

SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA

Caracterización del suelo por dos estratos.

Método de la barra enterrada en el suelo.

Napoleón Malpica Albert

Julio 2022

Napoleón Malpica A.

Contenido

Caracterización del suelo por dos estratos	1
Método de la barra enterrada en el suelo	1
1. Introducción	4
2. Fórmulas para calcular la resistencia de una barra.....	5
2.1 Resistencia de una barra para suelos homogéneos.....	5
2.2 Resistencia de una barra para suelos formados por dos estratos según Tagg.....	5
3. La resistividad aparente del suelo.....	6
4. Caracterización del suelo por dos estratos	8
ANEXO	15
Referencias.....	24

Napoleón Malpica A.

SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA

CARACTERIZACIÓN DEL SUELO POR DOS ESTRATOS POR EL MÉTODO QUE UTILIZA UNA BARRA ENTERRADA EN EL SUELO

1. Introducción.

Uno de los datos que se necesita saber, para diseñar un sistema de puesta a tierra, es la resistividad del suelo. Dependiendo de la complejidad de los modelos que utilice el diseñador, para diseñar y calcular la resistencia de un sistema de puesta a tierra, a veces será suficiente conocer la resistividad promedio del suelo (1) (2) (3) y en los modelos más complejos (4), será necesario caracterizar el suelo por estratos y además conocer el espesor de cada estrato.

En la recomendación IEEE 81-2012 (5) y en los apuntes que acompañan a este documento denominado "Sistema de puesta a tierra. Caracterización del suelo por dos estratos, método Schlumberger – Wenner" (6) se presentan dos metodologías muy conocidas para caracterizar el suelo, el de Wenner (7) y el de Schlumberger, métodos que requieren de grandes superficies de terreno que muchas veces resulta en una gran limitante cuando se pretende caracterizar el suelo en las ciudades.

Dado lo anterior, en el Anexo A de la recomendación IEEE 81-2021 también se propone un método alternativo, que consiste en la obtención de los parámetros del suelo, mediante la sucesiva medición de la resistencia de una barra enterrada a diferentes profundidades pero sin llegar a tocar el segundo estrato del suelo. Con los valores medidos se obtienen un conjunto de ecuaciones que emplean la fórmula desarrollada por Tagg (8), fórmula que fue desarrollada para calcular la resistencia de una barra, si la barra se encuentra enterrada en el primer estrato. Sin embargo, la misma norma advierte sobre las dificultades en obtener, algunas veces, resultados razonables al aplicar el método en cuestión y recomienda en lo posible utilizar el método de Wenner en lugar del método de la barra.

También existen métodos gráficos, para caracterizar el suelo (9), a partir de las mediciones de resistencias efectuadas a una barra, pero que no es tratado en estos apuntes.

Ahora bien, en estos apuntes se propone un método mejorado al descrito en la norma, donde las mediciones de resistencia se realizan penetrando ambos estratos del suelo, para este caso se emplean las dos fórmulas de resistencia desarrolladas por Tagg, tanto para barras que penetran solamente el primer estrato como para barras que penetran ambos estratos. Como solución, se obtiene la resistividad del primer estrato, el espesor del primer estrato y el coeficiente de reflexión. El método propuesto por lo general converge y se obtienen muy buenos resultados.

2. Fórmulas para calcular la resistencia de una barra.

La Figura 1 muestra una barra parcialmente enterrada en el suelo, a una profundidad l , también se muestran la primera capa o estrato del suelo que tiene una resistividad ρ_1 y un espesor h y la segunda capa del suelo que tiene un espesor infinito y una resistividad ρ_2 .

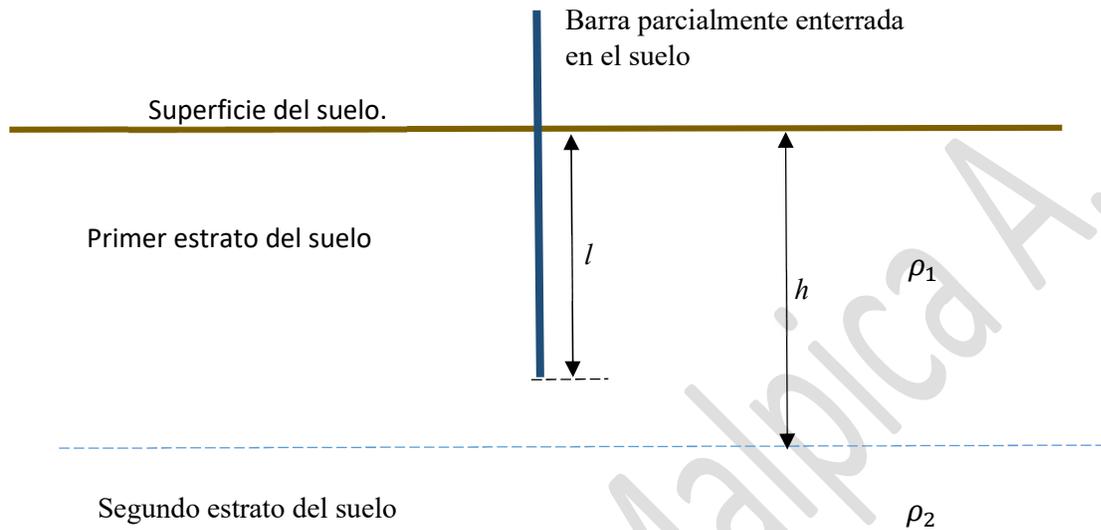


Fig. 1 Barra parcialmente enterrada en el suelo.

2.1 Resistencia de una barra para suelos homogéneos

Si el suelo es completamente homogéneo y no está formado por estratos, la resistencia de una barra se obtiene con la siguiente fórmula:

$$R = \frac{\rho}{2\pi l} \left[\ln \left[\frac{\left(\sqrt{(2l)^2 + r^2} + (2l) \right)}{r} \right] - \frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2}}{2l} + \frac{r}{2l} \right] (\Omega) \quad (2-1)$$

donde:

- r Es el radio del electrodo, en metros.
- l Es la longitud, en metros, de la parte del electrodo que se encuentra en contacto con el suelo (m). Ver la Figura 1.
- ρ Es la resistividad del suelo homogéneo. (Ωm) $\rho = \rho_1 = \rho_2$.

