

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA
MELCHOR CENTENO V.

**DISERTACIÓN SOBRE LAS ECUACIONES DE HEAVISIDE
EMPLEADAS PARA MODELAR BARRAS PARA
SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA**

Trabajo de Ascenso presentado por el
Profesor Wilmer Napoleón Malpica Albert
ante la ilustre Universidad Central de
Venezuela, para optar a la categoría de
Profesor Titular

CARACAS, NOVIEMBRE 2016

RESUMEN

Las ecuaciones de Heaviside fueron desarrolladas para modelar cables y líneas de transmisión eléctricas. Como los electrodos de puesta a tierra son por lo general conductores de forma cilíndrica, algunos investigadores emplean dichas ecuaciones para modelar electrodos de puesta a tierra. Sin embargo, las ecuaciones de Heaviside, como no fueron desarrolladas para electrodos de puesta a tierra, no toman en cuenta algunos fenómenos electromagnéticos presentes en el suelo; por este motivo, en este trabajo se tiene como objetivo obtener un par de ecuaciones diferenciales, con la misma topología a las obtenidas por Heaviside, pero que sean aplicables a barras para puesta a tierra. Las nuevas ecuaciones se obtienen teniendo como punto de partida las ecuaciones de Maxwell. Estas ecuaciones toman en cuenta todos los modos de propagación que pueden ocurrir en la tierra, a diferencia de las ecuaciones obtenidas por Heaviside, donde sólo considera un modo de propagación, particularmente el modo transversal electromagnético TEM, que es el modo dominante en líneas de transmisión. Para el desarrollo de las nuevas ecuaciones, se considera que el medio es semi-infinito, formado por dos estratos (tierra – aire) y en cuanto a la dinámica del campo electromagnético, se asume que en el suelo ocurre un fenómeno de propagación y radiación del campo electromagnético. Las ecuaciones también toman en cuenta la influencia de otros campos electromagnéticos que irradian la barra, producidos por otras fuentes, como el campo generado por otros electrodos vecinos, o el campo generado por una fuente cualquiera o por cualquier equipo eléctrico. De las nuevas ecuaciones se extraen tanto los parámetros eléctricos como son: conductancias, inductancias, resistencias y capacitancias, así como la red eléctrica equivalente, con parámetros distribuidos, que resultó mucho más compleja en comparación con el modelo eléctrico, con parámetros distribuidos que se emplea en líneas de transmisión. Las nuevas ecuaciones fueron empleadas para calcular las impedancias de puesta a tierra en barras, para luego ser comparadas con valores medidos, obteniéndose buenos resultados hasta una frecuencia de 1MHz.

Palabras Claves

Barras para puesta a tierra, líneas de transmisión, ecuaciones de Heaviside, ecuaciones de Maxwell, puesta a tierra, integrales de Sommerfeld, parámetros distribuidos, funciones de Green, ecuaciones de propagación, medios bi-estratificados, ecuaciones integro-diferenciales, impedancia de puesta a tierra, potenciales, modos de propagación, autovalores, modo transversal magnético, modo transversal eléctrico, modo transversal eléctrico y magnético, ondas cilíndricas, ondas esféricas, ondas viajeras.

Key Word

Grounding rod, transmission line, Heaviside equations, Maxwell equations, grounding, Sommerfeld integrals, distributed parameters, Greens` function, propagation equations, bi-stratified media, integro-differential equations, grounding impedance, potentials, propagation modes, eigen values, transverse magnetic mode, transverse electric mode, transverse electric and magnetic mode, cylindrical waves, spherical waves.

SIMBOLOGÍA

A	Vector potencial magnético en el dominio del tiempo
\overline{A}	Vector potencial magnético en el dominio de la frecuencia
a_x	Vector unitario en dirección del eje x en coordenadas cartesianas
a_y	Vector unitario en dirección del eje y en coordenadas cartesianas
a_z	Vector unitario en dirección del eje z en coordenadas cartesianas o cilíndricas
a_ρ	Vector unitario en dirección de ρ en coordenadas cilíndricas
a_ϕ	Vector unitario en dirección de ϕ en coordenadas cilíndricas o esféricas
a_r	Vector unitario en dirección de r en coordenadas esféricas
a_θ	Vector unitario en dirección de θ en coordenadas esféricas
B	Vector inducción magnética o densidad de flujo en el dominio del tiempo
\overline{B}	Vector inducción magnética o densidad de flujo en el dominio del tiempo
C	Capacitancia
D	Vector desplazamiento eléctrico en el dominio del tiempo
\overline{D}	Vector desplazamiento eléctrico en el dominio de la frecuencia
E	Vector campo eléctrico en el dominio del tiempo
\overline{E}	Vector campo eléctrico en el dominio de la frecuencia
g	Función de Green
G	Conductancia
H	Vector campo magnético en el dominio del tiempo
\overline{H}	Vector campo magnético en el dominio de la frecuencia
h	Altura, longitud
i	Corriente en el dominio del tiempo
i_{tierra}	Corriente inyectada por el electrodo de tierra en el dominio del tiempo
\overline{I}	Fasor corriente o corriente en el dominio de la frecuencia
\overline{I}_{tierra}	Fasor corriente que se inyecta en la tierra, en el dominio de la frecuencia
J	Densidad de corriente en el dominio del tiempo
J_s	Densidad de corriente fuente, en el dominio del tiempo
\overline{J}_s	Densidad de corriente fuente en el dominio de la frecuencia
J_n	Función de Bessel de primer tipo y orden n
j	Número imaginario igual a $\sqrt{-1}$
L	Inductancia
M	Inductancia mutua
n	Vector unitario normal a la superficie
R	Resistencia
R_{barra}	Resistencia de puesta a tierra de la barra
r	Vector de posición
r	Magnitud del vector posición o componente relacionado con las coordenadas esféricas
r_{cond}	Radio del conductor
r_{zona}	Radio de la zona de influencia del electrodo
S	Superficie
t	Tiempo

\bar{U}_a	Potencial sobre la superficie de la tierra en un punto a
V	Potencial escalar eléctrico en el dominio del tiempo
V_{barra}	Tensión en la barra en el dominio del tiempo
\bar{V}	Potencial escalar eléctrico en el dominio de la frecuencia
\bar{V}_{barra}	Tensión de la barra en el dominio de la frecuencia
Y_n	Función de Bessel de segundo tipo y orden n
\bar{Y}_p	Admitancia paralelo por unidad de longitud
\bar{Z}_0	Impedancia característica
\bar{Z}_{tierra}	Impedancia de tierra del sistema de electrodos
\bar{Z}_s	Impedancia serie por unidad de longitud
$\nabla \cdot$	Operador diferencial divergencia
∇	Operador diferencial gradiente
$\nabla \times$	Operador diferencial rotor
∇^2	Operador diferencial Laplaciano
Γ	Constante de propagación
ρ	Posición en coordenadas cilíndricas
ρ'	Densidad volumétrica de cargas libre en el dominio del tiempo
ρ_s	Densidad volumétrica de cargas fuentes en el dominio del tiempo
$\bar{\rho}_s$	Densidad volumétrica de cargas fuentes, en el dominio de la frecuencia
θ	Ángulo polar o ángulo de latitud en coordenadas esféricas
ϵ	Permitividad
γ	Constante de propagación
λ	Longitud de onda, densidad lineal de carga eléctrica
μ	Permeabilidad
ω	Frecuencia angular
ϕ	Ángulo azimutal en coordenadas esféricas
σ	Conductividad

INDICE

RESUMEN	I
SIMBOLOGÍA	IV
1 INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN DEL TRABAJO	8
2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y ANTECEDENTES	11
3 ECUACIONES DE MAXWELL Y ECUACIONES DE PROPAGACIÓN DE ONDAS PARA UN MEDIO CON PÉRDIDAS	15
3.1 ECUACIONES DE MAXWELL	15
3.2 ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN PARA EL CAMPO ELÉCTRICO.	16
3.3 ECUACIÓN DE PROPAGACIÓN PARA EL CAMPO MAGNÉTICO	18
3.4 ECUACIONES DE PROPAGACIÓN PARA LOS POTENCIALES ESCALAR ELÉCTRICO Y VECTORIAL MAGNÉTICO.	18
4 BREVE INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA.	21
4.1 QUE ES UN SISTEMA DE PUESTA A TIERRA Y PORQUÉ ES NECESARIO CONTAR CON UN SISTEMA DE PUESTA A TIERRA.	21
4.2 CÁLCULO DE LA RESISTENCIA PROPIA EN ELECTRODOS DE PUESTA A TIERRA ASUMIENDO UN COMPORTAMIENTO ESTACIONARIO DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO.	21
4.3 CÁLCULO DE LA RESISTENCIA MUTUA ENTRE ELECTRODOS DE PUESTA A TIERRA.	28
4.4 CÁLCULO DE LA RESISTENCIA DE PUESTA A TIERRA EN SISTEMAS FORMADOS POR MÁS DE UN ELECTRODO	30
4.5 LA ZONA DE INFLUENCIA DE UN ELECTRODO O DE UN SISTEMA DE ELECTRODOS.	31
4.6 LA CORRIENTE DE RETORNO DE UN SISTEMA DE PUESTA A TIERRA	35
5 CÁLCULO DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN, LOS MODOS DE PROPAGACIÓN, Y LAS ECUACIONES DE HEAVISIDE.	39
5.1 CÁLCULO DEL CAMPO ELÉCTRICO EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN Y EL MODO DE PROPAGACIÓN TRANSVERSAL MAGNÉTICO TM.	39
5.2 CÁLCULO DEL CAMPO MAGNÉTICO EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN Y EL MODO DE PROPAGACIÓN TRANSVERSAL ELÉCTRICO TE.	48
5.3 EL MODO DE PROPAGACIÓN TEM Y LAS ECUACIONES DE HEAVISIDE.	50
5.4 MODELACIÓN DE BARRAS PARA PUESTA A TIERRA USANDO EL MODELO DE LA LÍNEA DE TRANSMISIÓN DE HEAVISIDE.	59

6	NUEVAS ECUACIONES DEL TIPO HEAVISIDE, VÁLIDAS PARA MODELAR BARRAS PARA PUESTA A TIERRA.	62
6.1	DESARROLLO DE LAS ECUACIONES	62
6.2	DISCUSIÓN	68
7	DEDUCCIÓN DE LA RED ELÉCTRICA EQUIVALENTE PARA MODELAR BARRAS DE PUESTA A TIERRA, EL CÁLCULO DE LA CORRIENTE EN LA BARRA Y EL CÁLCULO DE LOS POTENCIALES DEL SUELO.	72
7.1	RED ELÉCTRICA EQUIVALENTE.	72
7.2	CÁLCULO DE LA CORRIENTE EN LA BARRA	75
7.3	CÁLCULO DE LOS POTENCIALES DEL SUELO O EN CUALQUIER PUNTO DE LA TIERRA	77
8	RESULTADOS Y COMPARACIÓN DE RESULTADOS CON VALORES MEDIDOS	78
8.1	BARRA DE 1M DE LONGITUD	79
8.2	BARRA DE 30CM DE LONGITUD	84
8.3	ANÁLISIS DE RESULTADOS	87
9	CONTRIBUCIONES AL CONOCIMIENTO	90
10	CONCLUSIONES	91
11	FUTUROS TRABAJOS	92
	REFERENCIAS	93

1 Introducción y motivación del trabajo.

Inicio esta introducción recordando los tiempo cuando comenzaba mis estudios de Doctorado en Portugal, me encontraba en la etapa de investigación bibliográfica de mi tesis, cuyo tema fue también sobre sistemas de puesta a tierra; para ese entonces, la principal barrera que tenía era la dificultad para entender muchos de los artículos de la abundante bibliografía que disponía; pues, requería alcanzar profundos conocimientos de electrodinámica y mucha destreza en el cálculo vectorial, que para la época carecía de ellos.

Para entonces, tenía un gran interés en el cálculo de los parámetros eléctricos de los electrodos de puesta a tierra, como puede ser una barra, que es el electrodo de puesta a tierra enterrado verticalmente; o la contra-antena, que es el electrodo enterrado horizontalmente.

El cálculo de los parámetros eléctricos de los electrodos, a los que me refiero son: la resistencia, la capacitancia, la inductancia y la conductancia, ya que los sistemas de puesta a tierra se modelan, en el campo de la Ing. Eléctrica, por una red eléctrica equivalente que está formada ya sea por una sola resistencia, que es el modelo más simple, porque no se necesite tomar en cuenta la dinámica del campo electromagnético; y en el caso de que se requiera un modelo más complejo, ya sea porque se necesite tomar en cuenta la dinámica del campo electromagnético, es necesario incluir también en el modelo las capacitancias y las inductancias de los electrodos.

Hoy en día, las herramientas de computación que existen, permiten de manera rápida y precisa el cálculo del campo electromagnético y los parámetros eléctricos de un sistema de puesta a tierra; pero en el pasado, cuando no existían las computadoras, resulta admirable la habilidad que tenían muchos investigadores, como Sommerfeld [1949]¹ (el físico), Carlson [1926], Heaviside [1894]², Sunde [1968], Dwight [1936] y muchos otros, que realizaron extraordinarios trabajos de investigación, algunos sobre puesta a tierra y otros sobre el efecto que tiene el suelo o la tierra en las líneas de transmisión aéreas y en las antenas; donde el Investigador requería, no solamente de profundos conocimientos de electrodinámica, sino también de mucha habilidad matemática, ya que los trabajos eran en esencia del tipo analítico.

Con ese estímulo, aunque no tengo la intención de compararme con alguno de estos extraordinarios Investigadores, este trabajo tiene un enfoque analítico, que exige de mucha destreza y conocimiento por parte del investigador para generar nuevos conocimientos, sobre todo cuando se trabaja con un tema que se puede considerar agotado como son los “sistemas de puesta a tierra”.

Otra aspecto importante que debía considerar para esta investigación es el hecho de que las longitudes de los electrodos pudieran ser comparables con algunas de las longitudes de ondas de los campos electromagnéticos presentes en el suelo, bajo esta hipótesis, los

¹ Las referencias se presentan, por el apellido del primer autor y el año de la publicación.

² Todo el trabajo de Oliver Heaviside se encuentran recopilados en dos tomos titulados “Electrical Papers” de la Editorial Macmillan and Co.

modelos de redes eléctricas a utilizar para modelar los electrodos debían ser aquellos que emplean parámetros distribuidos, como los usados para modelar líneas de transmisión.

Continuando pues con la historia que motivó este trabajo, llamó mi atención que algunos Investigadores [Devgan, 1973] [Velazquez, 1984] [Grcev, 2005, 2009], [Almeida, 2002, 1999], [Bourg, 1995], [Gao, 2002], [Juric, 2008], [Liu, 2001, 2005], [Yu, 2003], [Mazzetti, 1983], [Meliopoulus, 1983], [Menter, 1994], [Mishra, 2007], [Verma, 1980], [Lorentzou, 2003] utilizaban las ecuaciones de la línea de transmisión de Heaviside³ para modelar electrodos de puesta a tierra; para aquel momento en el que iniciaba mi tesis de doctorado, consideraba muy apropiado emplear esta aproximación, para modelar electrodos, por lo simple del modelo y para ser honesto con el lector, era lo único que entendía.

Las ecuaciones de Heaviside, para líneas de transmisión eléctrica o cables, se fundamentan o son válidas si la dirección tanto del campo eléctrico como del campo magnético son normales al eje de la línea de transmisión, efecto que es conocido en la literatura como el modo de propagación “transversal eléctrico y magnético” (TEM) [Javid, 1963]⁴.

Ahora bien, al utilizar una herramienta computacional para calcular y visualizar el campo electromagnético de un electrodo de puesta a tierra, se puede comprobar que el campo electromagnético, en la tierra, tiene otras formas de propagarse, adicionales al modo TEM.

Entonces, a pesar de la excelente idea de algunos Investigadores de utilizar las ecuaciones de Heaviside para modelar electrodos de puesta a tierra, tenía la hipótesis de que el modelo estaba incompleto, ya que no consideraba otros modos de propagación, como el “transversal eléctrico” (TE) y el “transversal magnético” (TM) [Lorrain, 2000]⁵.

Al final, culminé mi tesis sobre puesta a tierra [Malpica, 2011], dejando a un lado las ecuaciones de Heaviside, pues mi trabajo consistió en modelar los electrodos de puesta a tierra como si fueran dipolos, tratamiento que es típico cuando se modelan antenas [Marshall, 1997]⁶ [Burke, 1984] [Grecev, 1990], quedándome desde entonces la curiosidad por las ecuaciones de Heaviside y los modos de propagación, pero aplicados a sistemas de puesta a tierra, que es el tópico que se aborda en esta investigación.

El trabajo está organizado en varios capítulos, el primer capítulo, que es éste, aborda la introducción y la motivación que originó este trabajo. El segundo capítulo trata sobre los antecedentes y sobre el planteamiento del problema. El tercer capítulo, está dedicado a las ecuaciones de Maxwell, ya que es a través de ellas que se logran obtener los parámetros eléctricos de los electrodos y el modelo o la topología de la red eléctrica equivalente y además se deducen las ecuaciones diferenciales de propagación del campo electromagnético.

³ Consultar la página 76 del tomo II del libro de Heaviside [1894].

⁴ Consultar la página 333 del libro para el modo de propagación TEM.

⁵ Consultar la página 667 del libro para los modos de propagación TE y TM .

⁶ Consultar la página 636 del libro para el dipolo elemental en antenas.

El cuarto capítulo fue adicionado en consideración a aquel lector que, sin tener conocimientos sobre puesta a tierra, muestre interés en el tema, en él se abordan conceptos básicos sobre puesta a tierra, y se describe el cálculo de la resistencia de puesta a tierra para electrodos sencillos, tanto para una barra como para una contra-antena; también se incluye el cálculo de la resistencia para un sistema de puesta a tierra formado por más de un electrodo, asumiendo siempre un régimen estacionario del campo electromagnético.

