$			$CV(\hat{\hat{Y}}_3)$		
	Menor	Mayor	Rango	Menor	Mayor	Rango	Menor	Mayor	Rango
Sin variables auxiliares									
Directo	0,09407	-	-	0,11723	-	-	0,04123	-	-
Con 1 variable auxiliar									
Razón	0,06665	0,18066	0,11401	0,11706	0,21013	0,09307	0,06917	0,13664	0,06747
Regresión Lineal	0,04087	0,09298	0,05212	0,11153	0,11722	0,00569	0,03399	0,04093	0,00695
por Diferencias	0,06684	0,18066	0,11382	0,11632	0,20359	0,08727	0,05840	0,11190	0,05351
Con 2 variables auxiliares									
Regresión Lineal	0,02637	0,09055	0,06419	0,10492	0,11531	0,01039	0,03327	0,04065	0,00738
por Diferencias	0,07704	0,22693	0,14990	0,10727	0,23754	0,13027	0,07754	0,16131	0,08377
Razón-Regresión (1,2)	0,03788	0,13328	0,09540	0,10637	0,14944	0,04307	0,05399	0,09708	0,04309
Razón-Regresión (2,1)	0,03788	0,13328	0,09540	0,10637	0,14944	0,04307	0,05399	0,09708	0,04309
Regresión-Razón 1 coeficiente (1,2)	0,05723	0,14322	0,08599	0,10793	0,20882	0,10089	0,06427	0,13663	0,07236
Regresión-Razón 1 coeficiente. (2,1)	0,06419	0,12872	0,06453	0,10785	0,20980	0,10195	0,06419	0,12872	0,06453
Regresión-Razón 2 coeficientes (1,2)	0,06525	0,17969	0,11443	0,10793	0,20882	0,10089	0,06586	0,14722	0,08136
Regresión-Razón 2 coeficientes (2,1)	0,05246	0,17904	0,12658	0,10785	0,20980	0,10195	0,06419	0,12872	0,06453
Con 3 variables auxiliares									
Regresión Lineal	0,02402	0,07170	0,04768	0,10079	0,11150	0,01071	0,03309	0,03839	0,00530
por Diferencias	0,09709	0,24472	0,14763	0,11919	0,26851	0,14932	0,09804	0,19762	0,09959
Con 4 variables auxiliares									
Regresión Lineal	0,02389	0,05970	0,03581	0,10060	0,11252	0,01192	0,03299	0,03691	0,00393
por Diferencias	0,11430	0,27036	0,15606	0,14852	0,29725	0,14874	0,10843	0,23218	0,12375
Con 5 variables auxiliares									
Regresión Lineal	0,02306	0,16513	0,14207	0,09817	0,15212	0,05395	0,03298	0,04620	0,01322
por Diferencias	0,16013	0,25976	0,09964	0,18931	0,27531	0,08600	0,14365	0,22138	0,07773
Con 6 variables auxiliares									
Regresión Lineal	0,02305	-	-	0,09816	-	-	0,03295	-	-
por Diferencias	0,22594	-	-	0,23156	-	-	0,19904	-	-

Al añadir una variable auxiliar (x_6), mejora la precisión del estimador de regresión lineal múltiple, para $\hat{\hat{Y}}_1$ y $\hat{\hat{Y}}_3$, conserva las variables del menor coeficiente de variación con una variable auxiliar menos, no para $\hat{\hat{Y}}_2$, esto es, las variables con las que se obtiene el menor $CV(\hat{\hat{Y}}_1)$, con 1, 2, 3, 4, 5 y 6 variables auxiliares, respectivamente son (x_5), (x_5, x_1), (x_5, x_1, x_3), (x_5, x_1, x_3, x_2), (x_5, x_1, x_3, x_2, x_6), (x_5, x_1, x_3, x_2, x_6, x_4), para $CV(\hat{\hat{Y}}_2)$ (x_5), (x_1, x_6), (x_1, x_6, x_4), (x_1, x_6, x_4, x_2), (x_1, x_6, x_4, x_5, x_3), (x_1, x_6, x_4, x_5, x_3, x_2), y para $CV(\hat{\hat{Y}}_3)$ (x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3, x_4), (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6).

Igual que para el set anterior, en este se puede tomar las variables auxiliares x_1, x_3 y x_5 o x_1, x_4 y x_5, con buenos resultados.

El siguiente grupo de datos, consta exclusivamente de variables dicotómicas, que indican la presencia o no de una característica.

Tabla 19 - Valores de las variables para cada elemento - Set 3

No.	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
2	1	1	1	0	0	1	0	0	1
3	0	0	1	1	1	1	0	0	0
4	1	1	0	0	1	1	1	1	0
5	1	1	1	0	0	0	1	1	1
6	1	0	1	0	1	0	1	1	1
7	0	0	1	1	1	1	1	0	0
8	0	0	1	1	0	0	0	0	0
9	0	0	1	0	1	0	1	1	0
10	1	1	0	0	1	0	0	1	1
11	1	1	1	0	0	0	0	0	1
12	0	0	1	1	1	1	1	0	0
13	1	1	1	0	0	1	1	1	1
14	1	0	1	0	1	0	0	1	1
15	1	1	0	0	0	0	1	1	0
16	1	0	1	1	0	1	1	1	1
17	0	0	1	1	0	0	0	0	0
18	1	1	1	0	0	1	1	0	1
19	1	1	1	0	1	0	1	1	1
20	1	1	1	0	0	1	1	1	1
Promedio	0,65	0,50	0,80	0,30	0,50	0,45	0,65	0,60	0,55
Cuasivarianza	0,2395	0,2632	0,1684	0,2211	0,2632	0,2605	0,2395	0,2526	0,2605

Tabla 20 - Cuasivarianzas y Cuasicovarianzas - Set 3

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
y_1	0,2395	0,1842	-0,0211	-0,1526	-0,0790	0,0079	0,0290	0,1158	0,2026
y_2		0,2632	-0,0526	-0,1579	-0,1053	0,0263	0,0263	0,0526	0,1316
y_3			0,1684	0,0632	-0,0526	0,0421	-0,0211	-0,0842	0,0632
x_1				0,2211	0,0000	0,0684	-0,0474	-0,1368	-0,1211
x_2					0,2632	-0,0263	0,0263	0,0526	-0,0790
x_3						0,2605	0,0605	-0,0737	0,0026
x_4							0,2395	0,1158	-0,0079
x_5								0,2526	0,0737
x_6									0,2605

Tabla 21 - Coeficientes de Correlación - Set 3

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
y_1	1,0000	0,7338	-0,1048	-0,6634	-0,3145	0,0316	0,1209	0,4708	0,8113
y_2		1,0000	-0,2500	-0,6547	-0,4000	0,1005	0,1048	0,2041	0,5025
y_3			1,0000	0,3273	-0,2500	0,2010	-0,1048	-0,4083	0,3015
x_1				1,0000	0,0000	0,2851	-0,2059	-0,5791	-0,5044
x_2					1,0000	-0,1005	0,1048	0,2041	-0,3015
x_3						1,0000	0,2423	-0,2872	0,0101
x_4							1,0000	0,4708	-0,0316
x_5								1,0000	0,2872
x_6									1,0000

Tabla 22 - Coeficientes de Variación de $\hat{\bar{Y}}_1$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 3

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
-	0,29158	-	-	-	-	-	-	-	-	-
x_1	-	0,82961	0,21818	0,52142	-	-	-	-	-	-
x_2	-	0,56195	0,27679	0,48426	-	-	-	-	-	-
x_3	-	0,51952	0,29144	0,41462	-	-	-	-	-	-
x_4	-	0,38663	0,28944	0,38663	-	-	-	-	-	-
x_5	-	0,31814	0,25725	0,30413	-	-	-	-	-	-
x_6	-	0,21016	0,17049	0,18340	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2$	-	-	0,19798	0,64913	0,55186	0,55186	0,52761	0,82453	0,52765	0,82453
$x_1\ x_3$	-	-	0,20759	0,63824	0,51948	0,51948	0,41030	0,81327	0,41036	0,81327
$x_1\ x_4$	-	-	0,21813	0,55019	0,38654	0,38654	//	0,81400	0,36295	0,81400
$x_1\ x_5$	-	-	0,21597	0,42683	0,31069	0,31069	0,31809	0,67036	0,31816	0,67036
$x_1\ x_6$	-	-	0,14731	0,36679	0,20562	0,20562	0,20981	0,62746	0,20991	0,62746
$x_2\ x_3$	-	-	0,27679	0,55019	0,44158	0,44158	0,51734	0,55980	0,51825	0,55980
$x_2\ x_4$	-	-	0,27309	0,56361	0,38256	0,38256	//	0,56191	0,36806	0,56191
$x_2\ x_5$	-	-	0,22633	0,52854	0,31811	0,31811	0,27618	0,55914	0,27786	0,55914
$x_2\ x_6$	-	-	0,16914	0,35646	0,19301	0,19301	0,20950	0,43451	0,21171	0,43451
$x_3\ x_4$	-	-	0,28944	0,52854	0,37273	0,37273	//	0,51462	0,38233	0,51462
$x_3\ x_5$	-	-	0,25219	0,35646	0,26798	0,26798	0,30121	0,44778	0,30198	0,44778
$x_3\ x_6$	-	-	0,17035	0,34985	0,19327	0,19327	0,21008	0,46479	0,21118	0,46479
$x_4\ x_5$	-	-	0,25509	0,48906	0,30707	0,30707	0,29565	//	0,29567	0,38663
$x_4\ x_6$	-	-	0,16504	0,30413	0,17047	0,17047	0,20492	//	0,20495	0,29848
$x_5\ x_6$	-	-	0,15437	0,30566	0,16114	0,16114	0,20738	0,28401	0,22049	0,28401
$x_1\ x_2\ x_3$	-	-	0,18934	0,73359	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4$	-	-	0,19791	0,68621	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_5$	-	-	0,18998	0,60749	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_6$	-	-	0,14235	0,47746	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4$	-	-	0,20574	0,69366	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_5$	-	-	0,20330	0,51511	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_6$	-	-	0,14235	0,52142	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_5$	-	-	0,21501	0,54336	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_6$	-	-	0,14574	0,39970	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_5\ x_6$	-	-	0,14377	0,31171	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4$	-	-	0,27283	0,65486	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_5$	-	-	0,22173	0,54336	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_6$	-	-	0,16908	0,44400	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_5$	-	-	0,22404	0,66687	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_6$	-	-	0,16302	0,45234	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_5\ x_6$	-	-	0,14708	0,47353	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,24431	0,56278	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,16500	0,47353	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,15139	0,36037	-	-	-	-	-	-
$x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,15418	0,48426	-	-	-	-	-	-

Tabla 22 - Coeficientes de Variación de $\hat{\hat{Y}}_1$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 3 (cont.)

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
$x_1\,x_2\,x_3\,x_4$	-	-	0,18873	0,79413	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_3\,x_5$	-	-	0,17815	0,65841	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_3\,x_6$	-	-	0,13766	0,58875	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_4\,x_5$	-	-	0,18884	0,70766	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_4\,x_6$	-	-	0,14040	0,52142	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_5\,x_6$	-	-	0,13549	0,47746	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_3\,x_4\,x_5$	-	-	0,19473	0,64913	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_3\,x_4\,x_6$	-	-	0,32021	0,58316	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_3\,x_5\,x_6$	-	-	0,31074	0,42683	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	0,31311	0,45234	-	-	-	-	-	-
$x_2\,x_3\,x_4\,x_5$	-	-	0,21386	0,70963	-	-	-	-	-	-
$x_2\,x_3\,x_4\,x_6$	-	-	0,29682	0,56361	-	-	-	-	-	-
$x_2\,x_3\,x_5\,x_6$	-	-	0,30475	0,49192	-	-	-	-	-	-
$x_2\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	0,31055	0,61967	-	-	-	-	-	-
$x_3\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	0,29901	0,56029	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5$	-	-	0,16928	0,77989	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_6$	-	-	0,18081	0,65841	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_3\,x_5\,x_6$	-	-	0,12835	0,54250	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	0,13542	0,59506	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	0,13618	0,57672	-	-	-	-	-	-
$x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	0,14355	0,66687	-	-	-	-	-	-
$x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5\,x_6$	-	-	0,12690	0,68074	-	-	-	-	-	-

Tabla 23 - Coeficientes de Variación de $\hat{\hat{Y}}_2$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 3

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
-	0,39736	-	-	-	-	-	-	-	-	-
x_1	-	0,91766	0,30038	0,69282	-	-	-	-	-	-
x_2	-	0,66491	0,36419	0,66491	-	-	-	-	-	-
x_3	-	0,56195	0,39535	0,53163	-	-	-	-	-	-
x_4	-	0,46757	0,39517	0,51962	-	-	-	-	-	-
x_5	-	0,45883	0,38899	0,49630	-	-	-	-	-	-
x_6	-	0,37887	0,34354	0,39537	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2$	-	-	0,25488	0,87419	0,65919	0,65919	//	0,90379	0,61191	0,90379
$x_1\ x_3$	-	-	0,27578	0,82876	0,55447	0,55447	0,40899	0,90796	0,40899	0,90796
$x_1\ x_4$	-	-	0,30013	0,73162	0,46275	0,46275	0,42259	0,90241	0,42259	0,90241
$x_1\ x_5$	-	-	0,28802	0,63578	0,45692	0,45692	0,45311	0,80930	0,45311	0,80930
$x_1\ x_6$	-	-	0,28972	0,57720	0,37870	0,37870	0,37058	0,76565	0,37058	0,76565
$x_2\ x_3$	-	-	0,36339	0,73162	0,52165	0,52165	0,55010	//	0,55010	0,66010
$x_2\ x_4$	-	-	0,35943	0,76537	0,46754	0,46754	0,42745	//	0,42745	0,66491
$x_2\ x_5$	-	-	0,34522	0,77051	0,45826	0,45826	0,39978	//	0,39978	0,66491
$x_2\ x_6$	-	-	0,32756	0,58804	0,37391	0,37391	0,37548	//	0,37548	0,58312
$x_3\ x_4$	-	-	0,39397	0,68364	0,44977	0,44977	0,46656	0,55820	0,46656	0,55820
$x_3\ x_5$	-	-	0,38335	0,53163	0,40105	0,40105	0,43910	0,52232	0,43910	0,52232
$x_3\ x_6$	-	-	0,34144	0,53311	0,35590	0,35590	0,37712	0,52694	0,37712	0,52694
$x_4\ x_5$	-	-	0,38897	0,70524	0,43487	0,43487	0,44518	0,46419	0,44518	0,46419
$x_4\ x_6$	-	-	0,34018	0,50887	0,34568	0,34568	0,37514	0,41831	0,37514	0,41831
$x_5\ x_6$	-	-	0,34265	0,57720	0,35843	0,35843	0,37822	0,44630	0,37822	0,44630
$x_1\ x_2\ x_3$	-	-	0,23316	0,96926	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4$	-	-	0,25483	0,92253	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_5$	-	-	0,25051	0,86694	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_6$	-	-	0,25361	0,72293	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4$	-	-	0,27060	0,90263	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_5$	-	-	0,26739	0,72293	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_6$	-	-	0,26958	0,73699	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_5$	-	-	0,28662	0,77358	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_6$	-	-	0,28972	0,61559	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_5\ x_6$	-	-	0,27706	0,58804	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4$	-	-	0,35931	0,86694	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_5$	-	-	0,34030	0,77358	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_6$	-	-	0,32641	0,66491	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_5$	-	-	0,34517	0,93612	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_6$	-	-	0,32227	0,69282	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_5\ x_6$	-	-	0,32185	0,76537	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,38229	0,77866	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,33910	0,67784	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,33931	0,61044	-	-	-	-	-	-
$x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,34017	0,75811	-	-	-	-	-	-

Tabla 23 - Coeficientes de Variación de $\hat{\bar{Y}}_2$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 3 (cont.)

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	-	-	0,23102	1,04831	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_5$	-	-	0,23076	0,91565	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_6$	-	-	0,23299	0,83729	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4\ x_5$	-	-	0,24896	0,98862	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4\ x_6$	-	-	0,25347	0,77460	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_5\ x_6$	-	-	0,24875	0,77358	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,26657	0,88852	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,36014	0,81338	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,35122	0,68364	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,36071	0,72837	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,33955	0,97657	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,38415	0,80557	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,39088	0,77051	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,39476	0,92679	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,40265	0,82876	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,23014	1,06623	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,23562	0,92253	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,23040	0,82971	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,24641	0,90263	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,26061	0,85131	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,31820	0,96926	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,23000	0,98862	-	-	-	-	-	-

Tabla 24 - Coeficientes de Variación de $\hat{\bar{Y}}_3$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 3

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
-	0,19868	-	-	-	-	-	-	-	-	-
x_1	-	0,57354	0,18773	0,24835	-	-	-	-	-	-
x_2	-	0,48666	0,19237	0,35471	-	-	-	-	-	-
x_3	-	0,44426	0,19462	0,28425	-	-	-	-	-	-
x_4	-	0,36965	0,19759	0,32476	-	-	-	-	-	-
x_5	-	0,44426	0,18137	0,37170	-	-	-	-	-	-
x_6	-	0,35440	0,18943	0,26633	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2$	-	-	0,18104	0,38474	0,38378	0,38378	0,48230	0,57138	0,53331	0,57138
$x_1\ x_3$	-	-	0,18640	0,36752	0,38762	0,38762	0,44016	0,55788	0,49553	0,55788
$x_1\ x_4$	-	-	0,18758	0,32476	0,28922	0,28922	0,34785	0,56401	0,41570	0,56401
$x_1\ x_5$	-	-	0,18001	0,31019	0,28557	0,28557	0,36525	0,50581	0,43037	0,50581
$x_1\ x_6$	-	-	0,15400	0,19076	0,18287	0,18287	0,25479	0,44151	0,34165	0,44151
$x_2\ x_3$	-	-	0,18914	0,39346	0,34584	0,34584	0,44423	0,48007	0,44700	0,48007
$x_2\ x_4$	-	-	0,19173	0,45183	0,34728	0,34728	0,36083	0,48264	0,36424	0,48264
$x_2\ x_5$	-	-	0,17819	0,49918	0,40327	0,40327	0,42888	0,45883	0,43174	0,45883
$x_2\ x_6$	-	-	0,18651	0,34680	0,28219	0,28219	0,34950	0,45227	0,35301	0,45227
$x_3\ x_4$	-	-	0,19207	0,41853	0,32978	0,32978	0,36837	0,42564	0,36867	0,42564
$x_3\ x_5$	-	-	0,18054	0,38071	0,31990	0,31990	0,42385	0,44197	0,42411	0,44197
$x_3\ x_6$	-	-	0,18531	0,33688	0,27875	0,27875	0,35253	0,44079	0,35285	0,44079
$x_4\ x_5$	-	-	0,18030	0,50836	0,36413	0,36413	0,40896	0,29825	0,41163	0,29825
$x_4\ x_6$	-	-	0,18848	0,36500	0,27527	0,27527	0,35427	0,36313	0,35736	0,36313
$x_5\ x_6$	-	-	0,15922	0,45183	0,33456	0,33456	0,30268	0,44301	0,33013	0,44301
$x_1\ x_2\ x_3$	-	-	0,18023	0,45726	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4$	-	-	0,18103	0,45183	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_5$	-	-	0,17606	0,45523	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_6$	-	-	0,15345	0,29280	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4$	-	-	0,18575	0,45523	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_5$	-	-	0,17945	0,36752	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_6$	-	-	0,15398	0,33320	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_5$	-	-	0,17914	0,44078	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_6$	-	-	0,15369	0,27655	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_5\ x_6$	-	-	0,14476	0,32476	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4$	-	-	0,18741	0,51138	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_5$	-	-	0,17748	0,49359	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_6$	-	-	0,18298	0,38793	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_5$	-	-	0,17706	0,61789	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_6$	-	-	0,18585	0,44148	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_5\ x_6$	-	-	0,15922	0,52741	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,18004	0,54184	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,18296	0,45183	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,15898	0,46062	-	-	-	-	-	-
$x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,15472	0,56632	-	-	-	-	-	-

Tabla 24 - Coeficientes de Variación de $\hat{\bar{Y}}_3$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 3 (cont.)

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
$x_1\, x_2\, x_3\, x_4$	-	-	0,18002	0,54184	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_3\, x_5$	-	-	0,17567	0,48349	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_3\, x_6$	-	-	0,15344	0,38474	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_4\, x_5$	-	-	0,17518	0,56360	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_4\, x_6$	-	-	0,15309	0,37170	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_5\, x_6$	-	-	0,14475	0,42365	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_3\, x_4\, x_5$	-	-	0,17900	0,51138	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_3\, x_4\, x_6$	-	-	0,17000	0,42365	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_3\, x_5\, x_6$	-	-	0,16096	0,38152	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	0,15669	0,44703	-	-	-	-	-	-
$x_2\, x_3\, x_4\, x_5$	-	-	0,17689	0,63609	-	-	-	-	-	-
$x_2\, x_3\, x_4\, x_6$	-	-	0,19174	0,50348	-	-	-	-	-	-
$x_2\, x_3\, x_5\, x_6$	-	-	0,17292	0,52331	-	-	-	-	-	-
$x_2\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	0,16951	0,63802	-	-	-	-	-	-
$x_3\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	0,16762	0,59759	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5$	-	-	0,17513	0,61035	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_6$	-	-	0,16815	0,47836	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_3\, x_5\, x_6$	-	-	0,14463	0,45523	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	0,13990	0,53496	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	0,13720	0,51797	-	-	-	-	-	-
$x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	0,15434	0,65660	-	-	-	-	-	-
$x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5\, x_6$	-	-	0,13712	0,58507	-	-	-	-	-	-

Tabla 25 - Menor, mayor y rangos de coeficientes de variación según bloque y estimador - Set 3

	$CV(\hat{\bar{Y}}_1)$			$CV(\hat{\bar{Y}}_2)$			$CV(\hat{\bar{Y}}_3)$		
	Menor	Mayor	Rango	Menor	Mayor	Rango	Menor	Mayor	Rango
Sin variables auxiliares									
Directo	0,29158	-	-	0,39736	-	-	0,19868	-	-
Con 1 variable auxiliar									
Razón	0,21016	0,82961	0,61946	0,37887	0,91766	0,53880	0,35440	0,57354	0,21914
Regresión Lineal	0,17049	0,29144	0,12095	0,30038	0,39535	0,09497	0,18137	0,19759	0,01622
por Diferencias	0,18340	0,52142	0,33802	0,39537	0,69282	0,29745	0,24835	0,37170	0,12335
Con 2 variables auxiliares									
Regresión Lineal	0,14731	0,28944	0,14214	0,25488	0,39397	0,13909	0,15400	0,19207	0,03807
por Diferencias	0,30413	0,64913	0,34500	0,50887	0,87419	0,36532	0,19076	0,50836	0,31760
Razón-Regresión (1,2)	0,16114	0,55186	0,39072	0,34568	0,65919	0,31351	0,18287	0,40327	0,22039
Razón-Regresión (2,1)	0,16114	0,55186	0,39072	0,34568	0,65919	0,31351	0,18287	0,40327	0,22039
Regresión-Razón 1 coeficiente (1,2)	0,25479	0,44423	0,18944	0,25479	0,44423	0,18944	0,25479	0,48230	0,22751
Regresión-Razón 1 coeficiente. (2,1)	0,29825	0,57138	0,27314	0,29825	0,57138	0,27314	0,29825	0,57138	0,27314
Regresión-Razón 2 coeficientes (1,2)	0,20495	0,52765	0,32270	0,37058	0,61191	0,24134	0,33013	0,53331	0,20318
Regresión-Razón 2 coeficientes (2,1)	0,28401	0,82453	0,54052	0,41831	0,90796	0,48964	0,29825	0,57138	0,27314
Con 3 variables auxiliares									
Regresión Lineal	0,14235	0,27283	0,13047	0,23316	0,38229	0,14912	0,14476	0,18741	0,04265
por Diferencias	0,31171	0,73359	0,42187	0,58804	0,96926	0,38123	0,27655	0,61789	0,34134
Con 4 variables auxiliares									
Regresión Lineal	0,13549	0,32021	0,18473	0,23076	0,40265	0,17189	0,14475	0,19174	0,04699
por Diferencias	0,42683	0,79413	0,36730	0,68364	1,04831	0,36466	0,37170	0,63802	0,26633
Con 5 variables auxiliares									
Regresión Lineal	0,12835	0,18081	0,05247	0,23014	0,31820	0,08805	0,13720	0,17513	0,03792
por Diferencias	0,54250	0,77989	0,23739	0,82971	1,06623	0,23652	0,45523	0,65660	0,20137
Con 6 variables auxiliares									
Regresión Lineal	0,12690	-	-	0,23000	-	-	0,13712	-	-
por Diferencias	0,68074	-	-	0,98862	-	-	0,58507	-	-

Se mantiene lo visto en datas anteriores, salvo que con 2 variables auxiliares, en el estimador de $\bar{Y}_2$ el menor coeficiente de variación es el de regresión-razón, aunque es por muy poco. Cabe destacar que, tal como se demostró, el estimador de regresión-razón es un caso particular del estimador de regresión lineal con 2 variables auxiliares, pero el estimador de varianza mínima es para *b* constantes, que no ocurre con el estimador de regresión-razón, por tal razón puede resultar con mayor precisión, pero el margen es muy pequeño.

Algo notorio es que los coeficientes de variación son mayores que en casos anteriores, es decir, que la precisión disminuye, en todos los estimadores, sin embargo, siempre es mejor el estimador de regresión lineal, y además, éste mejora a medida que se incluyen más variables auxiliares. En principio se pudiera concluir que cuando se tienen variables dicotómicas, se deben observar bien los valores que toman las variables, ya que al tomar sólo 2 valores (0 y 1), aun cuando existan altas correlaciones, éstas pueden resultar engañosas.

Las variables con las que se obtiene el menor coeficiente de variación, con 1, 2, 3, 4, 5 y 6 variables auxiliares son las siguientes, para $CV(\hat{\bar{Y}}_1)$, (x_6), (x_6, x_1), (x_6, x_1, x_2 / x_6, x_1, x_3), (x_6, x_1, x_2, x_5), (x_6, x_1, x_2, x_5, x_3), (x_6, x_1, x_2, x_5, x_3, x_4), para $CV(\hat{\bar{Y}}_2)$ (x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3, x_5), (x_1, x_2, x_3, x_5, x_4), (x_1, x_2, x_3, x_5, x_4, x_6), y para $CV(\hat{\bar{Y}}_3)$ (x_5), (x_1, x_6), (x_1, x_6, x_5), (x_1, x_6, x_5, x_2), (x_1, x_6, x_5, x_3, x_4), (x_1, x_6, x_5, x_3, x_4, x_2), véase que para el estimador de $\bar{Y}_1$ y de $\bar{Y}_2$, al agregar una nueva variable que reduzca el *CV*, conserva las variables que reducen y agrega otra, pero no ocurre lo mismo con el estimador de $\bar{Y}_3$.

Para este set de datos, para estimar $\bar{Y}_1$, $\bar{Y}_2$ y $\bar{Y}_3$, se pueden tomar las variables auxiliares x_1, x_2 y x_6 y los coeficientes de variación respectivos son 0,14235, 0,25361, 0,15345, que si bien no parecen tan bajos, si lo son comparando con el resto.

En los grupos de datos 1 y 2, las variables tienen valores similares, varían entre 5 y 20, como contraste, el último grupo de datos que se presentará es de variables cuantitativas, pero los valores válidos de las variables serán diferentes unos de otros.

La variable y_1 y x_1 son exactamente iguales a los grupos 1 y 2, pero el resto cambia, teniendo valores, rangos y cuasivarianzas mayores.

Tabla 26 - Valores de las variables para cada elemento - Set 4

No.	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	10	90	1.599	12	120	175	984	83	1.000
2	12	130	2.250	11	110	130	2100	10	1.610
3	14	150	2.268	9	150	90	2.106	5	1.630
4	9	140	1.599	13	150	145	1.599	83	930
5	11	210	2.100	12	210	140	1.650	98	1.495
6	8	120	1.845	15	140	163	1.230	70	2.771
7	16	150	1.900	5	165	160	1.900	15	1.725
8	13	50	2.592	9	100	122	1.620	19	1.265
9	7	95	1.950	15	95	70	1.350	50	978
10	10	170	1.476	15	110	85	1.230	11	1.035
11	11	140	2.000	10	110	90	2.000	0	1.380
12	14	120	1.950	11	165	148	1.950	70	2.608
13	10	180	2.268	13	130	180	1.944	83	2.070
14	9	158	2.400	12	158	200	1.500	120	1.750
15	7	210	1.944	16	240	150	1.620	83	1.630
16	14	180	1.968	10	180	125	1.722	135	1.050
17	13	80	2.700	10	90	85	2.100	10	920
18	12	300	1.845	10	150	150	1.722	0	1.956
19	12	150	2.268	13	120	120	1.620	140	1.610
20	17	163	2.100	8	163	169	2.100	33	1.955
Promedio	11,45	149,30	2.051,10	11,45	142,80	134,85	1.702,35	55,90	1.568,40
Cuasivarianza	7,73	2.949,91	100.505,25	7,42	1.498,48	1.313,29	107.715,08	2.168,94	280.667,31

Tabla 27 - Cuasivarianzas y Cuasicovarianzas - Set 4

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
y_1	7,73	-2,19	247,01	-6,69	1,41	0,23	582,57	-37,74	181,02
y_2		2.949,91	-5.001,29	8,17	1.247,75	508,15	1.922,78	222,72	7.116,45
y_3			100.505,25	-274,73	-2.531,66	-991,98	56.321,65	-727,67	7.101,06
x_1				7,42	3,88	-6,72	-537,74	50,89	-35,56
x_2					1.498,48	639,76	784,13	732,82	6.184,72
x_3						1.313,29	-1.557,52	720,14	9.860,12
x_4							107.715,08	-5.648,23	33.583,01
x_5								2.168,94	1166,78
x_6									280.667,31

Tabla 28 - Coeficientes de Correlación - Set 4

	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
y_1	1,0000	-0,0145	0,2802	-0,8828	0,0131	0,0023	0,6383	-0,2914	0,1229
y_2		1,0000	-0,2905	0,0553	0,5935	0,2582	0,1079	0,0881	0,2473
y_3			1,0000	-0,3182	-0,2063	-0,0863	0,5413	-0,0493	0,0423
x_1				1,0000	0,0368	-0,0681	-0,6016	0,4012	-0,0246
x_2					1,0000	0,4561	0,0617	0,4065	0,3016
x_3						1,0000	-0,1310	0,4267	0,5136
x_4							1,0000	-0,3696	0,1932
x_5								1,0000	0,0473
x_6									1,0000

Tabla 29 - Coeficientes de Variación de $\hat{\bar{Y}}_1$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 4

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
-	0,09407	-	-	-	-	-	-	-	-	-
x_1	-	0,18066	0,04419	0,18066	-	-	-	-	-	-
x_2	-	0,14005	0,09406	1,31153	-	-	-	-	-	-
x_3	-	0,14013	0,09407	1,22919	-	-	-	-	-	-
x_4	-	0,07388	0,07242	11,04161	-	-	-	-	-	-
x_5	-	0,36146	0,08999	1,60524	-	-	-	-	-	-
x_6	-	0,15146	0,09336	17,90861	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2$	-	-	0,04398	1,32393	0,13845	0,13845	0,10982	//	0,21475	0,18065
$x_1\ x_3$	-	-	0,04385	1,23261	0,13760	0,13760	0,11776	//	0,21892	0,18054
$x_1\ x_4$	-	-	0,04235	10,98683	0,07208	0,07208	0,06328	//	0,19510	0,13895
$x_1\ x_5$	-	-	0,04372	1,64834	0,17999	0,17999	0,29240	//	0,34577	0,16880
$x_1\ x_6$	-	-	0,04315	17,90700	0,14263	0,14263	0,12872	//	0,22501	0,18013
$x_2\ x_3$	-	-	0,09406	2,16474	0,12905	0,12905	0,13229	0,13168	1,09706	0,13168
$x_2\ x_4$	-	-	0,07237	11,19923	0,07364	0,07364	0,07380	0,12940	1,09155	0,12940
$x_2\ x_5$	-	-	0,08896	2,44232	0,13433	0,13433	0,33730	0,12125	1,14009	0,12125
$x_2\ x_6$	-	-	0,09333	18,34617	0,12718	0,12718	0,14656	0,13860	1,09887	0,13860
$x_3\ x_4$	-	-	0,07196	10,94784	0,07219	0,07219	0,07320	0,11921	0,47970	0,11921
$x_3\ x_5$	-	-	0,08902	2,39306	0,13366	0,13366	0,33430	0,12033	0,58010	0,12033
$x_3\ x_6$	-	-	0,09312	18,56833	0,13268	0,13268	0,13585	0,13372	0,49317	0,13372
$x_4\ x_5$	-	-	0,07220	10,56222	0,07381	0,07381	0,31387	0,07388	0,34292	0,07388
$x_4\ x_6$	-	-	0,07242	22,79197	0,07369	0,07369	0,14741	0,07382	0,20201	0,07382
$x_5\ x_6$	-	-	0,08906	18,05425	0,15082	0,15082	0,14768	0,36144	0,23999	0,36144
$x_1\ x_2\ x_3$	-	-	0,04318	2,16874	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4$	-	-	0,04224	11,14562	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_5$	-	-	0,04369	2,47266	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_6$	-	-	0,04313	18,34484	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4$	-	-	0,04226	10,89188	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_5$	-	-	0,04257	2,41901	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_6$	-	-	0,04144	18,56637	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_5$	-	-	0,04143	10,51048	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_6$	-	-	0,04179	22,76370	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_5\ x_6$	-	-	0,04275	18,05588	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4$	-	-	0,07160	11,17250	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_5$	-	-	0,08850	3,25252	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_6$	-	-	0,09312	19,02920	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_5$	-	-	0,07220	10,80476	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_6$	-	-	0,07237	23,17611	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_5\ x_6$	-	-	0,08849	18,53366	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,07128	10,54259	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,07175	23,23736	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,08876	18,75283	-	-	-	-	-	-
$x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,07219	22,62271	-	-	-	-	-	-

Tabla 29 - Coeficientes de Variación de $\hat{\hat{Y}}_1$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 4 (cont.)

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	-	-	0,04196	11,11807	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_5$	-	-	0,04226	3,27301	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_6$	-	-	0,04094	19,02752	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4\ x_5$	-	-	0,04141	10,75460	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4\ x_6$	-	-	0,04177	23,14849	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_5\ x_6$	-	-	0,04274	18,53549	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,04065	10,49003	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,04348	23,20929	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,04116	18,75399	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,04269	22,59680	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,07116	10,85323	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,07281	23,64523	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,08944	19,25288	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,07324	23,04608	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,07238	23,10705	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,04061	10,80259	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,10020	23,61783	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,03866	19,25424	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,04089	23,02084	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,03823	23,08135	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,07087	23,55280	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,03822	23,52778	-	-	-	-	-	-

Tabla 30 - Coeficientes de Variación de $\hat{\bar{Y}}_2$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 4

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
-	0,14089	-	-	-	-	-	-	-	-	-
x_1	-	0,16402	0,14068	0,14068	-	-	-	-	-	-
x_2	-	0,11540	0,11340	0,11464	-	-	-	-	-	-
x_3	-	0,15203	0,13612	0,14782	-	-	-	-	-	-
x_4	-	0,15217	0,14007	0,84783	-	-	-	-	-	-
x_5	-	0,34053	0,14035	0,17734	-	-	-	-	-	-
x_6	-	0,16688	0,13652	1,34639	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2$	-	-	0,11330	0,11460	0,11382	0,11382	0,11533	0,14307	0,11533	0,14307
$x_1\ x_3$	-	-	0,13573	0,14731	0,14028	0,14028	0,15130	0,15838	0,15130	0,15838
$x_1\ x_4$	-	-	0,13846	0,84352	0,13888	0,13888	0,14276	0,14804	0,14276	0,14804
$x_1\ x_5$	-	-	0,14031	0,17909	0,16402	0,16402	0,31805	0,16218	0,31805	0,16218
$x_1\ x_6$	-	-	0,13624	1,34619	0,14429	0,14429	0,16651	0,15977	0,16651	0,15977
$x_2\ x_3$	-	-	0,11338	0,15411	0,11500	0,11500	0,14767	0,11482	0,14767	0,11482
$x_2\ x_4$	-	-	0,11295	0,85010	0,11305	0,11305	0,13006	0,11507	0,13006	0,11507
$x_2\ x_5$	-	-	0,11091	0,18602	0,11256	0,11256	0,33719	0,11135	0,33719	0,11135
$x_2\ x_6$	-	-	0,11295	1,37452	0,11384	0,11384	0,16093	0,11535	0,16093	0,11535
$x_3\ x_4$	-	-	0,13462	0,83658	0,13610	0,13610	0,14501	0,14927	0,14501	0,14927
$x_3\ x_5$	-	-	0,13607	0,20770	0,15162	0,15162	0,32511	0,14862	0,32511	0,14862
$x_3\ x_6$	-	-	0,13481	1,39552	0,14693	0,14693	0,16401	0,15088	0,16401	0,15088
$x_4\ x_5$	-	-	0,13872	0,80895	0,14421	0,14421	0,31287	0,14682	0,31287	0,14682
$x_4\ x_6$	-	-	0,13624	1,72155	0,14312	0,14312	0,16657	0,15080	0,16657	0,15080
$x_5\ x_6$	-	-	0,13609	1,35649	0,16137	0,16137	0,16676	0,33997	0,16676	0,33997
$x_1\ x_2\ x_3$	-	-	0,11329	0,15379	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4$	-	-	0,11213	0,84583	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_5$	-	-	0,10972	0,18783	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_6$	-	-	0,11283	1,37434	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4$	-	-	0,13149	0,83215	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_5$	-	-	0,13539	0,20898	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_6$	-	-	0,13443	1,39530	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_5$	-	-	0,13767	0,80485	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_6$	-	-	0,13511	1,71929	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_5\ x_6$	-	-	0,13601	1,35655	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4$	-	-	0,11295	0,84399	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_5$	-	-	0,11079	0,23431	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_6$	-	-	0,11272	1,42570	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_5$	-	-	0,11091	0,81738	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_6$	-	-	0,11264	1,74666	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_5\ x_6$	-	-	0,11062	1,38797	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,13456	0,80320	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,13396	1,75427	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,13480	1,40871	-	-	-	-	-	-
$x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,13538	1,70734	-	-	-	-	-	-

Tabla 30 - Coeficientes de Variación de $\hat{\bar{Y}}_2$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 4 (cont.)

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	-	-	0,11208	0,83963	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_5$	-	-	0,10929	0,23556	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_6$	-	-	0,11263	1,42550	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4\ x_5$	-	-	0,10930	0,81336	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4\ x_6$	-	-	0,11191	1,74444	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_5\ x_6$	-	-	0,10942	1,38804	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,13131	0,79902	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,13862	1,75203	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,14077	1,40873	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,13934	1,70526	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,11079	0,81698	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,12036	1,78134	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,11837	1,44204	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,11669	1,73550	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,14058	1,74311	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,10861	0,81290	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,11355	1,77914	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,10922	1,44208	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,10911	1,73347	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,13124	1,74105	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,11060	1,77313	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,10860	1,77112	-	-	-	-	-	-

Tabla 31 - Coeficientes de Variación de $\hat{\hat{Y}}_3$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 4

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
-	0,05986	-	-	-	-	-	-	-	-	-
x_1	-	0,12482	0,05675	0,06003	-	-	-	-	-	-
x_2	-	0,13115	0,05857	0,06179	-	-	-	-	-	-
x_3	-	0,12447	0,05964	0,06084	-	-	-	-	-	-
x_4	-	0,06572	0,05033	0,05838	-	-	-	-	-	-
x_5	-	0,33106	0,05979	0,06093	-	-	-	-	-	-
x_6	-	0,14155	0,05981	0,11439	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2$	-	-	0,05554	0,06195	0,10796	0,10796	0,12913	0,12383	0,13061	0,12383
$x_1\ x_3$	-	-	0,05638	0,06100	0,10188	0,10188	0,12389	0,12482	0,12544	0,12482
$x_1\ x_4$	-	-	0,05033	0,05822	0,05428	0,05428	0,06042	0,08870	0,06352	0,08870
$x_1\ x_5$	-	-	0,05652	0,06112	0,12451	0,12451	0,29589	0,11827	0,29654	0,11827
$x_1\ x_6$	-	-	0,05671	0,11446	0,10521	0,10521	0,14066	0,12473	0,14202	0,12473
$x_2\ x_3$	-	-	0,05857	0,06309	0,11538	0,11538	0,10915	0,11994	0,11070	0,11994
$x_2\ x_4$	-	-	0,04824	0,06081	0,06480	0,06480	0,06350	0,12856	0,06612	0,12856
$x_2\ x_5$	-	-	0,05853	0,06324	0,13089	0,13089	0,29834	0,12295	0,29891	0,12295
$x_2\ x_6$	-	-	0,05821	0,11730	0,11642	0,11642	0,13173	0,12787	0,13301	0,12787
$x_3\ x_4$	-	-	0,05033	0,05843	0,06003	0,06003	0,06556	0,11564	0,06603	0,11564
$x_3\ x_5$	-	-	0,05963	0,06230	0,12375	0,12375	0,29866	0,11511	0,29876	0,11511
$x_3\ x_6$	-	-	0,05933	0,11792	0,11792	0,11792	0,12166	0,11358	0,12191	0,11358
$x_4\ x_5$	-	-	0,04939	0,05598	0,05790	0,05790	0,29429	0,06093	0,29595	0,06093
$x_4\ x_6$	-	-	0,05019	0,12371	0,06469	0,06469	0,14137	0,06464	0,14479	0,06464
$x_5\ x_6$	-	-	0,05973	0,11531	0,13566	0,13566	0,14125	0,33082	0,14131	0,33082
$x_1\ x_2\ x_3$	-	-	0,05553	0,06325	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4$	-	-	0,04820	0,06066	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_5$	-	-	0,05440	0,06342	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_6$	-	-	0,05523	0,11737	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4$	-	-	0,05032	0,05827	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_5$	-	-	0,05556	0,06249	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_6$	-	-	0,05603	0,11799	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_5$	-	-	0,04935	0,05585	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_6$	-	-	0,05018	0,12362	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_5\ x_6$	-	-	0,05649	0,11540	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4$	-	-	0,04779	0,06124	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_5$	-	-	0,05853	0,06491	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_6$	-	-	0,05815	0,12094	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_5$	-	-	0,04456	0,05896	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_6$	-	-	0,04823	0,12663	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_5\ x_6$	-	-	0,05814	0,11842	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,04909	0,05650	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,05017	0,12654	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,05933	0,11903	-	-	-	-	-	-
$x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,04912	0,12293	-	-	-	-	-	-

Tabla 31 - Coeficientes de Variación de $\hat{\hat{Y}}_3$, por Estimador, según Variables Auxiliares, en Muestreo Aleatorio Simple - Set 4 (cont.)