2.2 Resistencia de una barra para suelos formados por dos estratos según Tagg.

Si la longitud l de la parte de la barra que se encuentra en contacto con el suelo es menor que h (ver la figura 1), se aplica la siguiente fórmula:

$$R = \frac{\rho_1}{2\pi l} \left[\ln \left[\frac{2l}{r} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Gamma^k \ln \left(\frac{2kh+l}{2kh-l} \right) \right] \right] (\Omega) \quad \text{si } l \leq h \quad (2-2)$$

Si la longitud l de la parte de la barra que se encuentra en contacto con el suelo es mayor que h (ver la figura 1) se utiliza esta otra fórmula:

$$R = \frac{\rho_1}{2\pi l} \left(\frac{(1+\Gamma)l}{l+(2h-l)\Gamma} \right) \left[\ln \left[\frac{2l}{r} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Gamma^k \ln \left(\frac{2kh+l}{(2k-2)h+l} \right) \right] \right] (\Omega) \quad \text{si } l > h \quad (2-3)$$

donde:

h Es el espesor de la primera capa del suelo (m). $h \geq 0$, (Ver la Figura 1).
 ρ_1 Es la resistividad de la primera capa del suelo. (Ωm).
 ρ_2 Es la resistividad de la segunda capa del suelo. (Ωm).
 Γ Es el coeficiente de reflexión:

$$\Gamma = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad (2-4)$$

3. La resistividad aparente del suelo.

La resistividad aparente del suelo se define como la resistividad que debería tener un suelo homogéneo para que la resistencia de una barra que se encuentra instalada en un suelo formado por dos estratos, tenga el mismo valor de resistencia si la misma se instala en el suelo homogéneo.

Es importante aclarar que la definición de resistividad aparente para el método que utiliza una barra es diferente a la definición de resistividad aparente cuando se utiliza el método de Wenner o el método de Schlumberger (5)(6).

La resistividad aparente se obtiene al igualar las ecuaciones (2-1) con (2-2) si $l \leq h$ y (2-1) con (2-3) si $l > h$:

Si $l \leq h$:

$$\rho_a = \rho_1 \frac{\ln \left[\frac{2l}{r} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Gamma^k \ln \left(\frac{2kh+l}{2kh-l} \right) \right]}{\ln \left[\frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2} + (2l)}{r} \right] - \frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2}}{2l} + \frac{r}{2l}} (\Omega m) \quad \text{si } l \leq h \quad (3-1)$$

Si $l > h$:

$$\rho_a = \rho_1 \frac{\left(\frac{(1+\Gamma)l}{l+(2h-l)\Gamma} \right) \left[\ln \left[\frac{2l}{r} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Gamma^k \ln \left(\frac{2kh+l}{(2k-2)h+l} \right) \right] \right]}{\ln \left[\frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2} + (2l)}{r} \right] - \frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2}}{2l} + \frac{r}{2l}} (\Omega m) \quad \text{si } l > h \quad (3-2)$$

donde ρ_a es la resistividad aparente calculada.

En el caso de disponer de valores medidos de resistencia en lugar de calculados, de una barra, la resistividad aparente se puede obtener con la siguiente relación:

$$\rho_{a,medida} = \frac{2 \pi l R_{medida}}{\ln \left[\frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2} + (2l)}{r} \right] - \frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2}}{2l} + \frac{r}{2l}} (\Omega m) \quad (3-3)$$

donde:

R_{medida} Es la resistencia medida de la barra (Ω).
 $\rho_{a,medida}$ Es la resistividad aparente medida del suelo.

La resistividad aparente es un dato que resulta muy útil al momento de realizar una medición, ya que permite estimar tanto el valor de la resistividad de la primera capa del suelo ρ_1 como su espesor y además se puede saber si la resistividad de la segunda capa es mayor o menor que la resistividad de la primera capa o si se trata de un suelo homogéneo.

A manera de ejemplo, la Figura 2 muestra el comportamiento teórico de la resistividad aparente de un suelo formado por dos estratos, obtenidas con las ecuaciones (3-1) y (3-2), en función de la longitud de la parte del electrodo que se encuentra en contacto con el suelo l y para diversos valores del coeficiente de reflexión Γ , para elaborar la gráfica se asignó a la resistividad de la primera capa, un valor de $100 (\Omega m)$ y un espesor de $4 m$.

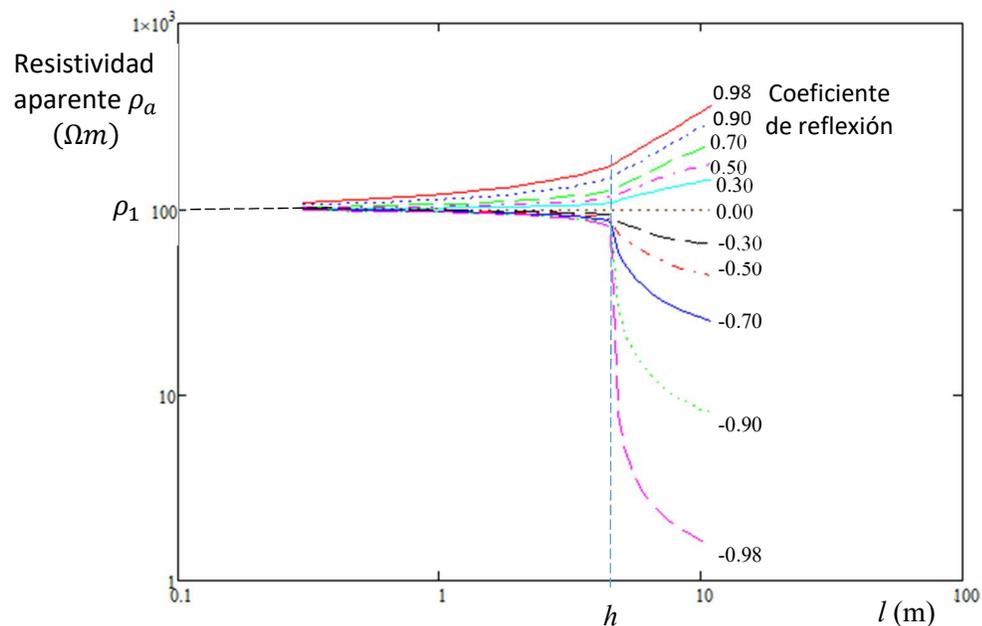


Fig. 2 Resistividad aparente del suelo en función de la longitud de barra que se encuentra en contacto con el suelo, para diversos valores de coeficientes de reflexión.