El quinto capítulo trata sobre el problema de propagación de ondas en cables, primero se resuelven las ecuaciones diferenciales de propagación y se explica como se generan los diversos modos de propagación como son el TE, TM, y TEM. También, se deducen las ecuaciones de Heaviside, ecuaciones que son válidas únicamente para el modo TEM y se obtienen adicionalmente los parámetros eléctricos, para el caso de cables. Por último, se demuestra que las ecuaciones de Heaviside, para líneas de transmisión, presentan ciertos inconvenientes si las mismas se emplean para modelar electrodos de puesta a tierra

En el sexto capítulo se obtienen unas nuevas ecuaciones, similares a las obtenidas por Heaviside, pero para ser aplicadas a barras de puesta a tierra. Estas nuevas ecuaciones se consideran como el principal aporte de este trabajo, ya que tienen la particularidad de incluir todos los modos de propagación de ondas. Las mismas se obtienen resolviendo la ecuación de propagación para el vector potencial magnético, teniendo como fuente del campo, la corriente del electrodo. Particularmente se resuelven las ecuaciones de propagación, aplicando un método de integración con base a la segunda identidad de Green [Pipes, 1958]⁷ y el empleo de una función de Green [Stinson, 1976]⁸ [Sommerfeld, 1949]⁹ para un medio infinito formado por dos estratos.

En el séptimo capítulo, con las nuevas ecuaciones obtenidas, similares a las de Heaviside, se deduce la red eléctrica equivalente, para una barra, considerando que todos los parámetros son dependientes de la frecuencia y con parámetros distribuidos, este capítulo representa otro aporte del trabajo de investigación.

Finalmente, se presentan otros capítulos relacionados con la contribución al conocimiento, resultados, conclusiones y finalmente se presentan propuestas para nuevas investigaciones relacionadas con el tema.

⁷ Consultar la página 388 para las identidades de Green.

⁸ Consultar la página 30 del libro para las funciones de Green.

⁹ Consultar la página 236 del libro de Sommerfeld.

2 Planteamiento del problema y antecedentes

Se plantea como problema encontrar un par de ecuaciones, similares a las obtenidas por Heaviside [1894] (ver las ecuaciones de Heaviside en (2-3) y (2-4)), pero destinadas para modelar barras para puesta a tierra. Las nuevas ecuaciones deben considerar además todos los modos de propagación de ondas (TE, TM y TEM), que sería la diferencia que tendría con las ecuaciones desarrolladas por Heaviside, las cuales sólo consideran el modo TEM.

Otra particularidad de este trabajo, es que a partir de las nuevas ecuaciones, se plantea extraer la topología de la red eléctrica equivalente, con parámetros distribuidos y el cálculo de cada uno de los parámetros eléctricos, teniendo en cuenta la dependencia de los parámetros con la frecuencia.

Las nuevas ecuaciones deben ser obtenidas asumiendo que en la tierra ocurre un fenómeno de propagación del campo electromagnético y que el medio tiene dimensiones infinitas, formado por dos estratos o capas: aire y tierra.

Como antecedente, la Fig. 2-1a muestra un simple electrodo enterrado verticalmente denominado comúnmente en el lenguaje técnico como “barra”¹⁰, y que se utiliza para inyectar, por el extremo superior del electrodo, una corriente en la tierra \bar{I}_{tierra} que se dispersa por el suelo; también se muestra un eje de coordenadas, para indicar la posición z de cualquier punto del electrodo. En la figura, $\bar{I}(z)$ es la corriente que fluye axialmente por el electrodo y que es función de la coordenada z ; $\bar{V}(z)$ es la tensión que adquiere el electrodo con respecto al infinito, que también depende de la posición z ; es conveniente afirmar que en todo este trabajo se considera que el potencial en el infinito es nulo y por este motivo se toma como referencia de tierra o de potencial cero; por último, se muestra una parte del electrodo de longitud Δz .

La Fig. 2-1 b) muestra la red equivalente para el pedazo o trozo de electrodo de longitud Δz , el modelo mostrado es el mismo que se emplea para modelar líneas de transmisión desarrollado por Heaviside [Marshall, 1997] [Simonyi, 1963]¹¹.

De acuerdo a la Fig. 2-1 b), R es la resistencia serie del electrodo por unidad de longitud, esta resistencia depende del material del cual se encuentra hecho el electrodo y que puede ser de cobre o de hierro recubierto de cobre como se consigue comercialmente, L es la inductancia por unidad de longitud del electrodo. Otro parámetro a considerar es la capacitancia C por unidad de longitud que existe entre el electrodo y el infinito, esta capacitancia toma en cuenta las corrientes de desplazamiento que pudieran existir en la tierra y por último, G es la conductancia por unidad de longitud que existe entre el electrodo y el infinito, esta conductancia es el parámetro más importante del sistema de puesta a tierra ya que es el que toma en cuenta que el suelo es conductor de corriente. También se muestra en la Fig. 2-1 b) las tensiones $\bar{V}(z)$ y $\bar{V}(z + \Delta z)$ correspondientes a

¹⁰ Definición tomada de la norma IEEE 80-2000 Guide for Safety in AC Substation Grounding

¹¹ Consultar la pag. 523 del libro de Simonyi y la página 528 del libro de Marshall para el modelo eléctrico de la línea de transmisión.

los extremos (z) y ($z+\Delta z$) respectivamente, al igual se muestran las corrientes para ambos extremos.

Al aplicar las leyes de Kirchoff al circuito mostrado en la Fig. 2-1 b); una para la suma de las tensiones y otra para la suma de las corrientes, en el dominio de la frecuencia, se obtienen el par de ecuaciones siguientes:

$$\bar{V}(z + \Delta z) - \bar{V}(z) = (R + j\omega L) \Delta z \bar{I}(z) \quad (2-1)$$

$$\bar{I}(z + \Delta z) - \bar{I}(z) = (G + j\omega C) \Delta z \bar{V}(z + \Delta z) \quad (2-2)$$

Si en ambas ecuaciones, Δz tiende a cero, se obtienen las ecuaciones acopladas del telegrafista o de Heaviside, pero en este caso aplicadas al electrodo para puesta a tierra que se muestra en la Fig. 2-1 a) y que se pretende modelar como si fuera una línea de transmisión:

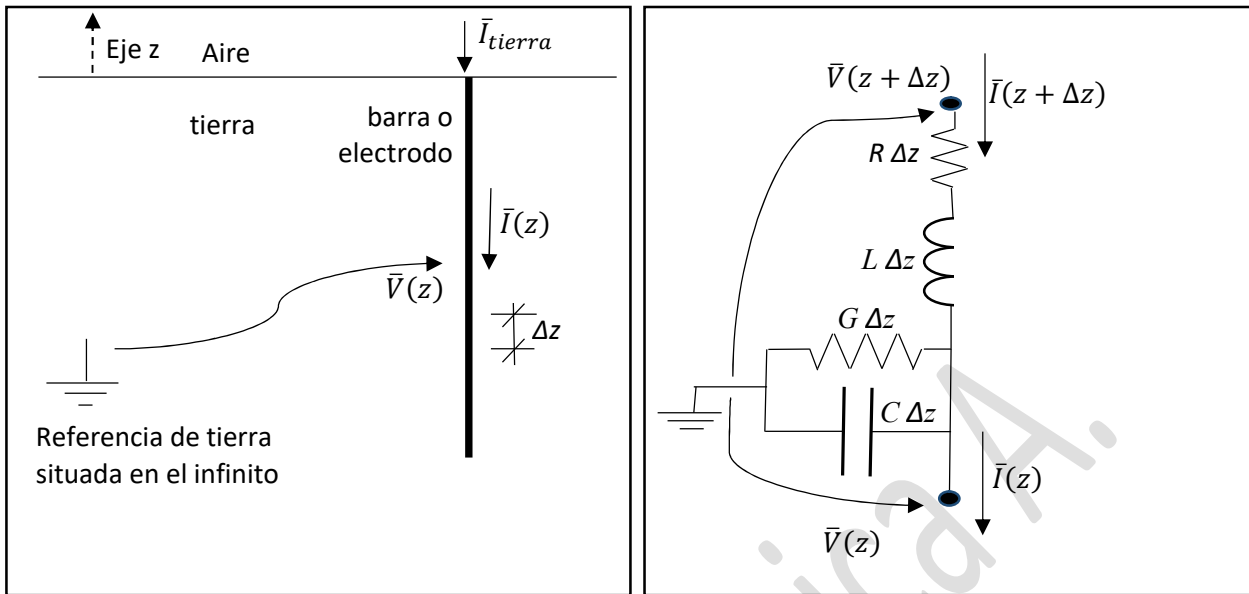
$$\frac{d}{dz} \bar{V}(z) - (R + j\omega L) \bar{I}(z) = 0 \quad (2-3)$$

$$\frac{d}{dz} \bar{I}(z) - (G + j\omega C) \bar{V}(z) = 0 \quad (2-4)$$

Si las condiciones de borde son conocidas, al resolver el par de ecuaciones diferenciales acopladas, se obtiene, tanto la tensión $\bar{V}(z)$ como la corriente $\bar{I}(z)$, en función de la posición z del electrodo.

Esta forma de modelar los electrodos como si fueran líneas de transmisión, es usada por muchos investigadores [Grcev, 2005, 2009], [Almeida, 2002, 1999], [Bourg, 1995], [Gao, 2002], [Juric, 2008], [Liu, 2005], [Yu, 2003], [Velázquez, 1984]. La bondad que tiene este modelo es que el investigador, en lugar de trabajar con complicadas ecuaciones diferenciales vectoriales para el campo electromagnético, trabaja con ecuaciones de redes eléctricas, que en esencia son mas simples de resolver.

Para utilizar el par de ecuaciones diferenciales (2-3) y (2-4), se deben conocer los cuatro parámetros eléctricos, R , L , C y G . Para calcular las conductancias y las capacitancias se emplean las contribuciones de Dwight [1936], Sunde [1967], Howe [1914], Schwarz [1954], Rudenberg [1945], Takahashi [1991] y Tagg [1964]; para calcular las inductancias se emplean las formulaciones de Rosa [1908, 1912] y Grover [1946]; la resistencia R de los electrodos por lo general no se considera en el modelo por ser muy pequeña (algunos micro ohmios por metro de electrodo), pero en el caso de que se requiera un modelo muy elaborado, se emplean trabajos como el de Perry [1985], que presenta fórmulas que permiten calcular la impedancia interna o superficial del electrodo.



a) Electrodo enterrado verticalmente

b) Circuito equivalente para un elemento de longitud Δz del electrodo

Fig. 2-1 Barra para puesta a tierra y su circuito eléctrico equivalente para un elemento de longitud Δz

Pero el modelo de la línea que desarrolló Heaviside presenta unas características que no se adaptan completamente para ser usado en electrodos de puesta a tierra, a saber:

- En las ecuaciones del telegrafista de Heaviside, la dirección tanto del campo magnético como el campo eléctrico son normales al eje de la línea de transmisión (eje z de la figura Fig. 2-1), esta forma de propagación se denomina normalmente en la literatura como TEM (campo transversal eléctrico y magnético). Ahora bien, en los electrodos de puesta a tierra, el campo muy cercano a la superficie de los electrodos, tiende a comportarse como un campo TEM, con simetría cilíndrica, pero a medida que nos alejamos de la superficie del mismo, el campo deja de ser TEM y pasa a tener una simetría esférica; por lo tanto, en los electrodos de puesta a tierra existen otros modos de propagación que no se incluyen en las ecuaciones de Heaviside.
- Las líneas de transmisión son dispositivos destinados a conducir o transportar campos electromagnéticos en la dirección axial de la línea; y los electrodos de puesta a tierra no se destinan para esa función. Por otra parte, la corriente en las líneas de transmisión viaja en dirección axial; y en los electrodos de puesta a tierra, lo ideal es que la corriente, que viaja en dirección axial, cambie su dirección y se desvíe normal al eje, para que la corriente finalmente drene a la tierra.
- En las líneas de transmisión, los parámetros eléctricos como son las inductancias y las capacitancias se pueden calcular asumiendo un régimen estacionario del

campo electromagnético [Javid, 1963]¹², en otras palabras estos parámetros no son dependientes de la frecuencia; pero en los electrodos de puesta a tierra, los parámetros eléctricos pueden resultar dependientes de la frecuencia.

En vista de lo anterior, se llevó a cabo una investigación, teniendo como punto de partida las ecuaciones de Maxwell, donde se pretende obtener un par de ecuaciones, cuya topología fuera similar a la de Heaviside, como las presentadas en (2-3) y (2-4), pero con las siguientes características:

- No se impone en la formulación de las ecuaciones del campo electromagnético, una dirección en particular tanto para el campo eléctrico como para el campo magnético. De esta forma pueden estar presentes, en la tierra, cualquier modo de propagación del campo como el modo TE (transversal eléctrico), el modo TM (transversal magnético) y por supuesto, el modo TEM que es el único modo que se considera en las ecuaciones de Heaviside.
- Al obtener las nuevas ecuaciones, se extraen de las mismas los parámetros eléctricos como son: resistencias, conductancias, capacitancias e inductancias; pero en este caso, los parámetros obtenidos incluyen la dependencia de los parámetros con la frecuencia.
- Del par de ecuaciones obtenidas también se extrae la topología de la red eléctrica equivalente, que resultó mucho más compleja que la obtenida por Heaviside (ver la Fig. 2-1b para el modelo obtenido por Heaviside).
- Para tomar en cuenta que el medio está formado por dos estratos semi infinitos (aire - tierra); el campo electromagnético fue calculado usando un método de integración con base a la segunda identidad de Green [Morse,1953]¹³ [Maxwell,1891]¹⁴ y empleando la contribución de Sommerfeld [1949]¹⁵, que consistió en obtener la función de Green para un medio infinito, formado por dos estratos y asumiendo que ocurre un fenómeno de propagación de ondas del campo electromagnético.

¹² Consultar la página 333 del libro de Javid.

¹³ Consultar la página 791 del libro de Morse.

¹⁴ Consultar la página 127 del volumen 1 del libro de Clerk Maxwell.

¹⁵ Consultar la página 236 del libro de Sommerfeld.

3 Ecuaciones de Maxwell y ecuaciones de propagación de ondas para un medio con pérdidas

Se consideró oportuno incluir este capítulo sobre las ecuaciones de Maxwell, en vista que dichas ecuaciones son utilizadas, en este trabajo, para calcular los parámetros eléctricos de los electrodos y también para deducir las nuevas ecuaciones del tipo Heaviside para barras de puesta a tierra. Por otra parte, como se quieren calcular parámetros eléctricos, considerando la dinámica del campo electromagnético, se deducen también las ecuaciones diferenciales de propagación para el campo eléctrico, para el campo magnético y para los potenciales escalar eléctrico y vectorial magnético. Todas estas ecuaciones de propagación serán utilizadas en capítulos posteriores.

3.1 Ecuaciones de Maxwell

Son las siguientes [Maxwell, 1891] [Jackson, 1975]¹⁶:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho' + \rho_s \quad (3-1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3-2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (3-3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{J}_s + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \quad (3-4)$$

donde ρ' es la densidad volumétrica de carga inducida o libre en el medio, ρ_s es la densidad volumétrica de carga fuente, \mathbf{J} es la densidad de corriente inducida en el medio, \mathbf{J}_s es la densidad de corriente fuente, \mathbf{B} es el vector de inducción magnética o el vector de densidad de flujo magnético, \mathbf{E} es el vector campo eléctrico, \mathbf{H} es el vector campo magnético, \mathbf{D} es el vector desplazamiento eléctrico y t es la variable tiempo.

Algunas cantidades vectoriales están relacionadas entre sí, por las propiedades del medio:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (3-5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3-6)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (3-7)$$

donde ε , μ y σ son la permitividad, la permeabilidad y la conductividad del medio respectivamente; en este trabajo se considera que estos tres parámetros son lineales¹⁷, isotrópicos y homogéneos.

¹⁶ Consultar la página 218 del libro de Jackson.

Es posible demostrar que la densidad volumétrica de carga ρ' (carga libre) que se indica en la ecuación (3-1), se puede considerar nula, si el medio es conductor. Para demostrar lo anterior, si se considera algún punto del medio que no tenga fuentes, al tomar la divergencia de (3-4) y considerando (3-1), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho' \quad (3-8)$$

Sustituyendo (3-1), (3-5) y (3-7) en (3-8) se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho' + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho' = 0 \quad (3-9)$$

cuya solución es:

$$\rho'(\mathbf{r}, t) = \rho'_0(\mathbf{r}, t_0) e^{-\frac{\sigma}{\epsilon}(t-t_0)} \quad (3-10)$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición donde se encuentra la densidad volumétrica de carga ρ , ρ'_0 es la densidad volumétrica de carga que existe inicialmente para el instante inicial t_0 y t es el tiempo.

De acuerdo con (3-10), si el medio es conductor, la densidad de carga libre se desvanece al transcurrir el tiempo, por tal motivo, en medios conductores no se considerará la existencia de cargas libres.

Como las ecuaciones de Heaviside representan fenómenos de propagación, a continuación se deducen las ecuaciones de propagación, para el campo eléctrico, para el campo magnético, para el potencial escalar eléctrico V y para el potencial vectorial magnético \mathbf{A} ; todas estas ecuaciones de propagación serán utilizadas en los capítulos siguientes.

3.2 Ecuación de propagación para el campo eléctrico.

Si la ecuación (3-4) se deriva nuevamente con respecto al tiempo, teniendo en cuenta (3-5), (3-6) y (3-7), se obtiene lo siguiente:

$$\nabla \times \left[\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right] = \sigma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_s \quad (3-11)$$

Reemplazando (3-3) en (3-11) y considerando la propiedad vectorial mostrada en (3-12), se obtiene la ecuación vectorial (3-13):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{M} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}) - \nabla^2 \mathbf{M} \quad (3-12)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \sigma \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_s \quad (3-13)$$

Y reemplazando (3-1) y (3-5) en (3-13), se obtiene:

¹⁷ Existen ciertos fenómenos no lineales, por ejemplo, la ionización del suelo, por inyección de altas corrientes por el sistema de puesta a tierra, pero que no son considerados en este trabajo.