Variables Auxiliares	Directo	Razón	Regr. Lineal	por Difer.	Raz-Reg (1,2)	Raz-Reg (2,1)	Reg-Raz 1 coef. (1,2)	Reg-Raz 1 coef. (2,1)	Reg-Raz 2 coef. (1,2)	Reg-Raz 2 coef. (2,1)
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$	-	-	0,04764	0,06108	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_5$	-	-	0,05409	0,06509	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_6$	-	-	0,05506	0,12101	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4\ x_5$	-	-	0,04450	0,05884	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4\ x_6$	-	-	0,04820	0,12654	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_5\ x_6$	-	-	0,05398	0,11851	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,04895	0,05636	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,05025	0,12646	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,05489	0,11912	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,04917	0,12286	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,04452	0,05983	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,04778	0,12957	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,05808	0,12224	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,04464	0,12608	-	-	-	-	-	-
$x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,04913	0,12599	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$	-	-	0,04448	0,05971	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_6$	-	-	0,06680	0,12949	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_5\ x_6$	-	-	0,05289	0,12232	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,04450	0,12601	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,04893	0,12592	-	-	-	-	-	-
$x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,04451	0,12924	-	-	-	-	-	-
$x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6$	-	-	0,04448	0,12917	-	-	-	-	-	-

Tabla 32 - Menor, mayor y rangos de coeficientes de variación según bloque y estimador - Set 4

	$CV(\hat{\bar{Y}}_1)$			$CV(\hat{\bar{Y}}_2)$			$CV(\hat{\bar{Y}}_3)$		
	Menor	Mayor	Rango	Menor	Mayor	Rango	Menor	Mayor	Rango
Sin variables auxiliares									
Directo	0,09407	-	-	0,14089	-	-	0,05986	-	-
Con 1 variable auxiliar									
Razón	0,07388	0,36146	0,28758	0,11540	0,34053	0,22513	0,06572	0,33106	0,26534
Regresión Lineal	0,04419	0,09407	0,04988	0,11340	0,14068	0,02728	0,05033	0,05981	0,00948
por Diferencias	0,18066	17,90861	17,72794	0,11464	1,34639	1,23176	0,05838	0,11439	0,05601
Con 2 variables auxiliares									
Regresión Lineal	0,04235	0,09406	0,05171	0,11091	0,14031	0,02940	0,04824	0,05973	0,01149
por Diferencias	1,23261	22,79197	21,55936	0,11460	1,72155	1,60695	0,05598	0,12371	0,06772
Razón-Regresión (1,2)	0,07208	0,17999	0,10791	0,11256	0,16402	0,05146	0,05428	0,13566	0,08138
Razón-Regresión (2,1)	0,07208	0,17999	0,10791	0,11256	0,16402	0,05146	0,05428	0,13566	0,08138
Regresión-Razón 1 coeficiente (1,2)	0,06328	0,33730	0,27402	0,11533	0,33719	0,22186	0,06042	0,29866	0,23824
Regresión-Razón 1 coeficiente. (2,1)	0,07382	0,36144	0,28762	0,11135	0,33997	0,22861	0,06093	0,33082	0,26989
Regresión-Razón 2 coeficientes (1,2)	0,19510	1,14009	0,94499	0,11533	0,33719	0,22186	0,06352	0,29891	0,23539
Regresión-Razón 2 coeficientes (2,1)	0,07382	0,36144	0,28762	0,11135	0,33997	0,22861	0,06093	0,33082	0,26989
Con 3 variables auxiliares									
Regresión Lineal	0,04143	0,09312	0,05169	0,10972	0,13767	0,02796	0,04456	0,05933	0,01477
por Diferencias	2,16874	23,23736	21,06862	0,15379	1,75427	1,60048	0,05585	0,12663	0,07078
Con 4 variables auxiliares									
Regresión Lineal	0,04065	0,08944	0,04878	0,10929	0,14077	0,03148	0,04450	0,05808	0,01357
por Diferencias	3,27301	23,64523	20,37221	0,23556	1,78134	1,54577	0,05636	0,12957	0,07321
Con 5 variables auxiliares									
Regresión Lineal	0,03823	0,10020	0,06197	0,10861	0,13124	0,02264	0,04448	0,06680	0,02232
por Diferencias	10,80259	23,61783	12,81525	0,81290	1,77914	0,96625	0,05971	0,12949	0,06979
Con 6 variables auxiliares									
Regresión Lineal	0,03822	-	-	0,10860	-	-	0,04448	-	-
por Diferencias	23,52778	-	-	1,77112	-	-	0,12917	-	-

Se tiene que en general los estimadores indirectos mejoran la precisión del estimador directo, aunque no es tan marcado para estimar $\bar{Y}_3$, ni con el estimador por diferencias en ningún caso, que llega a ser muy deficiente en $\hat{\bar{Y}}_1$ y en varios casos de $\hat{\bar{Y}}_2$, presentando siempre un rango amplio de precisiones, al contrario del estimador de regresión lineal, que presenta las mayores precisiones y un rango reducido, lo que lo hace muy estable, presentándose en este set de datos, que al agregar una nueva variable que reduzca el *CV*, conserva las variables que reducen y agrega otra, para $\hat{\bar{Y}}_1$, $\hat{\bar{Y}}_2$ y $\hat{\bar{Y}}_3$. Esto es, el menor coeficiente de variación, con 1, 2, 3, 4, 5 y 6 variables auxiliares, respectivamente, se obtiene con las siguientes variables, para $CV(\hat{\bar{Y}}_1)$, (x_1), (x_1, x_4), (x_1, x_4, x_5), (x_1, x_4, x_5, x_3), (x_1, x_4, x_5, x_3, x_6), (x_1, x_4, x_5, x_3, x_6, x_2), para $CV(\hat{\bar{Y}}_2)$ (x_2), (x_2, x_5), (x_2, x_5, x_1), (x_2, x_5, x_1, x_3), (x_2, x_5, x_1, x_3, x_4), (x_2, x_5, x_1, x_3, x_4, x_6), y para $CV(\hat{\bar{Y}}_3)$ (x_4), (x_4, x_2), (x_4, x_2, x_5), (x_4, x_2, x_5, x_1), (x_4, x_2, x_5, x_1, x_3), (x_4, x_2, x_5, x_1, x_3, x_6), Para este set de datos, para estimar $\overline{Y}_1, \overline{Y}_2$ y $\overline{Y}_3$, se pueden tomar las variables auxiliares x_1 y x_2 ó x_1, x_2 y x_4 y los coeficientes de variación respectivos, $CV(\hat{\overline{Y}}_1)$, $CV(\hat{\overline{Y}}_2)$ y $CV(\hat{\overline{Y}}_3)$ son 0,04398, 0,11330 y 0,05554, para el primer caso, y 0,04224, 0,11213 y 0,04820, para el segundo, que son razonablemente bajos.

Por otra parte, los estimadores indirectos compuestos en general se comportan estables, pero no mejoran el estimador de regresión lineal.

Es importante recalcar que el estimador lineal múltiple siempre tiene mayor precisión que el resto, y que mejora a medida que se van agregando variables.

6.2.- Pruebas con data real

Tal como se comentó al comienzo del capítulo, se trabajará con una data del XIII Censo General de Población y Vivienda de Venezuela, ejecutado en 2001, por ser la data disponible más reciente de una enumeración completa. Específicamente se trabajó el Municipio Sucre del Estado Miranda, por ser un municipio grande, del Área Metropolitana de Caracas, con diversidad de personas.

El objetivo, además de analizar el comportamiento de los estimadores de regresión lineal, y compararlo con otros estimadores, es verificar la aplicación de dichos estimadores en un caso real.

El Municipio Sucre del Estado Miranda, consta de 153.424 viviendas, de las cuales 134.346 están ocupadas, y de ellas 134.207 son de uso familiar, y 546.766 personas.

Se trabajaron dos tablas, sobre las cuales se calcularon los valores poblacionales, los Errores Cuadráticos Medios, Errores Estándar y Coeficientes de Variación poblacionales, para los estimadores Directo, de Razón, de Regresión Lineal Simple y de Regresión Lineal Múltiple (con 3 variables auxiliares), asumiendo una muestra aleatoria simple del 20% de las viviendas.

Las tablas trabajadas son las siguientes,

Tabla 33- Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad (maqueta)

Sexo y Grupos de Edad	Total						Ocupado		Desocupado		BTPPV		Estudiando		Pens/Jub		Otra	
	Total	Prim	Bach/ TM	Prof	Otro	Ning	Total	…	Total	…	Total	…	Total	…	Total	…	Total	…
Total																		
0 a 4 años																		
5 a 9 años																		
10 a 14 años																		
15 a 19 años																		
20 a 24 años																		
25 a 29 años																		
30 a 39 años																		
40 a 49 años																		
50 a 59 años																		
60 ó más años																		
Hombres																		
⋮																		
Mujeres																		
⋮																		

Se puede observar que Situación en la Fuerza de Trabajo, está desagregado en 6 categorías, Ocupado, Desocupado, Buscando Trabajo por Primera Vez (BTPPV), Estudiando, Pensionado o Jubilado y Otra (que incluye No Declarado), y Nivel Educativo Alcanzado desagregado en 5 categorías, que son Primaria, Bachillerato/Educación Media/Técnico Medio (Bach/TM), Profesional (incluye Universitario y Técnico Superior), Otro (incluye No Aplica y No Declarado) y Ninguno. Cabe destacar que se agregó “No Declarado”, y “No Aplica” y “No Declarado” a las categorías “Otro” y “Otra” de Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado respectivamente, para simplificar el cuadro, debido a que se desea hacer una prueba de los estimadores y no un análisis del comportamiento de las variables y perfiles de la población.

Ésta tabla está compuesta por variables categóricas, incluso la edad, que siendo numérica aquí está categorizada. La otra tabla trabajada, sustituye la variable "Situación en la Fuerza de Trabajo" por "Ingreso", y resulta de la forma siguiente,

Tabla 34 - Total de Personas, Total Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado, por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad (maqueta)

Sexo y	Total						Total Personas con Ingreso Declarado		Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado	
Grupos de Edad	Total	Prim.	Bach/TM	Prof.	Otro	Ning.	Total	…	Total	…
Total										
0 a 4 años										
5 a 9 años										
10 a 14 años										
15 a 19 años										
20 a 24 años										
25 a 29 años										
30 a 39 años										
40 a 49 años										
50 a 59 años										
60 ó más años										
Hombres										
⋮										
Mujeres										
⋮										

Tal como se comentó anteriormente, se supone una muestra aleatoria simple del 20% de las viviendas ocupadas, que representan unas 26.869 viviendas. De manera que las variables

La primera tabla tiene 1.386 celdas y la segunda 594, incluyendo los totales, y cada una de las celdas representa una estimación, por lo tanto, se calcularán los Errores Cuadráticos Medio, Errores Estándar y Coeficientes de Variación para cada celda, sin embargo, al utilizar los estimadores indirectos, algunas variables fungirán como auxiliares, donde las candidatas son "Sexo", "Grupos de Edad" y "Nivel Educativo Alcanzado", siendo siempre "Situación en la Fuerza de Trabajo", variable a estimar.

Las variables deben definirse como,

y_{1i} = Total de personas ocupadas en la vivienda i-ésima
y_{2i} = Total de personas desocupadas en la vivienda i-ésima
y_{3i} = Total de personas buscando trabajo por primera vez en la vivienda i-ésima
y_{4i} = Total de personas estudiando en la vivienda i-ésima
y_{5i} = Total de personas pensionadas o jubiladas en la vivienda i-ésima
y_{6i} = Total de personas en otra condición de la fuerza de trabajo en la vivienda i-ésima

y_{7i} = Ingreso total de las personas de la vivienda i-ésima

x_{1i} = Total de personas de sexo masculino en la vivienda i-ésima
x_{1i} = Total de personas de sexo femenino en la vivienda i-ésima

z_{1i} = Total de personas entre 0 y 4 años en la vivienda i-ésima
z_{2i} = Total de personas entre 5 y 9 años en la vivienda i-ésima
z_{3i} = Total de personas entre 10 y 14 años en la vivienda i-ésima
z_{4i} = Total de personas entre 15 a 19 años en la vivienda i-ésima
z_{5i} = Total de personas entre 20 y 24 años en la vivienda i-ésima
z_{6i} = Total de personas entre 25 y 29 años en la vivienda i-ésima
z_{7i} = Total de personas entre 30 y 39 años en la vivienda i-ésima
z_{8i} = Total de personas entre 40 y 49 años en la vivienda i-ésima
z_{9i} = Total de personas entre 50 y 59 años en la vivienda i-ésima
z_{10i} = Total de personas de 60 años o más en la vivienda i-ésima

t_{1i} = Total de personas con Nivel Educativo Alcanzado de Primaria en la vivienda i-ésima
t_{1i} = Total de personas con Nivel Educativo Alcanzado de Bachillerato o Técnico Medio en la vivienda i-ésima

t_{1i} = Total de personas con Nivel Educativo Alcanzado de Profesional en la vivienda *i*-ésima

t_{1i} = Total de personas con Otro Nivel Educativo Alcanzado en la vivienda *i*-ésima

t_{1i} = Total de personas con Ningún Nivel Educativo Alcanzado en la vivienda *i*-ésima

Como se mencionó, se trabajarán 4 estimadores, Directo, Razón, Regresión Lineal Simpe y Regresión Lineal Múltiple con 3 variables auxiliares. Cabe destacar que los estimadores de regresión lineal, tanto simpe como múltiple, se trabajarán con el valor de los coeficientes b que minimizan la varianza. Para los estimadores de Razón y Regresión Lineal Simple, debe seleccionarse una variable auxiliar entre "Sexo", "Grupos de Edad" y Nivel Educativo Alcanzado", para el de Regresión Lineal Múltiple serán las tres. Para determinar las variables auxiliares, se calcularon los Coeficientes de Correlación de Pearson, que se muestran a continuación,

Tabla 35 - Coeficientes de Correlación entre Sexo y Situación en la Fuerza de Trabajo, y entre Sexo e Ingresos

Sexo	Situación en la Fuerza de Trabajo						Ingresos
	Ocupado	Desocupado	BTPPV	Estudiando	Pensionado o Jubilado	Otra	
Hombres	0,4764	0,1026	0,0266	0,3210	0,1243	0,3202	0,0655
Mujeres	0,3723	0,0858	0,3518	0,3677	0,2309	0,3518	0,0497

Tabla 36 - Coeficientes de Correlación entre Grupos de Edad y Situación en la Fuerza de Trabajo, y entre Grupos de Edad e Ingresos

Grupos de Edad	Situación en la Fuerza de Trabajo						Ingresos
	Ocupado	Desocupado	BTPPV	Estudiando	Pensionado o Jubilado	Otra	
0 a 4 años	0,1060	0,0044	0,0029	-0,0335	-0,0472	0,1759	-0,0491
5 a 9 años	0,0771	0,0077	0,0009	0,0682	-0,0526	0,1110	-0,0612
10 a 14 años	0,0735	0,0086	0,0047	0,6973	-0,0430	0,1194	-0,0555
15 a 19 años	0,2593	0,0414	0,0354	0,4551	-0,0138	0,1863	-0,0026
20 a 24 años	0,3586	0,0681	0,0299	0,0832	-0,0070	0,1846	0,0354
25 a 29 años	0,2720	0,0499	0,0094	-0,0919	-0,0022	0,1016	0,0547
30 a 39 años	0,2147	0,0411	-0,0020	0,0716	0,0132	0,0752	0,0745
40 a 49 años	0,2181	0,0538	0,0106	0,2439	0,0312	0,0847	0,0968
50 a 59 años	0,1870	0,0591	0,0102	0,0426	0,0923	0,1226	0,1045
60 ó más años	-0,0062	0,0415	-0,0024	-0,0854	0,6756	0,1853	0,0415

Tabla 37 - Coeficientes de Correlación entre Nivel Educativo Alcanzado y Situación en la Fuerza de Trabajo, y entre Nivel Educativo Alcanzado e Ingresos

Nivel Educativo Alcanzado	Situación en la Fuerza de Trabajo						Ingresos
	Ocupado	Desocupado	BTPPV	Estudiando	Pensionado o Jubilado	Otra	
Primaria	0,3277	0,0795	0,0258	0,4245	0,0304	0,3685	-0,1570
Bach/Téc. Med	0,3037	0,0424	0,0137	0,1743	0,0433	0,1121	0,0624
Profesional	0,1984	0,0404	0,0001	0,0868	0,0740	-0,0902	0,4530
Otro	0,1161	0,0331	0,0037	-0,0213	0,2823	0,1740	-0,0363
Ninguno	0,0415	0,0247	0,0084	0,0001	0,0729	0,2217	-0,0684

Al analizar los coeficientes de correlación, se observa que no existen altas correlaciones, ni positivas ni negativas, y no hay una variable que consistentemente tenga mayor correlación con "Situación en la Fuerza de Trabajo" que las otras. Por tal motivo, se tomaron las tres variables auxiliares, de forma separada, de manera que se tienen los siguientes estimadores,

- Estimador Directo
- Estimador de Razón (variable auxiliar "Sexo")
- Estimador de Razón (variable auxiliar "Grupos de Edad")
- Estimador de Razón (variable auxiliar "Nivel Educativo Alcanzado")
- Estimador de Regresión Lineal Simple (variable auxiliar "Sexo")
- Estimador de Regresión Lineal Simple (variable auxiliar "Grupos de Edad")
- Estimador de Regresión Lineal Simple (variable auxiliar "Nivel Educativo Alcanzado")
- Estimador de Regresión Lineal Simple (variable auxiliar "Nivel Educativo Alcanzado")
- Estimador de Regresión Lineal Múltiple (variables auxiliares "Sexo", "Grupos de Edad", "Nivel Educativo Alcanzado")

Como complemento, en las tablas 38 a 40 se tienen los coeficientes de correlación entre las variables auxiliares, y en la tabla 41entre las variables a estimar.

Tabla 38 - Coeficientes de Correlación entre Sexo
y Grupos de Edad

Grupos de Edad	Sexo	
	Hombres	Mujeres
0 a 4 años	0,4035	0,4099
5 a 9 años	0,3877	0,3899
10 a 14 años	0,3347	0,3517
15 a 19 años	0,3507	0,3117
20 a 24 años	0,3040	0,2686
25 a 29 años	0,2163	0,1867
30 a 39 años	0,2529	0,2160
40 a 49 años	0,2073	0,1813
50 a 59 años	0,1016	0,0948
60 ó más años	0,0591	0,2017

Tabla 39 - Coeficientes de Correlación entre Sexo
y Nivel Educativo Alcanzado

Grupos de Edad	Sexo	
	Hombres	Mujeres
Primaria	0,5917	0,5238
Bach / Téc Med	0,2218	0,2335
Profesional	-0,0122	0,0679
Otro	0,4664	0,5049
Ninguno	0,1851	0,1779

Tabla 40 - Coeficientes de Correlación entre Nivel Educativo Alcanzado y Grupos de Edad

Grupos de Edad	Nivel Educativo Alcanzado				
	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
0 a 4 años	0,2160	0,0175	-0,1249	0,7732	0,1068
5 a 9 años	0,4217	-0,0094	-0,1429	0,3945	0,1837
10 a 14 años	0,5415	0,0146	-0,1304	0,0844	0,0888
15 a 19 años	0,3747	0,2448	-0,0406	0,0570	0,0637
20 a 24 años	0,1880	0,2273	0,0678	0,2515	0,0453
25 a 29 años	0,0909	0,1127	0,0812	0,1969	0,0295
30 a 39 años	0,2143	0,0393	0,0334	0,1839	0,0389
40 a 49 años	0,1935	0,1472	0,0376	-0,0111	0,0266
50 a 59 años	0,0245	0,1062	0,1917	-0,0654	0,0345
60 ó más años	0,0128	0,0502	0,1234	0,1196	0,1098

Tabla 41 - Coeficientes de Correlación entre Situación en la Fuerza de Trabajo e Ingresos

Situación en la Fuerza de Trabajo					
Ocupado	Desocupado	BTPPV	Estudiando	Pensionado o Jubilado	Otra
0,2788	0,0112	-0,0055	0,0152	0,0030	-0,1007

En el Apéndice se tienen los Coeficientes de Variación (no se muestran los Errores Cuadráticos Medio ni los Errores Estándar). Como ayuda en el análisis, se jerarquizaron los coeficientes de variación, de menor a mayor, en cada celda, y a continuación en las tablas 42 a 57, se muestran la posición que ocuparon en dicha jerarquización o ranking, tanto para la estimación del total de personas, como de los ingresos promedio, donde “1” es el estimador que tiene menor Coeficiente de Variación, y “8” el que tiene el mayor.

Tabla 42 - Posición en Ranking de Estimadores del Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador Directo

	TOTAL						Ocupado						Desocupado						BTPPV						Estudiando						Pensionado o Jubilado						Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Profesional	Otro	Ninguno	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Primaria	Bach/TM	Profesional	Otro	Ninguno	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	8	8	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	6	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	7	8	7	7	6	7	7	8	8	8	8	8	7	8	8
0 a 4 años	8	-	-	-	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8	-	-	-	8	-
5 a 9 años	8	8	-	-	8	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8	8	-	-	8	8
10 a 14 años	7	7	7	-	8	8	8	8	8	-	8	8	8	8	-	-	7	-	7	7	7	-	8	7	7	7	7	-	8	7	7	7	-	-	8	7	8	8	8	-	8	8
15 a 19 años	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	6	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	6	8	7	8	8	8	8	8	8
20 a 24 años	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	6	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	7	8	7	8	7	7	8	8	7	8	8	8	8	8	8
25 a 29 años	8	8	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	6	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	7	8	7	8	7	7	6	8	7	8	8	8	7	8	8
30 a 39 años	8	8	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	6	8	7	7	7	7	7	8	6	7	7	7	7	8	7	8	7	7	6	8	7	8	8	7	7	8	8
40 a 49 años	8	8	7	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	6	7	7	7	-	-	-	7	-	7	7	7	6	8	7	7	7	6	6	8	7	8	8	7	7	8	8
50 a 59 años	7	8	7	7	8	8	8	8	7	7	8	8	8	8	8	6	8	7	8	-	-	-	8	-	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	8	7	7	7	7	7	8	8
60 ó más años	7	6	7	7	8	8	7	6	7	7	8	8	7	6	7	7	8	8	-	-	-	-	-	-	8	8	8	8	8	8	7	6	7	7	8	8	7	6	7	7	8	8
Hombres	8	8	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	6	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	7	8	7	7	6	7	7	8	8	8	8	8	7	8	8
0 a 4 años	8	-	-	-	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8	-	-	-	8	-
5 a 9 años	8	8	-	-	8	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8	8	-	-	8	8
10 a 14 años	7	7	7	-	8	8	8	8	8	-	8	8	8	8	-	-	-	-	7	7	7	-	8	7	7	7	7	-	8	7	7	7	-	-	7	7	8	8	8	-	8	8
15 a 19 años	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	6	8	7	8	8	8	8	8	8
20 a 24 años	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	6	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	7	8	6	8	7	7	6	8	7	8	8	8	8	8	8
25 a 29 años	8	8	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	6	7	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	7	8	7	8	7	7	5	8	7	8	8	8	8	8	8
30 a 39 años	8	8	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	6	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	8	8	7	8	7	7	7	8	7	8	8	8	7	8	8
40 a 49 años	8	8	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	6	7	7	7	-	-	-	7	-	7	7	7	7	8	6	7	7	6	6	8	7	8	8	8	7	8	8
50 a 59 años	8	8	7	7	8	8	8	8	7	7	8	8	8	8	8	6	8	7	6	-	-	-	6	-	6	6	7	6	6	-	6	7	6	6	8	7	8	8	7	7	8	8
60 ó más años	7	6	7	7	8	8	7	7	7	7	8	8	7	6	7	7	8	8	-	-	-	-	-	-	8	8	8	8	8	7	7	6	7	7	8	8	7	7	7	7	8	8
Mujeres	8	8	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	6	8	6	7	7	7	7	8	7	7	7	7	7	8	7	7	6	7	7	8	8	8	8	7	7	8	8
0 a 4 años	8	-	-	-	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8	-	-	-	8	-
5 a 9 años	8	8	-	-	8	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8	8	-	-	8	8
10 a 14 años	7	7	7	-	8	8	8	8	8	-	6	8	8	8	-	-	7	-	7	7	5	-	-	-	7	7	7	-	8	7	7	7	-	-	8	7	8	8	8	-	8	8
15 a 19 años	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	6	8	7	7	7	7	6	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	-	7	7	8	8	8	8	8	8
20 a 24 años	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	6	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	7	8	7	8	8	8	8	8	8
25 a 29 años	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	6	8	6	7	7	7	7	8	-	7	7	7	7	8	7	7	7	7	6	8	7	8	8	8	7	8	8
30 a 39 años	8	8	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	6	8	6	7	7	7	7	8	6	7	7	6	7	7	7	7	7	7	6	8	8	8	8	7	7	8	8
40 a 49 años	8	8	7	7	8	8	8	8	7	7	8	8	8	8	7	6	7	7	8	-	-	-	8	-	7	7	6	6	7	7	6	6	6	6	8	8	8	8	7	7	8	8
50 a 59 años	7	7	7	7	8	8	7	8	7	7	8	8	6	6	7	6	8	6	8	-	-	-	8	-	6	6	6	6	-	6	6	5	6	6	7	7	7	7	7	7	8	8
60 ó más años	7	6	7	7	8	8	7	6	7	7	8	8	7	8	8	7	-	7	-	-	-	-	-	-	8	8	8	8	7	8	7	6	7	7	8	8	7	6	7	7	8	8

Tabla 43 - Posición en Ranking de Estimadores del Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Razón (va: Sexo)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado						BTPPV						Estudiando						Pensionado o Jubilado						Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Profesional	Otro	Ninguno	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Primaria	Bach/TM	Profesional	Otro	Ninguno	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	7	6	7	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	7	7	7	6	5	5	5	5	7	5	5	5	5	5	7	5	8	7	8	8	7	7	7	7	7	8	7	7
0 a 4 años	7	-	-	-	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7	-	-	-	7	-
5 a 9 años	7	5	-	-	7	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7	5	-	-	7	7
10 a 14 años	5	5	5	-	7	7	7	7	7	-	7	7	7	7	-	-	8	-	5	5	6	-	7	5	5	5	5	-	7	5	5	5	-	-	7	5	7	7	7	-	7	7
15 a 19 años	6	6	5	5	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	4	7	5	5	5	5	5	7	5	5	5	5	5	7	5	5	5	5	7	7	5	7	7	7	7	7	7
20 a 24 años	7	7	7	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	5	5	5	5	5	7	5	5	5	5	5	7	5	7	5	5	6	7	5	7	7	7	7	7	7
25 a 29 años	7	7	7	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	7	7	7	5	5	5	5	5	7	5	5	5	5	5	7	6	7	5	5	7	7	5	7	7	7	8	7	7
30 a 39 años	7	7	7	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	7	7	7	5	5	5	5	6	7	7	6	5	6	6	7	5	7	5	5	7	7	5	7	7	8	8	7	7
40 a 49 años	7	7	8	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	8	7	8	5	8	-	-	-	8	-	5	5	6	7	7	5	6	5	7	7	7	5	7	7	8	8	7	7
50 a 59 años	8	7	8	8	7	7	7	7	8	8	7	7	7	7	7	7	7	5	7	-	-	-	7	-	7	4	7	7	8	7	7	7	7	7	7	5	8	8	8	8	7	7
60 ó más años	8	7	8	8	7	7	8	8	8	8	7	7	8	8	8	8	7	7	-	-	-	-	-	-	7	7	7	7	7	7	8	7	8	8	7	7	8	7	8	8	7	7
Hombres	7	6	7	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	7	7	7	6	5	5	5	5	7	5	5	5	5	5	7	5	8	8	8	8	7	7	7	7	7	8	7	7
0 a 4 años	7	-	-	-	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7	-	-	-	7	-
5 a 9 años	7	5	-	-	7	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7	5	-	-	7	7
10 a 14 años	5	5	5	-	7	7	7	7	6	-	7	7	7	7	-	-	-	-	5	5	5	-	7	5	5	5	5	-	7	5	5	4	-	-	4	5	7	7	7	-	7	7
15 a 19 años	6	6	5	5	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	5	7	5	5	5	5	5	7	5	5	5	5	5	7	5	5	5	5	7	7	5	7	7	7	7	7	7
20 a 24 años	7	7	7	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	5	5	5	5	5	7	5	5	3	5	5	7	7	7	5	5	7	7	5	7	7	7	7	7	7
25 a 29 años	7	7	7	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	7	7	8	5	5	5	5	6	7	5	6	3	5	6	7	8	7	5	5	7	7	5	7	7	7	7	7	7
30 a 39 años	7	7	7	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	7	7	7	5	5	5	5	8	8	5	6	5	5	7	7	6	7	5	6	6	7	5	7	7	7	8	7	7
40 a 49 años	7	7	7	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	7	7	8	5	8	-	-	-	8	-	5	5	5	8	7	7	5	5	7	7	7	6	7	7	7	8	7	7
50 a 59 años	7	7	8	8	7	7	7	7	8	8	7	7	7	7	7	7	7	5	7	-	-	-	7	-	7	7	5	7	8	-	7	5	7	7	7	5	7	7	8	8	7	7
60 ó más años	8	8	8	8	7	7	8	8	8	8	7	7	8	8	8	8	7	7	-	-	-	-	-	-	7	7	7	7	5	8	8	8	8	8	7	7	8	8	8	8	7	7
Mujeres	7	6	7	8	7	7	7	7	7	8	7	7	7	7	7	7	7	7	5	5	5	5	7	5	5	5	5	5	7	5	8	7	8	8	7	7	7	7	8	8	7	7
0 a 4 años	7	-	-	-	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7	-	-	-	7	-
5 a 9 años	7	7	-	-	7	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	7	7	-	-	7	7
10 a 14 años	5	5	5	-	7	7	7	5	7	-	7	7	7	5	-	-	8	-	5	5	6	-	-	-	5	5	5	-	7	5	5	5	-	-	7	5	7	7	7	-	7	7
15 a 19 años	6	6	5	5	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	4	7	5	5	5	5	7	7	5	5	5	5	5	7	5	5	5	5	-	6	5	7	7	7	7	7	7
20 a 24 años	7	7	7	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	5	5	5	5	5	7	5	5	5	5	5	6	5	5	5	7	5	7	5	7	7	7	7	7	7
25 a 29 años	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	7	7	7	7	7	5	5	5	5	7	-	5	5	5	5	7	5	5	5	5	7	7	5	7	7	7	8	7	7
30 a 39 años	7	7	7	8	7	7	7	7	7	8	7	7	6	7	7	7	7	7	5	5	5	5	7	7	6	5	7	6	8	5	6	5	5	7	7	5	7	7	8	8	7	7
40 a 49 años	7	7	8	8	7	7	7	7	8	8	7	7	7	7	8	7	8	5	7	-	-	-	7	-	5	5	7	7	5	5	7	7	7	7	7	5	7	7	8	8	7	7
50 a 59 años	8	8	8	8	7	7	8	7	8	8	7	7	7	8	8	7	7	7	7	-	-	-	7	-	7	3	7	7	-	7	7	7	7	7	8	5	8	8	8	8	7	7
60 ó más años	8	7	8	8	7	7	8	7	8	8	7	7	8	6	7	8	-	8	-	-	-	-	-	-	7	5	7	7	8	7	8	7	8	8	6	7	8	7	8	8	7	7

Tabla 44 - Posición en Ranking de Estimadores del Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Razón (va: Grupos de Edad)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado						BTPPV						Estudiando						Pensionado o Jubilado						Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Profesional	Otro	Ninguno	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Primaria	Bach/TM	Profesional	Otro	Ninguno	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	5	7	5	5	3	5	3	3	3	4	5	5	3	3	3	8	5	8	8	8	8	8	5	8	8	8	8	8	3	8	3	3	3	3	5	5	3	3	3	4	3	5
0 a 4 años	3	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	-	-	-	3	-
5 a 9 años	3	3	-	-	3	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	3	-	-	3	5
10 a 14 años	8	8	8	-	5	5	3	3	5	-	5	5	3	3	-	-	5	-	8	8	8	-	6	8	8	8	8	-	3	8	8	8	-	-	5	8	3	3	5	-	5	5
15 a 19 años	8	8	8	8	5	5	3	3	3	3	3	5	3	3	3	8	3	8	8	8	8	8	3	8	8	8	8	8	3	8	8	8	8	8	5	8	3	3	3	3	5	5
20 a 24 años	3	3	3	8	5	5	3	3	3	3	5	5	3	3	3	8	3	8	8	8	8	8	5	8	8	8	8	8	3	8	5	8	8	3	5	8	3	3	3	3	5	5
25 a 29 años	3	3	3	3	5	5	3	3	3	3	3	5	3	3	3	8	5	8	8	8	8	8	3	8	8	8	8	8	5	8	5	8	8	8	5	8	3	3	3	3	5	5
30 a 39 años	3	3	3	5	5	5	3	3	3	5	5	5	5	3	3	8	5	8	8	8	8	8	5	8	8	8	8	8	5	8	5	8	8	8	5	8	3	3	3	4	5	5
40 a 49 años	3	3	3	5	5	5	3	3	3	4	5	5	3	3	3	8	3	8	5	-	-	-	5	-	8	8	8	8	5	8	8	8	8	8	5	8	3	3	5	5	5	5
50 a 59 años	3	3	3	4	3	5	3	3	3	3	3	5	3	3	3	8	3	8	5	-	-	-	5	-	8	8	8	8	3	8	8	8	8	8	5	8	3	3	3	5	3	5
60 ó más años	3	3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	5	3	3	3	4	4	5	-	-	-	-	-	-	3	3	3	5	4	6	3	3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	5
Hombres	5	7	5	5	3	5	3	3	3	3	5	5	3	3	3	8	5	8	8	8	8	8	5	8	8	8	8	8	3	8	3	3	3	3	5	5	3	3	3	3	3	5
0 a 4 años	3	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	-	-	-	3	-
5 a 9 años	3	3	-	-	3	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	3	-	-	3	5
10 a 14 años	8	8	8	-	5	5	3	3	7	-	5	6	3	3	-	-	-	-	8	8	8	-	6	8	8	8	8	-	3	8	8	8	-	-	6	8	3	3	5	-	5	5
15 a 19 años	8	8	8	8	5	5	3	3	3	3	3	5	3	3	4	8	3	8	8	8	8	8	5	8	8	8	8	8	3	8	8	8	8	8	5	8	3	3	3	5	5	5
20 a 24 años	3	3	3	8	5	5	3	3	3	3	5	5	3	3	3	8	3	8	8	8	8	8	5	8	8	8	8	8	3	8	5	8	8	8	5	8	3	3	3	5	5	5
25 a 29 años	3	3	3	3	5	5	3	3	3	3	3	5	3	3	3	8	3	8	8	8	8	8	3	8	8	8	8	8	5	5	5	8	8	8	5	8	3	3	3	3	5	5
30 a 39 años	3	3	3	5	5	5	3	3	3	5	5	5	3	3	3	8	5	8	8	8	8	5	5	8	8	8	8	6	5	8	5	8	8	8	5	8	3	3	3	5	5	5
40 a 49 años	3	3	3	3	5	5	3	3	3	3	5	5	3	3	3	8	3	8	5	-	-	-	5	-	8	8	8	5	5	8	8	8	8	8	5	8	3	3	3	3	5	5
50 a 59 años	3	3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	5	3	3	3	8	3	8	3	-	-	-	3	-	8	8	8	8	3	-	8	8	8	8	5	8	3	3	3	3	3	5
60 ó más años	3	3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	5	3	3	3	3	4	5	-	-	-	-	-	-	3	3	3	5	7	5	3	3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	5
Mujeres	5	7	5	5	3	5	3	3	3	5	5	5	5	3	3	8	5	8	8	8	8	8	5	8	8	8	8	8	3	8	3	3	3	5	3	5	3	3	3	4	3	5
0 a 4 años	3	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	-	-	-	3	-
5 a 9 años	3	3	-	-	3	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	3	3	-	-	3	5
10 a 14 años	8	8	8	-	5	5	3	3	5	-	3	5	3	3	-	-	5	-	8	8	8	-	-	-	8	8	8	-	3	8	8	8	-	-	5	8	3	3	5	-	5	5
15 a 19 años	8	8	8	8	5	5	3	3	3	3	3	5	3	3	3	8	5	8	8	8	8	8	3	8	8	8	8	8	3	8	8	8	8	-	3	8	3	3	3	3	5	5
20 a 24 años	3	3	3	8	5	5	3	3	3	3	5	5	3	3	3	8	3	8	8	8	8	8	5	8	8	8	8	8	3	8	8	8	8	3	3	8	3	3	3	3	5	5
25 a 29 años	3	3	3	3	5	5	3	3	3	3	3	5	7	3	3	8	5	8	8	8	8	8	3	-	8	8	8	8	3	8	8	8	8	8	5	8	3	3	3	3	5	5
30 a 39 años	3	3	3	5	5	5	3	3	3	5	5	5	7	3	3	8	5	8	8	8	8	8	5	8	8	8	8	8	3	8	8	8	8	8	3	7	3	3	3	4	5	5
40 a 49 años	3	3	5	5	5	5	3	3	5	5	5	5	5	3	3	8	5	8	5	-	-	-	5	-	8	8	8	8	3	8	8	8	8	8	5	7	3	3	5	5	5	5
50 a 59 años	3	3	3	5	3	5	3	3	3	5	3	5	8	3	3	8	3	8	5	-	-	-	5	-	8	8	8	8	-	8	8	8	8	8	3	8	3	3	3	5	3	5
60 ó más años	3	3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	5	4	3	3	4	-	5	-	-	-	-	-	-	3	3	3	5	3	6	3	3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	5