De la figura 2 se observa lo siguiente:

- Independientemente del coeficiente de reflexión, la resistividad aparente, para longitudes pequeñas l de la barra, tiende al valor de la resistividad de la primera capa ρ_1 .
- Para valores de $l \leq h$, la resistividad aparente tiende a aumentar si el coeficiente de reflexión es positivo, o dicho de otra manera, la resistividad aparente tiende a aumentar si la resistividad de la segunda capa ρ_2 es mayor que ρ_1 .
- Para valores de $l \leq h$, la resistividad aparente tiende a disminuir si el coeficiente de reflexión es negativo, o dicho de otra manera, la resistividad aparente tiende a disminuir si la resistividad de la segunda capa ρ_2 es menor que ρ_1 .

- El espesor h de la primera capa del suelo se puede estimar de la gráfica, al observar el cambio brusco de pendiente en las curvas, sobre todo si el coeficiente de reflexión es negativo.
- En el caso de un suelo homogéneo ($\Gamma = 0$), nótese que la resistividad aparente se mantiene constante con un valor igual a la resistividad del terreno.

Dado lo anterior, es altamente recomendable tener en el campo y al momento de realizar la medición de resistencia de la barra, disponer de alguna herramienta de cálculo, que muestre de manera gráfica los valores de resistividad aparente medidos, obtenidos con la ecuación (3-3); de esta forma, la persona que realiza la medición puede saber previamente y en el sitio, las características del suelo que está midiendo.

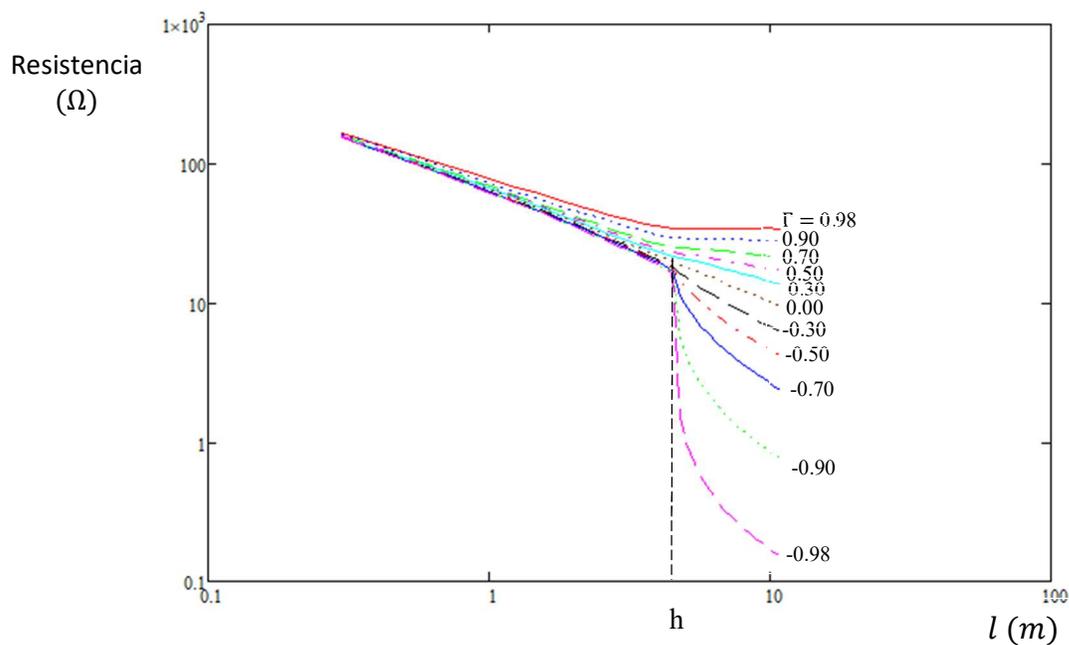


Fig. 3 Resistencia de una barra en función de la longitud de la misma que se encuentra en contacto con el suelo.

La Figura 3 muestra la resistencia teórica de la barra, para el caso planteado anteriormente, donde también se puede extraer las siguientes conclusiones:

- La resistencia de la barra disminuye a medida que la barra penetra en el suelo.
- Se puede estimar de la gráfica el espesor h de la primera capa del suelo.

4. Caracterización del suelo por dos estratos.

El procedimiento de medición consiste en realizar un conjunto de mediciones de resistencia a una barra, como la mostrada en la Figura 1, en función de la longitud l . Se espera como resultado obtener los parámetros del suelo como la resistividad de la primera capa, su espesor y el coeficiente

de reflexión. Para medir la resistencia de la barra, se pueden utilizar cualquiera de los métodos recomendados en la norma IEEE 81 (5) como el método de caída de potencial o el método de los tres puntos.

Para explicar el método, asúmase que se dispone de un conjunto de n mediciones de resistencia realizadas a una barra instalada en un terreno: $Rm_1, Rm_2, Rm_3, \dots, Rm_i, \dots, Rm_n$ que fueron realizadas a diferentes longitudes l (Ver la Fig. 1): $l_1, l_2, l_3, \dots, l_i, \dots, l_n$. Del grupo de mediciones es muy deseable contar con mediciones donde la barra haga contacto con ambos estratos, a menos que el suelo sea homogéneo, de lo contrario, puede haber errores en los resultados con las variables h y Γ .

Con los datos medidos, el procedimiento consiste en definir una función error ψ dada por la siguiente ecuación:

$$\psi(\rho_1, \Gamma, h) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{Rm_i - R(l_i)}{Rm_i} \right)^2 \quad (4-1)$$

donde:

- Rm_i -Es la resistencia medida de la barra a la profundidad l_i .
- $R(l_i)$ -Es la resistencia de la barra calculada con las ecuaciones (2-2) o (2-3).
- n -Es el número de mediciones realizadas.

El procedimiento de cálculo consiste en determinar los valores de ρ_1 , Γ y h que minimicen la función error, usando el método de *steepest descent* o de máxima pendiente, método que fue tomado del Anexo B de la recomendación IEEE 81-2012.