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \sigma \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho_s + \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_s \quad (3-14)$$

Como la última ecuación posee, con relación a las derivadas de orden superior, una derivada segunda en el tiempo y derivadas segundas en cuanto a la posición, representadas en el operador laplaciano, la topología de la ecuación resulta típica en fenómenos de propagación de ondas, que para este caso corresponde al campo eléctrico. Nótese además que la ecuación es no homogénea, teniendo como fuentes la densidad de carga ρ_s y a la densidad de corriente \mathbf{J}_s .

Muchas veces resulta útil trabajar las ecuaciones de propagación en el dominio de la frecuencia, en lugar del dominio del tiempo, ya que la solución de la respectiva ecuación, en el dominio de la frecuencia, resulta mas sencilla, porque se elimina una variable independiente como es el tiempo. Esta conversión de pasar del dominio del tiempo a frecuencia o viceversa [Sommerfeld, 1949]¹⁸, se realiza usando la transformada exponencial de Fourier que se indica a continuación:

$$F(\rho, \phi, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}(\rho, \phi, z, \omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-15)$$

$$\bar{F}(\rho, \phi, z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\rho, \phi, z, t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-16)$$

donde $F(\rho, \phi, z, t)$ es la función en el dominio del tiempo y de otras variables de posición y $\bar{F}(\rho, \phi, z, \omega)$ es la función en el dominio de la frecuencia ω y de la posición.

Al usar (3-15) en la ecuación (3-14) se obtiene la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} - j\omega \sigma \mu \bar{\mathbf{E}} + \omega^2 \varepsilon \mu \bar{\mathbf{E}} \right) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla \bar{\rho}_s + j\omega \mu \bar{\mathbf{J}}_s \right) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-17)$$

Que se simplifica en la ecuación no homogénea de Helmholtz:

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} - j\omega \mu (\sigma + j\omega \varepsilon) \bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \bar{\rho}_s + j\omega \mu \bar{\mathbf{J}}_s \quad (3-18)$$

donde $j = \sqrt{-1}$, $\bar{\mathbf{E}}$ es el vector campo eléctrico en el dominio de la frecuencia, $\bar{\rho}_s$ es el fasor de densidad de carga fuente y $\bar{\mathbf{J}}_s$ es el vector densidad de corriente fuente, en el dominio de la frecuencia.

A continuación se presenta una formulación de propagación para el campo magnético.

¹⁸ Consultar la página 17 del libro, para las integrales de Fourier.

3.3 Ecuación de propagación para el campo magnético

Se puede obtener una formulación de propagación para el campo magnético si se calcula nuevamente el rotor de la ecuación (3-4):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} - \nabla \times \mathbf{J} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{D}) = \nabla \times \mathbf{J}_s \quad (3-19)$$

Usando (3-3), (3-2), (3-5), (3-6), (3-7) y (3-12) en la última ecuación, se obtiene lo siguiente:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \sigma \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J}_s \quad (3-20)$$

Esta última ecuación representa la ecuación no homogénea de propagación para el campo magnético, teniendo como fuente el vector densidad de corriente fuente \mathbf{J}_s , en el dominio del tiempo.

Al usar la transformada de Fourier dada en (3-15) en la ecuación anterior, se obtiene la ecuación no homogénea de Helmholtz en el dominio de la frecuencia:

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{H}} - j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\bar{\mathbf{H}} = -\nabla \times \bar{\mathbf{J}}_s \quad (3-21)$$

donde $\bar{\mathbf{H}}$ es el vector campo magnético en el dominio de la frecuencia.

3.4 Ecuaciones de propagación para los potenciales escalar eléctrico y vectorial magnético.

Otra forma de describir el campo electromagnético es mediante el uso de dos funciones auxiliares conocidas como funciones de potencial.

La ecuación (3-2), define la densidad de flujo magnético \mathbf{B} como un campo con divergencia nula, entonces este vector posee de hecho un comportamiento solenoidal. Bajo esta condición, el vector \mathbf{B} puede ser definido como el rotor de un vector auxiliar que se denomina potencial vectorial magnético \mathbf{A}

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3-22)$$

Reemplazando la ecuación (3-22) en (3-3) y reordenando la ecuación se obtiene:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} \right) = 0 \quad (3-23)$$

La expresión que se encuentra dentro de los paréntesis es un campo gradiente o un campo conservativo ya que su rotacional es nulo, entonces lo que se encuentra entre paréntesis se puede definir como el gradiente de una función escalar conocida como el potencial escalar eléctrico V :

$$\nabla V = -\left(\mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}\right) \quad (3-24)$$

De la última ecuación se puede obtener el campo eléctrico \mathbf{E} en función de las dos funciones de potenciales:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} \quad (3-25)$$

Reemplazando (3-5), (3-6), (3-7), (3-22) y (3-25) en (3-4), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A} = -\mu \sigma \nabla V - \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\nabla V + \mu \mathbf{J}_s \quad (3-26)$$

Usando (3-5) y reemplazando (3-25) en (3-1) se obtiene una segunda ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 V = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (3-27)$$

Las últimas dos ecuaciones forman un sistema de ecuaciones acopladas, no homogéneas, para las funciones de potenciales. Pero de acuerdo al teorema de Helmholtz [Marshall, 1997]¹⁹, es necesario especificar la divergencia del vector potencial magnético \mathbf{A} , para que el vector \mathbf{A} quede unívocamente definido. Entonces, es posible escoger la divergencia de \mathbf{A} en forma tal que las ecuaciones (3-26) y (3-27) queden desacopladas y ambas representen fenómenos de propagación de ondas.

Para lograr lo anterior, se selecciona la condición de Lorentz para medios conductores [Panofsky, 1955]²⁰:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu \sigma V - \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}V \quad (3-28)$$

Con (3-28) las ecuaciones (3-26) y (3-27) son convertidas en dos ecuaciones diferenciales de propagación, desacopladas y no homogéneas, para los potenciales:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_s \quad (3-29)$$

$$\nabla^2 V - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t}V - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}V = -\frac{\rho_s}{\varepsilon} \quad (3-30)$$

Con la solución de las dos últimas ecuaciones, cualquier otra variable vectorial del campo electromagnético puede ser obtenida por diferenciación usando (3-22), (3-25), (3-5), (3-6) y (3-7).

Las dos ecuaciones anteriores, al transformarlas al dominio de la frecuencia, usando (3-15), son convertidas en dos ecuaciones de Helmholtz, no homogéneas:

¹⁹ Ver la página 697, para el teorema de Helmholtz.

²⁰ Ver la página 210 del libro de Panofsky.

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{A}} - \gamma^2 \bar{\mathbf{A}} = -\mu \bar{\mathbf{J}}_s \quad (3-31)$$

$$\nabla^2 \bar{V} - \gamma^2 \bar{V} = -\frac{\bar{\rho}_s}{\varepsilon} \quad (3-32)$$

donde $\bar{\mathbf{A}}$ y \bar{V} son el vector potencial magnético y el potencial escalar eléctrico respectivamente, ambos en el dominio de la frecuencia; $\bar{\mathbf{J}}_s$ y $\bar{\rho}_s$ son la densidad de corriente fuente y la densidad de carga fuente, respectivamente, en el dominio de la frecuencia y γ es la constante de propagación que viene dada por:

$$\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon) \quad (3-33)$$

$$j = \sqrt{-1} \quad (3-34)$$

donde ω es la frecuencia angular.

En el dominio de la frecuencia, no es necesario resolver (3-32) para calcular el potencial escalar \bar{V} . Este potencial \bar{V} se puede obtener si el vector potencial magnético es conocido, mediante el uso de la condición de Lorentz dada por (3-28), pero en el dominio de la frecuencia y que se indica a seguir:

$$\bar{V} = -\frac{j\omega}{\gamma^2} \nabla \cdot \bar{\mathbf{A}} \quad (3-35)$$

Similarmente, el campo eléctrico se puede obtener si se conoce solamente el vector potencial magnético, usando (3-25) en el dominio de la frecuencia y la ecuación anterior (3-35):

$$\bar{\mathbf{E}} = -j\omega \bar{\mathbf{A}} + \frac{j\omega}{\gamma^2} \nabla \nabla \cdot \bar{\mathbf{A}} \quad (3-36)$$

La última ecuación es muy útil cuando las ecuaciones diferenciales del campo se resuelven usando un método de integración, mediante la aplicación de la segunda identidad de Green. Por ejemplo, si el campo eléctrico se calcula resolviendo directamente la ecuación de propagación (3-18), se necesitan las dos fuentes del campo: corrientes y cargas fuentes. Sin embargo, el campo eléctrico se puede calcular indirectamente a través del vector potencial magnético $\bar{\mathbf{A}}$, usando (3-36), si previamente se resuelve la ecuación diferencial (3-31); en este caso, sólo se requiere un tipo de fuente (corrientes fuentes). Por esta razón, en algunos casos el uso de las funciones de potencial (\bar{V} y $\bar{\mathbf{A}}$) puede tener ventajas para calcular el campo electromagnético.

4 Breve introducción a los sistemas de puesta a tierra.

La finalidad de este capítulo es la de brindar al lector, que desconozca sobre el tema, una breve introducción sobre los “sistemas de puesta a tierra” y los fundamentos para los procedimientos de cálculos que se utilizan comúnmente y que se encuentran normados.

4.1 Que es un sistema de puesta a tierra y porqué es necesario contar con un sistema de puesta a tierra.

Un sistema de puesta a tierra consiste de uno o más electrodos, enterrados en el suelo, que se encuentran interconectados entre sí y que por estar en contacto galvánico con el suelo o la tierra, los mismos adquieren el potencial del suelo. Con el sistema de puesta a tierra, se puede poner al mismo “potencial del suelo o de la tierra” cualquier infraestructura, o cualquier cubierta metálica de un equipo eléctrico, al interconectar el sistema de puesta a tierra con la infraestructura o con la cubierta del equipo en cuestión.

Cualquier infraestructura, por norma²¹, debe contar con un sistema de puesta a tierra, estos se utilizan para brindar seguridad a las personas o a los seres vivos, a las infraestructuras y a los equipos eléctricos, en caso de que ocurran fallas en los sistemas eléctricos o cuando impacten rayos en las estructuras o en los equipos eléctricos que se encuentran expuestos a la intemperie.

La recomendación IEEE 80²² presenta numerosos ejemplos sobre la necesidad de disponer de un sistema de puesta a tierra para cualquier infraestructura.

4.2 Cálculo de la resistencia propia en electrodos de puesta a tierra asumiendo un comportamiento estacionario del campo electromagnético.

Los procedimientos para calcular la resistencia de puesta a tierra se encuentran por lo general normados; en nuestro país, es muy común utilizar las recomendaciones de la normas IEEE 80 e IEEE 142²³, donde todos los métodos de cálculo que se describen fueron desarrollados asumiendo que el campo electromagnético es del tipo estacionario; o sea, que el mismo no varía en el tiempo.

A continuación se presenta la base teórica para el cálculo de la resistencia de puesta a tierra para un electrodo enterrado en el suelo, si se considera que el campo es estacionario [Dwight, 1936] [Rüdenberg, 1945] [Schwarz, 1954], [Tagg, 1964].

Al desprestigiar todas las derivadas parciales con respecto al tiempo en la ecuación de propagación para el potencial escalar eléctrico dada por (3-30), la misma se convierte en la ecuación de Poisson siguiente:

²¹ COVENIN 200 Código Eléctrico Nacional

²² IEEE Std 80-2000. Guide for Safety in AC Substation Grounding

²³ IEEE Std 142-2007. Recommended Practice for Grounding of Industrial and Commercial Power Systems

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon} \rho_s \quad (4-1)$$

Al resolver la ecuación anterior para obtener el potencial escalar eléctrico V , el campo eléctrico se puede calcular con la ecuación (3-25):

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (4-2)$$

De la ecuación anterior se puede apreciar que en régimen estacionario, el campo eléctrico es un campo gradiente o un campo conservativo, esto quiere decir que las tensiones inducidas por variaciones del campo magnético, no son consideradas o no están presentes, cuando el campo es estacionario.

Para un medio infinito, formado por dos estratos (aire – tierra), la ecuación (4-1) se puede resolver por un método de integración obtenido mediante la aplicación de la segunda identidad de Green [Pipes, 1958]²⁴:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\epsilon} \int_{\text{volumen}' } f_{Green}(x, y, z; x', y', z') \rho_s(x', y', z') dv' \quad (4-3)$$

donde (x, y, z) son las coordenadas de un punto donde se quiere calcular el potencial escalar V , (x', y', z') son las coordenadas donde se encuentra la densidad de cargas fuentes ρ_s y f_{Green} es una función conocida como la función de Green [Jackson, 1975]²⁵, donde para un medio infinito formado por dos estratos, es la siguiente:

$$f_{Green}(x, y, z; x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right] + \dots \quad (4-4)$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right]$$

Para un medio formado por dos estratos, la función de Green dada en la ecuación anterior, corresponde al conocido método de las imágenes [Javid, 1963]²⁶.

La densidad de carga fuente en la ecuación (4-3), es la que crea el campo eléctrico y ésta se encuentra en los electrodos. Por ser los electrodos conductores, la carga fuente sólo puede estar sobre la superficie de los mismos, entonces lo que realmente existe es una “densidad superficial de cargas fuentes”.

Una simplificación que se hace comúnmente en los sistemas de puesta a tierra, en vista que el radio de los electrodos es pequeño en comparación con la longitud de los mismos, consiste en asumir que en lugar de tener una densidad superficial de carga, se tiene una “densidad lineal de carga” λ ; en este caso, la ecuación (4-3) se transforma de una integral de volumen a una integral de línea:

²⁴ Consultar la página 388 para las identidades de Green.

²⁵ Consultar la página 43 del libro de Jackson.

²⁶ Consultar la página 194 del libro de Javid para el método de las imágenes-

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\epsilon} \int f_{Green}(x, y, z, x', y', z') \lambda(x', y', z') dl' \quad (4-5)$$

donde λ es la densidad lineal de carga, que se encuentra distribuida a lo largo del eje del electrodo y dl' es un diferencial de longitud del electrodo.

En los sistemas de puesta a tierra, la carga fuente que tienen los electrodos no es un parámetro que resulta importante determinar o calcular en comparación con la corriente i que drenan los electrodos hacia la tierra; ya que por lo general, lo que se quiere calcular es la "resistencia" del sistema de puesta a tierra, que no es más que la razón entre la tensión V del electrodo y la corriente i que drena el electrodo.

Pero cualquier electrodo, si éste se encuentra cargado, entonces también estará drenando una corriente a tierra, a continuación se demuestra tal afirmación:

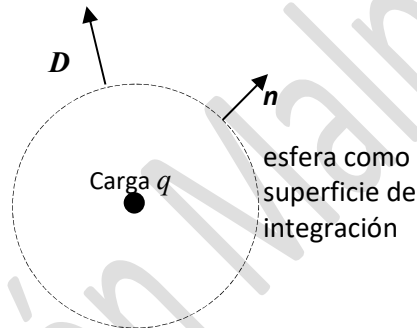


Fig. 4-1 Carga puntual encerrada en una esfera virtual

La figura 4-1 muestra una carga puntual q que se encuentra encerrada por una esfera hipotética, al integrar la ecuación (3-1), en el volumen limitado por la esfera que encierra la carga, se obtiene lo siguiente:

$$\int_{vol} \nabla \cdot \mathbf{D} \, dv = \int_{vol} \rho \, dv = q \quad (4-6)$$

donde dv es un diferencial de volumen

Al aplicar el teorema de Gauss a la ecuación (4-6), con la finalidad de convertir la primera integral de volumen en una integral de superficie y haciendo uso de (3-5), se obtiene lo siguiente:

$$\oint_{sup} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, ds = q \quad \Rightarrow \quad \epsilon \oint_{sup} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, ds = q \quad (4-7)$$

donde \mathbf{n} es un vector unitario, normal a la superficie de integración que encierra la carga.

Teniendo en cuenta (3-7) en la ecuación anterior y al reordenarla:

$$\frac{1}{\sigma} \oint_{\text{sup}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, ds = \frac{q}{\varepsilon} \quad (4-8)$$

donde la integral sobre una superficie cerrada de la densidad de corriente \mathbf{J} corresponde a la corriente i que sale donde se encuentra la carga puntual; de esta forma, la ecuación anterior se reduce a la siguiente relación:

$$\frac{i}{\sigma} = \frac{q}{\varepsilon} \quad (4-9)$$

Lo que se deduce de la ecuación anterior es que si tenemos cargas que se encuentran en un medio conductor, entonces de la carga también debe salir una corriente.

Al usar (4-9) en (4-5) se obtiene:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sigma} \int_{\text{linea}} f_{\text{Green}}(x, y, z, x', y', z') i'(x', y', z') \, dl' \quad (4-10)$$

donde: x', y', z' son las coordenadas de un punto del eje del electrodo y i' es la densidad lineal de la corriente que sale normal al eje del electrodo y que depende de las coordenadas (x', y', z') .

La ecuación (4-10) permite relacionar el potencial en cualquier punto del suelo, con la densidad de corriente que drena el electrodo. La densidad lineal de corriente i' , es una función que depende de las coordenadas (x', y', z') y por lo general esta función no es conocida.

Para obtener una solución analítica del potencial V , se realiza una aproximación con la densidad de corriente i' , que consiste en asumir que la misma no depende de la posición y por lo tanto es una constante:

$$i'(x', y', z') \approx \frac{i}{l} \quad (4-11)$$

donde i es la corriente que drena el electrodo a tierra y l es la longitud del mismo.