Tabla 45 - Posición en Ranking de Estimadores del Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Razón (va: Nivel Educativo Alcanzado)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado						BTPPV						Estudiando						Pensionado o Jubilado						Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Profesional	Otro	Ninguno	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Primaria	Bach/TM	Profesional	Otro	Ninguno	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	4	4	4	3	5	3	5	5	5	5	3	3	5	5	5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	5	3	5	8	5	5	3	3	5	5	5	5	5	3
0 a 4 años	5	-	-	-	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	-	-	-	5	-
5 a 9 años	5	7	-	-	5	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	7	-	-	5	3
10 a 14 años	3	3	3	-	3	3	5	5	3	-	4	3	5	5	-	-	3	-	3	3	3	-	3	3	3	3	3	-	5	3	3	4	-	-	3	3	5	5	3	-	3	3
15 a 19 años	3	4	3	3	3	3	5	5	5	5	5	3	5	5	5	7	5	3	3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	3	3	5	5	5	5	3	3
20 a 24 años	5	5	5	3	3	3	5	5	5	5	3	3	5	5	5	3	5	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	3	5	3	3	3	3	7	3	3	5	5	5	5	3	3
25 a 29 años	5	5	5	5	3	3	5	5	5	5	5	3	5	5	5	3	3	3	3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	5	5	5	5	3	3
30 a 39 años	5	5	5	3	3	3	5	5	5	3	3	3	3	5	5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	5	5	5	5	3	3
40 a 49 años	5	5	5	3	3	3	5	5	5	5	3	3	5	5	5	3	5	3	3	-	-	-	3	-	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	5	5	3	3	3	3
50 a 59 años	5	5	5	5	5	3	5	5	5	5	5	3	5	5	5	3	5	3	3	-	-	-	3	-	3	7	3	3	7	3	3	3	3	3	3	3	5	5	5	3	5	3
60 ó más años	5	8	5	5	5	3	5	7	5	5	5	3	5	7	5	5	5	3	-	-	-	-	-	-	5	5	5	3	5	3	5	8	5	5	5	3	5	8	5	5	5	3
Hombres	4	4	4	3	5	3	5	5	5	5	3	3	5	5	5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	5	3	5	7	5	5	3	3	5	6	5	5	5	3
0 a 4 años	5	-	-	-	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	-	-	-	5	-
5 a 9 años	5	7	-	-	5	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	7	-	-	5	3
10 a 14 años	3	3	3	-	3	3	5	5	3	-	3	3	5	5	-	-	-	-	3	3	3	-	3	3	3	3	3	-	5	3	3	6	-	-	8	3	5	5	3	-	3	3
15 a 19 años	3	4	3	3	3	3	5	5	5	5	5	3	5	5	5	4	5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	3	3	5	5	5	3	3	3
20 a 24 años	5	5	5	3	3	3	5	5	5	5	3	3	5	5	5	3	5	3	3	3	3	3	3	3	3	5	3	3	5	3	3	3	3	3	3	3	5	5	5	3	3	3
25 a 29 años	5	5	5	5	3	3	5	5	5	5	5	3	5	5	5	3	5	3	3	3	3	3	5	3	3	5	3	3	3	3	3	3	3	6	3	3	5	5	5	5	3	3
30 a 39 años	5	5	5	3	3	3	5	5	5	3	3	3	5	5	5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	5	5	5	3	3	3
40 a 49 años	5	5	5	5	3	3	5	5	5	5	3	3	5	5	5	3	5	3	3	-	-	-	3	-	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	5	5	5	5	3	3
50 a 59 años	5	5	5	5	5	3	5	5	5	5	5	3	5	5	5	3	5	3	8	-	-	-	8	-	3	3	3	3	7	-	3	3	3	3	3	3	5	5	5	5	5	3
60 ó más años	5	7	5	5	5	3	5	6	5	5	5	3	5	7	5	5	5	3	-	-	-	-	-	-	5	5	5	3	3	3	5	7	5	5	5	3	5	6	5	5	5	3
Mujeres	4	4	4	3	5	3	5	5	5	3	3	3	3	5	5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	5	3	5	8	5	3	5	3	5	5	5	5	5	3
0 a 4 años	5	-	-	-	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	-	-	-	5	-
5 a 9 años	5	6	-	-	5	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	6	-	-	5	3
10 a 14 años	3	4	3	-	3	3	6	7	3	-	8	3	6	7	-	-	3	-	3	3	7	-	-	-	4	4	3	-	5	3	3	3	-	-	3	3	5	5	3	-	3	3
15 a 19 años	3	4	3	3	3	3	5	5	5	5	5	3	5	5	5	7	3	4	3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	5	3	3	3	3	-	8	3	5	5	5	5	3	3
20 a 24 años	5	5	5	3	3	3	5	5	5	5	3	3	5	5	5	3	5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	8	3	3	3	3	8	5	3	5	5	5	5	3	3
25 a 29 años	5	5	5	5	3	3	5	5	5	5	5	3	3	5	5	3	3	3	3	3	3	3	5	-	3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	3	3	5	5	5	5	3	3
30 a 39 años	5	5	5	3	3	3	5	5	5	3	3	3	3	5	5	3	3	3	3	4	3	3	3	3	3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	5	3	5	5	5	5	3	3
40 a 49 años	5	5	3	3	3	3	5	5	3	3	3	3	3	5	5	3	3	3	3	-	-	-	3	-	3	3	3	3	8	3	3	3	3	3	3	3	5	5	3	3	3	3
50 a 59 años	5	5	5	3	5	3	5	5	5	3	5	3	3	7	5	3	5	3	3	-	-	-	3	-	3	7	3	3	-	3	3	6	3	3	5	3	5	5	5	3	5	3
60 ó más años	5	8	5	5	5	3	5	8	5	5	5	3	5	7	5	5	-	4	-	-	-	-	-	-	5	7	5	3	5	3	5	8	5	5	7	3	5	8	5	5	5	3

Tabla 46 - Posición en Ranking de Estimadores del Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Regresión Lineal Simple (va: Sexo)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado						BTPPV						Estudiando						Pensionado o Jubilado						Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Profesional	Otro	Ninguno	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Primaria	Bach/TM	Profesional	Otro	Ninguno	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	6	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	6	4	4	4	4	4	6	4	4	4	4	4	6	4	6	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
0 a 4 años	6	-	-	-	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6	-	-	-	6	-
5 a 9 años	6	4	-	-	6	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6	4	-	-	6	6
10 a 14 años	4	4	4	-	6	6	6	6	6	-	6	6	6	6	-	-	6	-	4	4	4	-	4	4	4	4	4	-	6	4	4	3	-	-	6	4	6	6	6	-	6	6
15 a 19 años	5	5	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	3	6	4	4	4	4	4	6	4	4	4	4	4	6	4	4	4	4	5	6	4	6	6	6	6	6	6
20 a 24 años	6	6	6	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	4	6	4	4	4	4	4	6	4	4	2	4	4	6	4	6	4	4	5	6	4	6	6	6	6	6	6
25 a 29 años	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	4	6	4	4	4	4	4	6	4	4	4	4	4	6	5	6	4	4	4	6	4	6	6	6	6	6	6
30 a 39 años	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	6	4	4	4	4	5	6	5	4	4	4	5	6	4	6	4	4	5	6	4	6	6	6	6	6	6
40 a 49 años	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	6	4	6	-	-	-	6	-	4	4	4	5	6	4	4	4	5	4	6	4	6	6	6	6	6	6
50 a 59 años	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	4	6	4	6	-	-	-	6	-	4	3	4	5	5	4	4	4	4	5	6	4	6	6	6	6	6	6
60 ó más años	6	5	6	6	6	6	6	5	6	6	6	6	6	5	6	6	6	6	-	-	-	-	-	-	6	6	6	6	6	4	6	5	6	6	6	6	6	5	6	6	6	6
Hombres	6	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	6	4	4	4	4	4	6	4	4	4	4	4	6	4	6	5	6	6	6	6	6	4	6	6	6	6
0 a 4 años	6	-	-	-	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6	-	-	-	6	-
5 a 9 años	6	4	-	-	6	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6	4	-	-	6	6
10 a 14 años	4	4	4	-	6	6	6	6	5	-	6	5	6	6	-	-	-	-	4	4	4	-	4	4	4	4	4	-	6	4	4	2	-	-	3	4	6	6	6	-	6	6
15 a 19 años	5	5	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	3	6	4	4	4	4	4	6	4	4	4	4	4	6	4	4	4	4	5	6	4	6	6	6	6	6	6
20 a 24 años	6	6	6	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	4	6	4	4	4	4	4	6	4	4	2	4	4	6	5	6	4	4	5	6	4	6	6	6	6	6	6
25 a 29 años	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	4	6	4	4	4	4	4	6	4	4	2	4	5	6	6	6	4	4	2	6	4	6	6	6	6	6	6
30 a 39 años	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	6	4	4	4	4	6	6	4	5	4	4	5	6	4	6	4	5	4	6	4	6	6	6	6	6	6
40 a 49 años	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	6	4	6	-	-	-	6	-	4	4	4	6	6	5	4	4	5	4	6	5	6	6	6	6	6	6
50 a 59 años	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	4	6	4	4	-	-	-	4	-	5	5	4	5	5	-	4	4	4	5	6	4	6	6	6	6	6	6
60 ó más años	6	5	6	6	6	6	6	5	6	6	6	6	6	5	6	6	6	6	-	-	-	-	-	-	6	6	6	6	4	6	6	5	6	6	6	6	6	5	6	6	6	6
Mujeres	6	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	6	4	4	4	4	4	6	4	4	4	4	4	6	4	6	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
0 a 4 años	6	-	-	-	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6	-	-	-	6	-
5 a 9 años	6	4	-	-	6	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6	4	-	-	6	6
10 a 14 años	4	3	4	-	6	6	4	4	6	-	5	6	5	4	-	-	6	-	4	4	4	-	-	-	3	3	4	-	6	4	4	4	-	-	6	4	6	6	6	-	6	6
15 a 19 años	5	5	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	3	6	2	4	4	4	4	6	4	4	4	4	4	6	4	4	4	4	-	5	4	6	6	6	6	6	6
20 a 24 años	6	6	6	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	4	6	4	4	4	4	4	6	4	4	4	4	4	5	4	4	4	5	4	6	4	6	6	6	6	6	6
25 a 29 años	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	6	6	4	6	5	4	4	4	4	6	-	4	4	4	4	6	4	4	4	4	5	6	4	6	6	6	6	6	6
30 a 39 años	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	6	6	5	6	4	4	2	4	4	6	5	4	4	4	4	6	4	5	4	4	5	6	4	6	6	6	6	6	6
40 a 49 años	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	6	4	6	-	-	-	6	-	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	6	4	6	6	6	6	6	6
50 a 59 años	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5	6	4	6	5	6	-	-	-	6	-	4	2	4	5	-	4	4	3	5	5	6	4	6	6	6	6	6	6
60 ó más años	6	5	6	6	6	6	6	5	6	6	6	6	6	5	6	6	-	6	-	-	-	-	-	-	6	4	6	6	6	4	6	4	6	6	5	6	6	5	6	6	6	6

Tabla 47 - Posición en Ranking de Estimadores del Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Regresión Lineal Simple (va: Grupos de Edad)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado						BTPPV						Estudiando						Pensionado o Jubilado						Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Profesional	Otro	Ninguno	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Primaria	Bach/TM	Profesional	Otro	Ninguno	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	2	2	2	4	2	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	4	4	5	6	6	6	6	4	6	6	6	6	6	2	6	2	2	2	2	4	4	2	2	2	3	2	4
0 a 4 años	2	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	-	-	-	2	-
5 a 9 años	2	2	-	-	2	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	-	-	2	4
10 a 14 años	6	6	6	-	4	4	2	2	4	-	3	4	2	2	-	-	4	-	6	6	5	-	5	6	6	6	6	-	2	6	6	6	-	-	4	6	2	2	4	-	4	4
15 a 19 años	4	2	6	6	4	4	2	2	2	2	2	4	2	2	2	5	2	6	6	6	6	6	2	6	6	6	6	6	2	6	6	6	6	4	4	6	2	2	2	2	4	4
20 a 24 años	2	2	2	4	4	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	5	2	6	6	6	6	6	4	6	6	6	6	6	2	6	4	6	6	2	4	6	2	2	2	2	4	4
25 a 29 años	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	2	4	2	2	2	5	4	6	6	6	6	6	2	6	6	6	6	6	4	4	4	6	6	5	4	6	2	2	2	2	4	4
30 a 39 años	2	2	2	4	4	4	2	2	2	4	4	4	4	2	2	4	4	6	6	6	6	4	4	4	5	6	5	4	4	6	4	6	6	4	4	6	2	2	2	3	4	4
40 a 49 años	2	2	2	4	4	4	2	2	2	3	4	4	2	2	2	4	2	6	4	-	-	-	4	-	6	6	5	4	4	6	5	6	4	5	4	6	2	2	4	4	4	4
50 a 59 años	2	2	2	3	2	4	2	2	2	2	2	4	2	2	2	5	2	6	4	-	-	-	4	-	5	5	5	4	2	5	5	5	5	4	4	6	2	2	2	4	2	4
60 ó más años	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	4	-	-	-	-	-	-	2	2	2	4	3	5	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	4
Hombres	2	2	2	4	2	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	4	4	5	6	6	6	6	4	6	6	6	6	6	2	6	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	2	4
0 a 4 años	2	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	-	-	-	2	-
5 a 9 años	2	2	-	-	2	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	-	-	2	4
10 a 14 años	6	6	6	-	4	4	2	2	4	-	4	4	2	2	-	-	-	-	6	6	6	-	5	6	6	6	6	-	2	6	6	5	-	-	2	6	2	2	4	-	4	4
15 a 19 años	4	2	6	6	4	4	2	2	2	2	2	4	2	2	3	6	2	6	6	6	6	6	4	6	6	6	6	6	2	6	6	6	6	4	4	6	2	2	2	4	4	4
20 a 24 años	2	2	2	4	4	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	5	2	6	6	6	6	6	4	6	6	6	6	6	2	4	4	6	6	4	4	6	2	2	2	4	4	4
25 a 29 años	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	2	4	2	2	2	5	2	6	6	6	6	5	2	6	5	6	6	4	4	4	4	6	6	4	4	6	2	2	2	2	4	4
30 a 39 años	2	2	2	4	4	4	2	2	2	4	4	4	2	2	2	4	4	6	6	6	6	4	4	6	4	6	6	4	4	5	4	6	4	5	4	6	2	2	2	4	4	4
40 a 49 años	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	4	2	6	4	-	-	-	4	-	6	6	6	4	4	4	6	6	4	5	4	4	2	2	2	2	4	4
50 a 59 años	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	4	2	2	2	5	2	6	2	-	-	-	2	-	4	4	6	4	2	-	5	6	5	4	4	6	2	2	2	2	2	4
60 ó más años	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	4	-	-	-	-	-	-	2	2	2	4	6	4	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	4
Mujeres	2	2	2	4	2	4	2	2	2	4	4	4	4	2	2	4	4	5	6	6	6	6	4	6	6	6	6	6	2	6	2	2	2	4	2	4	2	2	2	3	2	4
0 a 4 años	2	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	-	-	-	2	-
5 a 9 años	2	2	-	-	2	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2	-	-	2	4
10 a 14 años	6	6	6	-	4	4	2	2	4	-	2	4	2	2	-	-	4	-	6	6	2	-	-	-	6	6	6	-	2	6	6	6	-	-	4	6	2	2	4	-	4	4
15 a 19 años	4	2	6	6	4	4	2	2	2	2	2	4	2	2	2	5	4	6	6	6	6	5	2	6	6	6	6	6	2	6	6	6	6	-	2	6	2	2	2	2	4	4
20 a 24 años	2	2	2	4	4	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	5	2	6	6	6	6	6	4	6	6	6	6	6	2	6	6	6	4	2	2	6	2	2	2	2	4	4
25 a 29 años	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	2	4	4	2	2	5	4	4	6	6	6	6	2	-	6	6	6	6	2	6	6	6	6	4	4	6	2	2	2	2	4	4
30 a 39 años	2	2	2	4	4	4	2	2	2	4	4	4	4	2	2	4	4	5	6	6	6	6	4	4	5	6	5	5	2	6	4	6	6	4	2	6	2	2	2	3	4	4
40 a 49 años	2	2	4	4	4	4	2	2	4	4	4	4	4	2	2	4	4	6	4	-	-	-	4	-	6	6	5	5	2	6	5	5	5	5	4	6	2	2	4	4	4	4
50 a 59 años	2	2	2	4	2	4	2	2	2	4	2	4	4	2	2	5	2	4	4	-	-	-	4	-	5	5	5	4	-	5	5	4	4	4	2	6	2	2	2	4	2	4
60 ó más años	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	-	3	-	-	-	-	-	-	2	2	2	4	2	5	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	4

Tabla 48 - Posición en Ranking de Estimadores del Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Regresión Lineal Simple (va: Nivel Educativo Alcanzado)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Profesional	Otro	Ninguno	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	3	3	3	2	4	2	4	4	4	3	2	2	4	4	4	2	2	2
0 a 4 años	4	-	-	-	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	4	6	-	-	4	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	2	2	2	-	2	2	4	4	2	-	2	2	4	4	-	-	2	-
15 a 19 años	2	3	2	2	2	2	4	4	4	4	4	2	4	4	4	2	4	2
20 a 24 años	4	4	4	2	2	2	4	4	4	4	2	2	4	4	4	2	4	2
25 a 29 años	4	4	4	4	2	2	4	4	4	4	4	2	4	4	4	2	2	2
30 a 39 años	4	4	4	2	2	2	4	4	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2
40 a 49 años	4	4	4	2	2	2	4	4	4	2	2	2	4	4	4	2	4	2
50 a 59 años	4	4	4	2	4	2	4	4	4	4	4	2	4	4	4	2	4	2
60 ó más años	4	4	4	4	4	2	4	4	4	4	4	2	4	4	4	3	3	2
Hombres	3	3	3	2	4	2	4	4	4	4	2	2	4	4	4	2	2	2
0 a 4 años	4	-	-	-	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	4	6	-	-	4	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	2	2	2	-	2	2	4	4	2	-	2	2	4	4	-	-	-	-
15 a 19 años	2	3	2	2	2	2	4	4	4	4	4	2	4	4	2	2	4	2
20 a 24 años	4	4	4	2	2	2	4	4	4	4	2	2	4	4	4	2	4	2
25 a 29 años	4	4	4	4	2	2	4	4	4	4	4	2	4	4	4	2	4	2
30 a 39 años	4	4	4	2	2	2	4	4	4	2	2	2	4	4	4	2	2	2
40 a 49 años	4	4	4	4	2	2	4	4	4	4	2	2	4	4	4	2	4	2
50 a 59 años	4	4	4	4	4	2	4	4	4	4	4	2	4	4	4	2	4	2
60 ó más años	4	4	4	4	4	2	4	4	4	4	4	2	4	4	4	4	3	2
Mujeres	3	3	3	2	4	2	4	4	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2
0 a 4 años	4	-	-	-	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	4	5	-	-	4	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	2	2	2	-	2	2	5	6	2	-	4	2	4	6	-	-	2	-
15 a 19 años	2	3	2	2	2	2	4	4	4	4	4	2	4	4	4	2	2	3
20 a 24 años	4	4	4	2	2	2	4	4	4	4	2	2	4	4	4	2	4	2
25 a 29 años	4	4	4	4	2	2	4	4	4	4	4	2	2	4	4	2	2	2
30 a 39 años	4	4	4	2	2	2	4	4	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2
40 a 49 años	4	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	2	4	4	2	2	2
50 a 59 años	4	4	4	2	4	2	4	4	4	2	4	2	2	4	4	2	4	2
60 ó más años	4	4	4	4	4	2	4	4	4	4	4	2	3	4	4	3	-	2

	BTPPV						Estudiando						Pensionado o Jubilado						Otra					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Primaria	Bach/TM	Profesional	Otro	Ninguno	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	2	4	4	4	4	2	2	4	4	4	2	4	2
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4	-	-	-	4	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4	6	-	-	4	2
10 a 14 años	2	2	2	-	2	2	2	2	2	-	4	2	2	2	-	-	2	2	4	4	2	-	2	2
15 a 19 años	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	2	2
20 a 24 años	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	4	2	2	2	2	4	2	2	4	4	4	4	2	2
25 a 29 años	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	2	2
30 a 39 años	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	2	2	2
40 a 49 años	2	-	-	-	2	-	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2
50 a 59 años	2	-	-	-	2	-	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	2	4	2
60 ó más años	-	-	-	-	-	-	4	4	4	2	2	2	4	4	4	4	4	2	4	4	4	4	4	2
Hombres	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	2	4	4	4	4	2	2	4	5	4	4	4	2
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4	-	-	-	4	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4	6	-	-	4	2
10 a 14 años	2	2	2	-	2	2	2	2	2	-	4	2	2	3	-	-	5	2	4	4	2	-	2	2
15 a 19 años	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	2	2	2
20 a 24 años	2	2	2	2	2	2	2	4	2	2	4	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	2	2	2
25 a 29 años	2	2	2	2	4	2	2	4	2	2	2	2	2	2	2	3	2	2	4	4	4	4	2	2
30 a 39 años	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	2	2	2
40 a 49 años	2	-	-	-	2	-	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	2	2
50 a 59 años	5	-	-	-	5	-	2	2	2	2	4	-	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	4	2
60 ó más años	-	-	-	-	-	-	4	4	4	2	2	2	4	4	4	4	4	2	4	4	4	4	4	2
Mujeres	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	2	4	5	4	2	4	2	4	4	4	2	4	2
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4	-	-	-	4	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4	5	-	-	4	2
10 a 14 años	2	2	3	-	-	-	2	2	2	-	4	2	2	2	-	-	2	2	4	4	2	-	2	2
15 a 19 años	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	-	4	2	4	4	4	4	2	2
20 a 24 años	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	6	4	2	4	4	4	4	2	2
25 a 29 años	2	2	2	2	4	-	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	2	2
30 a 39 años	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	4	2	4	4	4	2	2	2
40 a 49 años	2	-	-	-	2	-	2	2	2	2	6	2	2	2	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2
50 a 59 años	2	-	-	-	2	-	2	4	2	2	-	2	2	2	2	2	4	2	4	4	4	2	4	2
60 ó más años	-	-	-	-	-	-	4	6	4	2	4	2	4	5	4	4	4	2	4	4	4	4	4	2

Tabla 49 - Posición en Ranking de Estimadores del Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Regresión Lineal Múltiple
(va: Sexo, Grupos de Edad, Nivel Educativo Alcanzado)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado						BTPPV						Estudiando						Pensionado o Jubilado						Otra					
	Total	Primaria	Bach/TM	Profesional	Otro	Ninguno	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Primaria	Bach/TM	Profesional	Otro	Ninguno	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0 a 4 años	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	1	-
5 a 9 años	1	1	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1	-	-	1	1
10 a 14 años	1	1	1	-	1	1	1	1	1	-	1	1	1	1	-	-	1	-	1	1	1	-	1	1	1	1	1	-	1	1	1	1	-	-	1	1	1	1	1	-	1	1
15 a 19 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20 a 24 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
25 a 29 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30 a 39 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
40 a 49 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	-	-	1	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
50 a 59 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	-	-	1	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
60 ó más años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Hombres	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0 a 4 años	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	1	-
5 a 9 años	1	1	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1	-	-	1	1
10 a 14 años	1	1	1	-	1	1	1	1	1	-	1	1	1	1	-	-	-	-	1	1	1	-	1	1	1	1	1	-	1	1	1	1	-	-	1	1	1	1	1	-	1	1
15 a 19 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20 a 24 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
25 a 29 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30 a 39 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
40 a 49 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	-	-	1	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
50 a 59 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	-	-	1	-	1	1	1	1	1	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
60 ó más años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	-	-	-	-	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Mujeres	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0 a 4 años	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	1	-
5 a 9 años	1	1	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1	-	-	1	1
10 a 14 años	1	1	1	-	1	1	1	1	1	-	1	1	1	1	-	-	1	-	1	1	1	-	-	-	1	1	1	-	1	1	1	1	-	-	1	1	1	1	1	-	1	1
15 a 19 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	1	1	1	1	1	1	1	1
20 a 24 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
25 a 29 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30 a 39 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
40 a 49 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	-	-	1	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
50 a 59 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	-	-	1	-	1	1	1	1	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
60 ó más años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-	1	-	-	-	-	-	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 50 - Posición en Ranking de Estimadores del Total de Personas, Total Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado, por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador Directo

	TOTAL						Total Personas con Ingreso Declarado						Ingreso Promedio por Persona con Ingr. Declarado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	8	8	8	7	8	8	7	7	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8
0 a 4 años	8	-	-	-	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	8	8	-	-	8	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	7	7	7	-	8	8	7	7	8	-	8	8	8	8	8	-	8	8
15 a 19 años	7	7	7	7	8	8	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
20 a 24 años	8	8	8	7	8	8	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
25 a 29 años	8	8	8	7	8	8	7	7	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8
30 a 39 años	8	8	8	7	8	8	7	7	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8
40 a 49 años	8	8	7	7	8	8	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8
50 a 59 años	7	8	7	7	8	8	6	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8
60 ó más años	7	6	7	7	8	8	6	6	7	7	8	8	8	8	7	7	8	8
Hombres	8	8	8	7	8	8	7	7	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8
0 a 4 años	8	-	-	-	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	8	8	-	-	8	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	7	7	7	-	8	8	7	7	8	-	8	8	8	8	8	-	8	8
15 a 19 años	7	7	7	7	8	8	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
20 a 24 años	8	8	8	7	8	8	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
25 a 29 años	8	8	8	7	8	8	7	7	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8
30 a 39 años	8	8	8	7	8	8	7	7	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8
40 a 49 años	8	8	8	7	8	8	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8
50 a 59 años	8	8	7	7	8	8	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8
60 ó más años	7	6	7	7	8	8	6	6	7	7	8	8	8	8	7	7	8	8
Mujeres	8	8	8	7	8	8	7	7	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8
0 a 4 años	8	-	-	-	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	8	8	-	-	8	8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	7	7	7	-	8	8	7	7	8	-	8	8	8	8	8	-	8	8
15 a 19 años	7	7	7	7	8	8	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
20 a 24 años	8	8	8	7	8	8	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
25 a 29 años	8	8	8	8	8	8	7	7	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8
30 a 39 años	8	8	8	7	8	8	7	7	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8
40 a 49 años	8	8	7	7	8	8	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8
50 a 59 años	7	7	7	7	8	8	6	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8
60 ó más años	7	6	7	7	8	8	6	6	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8

Tabla 51 - Posición en Ranking de Estimadores del Total de Personas, Total Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado, por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Razón (va: Sexo)

	TOTAL						Total Personas con Ingreso Declarado						Ingreso Promedio por Persona con Ingr. Declarado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	7	6	7	8	7	7	6	6	7	8	7	7	7	7	7	7	7	7
0 a 4 años	7	-	-	-	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	7	5	-	-	7	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	5	5	5	-	7	7	6	6	5	-	7	7	7	7	7	-	7	7
15 a 19 años	6	6	5	5	7	7	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
20 a 24 años	7	7	7	6	7	7	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
25 a 29 años	7	7	7	8	7	7	6	6	7	8	7	7	7	7	7	7	7	7
30 a 39 años	7	7	7	8	7	7	6	6	7	8	7	7	7	7	7	7	7	7
40 a 49 años	7	7	8	8	7	7	6	6	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7
50 a 59 años	8	7	8	8	7	7	7	6	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7
60 ó más años	8	7	8	8	7	7	7	7	8	8	7	7	7	7	8	8	7	7
Hombres	7	6	7	8	7	7	6	6	7	8	7	7	7	7	7	7	7	7
0 a 4 años	7	-	-	-	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	7	5	-	-	7	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	5	5	5	-	7	7	6	6	5	-	7	7	7	7	7	-	7	7
15 a 19 años	6	6	5	5	7	7	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
20 a 24 años	7	7	7	6	7	7	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
25 a 29 años	7	7	7	8	7	7	6	6	7	8	7	7	7	7	7	7	7	7
30 a 39 años	7	7	7	8	7	7	6	6	7	8	7	7	7	7	7	8	7	7
40 a 49 años	7	7	7	8	7	7	6	6	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7
50 a 59 años	7	7	8	8	7	7	6	6	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7
60 ó más años	8	8	8	8	7	7	7	7	8	8	7	7	7	7	8	8	7	7
Mujeres	7	6	7	8	7	7	6	6	7	8	7	7	7	7	7	7	7	7
0 a 4 años	7	-	-	-	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	7	7	-	-	7	7	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	5	5	5	-	7	7	5	5	7	-	7	7	6	6	7	-	7	7
15 a 19 años	6	6	5	5	7	7	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
20 a 24 años	7	7	7	6	7	7	6	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
25 a 29 años	7	7	7	7	7	7	6	6	7	8	7	7	7	7	7	7	7	7
30 a 39 años	7	7	7	8	7	7	6	6	7	8	7	7	7	7	7	7	7	7
40 a 49 años	7	7	8	8	7	7	6	6	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7
50 a 59 años	8	8	8	8	7	7	7	6	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7
60 ó más años	8	7	8	8	7	7	7	7	8	8	6	7	7	7	7	7	7	7

Tabla 52 - Posición en Ranking de Estimadores del Total de Personas, Total Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado, por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Razón (va: Grupos de Edad)

	TOTAL						Total Personas con Ingreso Declarado						Ingreso Promedio por Persona con Ingr. Declarado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	5	7	5	5	3	5	3	3	3	3	5	5	5	5	5	6	6	6
0 a 4 años	3	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	3	3	-	-	3	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	8	8	8	-	5	5	3	3	7	-	5	5	5	5	6	-	6	6
15 a 19 años	8	8	8	8	5	5	3	3	3	3	5	5	5	5	5	5	6	6
20 a 24 años	3	3	3	8	5	5	3	3	3	3	5	5	5	5	5	5	6	6
25 a 29 años	3	3	3	3	5	5	3	3	3	3	5	5	5	5	5	5	5	6
30 a 39 años	3	3	3	5	5	5	3	3	3	4	5	5	5	5	5	6	6	6
40 a 49 años	3	3	3	5	5	5	3	3	3	4	5	5	5	5	5	6	6	6
50 a 59 años	3	3	3	4	3	5	3	3	3	3	3	5	5	5	5	5	5	6
60 ó más años	3	3	3	3	3	5	4	3	5	5	5	5	5	5	4	4	5	6
Hombres	5	7	5	5	3	5	3	3	3	3	5	5	5	5	5	6	6	6
0 a 4 años	3	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	3	3	-	-	3	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	8	8	8	-	5	5	3	3	7	-	5	5	5	5	6	-	6	6
15 a 19 años	8	8	8	8	5	5	3	3	3	3	5	5	5	5	5	5	6	6
20 a 24 años	3	3	3	8	5	5	3	3	3	3	4	5	5	5	5	5	6	6
25 a 29 años	3	3	3	3	5	5	3	3	3	3	5	5	5	5	5	5	5	6
30 a 39 años	3	3	3	5	5	5	3	3	3	4	5	5	5	5	5	5	6	6
40 a 49 años	3	3	3	3	5	5	3	3	3	3	5	5	5	5	5	6	6	6
50 a 59 años	3	3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	5	5	5	5	5	5	6
60 ó más años	3	3	3	3	3	5	4	3	5	5	5	5	5	5	4	5	5	6
Mujeres	5	7	5	5	3	5	3	3	3	4	5	5	6	5	5	6	6	6
0 a 4 años	3	-	-	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	3	3	-	-	3	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	8	8	8	-	5	5	4	4	5	-	3	5	5	5	5	-	4	5
15 a 19 años	8	8	8	8	5	5	3	3	3	3	5	5	5	5	5	5	6	6
20 a 24 años	3	3	3	8	5	5	3	3	3	3	5	5	5	5	5	5	6	6
25 a 29 años	3	3	3	3	5	5	3	3	3	3	5	5	5	5	5	5	6	5
30 a 39 años	3	3	3	5	5	5	3	3	3	4	5	5	6	5	6	6	6	6
40 a 49 años	3	3	5	5	5	5	3	3	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6
50 a 59 años	3	3	3	5	3	5	3	3	3	3	3	5	5	5	5	5	5	6
60 ó más años	3	3	3	3	3	5	4	3	3	5	8	5	5	5	4	4	5	6

Tabla 53 - Posición en Ranking de Estimadores del Total de Personas, Total Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado, por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Razón (va: Nivel Educativo Alcanzado)

	TOTAL						Total Personas con Ingreso Declarado						Ingreso Promedio por Persona con Ingr. Declarado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	4	4	4	3	5	3	8	8	5	5	3	3	6	6	6	5	5	5
0 a 4 años	5	-	-	-	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	5	7	-	-	5	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	3	3	3	-	3	3	8	8	4	-	3	3	6	6	5	-	5	5
15 a 19 años	3	4	3	3	3	3	8	8	5	5	3	3	6	6	6	6	5	5
20 a 24 años	5	5	5	3	3	3	8	8	5	5	3	3	6	6	6	6	5	5
25 a 29 años	5	5	5	5	3	3	8	8	5	5	3	3	6	6	6	6	6	4
30 a 39 años	5	5	5	3	3	3	8	8	5	5	3	3	6	6	6	5	5	4
40 a 49 años	5	5	5	3	3	3	8	8	5	5	3	3	6	6	6	5	5	5
50 a 59 años	5	5	5	5	5	3	8	8	5	5	5	3	6	6	6	6	6	5
60 ó más años	5	8	5	5	5	3	8	8	4	3	3	3	6	6	5	6	6	5
Hombres	4	4	4	3	5	3	8	8	5	5	3	3	6	6	6	5	5	5
0 a 4 años	5	-	-	-	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	5	7	-	-	5	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	3	3	3	-	3	3	8	8	4	-	3	3	6	6	5	-	5	4
15 a 19 años	3	4	3	3	3	3	8	8	5	5	3	3	6	6	6	6	5	5
20 a 24 años	5	5	5	3	3	3	8	8	5	5	5	3	6	6	6	6	5	5
25 a 29 años	5	5	5	5	3	3	8	8	5	5	3	3	6	6	6	6	6	5
30 a 39 años	5	5	5	3	3	3	8	8	5	5	3	3	6	6	6	4	5	4
40 a 49 años	5	5	5	5	3	3	8	8	5	5	3	3	6	6	6	5	5	5
50 a 59 años	5	5	5	5	5	3	8	8	5	5	5	3	6	6	6	6	6	5
60 ó más años	5	7	5	5	5	3	8	8	4	3	3	3	6	6	5	6	6	5
Mujeres	4	4	4	3	5	3	8	8	5	5	3	3	5	6	6	5	5	5
0 a 4 años	5	-	-	-	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	5	6	-	-	5	3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	3	4	3	-	3	3	8	8	3	-	5	3	7	7	6	-	5	4
15 a 19 años	3	4	3	3	3	3	8	8	5	5	3	3	6	6	6	6	5	4
20 a 24 años	5	5	5	3	3	3	8	8	5	5	3	3	6	6	6	6	5	5
25 a 29 años	5	5	5	5	3	3	8	8	5	5	3	3	6	6	6	6	5	4
30 a 39 años	5	5	5	3	3	3	8	8	5	5	3	3	5	6	5	5	5	4
40 a 49 años	5	5	3	3	3	3	8	8	5	5	3	3	6	6	6	5	5	5
50 a 59 años	5	5	5	3	5	3	8	8	5	5	5	3	6	6	6	6	6	5
60 ó más años	5	8	5	5	5	3	8	8	5	3	4	3	6	6	5	5	6	5

Tabla 54 - Posición en Ranking de Estimadores del Total de Personas, Total Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado, por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Regresión Lineal Simple (va: Sexo)

	TOTAL						Total Personas con Ingreso Declarado						Ingreso Promedio por Persona con Ingr. Declarado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	6	5	6	6	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	4	4	4	4
0 a 4 años	6	-	-	-	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	6	4	-	-	6	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	4	4	4	-	6	6	5	5	2	-	6	6	4	4	3	-	4	3
15 a 19 años	5	5	4	4	6	6	4	4	6	6	6	6	3	3	4	4	4	4
20 a 24 años	6	6	6	5	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	4	4	4	4
25 a 29 años	6	6	6	6	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	4	4	4	5
30 a 39 años	6	6	6	6	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	4	4	4	5
40 a 49 años	6	6	6	6	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	4	4	4	4
50 a 59 años	6	6	6	6	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	4	4	4	4
60 ó más años	6	5	6	6	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	6	5	4	4
Hombres	6	5	6	6	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	4	4	4	4
0 a 4 años	6	-	-	-	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	6	4	-	-	6	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	4	4	4	-	6	6	5	5	2	-	6	6	4	4	2	-	4	3
15 a 19 años	5	5	4	4	6	6	4	4	6	6	6	6	3	3	4	4	4	4
20 a 24 años	6	6	6	5	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	4	4	4	4
25 a 29 años	6	6	6	6	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	4	4	4	4
30 a 39 años	6	6	6	6	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	4	6	4	5
40 a 49 años	6	6	6	6	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	4	4	4	4
50 a 59 años	6	6	6	6	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	4	4	4	4
60 ó más años	6	5	6	6	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	6	4	4	4
Mujeres	6	5	6	6	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	4	4	4	4
0 a 4 años	6	-	-	-	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	6	4	-	-	6	6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	4	3	4	-	6	6	2	2	6	-	6	6	3	3	4	-	6	6
15 a 19 años	5	5	4	4	6	6	5	4	6	6	6	6	4	4	4	4	4	5
20 a 24 años	6	6	6	5	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	4	4	4	4
25 a 29 años	6	6	6	6	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	4	4	4	6
30 a 39 años	6	6	6	6	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	4	4	4	5
40 a 49 años	6	6	6	6	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	4	4	4	4
50 a 59 años	6	6	6	6	6	6	5	5	6	6	6	6	4	4	4	4	4	4
60 ó más años	6	5	6	6	6	6	5	5	6	6	5	6	4	4	6	6	4	4

Tabla 55 - Posición en Ranking de Estimadores del Total de Personas, Total Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado, por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Regresión Lineal Simple (va: Grupos de Edad)

	TOTAL						Total Personas con Ingreso Declarado						Ingreso Promedio por Persona con Ingr. Declarado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	2	2	2	4	2	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	3	3	3
0 a 4 años	2	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	2	2	-	-	2	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	6	6	6	-	4	4	2	2	6	-	4	4	2	2	4	-	3	4
15 a 19 años	4	2	6	6	4	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	3	3
20 a 24 años	2	2	2	4	4	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	3	3	3
25 a 29 años	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	2	3
30 a 39 años	2	2	2	4	4	4	2	2	2	3	4	4	2	2	2	3	3	3
40 a 49 años	2	2	2	4	4	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	3	3	3
50 a 59 años	2	2	2	3	2	4	2	2	2	2	2	4	2	2	2	3	2	3
60 ó más años	2	2	2	2	2	4	2	2	2	4	4	4	2	2	2	3	3	3
Hombres	2	2	2	4	2	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	3	3	3
0 a 4 años	2	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	2	2	-	-	2	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	6	6	6	-	4	4	2	2	6	-	4	4	2	2	4	-	3	5
15 a 19 años	4	2	6	6	4	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	3	3
20 a 24 años	2	2	2	4	4	4	2	2	2	2	3	4	2	2	2	2	3	3
25 a 29 años	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	2	3
30 a 39 años	2	2	2	4	4	4	2	2	2	3	4	4	2	2	2	3	3	3
40 a 49 años	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	3	3
50 a 59 años	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	4	2	2	2	3	2	3
60 ó más años	2	2	2	2	2	4	2	2	2	4	4	4	2	2	2	3	3	3
Mujeres	2	2	2	4	2	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	3	3	3
0 a 4 años	2	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	2	2	-	-	2	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	6	6	6	-	4	4	3	3	4	-	2	4	2	2	3	-	2	3
15 a 19 años	4	2	6	6	4	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	3	3
20 a 24 años	2	2	2	4	4	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	3	3	3
25 a 29 años	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	2	3
30 a 39 años	2	2	2	4	4	4	2	2	2	3	4	4	3	2	2	3	3	3
40 a 49 años	2	2	4	4	4	4	2	2	3	3	4	4	2	2	3	3	3	3
50 a 59 años	2	2	2	4	2	4	2	2	2	2	2	4	2	2	2	2	2	3
60 ó más años	2	2	2	2	2	4	2	2	2	4	3	4	2	2	2	3	3	3

Tabla 56 - Posición en Ranking de Estimadores del Total de Personas, Total Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado, por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Regresión Lineal Simple (va: Nivel Educativo Alcanzado)

	TOTAL						Total Personas con Ingreso Declarado						Ingreso Promedio por Persona con Ingr. Declarado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	3	3	3	2	4	2	4	4	4	4	2	2	3	3	3	2	2	2
0 a 4 años	4	-	-	-	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	4	6	-	-	4	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	2	2	2	-	2	2	4	4	3	-	2	2	3	3	2	-	2	2
15 a 19 años	2	3	2	2	2	2	5	5	4	4	2	2	4	4	3	3	2	2
20 a 24 años	4	4	4	2	2	2	4	4	4	4	2	2	3	3	3	2	2	2
25 a 29 años	4	4	4	4	2	2	4	4	4	4	2	2	3	3	3	3	3	2
30 a 39 años	4	4	4	2	2	2	4	4	4	2	2	2	3	3	3	2	2	2
40 a 49 años	4	4	4	2	2	2	4	4	4	3	2	2	3	3	3	2	2	2
50 a 59 años	4	4	4	2	4	2	4	4	4	4	4	2	3	3	3	2	3	2
60 ó más años	4	4	4	4	4	2	3	4	3	2	2	2	3	3	3	2	2	2
Hombres	3	3	3	2	4	2	4	4	4	4	2	2	3	3	3	2	2	2
0 a 4 años	4	-	-	-	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	4	6	-	-	4	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	2	2	2	-	2	2	4	4	3	-	2	2	3	3	3	-	2	2
15 a 19 años	2	3	2	2	2	2	5	5	4	4	2	2	4	4	3	3	2	2
20 a 24 años	4	4	4	2	2	2	4	4	4	4	2	2	3	3	3	3	2	2
25 a 29 años	4	4	4	4	2	2	4	4	4	4	2	2	3	3	3	3	3	2
30 a 39 años	4	4	4	2	2	2	4	4	4	2	2	2	3	3	3	2	2	2
40 a 49 años	4	4	4	4	2	2	4	4	4	4	2	2	3	3	3	3	2	2
50 a 59 años	4	4	4	4	4	2	4	4	4	4	4	2	3	3	3	2	3	2
60 ó más años	4	4	4	4	4	2	3	4	3	2	2	2	3	3	3	2	2	2
Mujeres	3	3	3	2	4	2	4	4	4	3	2	2	3	3	3	2	2	2
0 a 4 años	4	-	-	-	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	4	5	-	-	4	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	2	2	2	-	2	2	6	6	2	-	4	2	4	4	2	-	3	2
15 a 19 años	2	3	2	2	2	2	4	5	4	4	2	2	3	3	3	3	2	2
20 a 24 años	4	4	4	2	2	2	4	4	4	4	2	2	3	3	3	2	2	2
25 a 29 años	4	4	4	4	2	2	4	4	4	4	2	2	3	3	3	3	3	2
30 a 39 años	4	4	4	2	2	2	4	4	4	2	2	2	2	3	3	2	2	2
40 a 49 años	4	4	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2	3	3	2	2	2	2
50 a 59 años	4	4	4	2	4	2	4	4	4	4	4	2	3	3	3	3	3	2
60 ó más años	4	4	4	4	4	2	3	4	4	2	2	2	3	3	3	2	2	2

Tabla 57 - Posición en Ranking de Estimadores del Total de Personas, Total Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado, por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Regresión Lineal Múltiple (va: Sexo, Grupos de Edad, Nivel Educativo Alcanzado)

	TOTAL						Total Personas con Ingreso Declarado						Ingreso Promedio por Persona con Ingr. Declarado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0 a 4 años	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	1	1	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	1	1	1	-	1	1	1	1	1	-	1	1	1	1	1	-	1	1
15 a 19 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20 a 24 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
25 a 29 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30 a 39 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
40 a 49 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
50 a 59 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
60 ó más años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Hombres	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0 a 4 años	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	1	1	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	1	1	1	-	1	1	1	1	1	-	1	1	1	1	1	-	1	1
15 a 19 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20 a 24 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
25 a 29 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30 a 39 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
40 a 49 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
50 a 59 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
60 ó más años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Mujeres	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0 a 4 años	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	1	1	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	1	1	1	-	1	1	1	1	1	-	1	1	1	1	1	-	1	1
15 a 19 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
20 a 24 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
25 a 29 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
30 a 39 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
40 a 49 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
50 a 59 años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
60 ó más años	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Se puede notar que el estimador de regresión lineal múltiple siempre ocupa el primer lugar, es decir, es el más preciso, el que tiene menor coeficiente de variación, tanto para estimar el total de personas, como el ingreso promedio. En el lado opuesto, el estimador directo es el menos preciso, aunque no en todas las celdas. Para visualizar mejor, se presentan las tablas resumen, donde se tienen el total de veces que cada estimador ocupan cada posición en el ranking, para cada una de las 1.386 celdas para el estimador del total de personas, y de las 594 celdas para el estimador del ingreso promedio.