Para minimizar la función error, es necesario calcular previamente las derivadas parciales de la misma:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} \psi = -2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{Rm_i - R(l_i)}{Rm_i^2} \frac{\partial}{\partial \rho_1} R \right) \quad (4-2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Gamma} \psi = -2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{Rm_i - R(l_i)}{Rm_i^2} \frac{\partial}{\partial \Gamma} R \right) \quad (4-3)$$

$$\frac{\partial}{\partial h} \psi = -2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{Rm_i - R(l_i)}{Rm_i^2} \frac{\partial}{\partial h} R \right) \quad (4-4)$$

donde las derivadas parciales de la resistencia de la barra vienen dadas por:

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} R = \frac{1}{2\pi l} \left[\ln \left[\frac{2l}{r} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Gamma^k \ln \left(\frac{2kh+l}{2kh-l} \right) \right] \right] \quad \text{si } l \leq h \quad (4-5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} R = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1+\Gamma}{l+(2h-l)\Gamma} \right) \left[\ln \left[\frac{2l}{r} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Gamma^k \ln \left(\frac{2kh+l}{(2k-2)h+l} \right) \right] \right] \quad \text{si } l > h \quad (4-6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Gamma} R = \frac{\rho_1}{2\pi l} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left[k \Gamma^{k-1} \ln \left(\frac{2kh+l}{2kh-l} \right) \right] \right] \quad \text{si } l \leq h \quad (4-7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Gamma} R = \begin{cases} \frac{\rho_1}{\pi} \left(\frac{l-h}{l+(2h-l)\Gamma^2} \right) \left[\ln \left[\frac{2l}{r} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Gamma^k \ln \left(\frac{2kh+l}{(2k-2)h-l} \right) \right] \right] + \dots \\ + \frac{\rho_1}{2\pi} \left(\frac{1+\Gamma}{l+(2h-l)\Gamma} \right) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left[k \Gamma^{k-1} \ln \left(\frac{2kh+l}{(2k-2)h+l} \right) \right] \right] \end{cases} \quad \text{si } l > h \quad (4-8)$$

$$\frac{\partial}{\partial h} R = \frac{-2\rho_1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{k \Gamma^k}{(2k h+l)(2kh-l)} \right] \quad \text{si } l \leq h \quad (4-9)$$

$$\frac{\partial}{\partial h} R = \begin{cases} \frac{-\rho_1}{\pi} \left(\frac{\Gamma(1+\Gamma)}{(l+(2h-l)\Gamma)^2} \right) \left[\ln \left[\frac{2l}{r} \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\Gamma^k \ln \left(\frac{2kh+l}{(2k-2)h+l} \right) \right] \right] + \dots \\ + \frac{\rho_1}{\pi} \left(\frac{(1+\Gamma)l}{l+(2h-l)\Gamma} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[\Gamma^k \frac{1}{(2k-2)h+l(2kh+l)} \right] \right) \end{cases} \quad \text{si } l > h \quad (4-10)$$

donde Γ viene dado por:

$$\Gamma = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \quad (4-11)$$

Con las derivadas parciales (4-2)(4-3) y (4-4), se calcula el módulo del gradiente de la función error $|\nabla\psi|$, al converger los resultados, el módulo de $\nabla\psi$ debe ser muy pequeño y menor a un cierto valor Tol :

$$|\nabla\psi| = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial \rho_1} \psi \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \Gamma} \psi \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial h} \psi \right)^2} \quad (4-12)$$

Y los incrementos que se deben realizar en cada iteración a las variables que se quieren calcular (ρ_1 , Γ y h) van a depender del gradiente de la función error:

$$\Delta\rho_1 = -\frac{\tau |\rho_1|}{|\nabla\psi|} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \psi \quad (4-13)$$

$$\Delta\Gamma = -\frac{\tau |\Gamma|}{|\nabla\psi|} \frac{\partial}{\partial \Gamma} \psi \quad (4-14)$$

$$\Delta h = -\frac{\tau |h|}{|\nabla\psi|} \frac{\partial}{\partial h} \psi \quad (4-15)$$

donde τ es una constante positiva menor a la unidad ($1 > \tau > 0$)

Algoritmo de cálculo:

- Se asignan los valores iniciales de ρ_1^0 , Γ^0 , h^0 y la tolerancia Tol .
- Se calculan las derivadas parciales dadas por (4-2)(4-3) y (4-4) y el módulo del gradiente de la función error, dado por (4-12).
- Con las derivadas parciales se calculan los incrementos $\Delta\rho_1$, $\Delta\rho_2$ y Δh dados por (4-13)(4-14) y (4-15).
- Se obtienen los nuevos valores de ρ_1 , Γ y h con las siguientes ecuaciones:

$$\rho_1^i = \rho_1^{i-1} + \Delta\rho_1 \quad (4-16)$$

$$\Gamma^i = \Gamma^{i-1} + \Delta\Gamma \quad (4-17)$$

$$h^i = h^{i-1} + \Delta h \quad (4-18)$$

- Se toma una decisión en el proceso con base a las siguientes condiciones:

Si $|\nabla\psi| > Tol$ entonces se regresa al paso b.

Si $|\nabla\psi| < Tol$ entonces se para el proceso y ρ_1^i, Γ^i y h^i es la solución.

- **Ejercicio 1**

Obtener los parámetros de un suelo formado por dos estratos, a partir de los valores de resistencia medidos a una barra a diversas profundidades l .

Napoleón Malpica A.

Tabla 1 Mediciones de resistencia de una barra enterrada a diversas profundidades.

medición	Profundidad (m)	Resistencia (ohm)	medición	Profundidad (m)	Resistencia (ohm)	medición	Profundidad (m)	Resistencia (ohm)
1	0.3	225.9	11	3.3	29.4	21	6.3	9.11
2	0.6	125.8	12	3.6	22.7	22	6.6	9.12
3	0.9	85.4	13	3.9	24.0	23	6.9	7.69
4	1.2	67.3	14	4.2	21.7	24	7.2	7.85
5	1.5	55.7	15	4.5	19.2	25	7.5	7.58
6	1.8	50.0	16	4.8	14.4	26	7.8	7.51
7	2.1	42.4	17	5.1	14.6	27	8.1	6.35
8	2.4	40.6	18	5.4	11.9	28	8.4	6.29
9	2.4	32.5	19	5.7	11.6	29	8.7	6.24
10	3.0	32.0	20	6.0	9.93	30	9.0	5.90

a) Se asignan los valores iniciales y la tolerancia:

$$\rho_1^0 = 100 (\Omega m) \quad (4-19)$$

$$\rho_2^0 = 19 (\Omega m) \quad (4-20)$$

$$\Gamma^0 = -0.6807 (\Omega m) \quad (4-21)$$

$$h^0 = 5 (m) \quad (4-22)$$

$$Tol = 0.005 \quad (4-23)$$

Los valores semillas o iniciales pueden tener cualquier valor, pero si están cerca de la solución, la convergencia será más rápida.