Al substituir (4-11) en (4-10) se obtiene finalmente la expresión aproximada para calcular el potencial en la tierra, generado por un electrodo cilíndrico que drena una corriente i :

$$V(x, y, z) = \frac{i}{\sigma l} \int_{\text{linea}} f_{\text{Green}}(x, y, z, x', y', z') \, dl' \quad (4-12)$$

Nótese de la ecuación (4-10) y (4-11), que por ser la densidad de corriente una constante, la misma sale fuera de la integral; entonces para calcular el potencial en cualquier punto del suelo, sólo hay que integrar la función de Green (4-4), como se puede apreciar en la ecuación anterior.

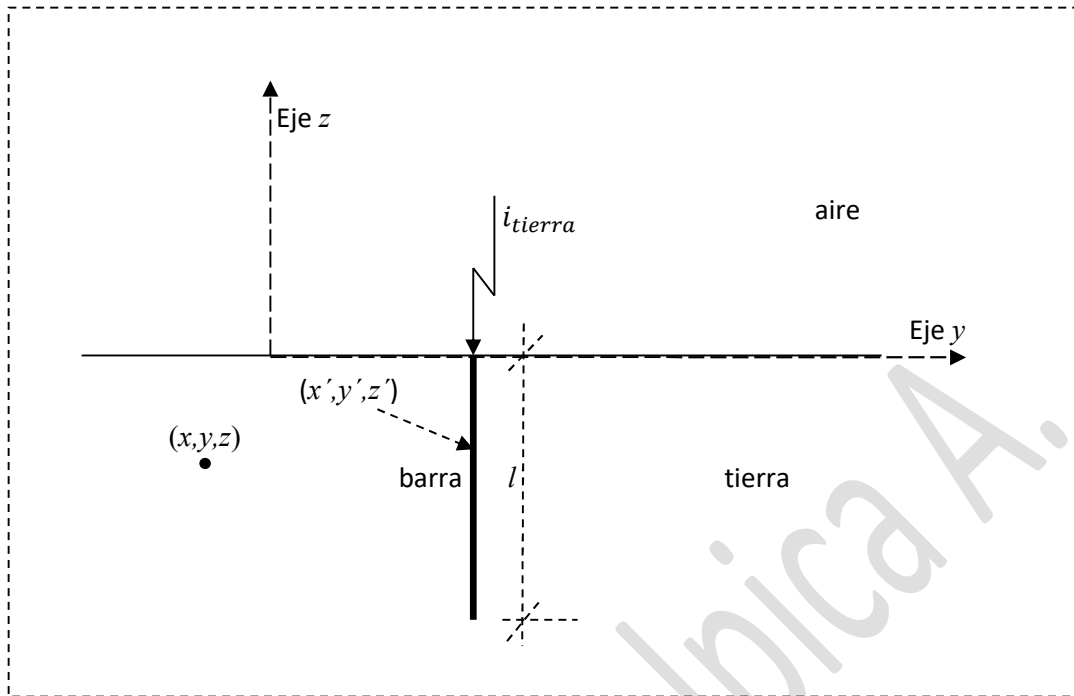


Fig. 4-2 Barra o jabalina enterrada en el suelo

A continuación se presenta el cálculo de la resistencia tanto para una barra como para una contra-antena, que son los electrodos más comunes en un sistema de puesta a tierra.

La figura 4-2 muestra una barra o jabalina enterrada en el suelo, que se utiliza para inyectar una corriente en la tierra, este tipo de electrodo es el más usado, ya que se instala rápidamente, si el suelo no es rocoso; también se muestra en la figura un punto del suelo cuyas coordenadas son (x, y, z) . Con las ecuaciones (4-4) y (4-12) se puede calcular aproximadamente el potencial en cualquier punto del suelo a causa de la corriente inyectada en la tierra a través de la barra:

$$V(x,y,z) = \frac{i_{tierra}}{4\pi\sigma l} \left[\int_{-l}^0 \frac{dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \int_{-l}^0 \frac{dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right] \quad (4-13)$$

donde (x, y, z) son las coordenadas de un punto del eje del electrodo.

Al resolver la integral en la ecuación anterior se obtiene el potencial de cualquier punto del suelo:

$$V(x,y,z) = \frac{i_{tierra}}{4\pi\sigma l} \left[\ln \left(\frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z)^2} - z}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+l)^2} - (z+l)} \right) + \dots \right. \\ \left. + \ln \left(\frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z)^2} + z}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-l)^2} + (z-l)} \right) \right] \quad (4-14)$$

La ecuación anterior se puede utilizar también para calcular el potencial de la barra, cuando la misma drena una corriente a tierra, lo que hay que hacer es simplemente evaluar el potencial de cualquier punto (x, y, z) que se encuentre sobre la superficie de la barra, para obtener el potencial de la misma.

Sin embargo, si se toman dos puntos cualesquiera que se encuentren sobre la superficie de la barra, se encontrará con el resultado erróneo de que los puntos tienen potenciales diferentes, cuando debe cumplirse que todos los puntos que se encuentren sobre la superficie conductora del electrodo, deben tener el mismo potencial. La razón de este error obedece a la aproximación hecha al haber asumido que la densidad de corriente fuente, dada por (4-11), es una constante.

Para solventar de alguna forma este error, el potencial de la barra se toma como el potencial promedio que tiene la superficie del electrodo [Howe, 1914] [Dwight, 1936], integrando la ecuación anterior sobre la superficie del electrodo:

$$V_{barra} = \frac{i_{tierra}}{4\pi\sigma l^2} \left[\int_{-l}^0 \ln \left(\frac{\sqrt{r^2 + (z)^2} - z}{\sqrt{r^2 + (z+l)^2} - (z+l)} \right) + \ln \left(\frac{\sqrt{r^2 + (z)^2} + z}{\sqrt{r^2 + (z-l)^2} + (z-l)} \right) dz \right] \quad (4-15)$$

donde V_{barra} es el potencial o la tensión promedio que adquiere la barra y r es el radio del electrodo y que es igual a la siguiente relación:

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 \quad (4-16)$$

Al resolver (4-15) se obtiene el potencial para una barra enterrada verticalmente:

$$V_{barra} = \frac{1}{4\pi\sigma l} \left[\ln \left(\frac{r}{\sqrt{(2l)^2 + r^2} - 2l} \right) + \frac{r}{l} - \frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2}}{l} \right] i_{tierra} \quad (4-17)$$

De la ecuación anterior se extrae la resistencia propia para una barra enterrada verticalmente:

$$R_{barra} = \frac{1}{4\pi\sigma l} \left[\ln \left(\frac{r}{\sqrt{(2l)^2 + r^2} - 2l} \right) + \frac{r}{l} - \frac{\sqrt{(2l)^2 + r^2}}{l} \right] \quad (4-18)$$

donde R_{barra} es la resistencia propia de la barra.

La ecuación anterior es la misma que presenta Dwight [1936] en su trabajo y hoy día se recomienda su uso en normas tal como la IEEE Std 142-2007. Recommended Practice for Grounding of Industrial and Commercial Power Systems.

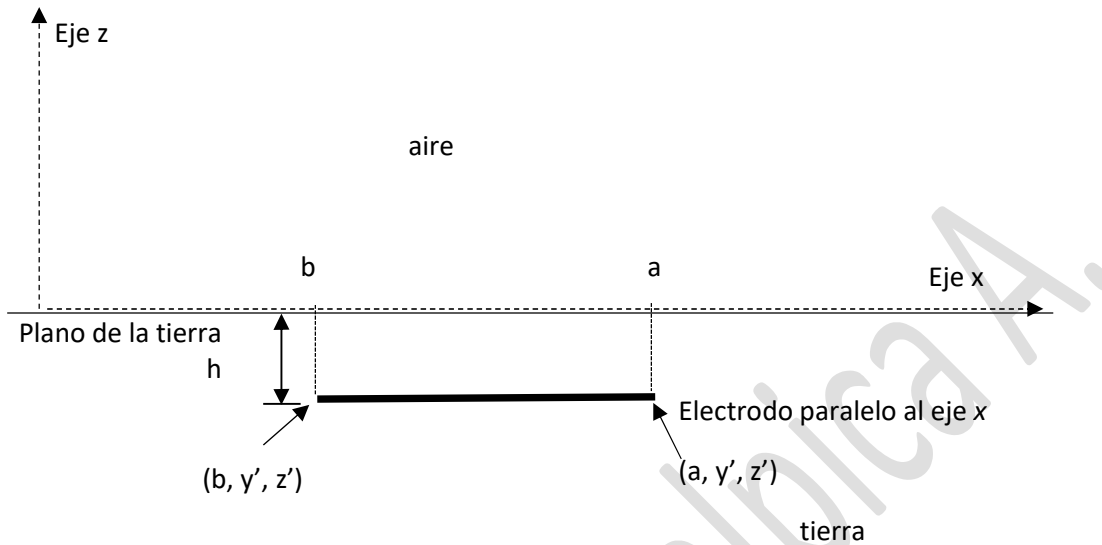


Fig. 4-3 Electrodo enterrado horizontalmente o contraantena.

Para el caso de una contra-antena, en la figura 4-3 se muestra un electrodo enterrado horizontalmente, situado paralelo al eje x , también se indican las coordenadas de los puntos extremos del electrodo. La resistencia de la misma se obtiene siguiendo el mismo procedimiento para la barra, que consiste en calcular el potencial promedio que tiene la superficie del electrodo usando (4-4) y (4-10) :

$$V_{c-antena} = \frac{i_{tierra}}{4\pi\sigma l^2} \left[\int_b^a \int_b^a \frac{dx' dx}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \int_b^a \int_b^a \frac{dx' dx}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right] \quad (4-19)$$

donde $V_{c-antena}$ es el potencial o la tensión que adquiere la contra antena.

De acuerdo a la figura 4-3, para calcular el potencial promedio que tiene la superficie del electrodo, debe tomarse en cuenta las siguientes relaciones:

$$z = z' = -h \quad , \quad r = y - y' \quad , \quad a = b + l \quad , \quad h > 0 \quad (4-20)$$

donde h es la profundidad a la cual se encuentra enterrado el electrodo, l es su longitud y r es el radio, al substituir las relaciones dadas en (4-20) en (4-19), se obtiene lo siguiente:

$$V_{c-antena} = \frac{i_{tierra}}{4\pi\sigma l^2} \left[\int_b^a \int_b^a \frac{dx' dx}{\sqrt{(x-x')^2 + r^2}} + \int_b^a \int_b^a \frac{dx' dx}{\sqrt{(x-x')^2 + r^2 + (2h)^2}} \right] \quad (4-21)$$

Al resolver las integrales en la ecuación anterior, se obtiene la resistencia propia de una contra-antena:

$$R_{c-antena} = \frac{1}{4\pi\sigma l^2} \left[\begin{aligned} & l \ln \left[\frac{r^2((2h)^2 + r^2)}{(\sqrt{l^2 + r^2} - l)(\sqrt{l^2 + r^2 + (2h)^2} - l)} \right] + \dots \\ & \dots + 2\sqrt{(2h)^2 + r^2} - 2\sqrt{(2h)^2 + r^2 + l^2} + \dots \\ & \dots + 2r - 2\sqrt{l^2 + r^2} \end{aligned} \right] \quad (4-22)$$

donde $R_{c-antena}$ es la resistencia propia de la contra-antena.

Las ecuaciones (4-18) y (4-22) permiten obtener la resistencia de electrodos colocados tanto verticalmente como horizontalmente, asumiendo un régimen estacionario del campo electromagnético, ambas ecuaciones son ampliamente usadas para el diseño de redes de puesta a tierra (ver la norma IEEE Std 142-2007). Ahora bien, nótese que en ambas ecuaciones no se muestra la dependencia de la resistencia con la frecuencia; como por ejemplo: la tierra, por ser un medio conductor, se pueden originar corrientes inducidas de eddy o de Foucault que son corrientes del tipo solenoidal o de torbellino [Lorrain, 2000]²⁷, corrientes que se originan por las variaciones del campo magnético presente en el suelo. Este efecto no está considerado en estas ecuaciones; por tal motivo, en posteriores capítulos de este trabajo se incluye el cálculo de los parámetros eléctricos considerando la dinámica del campo electromagnético, para así tomar en cuenta estos efectos electromagnéticos.

4.3 Cálculo de la Resistencia mutua entre electrodos de puesta a tierra.

Cuando el sistema de puesta a tierra esté formado por más de un electrodo, puede haber resistencias mutuas entre ellos; como ejemplo, la figura 4-4 muestra dos barras enterradas, que no se encuentran interconectadas entre sí, y donde por una de ellas (la barra #1) se inyecta una corriente en la tierra i_{tierra} y por la otra barra no se inyecta ninguna corriente.

²⁷ Ver la página 465 del libro de Lorrain y Corson.

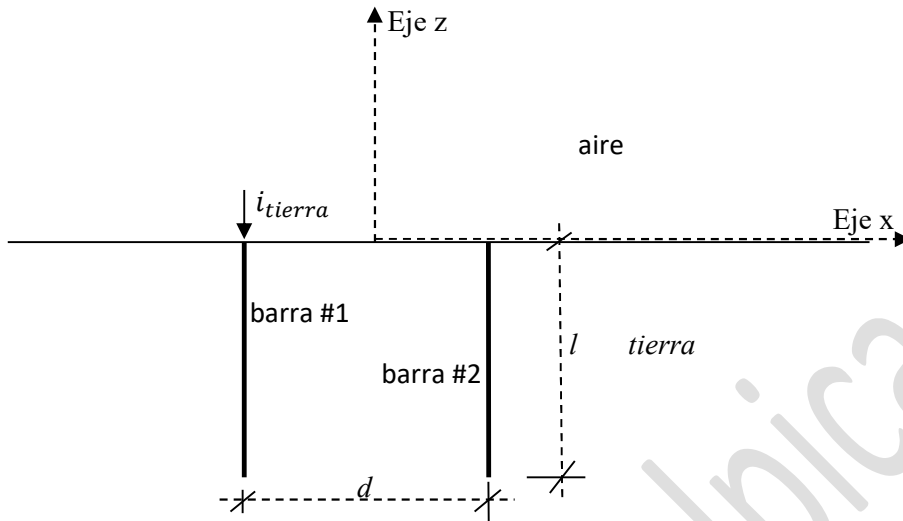


Fig. 4-4 electrodos enterrados verticalmente

Ahora bien, al inyectar una corriente en la tierra a través de la barra #1, la barra #2 adquiere un potencial. El potencial promedio que adquiere la barra #2 puede ser calculado usando la ecuación (4-14), integrando el potencial sobre el eje de la barra #2:

$$V_{\text{barra } 2} = \frac{i_{\text{tierra}}}{4\pi\sigma l^2} \left[\int_{-l}^0 \ln \left(\frac{\sqrt{d^2 + (z)^2} - z}{\sqrt{d^2 + (z+l)^2} - (z+l)} \right) + \ln \left(\frac{\sqrt{d^2 + (z)^2} + z}{\sqrt{d^2 + (z-l)^2} + (z-l)} \right) dz \right] \quad (4-23)$$

donde $V_{\text{barra } 2}$ es el potencial o la tensión promedio que adquiere la barra #2 y d es la separación horizontal que tienen los electrodo (ver la figura 4-4), esta separación entre las barras es igual a la siguiente relación:

$$d^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 \quad (4-24)$$

donde (x', y', z') son las coordenadas de cualquier punto del eje de la barra # 1 y (x, y, z) son las coordenadas de cualquier punto del eje de la barra #2.

Al resolver (4-23) se obtiene el potencial promedio para la barra que no drena corriente:

$$V_{\text{barra } 2} = \frac{1}{4\pi\sigma l} \left[\ln \left(\frac{d}{\sqrt{(2l)^2 + d^2} - 2l} \right) + \frac{d}{l} - \frac{\sqrt{(2l)^2 + d^2}}{l} \right] i_{\text{tierra}} \quad (4-25)$$

De la ecuación anterior se extrae la resistencia mutua que existe entre las dos barras:

$$R_{mutua} = \frac{1}{4\pi\sigma l} \left[\ln \left(\frac{d}{\sqrt{(2l)^2 + d^2} - 2l} \right) + \frac{d}{l} - \frac{\sqrt{(2l)^2 + d^2}}{l} \right] \quad (4-26)$$

donde R_{mutua} es la resistencia mutua que existe entre las dos barras.

La fórmula dada por (4-26) es válida solamente para calcular la resistencia mutua entre dos barras, para calcular la resistencia mutua para otras configuraciones; por ejemplo, entre dos contra-antenas, o entre una contra-antena y una barra; el procedimiento es muy similar al empleado para calcular la resistencia entre dos barras, pero su cálculo no se incluyen en este trabajo; para el lector interesado en el tema se recomienda consultar los trabajos de Dwight [1936], Rüdénberg [1945] y Tagg [1964].

La resistencia mutua entre electrodos, sin importar su configuración, tiende a disminuir a medida que se aumenta la separación d que existe entre ellos.

4.4 Cálculo de la resistencia de puesta a tierra en sistemas formados por más de un electrodo

A continuación se presenta el cálculo de la resistencia de puesta a tierra, cuando el sistema está formado por más de un electrodo. Como ejemplo, la figura 4-5 muestra un sistema de puesta a tierra formado por tres barras.