Tabla 58 - Total de veces que cada estimador ocupa cada una de las posiciones en el ranking para estimar el Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad

Posición en el Ranking	Directo	Razón (Sexo)	Razón (Edad)	Razón (NEA)	Regr. Lineal Simple (Sexo)	Regr. Lineal Simple (Edad)	Regr. Lineal Simple (NEA)	Regr. Lineal Múltiple	Total Posiciones	Total de Celdas
Total	1.386	1.386	1.386	1.386	1.386	1.386	1.386	1.386	1.386	1.386
-	296	296	296	296	296	296	296	296	296	296
1	0	0	0	0	0	0	0	1.090	1.090	1.090
2	0	0	0	0	8	473	609	0	1.090	1.090
3	0	3	453	590	10	10	24	0	1.090	1.090
4	0	5	14	22	307	303	439	0	1.090	1.090
5	3	255	255	427	85	56	9	0	1.090	1.090
6	94	42	7	10	680	248	9	0	1.090	1.090
7	425	632	9	24	0	0	0	0	1.090	1.090
8	568	153	352	17	0	0	0	0	1.090	1.090

Tabla 59 - Total de veces que cada estimador ocupa cada una de las posiciones en el ranking para estimar el Total de Personas, Total de Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado, por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad

Posición en el Ranking	Directo	Razón (Sexo)	Razón (Edad)	Razón (NEA)	Regr. Lineal Simple (Sexo)	Regr. Lineal Simple (Edad)	Regr. Lineal Simple (NEA)	Regr. Lineal Múltiple	Total Posiciones	Total de Celdas
Total	594	594	594	594	594	594	594	594	594	594
-	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99
1	0	0	0	0	0	0	0	495	495	495
2	0	0	0	0	5	285	205	0	495	495
3	0	0	174	130	10	73	108	0	495	495
4	0	0	20	27	157	119	172	0	495	495
5	0	21	215	183	69	1	6	0	495	495
6	11	59	56	94	254	17	4	0	495	495
7	134	351	5	5	0	0	0	0	495	495
8	350	64	25	56	0	0	0	0	495	495

Se puede observar que algunas celdas no tienen posición, ya que son celdas cuyo valor poblacional es cero, y por lo tanto no se calcula el coeficiente de variación del estimador, éstas son 295 y 99 celdas para cada caso. Por otra parte, tanto en la Tabla 53 como en la Tabla 54 coinciden los valores del "Total de Posiciones" con el "Total de Celdas", si no coincidieran es porque habría empates, es decir, que el coeficiente de variación es igual para dos o más estimadores, y en consecuencia ocupan la misma posición, que en este caso no hay.

En las Tablas 55 y 56 se tienen los porcentajes que cada estimador ocupó en cada posición, eliminando las celdas que tienen "-", cuya población es cero.

Tabla 60 - Porcentaje que ocupa cada estimador en cada una de las posiciones en el ranking para estimar el Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad

Posición en el Ranking	Directo	Razón (Sexo)	Razón (Edad)	Razón (NEA)	Regr. Lineal Simple (Sexo)	Regr. Lineal Simple (Edad)	Regr. Lineal Simple (NEA)	Regr. Lineal Múltiple	Total Posiciones
Total	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	
1	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%	100,0%
2	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,7%	43,4%	55,9%	0,0%	100,0%
3	0,0%	0,3%	41,6%	54,1%	0,9%	0,9%	2,2%	0,0%	100,0%
4	0,0%	0,5%	1,3%	2,0%	28,2%	27,8%	40,3%	0,0%	100,0%
5	0,3%	23,4%	23,4%	39,2%	7,8%	5,1%	0,8%	0,0%	100,0%
6	8,6%	3,9%	0,6%	0,9%	62,4%	22,8%	0,8%	0,0%	100,0%
7	39,0%	58,0%	0,8%	2,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%
8	52,1%	14,0%	32,3%	1,6%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%

Tabla 61 - Porcentaje que ocupa cada estimador en cada una de las posiciones en el ranking para estimar el Total de Personas Total de Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado, por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad

Posición en el Ranking	Directo	Razón (Sexo)	Razón (Edad)	Razón (NEA)	Regr. Lineal Simple (Sexo)	Regr. Lineal Simple (Edad)	Regr. Lineal Simple (NEA)	Regr. Lineal Múltiple	Total Posiciones
Total	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%	
1	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%	100,0%
2	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	1,0%	57,6%	41,4%	0,0%	100,0%
3	0,0%	0,0%	35,2%	26,3%	2,0%	14,7%	21,8%	0,0%	100,0%
4	0,0%	0,0%	4,0%	5,5%	31,7%	24,0%	34,7%	0,0%	100,0%
5	0,0%	4,2%	43,4%	37,0%	13,9%	0,2%	1,2%	0,0%	100,0%
6	2,2%	11,9%	11,3%	19,0%	51,3%	3,4%	0,8%	0,0%	100,0%
7	27,1%	70,9%	1,0%	1,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%
8	70,7%	12,9%	5,1%	11,3%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	100,0%

Están sombreadas las celdas donde se concentra el mayor porcentaje de cada estimador, desde más oscuro a más claro, y se puede observar que en ambas tablas, el estimador de regresión lineal múltiple ocupa el 100% de la 1ra posición, siendo en ambos casos el mejor estimador, el segundo y tercer estimador en precisión está entre el estimador de regresión simple utilizando como variable auxiliar “Nivel Educativo Alcanzado” y “Grupos de Edad”, para estimar el total de personas, es mejor el primero y para estimar el ingreso es mejor el segundo, pero están muy cerca, algo similar ocurre entre el cuarto y quinto estimador en precisión, entre los estimadores de razón, con las mismas variables auxiliares, y en el mismo orden. El sexto estimador en precisión sería el estimador de regresión lineal simple con “Sexo” como variable auxiliar, luego el estimador de razón, igualmente, con “Sexo” como variable auxiliar, y por último el estimador directo. Aunque es de hacer notar que en la mayoría de los casos, las diferencias en precisión no son grandes. Lo importante es que siempre resulta mejor el estimador de regresión lineal múltiple.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se propone y formula el estimador de regresión lineal múltiple, siendo un planteamiento inédito, igualmente se desarrolla su esperanza, sesgo, varianza y error cuadrático medio, y se determinan los valores de los coeficientes que minimizan su varianza; además, se comprueba la factibilidad de su uso, tanto en estudios pequeños como en encuestas, al aplicarlo a la data del Municipio Sucre del Estado Miranda, del XIII Censo General de Población y Vivienda de Venezuela, llevado a cabo en 2001, conformada por 134.207 viviendas de uso familiar y 546.766 personas.

También se demuestra que todos los estimadores conocidos -directo, de razón, de regresión lineal simple -con 1 variable auxiliar-, de razón regresión y regresión-razón- son casos particulares del estimador de regresión lineal múltiple.

Por otra parte, al utilizar los coeficientes b_1, b_2, … , b_k que minimizan la varianza , se comprueba que el estimador es más preciso que los anteriores, y que al añadir una nueva variable auxiliar, se reduce la varianza, siempre y cuando se cumplan las siguientes condiciones,

1 variable auxiliar: $n < N \ , \ S^2_{x_1} > 0$

2 variables auxiliares: $n < N \ , \ S^2_{x_1} > 0 \ , \ S^2_{x_2} > 0 \ , \ \left|\rho_{x_1x_2}\right| \neq 1 \ , \ 1-\rho^2_{x_1x_2} > 0$

3 variables auxiliares: $n < N \ , \ S^2_{x_1} > 0 \ , \ S^2_{x_2} > 0 \ , \ S^2_{x_3} > 0 \ , \ \left|\rho_{x_1x_2}\right| \neq 1, \left|\rho_{x_1x_3}\right| \neq 1, \left|\rho_{x_2x_3}\right| \neq 1$

$$1-\rho^2_{x_1x_2}-\rho^2_{x_1x_3}-\rho^2_{x_2x_3}+2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_3}\rho_{x_2x_3} > 0$$

4 variables auxiliares: $n < N \ , \ S^2_{x_1} > 0 \ , \ S^2_{x_2} > 0 \ , \ S^2_{x_3} > 0 \ , \ S^2_{x_4} > 0 \ , \ \left|\rho_{x_1x_2}\right| \neq 1 \ ,$

$$\begin{aligned}
&1-\rho^2_{x_1x_2}-\rho^2_{x_1x_3}-\rho^2_{x_1x_4}-\rho^2_{x_2x_3}-\rho^2_{x_2x_4}-\rho^2_{x_3x_4}+\\
&+2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_3}\rho_{x_2x_3}+2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_2x_4}+2\rho_{x_1x_3}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_3x_4}+2\rho_{x_2x_3}\rho_{x_2x_4}\rho_{x_3x_4}+\\
&+\rho^2_{x_1x_2}\rho^2_{x_3x_4}+\rho^2_{x_1x_3}\rho^2_{x_2x_4}+\rho^2_{x_1x_4}\rho^2_{x_2x_3}-\\
&-2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_3}\rho_{x_2x_4}\rho_{x_3x_4}-2\rho_{x_1x_2}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_2x_3}\rho_{x_3x_4}-2\rho_{x_1x_3}\rho_{x_1x_4}\rho_{x_2x_3}\rho_{x_2x_4} > 0
\end{aligned}$$

Con k variables auxiliares resulta complicado llegar a una expresión genérica, pero puede decirse que las varianzas de las variables auxiliares deben ser estrictamente mayor que cero, y que los coeficientes de correlación entre variables auxiliares sean diferentes a 1 y -1. Luego, deben calcularse las varianzas de los estimadores, y verificar si se reduce la varianza al incorporar nuevas variables.

En los ejercicios trabajados, se va reduciendo la varianza del estimador al incluir nuevas variables auxiliares, sin embargo, esto es sólo un comienzo, se debe seguir trabajando para conocer, en mayor profundidad, el comportamiento del estimador propuesto. Si bien el estimador permite incluir muchas variables auxiliares, hay que considerar que éstas deben investigarse en la muestra y disponer de los totales o promedios poblacionales, y que no se debe llenar la investigación de variables auxiliares que resten espacio o recursos a las variables a estimar.

El Estimador de Regresión Lineal Múltiple tiene grandes ventajas en precisión sobre los estimadores directos y de razón, así como sobre el estimador de regresión lineal simple, el de razón-regresión y el de regresión-razón, y aunque las fórmulas de los estimadores, sobre todo, sus varianzas se tornan complejas, son siempre manejables, además con el enfoque matricial, y con el apoyo informático se simplifica, además la ganancia en precisión es apreciable. De cualquier modo, en este sentido, es recomendable utilizar el enfoque matricial al trabajar con más de 3 variables auxiliares.

Es importante resaltar que, la aplicación del estimador de regresión múltiple en investigaciones o encuestas dependerá, en gran parte, del tamaño de la muestra, ya que, como es obvio, a medida que éste aumenta, su almacenamiento, tratamientos y procedimientos se complican, un aspecto a trabajar es la generación de rutinas o procedimientos prácticos que simplifiquen su aplicación y cálculos en encuestas grandes, de manera de generar los factores de expansión y realizar las estimaciones que permitan construir los tabulados, así como el cálculo de sus varianzas.

BIBLIOGRAFÍA

Azorín, F., & Sánchez-Crespo, J. (1986). *Métodos y aplicaciones del muestreo*. Madrid: Alianza Editorial/Alianza Universidad Textos.

Cochram, W. (1984). *Técnicas de muestreo*. (Trad. A. Sestier B.). (4ta. Ed.). México: C.E.C.S.A. (Original en Inglés, 1977).

Costa, A., Satorra, A. & Ventura, E. (2002). E*stimadores compuestos en estadística regional: una aplicación de la tasa de variación de la ocupación en la industria*. QUESTIIO -Quaderns d'Estadística, Sistemes, Informática i Investigació Operativa- (vol 26, 1-2, pag. 213-243). España. Recuperado el 23 de octubre de 2006 de http://www.raco.cat/index.php/Questiio/article/viewFile/27025/26859.

Costa, A., Satorra, A. & Ventura, E. (2003). *An empirical evaluation of small area. Estimators.* En UPF Economics and Business. Working Paper No. 674. Recuperado el 23 de octubre de 2006 dehttp://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=428200

Costa, A., Satorra, A. & Ventura, E. (2004). *Improving both domain and total area estimation by composition*. SORT 28 (1), (pp. 69-86). January-June 2004. http://www.raco.cat/index.php/SORT/article/viewFile/28862/28696.

Costa, A., Satorra, A. & Ventura, E. (2008). *On the performance of small-area estimators: fixed vs. random area parameters*. Recuperado el 18 de abril de 2009 de SSRN: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1107775.

Deming, W. (1960). *Sample design in business research*. USA:John Wiley & Sons, Inc.

España, Euskal Estatistika Erakunda/Instituto Vasco de Estadística (EUSTAT). (s/f). *Cálculo de coeficientes de variación para diferentes estimadores directos e indirectos utilizados en las encuestas económicas de Eustat.* España. Recuperado el 23 de marzo de 2009 de http://www.eustat.es/document/datos/Errores_c.pdf.

Gujarati, D. N. (1997), *Econometría*. Tercera Edición. (Trad. Gladys Arango Medina). Colombia: McGraw-Hill Interamericana, S.A. (Original en Inglés, 1995)

Hoffman, K. & Kunze, R. (1981), *Algebra Lineal*. Segunda Edición, Cuarta Reimpresión. (Trad. Hugo E. Finsterbush). España: Editorial Prentice/Hall Internacional. (Original en Inglés, 1971)

Kish, L. (1979). *Muestreo de encuestas*. (2da. ed.). México: Trillas.

Lohr, S. (2000). *Muestreo: diseño y análisis*. (Trad. Óscar A. Palmas V.). México: International Thomson. (Original en Inglés, 1999).

Martín-Caro, H. (2006). *Análisis Muestral* -Trabajo de ascenso presentado para ascender a la categoría de Agregado, Escuela de Estadística y Ciencias Actuariales, Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela.

Martín-Caro, H. (2010). *Análisis de los Estimadores Indirectos: Desarrollo de los Estimadores Indirectos Compuestos como Alternativa de Estimación* – Tesis Doctoral presentada para optar al título de Doctor en Estadística, Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, Universidad Central de Venezuela, Caracas, Venezuela.

Novales C., Alfonso (1993), *Econometría*. Segunda Edición. España: McGraw-Hill Interamericana de España, S.A.

Pfeffermann, D. (2002). *Small Area Estimations-New Developments and Directions*. International Statistical Review, 70, 125-143.

Särndal, C.E., Swensson, B. and Wretman, J.H. (1989). *The Weighted Technique for Estimating the Variance of the General Regression Estimator of the Finite Population Total*. Biometrica, 76, 3, 527-537.

Sukhatme, P. (1956). *Teoría de encuestas por muestreo con aplicaciones*. (Trad. A. Flores, J. Nieto de Pascual). México: Fondo de Cultura Económica. (Original en Inglés, 1953)

APÉNDICE

Totales Poblacionales, Ingresos Promedio por Persona
y Coeficientes de Variación de los Estimadores
Municipio Sucre, Estado Miranda

Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad

	TOTAL						Ocupado						Desocupado						BTPPV					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	545.339	264.690	94.886	87.545	78.662	19.556	215.920	98.109	51.840	58.084	2.955	4.932	11.657	5.376	2.625	3.068	313	275	4.957	2.397	1.448	877	146	89
0 a 4 años	50.707	0	0	0	50.707	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	51.856	30.871	0	0	16.619	4.366	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	49.408	46.758	703	0	1.141	806	355	302	20	0	15	18	23	22	0	0	1	0	106	87	4	0	3	12
15 a 19 años	49.462	26.756	17.050	3.836	1.194	626	9.418	5.687	2.997	521	90	123	716	487	181	21	18	9	1.945	1.188	679	22	22	34
20 a 24 años	53.727	21.852	16.297	13.052	1.803	723	27.847	12.110	9.410	5.722	329	276	1.799	943	537	266	38	15	1.706	735	527	369	52	23
25 a 29 años	47.607	19.634	12.319	13.438	1.513	703	31.634	12.608	8.513	9.848	375	290	1.757	717	446	518	50	26	763	248	159	318	30	8
30 a 39 años	85.438	38.739	19.533	23.145	2.241	1.780	60.666	26.199	14.388	18.370	806	903	3.203	1.315	671	1.039	114	64	424	139	79	168	26	12
40 a 49 años	68.233	34.111	13.682	16.660	1.516	2.264	47.638	22.580	9.676	13.383	732	1.267	2.374	1.082	474	708	51	59	8	0	0	0	8	0
50 a 59 años	44.545	22.723	8.172	10.307	840	2.503	26.866	13.072	4.874	7.365	404	1.151	1.340	618	237	396	33	56	5	0	0	0	5	0
60 ó más años	44.356	23.246	7.130	7.107	1.088	5.785	11.496	5.551	1.962	2.875	204	904	445	192	79	120	8	46	0	0	0	0	0	0
Hombres	258.546	127.889	42.693	39.745	39.824	8.395	124.692	61.700	29.128	29.211	1.757	2.896	7.658	4.101	1.622	1.516	191	228	3.062	1.784	792	357	63	66
0 a 4 años	25.928	0	0	0	25.928	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	26.381	15.515	0	0	8.520	2.346	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.605	23.304	306	0	552	443	236	207	8	0	10	11	20	20	0	0	0	0	83	65	3	0	3	12
15 a 19 años	23.954	13.931	7.460	1.647	534	382	5.720	3.899	1.453	225	48	95	496	378	90	8	12	8	1.289	890	355	10	8	26
20 a 24 años	25.399	11.308	7.399	5.455	848	389	16.042	8.168	5.079	2.393	199	203	1.149	699	319	104	18	9	1.025	549	303	135	23	15
25 a 29 años	22.460	10.035	5.697	5.601	760	367	17.895	8.302	4.801	4.382	209	201	1.040	511	264	220	25	20	427	178	91	137	13	8
30 a 39 años	40.535	19.120	9.315	10.061	1.140	899	34.632	16.324	8.257	8.991	498	562	1.960	981	415	443	68	53	234	102	40	75	12	5
40 a 49 años	30.941	15.553	6.106	7.571	722	989	26.233	13.034	5.308	6.812	391	688	1.605	836	304	374	37	54	3	0	0	0	3	0
50 a 59 años	20.033	10.041	3.462	5.181	416	933	15.931	7.894	2.834	4.321	256	626	1.012	512	167	267	23	43	1	0	0	0	1	0
60 ó más años	18.310	9.082	2.948	4.229	404	1.647	8.003	3.872	1.388	2.087	146	510	376	164	63	100	8	41	0	0	0	0	0	0
Mujeres	286.793	136.801	52.193	47.800	38.838	11.161	91.228	36.409	22.712	28.873	1.198	2.036	3.999	1.275	1.003	1.552	122	47	1.895	613	656	520	83	23
0 a 4 años	24.779	0	0	0	24.779	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	25.475	15.356	0	0	8.099	2.020	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.803	23.454	397	0	589	363	119	95	12	0	5	7	3	2	0	0	1	0	23	22	1	0	0	0
15 a 19 años	25.508	12.825	9.590	2.189	660	244	3.698	1.788	1.544	296	42	28	220	109	91	13	6	1	656	298	324	12	14	8
20 a 24 años	28.328	10.544	8.898	7.597	955	334	11.805	3.942	4.331	3.329	130	73	650	244	218	162	20	6	681	186	224	234	29	8
25 a 29 años	25.147	9.599	6.622	7.837	753	336	13.739	4.306	3.712	5.466	166	89	717	206	182	298	25	6	336	70	68	181	17	0
30 a 39 años	44.903	19.619	10.218	13.084	1.101	881	26.034	9.875	6.131	9.379	308	341	1.243	334	256	596	46	11	190	37	39	93	14	7
40 a 49 años	37.292	18.558	7.576	9.089	794	1.275	21.405	9.546	4.368	6.571	341	579	769	246	170	334	14	5	5	0	0	0	5	0
50 a 59 años	24.512	12.682	4.710	5.126	424	1.570	10.935	5.178	2.040	3.044	148	525	328	106	70	129	10	13	4	0	0	0	4	0
60 ó más años	26.046	14.164	4.182	2.878	684	4.138	3.493	1.679	574	788	58	394	69	28	16	20	0	5	0	0	0	0	0	0

	Estudiando						Pensionado o Jubilado						Otra					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	83.767	56.705	14.378	11.430	1.026	228	16.466	7.061	2.546	3.698	997	2.164	212.572	95.042	22.049	10.388	73.225	11.868
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	50.707	0	0	0	50.707	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	51.856	30.871	0	0	16.619	4.366
10 a 14 años	44.066	42.725	618	0	561	162	77	18	0	0	4	55	4.781	3.604	61	0	557	559
15 a 19 años	26.436	12.262	10.729	3.132	285	28	219	57	6	1	57	98	10.728	7.075	2.458	139	722	334
20 a 24 años	8.973	770	2.178	5.929	88	8	401	82	28	4	202	85	13.001	7.212	3.617	762	1.094	316
25 a 29 años	2.229	194	437	1.557	37	4	405	80	22	5	202	96	10.819	5.787	2.742	1.192	819	279
30 a 39 años	1.020	186	186	611	33	4	720	221	70	45	232	152	19.405	10.679	4.139	2.912	1.030	645
40 a 49 años	380	186	72	103	12	7	955	377	180	190	104	104	16.878	9.886	3.280	2.276	609	827
50 a 59 años	108	47	18	34	5	4	2.356	882	419	883	42	130	13.870	8.104	2.624	1.629	351	1.162
60 ó más años	555	335	140	64	5	11	11.333	5.344	1.821	2.570	154	1.444	20.527	11.824	3.128	1.478	717	3.380
Hombres	40.259	28.293	6.395	4.907	556	108	9.418	4.203	1.351	2.042	786	1.036	73.457	27.808	3.405	1.712	36.471	4.061
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	25.928	0	0	0	25.928	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	26.381	15.515	0	0	8.520	2.346
10 a 14 años	21.934	21.292	269	0	291	82	34	5	0	0	1	28	2.298	1.715	26	0	247	310
15 a 19 años	12.620	6.298	4.794	1.360	153	15	148	40	3	1	45	59	3.681	2.426	765	43	268	179
20 a 24 años	4.021	326	1.007	2.633	52	3	303	66	16	1	177	43	2.859	1.500	675	189	379	116
25 a 29 años	914	71	179	641	21	2	307	61	13	2	178	53	1.877	912	349	219	314	83
30 a 39 años	362	67	62	208	23	2	504	157	46	16	197	88	2.843	1.489	495	328	342	189
40 a 49 años	150	85	27	27	9	2	574	261	92	79	89	53	2.376	1.337	375	279	193	192
50 a 59 años	31	12	1	13	5	0	1.102	513	165	319	30	75	1.956	1.110	295	261	101	189
60 ó más años	227	142	56	25	2	2	6.446	3.100	1.016	1.624	69	637	3.258	1.804	425	393	179	457
Mujeres	43.508	28.412	7.983	6.523	470	120	7.048	2.858	1.195	1.656	211	1.128	139.115	67.234	18.644	8.676	36.754	7.807
0 a 4 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24.779	0	0	0	24.779	0
5 a 9 años	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	25.475	15.356	0	0	8.099	2.020
10 a 14 años	22.132	21.433	349	0	270	80	43	13	0	0	3	27	2.483	1.889	35	0	310	249
15 a 19 años	13.816	5.964	5.935	1.772	132	13	71	17	3	0	12	39	7.047	4.649	1.693	96	454	155
20 a 24 años	4.952	444	1.171	3.296	36	5	98	16	12	3	25	42	10.142	5.712	2.942	573	715	200
25 a 29 años	1.315	123	258	916	16	2	98	19	9	3	24	43	8.942	4.875	2.393	973	505	196
30 a 39 años	658	119	124	403	10	2	216	64	24	29	35	64	16.562	9.190	3.644	2.584	688	456
40 a 49 años	230	101	45	76	3	5	381	116	88	111	15	51	14.502	8.549	2.905	1.997	416	635
50 a 59 años	77	35	17	21	0	4	1.254	369	254	564	12	55	11.914	6.994	2.329	1.368	250	973
60 ó más años	328	193	84	39	3	9	4.887	2.244	805	946	85	807	17.269	10.020	2.703	1.085	538	2.923

Coeficientes de Variación del estimador del Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador Directo

	TOTAL						Ocupado					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0028	0,0039	0,0065	0,0068	0,0078	0,0146	0,0043	0,0064	0,0088	0,0084	0,0370	0,0288
0 a 4 años	0,0100	-	-	-	0,0100	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0090	0,0117	-	-	0,0159	0,0322	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0094	0,0097	0,0760	-	0,0622	0,0741	0,1073	0,1162	0,4472	-	0,5497	0,4714
15 a 19 años	0,0093	0,0127	0,0156	0,0329	0,0602	0,0828	0,0212	0,0275	0,0372	0,0885	0,2131	0,1846
20 a 24 años	0,0089	0,0139	0,0160	0,0180	0,0485	0,0767	0,0124	0,0189	0,0211	0,0272	0,1125	0,1283
25 a 29 años	0,0093	0,0144	0,0182	0,0176	0,0527	0,0757	0,0115	0,0181	0,0219	0,0207	0,1048	0,1186
30 a 39 años	0,0068	0,0101	0,0143	0,0132	0,0429	0,0480	0,0081	0,0122	0,0166	0,0148	0,0706	0,0677
40 a 49 años	0,0076	0,0106	0,0170	0,0154	0,0517	0,0421	0,0090	0,0130	0,0202	0,0171	0,0740	0,0565
50 a 59 años	0,0094	0,0131	0,0221	0,0198	0,0693	0,0400	0,0121	0,0173	0,0286	0,0232	0,0997	0,0591
60 ó más años	0,0095	0,0130	0,0238	0,0239	0,0612	0,0263	0,0186	0,0267	0,0453	0,0373	0,1400	0,0665
Hombres	0,0040	0,0057	0,0097	0,0101	0,0110	0,0224	0,0057	0,0081	0,0118	0,0117	0,0480	0,0377
0 a 4 años	0,0141	-	-	-	0,0141	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0126	0,0164	-	-	0,0221	0,0439	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0134	0,0137	0,1153	-	0,0887	0,0998	0,1323	0,1409	0,7071	-	0,6928	0,6030
15 a 19 años	0,0133	0,0176	0,0236	0,0502	0,0906	0,1067	0,0273	0,0334	0,0533	0,1350	0,2886	0,2115
20 a 24 años	0,0130	0,0196	0,0237	0,0279	0,0709	0,1054	0,0164	0,0232	0,0287	0,0418	0,1466	0,1503
25 a 29 años	0,0136	0,0203	0,0269	0,0275	0,0749	0,1049	0,0153	0,0224	0,0293	0,0311	0,1402	0,1424
30 a 39 años	0,0099	0,0144	0,0206	0,0200	0,0602	0,0679	0,0107	0,0155	0,0219	0,0211	0,0898	0,0861
40 a 49 años	0,0112	0,0157	0,0254	0,0227	0,0750	0,0641	0,0121	0,0171	0,0272	0,0239	0,1013	0,0772
50 a 59 años	0,0140	0,0197	0,0339	0,0275	0,0982	0,0657	0,0156	0,0221	0,0375	0,0301	0,1249	0,0803
60 ó más años	0,0148	0,0209	0,0369	0,0307	0,0997	0,0494	0,0222	0,0319	0,0536	0,0436	0,1654	0,0886
Mujeres	0,0038	0,0055	0,0088	0,0093	0,0111	0,0192	0,0067	0,0104	0,0134	0,0119	0,0581	0,0445
0 a 4 años	0,0143	-	-	-	0,0143	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0129	0,0166	-	-	0,0229	0,0474	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0133	0,0137	0,1010	-	0,0874	0,1105	0,1833	0,2051	0,5773	-	0,8944	0,7559
15 a 19 años	0,0129	0,0183	0,0207	0,0436	0,0804	0,1311	0,0336	0,0484	0,0520	0,1173	0,3158	0,3779
20 a 24 años	0,0121	0,0198	0,0216	0,0236	0,0665	0,1117	0,0189	0,0324	0,0312	0,0359	0,1753	0,2465
25 a 29 años	0,0127	0,0205	0,0247	0,0230	0,0741	0,1094	0,0173	0,0307	0,0331	0,0278	0,1579	0,2143
30 a 39 años	0,0094	0,0141	0,0198	0,0175	0,0610	0,0679	0,0124	0,0200	0,0256	0,0209	0,1142	0,1094
40 a 49 años	0,0102	0,0144	0,0229	0,0209	0,0713	0,0559	0,0135	0,0201	0,0301	0,0246	0,1085	0,0829
50 a 59 años	0,0127	0,0175	0,0291	0,0284	0,0977	0,0505	0,0191	0,0276	0,0442	0,0364	0,1654	0,0873
60 ó más años	0,0124	0,0167	0,0312	0,0382	0,0775	0,0311	0,0340	0,0489	0,0845	0,0718	0,2626	0,1006

	Desocupado						BTPPV					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0186	0,0275	0,0392	0,0362	0,1152	0,1206	0,0290	0,0421	0,0531	0,0683	0,1711	0,2120
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,4170	0,4264	-	-	2,0000	-	0,1996	0,2193	1,0000	-	1,4907	0,5773
15 a 19 años	0,0762	0,0933	0,1494	0,3809	0,4969	0,6667	0,0469	0,0607	0,0776	0,4264	0,4810	0,3430
20 a 24 años	0,0469	0,0661	0,0870	0,1084	0,3244	0,5164	0,0492	0,0755	0,0882	0,1052	0,2826	0,4170
25 a 29 años	0,0471	0,0755	0,0955	0,0817	0,2828	0,3922	0,0730	0,1274	0,1605	0,1135	0,3651	0,7071
30 a 39 años	0,0348	0,0557	0,0772	0,0581	0,1953	0,2500	0,0978	0,1708	0,2250	0,1561	0,3922	0,5773
40 a 49 años	0,0416	0,0609	0,0924	0,0780	0,2800	0,2603	0,7071	-	-	-	0,7071	-
50 a 59 años	0,0574	0,0805	0,1298	0,1166	0,3481	0,2672	0,8944	-	-	-	0,8944	-
60 ó más años	0,1033	0,1450	0,2278	0,2356	0,7071	0,2948	-	-	-	-	-	-
Hombres	0,0230	0,0316	0,0499	0,0517	0,1462	0,1324	0,0370	0,0490	0,0717	0,1067	0,2559	0,2462
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,4472	0,4472	-	-	-	-	0,2273	0,2555	1,1547	-	1,4907	0,5773
15 a 19 años	0,0924	0,1062	0,2131	0,7071	0,6236	0,7071	0,0578	0,0704	0,1072	0,6324	0,7071	0,3922
20 a 24 años	0,0597	0,0768	0,1125	0,1960	0,4714	0,6667	0,0636	0,0876	0,1159	0,1733	0,4170	0,5164
25 a 29 años	0,0625	0,0895	0,1234	0,1360	0,4000	0,4472	0,0972	0,1498	0,2119	0,1720	0,5547	0,7071
30 a 39 años	0,0456	0,0647	0,0983	0,0964	0,2460	0,2747	0,1313	0,1980	0,3162	0,2339	0,5773	0,8944
40 a 49 años	0,0502	0,0693	0,1157	0,1044	0,3288	0,2721	1,1547	-	-	-	1,1547	-
50 a 59 años	0,0628	0,0884	0,1547	0,1223	0,4170	0,3050	2,0000	-	-	-	2,0000	-
60 ó más años	0,1034	0,1561	0,2559	0,1999	0,7071	0,3123	-	-	-	-	-	-
Mujeres	0,0317	0,0563	0,0635	0,0505	0,1869	0,2917	0,0468	0,0827	0,0791	0,0888	0,2299	0,4170
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	1,1547	1,4142	-	-	2,0000	-	0,4170	0,4264	2,0000	-	-	-
15 a 19 años	0,1345	0,1950	0,2096	0,4351	0,8165	2,0000	0,0800	0,1196	0,1123	0,5773	0,6389	0,7071
20 a 24 años	0,0756	0,1295	0,1372	0,1259	0,4472	0,8165	0,0778	0,1489	0,1359	0,1323	0,3839	0,7071
25 a 29 años	0,0712	0,1406	0,1506	0,1004	0,4000	0,8165	0,1107	0,2424	0,2460	0,1510	0,4850	-
30 a 39 años	0,0536	0,1093	0,1249	0,0716	0,3195	0,6030	0,1466	0,3375	0,3202	0,2095	0,5345	0,7559
40 a 49 años	0,0743	0,1274	0,1533	0,1169	0,5345	0,8944	0,8944	-	-	-	0,8944	-
50 a 59 años	0,1315	0,1942	0,2390	0,2531	0,6324	0,5547	1,0000	-	-	-	1,0000	-
60 ó más años	0,3561	0,3912	0,5000	0,9996	-	0,8944	-	-	-	-	-	-

	Estudiando						Pensionado o Jubilado						Otra					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0072	0,0088	0,0170	0,0193	0,0640	0,1359	0,0157	0,0239	0,0399	0,0330	0,0646	0,0431	0,0045	0,0066	0,0135	0,0197	0,0081	0,0189
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0100	-	-	-	0,0100	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0090	0,0117	-	-	0,0159	0,0322
10 a 14 años	0,0100	0,0102	0,0811	-	0,0869	0,1628	0,2279	0,4714	-	-	1,0000	0,2697	0,0307	0,0353	0,2560	-	0,0908	0,0899
15 a 19 años	0,0126	0,0186	0,0196	0,0365	0,1221	0,3779	0,1351	0,2649	0,8165	2,0000	0,2649	0,2020	0,0201	0,0249	0,0408	0,1696	0,0779	0,1157
20 a 24 años	0,0218	0,0732	0,0439	0,0270	0,2132	0,7071	0,1011	0,2208	0,3779	1,0000	0,1441	0,2169	0,0179	0,0241	0,0335	0,0734	0,0627	0,1139
25 a 29 años	0,0430	0,1443	0,0975	0,0515	0,3288	1,0000	0,1015	0,2236	0,4264	0,8944	0,1468	0,2041	0,0193	0,0264	0,0382	0,0584	0,0719	0,1197
30 a 39 años	0,0632	0,1474	0,1474	0,0817	0,3585	1,0000	0,0750	0,1345	0,2390	0,2981	0,1335	0,1632	0,0142	0,0191	0,0309	0,0370	0,0636	0,0795
40 a 49 años	0,1031	0,1474	0,2389	0,1970	0,5773	0,7559	0,0650	0,1035	0,1490	0,1450	0,1998	0,1961	0,0152	0,0197	0,0347	0,0417	0,0819	0,0694
50 a 59 años	0,1924	0,2917	0,4714	0,3430	0,8944	1,0000	0,0413	0,0674	0,0983	0,0674	0,3086	0,1754	0,0168	0,0218	0,0390	0,0495	0,1076	0,0587
60 ó más años	0,0876	0,1124	0,1772	0,2538	0,8944	0,6030	0,0189	0,0274	0,0472	0,0396	0,1611	0,0528	0,0139	0,0181	0,0359	0,0525	0,0757	0,0344
Hombres	0,0103	0,0124	0,0256	0,0295	0,0876	0,1977	0,0206	0,0308	0,0544	0,0442	0,0731	0,0622	0,0079	0,0123	0,0346	0,0488	0,0115	0,0329
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0141	-	-	-	0,0141	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0126	0,0164	-	-	0,0221	0,0439
10 a 14 años	0,0141	0,0144	0,1232	-	0,1211	0,2287	0,3430	0,8944	-	-	2,0000	0,3779	0,0444	0,0516	0,3922	-	0,1332	0,1206
15 a 19 años	0,0183	0,0259	0,0295	0,0553	0,1698	0,5164	0,1644	0,3162	1,1547	2,0000	0,2981	0,2603	0,0345	0,0428	0,0733	0,3050	0,1296	0,1607
20 a 24 años	0,0327	0,1133	0,0648	0,0407	0,2773	1,1547	0,1167	0,2461	0,5000	2,0000	0,1544	0,3050	0,0385	0,0535	0,0781	0,1477	0,1071	0,1872
25 a 29 años	0,0679	0,2373	0,1559	0,0810	0,4364	1,4142	0,1174	0,2560	0,5547	1,4142	0,1572	0,2747	0,0472	0,0679	0,1075	0,1387	0,1177	0,2195
30 a 39 años	0,1071	0,2479	0,2580	0,1412	0,4348	1,4142	0,0899	0,1595	0,2948	0,5000	0,1453	0,2155	0,0383	0,0531	0,0903	0,1126	0,1117	0,1477
40 a 49 años	0,1654	0,2194	0,3989	0,3849	0,6667	1,4142	0,0840	0,1246	0,2084	0,2250	0,2166	0,2747	0,0415	0,0556	0,1034	0,1200	0,1461	0,1442
50 a 59 años	0,3592	0,5773	2,0000	0,5547	0,8944	-	0,0603	0,0883	0,1565	0,1118	0,3651	0,2309	0,0455	0,0605	0,1175	0,1237	0,2009	0,1461
60 ó más años	0,1379	0,1758	0,2766	0,4000	1,4142	1,4142	0,0248	0,0358	0,0627	0,0495	0,2407	0,0792	0,0351	0,0471	0,0973	0,1015	0,1502	0,0942
Mujeres	0,0099	0,0124	0,0227	0,0254	0,0937	0,1870	0,0241	0,0378	0,0587	0,0497	0,1377	0,0598	0,0055	0,0077	0,0146	0,0215	0,0114	0,0231
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0143	-	-	-	0,0143	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0129	0,0166	-	-	0,0229	0,0474
10 a 14 años	0,0141	0,0144	0,1078	-	0,1247	0,2318	0,3050	0,5547	-	-	1,1547	0,3849	0,0425	0,0485	0,3380	-	0,1240	0,1350
15 a 19 años	0,0174	0,0268	0,0263	0,0486	0,1753	0,5547	0,2373	0,4850	1,1547	-	0,5773	0,3202	0,0247	0,0307	0,0491	0,2041	0,0974	0,1667
20 a 24 años	0,0293	0,0958	0,0598	0,0361	0,3333	0,8944	0,2020	0,5000	0,5773	1,1547	0,4000	0,3086	0,0202	0,0270	0,0370	0,0845	0,0774	0,1434
25 a 29 años	0,0556	0,1817	0,1249	0,0667	0,5000	1,4142	0,2020	0,4588	0,6667	1,1547	0,4082	0,3050	0,0212	0,0286	0,0409	0,0644	0,0908	0,1428
30 a 39 años	0,0782	0,1833	0,1795	0,1002	0,6324	1,4142	0,1361	0,2499	0,4082	0,3714	0,3380	0,2499	0,0153	0,0204	0,0329	0,0392	0,0773	0,0943
40 a 49 años	0,1318	0,1989	0,2981	0,2294	1,1547	0,8944	0,1024	0,1856	0,2131	0,1898	0,5164	0,2800	0,0163	0,0211	0,0369	0,0445	0,0988	0,0792
50 a 59 años	0,2279	0,3380	0,4850	0,4364	-	1,0000	0,0567	0,1043	0,1264	0,0845	0,5773	0,2696	0,0181	0,0234	0,0413	0,0540	0,1274	0,0641
60 ó más años	0,1134	0,1461	0,2308	0,3283	1,1547	0,6667	0,0290	0,0427	0,0718	0,0661	0,2169	0,0709	0,0151	0,0197	0,0386	0,0613	0,0876	0,0370