b) Con los datos de ρ_1 , Γ y h , se calculan las derivadas parciales dadas por las ecuaciones desde la (4-2) hasta la (4-10) y el módulo del gradiente de la función error (4-12):

$$\frac{\partial}{\partial \rho_1} \psi = 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{Rm_i - R(l_i)}{Rm_i^2} \frac{\partial}{\partial \rho_1} R \right) = 0.0718 \quad (4-24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Gamma} \psi = 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{Rm_i - R(l_i)}{Rm_i^2} \frac{\partial}{\partial \Gamma} R \right) = -2.807 \quad (4-25)$$

$$\frac{\partial}{\partial h} \psi = 2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{Rm_i - R(l_i)}{Rm_i^2} \frac{\partial}{\partial h} R \right) = 1.1457 \quad (4-26)$$

$$|\nabla \psi| = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial \rho_1} \psi \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \Gamma} \psi \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial h} \psi \right)^2} = 3.03 \quad (4-27)$$

donde $R(l_i)$ viene dada por (2-2) ó (2-3) y Rm_i son los valores de resistencia medidos que se indican en la Tabla 1.

c) Con los resultados de las derivadas parciales, se calculan los incrementos $\Delta \rho_1$, $\Delta \Gamma$ y Δh dados por (4-13)(4-14) y (4-15):

$$\Delta \rho_1 = -\frac{0.0002|\rho_1|}{\left| \frac{\partial}{\partial \rho_1} \psi \right|} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \psi = -0.02 \quad (4-28)$$

$$\Delta\Gamma = -\frac{0.0002|\Gamma|}{|\nabla\psi|} \frac{\partial}{\partial\Gamma} \psi = 1.36 \cdot 10^{-4} \quad (4-29)$$

$$\Delta h = -\frac{0.0002|h|}{|\nabla\psi|} \frac{\partial}{\partial h} \psi = -1.0 \cdot 10^{-3} \quad (4-30)$$

Nota: Se seleccionó $\tau = 0.0002$ para las tres ecuaciones anteriores

d) Con los incrementos, se obtienen los nuevos valores de ρ_1 , Γ y h :

$$\rho_1^1 = \rho_1^0 + \Delta\rho_1 = 99.99 \quad (4-31)$$

$$\Gamma^1 = \Gamma^0 + \Delta\Gamma = -0.6805 \quad (4-32)$$

$$h^1 = h^0 + \Delta h = 4.999 \quad (4-33)$$

e) Se compara el módulo del gradiente de la función error con la tolerancia, como en este caso $|\nabla\psi| > Tol$, entonces se regresa al paso b), el proceso continúa hasta lograr que $|\nabla\psi| < Tol$.

La convergencia de este método iterativo no es rápida, pero casi siempre se obtiene un resultado. Los resultados obtenidos para el ejemplo propuesto fueron los siguientes:

$$\rho_1 = 88.39 \text{ (}\Omega m\text{)} \quad (4-34)$$

$$\Gamma = -0.5019 \quad (4-35)$$

$$\rho_2 = 29.32 \text{ (}\Omega m\text{)} \quad (4-36)$$

$$h = 4.058 \text{ (}m\text{)} \quad (4-37)$$

$$\psi(\rho_1, \Gamma, h) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{Rm_i - R(l_i)}{Rm_i} \right)^2 = 0.0755 \quad (4-38)$$

La función $\psi(\rho_1, \Gamma, h)$ permite evaluar el error de la regresión no lineal efectuada, puede suceder que el problema tenga más de una solución, entonces de las soluciones obtenida de debe escoger la que presente menor error. La solución que se obtiene del método iterativo, va a depender de las condiciones iniciales seleccionadas, es por este motivo la importancia de tener una curva de la resistividad aparente medida del suelo, para que la misma sirva de ayuda en la escogencia de los valores iniciales y obtener la mejor solución del problema.

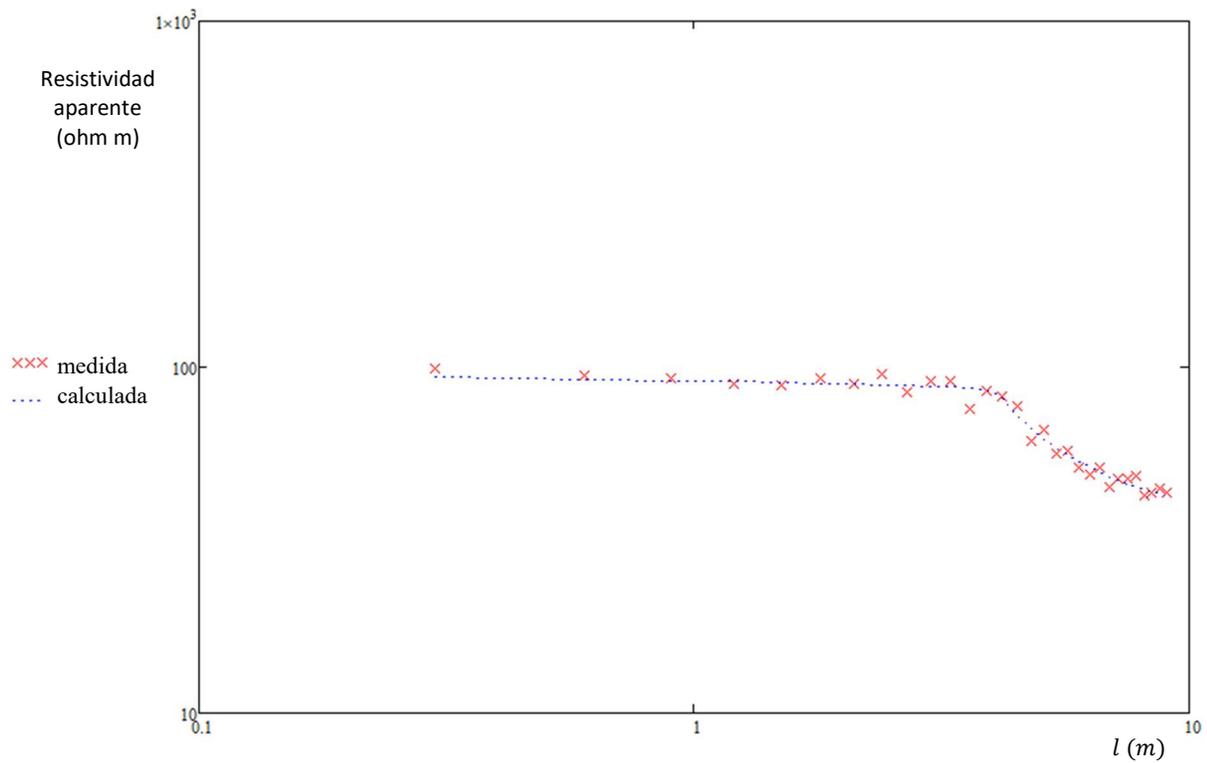


Fig. 4 Comparación de la resistividad aparente medida con la resistividad aparente calculada, en función de la profundidad a la cual se encuentra enterrada la barra