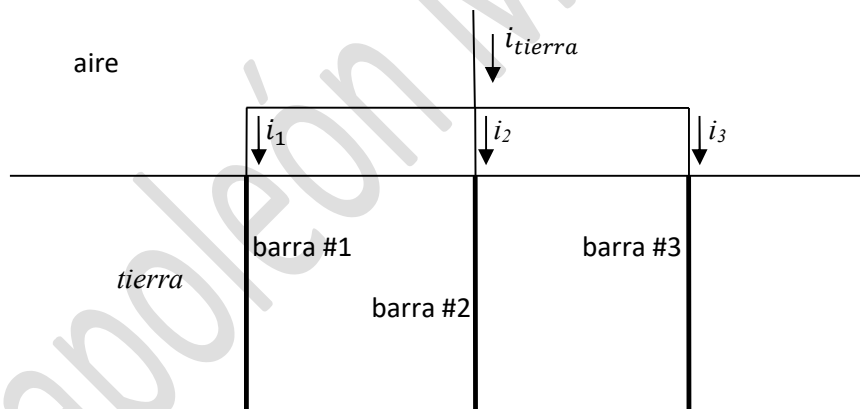


Fig. 4-5 Sistema de puesta a tierra formado por tres barras.

El potencial que adquiere cada barra se puede calcular con la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad (4-27)$$

donde R_{ii} es la resistencia propia del electrodo i calculada con la ecuación (4-18) , R_{ij} es la resistencia mutua que existe entre los electrodos i y j calculada con la ecuación (4-26) y V_j es la tensión que adquiere el electrodo j e i_j es la corriente que drena el electrodo j .

De acuerdo a la figura 4-5 , como todos los electrodos se encuentran interconectados entre sí, los tres electrodos tienen el mismo potencial, que es el potencial del sistema de puesta a tierra. Si se invierte la matriz resistencia que se muestra en la ecuación (4-27), para obtener una matriz de conductancia G , se pueden obtener cada una de las corrientes que drenan los electrodos.

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{tierra} \\ V_{tierra} \\ V_{tierra} \end{bmatrix} \quad (4-28)$$

donde G_{ii} es la conductancia propia del electrodo i y G_{ij} es la conductancia mutua entre los electrodos i y j .

Además, de acuerdo a la figura 4-5 , la corriente del sistema de puesta a tierra, es igual a la suma de las corrientes que drenan cada uno de los electrodos:

$$i_{tierra} = i_1 + i_2 + i_3 \quad (4-29)$$

Finalmente con las ecuaciones (4-28) y (4-29) se obtiene la resistencia de puesta a tierra para un sistema formado por más de un electrodo:

$$R_{tierra} = \frac{V_{tierra}}{i_{tierra}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 G_{i,j} \right)} \quad (4-30)$$

En conclusión, para obtener la resistencia de puesta a tierra de un sistema formado por más de un electrodo; luego de calcular la matriz resistencia formada por todas las resistencias mutuas y propias de los electrodos, la misma se invierte para obtener la matriz conductancia. Finalmente, la resistencia del sistema de puesta a tierra se obtiene como el inverso de la suma de todos los elementos de la matriz conductancia.

4.5 La zona de influencia de un electrodo o de un sistema de electrodos.

Hasta ahora no se ha mencionado por donde retorna la corriente que se inyecta a la tierra, a través de un electrodo de puesta a tierra; por ejemplo, la figura 4-2 muestra un electrodo por el cual se inyecta una corriente en la tierra, nótese que en la figura no se

muestra la corriente que retorna del suelo. Cuando se calcula la resistencia de un sistema de puesta a tierra, siempre se considera que la corriente que se inyecta en la tierra retorna en el infinito.

Para ilustrar hipotéticamente el retorno de la corriente en los sistemas de puesta a tierra, considérese que la tierra estuviera contenida en una semiesfera hueca, metálica, infinita, llena de tierra, como se ilustra en la figura 4-6 , Nótese en la figura que se tienen dos electrodos: uno formado por el electrodo de puesta a tierra y el otro por la semiesfera infinita; donde la semiesfera se encuentra llena por un volumen infinito de tierra, de esta forma se tiene hipotéticamente la resistencia de puesta a tierra.

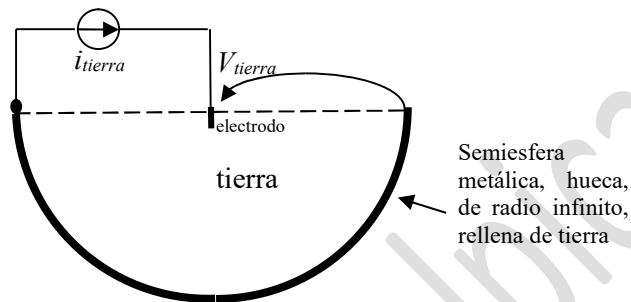


Fig. 4-6 Sistema de puesta a tierra

Si se conecta una fuente de corriente entre el infinito y el electrodo (ver la fig. 4-6), la tensión (V_{tierra}) que adquiere el electrodo vendrá dada por la ley de Ohm:

$$V_{tierra} = R_{barra} i_{tierra} \quad (4-31)$$

donde R_{barra} se obtiene usando la ecuación (4-18) (si se trata de una barra), o también puede ser la resistencia del sistema de puesta a tierra si está formado por más de un electrodo.

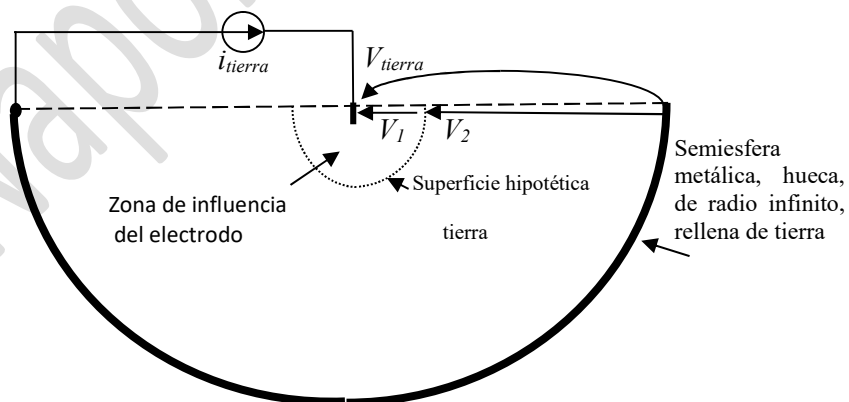


Fig. 4-7 Zona de influencia de un electrodo de puesta a tierra

Entonces, de acuerdo a la figura 4-6 , cuando se calcula la resistencia de un electrodo o de un conjunto de electrodos, se considera, en el cálculo de la resistencia, que se está tomando en cuenta todo el volumen infinito de tierra.

Ahora bien, es posible demostrar que el valor de la resistencia de un sistema de puesta a tierra, se debe prácticamente a un “volumen finito de tierra”, que se encuentra cerca del electrodo, a este volumen finito de tierra se le conoce en la literatura como la “zona de influencia del electrodo” [Tagg, 1964]²⁸.

La figura 4-7 muestra una barra y también se muestra la zona de influencia del electrodo en cuestión, considere el lector que se define como zona de influencia el volumen de tierra que contribuye con el 99% de la resistencia del electrodo; en la figura, la zona de influencia está limitada por una superficie hipotética, dibujada en línea punteada y semejante a una semiesfera.

También se muestra en la figura 4-7 dos tensiones: V_1 que es la tensión que existe entre el electrodo y la superficie que contiene el volumen de la tierra que contribuye con el 99% de la resistencia del electrodo; por lo tanto, esta tensión debe ser igual a lo siguiente:

$$V_1 = 0.99 V_{tierra} \quad (4-32)$$

y V_2 , que es la tensión entre la superficie hipotética y el infinito y esta tensión debe ser, de acuerdo a la figura 4-7 , igual a:

$$V_2 = V_{tierra} - V_1 = 0.01 V_{tierra} \quad (4-33)$$

Al dividir la ecuación anterior entre la corriente i_{tierra} que se inyecta por el electrodo se puede observar que el volumen de tierra que existe entre la superficie hipotética que se muestra en la figura 4-7 y el infinito, sólo contribuye con el 1% de la resistencia de puesta a tierra.

La superficie hipotética que contiene el volumen de la tierra que contribuye con el 99% de la resistencia, es relativamente fácil de calcular, ya que todos los puntos pertenecientes a esta superficie tienen el mismo potencial, y que debe ser igual a 1% de la tensión del electrodo.

Como ejemplo, en la figura 4-8 se muestra la superficie hipotética que contiene la zona de influencia de una barra, la misma fue obtenida calculando los puntos de una superficie que tienen un potencial igual al 1% de la tensión de la barra:

$$V(x,y,z) = 0.01 V_{barra} \quad (4-34)$$

La superficie en cuestión se obtiene al substituir las ecuaciones (4-14) y (4-17) en la ecuación anterior, y luego se resuelve la ecuación para la variable z . Para construir la zona de influencia que se muestra en la figura 4-8 , se asumió que se dispone de una

²⁸ Consultar la página 99 del libro de Tagg para la zona de influencia del electrodo.

barra de 2.40 m de longitud, media pulgada de diámetro y una conductividad del suelo igual a 0.01 (S m).

La zona de influencia se ha definido en este trabajo como el volumen de la tierra que contribuye con el 99% de la resistencia del electrodo; sin embargo, este porcentaje se puede variar y a medida que este porcentaje aumente, la zona de influencia también se incrementa.

Es importante mencionar que existe una relación entre la zona de influencia de un electrodo y la resistencia mutua que puede existir entre dos electrodos, por lo general, si se instala o se coloca un electrodo que quede dentro de la zona de influencia de otro electrodo, entonces la resistencia mutua entre ambos electrodos no es despreciable y debe ser considerada en los cálculos. Por otra parte, si el área de influencia de un electrodo, no se solapa con el área de influencia de otro electrodo, entonces la resistencia mutua entre los dos electrodos se puede despreciar o no tomar en consideración en los cálculos.

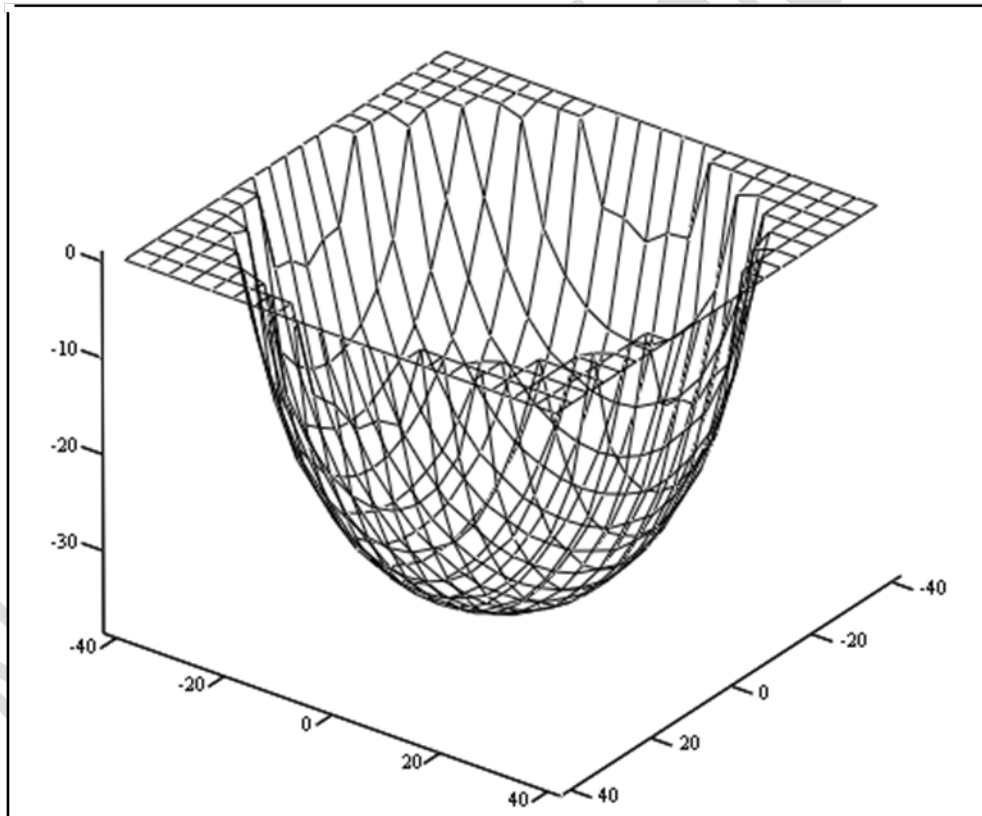


Fig. 4-8 Superficie que contiene la zona de influencia de un electrodo de puesta a tierra.
(dimensiones en metro)

Nótese de la figura 4-8 que la superficie que contiene la zona de influencia del electrodo es bastante parecida con la superficie de una esfera y lo mismo sucede si el sistema de

puesta a tierra estuviera formado por electrodos que fueran diferentes a una barra o que estén compuestos por varios electrodos.

Una forma aproximada de calcular la zona de influencia de un sistema de puesta a tierra, es considerar que el campo es creado por una carga puntual, que se encuentra en la superficie de la tierra; de esta forma, la superficie que limita la zona de influencia, la cual debe ser una superficie equipotencial, resulta en una esfera, cuyo radio viene dado por la siguiente expresión:

$$r_{zona} = \frac{100}{2 \pi \sigma (100 - \%zona)} R_{tierra} \quad (4-35)$$

donde $\%zona$ es el porcentaje que se quiere definir como zona de influencia del electrodo, r_{zona} es el radio de la semiesfera que define la zona y R_{tierra} es la resistencia de puesta a tierra del sistema de puesta a tierra o del electrodo.

Para el caso específico de la barra que se ha puesto como ejemplo, que tiene como características: 2.40 m de longitud, media pulgada de diámetro y una conductividad del suelo igual a 0.01 (S / m), al aplicar la ecuación (4-35) se obtiene un radio de 37.2 m para la semiesfera que contiene la zona de influencia de dicha barra.

4.6 La corriente de retorno de un sistema de puesta a tierra

En el apartado anterior se establece que cuando se calcula la resistencia de un sistema de puesta a tierra, se considera que la corriente que se inyecta por el sistema de puesta a tierra, la misma retorna en el infinito. La figura 4-6 ilustra de alguna forma el retorno de esta corriente en el infinito.

Pero en la vida real, sabemos que la corriente no retorna en el infinito, por lo general retorna a una distancia finita del sistema de puesta a tierra, y muchas veces retorna por otro sistema de puesta a tierra, a continuación se explica cómo se puede obtener la resistencia del sistema de puesta a tierra bajo esta condición:

La figura 4-7 muestra dos sistemas de puesta a tierra; por cada uno de ellos se inyecta una corriente i_{tierra} y en ambos caso la corriente retorna por el infinito. La inyección de corriente se realiza a través de dos fuentes de corriente, de igual magnitud, pero se han ajustado de manera tal que los sentidos de las corrientes sean opuestos.

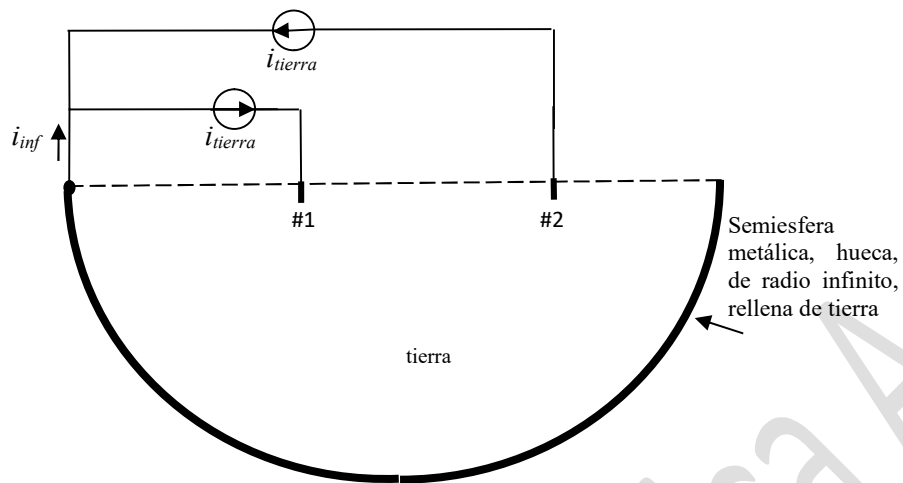


Fig. 4-9 Representación del infinito en un sistema de puesta a tierra

La tensión que adquiere el electrodo #1 se puede calcular si se conocen tanto la resistencia propia del electrodo #1 como la resistencia mutua que existe entre los dos electrodos:

$$V_1 = R_{11} i_{tierra} - R_{12} i_{tierra} \quad (4-36)$$

donde el signo menos en la ecuación anterior se debe al sentido de la corriente que circula por el electrodo #2, R_{11} es la resistencia propia del electrodo #1 y R_{12} es la resistencia mutua que existe entre los electrodos y V_1 es el potencial que adquiere el electrodo #1 o el sistema de puesta a tierra.

En la figura 4-9, se indica también la corriente i_{inf} que se drena por el electrodo semiesférico que se encuentra hipotéticamente en el infinito, como ambas fuentes de corriente son iguales en magnitud, la corriente i_{inf} tiene que ser nula; por lo tanto, no es necesario que las fuentes de corriente se conecten en el infinito, ya que no debe haber corriente por el electrodo semiesférico.

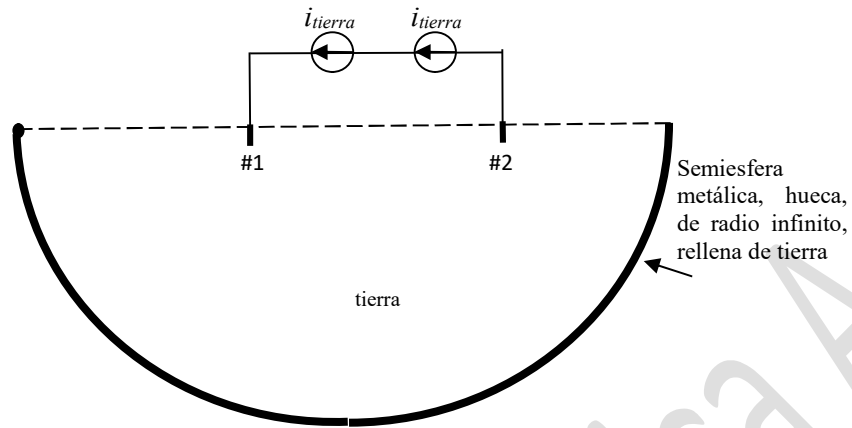


Fig 4-10 Representación del infinito en un sistema de puesta a tierra

La figura 4-10 muestra la red equivalente si ambas fuentes se desconectan del infinito. Ahora bien, como en la figura 4-10 ambas fuentes de corriente (que son de igual magnitud) quedan conectadas en serie, entonces en lugar de tener dos fuentes en serie, se puede eliminar una de ellas, sin que varíen las condiciones eléctricas de todo el sistema.