Coeficientes de Variación del estimador del Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Razón (va: Sexo)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado						BTPPV					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0027	0,0038	0,0065	0,0068	0,0072	0,0146	0,0043	0,0063	0,0088	0,0084	0,0370	0,0287	0,0186	0,0275	0,0392	0,0362	0,1152	0,1206	0,0290	0,0421	0,0531	0,0683	0,1711	0,2120
0 a 4 años	0,0091	-	-	-	0,0091	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0087	0,0111	-	-	0,0154	0,0319	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0089	0,0091	0,0759	-	0,0622	0,0740	0,1072	0,1161	0,4472	-	0,5497	0,4714	0,4170	0,4264	-	-	2,0000	-	0,1996	0,2192	1,0000	-	1,4907	0,5772
15 a 19 años	0,0092	0,0125	0,0154	0,0328	0,0601	0,0827	0,0210	0,0271	0,0371	0,0885	0,2131	0,1846	0,0761	0,0932	0,1494	0,3809	0,4969	0,6666	0,0468	0,0605	0,0775	0,4264	0,4810	0,3429
20 a 24 años	0,0088	0,0137	0,0159	0,0180	0,0484	0,0766	0,0122	0,0185	0,0209	0,0271	0,1125	0,1283	0,0468	0,0660	0,0870	0,1084	0,3244	0,5163	0,0492	0,0754	0,0881	0,1051	0,2826	0,4170
25 a 29 años	0,0092	0,0143	0,0181	0,0176	0,0527	0,0757	0,0114	0,0178	0,0218	0,0208	0,1048	0,1185	0,0470	0,0754	0,0954	0,0817	0,2828	0,3922	0,0730	0,1274	0,1605	0,1135	0,3651	0,7070
30 a 39 años	0,0068	0,0099	0,0142	0,0133	0,0428	0,0480	0,0080	0,0120	0,0166	0,0150	0,0706	0,0676	0,0348	0,0556	0,0772	0,0581	0,1953	0,2499	0,0978	0,1708	0,2250	0,1561	0,3922	0,5773
40 a 49 años	0,0075	0,0105	0,0170	0,0155	0,0517	0,0421	0,0090	0,0128	0,0202	0,0172	0,0740	0,0565	0,0416	0,0608	0,0924	0,0780	0,2800	0,2603	0,7071	-	-	-	0,7071	-
50 a 59 años	0,0094	0,0131	0,0221	0,0198	0,0693	0,0400	0,0121	0,0172	0,0286	0,0233	0,0997	0,0591	0,0574	0,0804	0,1298	0,1166	0,3481	0,2672	0,8944	-	-	-	0,8944	-
60 ó más años	0,0095	0,0131	0,0239	0,0240	0,0612	0,0263	0,0186	0,0268	0,0454	0,0374	0,1400	0,0665	0,1033	0,1450	0,2278	0,2356	0,7071	0,2948	-	-	-	-	-	-
Hombres	0,0039	0,0055	0,0097	0,0101	0,0102	0,0224	0,0056	0,0079	0,0117	0,0118	0,0480	0,0377	0,0230	0,0315	0,0499	0,0518	0,1462	0,1324	0,0369	0,0489	0,0717	0,1067	0,2559	0,2461
0 a 4 años	0,0127	-	-	-	0,0127	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0121	0,0156	-	-	0,0214	0,0434	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0126	0,0129	0,1153	-	0,0886	0,0996	0,1322	0,1408	0,7071	-	0,6928	0,6029	0,4472	0,4472	-	-	-	-	0,2272	0,2554	1,1547	-	1,4907	0,5772
15 a 19 años	0,0132	0,0173	0,0234	0,0501	0,0906	0,1067	0,0270	0,0329	0,0531	0,1350	0,2886	0,2114	0,0923	0,1061	0,2131	0,7071	0,6236	0,7071	0,0576	0,0702	0,1071	0,6324	0,7071	0,3921
20 a 24 años	0,0128	0,0192	0,0236	0,0279	0,0709	0,1054	0,0161	0,0226	0,0284	0,0417	0,1465	0,1502	0,0596	0,0767	0,1125	0,1960	0,4714	0,6666	0,0635	0,0875	0,1158	0,1733	0,4170	0,5163
25 a 29 años	0,0135	0,0200	0,0268	0,0275	0,0749	0,1049	0,0151	0,0220	0,0292	0,0312	0,1401	0,1423	0,0625	0,0894	0,1234	0,1360	0,4000	0,4471	0,0972	0,1497	0,2118	0,1720	0,5547	0,7070
30 a 39 años	0,0098	0,0141	0,0205	0,0202	0,0602	0,0678	0,0106	0,0151	0,0218	0,0214	0,0898	0,0861	0,0456	0,0645	0,0982	0,0964	0,2460	0,2747	0,1313	0,1979	0,3162	0,2339	0,5773	0,8944
40 a 49 años	0,0112	0,0155	0,0254	0,0229	0,0750	0,0641	0,0121	0,0168	0,0272	0,0241	0,1012	0,0771	0,0501	0,0692	0,1157	0,1044	0,3288	0,2721	1,1547	-	-	-	1,1547	-
50 a 59 años	0,0140	0,0196	0,0340	0,0276	0,0982	0,0657	0,0156	0,0220	0,0375	0,0302	0,1249	0,0802	0,0628	0,0884	0,1547	0,1223	0,4170	0,3049	2,0000	-	-	-	2,0000	-
60 ó más años	0,0148	0,0210	0,0369	0,0308	0,0997	0,0493	0,0223	0,0319	0,0537	0,0438	0,1654	0,0885	0,1034	0,1561	0,2559	0,2000	0,7071	0,3123	-	-	-	-	-	-
Mujeres	0,0037	0,0053	0,0088	0,0093	0,0103	0,0192	0,0066	0,0104	0,0133	0,0120	0,0581	0,0444	0,0317	0,0563	0,0635	0,0506	0,1869	0,2917	0,0467	0,0826	0,0790	0,0888	0,2298	0,4170
0 a 4 años	0,0130	-	-	-	0,0130	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0124	0,0157	-	-	0,0222	0,0470	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0126	0,0129	0,1009	-	0,0873	0,1104	0,1832	0,2051	0,5773	-	0,8944	0,7559	1,1547	1,4142	-	-	2,0000	-	0,4170	0,4263	2,0000	-	-	-
15 a 19 años	0,0127	0,0180	0,0205	0,0435	0,0803	0,1311	0,0334	0,0481	0,0518	0,1172	0,3158	0,3779	0,1344	0,1949	0,2095	0,4351	0,8165	1,9999	0,0799	0,1194	0,1122	0,5773	0,6388	0,7071
20 a 24 años	0,0121	0,0196	0,0215	0,0235	0,0664	0,1116	0,0187	0,0321	0,0309	0,0357	0,1753	0,2465	0,0755	0,1294	0,1371	0,1259	0,4472	0,8165	0,0778	0,1488	0,1358	0,1323	0,3839	0,7071
25 a 29 años	0,0127	0,0203	0,0246	0,0230	0,0741	0,1093	0,0173	0,0305	0,0330	0,0278	0,1579	0,2143	0,0712	0,1405	0,1505	0,1004	0,4000	0,8165	0,1107	0,2423	0,2460	0,1510	0,4850	-
30 a 39 años	0,0094	0,0139	0,0197	0,0176	0,0610	0,0679	0,0124	0,0197	0,0255	0,0210	0,1142	0,1094	0,0536	0,1092	0,1249	0,0717	0,3195	0,6030	0,1466	0,3375	0,3202	0,2095	0,5345	0,7559
40 a 49 años	0,0102	0,0143	0,0229	0,0210	0,0713	0,0559	0,0135	0,0199	0,0301	0,0247	0,1084	0,0829	0,0743	0,1274	0,1533	0,1169	0,5345	0,8944	0,8944	-	-	-	0,8944	-
50 a 59 años	0,0127	0,0175	0,0292	0,0284	0,0977	0,0505	0,0191	0,0276	0,0443	0,0365	0,1654	0,0872	0,1315	0,1942	0,2390	0,2531	0,6324	0,5547	1,0000	-	-	-	1,0000	-
60 ó más años	0,0124	0,0167	0,0313	0,0383	0,0774	0,0311	0,0340	0,0489	0,0845	0,0718	0,2625	0,1006	0,3561	0,3912	0,5000	0,9996	-	0,8944	-	-	-	-	-	-

	Estudiando						Pensionado o Jubilado						Otra					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0069	0,0083	0,0168	0,0192	0,0640	0,1358	0,0157	0,0239	0,0400	0,0331	0,0646	0,0431	0,0043	0,0064	0,0135	0,0197	0,0075	0,0188
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0091	-	-	-	0,0091	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0087	0,0111	-	-	0,0154	0,0319
10 a 14 años	0,0093	0,0095	0,0811	-	0,0868	0,1628	0,2279	0,4714	-	-	1,0000	0,2696	0,0305	0,0351	0,2560	-	0,0907	0,0898
15 a 19 años	0,0124	0,0183	0,0194	0,0364	0,1221	0,3779	0,1351	0,2649	0,8165	2,0000	0,2648	0,2020	0,0199	0,0246	0,0407	0,1696	0,0778	0,1157
20 a 24 años	0,0218	0,0731	0,0439	0,0269	0,2132	0,7071	0,1011	0,2208	0,3779	1,0000	0,1440	0,2169	0,0177	0,0238	0,0334	0,0733	0,0626	0,1138
25 a 29 años	0,0430	0,1442	0,0975	0,0515	0,3288	1,0000	0,1015	0,2235	0,4264	0,8944	0,1467	0,2041	0,0193	0,0262	0,0382	0,0585	0,0718	0,1196
30 a 39 años	0,0632	0,1474	0,1474	0,0817	0,3585	1,0000	0,0750	0,1344	0,2390	0,2981	0,1335	0,1632	0,0142	0,0189	0,0309	0,0371	0,0635	0,0794
40 a 49 años	0,1031	0,1474	0,2389	0,1970	0,5773	0,7559	0,0650	0,1034	0,1490	0,1450	0,1998	0,1961	0,0152	0,0196	0,0348	0,0418	0,0818	0,0694
50 a 59 años	0,1924	0,2917	0,4714	0,3430	0,8944	1,0000	0,0413	0,0674	0,0983	0,0675	0,3085	0,1754	0,0168	0,0219	0,0391	0,0495	0,1076	0,0587
60 ó más años	0,0875	0,1124	0,1772	0,2538	0,8944	0,6030	0,0189	0,0275	0,0473	0,0397	0,1611	0,0528	0,0139	0,0183	0,0360	0,0525	0,0757	0,0344
Hombres	0,0099	0,0117	0,0254	0,0295	0,0876	0,1976	0,0207	0,0309	0,0545	0,0443	0,0731	0,0621	0,0074	0,0119	0,0345	0,0489	0,0106	0,0326
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0127	-	-	-	0,0127	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0121	0,0156	-	-	0,0214	0,0434
10 a 14 años	0,0132	0,0134	0,1231	-	0,1210	0,2287	0,3429	0,8944	-	-	2,0000	0,3779	0,0442	0,0512	0,3922	-	0,1330	0,1203
15 a 19 años	0,0180	0,0254	0,0292	0,0552	0,1698	0,5164	0,1643	0,3161	1,1547	2,0000	0,2980	0,2603	0,0343	0,0424	0,0732	0,3049	0,1295	0,1605
20 a 24 años	0,0327	0,1132	0,0647	0,0406	0,2773	1,1547	0,1167	0,2461	0,5000	2,0000	0,1544	0,3049	0,0384	0,0532	0,0780	0,1476	0,1069	0,1871
25 a 29 años	0,0679	0,2373	0,1559	0,0810	0,4364	1,4142	0,1174	0,2560	0,5547	1,4142	0,1571	0,2746	0,0472	0,0677	0,1074	0,1387	0,1176	0,2194
30 a 39 años	0,1071	0,2479	0,2580	0,1412	0,4347	1,4142	0,0899	0,1595	0,2948	0,5000	0,1452	0,2155	0,0382	0,0529	0,0902	0,1127	0,1117	0,1476
40 a 49 años	0,1654	0,2194	0,3989	0,3849	0,6666	1,4142	0,0840	0,1246	0,2085	0,2250	0,2166	0,2747	0,0414	0,0555	0,1034	0,1201	0,1460	0,1442
50 a 59 años	0,3592	0,5773	2,0000	0,5547	0,8944	-	0,0603	0,0883	0,1566	0,1119	0,3651	0,2309	0,0455	0,0605	0,1175	0,1237	0,2009	0,1461
60 ó más años	0,1378	0,1758	0,2766	0,4000	1,4142	1,4142	0,0249	0,0359	0,0628	0,0497	0,2407	0,0792	0,0352	0,0472	0,0974	0,1016	0,1502	0,0942
Mujeres	0,0096	0,0117	0,0225	0,0254	0,0937	0,1870	0,0241	0,0378	0,0587	0,0497	0,1377	0,0598	0,0054	0,0076	0,0146	0,0215	0,0106	0,0230
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0130	-	-	-	0,0130	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0124	0,0157	-	-	0,0222	0,0470
10 a 14 años	0,0132	0,0134	0,1077	-	0,1246	0,2317	0,3049	0,5547	-	-	1,1547	0,3848	0,0423	0,0482	0,3380	-	0,1238	0,1348
15 a 19 años	0,0172	0,0264	0,0260	0,0485	0,1753	0,5547	0,2373	0,4850	1,1547	-	0,5773	0,3202	0,0244	0,0302	0,0489	0,2040	0,0972	0,1666
20 a 24 años	0,0292	0,0957	0,0597	0,0360	0,3333	0,8944	0,2020	0,5000	0,5773	1,1547	0,3999	0,3085	0,0200	0,0266	0,0369	0,0845	0,0772	0,1434
25 a 29 años	0,0556	0,1817	0,1248	0,0667	0,5000	1,4142	0,2020	0,4588	0,6666	1,1547	0,4082	0,3049	0,0211	0,0284	0,0408	0,0645	0,0907	0,1427
30 a 39 años	0,0782	0,1832	0,1795	0,1002	0,6324	1,4142	0,1360	0,2499	0,4082	0,3714	0,3380	0,2499	0,0153	0,0203	0,0329	0,0393	0,0772	0,0943
40 a 49 años	0,1318	0,1989	0,2981	0,2294	1,1547	0,8944	0,1024	0,1856	0,2131	0,1898	0,5164	0,2800	0,0163	0,0210	0,0369	0,0446	0,0988	0,0791
50 a 59 años	0,2279	0,3380	0,4851	0,4364	-	1,0000	0,0567	0,1043	0,1264	0,0845	0,5773	0,2696	0,0181	0,0234	0,0414	0,0541	0,1274	0,0641
60 ó más años	0,1133	0,1460	0,2307	0,3283	1,1547	0,6666	0,0290	0,0428	0,0719	0,0662	0,2169	0,0708	0,0152	0,0198	0,0387	0,0614	0,0876	0,0369

Coeficientes de Variación del estimador del Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Razón (va: Grupos de Edad)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado						BTPPV					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0026	0,0039	0,0064	0,0066	0,0058	0,0144	0,0041	0,0058	0,0085	0,0080	0,0369	0,0286	0,0186	0,0274	0,0391	0,0362	0,1151	0,1206	0,0292	0,0425	0,0533	0,0683	0,1711	0,2120
0 a 4 años	0,0063	-	-	-	0,0063	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0077	0,0095	-	-	0,0142	0,0311	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0116	0,0120	0,0763	-	0,0620	0,0738	0,1071	0,1159	0,4472	-	0,5497	0,4713	0,4169	0,4263	-	-	2,0000	-	0,1998	0,2194	1,0001	-	1,4907	0,5774
15 a 19 años	0,0095	0,0129	0,0162	0,0334	0,0600	0,0827	0,0205	0,0262	0,0365	0,0883	0,2130	0,1844	0,0759	0,0928	0,1493	0,3810	0,4968	0,6667	0,0472	0,0613	0,0779	0,4265	0,4810	0,3431
20 a 24 años	0,0085	0,0130	0,0154	0,0181	0,0483	0,0766	0,0116	0,0172	0,0200	0,0265	0,1123	0,1281	0,0467	0,0656	0,0868	0,1086	0,3243	0,5165	0,0494	0,0759	0,0885	0,1054	0,2825	0,4171
25 a 29 años	0,0088	0,0134	0,0174	0,0169	0,0525	0,0756	0,0107	0,0165	0,0208	0,0196	0,1046	0,1183	0,0470	0,0751	0,0952	0,0819	0,2828	0,3923	0,0731	0,1277	0,1607	0,1136	0,3650	0,7071
30 a 39 años	0,0064	0,0093	0,0137	0,0126	0,0427	0,0479	0,0076	0,0111	0,0159	0,0140	0,0704	0,0675	0,0347	0,0554	0,0771	0,0582	0,1953	0,2501	0,0978	0,1709	0,2250	0,1561	0,3922	0,5774
40 a 49 años	0,0071	0,0098	0,0165	0,0148	0,0516	0,0420	0,0084	0,0118	0,0194	0,0163	0,0738	0,0563	0,0415	0,0605	0,0922	0,0781	0,2799	0,2604	0,7071	-	-	-	0,7071	-
50 a 59 años	0,0089	0,0121	0,0215	0,0190	0,0691	0,0398	0,0114	0,0158	0,0277	0,0220	0,0995	0,0587	0,0572	0,0800	0,1296	0,1168	0,3480	0,2674	0,8944	-	-	-	0,8944	-
60 ó más años	0,0090	0,0119	0,0232	0,0234	0,0609	0,0259	0,0181	0,0257	0,0446	0,0364	0,1398	0,0662	0,1032	0,1448	0,2277	0,2354	0,7071	0,2948	-	-	-	-	-	-
Hombres	0,0038	0,0056	0,0095	0,0097	0,0080	0,0221	0,0052	0,0072	0,0112	0,0111	0,0479	0,0375	0,0230	0,0314	0,0497	0,0518	0,1462	0,1325	0,0372	0,0494	0,0720	0,1068	0,2559	0,2462
0 a 4 años	0,0087	-	-	-	0,0087	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0108	0,0134	-	-	0,0198	0,0424	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0164	0,0170	0,1157	-	0,0884	0,0994	0,1320	0,1405	0,7071	-	0,6927	0,6028	0,4471	0,4471	-	-	-	-	0,2274	0,2558	1,1548	-	1,4907	0,5774
15 a 19 años	0,0136	0,0179	0,0245	0,0508	0,0904	0,1066	0,0261	0,0315	0,0524	0,1347	0,2884	0,2112	0,0920	0,1056	0,2129	0,7072	0,6235	0,7072	0,0584	0,0713	0,1078	0,6325	0,7070	0,3923
20 a 24 años	0,0124	0,0180	0,0228	0,0280	0,0707	0,1053	0,0151	0,0207	0,0270	0,0409	0,1462	0,1499	0,0593	0,0762	0,1121	0,1963	0,4713	0,6668	0,0639	0,0882	0,1163	0,1736	0,4169	0,5165
25 a 29 años	0,0127	0,0184	0,0255	0,0264	0,0747	0,1047	0,0140	0,0199	0,0275	0,0296	0,1398	0,1420	0,0623	0,0889	0,1231	0,1362	0,3999	0,4473	0,0973	0,1501	0,2121	0,1722	0,5546	0,7071
30 a 39 años	0,0092	0,0129	0,0196	0,0189	0,0600	0,0677	0,0098	0,0136	0,0206	0,0199	0,0896	0,0858	0,0455	0,0643	0,0980	0,0964	0,2459	0,2748	0,1313	0,1981	0,3162	0,2339	0,5773	0,8944
40 a 49 años	0,0104	0,0142	0,0244	0,0216	0,0748	0,0639	0,0111	0,0151	0,0260	0,0226	0,1010	0,0768	0,0500	0,0688	0,1154	0,1045	0,3286	0,2722	1,1547	-	-	-	1,1547	-
50 a 59 años	0,0132	0,0181	0,0329	0,0261	0,0980	0,0654	0,0145	0,0198	0,0361	0,0282	0,1246	0,0797	0,0627	0,0878	0,1542	0,1227	0,4169	0,3052	2,0000	-	-	-	2,0000	-
60 ó más años	0,0143	0,0200	0,0363	0,0299	0,0995	0,0490	0,0215	0,0304	0,0527	0,0423	0,1652	0,0881	0,1032	0,1558	0,2557	0,1996	0,7071	0,3122	-	-	-	-	-	-
Mujeres	0,0036	0,0054	0,0087	0,0090	0,0083	0,0189	0,0064	0,0099	0,0129	0,0114	0,0580	0,0443	0,0317	0,0562	0,0634	0,0506	0,1869	0,2918	0,0469	0,0829	0,0793	0,0889	0,2298	0,4171
0 a 4 años	0,0091	-	-	-	0,0091	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0111	0,0135	-	-	0,0205	0,0459	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0164	0,0170	0,1014	-	0,0871	0,1103	0,1831	0,2049	0,5773	-	0,8944	0,7558	1,1547	1,4142	-	-	2,0000	-	0,4171	0,4265	2,0001	-	-	-
15 a 19 años	0,0132	0,0186	0,0216	0,0443	0,0801	0,1309	0,0329	0,0473	0,0510	0,1170	0,3157	0,3778	0,1343	0,1947	0,2094	0,4353	0,8164	2,0001	0,0803	0,1201	0,1129	0,5774	0,6387	0,7071
20 a 24 años	0,0118	0,0188	0,0209	0,0237	0,0660	0,1115	0,0181	0,0310	0,0297	0,0349	0,1751	0,2463	0,0755	0,1292	0,1369	0,1262	0,4470	0,8166	0,0780	0,1492	0,1363	0,1326	0,3838	0,7071
25 a 29 años	0,0122	0,0194	0,0239	0,0221	0,0738	0,1092	0,0165	0,0293	0,0317	0,0263	0,1576	0,2141	0,0712	0,1403	0,1503	0,1007	0,3999	0,8166	0,1108	0,2426	0,2462	0,1512	0,4849	-
30 a 39 años	0,0090	0,0133	0,0192	0,0168	0,0608	0,0678	0,0118	0,0189	0,0248	0,0198	0,1140	0,1093	0,0536	0,1091	0,1247	0,0718	0,3194	0,6030	0,1466	0,3376	0,3203	0,2096	0,5345	0,7560
40 a 49 años	0,0098	0,0134	0,0223	0,0202	0,0711	0,0557	0,0129	0,0188	0,0293	0,0235	0,1082	0,0827	0,0743	0,1272	0,1531	0,1170	0,5345	0,8945	0,8944	-	-	-	0,8944	-
50 a 59 años	0,0121	0,0162	0,0284	0,0277	0,0975	0,0501	0,0183	0,0261	0,0433	0,0351	0,1652	0,0869	0,1316	0,1940	0,2388	0,2533	0,6323	0,5548	0,9999	-	-	-	0,9999	-
60 ó más años	0,0115	0,0148	0,0302	0,0377	0,0771	0,0305	0,0336	0,0481	0,0838	0,0710	0,2624	0,1002	0,3559	0,3911	0,4998	0,9991	-	0,8944	-	-	-	-	-	-

	Estudiando						Pensionado o Jubilado						Otra					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0083	0,0107	0,0179	0,0197	0,0639	0,1360	0,0154	0,0231	0,0395	0,0325	0,0645	0,0429	0,0038	0,0059	0,0131	0,0194	0,0058	0,0185
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0063	-	-	-	0,0063	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0077	0,0095	-	-	0,0142	0,0311
10 a 14 años	0,0125	0,0128	0,0815	-	0,0866	0,1630	0,2280	0,4715	-	-	1,0000	0,2697	0,0302	0,0345	0,2560	-	0,0905	0,0895
15 a 19 años	0,0135	0,0202	0,0211	0,0372	0,1219	0,3780	0,1352	0,2650	0,8165	2,0001	0,2647	0,2021	0,0193	0,0236	0,0402	0,1695	0,0775	0,1154
20 a 24 años	0,0223	0,0735	0,0445	0,0278	0,2131	0,7071	0,1010	0,2210	0,3780	1,0000	0,1438	0,2170	0,0171	0,0227	0,0326	0,0731	0,0623	0,1136
25 a 29 años	0,0432	0,1445	0,0978	0,0518	0,3287	1,0000	0,1014	0,2237	0,4265	0,8945	0,1465	0,2042	0,0187	0,0250	0,0372	0,0579	0,0715	0,1194
30 a 39 años	0,0632	0,1475	0,1475	0,0818	0,3585	1,0000	0,0750	0,1345	0,2390	0,2981	0,1333	0,1633	0,0138	0,0181	0,0303	0,0365	0,0633	0,0793
40 a 49 años	0,1032	0,1475	0,2390	0,1971	0,5773	0,7560	0,0650	0,1036	0,1491	0,1451	0,1997	0,1961	0,0146	0,0185	0,0340	0,0411	0,0816	0,0692
50 a 59 años	0,1925	0,2918	0,4715	0,3431	0,8943	1,0001	0,0415	0,0678	0,0985	0,0678	0,3085	0,1755	0,0159	0,0201	0,0379	0,0486	0,1073	0,0583
60 ó más años	0,0874	0,1122	0,1770	0,2538	0,8944	0,6030	0,0183	0,0263	0,0465	0,0387	0,1609	0,0524	0,0127	0,0158	0,0345	0,0517	0,0753	0,0336
Hombres	0,0121	0,0151	0,0268	0,0301	0,0874	0,1979	0,0201	0,0296	0,0537	0,0432	0,0730	0,0618	0,0064	0,0110	0,0344	0,0487	0,0081	0,0321
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0087	-	-	-	0,0087	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0108	0,0134	-	-	0,0198	0,0424
10 a 14 años	0,0177	0,0181	0,1236	-	0,1207	0,2290	0,3431	0,8945	-	-	2,0000	0,3781	0,0436	0,0504	0,3921	-	0,1327	0,1200
15 a 19 años	0,0195	0,0281	0,0313	0,0562	0,1696	0,5165	0,1644	0,3163	1,1548	2,0001	0,2979	0,2605	0,0336	0,0413	0,0727	0,3049	0,1292	0,1602
20 a 24 años	0,0334	0,1137	0,0654	0,0417	0,2772	1,1548	0,1166	0,2463	0,5001	2,0001	0,1541	0,3051	0,0380	0,0525	0,0776	0,1474	0,1066	0,1870
25 a 29 años	0,0681	0,2375	0,1562	0,0813	0,4363	1,4142	0,1173	0,2562	0,5548	1,4142	0,1568	0,2748	0,0469	0,0671	0,1071	0,1383	0,1172	0,2192
30 a 39 años	0,1071	0,2480	0,2580	0,1412	0,4347	1,4142	0,0899	0,1596	0,2948	0,5000	0,1451	0,2156	0,0380	0,0525	0,0900	0,1124	0,1114	0,1475
40 a 49 años	0,1655	0,2196	0,3989	0,3849	0,6666	1,4143	0,0841	0,1248	0,2085	0,2251	0,2165	0,2747	0,0412	0,0550	0,1031	0,1198	0,1459	0,1440
50 a 59 años	0,3592	0,5774	2,0001	0,5547	0,8943	-	0,0606	0,0889	0,1568	0,1123	0,3650	0,2310	0,0451	0,0597	0,1170	0,1232	0,2007	0,1459
60 ó más años	0,1377	0,1756	0,2763	0,3998	1,4142	1,4142	0,0239	0,0339	0,0615	0,0481	0,2404	0,0785	0,0345	0,0459	0,0966	0,1008	0,1498	0,0936
Mujeres	0,0116	0,0151	0,0241	0,0261	0,0936	0,1872	0,0238	0,0370	0,0583	0,0494	0,1376	0,0595	0,0048	0,0069	0,0142	0,0211	0,0084	0,0226
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0091	-	-	-	0,0091	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0111	0,0135	-	-	0,0205	0,0459
10 a 14 años	0,0177	0,0181	0,1084	-	0,1244	0,2320	0,3051	0,5548	-	-	1,1547	0,3850	0,0417	0,0474	0,3379	-	0,1235	0,1345
15 a 19 años	0,0187	0,0290	0,0284	0,0497	0,1751	0,5548	0,2374	0,4851	1,1547	-	0,5773	0,3204	0,0236	0,0288	0,0482	0,2039	0,0969	0,1663
20 a 24 años	0,0301	0,0964	0,0606	0,0373	0,3332	0,8945	0,2020	0,5001	0,5774	1,1546	0,3999	0,3087	0,0192	0,0251	0,0358	0,0841	0,0768	0,1431
25 a 29 años	0,0560	0,1820	0,1253	0,0673	0,4999	1,4143	0,2021	0,4589	0,6667	1,1548	0,4081	0,3051	0,0203	0,0270	0,0397	0,0638	0,0902	0,1424
30 a 39 años	0,0783	0,1834	0,1797	0,1003	0,6324	1,4142	0,1361	0,2500	0,4083	0,3714	0,3379	0,2499	0,0147	0,0193	0,0322	0,0386	0,0769	0,0941
40 a 49 años	0,1319	0,1991	0,2982	0,2295	1,1547	0,8945	0,1025	0,1858	0,2133	0,1899	0,5163	0,2800	0,0156	0,0196	0,0360	0,0438	0,0985	0,0788
50 a 59 años	0,2280	0,3381	0,4851	0,4366	-	1,0001	0,0569	0,1047	0,1267	0,0850	0,5772	0,2697	0,0170	0,0213	0,0400	0,0529	0,1270	0,0635
60 ó más años	0,1132	0,1458	0,2305	0,3282	1,1546	0,6666	0,0284	0,0415	0,0710	0,0652	0,2167	0,0703	0,0136	0,0167	0,0369	0,0602	0,0871	0,0360

Coeficientes de Variación del estimador del Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Razón (va: Nivel Educativo Alcanzado)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado						BTPPV					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0026	0,0038	0,0064	0,0066	0,0064	0,0141	0,0042	0,0062	0,0086	0,0080	0,0369	0,0283	0,0186	0,0275	0,0392	0,0361	0,1151	0,1204	0,0289	0,0420	0,0530	0,0681	0,1710	0,2117
0 a 4 años	0,0075	-	-	-	0,0075	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0085	0,0111	-	-	0,0148	0,0298	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0088	0,0090	0,0758	-	0,0620	0,0730	0,1072	0,1160	0,4472	-	0,5497	0,4709	0,4170	0,4263	-	-	2,0000	-	0,1996	0,2192	1,0000	-	1,4906	0,5766
15 a 19 años	0,0091	0,0124	0,0152	0,0324	0,0599	0,0821	0,0209	0,0270	0,0368	0,0884	0,2130	0,1834	0,0761	0,0931	0,1493	0,3809	0,4968	0,6664	0,0467	0,0604	0,0774	0,4263	0,4810	0,3423
20 a 24 años	0,0087	0,0137	0,0156	0,0175	0,0481	0,0760	0,0120	0,0184	0,0204	0,0266	0,1122	0,1270	0,0468	0,0659	0,0868	0,1083	0,3244	0,5161	0,0491	0,0753	0,0880	0,1049	0,2825	0,4164
25 a 29 años	0,0091	0,0142	0,0178	0,0170	0,0524	0,0752	0,0111	0,0177	0,0213	0,0199	0,1046	0,1176	0,0470	0,0754	0,0953	0,0814	0,2828	0,3920	0,0729	0,1274	0,1604	0,1132	0,3651	0,7064
30 a 39 años	0,0065	0,0096	0,0138	0,0125	0,0426	0,0472	0,0077	0,0116	0,0160	0,0139	0,0703	0,0663	0,0347	0,0555	0,0771	0,0579	0,1952	0,2496	0,0977	0,1708	0,2249	0,1559	0,3921	0,5772
40 a 49 años	0,0073	0,0103	0,0165	0,0148	0,0515	0,0413	0,0087	0,0126	0,0195	0,0163	0,0738	0,0552	0,0415	0,0607	0,0922	0,0778	0,2800	0,2599	0,7071	-	-	-	0,7071	-
50 a 59 años	0,0093	0,0130	0,0218	0,0190	0,0692	0,0392	0,0118	0,0171	0,0281	0,0221	0,0995	0,0580	0,0573	0,0804	0,1297	0,1163	0,3481	0,2669	0,8944	-	-	-	0,8944	-
60 ó más años	0,0094	0,0131	0,0237	0,0236	0,0610	0,0252	0,0185	0,0267	0,0450	0,0365	0,1399	0,0655	0,1033	0,1450	0,2277	0,2354	0,7071	0,2944	-	-	-	-	-	-
Hombres	0,0038	0,0055	0,0095	0,0097	0,0089	0,0217	0,0055	0,0078	0,0114	0,0112	0,0479	0,0369	0,0230	0,0315	0,0498	0,0516	0,1461	0,1322	0,0369	0,0488	0,0715	0,1065	0,2559	0,2458
0 a 4 años	0,0105	-	-	-	0,0105	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0119	0,0156	-	-	0,0205	0,0403	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0125	0,0128	0,1150	-	0,0883	0,0983	0,1321	0,1407	0,7070	-	0,6927	0,6022	0,4471	0,4471	-	-	-	-	0,2272	0,2554	1,1547	-	1,4906	0,5766
15 a 19 años	0,0131	0,0172	0,0230	0,0495	0,0904	0,1058	0,0268	0,0327	0,0527	0,1347	0,2885	0,2098	0,0922	0,1060	0,2129	0,7071	0,6235	0,7068	0,0575	0,0700	0,1069	0,6324	0,7070	0,3913
20 a 24 años	0,0126	0,0191	0,0230	0,0272	0,0706	0,1044	0,0158	0,0225	0,0275	0,0409	0,1461	0,1484	0,0595	0,0766	0,1122	0,1959	0,4713	0,6661	0,0634	0,0874	0,1156	0,1730	0,4168	0,5155
25 a 29 años	0,0133	0,0200	0,0261	0,0266	0,0747	0,1042	0,0148	0,0219	0,0283	0,0299	0,1398	0,1409	0,0624	0,0893	0,1232	0,1356	0,3999	0,4469	0,0971	0,1497	0,2117	0,1717	0,5546	0,7064
30 a 39 años	0,0095	0,0137	0,0198	0,0188	0,0599	0,0667	0,0101	0,0146	0,0209	0,0198	0,0894	0,0840	0,0455	0,0644	0,0980	0,0960	0,2458	0,2743	0,1312	0,1979	0,3161	0,2337	0,5773	0,8943
40 a 49 años	0,0108	0,0152	0,0246	0,0217	0,0748	0,0628	0,0116	0,0163	0,0262	0,0227	0,1009	0,0752	0,0500	0,0691	0,1155	0,1041	0,3286	0,2716	1,1547	-	-	-	1,1547	-
50 a 59 años	0,0137	0,0195	0,0333	0,0262	0,0981	0,0646	0,0152	0,0218	0,0366	0,0284	0,1247	0,0785	0,0627	0,0883	0,1545	0,1219	0,4169	0,3045	2,0000	-	-	-	2,0000	-
60 ó más años	0,0147	0,0209	0,0366	0,0301	0,0996	0,0485	0,0220	0,0319	0,0532	0,0426	0,1653	0,0870	0,1033	0,1561	0,2558	0,1997	0,7071	0,3118	-	-	-	-	-	-
Mujeres	0,0036	0,0053	0,0086	0,0089	0,0091	0,0185	0,0065	0,0102	0,0130	0,0114	0,0580	0,0439	0,0317	0,0563	0,0634	0,0504	0,1868	0,2917	0,0467	0,0826	0,0789	0,0886	0,2298	0,4168
0 a 4 años	0,0108	-	-	-	0,0108	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0122	0,0157	-	-	0,0212	0,0442	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0125	0,0128	0,1007	-	0,0870	0,1092	0,1832	0,2051	0,5773	-	0,8944	0,7555	1,1547	1,4142	-	-	2,0000	-	0,4169	0,4263	2,0000	-	-	-
15 a 19 años	0,0126	0,0179	0,0201	0,0428	0,0799	0,1303	0,0333	0,0480	0,0514	0,1171	0,3157	0,3773	0,1344	0,1948	0,2094	0,4351	0,8164	1,9998	0,0798	0,1193	0,1121	0,5773	0,6388	0,7065
20 a 24 años	0,0119	0,0195	0,0211	0,0229	0,0658	0,1108	0,0185	0,0320	0,0303	0,0349	0,1751	0,2452	0,0755	0,1294	0,1370	0,1258	0,4471	0,8163	0,0777	0,1488	0,1356	0,1319	0,3838	0,7066
25 a 29 años	0,0125	0,0202	0,0243	0,0222	0,0736	0,1086	0,0169	0,0304	0,0324	0,0266	0,1576	0,2134	0,0711	0,1404	0,1504	0,1001	0,3998	0,8163	0,1105	0,2423	0,2459	0,1506	0,4849	-
30 a 39 años	0,0091	0,0135	0,0193	0,0167	0,0606	0,0668	0,0119	0,0192	0,0248	0,0197	0,1139	0,1078	0,0535	0,1091	0,1248	0,0714	0,3193	0,6029	0,1465	0,3375	0,3201	0,2093	0,5344	0,7557
40 a 49 años	0,0099	0,0140	0,0222	0,0201	0,0710	0,0548	0,0131	0,0196	0,0292	0,0234	0,1082	0,0814	0,0741	0,1273	0,1531	0,1166	0,5344	0,8943	0,8943	-	-	-	0,8943	-
50 a 59 años	0,0126	0,0174	0,0287	0,0276	0,0976	0,0493	0,0188	0,0275	0,0437	0,0351	0,1652	0,0861	0,1314	0,1942	0,2389	0,2525	0,6324	0,5545	0,9999	-	-	-	0,9999	-
60 ó más años	0,0123	0,0169	0,0310	0,0378	0,0773	0,0295	0,0339	0,0490	0,0842	0,0712	0,2624	0,0997	0,3560	0,3912	0,4999	0,9992	-	0,8944	-	-	-	-	-	-