Con los resultados obtenidos, se puede graficar y comparar la resistividad aparente medida, obtenida con (3-3) con la resistividad aparente calculada, utilizando para ello los datos obtenidos de la regresión (4-34)(4-35) y (4-37) y las ecuaciones (3-1) y (3-2), la Fig. 4 muestra la gráfica en cuestión.

ANEXO

MathCad

Caracterización del suelo por dos estratos mediante la medición de la resistencia de una barra.

Método Steepest descent

1 - Datos de la barra.

$r := 0.006$ Radio de la barra (m).

La barra tiene una longitud de 9 metros

Napoleón Malpica A.

2. Datos medidos

nmed := 30 Es el número de mediciones realizadas

i := 1..nmed

lon_i := Longitud de la barra (m)

Rmed_i := Valores de resistencia medida (ohm)

0.3
0.6
0.9
1.2
1.5
1.8
2.1
2.4
2.7
3.0
3.3
3.6
3.9
4.2
4.5
4.8
5.1
5.4
5.7
6.0
6.3
6.6
6.9
7.2
7.5
7.8
8.1
8.4
8.7
9.0

225.9
125.81
88.43
67.24
55.67
50.02
42.44
40.56
32.50
31.96
29.39
22.66
24.03
21.70
19.16
14.39
14.63
11.89
11.56
9.93
9.11
9.12
7.69
7.85
7.58
7.51
6.35
6.29
6.24
5.90

n := 40

Numero de imágenes a considerar en el cálculo.

3. Fórmulas para calcular la resistencia de una barra según Tagg

Fórmula para barras cuya longitud sea menor al espesor del primer estrato:

$$R1(lo, \rho l, \Gamma, h) := \frac{\rho l}{2 \cdot \pi \cdot lo} \left[\ln \left(\frac{2 \cdot lo}{r} \right) + \sum_{j=1}^n \left[(\Gamma)^j \cdot \ln \left(\frac{2 \cdot j \cdot h + lo}{2 \cdot j \cdot h - lo} \right) \right] \right]$$

lo - es la longitud de la barra en contacto con el suelo

Formula de resistencia para barras enterradas cuya longitud lo es mayor que el espesor del primer estrato:

$$R2(lo, \rho l, \Gamma, h) := \frac{\rho l}{2 \cdot \pi \cdot lo} \cdot \frac{1 + \Gamma}{(1 - \Gamma) + 2 \cdot \Gamma \cdot \frac{h}{lo}} \left[\ln \left(\frac{2 \cdot lo}{r} \right) + \sum_{j=1}^n \left[(\Gamma)^j \cdot \ln \left[\frac{2 \cdot j \cdot h + lo}{(2 \cdot j - 2) \cdot h + lo} \right] \right] \right]$$

Resistencia de una barra:

$$R_t := \begin{cases} R1(lo, \rho l, \Gamma, h) & \text{if } lo \leq h \\ R2(lo, \rho l, \Gamma, h) & \text{if } lo > h \\ R_t & \end{cases} \quad (A1)$$

4. Resistividad aparente medida

$$ResisAparentMed_i := \frac{2 \cdot \pi \cdot R_{med} \cdot lon_i}{\ln \left[\frac{\sqrt{(2 \cdot lon_i)^2 + r^2} + 2 \cdot lon_i}{r} \right] - \frac{\sqrt{(2 \cdot lon_i)^2 + r^2}}{2 \cdot lon_i} + r}$$

5. Derivadas parciales de la función resistencia.

Derivadas de la ecuación (A1):

Derivada con respecto a ρ_1

$$dRd\rho_1(\rho_1, \Gamma, h) := \begin{cases} D \leftarrow \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot lo} \cdot \left[\ln\left(\frac{2 \cdot lo}{r}\right) + \sum_{j=1}^n \left[(\Gamma)^j \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot j \cdot h + lo}{2 \cdot j \cdot h - lo}\right) \right] \right] & \text{if } lo \leq h \\ D \leftarrow \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{(1 + \Gamma)}{lo + (2 \cdot h - lo) \cdot \Gamma} \cdot \left[\ln\left(\frac{2 \cdot lo}{r}\right) \dots \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^n \left[(\Gamma)^j \cdot \ln\left[\frac{2 \cdot j \cdot h + lo}{(2 \cdot j - 2) \cdot h + lo}\right] \right] \right] & \text{if } lo > h \end{cases}$$

Derivada de la ec. (A1) con respecto a Γ

$$dRd\Gamma(\rho_1, \Gamma, h) := \begin{cases} D \leftarrow \frac{\rho_1}{2 \cdot \pi \cdot lo} \cdot \left[\sum_{j=1}^n \left(j \cdot \Gamma^{j-1} \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot j \cdot h + lo}{2 \cdot j \cdot h - lo}\right) \right) \right] & \text{if } lo \leq h \\ D \leftarrow \frac{\rho_1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{(1 + \Gamma)}{[lo + (2 \cdot h - lo) \cdot \Gamma]} \cdot \left[\sum_{j=1}^n \left[j \cdot (\Gamma)^{j-1} \cdot \ln\left[\frac{2 \cdot j \cdot h + lo}{(2 \cdot j - 2) \cdot h + lo}\right] \right] \right] \dots & \text{if } lo > h \\ + \frac{\rho_1}{\pi} \cdot \left[\frac{lo - h}{[lo + (2 \cdot h - lo) \cdot \Gamma]^2} \right] \cdot \left[\ln\left(\frac{2 \cdot lo}{r}\right) \dots \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^n \left[(\Gamma)^j \cdot \ln\left[\frac{2 \cdot j \cdot h + lo}{(2 \cdot j - 2) \cdot h + lo}\right] \right] \right] & \end{cases}$$