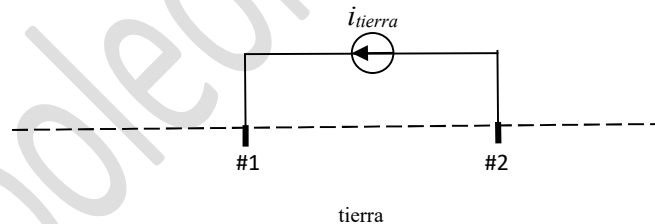


Fig. 4-11 Inyección de corriente en la tierra empleando un par de electrodos

Finalmente, la figura 4-11 muestra la red eléctrica equivalente, usando una sola fuente, en la misma se muestra la inyección de corriente por un electrodo (#1) y la corriente de retorno por otro electrodo o por otro sistema de puesta a tierra, que es lo que sucede en la vida real, pero que evidentemente ya no retorna en el infinito; entonces para calcular la tensión que adquiere el electrodo #1, sigue siendo válida la ecuación (4-36):

$$V_1 = (R_{11} - R_{12}) i_{tierra} \quad (4-37)$$

Si las zonas de influencia (ver el punto 4.5) de ambos electrodos no se solapan, entonces la resistencia mutua se puede despreciar de la ecuación anterior:

$$V_1 \approx R_{11} i_{tierra} \quad (4-38)$$

Finalmente, según la ecuación anterior, si los electrodos se encuentran lo suficientemente separados como para despreciar la resistencia mutua, el electrodo #1 se comporta como si la corriente retornara en el infinito.

Napoleón Malpica A.

5 Cálculo del campo electromagnético en líneas de transmisión, los modos de propagación, y las ecuaciones de Heaviside.

Este capítulo trata sobre el problema de las líneas de transmisión, aquí se abarca las diversas formas de cómo las ondas se pueden propagar por las líneas [Atwater, 1962]²⁹ como son: el modo transversal magnético TM, el modo transversal eléctrico TE y el modo transversal eléctrico y magnético TEM, este último es el modo como trabajan comúnmente los cables coaxiales y las líneas de transmisión aéreas.

También existen dispositivos conocidos como guías de ondas, que físicamente son tubos metálicos huecos, utilizados en telecomunicaciones, que se destinan para guiar o conducir el campo electromagnético de un punto a otro y que dichas guías operan en el modo TM o TE.

A esta altura el lector podrá preguntarse: ¿Qué relación puede tener la teoría sobre líneas de transmisión y ondas guiadas con los electrodos de puesta a tierra? Pues bien, la finalidad de este capítulo es inducir al lector sobre la existencia de todos los modos de propagación (TM, TE y TEM), cuando se trata de electrodos de puesta a tierra.

Parte de este capítulo está dedicado también a las ecuaciones de Heaviside, ecuaciones que son válidas cuando la línea opera en el modo TEM, ya que uno de los objetivos de este trabajo es encontrar un par de ecuaciones similares a las obtenidas por Heaviside, para ser utilizadas en electrodos de puesta a tierra, pero considerando todos los modos de propagación de las ondas.

Finalmente se presenta un análisis sobre la aplicación de las ecuaciones de Heaviside en barras para puesta a tierra.

5.1 Cálculo del campo eléctrico en líneas de transmisión y el modo de propagación transversal magnético TM.

Para calcular el campo eléctrico en una línea de transmisión, el mismo se puede obtener resolviendo la ecuación de propagación (3-18) para el campo eléctrico, en el dominio de la frecuencia, para ser aplicada a cables coaxiales, que es el cable comúnmente utilizado en telecomunicaciones y en redes de potencia de alta tensión. En este apartado se explica cómo se origina el modo de propagación transversal magnético TM en cables.

²⁹ Consultar la página 48 del libro de Atwater [1962] para los diversos modos de propagación

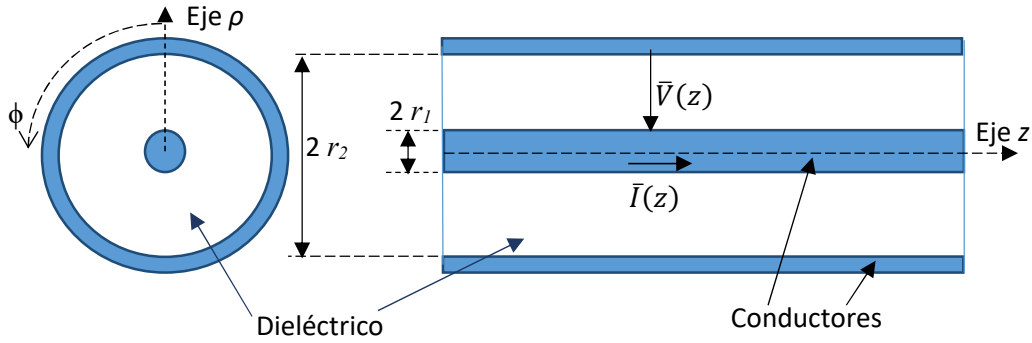


Fig. 5-1 Vistas en corte de un cable coaxial

La figura 5-1 muestra un cable coaxial, cuyo eje se encuentra alineado con el eje z , se muestran también la corriente $\bar{I}(z)$ que circula por el conductor interior, que es función de la coordenada z , y por último se muestra la tensión $\bar{V}(z)$ que existe entre los conductores, que también es función de la coordenada z .

Como el cable tiene simetría cilíndrica, se selecciona un sistema de coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) ; se considera, por ahora, que ambos conductores son ideales, en otras palabras que la conductividad de los mismos es infinita; esto trae como consecuencia que dentro de los conductores no existe campo electromagnético, sólo puede haber campo electromagnético en el dieléctrico (ver la figura 5-1).

Para calcular el campo eléctrico en el dieléctrico, hay que resolver la ecuación de propagación (3-18) y que se presenta a continuación:

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} - \gamma^2 \bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \bar{\rho}_s + j\omega \mu \bar{\mathbf{J}}_s \quad (5-1)$$

donde γ^2 viene dado por (3-33).

En el caso del cable, se asume que en el dieléctrico no existen ni cargas fuente ni corrientes fuentes, las fuentes del campo se encuentran sobre las superficies de los conductores; por lo tanto, la ecuación anterior se reduce a la ecuación de Helmholtz homogénea siguiente:

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{E}} - \gamma^2 \bar{\mathbf{E}} = 0 \quad (5-2)$$

En coordenadas cilíndricas, el vector campo eléctrico posee tres componentes:

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{E}_\rho \mathbf{a}_\rho + \bar{E}_\phi \mathbf{a}_\phi + \bar{E}_z \mathbf{a}_z \quad (5-3)$$

donde \bar{E}_ρ , \bar{E}_ϕ y \bar{E}_z son las componentes del campo eléctrico en las direcciones ρ , ϕ y z respectivamente, y \mathbf{a}_ρ , \mathbf{a}_ϕ y \mathbf{a}_z son vectores unitario en las direcciones ρ , ϕ y z respectivamente.

Para resolver (5-2), asumiendo un sistema de coordenadas cilíndricas, la misma se descompone en tres ecuaciones diferenciales escalares, donde dos de ellas se encuentran acopladas:

$$\nabla^2 \bar{E}_\rho - \frac{1}{\rho^2} \bar{E}_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \bar{E}_\phi - \gamma^2 \bar{E}_\rho = 0 \quad (5-4)$$

$$\nabla^2 \bar{E}_\phi - \frac{1}{\rho^2} \bar{E}_\phi - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \bar{E}_\rho - \gamma^2 \bar{E}_\phi = 0 \quad (5-5)$$

$$\nabla^2 \bar{E}_z - \gamma^2 \bar{E}_z = 0 \quad (5-6)$$

donde la constante γ viene dada por (3-33).

Si la componente del campo \bar{E}_z no es nula, entonces el modo de propagación resultante es el denominado Transversal Magnético TM.

Evidentemente la ecuación (5-6), por estar desacoplada, es la que resulta más fácil de resolver; en este caso, se utilizará el método de separación de variables para calcular \bar{E}_z

Para aplicar el método de separación de variables [Dettman, 1962]³⁰, el campo eléctrico se define como el producto de tres funciones R , Φ y Z :

$$E_z = R(\rho) \Phi(\phi) Z(z) \quad (5-7)$$

Al substituir (5-7) en (5-6), teniendo en cuenta el operador laplaciano y al reordenar la ecuación, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{1}{\rho R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} R \right) + \frac{1}{\Phi \rho^2} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi + \frac{1}{Z} \frac{d^2}{dz^2} Z - \gamma^2 = 0 \quad (5-8)$$

De la ecuación anterior se extraen dos ecuaciones diferenciales ordinarias:-

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2}{dz^2} Z = \Gamma^2 \quad (5-9)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2}{d\phi^2} \Phi = -m^2 \quad (5-10)$$

donde Γ y m son constantes que se determinan de las condiciones de simetría y de frontera del problema, como se explica más adelante.

Al resolver las dos ecuaciones diferenciales anteriores, se obtienen las funciones Φ y Z :

$$Z = b_{1z} e^{-\Gamma z} + b_{2z} e^{\Gamma z} \quad (5-11)$$

$$\Phi = b_\phi \cos(m(\phi - \phi_0)) \quad (5-12)$$

³⁰ Consultar la página 137 del libro de Dettman para el método de separación de variables.

donde m debe ser un número entero para que el campo tenga simetría con respecto al ángulo ϕ ; y ϕ_0 es el ángulo para la cual la función Φ es máxima, Γ es conocida como la constante de propagación de la línea y b_ϕ , b_{1z} y b_{2z} son funciones que se determinan de las condiciones de frontera.

Al substituir (5-9) y (5-10) en (5-8) y al reordenar la ecuación, se obtiene una tercera ecuación diferencial:

$$(a\rho)^2 \frac{d^2}{d(a\rho)^2} R + (a\rho) \frac{d}{d(a\rho)} R + ((a\rho)^2 - m^2)R = 0 \quad (5-13)$$

donde a es un autovalor real e igual a:

$$a = \sqrt{\Gamma^2 - \gamma^2} \quad (5-14)$$

La ecuación (5-13) es conocida como la ecuación diferencial de Bessel [Spiegel, 1988]³¹, cuya solución es la siguiente:

$$R = b_{1R} J_m(a_{m,k} \rho) + b_{2R} Y_m(a_{m,k} \rho) \quad (5-15)$$

donde $J_m(a_{m,k} \rho)$ y $Y_m(a_{m,k} \rho)$ son las funciones de Bessel de primera y segunda especie respectivamente y de orden m ; b_{1R} y b_{2R} son funciones que se determinan de las condiciones de borde.

Par cada orden m de las funciones de Bessel, existen múltiples autovalores reales $a_{m,k}$, cuya selección se explica más adelante.

Según (5-14), la constante de propagación Γ puede adquirir diversos valores, ya que depende del autovalor $a_{m,k}$ seleccionado, como se indica en la siguiente ecuación:

$$\Gamma_{m,k} = \sqrt{a_{m,k}^2 + \gamma^2} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n \quad (5-16)$$

Por lo general, la constante de propagación $\Gamma_{m,k}$ es una función compleja, con parte real e imaginaria, dada por la siguiente expresión:

$$\Gamma_{m,k} = \alpha_{m,k} + j \beta_{m,k} \quad (5-17)$$

donde $\alpha_{m,k}$ es una función real denominada constante de atenuación y $\beta_{m,k}$ es otra función real, conocida como constante de fase o el número de ondas³².

Finalmente, la componente del campo eléctrico E_z , para el modo (m,k) , se obtiene al substituir (5-11), (5-12) y (5-15) en (5-7):

$$\bar{E}_z^{m,k}(\rho, \phi, z) = \bar{E}_{z+}^{m,k}(\rho, \phi, z) + \bar{E}_{z-}^{m,k}(\rho, \phi, z) \quad (5-18)$$

donde:

³¹ Consultar la página 140 de libro de Spiegel para la ecuación diferencial de Bessel y su solución.

³² Es el número de ondas que hay por cada 2π metros.

$$\bar{E}_{z+}^{m,k}(\rho, \phi, z) = (b_{1+} J_m(a_{m,k} \rho) + b_{2+} Y_m(a_{m,k} \rho)) \cos(m(\phi - \phi_0)) e^{-\Gamma_{m,k} z} \quad (5-19)$$

$$\bar{E}_{z-}^{m,k}(\rho, \phi, z) = (b_{1-} J_m(a_{m,k} \rho) + b_{2-} Y_m(a_{m,k} \rho)) \cos(m(\phi - \phi_0)) e^{\Gamma_{m,k} z} \quad (5-20)$$

Si la constante $\Gamma_{m,k}$, tiene parte imaginaria no nula, entonces las ecuaciones (5-19) y (5-20), al transformarlas al dominio del tiempo usando (3-15), representan ondas viajeras, (ondas cilíndricas), la primera viaja en el sentido positivo del eje z y la segunda en el sentido negativo del eje z ; por otra parte, si la constante $\Gamma_{m,k}$ tiene parte real no nula, entonces las ondas, se ven también afectadas por un fenómeno de atenuación.

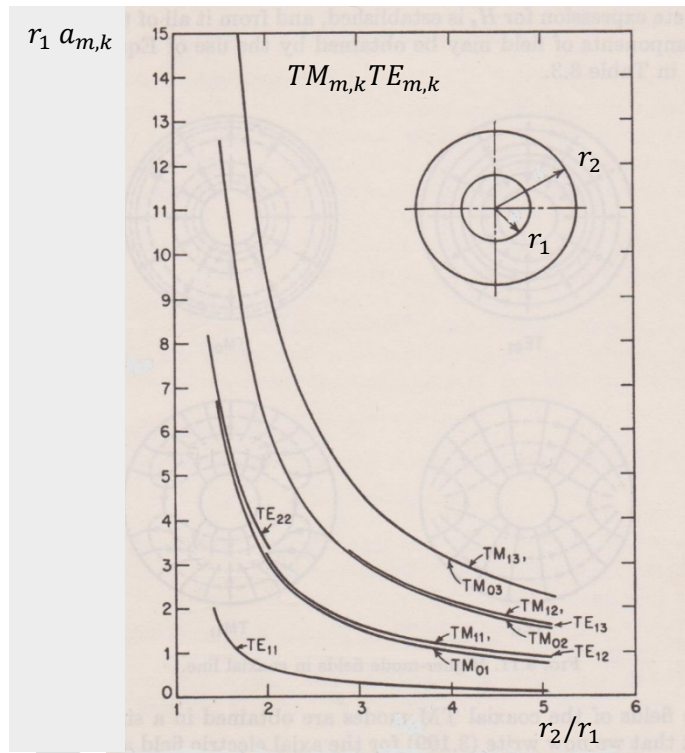


Fig. 5-2 Ayuda gráfica para obtener los autovalores $a_{m,k}$, en cables coaxiales, en función de la razón de los radios de los conductores³³.

Para calcular los autovalores $a_{m,k}$, éstos se obtienen al aplicar las condiciones de frontera y que consiste en evaluar la componente del campo eléctrico E_z sobre la superficie de los electrodos ($\rho = r_1$ y $\rho = r_2$), donde el campo eléctrico E_z debe ser continuo. Como dentro de los conductores ideales el campo eléctrico tiene que ser nulo, entonces el campo en la superficie también lo debe ser:

$$\bar{E}_z(r_1, \phi, z) = \bar{E}_z(r_2, \phi, z) = 0 \quad (5-21)$$

³³ Figura tomada del libro de H. A. Atwater, Introduction to Microwave Theory, McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC., International Student Edition, Tokyo, 1962

Al substituir (5-18) , (5-19) y (5-20) en (5-21) se obtiene la siguiente igualdad:

$$J_m(a_{m,k} r_1) Y_m(a_{m,k} r_2) = J_m(a_{m,k} r_2) Y_m(a_{m,k} r_1) \quad (5-22)$$

Si los radios del cable r_1 y r_2 son conocidos, los autovalores $a_{m,k}$ se pueden obtener numéricamente al resolver la ecuación anterior.