	Estudiando						Pensionado o Jubilado						Otra					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0068	0,0082	0,0165	0,0188	0,0639	0,1355	0,0156	0,0239	0,0398	0,0326	0,0644	0,0426	0,0041	0,0064	0,0133	0,0194	0,0066	0,0179
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0075	-	-	-	0,0075	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0085	0,0111	-	-	0,0148	0,0298
10 a 14 años	0,0093	0,0094	0,0808	-	0,0867	0,1623	0,2278	0,4714	-	-	1,0000	0,2694	0,0304	0,0350	0,2559	-	0,0903	0,0883
15 a 19 años	0,0123	0,0182	0,0189	0,0358	0,1220	0,3777	0,1350	0,2648	0,8165	2,0000	0,2647	0,2017	0,0197	0,0244	0,0404	0,1695	0,0773	0,1145
20 a 24 años	0,0213	0,0731	0,0435	0,0260	0,2131	0,7070	0,1009	0,2208	0,3779	1,0000	0,1437	0,2166	0,0176	0,0237	0,0330	0,0731	0,0620	0,1128
25 a 29 años	0,0427	0,1442	0,0973	0,0510	0,3287	1,0000	0,1013	0,2235	0,4263	0,8944	0,1463	0,2038	0,0191	0,0260	0,0378	0,0581	0,0713	0,1187
30 a 39 años	0,0630	0,1473	0,1473	0,0815	0,3585	0,9999	0,0749	0,1344	0,2390	0,2981	0,1331	0,1628	0,0139	0,0184	0,0304	0,0365	0,0630	0,0782
40 a 49 años	0,1031	0,1473	0,2388	0,1969	0,5773	0,7558	0,0649	0,1034	0,1489	0,1449	0,1996	0,1958	0,0149	0,0192	0,0340	0,0410	0,0814	0,0680
50 a 59 años	0,1924	0,2917	0,4714	0,3429	0,8944	0,9999	0,0412	0,0674	0,0982	0,0670	0,3084	0,1750	0,0167	0,0218	0,0385	0,0485	0,1074	0,0572
60 ó más años	0,0875	0,1124	0,1771	0,2537	0,8944	0,6028	0,0188	0,0275	0,0471	0,0391	0,1611	0,0518	0,0138	0,0184	0,0356	0,0519	0,0755	0,0323
Hombres	0,0098	0,0116	0,0249	0,0288	0,0875	0,1972	0,0205	0,0308	0,0542	0,0435	0,0729	0,0613	0,0069	0,0119	0,0344	0,0487	0,0092	0,0311
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0105	-	-	-	0,0105	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0119	0,0156	-	-	0,0205	0,0403
10 a 14 años	0,0131	0,0133	0,1228	-	0,1208	0,2280	0,3427	0,8944	-	-	2,0000	0,3776	0,0440	0,0511	0,3920	-	0,1324	0,1182
15 a 19 años	0,0178	0,0253	0,0285	0,0544	0,1697	0,5160	0,1642	0,3161	1,1547	2,0000	0,2978	0,2598	0,0341	0,0421	0,0728	0,3048	0,1290	0,1586
20 a 24 años	0,0319	0,1132	0,0642	0,0393	0,2772	1,1546	0,1165	0,2460	0,4999	2,0000	0,1540	0,3045	0,0382	0,0530	0,0777	0,1473	0,1064	0,1858
25 a 29 años	0,0674	0,2373	0,1557	0,0803	0,4363	1,4142	0,1171	0,2559	0,5546	1,4142	0,1567	0,2743	0,0471	0,0676	0,1072	0,1384	0,1171	0,2188
30 a 39 años	0,1069	0,2479	0,2579	0,1408	0,4346	1,4142	0,0898	0,1594	0,2948	0,4999	0,1448	0,2150	0,0381	0,0527	0,0901	0,1123	0,1111	0,1466
40 a 49 años	0,1654	0,2193	0,3988	0,3848	0,6666	1,4142	0,0839	0,1245	0,2083	0,2248	0,2163	0,2743	0,0413	0,0554	0,1031	0,1198	0,1457	0,1430
50 a 59 años	0,3592	0,5773	2,0000	0,5545	0,8944	-	0,0602	0,0882	0,1564	0,1113	0,3649	0,2302	0,0454	0,0604	0,1172	0,1233	0,2007	0,1450
60 ó más años	0,1378	0,1758	0,2764	0,3998	1,4141	1,4142	0,0247	0,0359	0,0624	0,0487	0,2406	0,0775	0,0350	0,0471	0,0971	0,1011	0,1499	0,0927
Mujeres	0,0094	0,0116	0,0220	0,0248	0,0936	0,1866	0,0240	0,0379	0,0586	0,0492	0,1376	0,0591	0,0051	0,0075	0,0144	0,0211	0,0093	0,0219
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0108	-	-	-	0,0108	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0122	0,0157	-	-	0,0212	0,0442
10 a 14 años	0,0131	0,0133	0,1074	-	0,1245	0,2310	0,3048	0,5547	-	-	1,1546	0,3846	0,0421	0,0481	0,3379	-	0,1232	0,1328
15 a 19 años	0,0169	0,0262	0,0253	0,0476	0,1752	0,5545	0,2372	0,4850	1,1547	-	0,5773	0,3200	0,0242	0,0299	0,0485	0,2039	0,0965	0,1652
20 a 24 años	0,0285	0,0957	0,0593	0,0347	0,3333	0,8943	0,2019	0,5000	0,5773	1,1547	0,3999	0,3082	0,0198	0,0265	0,0364	0,0842	0,0764	0,1420
25 a 29 años	0,0552	0,1816	0,1246	0,0661	0,5000	1,4142	0,2018	0,4588	0,6666	1,1547	0,4081	0,3045	0,0209	0,0282	0,0404	0,0640	0,0899	0,1413
30 a 39 años	0,0781	0,1832	0,1794	0,0999	0,6324	1,4139	0,1359	0,2499	0,4082	0,3713	0,3379	0,2494	0,0149	0,0196	0,0323	0,0386	0,0764	0,0924
40 a 49 años	0,1318	0,1989	0,2980	0,2292	1,1547	0,8943	0,1024	0,1856	0,2130	0,1896	0,5163	0,2796	0,0159	0,0205	0,0360	0,0436	0,0982	0,0773
50 a 59 años	0,2279	0,3380	0,4850	0,4363	-	0,9999	0,0564	0,1043	0,1262	0,0838	0,5773	0,2693	0,0179	0,0233	0,0407	0,0528	0,1271	0,0622
60 ó más años	0,1133	0,1460	0,2306	0,3282	1,1547	0,6663	0,0289	0,0429	0,0717	0,0654	0,2169	0,0697	0,0150	0,0200	0,0382	0,0605	0,0874	0,0345

Coeficientes de Variación del estimador del Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Regresión Lineal Simple (va: Sexo)

	TOTAL						Ocupado					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0027	0,0038	0,0065	0,0068	0,0071	0,0145	0,0043	0,0063	0,0088	0,0083	0,0370	0,0287
0 a 4 años	0,0088	-	-	-	0,0088	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0086	0,0110	-	-	0,0153	0,0317	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0088	0,0091	0,0759	-	0,0622	0,0739	0,1072	0,1161	0,4472	-	0,5497	0,4713
15 a 19 años	0,0091	0,0125	0,0154	0,0328	0,0601	0,0827	0,0210	0,0271	0,0371	0,0885	0,2131	0,1846
20 a 24 años	0,0088	0,0137	0,0159	0,0180	0,0484	0,0766	0,0122	0,0185	0,0209	0,0271	0,1125	0,1283
25 a 29 años	0,0092	0,0143	0,0181	0,0176	0,0527	0,0757	0,0114	0,0178	0,0218	0,0207	0,1048	0,1185
30 a 39 años	0,0068	0,0099	0,0142	0,0132	0,0428	0,0480	0,0080	0,0120	0,0165	0,0148	0,0706	0,0676
40 a 49 años	0,0075	0,0105	0,0170	0,0154	0,0517	0,0421	0,0090	0,0128	0,0201	0,0171	0,0740	0,0565
50 a 59 años	0,0094	0,0130	0,0221	0,0198	0,0693	0,0400	0,0121	0,0172	0,0286	0,0232	0,0996	0,0591
60 ó más años	0,0095	0,0130	0,0238	0,0239	0,0612	0,0263	0,0186	0,0267	0,0453	0,0373	0,1400	0,0665
Hombres	0,0039	0,0055	0,0097	0,0101	0,0100	0,0223	0,0056	0,0079	0,0117	0,0117	0,0480	0,0377
0 a 4 años	0,0124	-	-	-	0,0124	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0120	0,0155	-	-	0,0213	0,0432	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0125	0,0128	0,1153	-	0,0886	0,0995	0,1322	0,1408	0,7071	-	0,6927	0,6028
15 a 19 años	0,0132	0,0173	0,0234	0,0501	0,0906	0,1067	0,0270	0,0328	0,0531	0,1350	0,2886	0,2114
20 a 24 años	0,0128	0,0192	0,0236	0,0279	0,0708	0,1054	0,0161	0,0226	0,0284	0,0417	0,1465	0,1502
25 a 29 años	0,0135	0,0200	0,0268	0,0274	0,0749	0,1049	0,0151	0,0219	0,0291	0,0311	0,1401	0,1423
30 a 39 años	0,0098	0,0140	0,0205	0,0200	0,0602	0,0678	0,0105	0,0151	0,0217	0,0211	0,0898	0,0861
40 a 49 años	0,0111	0,0155	0,0253	0,0227	0,0749	0,0641	0,0120	0,0168	0,0271	0,0239	0,1012	0,0771
50 a 59 años	0,0140	0,0196	0,0339	0,0275	0,0982	0,0657	0,0156	0,0219	0,0374	0,0301	0,1249	0,0802
60 ó más años	0,0147	0,0209	0,0369	0,0307	0,0997	0,0493	0,0222	0,0318	0,0536	0,0436	0,1654	0,0885
Mujeres	0,0037	0,0053	0,0088	0,0092	0,0101	0,0192	0,0066	0,0104	0,0133	0,0119	0,0581	0,0444
0 a 4 años	0,0126	-	-	-	0,0126	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0123	0,0156	-	-	0,0220	0,0467	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0125	0,0128	0,1009	-	0,0873	0,1104	0,1832	0,2050	0,5773	-	0,8944	0,7559
15 a 19 años	0,0127	0,0180	0,0205	0,0435	0,0803	0,1310	0,0334	0,0481	0,0517	0,1172	0,3158	0,3779
20 a 24 años	0,0120	0,0196	0,0215	0,0235	0,0664	0,1116	0,0187	0,0320	0,0309	0,0357	0,1753	0,2465
25 a 29 años	0,0127	0,0203	0,0246	0,0230	0,0741	0,1093	0,0173	0,0305	0,0330	0,0278	0,1579	0,2143
30 a 39 años	0,0093	0,0139	0,0197	0,0175	0,0610	0,0679	0,0123	0,0197	0,0255	0,0208	0,1142	0,1094
40 a 49 años	0,0102	0,0143	0,0228	0,0209	0,0713	0,0559	0,0135	0,0199	0,0300	0,0245	0,1084	0,0829
50 a 59 años	0,0127	0,0175	0,0291	0,0284	0,0977	0,0505	0,0191	0,0276	0,0442	0,0364	0,1654	0,0872
60 ó más años	0,0124	0,0166	0,0312	0,0382	0,0774	0,0311	0,0340	0,0489	0,0845	0,0718	0,2625	0,1006

	Desocupado						BTPPV					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0186	0,0275	0,0392	0,0362	0,1152	0,1206	0,0290	0,0420	0,0531	0,0683	0,1711	0,2120
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,4170	0,4263	-	-	2,0000	-	0,1996	0,2192	1,0000	-	1,4907	0,5770
15 a 19 años	0,0761	0,0931	0,1494	0,3809	0,4969	0,6666	0,0467	0,0605	0,0775	0,4264	0,4810	0,3429
20 a 24 años	0,0468	0,0659	0,0870	0,1084	0,3244	0,5163	0,0492	0,0754	0,0881	0,1051	0,2826	0,4170
25 a 29 años	0,0470	0,0754	0,0954	0,0816	0,2828	0,3922	0,0730	0,1274	0,1605	0,1135	0,3651	0,7069
30 a 39 años	0,0348	0,0556	0,0772	0,0581	0,1953	0,2499	0,0978	0,1708	0,2250	0,1561	0,3922	0,5773
40 a 49 años	0,0416	0,0608	0,0923	0,0780	0,2800	0,2603	0,7071	-	-	-	0,7071	-
50 a 59 años	0,0573	0,0804	0,1298	0,1166	0,3481	0,2672	0,8944	-	-	-	0,8944	-
60 ó más años	0,1033	0,1450	0,2278	0,2356	0,7071	0,2948	-	-	-	-	-	-
Hombres	0,0230	0,0315	0,0499	0,0517	0,1462	0,1324	0,0369	0,0488	0,0717	0,1067	0,2559	0,2461
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,4472	0,4472	-	-	-	-	0,2272	0,2554	1,1547	-	1,4907	0,5770
15 a 19 años	0,0923	0,1060	0,2131	0,7071	0,6235	0,7070	0,0576	0,0701	0,1071	0,6324	0,7071	0,3921
20 a 24 años	0,0595	0,0767	0,1125	0,1960	0,4714	0,6664	0,0635	0,0875	0,1158	0,1733	0,4170	0,5163
25 a 29 años	0,0625	0,0894	0,1234	0,1359	0,4000	0,4471	0,0972	0,1497	0,2118	0,1720	0,5547	0,7069
30 a 39 años	0,0456	0,0645	0,0982	0,0963	0,2460	0,2747	0,1313	0,1979	0,3162	0,2339	0,5773	0,8944
40 a 49 años	0,0501	0,0692	0,1157	0,1044	0,3288	0,2721	1,1547	-	-	-	1,1547	-
50 a 59 años	0,0628	0,0884	0,1547	0,1223	0,4170	0,3049	2,0000	-	-	-	2,0000	-
60 ó más años	0,1034	0,1561	0,2559	0,1999	0,7071	0,3123	-	-	-	-	-	-
Mujeres	0,0317	0,0563	0,0635	0,0505	0,1869	0,2917	0,0467	0,0826	0,0790	0,0888	0,2298	0,4170
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	1,1547	1,4142	-	-	2,0000	-	0,4169	0,4263	2,0000	-	-	-
15 a 19 años	0,1344	0,1948	0,2095	0,4351	0,8165	1,9996	0,0799	0,1194	0,1122	0,5773	0,6388	0,7071
20 a 24 años	0,0755	0,1294	0,1371	0,1259	0,4472	0,8165	0,0778	0,1488	0,1358	0,1323	0,3839	0,7071
25 a 29 años	0,0712	0,1405	0,1505	0,1004	0,4000	0,8165	0,1107	0,2423	0,2460	0,1510	0,4850	-
30 a 39 años	0,0536	0,1092	0,1249	0,0716	0,3194	0,6030	0,1466	0,3375	0,3202	0,2095	0,5345	0,7559
40 a 49 años	0,0743	0,1274	0,1533	0,1169	0,5345	0,8944	0,8944	-	-	-	0,8944	-
50 a 59 años	0,1315	0,1942	0,2390	0,2531	0,6324	0,5547	1,0000	-	-	-	1,0000	-
60 ó más años	0,3561	0,3912	0,5000	0,9996	-	0,8944	-	-	-	-	-	-

	Estudiando						Pensionado o Jubilado						Otra					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0069	0,0082	0,0168	0,0192	0,0640	0,1358	0,0157	0,0239	0,0399	0,0330	0,0646	0,0431	0,0043	0,0064	0,0135	0,0197	0,0074	0,0188
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0088	-	-	-	0,0088	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0086	0,0110	-	-	0,0153	0,0317
10 a 14 años	0,0093	0,0094	0,0811	-	0,0868	0,1628	0,2279	0,4714	-	-	1,0000	0,2696	0,0305	0,0350	0,2560	-	0,0907	0,0897
15 a 19 años	0,0124	0,0183	0,0194	0,0364	0,1221	0,3779	0,1351	0,2648	0,8165	2,0000	0,2648	0,2019	0,0198	0,0245	0,0407	0,1696	0,0777	0,1156
20 a 24 años	0,0218	0,0731	0,0439	0,0269	0,2132	0,7071	0,1011	0,2208	0,3779	1,0000	0,1440	0,2169	0,0177	0,0238	0,0334	0,0733	0,0626	0,1138
25 a 29 años	0,0430	0,1442	0,0975	0,0515	0,3288	1,0000	0,1015	0,2235	0,4264	0,8944	0,1467	0,2041	0,0192	0,0262	0,0382	0,0584	0,0718	0,1196
30 a 39 años	0,0632	0,1474	0,1474	0,0817	0,3585	1,0000	0,0750	0,1344	0,2390	0,2981	0,1335	0,1632	0,0142	0,0189	0,0309	0,0370	0,0635	0,0794
40 a 49 años	0,1031	0,1474	0,2389	0,1970	0,5773	0,7559	0,0649	0,1034	0,1490	0,1450	0,1998	0,1961	0,0151	0,0196	0,0347	0,0417	0,0818	0,0694
50 a 59 años	0,1924	0,2917	0,4714	0,3430	0,8944	1,0000	0,0413	0,0674	0,0983	0,0674	0,3085	0,1754	0,0168	0,0218	0,0390	0,0495	0,1076	0,0587
60 ó más años	0,0875	0,1124	0,1772	0,2538	0,8944	0,6029	0,0189	0,0274	0,0472	0,0396	0,1611	0,0528	0,0139	0,0181	0,0359	0,0525	0,0757	0,0344
Hombres	0,0099	0,0117	0,0254	0,0294	0,0876	0,1976	0,0206	0,0308	0,0544	0,0442	0,0731	0,0621	0,0074	0,0119	0,0345	0,0488	0,0104	0,0325
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0124	-	-	-	0,0124	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0120	0,0155	-	-	0,0213	0,0432
10 a 14 años	0,0132	0,0133	0,1231	-	0,1210	0,2287	0,3429	0,8944	-	-	2,0000	0,3779	0,0441	0,0512	0,3922	-	0,1330	0,1202
15 a 19 años	0,0180	0,0254	0,0292	0,0552	0,1698	0,5163	0,1643	0,3161	1,1547	2,0000	0,2980	0,2603	0,0342	0,0423	0,0732	0,3049	0,1295	0,1605
20 a 24 años	0,0327	0,1132	0,0647	0,0406	0,2773	1,1547	0,1167	0,2461	0,5000	2,0000	0,1544	0,3049	0,0383	0,0531	0,0780	0,1476	0,1069	0,1871
25 a 29 años	0,0679	0,2373	0,1559	0,0810	0,4364	1,4142	0,1173	0,2560	0,5547	1,4142	0,1571	0,2746	0,0471	0,0677	0,1074	0,1387	0,1176	0,2194
30 a 39 años	0,1071	0,2479	0,2580	0,1412	0,4347	1,4142	0,0899	0,1595	0,2948	0,5000	0,1452	0,2155	0,0382	0,0529	0,0902	0,1126	0,1117	0,1476
40 a 49 años	0,1654	0,2194	0,3989	0,3849	0,6666	1,4142	0,0840	0,1246	0,2084	0,2249	0,2166	0,2746	0,0414	0,0555	0,1034	0,1200	0,1460	0,1442
50 a 59 años	0,3592	0,5773	2,0000	0,5547	0,8944	-	0,0603	0,0883	0,1565	0,1118	0,3650	0,2308	0,0455	0,0605	0,1175	0,1237	0,2009	0,1461
60 ó más años	0,1378	0,1758	0,2766	0,4000	1,4142	1,4142	0,0248	0,0358	0,0627	0,0495	0,2407	0,0791	0,0351	0,0471	0,0973	0,1015	0,1502	0,0942
Mujeres	0,0095	0,0116	0,0225	0,0254	0,0937	0,1870	0,0240	0,0378	0,0587	0,0497	0,1377	0,0598	0,0053	0,0076	0,0146	0,0215	0,0104	0,0230
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0126	-	-	-	0,0126	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0123	0,0156	-	-	0,0220	0,0467
10 a 14 años	0,0131	0,0133	0,1077	-	0,1246	0,2317	0,3049	0,5547	-	-	1,1547	0,3848	0,0422	0,0481	0,3379	-	0,1238	0,1348
15 a 19 años	0,0172	0,0263	0,0260	0,0485	0,1753	0,5547	0,2373	0,4850	1,1547	-	0,5773	0,3202	0,0243	0,0301	0,0489	0,2040	0,0972	0,1666
20 a 24 años	0,0292	0,0957	0,0597	0,0360	0,3333	0,8944	0,2020	0,5000	0,5773	1,1547	0,3999	0,3085	0,0200	0,0266	0,0369	0,0845	0,0772	0,1433
25 a 29 años	0,0556	0,1817	0,1248	0,0667	0,5000	1,4142	0,2020	0,4588	0,6666	1,1547	0,4082	0,3049	0,0211	0,0284	0,0408	0,0644	0,0907	0,1427
30 a 39 años	0,0782	0,1832	0,1795	0,1002	0,6324	1,4142	0,1360	0,2499	0,4082	0,3714	0,3380	0,2499	0,0153	0,0202	0,0328	0,0392	0,0772	0,0943
40 a 49 años	0,1318	0,1989	0,2981	0,2294	1,1547	0,8944	0,1024	0,1856	0,2131	0,1897	0,5164	0,2800	0,0163	0,0209	0,0369	0,0445	0,0988	0,0791
50 a 59 años	0,2279	0,3380	0,4850	0,4364	-	1,0000	0,0567	0,1042	0,1264	0,0845	0,5773	0,2696	0,0181	0,0233	0,0413	0,0540	0,1274	0,0641
60 ó más años	0,1133	0,1460	0,2307	0,3283	1,1547	0,6665	0,0290	0,0427	0,0718	0,0661	0,2169	0,0708	0,0151	0,0196	0,0386	0,0613	0,0876	0,0369

Coeficientes de Variación del estimador del Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - de Regresión Lineal Simple (va: Grupos de Edad)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado						BTPPV					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0025	0,0037	0,0063	0,0066	0,0058	0,0144	0,0041	0,0058	0,0085	0,0080	0,0369	0,0286	0,0186	0,0274	0,0391	0,0362	0,1151	0,1206	0,0290	0,0421	0,0531	0,0683	0,1711	0,2120
0 a 4 años	0,0063	-	-	-	0,0063	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0077	0,0095	-	-	0,0142	0,0311	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0094	0,0097	0,0760	-	0,0620	0,0738	0,1071	0,1159	0,4472	-	0,5497	0,4713	0,4169	0,4263	-	-	2,0000	-	0,1996	0,2193	1,0000	-	1,4907	0,5773
15 a 19 años	0,0091	0,0124	0,0155	0,0329	0,0600	0,0826	0,0205	0,0262	0,0365	0,0883	0,2130	0,1844	0,0759	0,0928	0,1493	0,3809	0,4968	0,6667	0,0469	0,0607	0,0776	0,4264	0,4810	0,3430
20 a 24 años	0,0085	0,0130	0,0154	0,0178	0,0483	0,0765	0,0116	0,0172	0,0200	0,0265	0,1123	0,1281	0,0467	0,0656	0,0868	0,1084	0,3243	0,5164	0,0492	0,0755	0,0882	0,1052	0,2825	0,4170
25 a 29 años	0,0088	0,0134	0,0174	0,0169	0,0525	0,0756	0,0107	0,0165	0,0208	0,0196	0,1046	0,1183	0,0469	0,0751	0,0952	0,0817	0,2828	0,3922	0,0730	0,1274	0,1605	0,1135	0,3650	0,7071
30 a 39 años	0,0064	0,0093	0,0137	0,0126	0,0427	0,0479	0,0075	0,0111	0,0159	0,0140	0,0704	0,0675	0,0347	0,0554	0,0771	0,0581	0,1953	0,2500	0,0978	0,1708	0,2250	0,1561	0,3922	0,5773
40 a 49 años	0,0071	0,0098	0,0165	0,0148	0,0516	0,0420	0,0084	0,0118	0,0194	0,0163	0,0738	0,0563	0,0415	0,0605	0,0922	0,0780	0,2799	0,2603	0,7071	-	-	-	0,7071	-
50 a 59 años	0,0089	0,0121	0,0215	0,0190	0,0691	0,0398	0,0114	0,0158	0,0277	0,0220	0,0995	0,0587	0,0572	0,0800	0,1295	0,1166	0,3480	0,2672	0,8944	-	-	-	0,8944	-
60 ó más años	0,0090	0,0119	0,0232	0,0234	0,0609	0,0259	0,0181	0,0257	0,0446	0,0364	0,1398	0,0662	0,1032	0,1448	0,2277	0,2353	0,7071	0,2947	-	-	-	-	-	-
Hombres	0,0037	0,0053	0,0094	0,0097	0,0080	0,0221	0,0052	0,0072	0,0112	0,0111	0,0479	0,0375	0,0229	0,0314	0,0497	0,0517	0,1462	0,1324	0,0370	0,0490	0,0717	0,1067	0,2559	0,2462
0 a 4 años	0,0087	-	-	-	0,0087	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0108	0,0134	-	-	0,0198	0,0423	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0133	0,0137	0,1153	-	0,0884	0,0994	0,1319	0,1405	0,7071	-	0,6927	0,6028	0,4471	0,4471	-	-	-	-	0,2273	0,2555	1,1547	-	1,4907	0,5773
15 a 19 años	0,0131	0,0172	0,0235	0,0502	0,0904	0,1066	0,0261	0,0314	0,0524	0,1347	0,2884	0,2112	0,0919	0,1056	0,2129	0,7071	0,6235	0,7071	0,0578	0,0704	0,1072	0,6324	0,7070	0,3922
20 a 24 años	0,0123	0,0180	0,0227	0,0277	0,0707	0,1053	0,0151	0,0206	0,0270	0,0409	0,1462	0,1499	0,0593	0,0762	0,1121	0,1960	0,4713	0,6666	0,0636	0,0876	0,1159	0,1733	0,4169	0,5164
25 a 29 años	0,0127	0,0184	0,0255	0,0264	0,0747	0,1047	0,0140	0,0198	0,0275	0,0296	0,1398	0,1420	0,0623	0,0889	0,1231	0,1359	0,3999	0,4472	0,0972	0,1498	0,2119	0,1720	0,5546	0,7071
30 a 39 años	0,0092	0,0129	0,0196	0,0189	0,0600	0,0677	0,0098	0,0136	0,0206	0,0199	0,0896	0,0858	0,0455	0,0643	0,0980	0,0963	0,2459	0,2747	0,1313	0,1980	0,3162	0,2339	0,5773	0,8944
40 a 49 años	0,0104	0,0142	0,0244	0,0216	0,0748	0,0639	0,0111	0,0151	0,0260	0,0226	0,1010	0,0768	0,0500	0,0688	0,1154	0,1044	0,3286	0,2721	1,1547	-	-	-	1,1547	-
50 a 59 años	0,0132	0,0180	0,0329	0,0261	0,0980	0,0654	0,0145	0,0198	0,0361	0,0282	0,1246	0,0797	0,0626	0,0878	0,1542	0,1223	0,4169	0,3049	2,0000	-	-	-	2,0000	-
60 ó más años	0,0143	0,0200	0,0363	0,0299	0,0995	0,0490	0,0215	0,0304	0,0527	0,0423	0,1652	0,0881	0,1032	0,1558	0,2557	0,1996	0,7071	0,3122	-	-	-	-	-	-
Mujeres	0,0035	0,0051	0,0086	0,0090	0,0083	0,0189	0,0064	0,0099	0,0129	0,0114	0,0580	0,0443	0,0317	0,0562	0,0634	0,0505	0,1869	0,2917	0,0467	0,0827	0,0791	0,0888	0,2298	0,4170
0 a 4 años	0,0091	-	-	-	0,0091	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0110	0,0135	-	-	0,0205	0,0458	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0133	0,0137	0,1010	-	0,0871	0,1102	0,1831	0,2049	0,5773	-	0,8944	0,7558	1,1547	1,4142	-	-	2,0000	-	0,4170	0,4264	2,0000	-	-	-
15 a 19 años	0,0127	0,0179	0,0206	0,0436	0,0801	0,1309	0,0329	0,0473	0,0510	0,1170	0,3157	0,3778	0,1343	0,1947	0,2094	0,4351	0,8164	2,0000	0,0800	0,1196	0,1123	0,5773	0,6387	0,7071
20 a 24 años	0,0117	0,0188	0,0209	0,0233	0,0660	0,1115	0,0181	0,0310	0,0297	0,0349	0,1751	0,2463	0,0754	0,1292	0,1369	0,1259	0,4470	0,8165	0,0778	0,1489	0,1359	0,1323	0,3838	0,7071
25 a 29 años	0,0122	0,0194	0,0239	0,0220	0,0738	0,1092	0,0165	0,0293	0,0317	0,0263	0,1576	0,2141	0,0711	0,1403	0,1503	0,1004	0,3999	0,8165	0,1107	0,2424	0,2460	0,1510	0,4849	-
30 a 39 años	0,0090	0,0133	0,0192	0,0168	0,0608	0,0678	0,0118	0,0189	0,0248	0,0198	0,1140	0,1093	0,0535	0,1091	0,1247	0,0716	0,3194	0,6030	0,1466	0,3375	0,3202	0,2095	0,5345	0,7559
40 a 49 años	0,0098	0,0134	0,0223	0,0202	0,0711	0,0557	0,0129	0,0188	0,0292	0,0235	0,1082	0,0827	0,0742	0,1272	0,1531	0,1169	0,5345	0,8944	0,8944	-	-	-	0,8944	-
50 a 59 años	0,0121	0,0162	0,0284	0,0276	0,0975	0,0501	0,0183	0,0260	0,0433	0,0351	0,1652	0,0869	0,1315	0,1940	0,2388	0,2531	0,6323	0,5547	0,9999	-	-	-	0,9999	-
60 ó más años	0,0115	0,0148	0,0302	0,0377	0,0771	0,0304	0,0336	0,0481	0,0838	0,0710	0,2624	0,1002	0,3557	0,3911	0,4998	0,9981	-	0,8944	-	-	-	-	-	-

	Estudiando						Pensionado o Jubilado						Otra					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0072	0,0087	0,0170	0,0193	0,0639	0,1359	0,0153	0,0231	0,0395	0,0325	0,0645	0,0429	0,0038	0,0059	0,0131	0,0194	0,0058	0,0185
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0063	-	-	-	0,0063	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0077	0,0095	-	-	0,0142	0,0311
10 a 14 años	0,0100	0,0101	0,0811	-	0,0866	0,1628	0,2279	0,4714	-	-	1,0000	0,2697	0,0302	0,0345	0,2560	-	0,0905	0,0895
15 a 19 años	0,0126	0,0186	0,0196	0,0365	0,1219	0,3779	0,1351	0,2649	0,8165	2,0000	0,2647	0,2020	0,0193	0,0236	0,0402	0,1695	0,0775	0,1154
20 a 24 años	0,0218	0,0732	0,0439	0,0270	0,2131	0,7071	0,1010	0,2208	0,3779	1,0000	0,1438	0,2169	0,0171	0,0227	0,0326	0,0731	0,0623	0,1136
25 a 29 años	0,0430	0,1443	0,0975	0,0515	0,3287	1,0000	0,1014	0,2236	0,4264	0,8944	0,1465	0,2041	0,0187	0,0250	0,0372	0,0579	0,0715	0,1194
30 a 39 años	0,0632	0,1474	0,1474	0,0817	0,3585	1,0000	0,0750	0,1345	0,2390	0,2981	0,1333	0,1632	0,0138	0,0181	0,0303	0,0365	0,0633	0,0793
40 a 49 años	0,1031	0,1474	0,2389	0,1970	0,5773	0,7559	0,0649	0,1035	0,1490	0,1450	0,1997	0,1961	0,0146	0,0185	0,0340	0,0411	0,0816	0,0692
50 a 59 años	0,1924	0,2917	0,4714	0,3430	0,8943	1,0000	0,0413	0,0674	0,0983	0,0674	0,3085	0,1754	0,0159	0,0201	0,0379	0,0486	0,1073	0,0582
60 ó más años	0,0874	0,1122	0,1770	0,2538	0,8944	0,6030	0,0183	0,0263	0,0465	0,0387	0,1609	0,0524	0,0127	0,0158	0,0345	0,0517	0,0753	0,0335
Hombres	0,0103	0,0124	0,0256	0,0295	0,0874	0,1977	0,0201	0,0296	0,0536	0,0431	0,0730	0,0618	0,0064	0,0110	0,0344	0,0487	0,0081	0,0321
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0087	-	-	-	0,0087	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0108	0,0134	-	-	0,0198	0,0423
10 a 14 años	0,0141	0,0143	0,1232	-	0,1207	0,2287	0,3430	0,8944	-	-	2,0000	0,3779	0,0436	0,0504	0,3921	-	0,1327	0,1200
15 a 19 años	0,0182	0,0259	0,0295	0,0553	0,1696	0,5164	0,1643	0,3162	1,1547	2,0000	0,2979	0,2603	0,0336	0,0413	0,0727	0,3049	0,1292	0,1602
20 a 24 años	0,0327	0,1133	0,0648	0,0407	0,2772	1,1547	0,1166	0,2461	0,5000	2,0000	0,1541	0,3050	0,0380	0,0525	0,0776	0,1474	0,1066	0,1870
25 a 29 años	0,0679	0,2373	0,1559	0,0810	0,4363	1,4142	0,1172	0,2560	0,5547	1,4142	0,1568	0,2747	0,0469	0,0671	0,1071	0,1383	0,1172	0,2192
30 a 39 años	0,1071	0,2479	0,2580	0,1412	0,4346	1,4142	0,0899	0,1595	0,2948	0,5000	0,1451	0,2155	0,0380	0,0525	0,0900	0,1124	0,1114	0,1475
40 a 49 años	0,1654	0,2194	0,3989	0,3848	0,6666	1,4142	0,0840	0,1246	0,2084	0,2250	0,2165	0,2746	0,0412	0,0550	0,1031	0,1198	0,1459	0,1440
50 a 59 años	0,3592	0,5773	2,0000	0,5547	0,8943	-	0,0603	0,0883	0,1565	0,1118	0,3650	0,2309	0,0451	0,0597	0,1170	0,1232	0,2007	0,1459
60 ó más años	0,1377	0,1756	0,2763	0,3998	1,4142	1,4142	0,0239	0,0338	0,0615	0,0480	0,2403	0,0785	0,0345	0,0458	0,0966	0,1008	0,1498	0,0936
Mujeres	0,0099	0,0124	0,0227	0,0254	0,0936	0,1870	0,0237	0,0369	0,0582	0,0493	0,1376	0,0595	0,0048	0,0069	0,0142	0,0211	0,0084	0,0226
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0091	-	-	-	0,0091	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0110	0,0135	-	-	0,0205	0,0458
10 a 14 años	0,0141	0,0143	0,1078	-	0,1244	0,2318	0,3050	0,5547	-	-	1,1547	0,3849	0,0417	0,0474	0,3379	-	0,1235	0,1345
15 a 19 años	0,0174	0,0268	0,0263	0,0486	0,1751	0,5547	0,2373	0,4850	1,1547	-	0,5773	0,3202	0,0236	0,0288	0,0482	0,2039	0,0969	0,1663
20 a 24 años	0,0293	0,0958	0,0598	0,0361	0,3332	0,8944	0,2020	0,5000	0,5773	1,1546	0,3999	0,3086	0,0192	0,0251	0,0358	0,0841	0,0768	0,1431
25 a 29 años	0,0556	0,1817	0,1249	0,0667	0,4999	1,4142	0,2020	0,4588	0,6667	1,1547	0,4081	0,3050	0,0203	0,0270	0,0397	0,0638	0,0902	0,1424
30 a 39 años	0,0782	0,1833	0,1795	0,1002	0,6324	1,4142	0,1360	0,2499	0,4082	0,3713	0,3379	0,2499	0,0147	0,0193	0,0322	0,0386	0,0769	0,0941
40 a 49 años	0,1318	0,1989	0,2981	0,2294	1,1547	0,8944	0,1024	0,1856	0,2131	0,1898	0,5163	0,2800	0,0156	0,0196	0,0360	0,0438	0,0985	0,0788
50 a 59 años	0,2279	0,3380	0,4850	0,4364	-	1,0000	0,0567	0,1043	0,1264	0,0845	0,5772	0,2696	0,0170	0,0213	0,0400	0,0529	0,1270	0,0635
60 ó más años	0,1132	0,1458	0,2305	0,3282	1,1546	0,6666	0,0284	0,0415	0,0710	0,0652	0,2167	0,0703	0,0136	0,0167	0,0369	0,0602	0,0871	0,0359

Coeficientes de Variación del estimador del Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - de Regresión Lineal Simple (va: Nivel Educativo Alcanzado)

	TOTAL						Ocupado						Desocupado						BTPPV					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0026	0,0038	0,0064	0,0066	0,0064	0,0140	0,0042	0,0062	0,0086	0,0080	0,0369	0,0282	0,0186	0,0275	0,0392	0,0361	0,1151	0,1204	0,0289	0,0420	0,0530	0,0681	0,1710	0,2116
0 a 4 años	0,0075	-	-	-	0,0075	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0085	0,0111	-	-	0,0147	0,0298	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0088	0,0090	0,0757	-	0,0619	0,0729	0,1072	0,1160	0,4472	-	0,5497	0,4707	0,4170	0,4263	-	-	1,9999	-	0,1995	0,2192	1,0000	-	1,4906	0,5763
15 a 19 años	0,0090	0,0124	0,0152	0,0324	0,0599	0,0821	0,0209	0,0269	0,0368	0,0884	0,2130	0,1832	0,0761	0,0931	0,1493	0,3809	0,4968	0,6664	0,0467	0,0603	0,0774	0,4263	0,4810	0,3422
20 a 24 años	0,0087	0,0137	0,0156	0,0175	0,0481	0,0760	0,0120	0,0184	0,0204	0,0266	0,1122	0,1268	0,0468	0,0659	0,0868	0,1083	0,3244	0,5161	0,0491	0,0753	0,0880	0,1049	0,2825	0,4162
25 a 29 años	0,0091	0,0142	0,0178	0,0170	0,0524	0,0752	0,0111	0,0177	0,0213	0,0199	0,1046	0,1176	0,0470	0,0754	0,0953	0,0814	0,2827	0,3920	0,0729	0,1274	0,1604	0,1132	0,3651	0,7060
30 a 39 años	0,0065	0,0096	0,0138	0,0125	0,0426	0,0472	0,0077	0,0116	0,0160	0,0139	0,0703	0,0663	0,0347	0,0555	0,0771	0,0579	0,1952	0,2496	0,0977	0,1708	0,2249	0,1559	0,3921	0,5772
40 a 49 años	0,0073	0,0103	0,0165	0,0147	0,0515	0,0413	0,0087	0,0126	0,0195	0,0163	0,0738	0,0552	0,0415	0,0607	0,0922	0,0778	0,2800	0,2599	0,7070	-	-	-	0,7070	-
50 a 59 años	0,0092	0,0130	0,0218	0,0190	0,0692	0,0392	0,0118	0,0171	0,0281	0,0221	0,0995	0,0580	0,0573	0,0804	0,1297	0,1162	0,3481	0,2669	0,8944	-	-	-	0,8944	-
60 ó más años	0,0094	0,0130	0,0236	0,0236	0,0610	0,0252	0,0185	0,0266	0,0450	0,0365	0,1399	0,0655	0,1033	0,1450	0,2277	0,2353	0,7071	0,2944	-	-	-	-	-	-
Hombres	0,0038	0,0055	0,0095	0,0097	0,0089	0,0217	0,0055	0,0078	0,0113	0,0111	0,0479	0,0369	0,0230	0,0315	0,0498	0,0516	0,1461	0,1322	0,0369	0,0488	0,0715	0,1065	0,2559	0,2456
0 a 4 años	0,0105	-	-	-	0,0105	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0119	0,0156	-	-	0,0205	0,0403	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0125	0,0128	0,1150	-	0,0883	0,0981	0,1321	0,1407	0,7070	-	0,6927	0,6019	0,4471	0,4471	-	-	-	-	0,2271	0,2554	1,1547	-	1,4906	0,5763
15 a 19 años	0,0130	0,0172	0,0230	0,0494	0,0903	0,1057	0,0268	0,0326	0,0527	0,1347	0,2885	0,2095	0,0922	0,1060	0,2129	0,7071	0,6235	0,7067	0,0575	0,0700	0,1069	0,6324	0,7070	0,3911
20 a 24 años	0,0126	0,0191	0,0230	0,0272	0,0706	0,1043	0,0158	0,0225	0,0275	0,0409	0,1461	0,1482	0,0595	0,0765	0,1122	0,1959	0,4713	0,6660	0,0634	0,0873	0,1156	0,1730	0,4168	0,5151
25 a 29 años	0,0133	0,0200	0,0261	0,0266	0,0746	0,1042	0,0148	0,0219	0,0283	0,0299	0,1398	0,1409	0,0624	0,0893	0,1232	0,1356	0,3999	0,4469	0,0971	0,1497	0,2117	0,1717	0,5546	0,7060
30 a 39 años	0,0094	0,0137	0,0198	0,0188	0,0599	0,0667	0,0101	0,0146	0,0209	0,0197	0,0894	0,0840	0,0455	0,0644	0,0980	0,0960	0,2457	0,2743	0,1312	0,1979	0,3161	0,2337	0,5773	0,8943
40 a 49 años	0,0108	0,0152	0,0246	0,0217	0,0748	0,0628	0,0116	0,0163	0,0262	0,0227	0,1009	0,0752	0,0500	0,0691	0,1155	0,1041	0,3286	0,2716	1,1547	-	-	-	1,1547	-
50 a 59 años	0,0137	0,0194	0,0333	0,0262	0,0981	0,0646	0,0152	0,0218	0,0366	0,0283	0,1247	0,0785	0,0627	0,0883	0,1545	0,1219	0,4169	0,3045	2,0000	-	-	-	2,0000	-
60 ó más años	0,0146	0,0209	0,0366	0,0301	0,0996	0,0485	0,0220	0,0318	0,0532	0,0425	0,1653	0,0870	0,1033	0,1561	0,2558	0,1997	0,7071	0,3118	-	-	-	-	-	-
Mujeres	0,0036	0,0053	0,0086	0,0089	0,0091	0,0184	0,0065	0,0102	0,0130	0,0114	0,0579	0,0439	0,0316	0,0563	0,0634	0,0504	0,1868	0,2917	0,0467	0,0825	0,0789	0,0886	0,2298	0,4167
0 a 4 años	0,0108	-	-	-	0,0108	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0121	0,0157	-	-	0,0212	0,0442	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0124	0,0128	0,1006	-	0,0869	0,1090	0,1832	0,2051	0,5773	-	0,8944	0,7554	1,1547	1,4142	-	-	1,9999	-	0,4169	0,4263	2,0000	-	-	-
15 a 19 años	0,0126	0,0179	0,0201	0,0428	0,0799	0,1302	0,0333	0,0480	0,0514	0,1171	0,3157	0,3772	0,1344	0,1948	0,2094	0,4351	0,8164	1,9997	0,0798	0,1193	0,1121	0,5773	0,6388	0,7064
20 a 24 años	0,0119	0,0195	0,0211	0,0229	0,0657	0,1108	0,0185	0,0320	0,0303	0,0349	0,1751	0,2450	0,0755	0,1294	0,1370	0,1257	0,4471	0,8163	0,0777	0,1488	0,1356	0,1319	0,3838	0,7065
25 a 29 años	0,0125	0,0202	0,0243	0,0222	0,0736	0,1086	0,0169	0,0304	0,0324	0,0266	0,1576	0,2134	0,0711	0,1404	0,1504	0,1001	0,3998	0,8163	0,1105	0,2423	0,2459	0,1506	0,4849	-
30 a 39 años	0,0090	0,0135	0,0193	0,0167	0,0605	0,0668	0,0119	0,0192	0,0248	0,0196	0,1139	0,1078	0,0535	0,1091	0,1248	0,0713	0,3193	0,6029	0,1465	0,3375	0,3201	0,2093	0,5344	0,7556
40 a 49 años	0,0099	0,0140	0,0222	0,0201	0,0710	0,0548	0,0131	0,0196	0,0292	0,0233	0,1082	0,0814	0,0741	0,1273	0,1531	0,1166	0,5344	0,8943	0,8943	-	-	-	0,8943	-
50 a 59 años	0,0126	0,0174	0,0287	0,0276	0,0976	0,0493	0,0188	0,0275	0,0437	0,0351	0,1652	0,0860	0,1313	0,1942	0,2389	0,2522	0,6324	0,5545	0,9999	-	-	-	0,9999	-
60 ó más años	0,0122	0,0166	0,0309	0,0378	0,0772	0,0294	0,0339	0,0489	0,0842	0,0712	0,2624	0,0997	0,3558	0,3912	0,4999	0,9983	-	0,8944	-	-	-	-	-	-