Derivada de la ec. (A1) con respecto al espesor h:

$$dRdh(lo, \rho_1, \Gamma, h) := \left[\begin{array}{l} D \leftarrow \frac{\rho_1 \cdot 2}{\pi} \cdot \left[\sum_{j=1}^n \left[\frac{-1 \cdot j \cdot \Gamma^j}{(2 \cdot j \cdot h + lo) \cdot (2 \cdot j \cdot h - lo)} \right] \right] \text{ if } lo \leq h \\ D \leftarrow \frac{-\rho_1}{\pi} \cdot \frac{\Gamma \cdot (1 + \Gamma)}{[lo + (2 \cdot h - lo) \cdot \Gamma]^2} \cdot \left[\ln\left(\frac{2 \cdot lo}{r}\right) \dots \right. \\ \quad \left. + \sum_{j=1}^n \left[(\Gamma)^j \cdot \ln\left[\frac{2 \cdot j \cdot h + lo}{(2 \cdot j - 2) \cdot h + lo} \right] \right] \right] \dots \text{ if } lo > h \\ + \frac{\rho_1}{\pi} \cdot \frac{(1 + \Gamma) \cdot lo}{[lo + (2 \cdot h - lo) \cdot \Gamma]} \cdot \left[\sum_{j=1}^n \left[(\Gamma)^j \cdot \frac{1}{(2 \cdot j \cdot h + lo) \cdot [(2 \cdot j - 2) \cdot h + lo]} \right] \right] \end{array} \right] D$$

6 Valores semillas o iniciales:

$$\rho_{1sem} := 100$$

$$\rho_{2sem} := 19$$

$$\Gamma_{sem} := \frac{\rho_{2sem} - \rho_{1sem}}{\rho_{2sem} + \rho_{1sem}}$$

$$\Gamma_{sem} = -0.680672$$

$$h_{sem} := 5$$

$$Tol := 0.005 \quad \tau = 0.0002$$

7 Rutina de cálculo según el método de máxima pendiente:

```

X := | p1 ← ρ lsem
      p2 ← Γ sem
      hh ← hsem
      moddF ← 10
      while |moddF| > Tol
      |
      | dFdp1 ← -2 ∑k=1nmed [  $\frac{R_{med_k} - R(lon_k, p1, p2, hh)}{(R_{med_k})^2} \cdot (dRd\rho l(lon_k, p1, p2, hh))$  ]
      | dFdp2 ← -2 ∑k=1nmed [  $\frac{R_{med_k} - R(lon_k, p1, p2, hh)}{(R_{med_k})^2} \cdot (dRd\Gamma(lon_k, p1, p2, hh))$  ]
      | dFdh ← -2 ∑k=1nmed [  $\frac{R_{med_k} - R(lon_k, p1, p2, hh)}{(R_{med_k})^2} \cdot (dRdh(lon_k, p1, p2, hh))$  ]
      | moddF ← √(dFdp12 + dFdp22 + dFdh2)
      | Δp1 ← 0
      | Δp2 ← 0
      | Δhh ← 0
      | if moddF > 0
      | | Δp1 ← -τ · |p1| ·  $\frac{dFdp1}{moddF}$ 
      | | Δp2 ← -τ · |p2| ·  $\frac{dFdp2}{moddF}$ 
      | | Δhh ← -τ · |hh| ·  $\frac{dFdh}{moddF}$ 
      | p1 ← p1 + Δp1
      | p2 ← p2 + Δp2
      | hh ← hh + Δhh
      | ΔF ← dFdp1 · Δp1 + dFdp2 · Δp2 + dFdh · Δhh
      | X1 ← p1
      | X2 ← p2
      | X3 ← hh
      | X4 ← ΔF
      | X5 ← moddF
      | X

```

8 Resultados

$\rho_{11} := X_1$ Resistividad de la primera capa (ohm m)

$\rho_{11} = 88.123344$

$\Gamma := X_2$ Coeficiente de reflexión

$\Gamma = -0.501222$

$\rho_{22} := \frac{1 + X_2}{1 - X_2} \cdot X_1$ Resistividad de la segunda capa o estrato (ohm m)

$\rho_{22} = 29.27884$

$hh := X_3$ Espesor de la primera capa

$hh = 4.067405$

$Rcal_i := R(lon_i, \rho_{11}, \Gamma, hh)$ Resistencia de la barra, calculada con los datos obtenidos

Resistividad aparente calculada con los datos obtenidos

$$ResisAparentCal_i := \frac{2 \cdot \pi \cdot Rcal_i \cdot lon_i}{\ln \left[\frac{\sqrt{(2 \cdot lon_i)^2 + r^2} + 2 \cdot lon_i}{r} \right] - \frac{\sqrt{(2 \cdot lon_i)^2 + r^2}}{2 \cdot lon_i} + r}$$