Otra manera conveniente de calcular los autovalores, consiste en reordenar la ecuación anterior y presentarla de la siguiente forma:

$$J_m(a_{m,k} r_1) Y_m\left(a_{m,k} r_1 \frac{r_2}{r_1}\right) = J_m\left(a_{m,k} r_1 \frac{r_2}{r_1}\right) Y_m(a_{m,k} r_1) \quad (5-23)$$

Para la ecuación anterior, se asume que la razón de los radios r_2/r_1 es conocida, luego la ecuación se resuelve para $a_{m,k} r_1$. En la figura 5-2 se muestra una gráfica de como varía $a_{m,k} r_1$ en función de la razón de los radios r_2/r_1 , para los modos de propagación TM_{mk} y TE_{mk} donde m es el orden de las funciones de Bessel y el valor k corresponde a la posición que ocupa el autovalor, si los mismos se ordenan de menor a mayor : $a_{m,1} < a_{m,2} < \dots < a_{m,k} < \dots < a_{m,n}$

Para calcular las otras componentes del campo eléctrico E_ϕ y E_ρ , no se necesitan resolver las ecuaciones diferenciales (5-4) y (5-5), estas componentes pueden ser calculadas a través de las ecuaciones de Maxwell (3-3) y (3-4), si las mismas se descomponen en sus tres componentes vectoriales (ρ, ϕ y z), en el dominio de la frecuencia y si el campo E_z , dado por (5-18), es conocido,³⁴ se tiene:

$$\bar{E}_\phi = \frac{r}{a_{m,k}^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \bar{E}_z \quad (5-24)$$

$$\bar{E}_\rho = \frac{-r}{a_{m,k}^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \bar{E}_z \quad (5-25)$$

$$\bar{H}_\phi = \frac{-(\sigma + j\omega\epsilon)}{a_{m,k}^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \bar{E}_z \quad (5-26)$$

$$\bar{H}_\rho = \frac{(\sigma + j\omega\epsilon)}{a_{m,k}^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \bar{E}_z \quad (5-27)$$

$$\bar{H}_z = 0 \quad (5-28)$$

Para que los modos de propagación TM y TE se puedan activar en cables coaxiales, la frecuencia o las frecuencias presentes en el cable deben ser muy altas (en el orden de los GHz). No es común que un cable se utilice para que opere o trabaje en los modos TE o TM, lo típico es que los cables operen sólo en el modo TEM, ya que este modo puede estar presente a cualquier frecuencia.

³⁴ Consultar la página 65 del libro de Atwater [1962]

Como ya se ha dicho, para que un cable opere en el modo transversal magnético; por ejemplo, el modo TM_{01} , la frecuencia de operación debe estar por encima de lo que se denomina la frecuencia de corte ω_{corte} ; por ejemplo, para un cable de buena calidad, si se asume que el dieléctrico del cable tiene muy bajas pérdidas, de forma tal que se pueda asumir que la conductividad es nula ($\sigma \approx 0$); entonces la constante de propagación en el cable Γ_{01} se obtiene con las ecuaciones (3-33) y (5-16):

$$\Gamma_{m,k} = \sqrt{a_{m,k}^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \quad (5-29)$$

Para la ecuación anterior, existe un valor de frecuencia para la cual la constante de propagación $\Gamma_{m,k}$ se anula, a esta frecuencia se le conoce como frecuencia de corte ω_{corte} y viene dada por:

$$\omega_{corte} = \frac{a_{m,k}}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (5-30)$$

Si en la ecuación (5-29), la frecuencia ω es menor a la frecuencia de corte, el coeficiente de propagación $\Gamma_{m,k}$ resulta real puro, por lo tanto, la componente \bar{E}_z dada por (5-18) (5-19) y (5-20) del campo eléctrico, se atenúa con la posición z , y por el contrario, si ω es mayor que la frecuencia de corte, $\Gamma_{m,k}$ es imaginario puro, entonces el campo se propaga en la dirección de z , sin atenuación.

Como ejemplo, asúmase que se tiene un cable coaxial, donde el radio del conductor interno r_1 es igual a 0.8 mm y el radio del conductor externo r_2 es de 3.1 mm ; además se emplea un dieléctrico cuya permitividad y permeabilidad son similares a las del aire. Se desea activar, en el cable, el modo de propagación TM_{01} ; para ello, al utilizar la figura 5-2, se obtiene el autovalor correspondiente al modo en cuestión y que es aproximadamente igual a :

$$a_{01} = 1250 \text{ m}^{-1}. \quad (5-31)$$

Al evaluar la frecuencia de corte usando (5-30) y (5-31) para el cable dado como ejemplo, la misma corresponde a 59 GHz aproximadamente. Entonces, el modo TM_{01} se puede activar si las frecuencias de las señales que pasan por el cable superan esta frecuencia de corte.

Si la frecuencia o las frecuencias en el cable son menores a la frecuencia de corte, la atenuación que sufre la componente del campo \bar{E}_z se puede obtener al considerar que en el cable existe una única onda que viaja en el sentido positivo del eje z (ver la ec. (5-19)); entonces, se calcula cuanto se atenúa la onda (en decibeles), cuando la misma recorre una longitud Δz , aplicando la siguiente ecuación:

$$\text{Atenuación}_{dB} = - \frac{20 \log_{10} \left(\frac{|\bar{E}_z^{m,k}(\rho, \phi, z + \Delta z)|}{|\bar{E}_z^{m,k}(\rho, \phi, z)|} \right)}{\Delta z} \quad [dB/m] \quad (5-32)$$

donde el campo eléctrico viene dado por las ecuaciones (5-18) y (5-19).

Al substituir (5-18) y (5-19) en la ecuación anterior se obtiene la siguiente ecuación:

$$\text{Atenuación}_{dB} = - 20 \log_{10}(e) \operatorname{Re}(\Gamma_{m,k}) \quad [dB/m] \quad (5-33)$$

donde Re se refiere a la parte real de una cantidad compleja.

Si la frecuencia ω es mucho menor que la frecuencia de corte, la fórmula anterior se aproxima a la siguiente:

$$\text{Atenuación}_{dB} \approx 20 a_{m,k} \log_{10}(e) \quad [dB/m] \quad (5-34)$$

En el caso del cable dado como ejemplo, si la frecuencia que opera el cable es mucho menor que la frecuencia de corte, la atenuación en el modo $TM_{0,1}$, al usar la aproximación anterior, es de 10.857dB por cada metro de cable; como se puede observar, esta atenuación es sumamente alta y será mucho más alta para otros modos $TM_{m,k}$ de orden superior; por este motivo, es que no se considera la presencia de los modos TM ni TE en cables cuando operan a frecuencias inferiores a la frecuencia de corte.

Ahora bien, volviendo al tema que nos ocupa que son los sistemas de puesta a tierra, si para activar el modo TM en un cable se requiere que el mismo trabaje a frecuencias del orden de los GHz, frecuencias que no tienen interés alguno para un sistema de puesta a tierra³⁵, entonces la pregunta que hay que hacer es la siguiente: Si para modelar un cable es suficiente considerar sólo el modo TEM ¿Por qué se debe considerar además los modos TM y TE en los sistemas de puesta a tierra?.

Para responder lo anterior, en la figura 5-3 a) se muestra un electrodo de puesta a tierra, en este caso se trata de una barra o jabalina de longitud l , enterrada verticalmente en el suelo y la misma se utiliza para inyectar una corriente \bar{I}_{tierra} por el suelo; por lo general, esta corriente retorna de la tierra en un punto muy alejado del electrodo (ver el punto 4.6) o también se asume que esta corriente retorna en el infinito.

Ahora bien, se pretende modelar el electrodo mostrado en la figura 5-3 a) como si fuera una línea de transmisión, en este caso se ha seleccionado un cable coaxial como se muestra en la figura 5-3 b), la longitud del cable l es la misma del electrodo, el radio del conductor interior del cable es igual al del electrodo y el radio del conductor externo se selecciona mayor a la zona de influencia del electrodo (ver el punto 4.5) y en lugar de asumir que se tiene un dieléctrico entre los dos conductores, se asume que el dieléctrico se ha substituido por tierra con una conductividad σ igual a la del suelo.

Como ejemplo, asúmase que se tiene una barra normalizada de $\frac{1}{2}$ pulgada de diámetro ($r_l = 6.2 \text{ mm}$) y 2.4 m de longitud. Por otra parte, asúmase que las propiedades del suelo son las siguientes: $\sigma = 0.01 \text{ (S/m)}$, $\epsilon = 8.85 \times 10^{-12} \text{ (F/m)}$, $\mu = 4\pi \times 10^{-7} \text{ (H/m)}$, y el radio del conductor exterior se toma igual a 600 m, que es mucho mayor que la zona de

³⁵ En los sistemas de puesta a tierra, las frecuencias de interés para la protección de infraestructuras están comprendidas desde los 0Hz, hasta los 20MHz, este rango de frecuencia incluye eventos transitorios como las corrientes producidas por rayos que se descargan a través de los sistemas de puesta a tierra. Para otras aplicaciones que no tienen que ver con seguridad, como puede ser las telecomunicaciones, estas frecuencias pudieran estar por encima de los 20MHz.

influencia del electrodo³⁶ ($r_2 = 600$ m). Al resolver la ecuación (5-23) para el modo TM_{01} , se obtiene el autovalor correspondiente ($a_{0,1} = 0.043 \text{ m}^{-1}$).

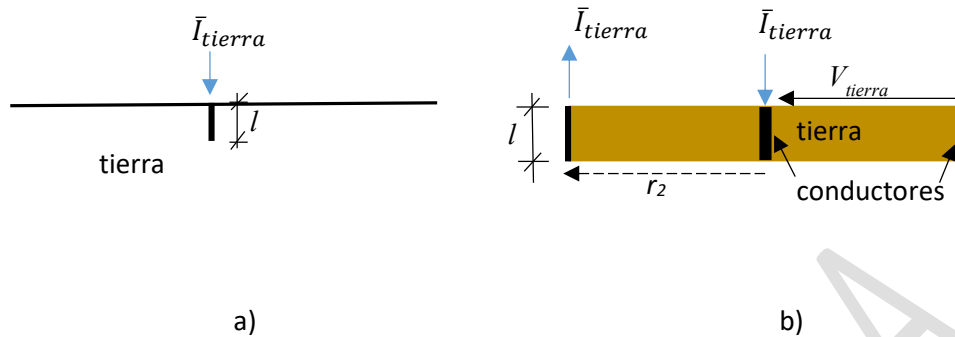


Fig. 5-3: a) Sistema de puesta a tierra formado por una sola barra. b) Representación de una barra, mediante un cable coaxial.

La constante de propagación $\Gamma_{0,1}$ se calcula con los datos dados en el párrafo anterior y con las ecuaciones (5-16) y (3-33):

$$\Gamma_{0,1} = \sqrt{(a_{0,1}^2 - \omega^2 \varepsilon \mu) + j\omega\mu\sigma} \quad (5-35)$$

En este caso, como el medio tiene pérdidas, no se puede establecer una frecuencia de corte y los fenómenos tanto de propagación (parte imaginaria de $\Gamma_{0,1}$) como de atenuación (parte real de $\Gamma_{0,1}$) están presentes para cualquier frecuencia.

La figura 5-4 muestra la atenuación de la componente \bar{E}_z del campo eléctrico, en función de la frecuencia, para dos tipos de suelo, la que aparece en línea continua corresponde a un suelo muy buen conductor³⁷ y la curva con línea segmentada corresponde a un suelo muy mal conductor, ambos son casos extremos en cuanto a la conductividad del suelo; sin embargo, se aprecia en la gráfica que la atenuación es muy pequeña en comparación con el ejemplo dado para el cable coaxial, que era de 10.857dB.

En vista que la atenuación resultante es pequeña para la componente del campo \bar{E}_z , según la figura 5-4, es por este motivo que en este trabajo se plantea la conveniencia de incluir el modo TM cuando los electrodos de puesta a tierra se modelan como si fueran líneas de transmisión.

³⁶ La zona de influencia para este electrodo, considerando el 99%, tiene un radio de 37.2 m, calculada según (4-35).

³⁷ La clasificación en buenos o malos conductores del suelo fue hecha con base a la norma IEEE 80-2000 IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding.

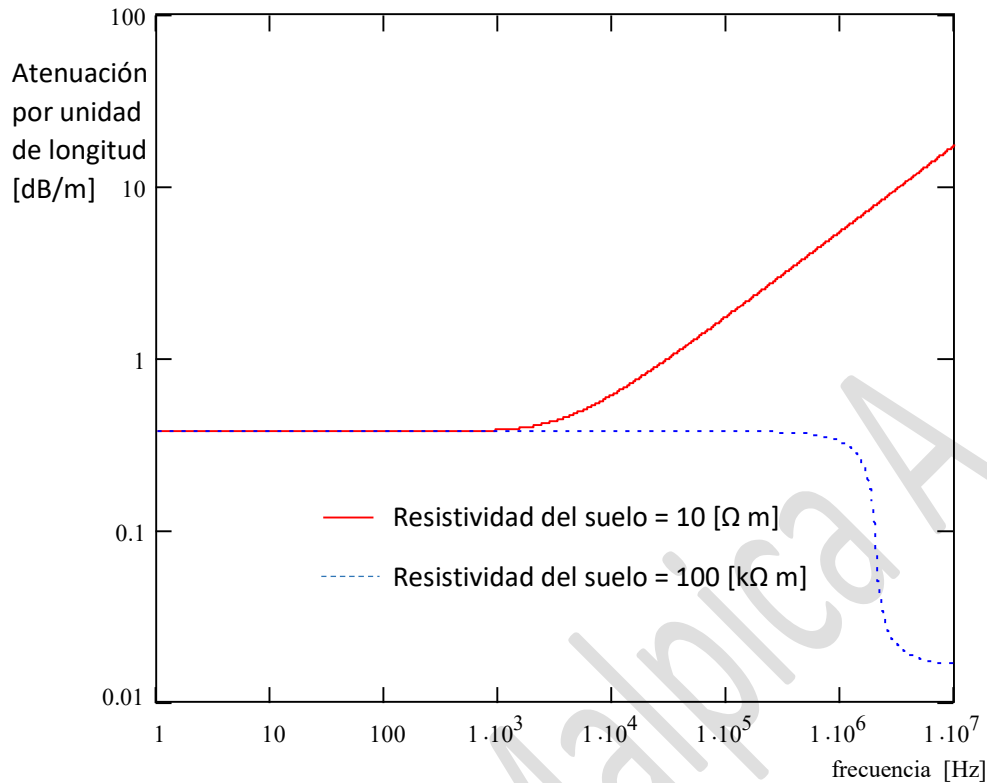


Fig. 5-4: Atenuación en dB por unidad de longitud para la componente \bar{E}_z del campo eléctrico en una barra modelada como si fuera un cable coaxial

Según se puede apreciar en la figura 5-4, para bajas frecuencias, la atenuación no muestra dependencia con la frecuencia y por lo tanto presenta un valor constante que se puede obtener aplicando la ecuación (5-34).

5.2 Cálculo del campo magnético en líneas de transmisión y el modo de propagación transversal eléctrico TE.

Para el cable coaxial mostrado en la figura 5-1, el campo magnético que existe en el material dieléctrico se puede obtener resolviendo la ecuación de propagación (3-21), pero asumiendo que no hay corrientes fuentes en el dieléctrico.

$$\nabla^2 \bar{H} - j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\bar{H} = 0 \quad (5-36)$$

La ecuación anterior resultante, es la ecuación homogénea de Helmholtz, que al utilizar un sistema de coordenadas cilíndricas, la misma se descompone en tres ecuaciones escalares:

$$\nabla^2 \bar{H}_\rho - \frac{1}{\rho^2} \bar{H}_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \bar{H}_\phi - \gamma^2 \bar{H}_\rho = 0 \quad (5-37)$$

$$\nabla^2 \bar{H}_\phi - \frac{1}{\rho^2} \bar{H}_\phi - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \bar{H}_\rho - \gamma^2 \bar{H}_\phi = 0 \quad (5-38)$$

$$\nabla^2 \bar{H}_z - \gamma^2 \bar{H}_z = 0 \quad (5-39)$$

donde el vector campo magnético viene dado por la suma de sus tres componentes:

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{H}_\rho \mathbf{a}_\rho + \bar{H}_\phi \mathbf{a}_\phi + \bar{H}_z \mathbf{a}_z \quad (5-40)$$

De las tres ecuaciones (5-37), (5-38) y (5-39) la más simple de resolver es la (5-39) ya que se encuentra desacoplada, pero como su topología es la misma que presenta su correspondiente para el campo eléctrico (5-6), entonces la solución general para la componente del campo \bar{H}_z es la misma que la obtenida para el campo eléctrico \bar{E}_z , dada por las ecuaciones (5-18), (5-19) y (5-20):

$$\bar{H}_z^{m,k}(\rho, \phi, z) = \bar{H}_{z+}^{m,k}(\rho, \phi, z) + \bar{H}_{z-}^{m,k}(\rho, \phi, z) \quad (5-41)$$

donde:

$$\bar{H}_{z+}^{m,k}(\rho, \phi, z) = (d_{1+} J_m(a_{m,k} \rho) + d_{2+} Y_m(a_{m,k} \rho)) \cos(m(\phi - \phi_0)) e^{-\Gamma_{m,k} z} \quad (5-42)$$

$$\bar{H}_{z-}^{m,k}(\rho, \phi, z) = (d_{1-} J_m(a_{m,k} \rho) + d_{2-} Y_m(a_{m,k} \rho)) \cos(m(\phi - \phi_0)) e^{\Gamma_{m,k} z} \quad (5-43)$$

donde $\bar{H}_z^{m,k}(\rho, \phi, z)$ es la componente del campo magnético en la dirección de z o en la dirección axial de la línea, para el modo (m, k) ; $\bar{H}_{z+}^{m,k}(\rho, \phi, z)$ y $\bar{H}_{z-}^{m,k}(\rho, \phi, z)$ representan ondas viajeras (ondas cilíndricas) que viajan en el sentido positivo y negativo respectivamente del eje z . Las funciones d_{1+} , d_{2+} , d_{1-} y d_{2-} se obtienen de las condiciones de borde del problema.

Si el campo $\bar{H}_z^{m,k}(\rho, \phi, z)$ es conocido, las demás componentes del campo pueden ser calculadas a través de las ecuaciones de Maxwell (3-3) y (3-4), si las mismas se descomponen en sus tres componentes vectoriales $(\rho, \phi$ y $z)$, en el dominio de la frecuencia, no es necesario resolver las ecuaciones diferenciales acopladas (5-37) y (5-38)³⁸:

$$\bar{E}_\phi = \frac{-j\omega\mu}{a_{m,k}^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \bar{H}_z \quad (5-44)$$

$$\bar{E}_\rho = \frac{-j\omega\mu}{a_{m,k}^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \bar{H}_z \quad (5-45)$$

$$\bar{H}_\phi = \frac{-\Gamma}{a_{m,k}^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \bar{H}_z \quad (5-46)$$

$$\bar{H}_\rho = \frac{-\Gamma}{a_{m,k}^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \bar{H}_z \quad (5-47)$$

$$\bar{E}_z = 0 \quad (5-48)$$

³⁸ Consultar la página 65 del libro de Atwater [1962].