	Estudiando						Pensionado o Jubilado						Otra					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0068	0,0082	0,0165	0,0188	0,0639	0,1355	0,0156	0,0238	0,0398	0,0326	0,0644	0,0425	0,0041	0,0064	0,0133	0,0194	0,0066	0,0179
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0075	-	-	-	0,0075	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0085	0,0111	-	-	0,0147	0,0298
10 a 14 años	0,0093	0,0094	0,0808	-	0,0867	0,1623	0,2278	0,4714	-	-	1,0000	0,2694	0,0304	0,0350	0,2559	-	0,0902	0,0881
15 a 19 años	0,0123	0,0182	0,0189	0,0358	0,1220	0,3777	0,1350	0,2648	0,8165	1,9999	0,2646	0,2017	0,0197	0,0243	0,0404	0,1695	0,0773	0,1143
20 a 24 años	0,0212	0,0731	0,0435	0,0260	0,2131	0,7070	0,1009	0,2208	0,3779	1,0000	0,1437	0,2166	0,0176	0,0237	0,0330	0,0731	0,0620	0,1127
25 a 29 años	0,0427	0,1442	0,0973	0,0510	0,3287	1,0000	0,1013	0,2235	0,4263	0,8944	0,1463	0,2038	0,0191	0,0260	0,0378	0,0581	0,0713	0,1187
30 a 39 años	0,0630	0,1473	0,1473	0,0815	0,3585	0,9998	0,0749	0,1344	0,2390	0,2981	0,1331	0,1628	0,0139	0,0184	0,0304	0,0365	0,0629	0,0782
40 a 49 años	0,1031	0,1473	0,2388	0,1969	0,5773	0,7558	0,0649	0,1034	0,1489	0,1449	0,1995	0,1958	0,0149	0,0192	0,0340	0,0410	0,0814	0,0680
50 a 59 años	0,1924	0,2917	0,4714	0,3429	0,8944	0,9999	0,0412	0,0673	0,0982	0,0669	0,3084	0,1750	0,0166	0,0217	0,0385	0,0484	0,1074	0,0572
60 ó más años	0,0875	0,1124	0,1771	0,2537	0,8944	0,6028	0,0187	0,0274	0,0470	0,0391	0,1611	0,0518	0,0137	0,0181	0,0355	0,0519	0,0755	0,0322
Hombres	0,0098	0,0116	0,0249	0,0287	0,0875	0,1972	0,0205	0,0307	0,0542	0,0435	0,0729	0,0613	0,0069	0,0119	0,0344	0,0487	0,0092	0,0311
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0105	-	-	-	0,0105	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0119	0,0156	-	-	0,0205	0,0403
10 a 14 años	0,0131	0,0133	0,1227	-	0,1208	0,2280	0,3427	0,8944	-	-	2,0000	0,3776	0,0439	0,0511	0,3920	-	0,1322	0,1179
15 a 19 años	0,0178	0,0253	0,0285	0,0543	0,1697	0,5159	0,1642	0,3161	1,1546	1,9999	0,2978	0,2598	0,0340	0,0420	0,0728	0,3048	0,1289	0,1583
20 a 24 años	0,0319	0,1132	0,0642	0,0392	0,2772	1,1546	0,1165	0,2460	0,4999	2,0000	0,1540	0,3045	0,0382	0,0530	0,0777	0,1473	0,1064	0,1856
25 a 29 años	0,0674	0,2373	0,1556	0,0802	0,4363	1,4142	0,1171	0,2559	0,5546	1,4142	0,1566	0,2743	0,0470	0,0676	0,1071	0,1384	0,1171	0,2188
30 a 39 años	0,1069	0,2479	0,2579	0,1408	0,4346	1,4142	0,0898	0,1594	0,2948	0,4999	0,1448	0,2150	0,0381	0,0527	0,0900	0,1123	0,1111	0,1465
40 a 49 años	0,1654	0,2193	0,3988	0,3848	0,6666	1,4142	0,0839	0,1245	0,2083	0,2248	0,2163	0,2743	0,0413	0,0554	0,1031	0,1198	0,1457	0,1430
50 a 59 años	0,3592	0,5773	2,0000	0,5545	0,8944	-	0,0601	0,0882	0,1564	0,1113	0,3649	0,2302	0,0454	0,0604	0,1172	0,1233	0,2007	0,1450
60 ó más años	0,1378	0,1758	0,2764	0,3998	1,4141	1,4142	0,0246	0,0357	0,0624	0,0486	0,2406	0,0775	0,0350	0,0471	0,0971	0,1011	0,1499	0,0927
Mujeres	0,0094	0,0116	0,0220	0,0247	0,0936	0,1866	0,0239	0,0378	0,0586	0,0492	0,1376	0,0590	0,0051	0,0075	0,0144	0,0211	0,0093	0,0219
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0108	-	-	-	0,0108	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0121	0,0157	-	-	0,0212	0,0442
10 a 14 años	0,0131	0,0133	0,1074	-	0,1245	0,2310	0,3048	0,5547	-	-	1,1546	0,3846	0,0421	0,0480	0,3378	-	0,1231	0,1325
15 a 19 años	0,0169	0,0262	0,0253	0,0476	0,1752	0,5545	0,2372	0,4850	1,1547	-	0,5773	0,3199	0,0242	0,0299	0,0485	0,2039	0,0965	0,1651
20 a 24 años	0,0285	0,0957	0,0593	0,0347	0,3333	0,8943	0,2019	0,5000	0,5773	1,1547	0,3999	0,3082	0,0198	0,0265	0,0364	0,0842	0,0763	0,1419
25 a 29 años	0,0552	0,1816	0,1246	0,0661	0,4999	1,4142	0,2018	0,4588	0,6666	1,1547	0,4081	0,3045	0,0209	0,0282	0,0404	0,0640	0,0898	0,1413
30 a 39 años	0,0781	0,1832	0,1794	0,0999	0,6324	1,4138	0,1359	0,2499	0,4082	0,3713	0,3379	0,2494	0,0149	0,0196	0,0323	0,0386	0,0764	0,0924
40 a 49 años	0,1318	0,1989	0,2980	0,2292	1,1547	0,8943	0,1024	0,1856	0,2130	0,1896	0,5163	0,2795	0,0159	0,0205	0,0360	0,0436	0,0982	0,0773
50 a 59 años	0,2279	0,3380	0,4850	0,4363	-	0,9999	0,0564	0,1042	0,1262	0,0838	0,5773	0,2692	0,0179	0,0232	0,0407	0,0527	0,1271	0,0622
60 ó más años	0,1133	0,1460	0,2306	0,3282	1,1547	0,6663	0,0288	0,0427	0,0716	0,0654	0,2168	0,0696	0,0149	0,0196	0,0382	0,0605	0,0874	0,0343

Coeficientes de Variación del estimador del Total de Personas por Situación en la Fuerza de Trabajo y Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - de Regresión Lineal Múltiple (va: Sexo, Grupos de Edad, Nivel Educativo Alcanzado)

	TOTAL						Ocupado					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0025	0,0035	0,0062	0,0064	0,0056	0,0139	0,0039	0,0057	0,0082	0,0076	0,0368	0,0281
0 a 4 años	0,0061	-	-	-	0,0061	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0076	0,0094	-	-	0,0139	0,0291	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0080	0,0082	0,0757	-	0,0618	0,0728	0,1070	0,1159	0,4471	-	0,5497	0,4706
15 a 19 años	0,0089	0,0121	0,0150	0,0323	0,0597	0,0819	0,0204	0,0260	0,0363	0,0881	0,2129	0,1830
20 a 24 años	0,0083	0,0128	0,0151	0,0173	0,0479	0,0759	0,0114	0,0169	0,0195	0,0259	0,1121	0,1266
25 a 29 años	0,0086	0,0132	0,0171	0,0164	0,0523	0,0751	0,0104	0,0162	0,0203	0,0189	0,1044	0,1173
30 a 39 años	0,0062	0,0090	0,0133	0,0119	0,0425	0,0471	0,0072	0,0107	0,0152	0,0131	0,0702	0,0661
40 a 49 años	0,0070	0,0096	0,0161	0,0142	0,0513	0,0411	0,0082	0,0115	0,0189	0,0155	0,0736	0,0550
50 a 59 años	0,0088	0,0120	0,0212	0,0185	0,0690	0,0390	0,0111	0,0156	0,0273	0,0212	0,0993	0,0577
60 ó más años	0,0089	0,0119	0,0231	0,0232	0,0607	0,0248	0,0180	0,0256	0,0443	0,0358	0,1396	0,0653
Hombres	0,0035	0,0050	0,0092	0,0093	0,0078	0,0215	0,0051	0,0070	0,0108	0,0106	0,0478	0,0368
0 a 4 años	0,0084	-	-	-	0,0084	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0106	0,0133	-	-	0,0193	0,0394	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0115	0,0117	0,1149	-	0,0880	0,0978	0,1319	0,1405	0,7070	-	0,6927	0,6017
15 a 19 años	0,0128	0,0168	0,0228	0,0493	0,0902	0,1055	0,0259	0,0312	0,0520	0,1344	0,2882	0,2093
20 a 24 años	0,0121	0,0177	0,0223	0,0269	0,0705	0,1042	0,0148	0,0202	0,0262	0,0401	0,1458	0,1478
25 a 29 años	0,0125	0,0182	0,0249	0,0256	0,0745	0,1041	0,0137	0,0195	0,0267	0,0285	0,1395	0,1406
30 a 39 años	0,0088	0,0125	0,0188	0,0178	0,0598	0,0665	0,0093	0,0132	0,0197	0,0185	0,0892	0,0838
40 a 49 años	0,0102	0,0139	0,0238	0,0206	0,0746	0,0626	0,0108	0,0146	0,0252	0,0215	0,1006	0,0748
50 a 59 años	0,0129	0,0178	0,0324	0,0252	0,0979	0,0643	0,0141	0,0194	0,0354	0,0270	0,1243	0,0780
60 ó más años	0,0142	0,0199	0,0361	0,0294	0,0993	0,0482	0,0213	0,0302	0,0523	0,0416	0,1650	0,0866
Mujeres	0,0034	0,0049	0,0084	0,0087	0,0081	0,0182	0,0062	0,0098	0,0127	0,0109	0,0579	0,0437
0 a 4 años	0,0089	-	-	-	0,0089	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0108	0,0133	-	-	0,0199	0,0432	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0113	0,0114	0,1006	-	0,0867	0,1088	0,1831	0,2049	0,5772	-	0,8944	0,7553
15 a 19 años	0,0123	0,0175	0,0198	0,0427	0,0796	0,1301	0,0328	0,0472	0,0507	0,1167	0,3156	0,3771
20 a 24 años	0,0115	0,0186	0,0206	0,0226	0,0654	0,1106	0,0178	0,0308	0,0292	0,0340	0,1749	0,2448
25 a 29 años	0,0120	0,0193	0,0236	0,0214	0,0733	0,1084	0,0161	0,0290	0,0312	0,0252	0,1574	0,2132
30 a 39 años	0,0087	0,0130	0,0187	0,0160	0,0604	0,0667	0,0114	0,0184	0,0240	0,0186	0,1137	0,1077
40 a 49 años	0,0096	0,0132	0,0218	0,0195	0,0707	0,0546	0,0125	0,0185	0,0285	0,0224	0,1079	0,0812
50 a 59 años	0,0120	0,0161	0,0281	0,0270	0,0973	0,0490	0,0181	0,0259	0,0428	0,0341	0,1649	0,0857
60 ó más años	0,0114	0,0148	0,0300	0,0374	0,0768	0,0289	0,0335	0,0480	0,0836	0,0706	0,2623	0,0994

	Desocupado						BTPPV					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0186	0,0273	0,0391	0,0360	0,1151	0,1204	0,0289	0,0419	0,0530	0,0681	0,1710	0,2116
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,4169	0,4263	-	-	1,9999	-	0,1995	0,2191	1,0000	-	1,4906	0,5762
15 a 19 años	0,0759	0,0928	0,1492	0,3809	0,4968	0,6663	0,0466	0,0602	0,0773	0,4263	0,4809	0,3421
20 a 24 años	0,0466	0,0655	0,0866	0,1083	0,3243	0,5160	0,0491	0,0753	0,0879	0,1049	0,2824	0,4162
25 a 29 años	0,0468	0,0750	0,0951	0,0814	0,2827	0,3920	0,0729	0,1274	0,1604	0,1132	0,3650	0,7060
30 a 39 años	0,0346	0,0553	0,0769	0,0579	0,1951	0,2496	0,0977	0,1708	0,2249	0,1559	0,3921	0,5772
40 a 49 años	0,0414	0,0605	0,0921	0,0778	0,2798	0,2599	0,7070	-	-	-	0,7070	-
50 a 59 años	0,0571	0,0799	0,1294	0,1162	0,3479	0,2669	0,8943	-	-	-	0,8943	-
60 ó más años	0,1031	0,1448	0,2276	0,2350	0,7070	0,2943	-	-	-	-	-	-
Hombres	0,0229	0,0313	0,0497	0,0516	0,1461	0,1322	0,0368	0,0487	0,0715	0,1065	0,2559	0,2456
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,4471	0,4471	-	-	-	-	0,2270	0,2553	1,1547	-	1,4906	0,5762
15 a 19 años	0,0919	0,1055	0,2127	0,7070	0,6234	0,7067	0,0574	0,0697	0,1068	0,6323	0,7070	0,3911
20 a 24 años	0,0592	0,0760	0,1120	0,1959	0,4712	0,6659	0,0634	0,0873	0,1155	0,1729	0,4168	0,5151
25 a 29 años	0,0622	0,0888	0,1229	0,1355	0,3998	0,4468	0,0971	0,1497	0,2117	0,1717	0,5546	0,7060
30 a 39 años	0,0454	0,0641	0,0978	0,0959	0,2457	0,2742	0,1312	0,1979	0,3160	0,2337	0,5772	0,8943
40 a 49 años	0,0499	0,0687	0,1152	0,1041	0,3285	0,2716	1,1546	-	-	-	1,1546	-
50 a 59 años	0,0625	0,0877	0,1541	0,1218	0,4167	0,3045	2,0000	-	-	-	2,0000	-
60 ó más años	0,1032	0,1558	0,2556	0,1994	0,7070	0,3117	-	-	-	-	-	-
Mujeres	0,0316	0,0562	0,0633	0,0504	0,1868	0,2916	0,0466	0,0825	0,0789	0,0886	0,2297	0,4167
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	1,1546	1,4141	-	-	1,9999	-	0,4168	0,4262	2,0000	-	-	-
15 a 19 años	0,1343	0,1946	0,2093	0,4351	0,8164	1,9993	0,0797	0,1191	0,1120	0,5773	0,6386	0,7064
20 a 24 años	0,0754	0,1291	0,1368	0,1257	0,4470	0,8163	0,0776	0,1487	0,1356	0,1319	0,3837	0,7065
25 a 29 años	0,0710	0,1401	0,1501	0,1001	0,3998	0,8163	0,1105	0,2423	0,2459	0,1506	0,4848	-
30 a 39 años	0,0534	0,1090	0,1246	0,0713	0,3192	0,6029	0,1465	0,3374	0,3201	0,2093	0,5343	0,7556
40 a 49 años	0,0741	0,1272	0,1530	0,1166	0,5344	0,8943	0,8943	-	-	-	0,8943	-
50 a 59 años	0,1312	0,1940	0,2388	0,2522	0,6323	0,5545	0,9998	-	-	-	0,9998	-
60 ó más años	0,3555	0,3911	0,4998	0,9971	-	0,8943	-	-	-	-	-	-

	Estudiando						Pensionado o Jubilado					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0064	0,0076	0,0163	0,0187	0,0638	0,1355	0,0153	0,0231	0,0393	0,0322	0,0644	0,0424
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0083	0,0084	0,0808	-	0,0865	0,1623	0,2277	0,4713	-	-	0,9999	0,2694
15 a 19 años	0,0121	0,0179	0,0187	0,0357	0,1218	0,3777	0,1350	0,2648	0,8165	1,9999	0,2645	0,2017
20 a 24 años	0,0212	0,0731	0,0435	0,0259	0,2131	0,7070	0,1008	0,2207	0,3779	0,9999	0,1435	0,2166
25 a 29 años	0,0427	0,1442	0,0973	0,0510	0,3287	1,0000	0,1012	0,2235	0,4263	0,8944	0,1461	0,2038
30 a 39 años	0,0630	0,1473	0,1473	0,0814	0,3584	0,9998	0,0749	0,1344	0,2390	0,2980	0,1330	0,1628
40 a 49 años	0,1031	0,1473	0,2388	0,1969	0,5772	0,7558	0,0649	0,1034	0,1489	0,1449	0,1994	0,1958
50 a 59 años	0,1924	0,2917	0,4714	0,3429	0,8943	0,9999	0,0411	0,0673	0,0982	0,0669	0,3083	0,1750
60 ó más años	0,0874	0,1121	0,1769	0,2537	0,8943	0,6027	0,0182	0,0262	0,0463	0,0383	0,1608	0,0515
Hombres	0,0093	0,0108	0,0247	0,0287	0,0873	0,1972	0,0200	0,0295	0,0534	0,0427	0,0728	0,0611
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0119	0,0120	0,1227	-	0,1204	0,2280	0,3427	0,8944	-	-	2,0000	0,3776
15 a 19 años	0,0176	0,0249	0,0282	0,0542	0,1694	0,5159	0,1641	0,3161	1,1546	1,9999	0,2976	0,2598
20 a 24 años	0,0318	0,1132	0,0641	0,0391	0,2771	1,1546	0,1163	0,2460	0,4999	2,0000	0,1537	0,3045
25 a 29 años	0,0674	0,2372	0,1556	0,0802	0,4362	1,4142	0,1170	0,2559	0,5546	1,4142	0,1564	0,2743
30 a 39 años	0,1069	0,2479	0,2578	0,1408	0,4346	1,4142	0,0897	0,1594	0,2948	0,4999	0,1446	0,2150
40 a 49 años	0,1654	0,2193	0,3988	0,3848	0,6665	1,4142	0,0839	0,1245	0,2083	0,2248	0,2161	0,2742
50 a 59 años	0,3591	0,5773	2,0000	0,5545	0,8943	-	0,0601	0,0882	0,1564	0,1112	0,3647	0,2302
60 ó más años	0,1376	0,1755	0,2762	0,3997	1,4140	1,4142	0,0237	0,0338	0,0612	0,0474	0,2401	0,0770
Mujeres	0,0089	0,0106	0,0218	0,0247	0,0935	0,1866	0,0236	0,0369	0,0581	0,0489	0,1376	0,0588
0 a 4 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0116	0,0118	0,1073	-	0,1242	0,2309	0,3048	0,5546	-	-	1,1546	0,3845
15 a 19 años	0,0167	0,0257	0,0249	0,0475	0,1749	0,5545	0,2372	0,4850	1,1547	-	0,5773	0,3199
20 a 24 años	0,0284	0,0956	0,0591	0,0346	0,3332	0,8943	0,2019	0,5000	0,5773	1,1546	0,3998	0,3082
25 a 29 años	0,0552	0,1816	0,1246	0,0660	0,4999	1,4142	0,2018	0,4588	0,6666	1,1547	0,4080	0,3044
30 a 39 años	0,0780	0,1832	0,1794	0,0998	0,6323	1,4138	0,1359	0,2499	0,4082	0,3712	0,3379	0,2494
40 a 49 años	0,1318	0,1989	0,2980	0,2292	1,1547	0,8942	0,1024	0,1856	0,2130	0,1896	0,5162	0,2795
50 a 59 años	0,2279	0,3380	0,4850	0,4363	-	0,9999	0,0564	0,1042	0,1262	0,0838	0,5772	0,2692
60 ó más años	0,1131	0,1457	0,2303	0,3281	1,1546	0,6662	0,0283	0,0415	0,0708	0,0647	0,2166	0,0692

	Otra					
	Total	Prim.	Bach.	Prof	Otro	Ning.
Total	0,0038	0,0058	0,0130	0,0192	0,0057	0,0176
0 a 4 años	0,0061	-	-	-	0,0061	-
5 a 9 años	0,0076	0,0094	-	-	0,0139	0,0291
10 a 14 años	0,0300	0,0345	0,2558	-	0,0899	0,0878
15 a 19 años	0,0192	0,0235	0,0399	0,1693	0,0769	0,1141
20 a 24 años	0,0170	0,0225	0,0323	0,0728	0,0617	0,1126
25 a 29 años	0,0185	0,0248	0,0369	0,0576	0,0710	0,1185
30 a 39 años	0,0135	0,0177	0,0298	0,0360	0,0627	0,0780
40 a 49 años	0,0144	0,0183	0,0334	0,0405	0,0811	0,0678
50 a 59 años	0,0157	0,0200	0,0375	0,0479	0,1070	0,0567
60 ó más años	0,0125	0,0157	0,0341	0,0513	0,0750	0,0316
Hombres	0,0063	0,0109	0,0343	0,0486	0,0079	0,0306
0 a 4 años	0,0084	-	-	-	0,0084	-
5 a 9 años	0,0106	0,0133	-	-	0,0193	0,0394
10 a 14 años	0,0434	0,0503	0,3919	-	0,1318	0,1174
15 a 19 años	0,0334	0,0411	0,0724	0,3047	0,1286	0,1579
20 a 24 años	0,0379	0,0522	0,0773	0,1471	0,1061	0,1854
25 a 29 años	0,0468	0,0669	0,1068	0,1380	0,1168	0,2186
30 a 39 años	0,0379	0,0523	0,0898	0,1121	0,1109	0,1464
40 a 49 años	0,0411	0,0549	0,1029	0,1196	0,1454	0,1428
50 a 59 años	0,0450	0,0596	0,1168	0,1230	0,2003	0,1447
60 ó más años	0,0344	0,0458	0,0964	0,1006	0,1494	0,0923
Mujeres	0,0047	0,0068	0,0140	0,0209	0,0082	0,0215
0 a 4 años	0,0089	-	-	-	0,0089	-
5 a 9 años	0,0108	0,0133	-	-	0,0199	0,0432
10 a 14 años	0,0416	0,0473	0,3377	-	0,1227	0,1321
15 a 19 años	0,0234	0,0286	0,0478	0,2037	0,0960	0,1648
20 a 24 años	0,0190	0,0249	0,0355	0,0838	0,0758	0,1416
25 a 29 años	0,0201	0,0266	0,0394	0,0634	0,0894	0,1410
30 a 39 años	0,0144	0,0187	0,0316	0,0380	0,0761	0,0922
40 a 49 años	0,0153	0,0193	0,0353	0,0430	0,0977	0,0770
50 a 59 años	0,0168	0,0211	0,0396	0,0519	0,1266	0,0616
60 ó más años	0,0134	0,0166	0,0365	0,0597	0,0867	0,0335

Total de Personas, Total Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado, por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad

	TOTAL						Total Personas con Ingreso Declarado						Ingreso Promedio por Persona con Ingr. Declarado (miles de Bs)					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	545.339	264.690	94.886	87.545	78.662	19.556	200.511	93.728	48.387	49.156	4.599	4.641	380	237	324	729	272	270
0 a 4 años	50.707	0	0	0	50.707	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	51.856	30.871	0	0	16.619	4.366	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	49.408	46.758	703	0	1.141	806	356	303	20	0	20	13	143	137	271	0	135	87
15 a 19 años	49.462	26.756	17.050	3.836	1.194	626	9.616	5.755	2.997	507	240	117	172	162	183	223	159	146
20 a 24 años	53.727	21.852	16.297	13.052	1.803	723	27.685	12.024	9.159	5.314	924	264	232	194	225	337	213	180
25 a 29 años	47.607	19.634	12.319	13.438	1.513	703	30.226	12.332	8.159	8.601	854	280	328	218	276	543	248	319
30 a 39 años	85.438	38.739	19.533	23.145	2.241	1.780	56.274	25.041	13.430	15.636	1.291	876	409	235	335	761	315	380
40 a 49 años	68.233	34.111	13.682	16.660	1.516	2.264	43.077	21.346	8.765	10.992	780	1.194	453	257	402	901	301	302
50 a 59 años	44.545	22.723	8.172	10.307	840	2.503	23.810	12.136	4.289	5.980	347	1.058	471	271	469	928	352	226
60 ó más años	44.356	23.246	7.130	7.107	1.088	5.785	9.467	4.791	1.568	2.126	143	839	468	317	507	899	268	198
Hombres	258.546	127.889	42.693	39.745	39.824	8.395	113.491	57.993	26.593	23.773	2.480	2.652	414	262	365	863	292	313
0 a 4 años	25.928	0	0	0	25.928	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	26.381	15.515	0	0	8.520	2.346	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.605	23.304	306	0	552	443	239	213	8	0	11	7	150	144	383	0	144	75
15 a 19 años	23.954	13.931	7.460	1.647	534	382	5.823	3.941	1.461	214	117	90	175	169	182	241	173	152
20 a 24 años	25.399	11.308	7.399	5.455	848	389	15.831	8.060	4.908	2.181	490	192	236	201	239	367	224	182
25 a 29 años	22.460	10.035	5.697	5.601	760	367	16.885	8.011	4.494	3.705	482	193	334	235	308	591	254	318
30 a 39 años	40.535	19.120	9.315	10.061	1.140	899	31.656	15.387	7.566	7.459	715	529	441	260	377	889	346	415
40 a 49 años	30.941	15.553	6.106	7.571	722	989	23.124	12.055	4.683	5.370	383	633	512	297	455	1.072	306	392
50 a 59 años	20.033	10.041	3.462	5.181	416	933	13.648	7.143	2.402	3.359	190	554	538	311	535	1.077	410	264
60 ó más años	18.310	9.082	2.948	4.229	404	1.647	6.285	3.183	1.071	1.485	92	454	542	370	573	999	304	235
Mujeres	286.793	136.801	52.193	47.800	38.838	11.161	87.020	35.735	21.794	25.383	2.119	1.989	336	196	275	603	249	212
0 a 4 años	24.779	0	0	0	24.779	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5 a 9 años	25.475	15.356	0	0	8.099	2.020	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10 a 14 años	24.803	23.454	397	0	589	363	117	90	12	0	9	6	127	120	195	0	125	102
15 a 19 años	25.508	12.825	9.590	2.189	660	244	3.793	1.814	1.536	293	123	27	167	148	184	209	147	124
20 a 24 años	28.328	10.544	8.898	7.597	955	334	11.854	3.964	4.251	3.133	434	72	227	180	209	315	202	176
25 a 29 años	25.147	9.599	6.622	7.837	753	336	13.341	4.321	3.665	4.896	372	87	321	187	237	508	241	320
30 a 39 años	44.903	19.619	10.218	13.084	1.101	881	24.618	9.654	5.864	8.177	576	347	369	195	281	644	277	326
40 a 49 años	37.292	18.558	7.576	9.089	794	1.275	19.953	9.291	4.082	5.622	397	561	385	205	342	738	297	201
50 a 59 años	24.512	12.682	4.710	5.126	424	1.570	10.162	4.993	1.887	2.621	157	504	380	213	385	737	281	185
60 ó más años	26.046	14.164	4.182	2.878	684	4.138	3.182	1.608	497	641	51	385	320	212	362	668	203	153

Coeficientes de Variación de los Estimadores del Total de Personas, Total Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado, por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador Directo

	TOTAL						Total Personas con Ingreso Declarado						Ingreso Promedio por Persona con Ingr. Declarado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0,0028	0,0039	0,0065	0,0068	0,0078	0,0146	0,0045	0,0066	0,0092	0,0091	0,0300	0,0297	0,00036	0,00080	0,00053	0,00054	0,00020	0,00027
0 a 4 años	0,0100	-	-	-	0,0100	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0090	0,0117	-	-	0,0159	0,0322	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0094	0,0097	0,0760	-	0,0622	0,0741	0,1139	0,1170	0,4470	-	0,4470	1,1607	0,00023	0,00029	0,00004	-	0,00004	0,00003
15 a 19 años	0,0093	0,0127	0,0156	0,0329	0,0602	0,0828	0,0234	0,0319	0,0384	0,0896	0,1327	0,1910	0,00068	0,00115	0,00056	0,00019	0,00014	0,00015
20 a 24 años	0,0089	0,0139	0,0160	0,0180	0,0485	0,0767	0,0125	0,0193	0,0216	0,0282	0,0680	0,1298	0,00069	0,00155	0,00112	0,00059	0,00034	0,00024
25 a 29 años	0,0093	0,0144	0,0182	0,0176	0,0527	0,0757	0,0117	0,0183	0,0224	0,0222	0,0700	0,1207	0,00063	0,00153	0,00107	0,00085	0,00036	0,00028
30 a 39 años	0,0068	0,0101	0,0143	0,0132	0,0429	0,0480	0,0084	0,0125	0,0172	0,0161	0,0563	0,0683	0,00087	0,00203	0,00140	0,00125	0,00051	0,00055
40 a 49 años	0,0076	0,0106	0,0170	0,0154	0,0517	0,0421	0,0095	0,0134	0,0212	0,0190	0,0722	0,0582	0,00080	0,00193	0,00112	0,00107	0,00040	0,00068
50 a 59 años	0,0094	0,0131	0,0221	0,0198	0,0693	0,0400	0,0129	0,0179	0,0305	0,0258	0,1076	0,0616	0,00066	0,00146	0,00088	0,00097	0,00035	0,00051
60 ó más años	0,0095	0,0130	0,0238	0,0239	0,0612	0,0263	0,0205	0,0288	0,0506	0,0433	0,1671	0,0690	0,00056	0,00133	0,00063	0,00069	0,00016	0,00049
Hombres	0,0040	0,0057	0,0097	0,0101	0,0110	0,0224	0,0060	0,0085	0,0124	0,0130	0,0409	0,0397	0,00048	0,00100	0,00072	0,00075	0,00029	0,00037
0 a 4 años	0,0141	-	-	-	0,0141	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0126	0,0164	-	-	0,0221	0,0439	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0134	0,0137	0,1153	-	0,0887	0,0998	0,1436	0,1407	0,7067	-	0,6027	2,0390	0,00030	0,00035	0,00006	-	0,00006	0,00005
15 a 19 años	0,0133	0,0176	0,0236	0,0502	0,0906	0,1067	0,0320	0,0409	0,0568	0,1384	0,1894	0,2198	0,00098	0,00146	0,00078	0,00031	0,00020	0,00017
20 a 24 años	0,0130	0,0196	0,0237	0,0279	0,0709	0,1054	0,0168	0,0240	0,0297	0,0437	0,0941	0,1522	0,00098	0,00188	0,00161	0,00096	0,00052	0,00030
25 a 29 años	0,0136	0,0203	0,0269	0,0275	0,0749	0,1049	0,0157	0,0228	0,0302	0,0338	0,0937	0,1453	0,00088	0,00187	0,00150	0,00127	0,00048	0,00033
30 a 39 años	0,0099	0,0144	0,0206	0,0200	0,0602	0,0679	0,0112	0,0160	0,0229	0,0232	0,0755	0,0882	0,00118	0,00253	0,00185	0,00178	0,00074	0,00071
40 a 49 años	0,0112	0,0157	0,0254	0,0227	0,0750	0,0641	0,0130	0,0178	0,0290	0,0270	0,1028	0,0805	0,00109	0,00253	0,00155	0,00148	0,00044	0,00094
50 a 59 años	0,0140	0,0197	0,0339	0,0275	0,0982	0,0657	0,0169	0,0233	0,0408	0,0342	0,1449	0,0854	0,00084	0,00192	0,00117	0,00118	0,00051	0,00071
60 ó más años	0,0148	0,0209	0,0369	0,0307	0,0997	0,0494	0,0251	0,0353	0,0611	0,0516	0,2083	0,0939	0,00067	0,00160	0,00075	0,00080	0,00020	0,00072
Mujeres	0,0038	0,0055	0,0088	0,0093	0,0111	0,0192	0,0068	0,0105	0,0136	0,0127	0,0441	0,0450	0,00050	0,00089	0,00062	0,00083	0,00024	0,00026
0 a 4 años	0,0143	-	-	-	0,0143	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0129	0,0166	-	-	0,0229	0,0474	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0133	0,0137	0,1010	-	0,0874	0,1105	0,1848	0,2106	0,5770	-	0,6663	0,8161	0,00014	0,00020	0,00006	-	0,00005	0,00004
15 a 19 años	0,0129	0,0183	0,0207	0,0436	0,0804	0,1311	0,0332	0,0482	0,0520	0,1175	0,1859	0,3847	0,00051	0,00080	0,00086	0,00032	0,00019	0,00009
20 a 24 años	0,0121	0,0198	0,0216	0,0236	0,0665	0,1117	0,0188	0,0323	0,0315	0,0370	0,0982	0,2483	0,00068	0,00136	0,00130	0,00106	0,00037	0,00015
25 a 29 años	0,0127	0,0205	0,0247	0,0230	0,0741	0,1094	0,0176	0,0307	0,0333	0,0294	0,1054	0,2167	0,00094	0,00143	0,00113	0,00150	0,00042	0,00024
30 a 39 años	0,0094	0,0141	0,0198	0,0175	0,0610	0,0679	0,0127	0,0202	0,0261	0,0223	0,0844	0,1081	0,00121	0,00212	0,00162	0,00186	0,00051	0,00055
40 a 49 años	0,0102	0,0144	0,0229	0,0209	0,0713	0,0559	0,0140	0,0203	0,0312	0,0266	0,1014	0,0842	0,00105	0,00220	0,00137	0,00160	0,00070	0,00057
50 a 59 años	0,0127	0,0175	0,0291	0,0284	0,0977	0,0505	0,0198	0,0281	0,0460	0,0392	0,1605	0,0891	0,00080	0,00146	0,00100	0,00134	0,00025	0,00062
60 ó más años	0,0124	0,0167	0,0312	0,0382	0,0775	0,0311	0,0356	0,0500	0,0904	0,0794	0,2799	0,1017	0,00044	0,00104	0,00053	0,00059	0,00013	0,00040

Coeficientes de Variación de los Estimadores del Total de Personas, Total Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado, por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Razón (va: Sexo)

	TOTAL						Total Personas con Ingreso Declarado						Ingreso Promedio por Persona con Ingr. Declarado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0,0027	0,0038	0,0065	0,0068	0,0072	0,0146	0,0045	0,0065	0,0091	0,0091	0,0300	0,0297	0,00036	0,00080	0,00053	0,00054	0,00020	0,00027
0 a 4 años	0,0091	-	-	-	0,0091	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0087	0,0111	-	-	0,0154	0,0319	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0089	0,0091	0,0759	-	0,0622	0,0740	0,1138	0,1169	0,4469	-	0,4470	1,1607	0,00023	0,00029	0,00004	-	0,00004	0,00003
15 a 19 años	0,0092	0,0125	0,0154	0,0328	0,0601	0,0827	0,0230	0,0313	0,0382	0,0895	0,1326	0,1909	0,00068	0,00115	0,00056	0,00019	0,00014	0,00015
20 a 24 años	0,0088	0,0137	0,0159	0,0180	0,0484	0,0766	0,0124	0,0188	0,0214	0,0282	0,0678	0,1297	0,00069	0,00155	0,00112	0,00059	0,00034	0,00024
25 a 29 años	0,0092	0,0143	0,0181	0,0176	0,0527	0,0757	0,0116	0,0180	0,0223	0,0222	0,0699	0,1206	0,00063	0,00153	0,00107	0,00085	0,00036	0,00028
30 a 39 años	0,0068	0,0099	0,0142	0,0133	0,0428	0,0480	0,0084	0,0123	0,0172	0,0162	0,0562	0,0683	0,00087	0,00203	0,00140	0,00125	0,00051	0,00055
40 a 49 años	0,0075	0,0105	0,0170	0,0155	0,0517	0,0421	0,0095	0,0133	0,0212	0,0191	0,0722	0,0582	0,00080	0,00193	0,00112	0,00107	0,00040	0,00068
50 a 59 años	0,0094	0,0131	0,0221	0,0198	0,0693	0,0400	0,0129	0,0179	0,0305	0,0259	0,1075	0,0616	0,00066	0,00146	0,00088	0,00097	0,00035	0,00051
60 ó más años	0,0095	0,0131	0,0239	0,0240	0,0612	0,0263	0,0206	0,0289	0,0507	0,0434	0,1671	0,0690	0,00056	0,00133	0,00063	0,00069	0,00016	0,00049
Hombres	0,0039	0,0055	0,0097	0,0101	0,0102	0,0224	0,0060	0,0084	0,0124	0,0131	0,0409	0,0396	0,00048	0,00100	0,00072	0,00075	0,00029	0,00037
0 a 4 años	0,0127	-	-	-	0,0127	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0121	0,0156	-	-	0,0214	0,0434	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0126	0,0129	0,1153	-	0,0886	0,0996	0,1435	0,1406	0,7064	-	0,6027	2,0389	0,00030	0,00035	0,00006	-	0,00006	0,00005
15 a 19 años	0,0132	0,0173	0,0234	0,0501	0,0906	0,1067	0,0314	0,0400	0,0563	0,1384	0,1893	0,2197	0,00098	0,00146	0,00078	0,00031	0,00020	0,00017
20 a 24 años	0,0128	0,0192	0,0236	0,0279	0,0709	0,1054	0,0165	0,0233	0,0293	0,0437	0,0939	0,1521	0,00098	0,00188	0,00161	0,00096	0,00052	0,00030
25 a 29 años	0,0135	0,0200	0,0268	0,0275	0,0749	0,1049	0,0156	0,0224	0,0301	0,0339	0,0935	0,1452	0,00088	0,00187	0,00150	0,00127	0,00048	0,00033
30 a 39 años	0,0098	0,0141	0,0205	0,0202	0,0602	0,0678	0,0111	0,0156	0,0229	0,0235	0,0755	0,0882	0,00118	0,00253	0,00185	0,00178	0,00074	0,00071
40 a 49 años	0,0112	0,0155	0,0254	0,0229	0,0750	0,0641	0,0129	0,0176	0,0290	0,0272	0,1028	0,0805	0,00109	0,00253	0,00155	0,00148	0,00044	0,00094
50 a 59 años	0,0140	0,0196	0,0340	0,0276	0,0982	0,0657	0,0169	0,0232	0,0408	0,0344	0,1449	0,0853	0,00084	0,00192	0,00117	0,00118	0,00051	0,00071
60 ó más años	0,0148	0,0210	0,0369	0,0308	0,0997	0,0493	0,0252	0,0353	0,0612	0,0518	0,2083	0,0939	0,00067	0,00160	0,00075	0,00080	0,00020	0,00072
Mujeres	0,0037	0,0053	0,0088	0,0093	0,0103	0,0192	0,0068	0,0105	0,0136	0,0127	0,0441	0,0449	0,00050	0,00089	0,00062	0,00083	0,00024	0,00026
0 a 4 años	0,0130	-	-	-	0,0130	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0124	0,0157	-	-	0,0222	0,0470	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0126	0,0129	0,1009	-	0,0873	0,1104	0,1846	0,2105	0,5770	-	0,6663	0,8161	0,00014	0,00020	0,00006	-	0,00005	0,00004
15 a 19 años	0,0127	0,0180	0,0205	0,0435	0,0803	0,1311	0,0330	0,0478	0,0518	0,1174	0,1858	0,3846	0,00051	0,00080	0,00086	0,00032	0,00019	0,00009
20 a 24 años	0,0121	0,0196	0,0215	0,0235	0,0664	0,1116	0,0187	0,0319	0,0312	0,0369	0,0980	0,2482	0,00068	0,00136	0,00130	0,00106	0,00037	0,00015
25 a 29 años	0,0127	0,0203	0,0246	0,0230	0,0741	0,1093	0,0175	0,0304	0,0332	0,0294	0,1054	0,2167	0,00094	0,00143	0,00113	0,00150	0,00042	0,00024
30 a 39 años	0,0094	0,0139	0,0197	0,0176	0,0610	0,0679	0,0127	0,0200	0,0261	0,0224	0,0844	0,1080	0,00121	0,00212	0,00162	0,00186	0,00051	0,00055
40 a 49 años	0,0102	0,0143	0,0229	0,0210	0,0713	0,0559	0,0140	0,0202	0,0312	0,0267	0,1014	0,0842	0,00105	0,00220	0,00137	0,00160	0,00070	0,00057
50 a 59 años	0,0127	0,0175	0,0292	0,0284	0,0977	0,0505	0,0198	0,0281	0,0461	0,0393	0,1604	0,0890	0,00080	0,00146	0,00100	0,00134	0,00025	0,00062
60 ó más años	0,0124	0,0167	0,0313	0,0383	0,0774	0,0311	0,0356	0,0501	0,0905	0,0795	0,2798	0,1017	0,00044	0,00104	0,00053	0,00059	0,00013	0,00040