$$Error := \sum_{i=1}^{nmed} \left(\frac{Rmed_i - Rcal_i}{Rmed_i} \right)^2$$

Error = 0.075385

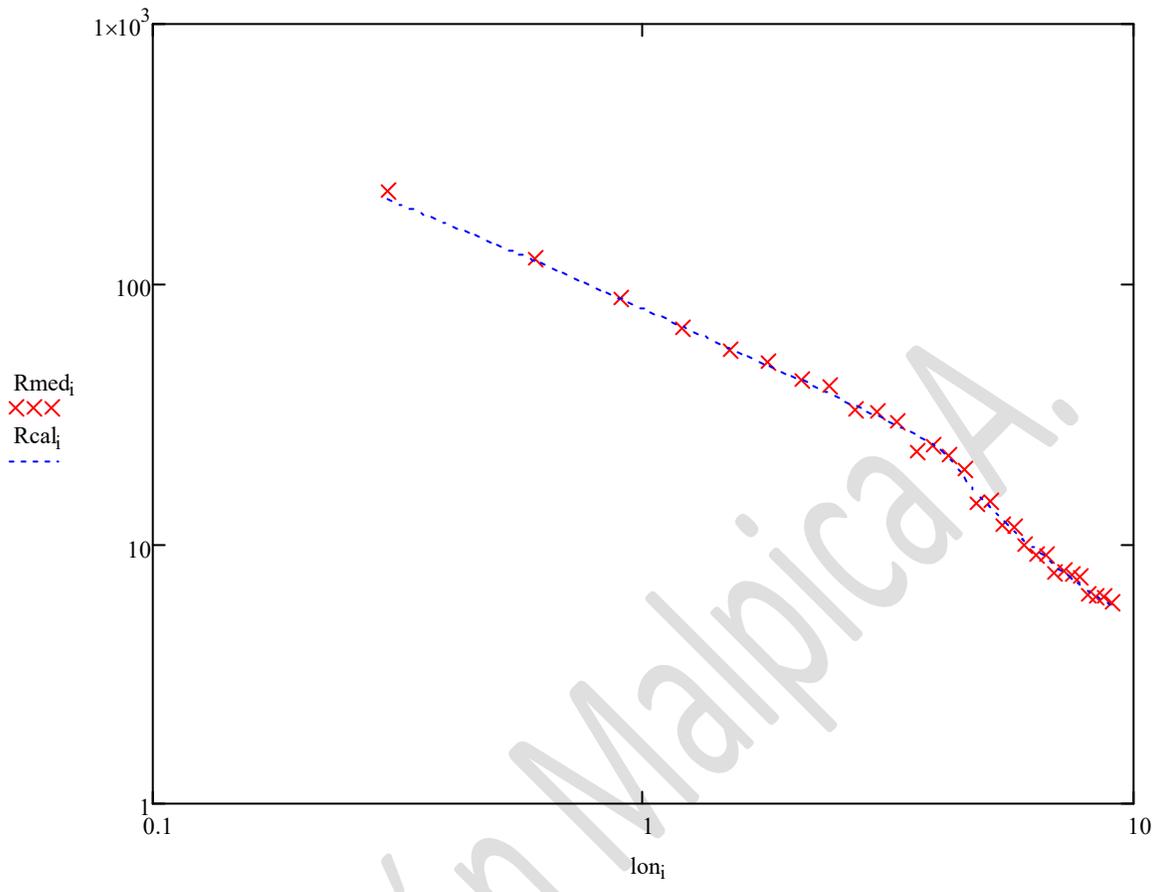


Fig A1 Comparación de la resistencia medida con la calculada, en función de la longitud.

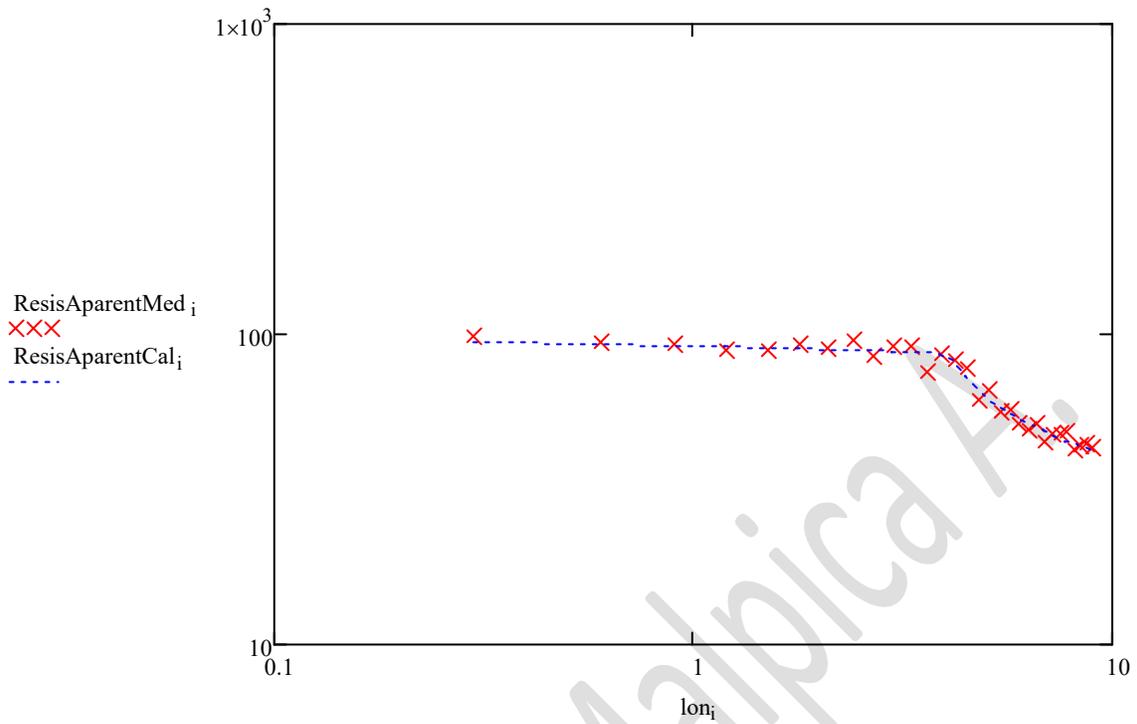


Fig A2. Comparación de la resistividad aparente medida con la calculada, en función de la longitud

Napoleón Malpica A.

Referencias

1. Malpica Albert, Napoleón, Sistemas de puesta a tierra. Parte 1. (apuntes de la asignatura Sistemas de puesta a tierra, Universidad Central de Vzla.).
2. Malpica Albert, Napoleón, Sistemas de puesta a tierra. Parte 2. (apuntes de la asignatura Sistemas de puesta a tierra, Universidad Central de Vzla.).
3. ANSI/IEEE Std 80 *IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding*.
4. Malpica Albert, Napoleón, Sistemas de puesta a tierra. Parte 4. (apuntes de la asignatura Sistemas de puesta a tierra, Universidad Central de Vzla.).
5. *ANSI/IEEE Std 81 2012 IEEE Guide for Measuring Earth Resistivity, Ground Impedance, and Earth Surface Potential of a Ground System*
6. Malpica Albert, Napoleón, Sistemas de puesta a tierra. Caracterización del suelo por dos estratos, métodos Schlumberger - Wenner (apuntes de la asignatura Sistemas de puesta a tierra, Universidad Central de Vzla.).
7. Wenner, Frank, "A Method of Measuring Earth Resistivity", Bulletin of the Bureau of Standards, Volume 12, No. 4, pp. 469-478, May 1916.
8. Tagg, G. F., Earth Resistance, Pitman Publishing Corporation, 1964.
9. Nahman J., Salomon D., A Practical Method for the Interpretation of Earth Resistivity Data Obtained From Driven Rod Test, IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 3, No. 4, October 1988.