Coeficientes de Variación de los Estimadores del Total de Personas, Total Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado,
por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Razón (va: Grupos de Edad)

	TOTAL						Total Personas con Ingreso Declarado						Ingreso Promedio por Persona con Ingr. Declarado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0,0026	0,0039	0,0064	0,0066	0,0058	0,0144	0,0043	0,0061	0,0088	0,0087	0,0299	0,0297	0,00036	0,00080	0,00053	0,00054	0,00020	0,00027
0 a 4 años	0,0063	-	-	-	0,0063	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0077	0,0095	-	-	0,0142	0,0311	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0116	0,0120	0,0763	-	0,0620	0,0738	0,1137	0,1167	0,4469	-	0,4469	1,1606	0,00023	0,00029	0,00004	-	0,00004	0,00003
15 a 19 años	0,0095	0,0129	0,0162	0,0334	0,0600	0,0827	0,0223	0,0299	0,0375	0,0893	0,1325	0,1908	0,00068	0,00115	0,00056	0,00019	0,00014	0,00015
20 a 24 años	0,0085	0,0130	0,0154	0,0181	0,0483	0,0766	0,0117	0,0175	0,0204	0,0276	0,0676	0,1295	0,00069	0,00155	0,00112	0,00059	0,00034	0,00024
25 a 29 años	0,0088	0,0134	0,0174	0,0169	0,0525	0,0756	0,0110	0,0167	0,0213	0,0212	0,0697	0,1204	0,00063	0,00153	0,00107	0,00085	0,00036	0,00028
30 a 39 años	0,0064	0,0093	0,0137	0,0126	0,0427	0,0479	0,0079	0,0114	0,0165	0,0154	0,0560	0,0682	0,00087	0,00203	0,00140	0,00125	0,00051	0,00055
40 a 49 años	0,0071	0,0098	0,0165	0,0148	0,0516	0,0420	0,0090	0,0123	0,0205	0,0182	0,0720	0,0580	0,00080	0,00193	0,00112	0,00107	0,00040	0,00068
50 a 59 años	0,0089	0,0121	0,0215	0,0190	0,0691	0,0398	0,0122	0,0166	0,0297	0,0248	0,1074	0,0613	0,00066	0,00146	0,00088	0,00097	0,00035	0,00051
60 ó más años	0,0090	0,0119	0,0232	0,0234	0,0609	0,0259	0,0204	0,0286	0,0505	0,0430	0,1671	0,0689	0,00056	0,00133	0,00063	0,00069	0,00016	0,00049
Hombres	0,0038	0,0056	0,0095	0,0097	0,0080	0,0221	0,0056	0,0077	0,0118	0,0125	0,0407	0,0395	0,00048	0,00100	0,00072	0,00075	0,00029	0,00037
0 a 4 años	0,0087	-	-	-	0,0087	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0108	0,0134	-	-	0,0198	0,0424	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0164	0,0170	0,1157	-	0,0884	0,0994	0,1432	0,1402	0,7067	-	0,6026	2,0387	0,00030	0,00035	0,00006	-	0,00006	0,00005
15 a 19 años	0,0136	0,0179	0,0245	0,0508	0,0904	0,1066	0,0300	0,0379	0,0550	0,1380	0,1891	0,2196	0,00098	0,00146	0,00078	0,00031	0,00020	0,00017
20 a 24 años	0,0124	0,0180	0,0228	0,0280	0,0707	0,1053	0,0154	0,0212	0,0278	0,0429	0,0935	0,1518	0,00098	0,00188	0,00161	0,00096	0,00052	0,00030
25 a 29 años	0,0127	0,0184	0,0255	0,0264	0,0747	0,1047	0,0145	0,0203	0,0285	0,0324	0,0931	0,1449	0,00088	0,00187	0,00150	0,00127	0,00048	0,00033
30 a 39 años	0,0092	0,0129	0,0196	0,0189	0,0600	0,0677	0,0104	0,0142	0,0218	0,0221	0,0751	0,0879	0,00118	0,00253	0,00185	0,00178	0,00074	0,00071
40 a 49 años	0,0104	0,0142	0,0244	0,0216	0,0748	0,0639	0,0120	0,0160	0,0279	0,0259	0,1025	0,0802	0,00109	0,00253	0,00155	0,00148	0,00044	0,00094
50 a 59 años	0,0132	0,0181	0,0329	0,0261	0,0980	0,0654	0,0159	0,0211	0,0395	0,0326	0,1446	0,0848	0,00084	0,00192	0,00117	0,00118	0,00051	0,00071
60 ó más años	0,0143	0,0200	0,0363	0,0299	0,0995	0,0490	0,0250	0,0349	0,0609	0,0513	0,2083	0,0938	0,00067	0,00160	0,00075	0,00080	0,00020	0,00072
Mujeres	0,0036	0,0054	0,0087	0,0090	0,0083	0,0189	0,0065	0,0100	0,0132	0,0122	0,0440	0,0448	0,00050	0,00089	0,00062	0,00083	0,00024	0,00026
0 a 4 años	0,0091	-	-	-	0,0091	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0111	0,0135	-	-	0,0205	0,0459	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0164	0,0170	0,1014	-	0,0871	0,1103	0,1846	0,2104	0,5770	-	0,6663	0,8159	0,00014	0,00020	0,00006	-	0,00005	0,00004
15 a 19 años	0,0132	0,0186	0,0216	0,0443	0,0801	0,1309	0,0326	0,0472	0,0511	0,1172	0,1857	0,3846	0,00051	0,00080	0,00086	0,00032	0,00019	0,00009
20 a 24 años	0,0118	0,0188	0,0209	0,0237	0,0660	0,1115	0,0181	0,0309	0,0301	0,0360	0,0978	0,2481	0,00068	0,00136	0,00130	0,00106	0,00037	0,00015
25 a 29 años	0,0122	0,0194	0,0239	0,0221	0,0738	0,1092	0,0168	0,0292	0,0320	0,0279	0,1050	0,2165	0,00094	0,00143	0,00113	0,00150	0,00042	0,00024
30 a 39 años	0,0090	0,0133	0,0192	0,0168	0,0608	0,0678	0,0122	0,0191	0,0253	0,0213	0,0841	0,1079	0,00121	0,00212	0,00162	0,00186	0,00051	0,00055
40 a 49 años	0,0098	0,0134	0,0223	0,0202	0,0711	0,0557	0,0134	0,0191	0,0304	0,0257	0,1012	0,0840	0,00105	0,00220	0,00137	0,00160	0,00070	0,00057
50 a 59 años	0,0121	0,0162	0,0284	0,0277	0,0975	0,0501	0,0190	0,0266	0,0450	0,0380	0,1602	0,0887	0,00080	0,00146	0,00100	0,00134	0,00025	0,00062
60 ó más años	0,0115	0,0148	0,0302	0,0377	0,0771	0,0305	0,0355	0,0499	0,0902	0,0791	0,2799	0,1017	0,00044	0,00104	0,00053	0,00059	0,00013	0,00039

Coeficientes de Variación de los Estimadores del Total de Personas, Total Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado,
por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Razón (va: Nivel Educativo Alcanzado)

	TOTAL						Total Personas con Ingreso Declarado						Ingreso Promedio por Persona con Ingr. Declarado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0,0026	0,0038	0,0064	0,0066	0,0064	0,0141	0,0049	0,0080	0,0090	0,0088	0,0298	0,0295	0,00036	0,00080	0,00053	0,00054	0,00020	0,00027
0 a 4 años	0,0075	-	-	-	0,0075	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0085	0,0111	-	-	0,0148	0,0298	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0088	0,0090	0,0758	-	0,0620	0,0730	0,1142	0,1174	0,4469	-	0,4469	1,1597	0,00023	0,00029	0,00004	-	0,00004	0,00003
15 a 19 años	0,0091	0,0124	0,0152	0,0324	0,0599	0,0821	0,0251	0,0355	0,0379	0,0894	0,1323	0,1905	0,00068	0,00115	0,00056	0,00019	0,00014	0,00015
20 a 24 años	0,0087	0,0137	0,0156	0,0175	0,0481	0,0760	0,0134	0,0226	0,0209	0,0278	0,0674	0,1292	0,00069	0,00155	0,00112	0,00059	0,00034	0,00024
25 a 29 años	0,0091	0,0142	0,0178	0,0170	0,0524	0,0752	0,0124	0,0215	0,0219	0,0216	0,0696	0,1203	0,00063	0,00153	0,00107	0,00085	0,00036	0,00028
30 a 39 años	0,0065	0,0096	0,0138	0,0125	0,0426	0,0472	0,0094	0,0159	0,0169	0,0156	0,0559	0,0677	0,00087	0,00203	0,00140	0,00125	0,00051	0,00055
40 a 49 años	0,0073	0,0103	0,0165	0,0148	0,0515	0,0413	0,0105	0,0165	0,0207	0,0184	0,0720	0,0576	0,00080	0,00193	0,00112	0,00107	0,00040	0,00068
50 a 59 años	0,0093	0,0130	0,0218	0,0190	0,0692	0,0392	0,0139	0,0210	0,0301	0,0249	0,1075	0,0611	0,00066	0,00146	0,00088	0,00097	0,00035	0,00051
60 ó más años	0,0094	0,0131	0,0237	0,0236	0,0610	0,0252	0,0214	0,0315	0,0505	0,0427	0,1670	0,0685	0,00056	0,00133	0,00063	0,00069	0,00016	0,00049
Hombres	0,0038	0,0055	0,0095	0,0097	0,0089	0,0217	0,0068	0,0106	0,0121	0,0127	0,0407	0,0393	0,00048	0,00100	0,00072	0,00075	0,00029	0,00037
0 a 4 años	0,0105	-	-	-	0,0105	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0119	0,0156	-	-	0,0205	0,0403	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0125	0,0128	0,1150	-	0,0883	0,0983	0,1440	0,1412	0,7064	-	0,6025	2,0370	0,00030	0,00035	0,00006	-	0,00006	0,00005
15 a 19 años	0,0131	0,0172	0,0230	0,0495	0,0904	0,1058	0,0352	0,0465	0,0560	0,1383	0,1890	0,2191	0,00098	0,00146	0,00078	0,00031	0,00020	0,00017
20 a 24 años	0,0126	0,0191	0,0230	0,0272	0,0706	0,1044	0,0185	0,0290	0,0285	0,0431	0,0935	0,1514	0,00098	0,00188	0,00161	0,00096	0,00052	0,00030
25 a 29 años	0,0133	0,0200	0,0261	0,0266	0,0747	0,1042	0,0173	0,0278	0,0295	0,0330	0,0931	0,1447	0,00088	0,00187	0,00150	0,00127	0,00048	0,00033
30 a 39 años	0,0095	0,0137	0,0198	0,0188	0,0599	0,0667	0,0130	0,0213	0,0224	0,0225	0,0750	0,0873	0,00118	0,00253	0,00185	0,00178	0,00074	0,00071
40 a 49 años	0,0108	0,0152	0,0246	0,0217	0,0748	0,0628	0,0147	0,0226	0,0282	0,0263	0,1025	0,0795	0,00109	0,00253	0,00155	0,00148	0,00044	0,00094
50 a 59 años	0,0137	0,0195	0,0333	0,0262	0,0981	0,0646	0,0186	0,0280	0,0400	0,0328	0,1448	0,0845	0,00084	0,00192	0,00117	0,00118	0,00051	0,00071
60 ó más años	0,0147	0,0209	0,0366	0,0301	0,0996	0,0485	0,0265	0,0393	0,0609	0,0508	0,2081	0,0931	0,00067	0,00160	0,00075	0,00080	0,00020	0,00072
Mujeres	0,0036	0,0053	0,0086	0,0089	0,0091	0,0185	0,0071	0,0119	0,0134	0,0123	0,0439	0,0447	0,00050	0,00089	0,00062	0,00083	0,00024	0,00026
0 a 4 años	0,0108	-	-	-	0,0108	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0122	0,0157	-	-	0,0212	0,0442	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0125	0,0128	0,1007	-	0,0870	0,1092	0,1849	0,2109	0,5770	-	0,6663	0,8159	0,00014	0,00020	0,00006	-	0,00005	0,00004
15 a 19 años	0,0126	0,0179	0,0201	0,0428	0,0799	0,1303	0,0335	0,0496	0,0514	0,1173	0,1854	0,3844	0,00051	0,00080	0,00086	0,00032	0,00019	0,00009
20 a 24 años	0,0119	0,0195	0,0211	0,0229	0,0658	0,1108	0,0191	0,0348	0,0307	0,0363	0,0973	0,2478	0,00068	0,00136	0,00130	0,00106	0,00037	0,00015
25 a 29 años	0,0125	0,0202	0,0243	0,0222	0,0736	0,1086	0,0178	0,0333	0,0328	0,0285	0,1050	0,2163	0,00094	0,00143	0,00113	0,00150	0,00042	0,00024
30 a 39 años	0,0091	0,0135	0,0193	0,0167	0,0606	0,0668	0,0133	0,0232	0,0256	0,0216	0,0839	0,1074	0,00121	0,00212	0,00162	0,00186	0,00051	0,00055
40 a 49 años	0,0099	0,0140	0,0222	0,0201	0,0710	0,0548	0,0150	0,0240	0,0304	0,0257	0,1011	0,0835	0,00105	0,00220	0,00137	0,00160	0,00070	0,00057
50 a 59 años	0,0126	0,0174	0,0287	0,0276	0,0976	0,0493	0,0209	0,0319	0,0455	0,0381	0,1603	0,0884	0,00080	0,00146	0,00100	0,00134	0,00025	0,00062
60 ó más años	0,0123	0,0169	0,0310	0,0378	0,0773	0,0295	0,0365	0,0527	0,0902	0,0789	0,2798	0,1012	0,00044	0,00104	0,00053	0,00059	0,00013	0,00039

Coeficientes de Variación de los Estimadores del Total de Personas, Total Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado,
por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Regresión Lineal Simple (va: Sexo)

	TOTAL						Total Personas con Ingreso Declarado						Ingreso Promedio por Persona con Ingr. Declarado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0,0027	0,0038	0,0065	0,0068	0,0071	0,0145	0,0045	0,0065	0,0091	0,0091	0,0300	0,0297	0,00036	0,00079	0,00053	0,00054	0,00020	0,00027
0 a 4 años	0,0088	-	-	-	0,0088	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0086	0,0110	-	-	0,0153	0,0317	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0088	0,0091	0,0759	-	0,0622	0,0739	0,1138	0,1169	0,4464	-	0,4469	1,1607	0,00023	0,00029	0,00004	-	0,00004	0,00003
15 a 19 años	0,0091	0,0125	0,0154	0,0328	0,0601	0,0827	0,0229	0,0309	0,0381	0,0895	0,1326	0,1909	0,00067	0,00113	0,00056	0,00019	0,00014	0,00015
20 a 24 años	0,0088	0,0137	0,0159	0,0180	0,0484	0,0766	0,0123	0,0188	0,0213	0,0282	0,0678	0,1297	0,00068	0,00154	0,00111	0,00059	0,00034	0,00024
25 a 29 años	0,0092	0,0143	0,0181	0,0176	0,0527	0,0757	0,0116	0,0180	0,0223	0,0222	0,0699	0,1206	0,00062	0,00152	0,00107	0,00085	0,00036	0,00028
30 a 39 años	0,0068	0,0099	0,0142	0,0132	0,0428	0,0480	0,0083	0,0123	0,0172	0,0161	0,0562	0,0683	0,00087	0,00202	0,00140	0,00125	0,00051	0,00055
40 a 49 años	0,0075	0,0105	0,0170	0,0154	0,0517	0,0421	0,0095	0,0133	0,0212	0,0189	0,0722	0,0582	0,00079	0,00192	0,00112	0,00107	0,00040	0,00068
50 a 59 años	0,0094	0,0130	0,0221	0,0198	0,0693	0,0400	0,0128	0,0179	0,0305	0,0258	0,1075	0,0616	0,00066	0,00146	0,00088	0,00097	0,00035	0,00051
60 ó más años	0,0095	0,0130	0,0238	0,0239	0,0612	0,0263	0,0205	0,0288	0,0506	0,0433	0,1671	0,0690	0,00056	0,00133	0,00063	0,00069	0,00016	0,00049
Hombres	0,0039	0,0055	0,0097	0,0101	0,0100	0,0223	0,0060	0,0084	0,0123	0,0130	0,0409	0,0396	0,00048	0,00099	0,00072	0,00075	0,00029	0,00037
0 a 4 años	0,0124	-	-	-	0,0124	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0120	0,0155	-	-	0,0213	0,0432	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0125	0,0128	0,1153	-	0,0886	0,0995	0,1435	0,1405	0,7046	-	0,6026	2,0389	0,00030	0,00035	0,00006	-	0,00006	0,00005
15 a 19 años	0,0132	0,0173	0,0234	0,0501	0,0906	0,1067	0,0310	0,0395	0,0561	0,1384	0,1893	0,2197	0,00096	0,00143	0,00078	0,00031	0,00020	0,00017
20 a 24 años	0,0128	0,0192	0,0236	0,0279	0,0708	0,1054	0,0164	0,0232	0,0293	0,0436	0,0939	0,1521	0,00097	0,00185	0,00160	0,00096	0,00052	0,00030
25 a 29 años	0,0135	0,0200	0,0268	0,0274	0,0749	0,1049	0,0155	0,0224	0,0301	0,0338	0,0935	0,1452	0,00087	0,00186	0,00150	0,00127	0,00048	0,00033
30 a 39 años	0,0098	0,0140	0,0205	0,0200	0,0602	0,0678	0,0111	0,0156	0,0228	0,0232	0,0754	0,0882	0,00117	0,00251	0,00185	0,00178	0,00074	0,00071
40 a 49 años	0,0111	0,0155	0,0253	0,0227	0,0749	0,0641	0,0129	0,0176	0,0289	0,0270	0,1028	0,0805	0,00109	0,00252	0,00155	0,00148	0,00044	0,00094
50 a 59 años	0,0140	0,0196	0,0339	0,0275	0,0982	0,0657	0,0169	0,0232	0,0407	0,0342	0,1449	0,0853	0,00084	0,00191	0,00117	0,00118	0,00051	0,00071
60 ó más años	0,0147	0,0209	0,0369	0,0307	0,0997	0,0493	0,0251	0,0352	0,0611	0,0516	0,2083	0,0938	0,00067	0,00160	0,00075	0,00080	0,00020	0,00072
Mujeres	0,0037	0,0053	0,0088	0,0092	0,0101	0,0192	0,0068	0,0105	0,0136	0,0127	0,0441	0,0449	0,00050	0,00088	0,00062	0,00083	0,00024	0,00026
0 a 4 años	0,0126	-	-	-	0,0126	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0123	0,0156	-	-	0,0220	0,0467	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0125	0,0128	0,1009	-	0,0873	0,1104	0,1846	0,2104	0,5770	-	0,6663	0,8161	0,00014	0,00020	0,00006	-	0,00005	0,00004
15 a 19 años	0,0127	0,0180	0,0205	0,0435	0,0803	0,1310	0,0330	0,0477	0,0517	0,1174	0,1857	0,3846	0,00051	0,00080	0,00085	0,00032	0,00019	0,00009
20 a 24 años	0,0120	0,0196	0,0215	0,0235	0,0664	0,1116	0,0187	0,0319	0,0312	0,0369	0,0980	0,2482	0,00068	0,00135	0,00129	0,00106	0,00037	0,00015
25 a 29 años	0,0127	0,0203	0,0246	0,0230	0,0741	0,1093	0,0175	0,0304	0,0332	0,0293	0,1054	0,2167	0,00094	0,00142	0,00113	0,00150	0,00042	0,00024
30 a 39 años	0,0093	0,0139	0,0197	0,0175	0,0610	0,0679	0,0127	0,0200	0,0260	0,0222	0,0844	0,1080	0,00120	0,00211	0,00162	0,00186	0,00051	0,00055
40 a 49 años	0,0102	0,0143	0,0228	0,0209	0,0713	0,0559	0,0140	0,0202	0,0311	0,0266	0,1014	0,0842	0,00105	0,00220	0,00137	0,00160	0,00070	0,00057
50 a 59 años	0,0127	0,0175	0,0291	0,0284	0,0977	0,0505	0,0198	0,0281	0,0460	0,0392	0,1604	0,0890	0,00080	0,00146	0,00100	0,00134	0,00025	0,00062
60 ó más años	0,0124	0,0166	0,0312	0,0382	0,0774	0,0311	0,0356	0,0500	0,0904	0,0794	0,2798	0,1017	0,00044	0,00104	0,00053	0,00059	0,00013	0,00039

Coeficientes de Variación de los Estimadores del Total de Personas, Total Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado,
por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Regresión Lineal Simple (va: Grupos de Edad)

	TOTAL						Total Personas con Ingreso Declarado						Ingreso Promedio por Persona con Ingr. Declarado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0,0025	0,0037	0,0063	0,0066	0,0058	0,0144	0,0043	0,0061	0,0088	0,0087	0,0299	0,0296	0,00035	0,00077	0,00052	0,00053	0,00020	0,00027
0 a 4 años	0,0063	-	-	-	0,0063	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0077	0,0095	-	-	0,0142	0,0311	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0094	0,0097	0,0760	-	0,0620	0,0738	0,1137	0,1167	0,4469	-	0,4469	1,1603	0,00023	0,00028	0,00004	-	0,00004	0,00003
15 a 19 años	0,0091	0,0124	0,0155	0,0329	0,0600	0,0826	0,0221	0,0296	0,0374	0,0893	0,1325	0,1908	0,00065	0,00110	0,00056	0,00019	0,00014	0,00015
20 a 24 años	0,0085	0,0130	0,0154	0,0178	0,0483	0,0765	0,0117	0,0175	0,0204	0,0276	0,0676	0,1295	0,00066	0,00148	0,00109	0,00058	0,00034	0,00024
25 a 29 años	0,0088	0,0134	0,0174	0,0169	0,0525	0,0756	0,0110	0,0167	0,0213	0,0212	0,0697	0,1204	0,00060	0,00146	0,00104	0,00083	0,00036	0,00028
30 a 39 años	0,0064	0,0093	0,0137	0,0126	0,0427	0,0479	0,0079	0,0114	0,0165	0,0154	0,0560	0,0682	0,00084	0,00194	0,00137	0,00122	0,00051	0,00055
40 a 49 años	0,0071	0,0098	0,0165	0,0148	0,0516	0,0420	0,0090	0,0123	0,0205	0,0182	0,0720	0,0580	0,00077	0,00186	0,00111	0,00105	0,00040	0,00068
50 a 59 años	0,0089	0,0121	0,0215	0,0190	0,0691	0,0398	0,0122	0,0166	0,0297	0,0248	0,1074	0,0613	0,00065	0,00141	0,00087	0,00095	0,00035	0,00051
60 ó más años	0,0090	0,0119	0,0232	0,0234	0,0609	0,0259	0,0203	0,0283	0,0503	0,0428	0,1670	0,0688	0,00055	0,00132	0,00063	0,00069	0,00016	0,00049
Hombres	0,0037	0,0053	0,0094	0,0097	0,0080	0,0221	0,0056	0,0077	0,0118	0,0125	0,0407	0,0395	0,00047	0,00095	0,00071	0,00074	0,00029	0,00037
0 a 4 años	0,0087	-	-	-	0,0087	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0108	0,0134	-	-	0,0198	0,0423	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0133	0,0137	0,1153	-	0,0884	0,0994	0,1432	0,1402	0,7067	-	0,6026	2,0382	0,00030	0,00035	0,00006	-	0,00006	0,00005
15 a 19 años	0,0131	0,0172	0,0235	0,0502	0,0904	0,1066	0,0297	0,0374	0,0549	0,1380	0,1891	0,2196	0,00093	0,00139	0,00077	0,00031	0,00020	0,00017
20 a 24 años	0,0123	0,0180	0,0227	0,0277	0,0707	0,1053	0,0154	0,0212	0,0277	0,0428	0,0935	0,1518	0,00093	0,00176	0,00156	0,00095	0,00052	0,00030
25 a 29 años	0,0127	0,0184	0,0255	0,0264	0,0747	0,1047	0,0145	0,0203	0,0284	0,0324	0,0931	0,1449	0,00084	0,00177	0,00146	0,00124	0,00048	0,00033
30 a 39 años	0,0092	0,0129	0,0196	0,0189	0,0600	0,0677	0,0104	0,0142	0,0218	0,0221	0,0751	0,0879	0,00114	0,00239	0,00181	0,00174	0,00074	0,00071
40 a 49 años	0,0104	0,0142	0,0244	0,0216	0,0748	0,0639	0,0120	0,0160	0,0279	0,0259	0,1025	0,0802	0,00105	0,00243	0,00152	0,00145	0,00044	0,00094
50 a 59 años	0,0132	0,0180	0,0329	0,0261	0,0980	0,0654	0,0159	0,0211	0,0395	0,0326	0,1446	0,0848	0,00082	0,00184	0,00116	0,00115	0,00051	0,00071
60 ó más años	0,0143	0,0200	0,0363	0,0299	0,0995	0,0490	0,0247	0,0345	0,0606	0,0510	0,2082	0,0936	0,00066	0,00159	0,00075	0,00079	0,00020	0,00072
Mujeres	0,0035	0,0051	0,0086	0,0090	0,0083	0,0189	0,0065	0,0100	0,0132	0,0122	0,0440	0,0448	0,00049	0,00086	0,00061	0,00082	0,00024	0,00026
0 a 4 años	0,0091	-	-	-	0,0091	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0110	0,0135	-	-	0,0205	0,0458	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0133	0,0137	0,1010	-	0,0871	0,1102	0,1846	0,2104	0,5770	-	0,6663	0,8159	0,00014	0,00020	0,00006	-	0,00005	0,00004
15 a 19 años	0,0127	0,0179	0,0206	0,0436	0,0801	0,1309	0,0326	0,0472	0,0511	0,1172	0,1857	0,3846	0,00051	0,00079	0,00085	0,00032	0,00019	0,00009
20 a 24 años	0,0117	0,0188	0,0209	0,0233	0,0660	0,1115	0,0181	0,0309	0,0301	0,0360	0,0978	0,2481	0,00067	0,00133	0,00126	0,00105	0,00037	0,00015
25 a 29 años	0,0122	0,0194	0,0239	0,0220	0,0738	0,1092	0,0168	0,0292	0,0320	0,0279	0,1050	0,2165	0,00092	0,00139	0,00111	0,00146	0,00042	0,00024
30 a 39 años	0,0090	0,0133	0,0192	0,0168	0,0608	0,0678	0,0122	0,0191	0,0253	0,0213	0,0841	0,1079	0,00118	0,00206	0,00160	0,00183	0,00051	0,00055
40 a 49 años	0,0098	0,0134	0,0223	0,0202	0,0711	0,0557	0,0134	0,0191	0,0304	0,0257	0,1012	0,0840	0,00104	0,00215	0,00135	0,00158	0,00070	0,00057
50 a 59 años	0,0121	0,0162	0,0284	0,0276	0,0975	0,0501	0,0190	0,0266	0,0450	0,0380	0,1602	0,0887	0,00079	0,00142	0,00099	0,00132	0,00025	0,00062
60 ó más años	0,0115	0,0148	0,0302	0,0377	0,0771	0,0304	0,0353	0,0495	0,0900	0,0790	0,2798	0,1015	0,00044	0,00104	0,00053	0,00059	0,00013	0,00039

Coeficientes de Variación de los Estimadores del Total de Personas, Total Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado, por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Regresión Lineal Simple (va: Nivel Educativo Alcanzado)

	TOTAL						Total Personas con Ingreso Declarado						Ingreso Promedio por Persona con Ingr. Declarado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0,0026	0,0038	0,0064	0,0066	0,0064	0,0140	0,0044	0,0064	0,0089	0,0088	0,0298	0,0293	0,00036	0,00079	0,00053	0,00053	0,00020	0,00027
0 a 4 años	0,0075	-	-	-	0,0075	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0085	0,0111	-	-	0,0147	0,0298	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0088	0,0090	0,0757	-	0,0619	0,0729	0,1138	0,1169	0,4468	-	0,4469	1,1586	0,00023	0,00029	0,00004	-	0,00004	0,00003
15 a 19 años	0,0090	0,0124	0,0152	0,0324	0,0599	0,0821	0,0229	0,0311	0,0379	0,0894	0,1323	0,1896	0,00067	0,00114	0,00056	0,00019	0,00014	0,00014
20 a 24 años	0,0087	0,0137	0,0156	0,0175	0,0481	0,0760	0,0122	0,0187	0,0208	0,0276	0,0674	0,1284	0,00068	0,00153	0,00110	0,00058	0,00034	0,00024
25 a 29 años	0,0091	0,0142	0,0178	0,0170	0,0524	0,0752	0,0114	0,0180	0,0218	0,0214	0,0696	0,1198	0,00062	0,00152	0,00105	0,00083	0,00036	0,00028
30 a 39 años	0,0065	0,0096	0,0138	0,0125	0,0426	0,0472	0,0081	0,0119	0,0166	0,0153	0,0559	0,0671	0,00085	0,00199	0,00138	0,00121	0,00051	0,00054
40 a 49 años	0,0073	0,0103	0,0165	0,0147	0,0515	0,0413	0,0092	0,0130	0,0206	0,0182	0,0719	0,0570	0,00078	0,00191	0,00111	0,00105	0,00040	0,00067
50 a 59 años	0,0092	0,0130	0,0218	0,0190	0,0692	0,0392	0,0126	0,0178	0,0300	0,0248	0,1074	0,0606	0,00066	0,00146	0,00087	0,00095	0,00035	0,00051
60 ó más años	0,0094	0,0130	0,0236	0,0236	0,0610	0,0252	0,0204	0,0288	0,0504	0,0427	0,1670	0,0681	0,00055	0,00133	0,00063	0,00068	0,00016	0,00049
Hombres	0,0038	0,0055	0,0095	0,0097	0,0089	0,0217	0,0058	0,0082	0,0120	0,0125	0,0407	0,0389	0,00048	0,00098	0,00071	0,00074	0,00029	0,00037
0 a 4 años	0,0105	-	-	-	0,0105	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0119	0,0156	-	-	0,0205	0,0403	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0125	0,0128	0,1150	-	0,0883	0,0981	0,1434	0,1405	0,7062	-	0,6025	2,0350	0,00030	0,00035	0,00006	-	0,00006	0,00005
15 a 19 años	0,0130	0,0172	0,0230	0,0494	0,0903	0,1057	0,0312	0,0398	0,0559	0,1382	0,1890	0,2179	0,00096	0,00143	0,00077	0,00031	0,00020	0,00016
20 a 24 años	0,0126	0,0191	0,0230	0,0272	0,0706	0,1043	0,0162	0,0232	0,0284	0,0429	0,0935	0,1504	0,00096	0,00185	0,00158	0,00095	0,00052	0,00030
25 a 29 años	0,0133	0,0200	0,0261	0,0266	0,0746	0,1042	0,0153	0,0223	0,0293	0,0328	0,0930	0,1440	0,00087	0,00186	0,00148	0,00125	0,00048	0,00033
30 a 39 años	0,0094	0,0137	0,0198	0,0188	0,0599	0,0667	0,0107	0,0151	0,0220	0,0221	0,0749	0,0863	0,00115	0,00247	0,00182	0,00173	0,00074	0,00070
40 a 49 años	0,0108	0,0152	0,0246	0,0217	0,0748	0,0628	0,0125	0,0171	0,0280	0,0260	0,1024	0,0787	0,00107	0,00250	0,00153	0,00145	0,00044	0,00094
50 a 59 años	0,0137	0,0194	0,0333	0,0262	0,0981	0,0646	0,0166	0,0230	0,0399	0,0328	0,1447	0,0837	0,00083	0,00191	0,00117	0,00115	0,00051	0,00071
60 ó más años	0,0146	0,0209	0,0366	0,0301	0,0996	0,0485	0,0249	0,0351	0,0607	0,0508	0,2081	0,0923	0,00067	0,00160	0,00075	0,00079	0,00020	0,00071
Mujeres	0,0036	0,0053	0,0086	0,0089	0,0091	0,0184	0,0066	0,0103	0,0133	0,0122	0,0439	0,0444	0,00049	0,00088	0,00061	0,00081	0,00024	0,00026
0 a 4 años	0,0108	-	-	-	0,0108	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0121	0,0157	-	-	0,0212	0,0442	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0124	0,0128	0,1006	-	0,0869	0,1090	0,1847	0,2105	0,5770	-	0,6663	0,8155	0,00014	0,00020	0,00006	-	0,00005	0,00004
15 a 19 años	0,0126	0,0179	0,0201	0,0428	0,0799	0,1302	0,0329	0,0478	0,0514	0,1172	0,1853	0,3841	0,00051	0,00080	0,00085	0,00032	0,00019	0,00009
20 a 24 años	0,0119	0,0195	0,0211	0,0229	0,0657	0,1108	0,0184	0,0319	0,0306	0,0361	0,0973	0,2468	0,00067	0,00135	0,00127	0,00105	0,00037	0,00015
25 a 29 años	0,0125	0,0202	0,0243	0,0222	0,0736	0,1086	0,0172	0,0303	0,0327	0,0283	0,1050	0,2159	0,00092	0,00142	0,00112	0,00147	0,00042	0,00024
30 a 39 años	0,0090	0,0135	0,0193	0,0167	0,0605	0,0668	0,0123	0,0194	0,0254	0,0212	0,0839	0,1066	0,00118	0,00209	0,00160	0,00182	0,00051	0,00055
40 a 49 años	0,0099	0,0140	0,0222	0,0201	0,0710	0,0548	0,0136	0,0199	0,0303	0,0255	0,1010	0,0828	0,00104	0,00219	0,00135	0,00157	0,00070	0,00056
50 a 59 años	0,0126	0,0174	0,0287	0,0276	0,0976	0,0493	0,0195	0,0280	0,0454	0,0381	0,1603	0,0879	0,00080	0,00146	0,00099	0,00132	0,00025	0,00062
60 ó más años	0,0122	0,0166	0,0309	0,0378	0,0772	0,0294	0,0355	0,0500	0,0902	0,0789	0,2798	0,1008	0,00044	0,00104	0,00053	0,00059	0,00013	0,00039

Coeficientes de Variación de los Estimadores del Total de Personas, Total Personas con Ingreso Declarado e Ingreso Promedio por Persona con Ingreso Declarado, por Nivel Educativo Alcanzado, según Sexo y Grupos de Edad - Estimador de Regresión Lineal Múltiple (va: Sexo, Grupos de Edad, Nivel Educativo Alcanzado)

	TOTAL						Total Personas con Ingreso Declarado						Ingreso Promedio por Persona con Ingr. Declarado					
	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno	Total	Primaria	Bach/TM	Prof	Otro	Ninguno
Total	0,0025	0,0035	0,0062	0,0064	0,0056	0,0139	0,0042	0,0060	0,0086	0,0084	0,0297	0,0292	0,00035	0,00076	0,00052	0,00052	0,00020	0,00027
0 a 4 años	0,0061	-	-	-	0,0061	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0076	0,0094	-	-	0,0139	0,0291	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0080	0,0082	0,0757	-	0,0618	0,0728	0,1136	0,1167	0,4463	-	0,4468	1,1583	0,00023	0,00028	0,00004	-	0,00004	0,00003
15 a 19 años	0,0089	0,0121	0,0150	0,0323	0,0597	0,0819	0,0219	0,0294	0,0372	0,0891	0,1322	0,1895	0,00065	0,00110	0,00056	0,00019	0,00014	0,00014
20 a 24 años	0,0083	0,0128	0,0151	0,0173	0,0479	0,0759	0,0115	0,0172	0,0199	0,0270	0,0671	0,1282	0,00065	0,00146	0,00108	0,00058	0,00034	0,00024
25 a 29 años	0,0086	0,0132	0,0171	0,0164	0,0523	0,0751	0,0108	0,0165	0,0208	0,0205	0,0694	0,1196	0,00060	0,00145	0,00103	0,00081	0,00036	0,00028
30 a 39 años	0,0062	0,0090	0,0133	0,0119	0,0425	0,0471	0,0076	0,0111	0,0159	0,0146	0,0557	0,0669	0,00083	0,00191	0,00135	0,00118	0,00051	0,00054
40 a 49 años	0,0070	0,0096	0,0161	0,0142	0,0513	0,0411	0,0087	0,0120	0,0200	0,0176	0,0717	0,0568	0,00076	0,00185	0,00109	0,00103	0,00040	0,00067
50 a 59 años	0,0088	0,0120	0,0212	0,0185	0,0690	0,0390	0,0120	0,0164	0,0293	0,0241	0,1072	0,0603	0,00064	0,00140	0,00087	0,00094	0,00035	0,00051
60 ó más años	0,0089	0,0119	0,0231	0,0232	0,0607	0,0248	0,0201	0,0282	0,0501	0,0424	0,1669	0,0680	0,00055	0,00132	0,00063	0,00068	0,00016	0,00049
Hombres	0,0035	0,0050	0,0092	0,0093	0,0078	0,0215	0,0055	0,0075	0,0115	0,0121	0,0405	0,0388	0,00046	0,00094	0,00070	0,00072	0,00029	0,00037
0 a 4 años	0,0084	-	-	-	0,0084	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0106	0,0133	-	-	0,0193	0,0394	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0115	0,0117	0,1149	-	0,0880	0,0978	0,1431	0,1402	0,7044	-	0,6025	2,0345	0,00030	0,00035	0,00006	-	0,00006	0,00005
15 a 19 años	0,0128	0,0168	0,0228	0,0493	0,0902	0,1055	0,0294	0,0370	0,0544	0,1377	0,1887	0,2177	0,00093	0,00138	0,00077	0,00031	0,00020	0,00016
20 a 24 años	0,0121	0,0177	0,0223	0,0269	0,0705	0,1042	0,0151	0,0207	0,0270	0,0422	0,0930	0,1500	0,00092	0,00174	0,00154	0,00094	0,00052	0,00030
25 a 29 años	0,0125	0,0182	0,0249	0,0256	0,0745	0,1041	0,0142	0,0200	0,0277	0,0315	0,0927	0,1437	0,00083	0,00176	0,00145	0,00122	0,00048	0,00033
30 a 39 años	0,0088	0,0125	0,0188	0,0178	0,0598	0,0665	0,0100	0,0138	0,0209	0,0210	0,0747	0,0861	0,00111	0,00236	0,00178	0,00169	0,00074	0,00070
40 a 49 años	0,0102	0,0139	0,0238	0,0206	0,0746	0,0626	0,0117	0,0156	0,0271	0,0250	0,1021	0,0783	0,00104	0,00242	0,00151	0,00142	0,00044	0,00094
50 a 59 años	0,0129	0,0178	0,0324	0,0252	0,0979	0,0643	0,0155	0,0208	0,0389	0,0317	0,1444	0,0832	0,00081	0,00184	0,00115	0,00113	0,00051	0,00071
60 ó más años	0,0142	0,0199	0,0361	0,0294	0,0993	0,0482	0,0246	0,0343	0,0603	0,0503	0,2080	0,0922	0,00066	0,00159	0,00074	0,00079	0,00020	0,00071
Mujeres	0,0034	0,0049	0,0084	0,0087	0,0081	0,0182	0,0064	0,0099	0,0130	0,0118	0,0438	0,0443	0,00048	0,00086	0,00060	0,00080	0,00024	0,00026
0 a 4 años	0,0089	-	-	-	0,0089	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5 a 9 años	0,0108	0,0133	-	-	0,0199	0,0432	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
10 a 14 años	0,0113	0,0114	0,1006	-	0,0867	0,1088	0,1845	0,2102	0,5769	-	0,6662	0,8154	0,00014	0,00020	0,00006	-	0,00005	0,00004
15 a 19 años	0,0123	0,0175	0,0198	0,0427	0,0796	0,1301	0,0325	0,0470	0,0508	0,1170	0,1851	0,3840	0,00051	0,00079	0,00085	0,00032	0,00019	0,00009
20 a 24 años	0,0115	0,0186	0,0206	0,0226	0,0654	0,1106	0,0179	0,0307	0,0295	0,0353	0,0970	0,2466	0,00066	0,00133	0,00125	0,00103	0,00037	0,00015
25 a 29 años	0,0120	0,0193	0,0236	0,0214	0,0733	0,1084	0,0165	0,0289	0,0315	0,0270	0,1046	0,2156	0,00090	0,00139	0,00110	0,00144	0,00042	0,00024
30 a 39 años	0,0087	0,0130	0,0187	0,0160	0,0604	0,0667	0,0118	0,0187	0,0246	0,0203	0,0836	0,1064	0,00115	0,00205	0,00158	0,00178	0,00051	0,00055
40 a 49 años	0,0096	0,0132	0,0218	0,0195	0,0707	0,0546	0,0131	0,0189	0,0297	0,0247	0,1007	0,0825	0,00102	0,00214	0,00134	0,00155	0,00070	0,00056
50 a 59 años	0,0120	0,0161	0,0281	0,0270	0,0973	0,0490	0,0188	0,0265	0,0446	0,0372	0,1600	0,0875	0,00079	0,00142	0,00098	0,00131	0,00025	0,00062
60 ó más años	0,0114	0,0148	0,0300	0,0374	0,0768	0,0289	0,0352	0,0495	0,0898	0,0786	0,2797	0,1007	0,00044	0,00104	0,00053	0,00059	0,00013	0,00039