Para calcular los autovalores $a_{m,k}$ que se requieren en las ecuaciones (5-42) y (5-43), y para la constante de propagación $\Gamma_{m,k}$, estos se obtienen evaluando las condiciones de borde para la componente del campo eléctrico \bar{E}_ϕ :

$$\bar{E}_\phi(r_1, \phi, z) = \bar{E}_\phi(r_2, \phi, z) = 0 \quad (5-49)$$

Si se asume que la componente \bar{H}_z del campo magnético se encuentra viajando en la dirección positiva del eje z, al emplear las ecuaciones (5-41), (5-42) y (5-44) en la ecuación anterior, se obtiene la siguiente relación:

$$\frac{d}{d\rho} (J_m(a_{m,k} r_1)) \frac{d}{d\rho} (Y_m(a_{m,k} r_2)) = \frac{d}{d\rho} (J_m(a_{m,k} r_2)) \frac{d}{d\rho} (Y_m(a_{m,k} r_1)) \quad (5-50)$$

La solución de la ecuación anterior permite obtener todos los autovalores para el modo TE, la gráfica que se muestra en la figura 5-2 permite obtener los modos en cuestión en función de los radios del cable coaxial.

Si se pretende modelar una barra como si fuera una línea de transmisión o un cable coaxial, tal como se muestra en la figura 5-3, puede que sea necesario incluir el modo TE, si la atenuación no es considerable. A bajas frecuencias la atenuación calculada según (5-34) es proporcional con el valor del autovalor $a_{m,k}$, pero nótese que según la figura 5-2 los autovalores tienden a disminuir si la relación de los radios del cable r_2 / r_1 tiende a aumentar (ver la figura 5-3), que es el caso de una barra donde al pretender modelarlo como un cable, el radio exterior debe ser mayor a la zona de influencia del electrodo. Por este motivo, en este trabajo se pretende modelar los electrodos de tierra, considerando todos los modos de propagación

5.3 El modo de propagación TEM y las ecuaciones de Heaviside.

Este modo se presenta cuando el autovalor $a_{m,k}$ toma el valor de cero o nulo:

$$a_{m,0} = 0 \quad (5-51)$$

Nótese que este autovalor es válido para cualquier cable, ya que es una solución trivial de las relaciones dadas por (5-22) y (5-50), ya que no es función de los radios del cable.

Ahora bien, si $a_{m,0} = 0$, analizando las ecuaciones (5-24), (5-25), (5-26), (5-27), (5-44), (5-45), (5-46) y (5-47); para que las componentes del campo \bar{E}_ρ , \bar{E}_ϕ , \bar{H}_ρ y \bar{H}_ϕ tengan valores finitos, las componentes del campo tanto \bar{E}_z como \bar{H}_z deben ser nulas.

$$\bar{E}_z = \bar{H}_z = 0 \quad (5-52)$$

Por este motivo es que a este modo se le conoce como “transversal eléctrico y magnético” TEM ya que no hay campo en dirección axial del cable.

Para el modo TEM, la frecuencia de corte para cables con pérdidas despreciables, según (5-30), es igual a cero, por lo tanto este modo tiene la ventaja que el fenómeno de propagación de ondas está presente a cualquier frecuencia.

Para el modo TEM, la constante de propagación, según (3-33) y (5-16) , se reduce a lo siguiente:

$$\Gamma_{m,0} = \gamma = \sqrt{-\omega^2 \epsilon \mu + j \omega \mu \sigma} \quad (5-53)$$

Para calcular el campo eléctrico para el modo TEM, será necesario resolver el par de ecuaciones diferenciales acopladas (5-4) y (5-5), pero antes se demostrará que en cables coaxiales, con sección circular, el campo E_ρ no depende del ángulo ϕ .

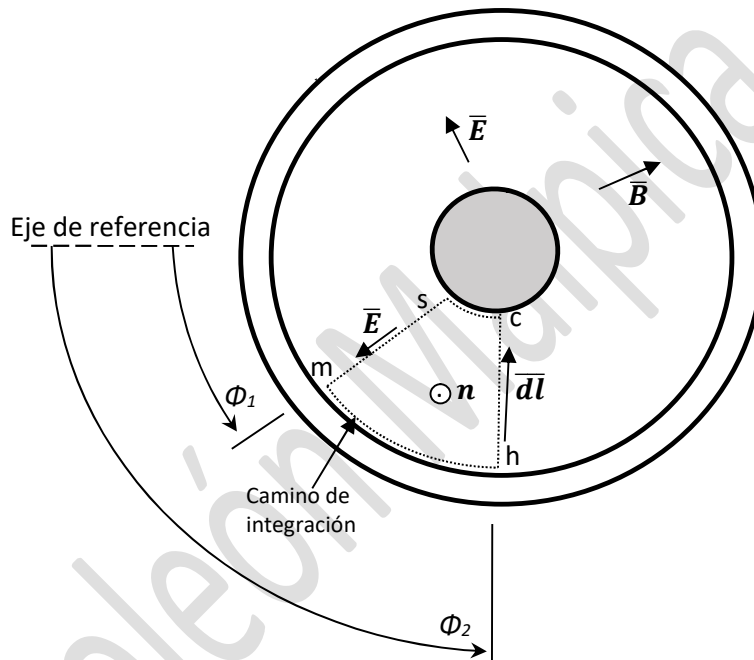


Fig. 5-5 Sección de un cable coaxial

La figura 5-5 muestra la sección de un cable coaxial y también se muestra, en línea punteada, un camino de integración cerrado, donde será integrada la ecuación (3-3), en el dominio de la frecuencia:

$$\int_{sup} (\nabla \times \bar{E}) \cdot \mathbf{n} ds = -j \omega \int_{sup} \bar{B} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (5-54)$$

donde \mathbf{n} es un vector unitario en la dirección axial o en la dirección del eje z , ds es un diferencial de superficie y sup es la superficie que encierra el camino de integración.

La segunda integral que se muestra en la ecuación (5-54) representa el flujo magnético en la dirección del eje z que encierra el camino de integración, pero como la componente \bar{H}_z del campo es nula, esta integral también es nula, dando como resultado que el campo eléctrico, en el plano $z = \text{constante}$, se comporta como un campo gradiente o un campo conservativo.

Al aplicar el teorema de Stoke a la ecuación anterior:

$$\int_{sup} (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{n} ds = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (5-55)$$

donde $d\vec{l}$ es un vector diferencial de longitud.

La integral de línea, en un camino cerrado, se puede descomponer en cuatro integrales de línea (ver la figura 5-5):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_m^h \vec{E}_\phi \cdot \rho d\phi + \int_h^c \vec{E}_\rho \cdot d\rho + \int_c^s \vec{E}_\phi \cdot \rho d\phi + \int_s^m \vec{E}_\rho \cdot d\rho = 0 \quad (5-56)$$

donde h, c, s y m son los vértices pertenecientes al camino de integración

Si las trayectorias s-c y h-m del camino de integración se escogen de manera tal que queden sobre las superficies de los conductores, el campo \vec{E}_ϕ se anula en dichas trayectorias; por lo tanto, la ecuación anterior se reduce a la siguiente igualdad:

$$\int_{r_2}^{r_1} \vec{E}_\rho(\rho, \phi_2, z) d\rho = \int_{r_2}^{r_1} \vec{E}_\rho(\rho, \phi_1, z) d\rho \quad (5-57)$$

donde r_1 y r_2 son los radios de los conductores y que se muestran en la fig. 5-1.

Para que en la relación anterior, ambas integrales sean iguales, la componente del campo \vec{E}_ρ no debe depender del ángulo ϕ ; por lo tanto el campo, \vec{E}_ρ sólo es función de las variables ρ y z .

A seguir se demuestra que la componente \vec{E}_ϕ del campo eléctrico, para el cable coaxial, debe ser nula, la figura 5-6 muestra nuevamente una sección de un cable coaxial y un camino de integración, donde la trayectoria limitada por los vértices m-h se ha ubicado en una zona donde se encuentra el dieléctrico del cable.

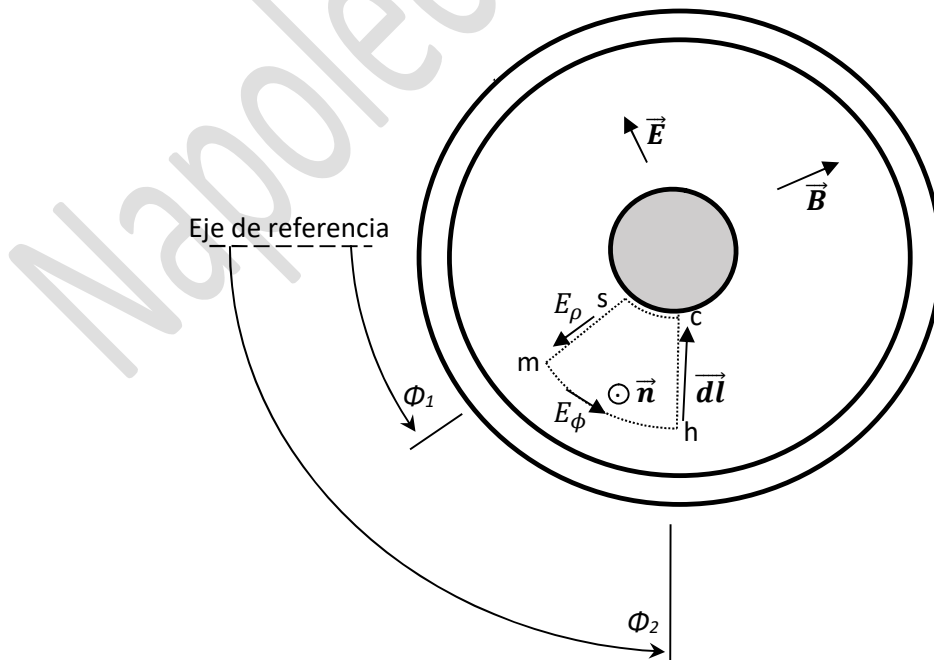


Fig. 5-6 Sección de un cable coaxial

Al aplicar la ecuación (5-55) al camino de integración mostrado en la figura 5-6, se obtiene lo siguiente:

$$\oint \bar{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \bar{E}_\phi(\rho, \phi, z) \rho d\phi + \int_r^{r_1} \bar{E}_\rho(\rho, z) d\rho + \int_{r_1}^r \bar{E}_\rho(\rho, z) d\rho = 0 \quad (5-58)$$

Como la componente del campo \bar{E}_ρ no depende de la variable ϕ , las dos últimas integrales se cancelan entre sí, quedando la siguiente igualdad:

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} \bar{E}_\phi(\rho, \phi, z) \rho d\phi = 0 \quad (5-59)$$

Para que se cumpla la igualdad anterior, el campo \bar{E}_ϕ tiene que ser nulo.

En cuanto al campo magnético, la componente \bar{H}_ρ también es nula, a continuación se presenta la demostración:

Al descomponer la ecuación (3-3), en sus tres componentes escalares, en coordenadas cilíndricas y en el dominio de la frecuencia, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \bar{E}_z - \frac{\partial}{\partial z} \bar{E}_\phi = -j\omega\mu \bar{H}_\rho \quad (5-60)$$

$$-\frac{\partial}{\partial \rho} \bar{E}_z + \frac{\partial}{\partial z} \bar{E}_\rho = -j\omega\mu \bar{H}_\phi \quad (5-61)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \bar{E}_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \bar{E}_\rho = -j\omega\mu \bar{H}_z \quad (5-62)$$

Nótese de la ecuación (5-60), si las componentes del campo \bar{E}_z y \bar{E}_ϕ son nulas, entonces el campo \bar{H}_ρ también es nulo. La única componente del campo magnético que no se anula es \bar{H}_ϕ , como se puede comprobar con la ecuación (5-61), ya que \bar{E}_ρ no es nulo.

Entonces, el campo magnético y eléctrico en un cable coaxial, para el modo TEM, viene dado por las siguientes componentes:

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{E}_\rho(\rho, z) \mathbf{a}_\rho \quad (5-63)$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \bar{H}_\phi(\rho, z) \mathbf{a}_\phi \quad (5-64)$$

Para calcular la componente \bar{E}_ρ del campo eléctrico, se resuelve la ecuación diferencial (5-4) y que se transcribe a continuación:

$$\nabla^2 \bar{E}_\rho - \frac{1}{\rho^2} \bar{E}_\rho - \gamma^2 \bar{E}_\rho = 0 \quad (5-65)$$

Como solución general de la ecuación diferencial anterior, usando el método de separación de variables, se plantea la siguiente:

$$\bar{E}_\rho(\rho, z) = R(\rho) e^{\Gamma z} \quad (5-66)$$

donde Γ , para el modo TEM, viene dado por (5-53):

$$\Gamma = \gamma \quad (5-67)$$

La ecuación (5-65), en coordenadas cilíndricas, se transforma en la siguiente:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \bar{E}_\rho}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} \bar{E}_\rho + \frac{\partial^2 \bar{E}_\rho}{\partial z^2} - \gamma^2 \bar{E}_\rho = 0 \quad (5-68)$$

Al substituir (5-66) en (5-68), se obtiene lo siguiente:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} R(\rho) \right) - \frac{1}{\rho^2} R(\rho) = 0 \quad (5-69)$$

Cuya solución es:

$$R(\rho) = \frac{k}{\rho} \quad (5-70)$$

Finalmente, con (5-63), (5-66) y (5-70) se obtiene la solución general para el campo eléctrico en el cable coaxial:

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{E}_\rho(\rho, z) \mathbf{a}_\rho = \frac{1}{\rho} (k_1 e^{-\gamma z} + k_2 e^{\gamma z}) \mathbf{a}_\rho \quad (5-71)$$

donde γ viene dado por (3-33) y k_1 y k_2 son constantes que se determinan de las condiciones de frontera o borde.

Para calcular el campo magnético, es necesario resolver la ecuación diferencial (5-38) pero como dicha ecuación presenta la misma topología que la ecuación (5-4) para el campo eléctrico, entonces la solución general es similar a la obtenida en la ecuación anterior:

$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{\rho} (h_1 e^{-\gamma z} + h_2 e^{\gamma z}) \mathbf{a}_\phi \quad (5-72)$$

donde h_1 y h_2 se determinan con las condiciones de borde.

A continuación se obtienen las ecuaciones de Heaviside:

Para comenzar, al calcular la divergencia de la ecuación (3-4), en el dominio de la frecuencia, se obtiene la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{\mathbf{H}}) = \nabla \cdot \bar{\mathbf{J}}_s + \nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} + j\omega \nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} = 0 \quad (5-73)$$

Usando (3-5) y (3-7), la ecuación anterior se simplifica a la siguiente

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}}_s + (\sigma + j\omega\epsilon) \nabla \cdot \bar{\mathbf{E}} = 0 \quad (5-74)$$

En la ecuación anterior, la densidad de corriente fuente $\bar{\mathbf{J}}_s$, es aquella que circula en dirección axial dentro del conductor, y está asociada con la corriente $\bar{I}(z)$ del conductor.

Al integrar la ecuación (5-74) en una superficie hipotética cerrada, la misma es equivalente a la ley de Kirchoff referida a la suma de las corrientes en un nodo.

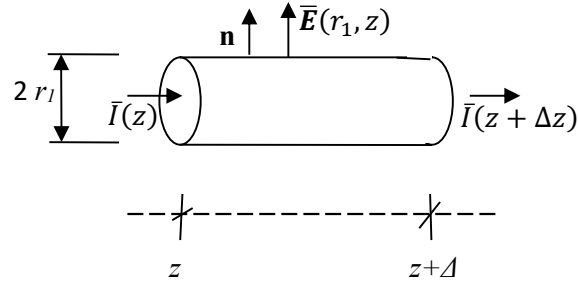


Fig. 5-7 Conductor interior de un cable coaxial de longitud Δz y radio r_1

Al integrar la ecuación anterior sobre toda la superficie del conductor que se muestra en la figura 5-7, usando el teorema de la divergencia, se obtiene la siguiente relación:

$$\bar{I}(z + \Delta z) - \bar{I}(z) + 2\pi r_1 (\sigma + j\omega\epsilon) \int_z^{z+\Delta z} \bar{E}_\rho(r_1, z') dz' = 0 \quad (5-75)$$

Si Δz tiende a cero en la ecuación anterior, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dz} \bar{I}(z) = -2\pi r_1 (\sigma + j\omega\epsilon) \bar{E}_\rho(r_1, z) \quad (5-76)$$

Al despejar el campo eléctrico en la ecuación anterior para igualarlo a la ecuación (5-71) se obtiene lo siguiente:

$$k_1 e^{-\gamma z} + k_2 e^{\gamma z} = -\frac{\frac{d}{dz} \bar{I}(z)}{2\pi (\sigma + j\omega\epsilon)} \quad (5-77)$$

Al substituir la ecuación anterior en la ecuación (5-71) se obtiene el campo eléctrico en función de la derivada de la corriente:

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{E}_\rho(\rho, z) \mathbf{a}_\rho = -\frac{1}{2\pi \rho (\sigma + j\omega\epsilon)} \frac{d}{dz} \bar{I}(z) \mathbf{a}_\rho \quad (5-78)$$

Finalmente se calcula la tensión del cable, integrando el campo eléctrico:

$$\bar{V}(z) = -\int_{r_2}^{r_1} \bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{a}_\rho d\rho = -\frac{1}{2\pi (\sigma + j\omega\epsilon)} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \frac{d}{dz} \bar{I}(z) \mathbf{a}_\rho \quad (5-79)$$

Reordenando la ecuación anterior:

$$\frac{d}{dz} \bar{I}(z) = -\left(\frac{2\pi \sigma}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} + j\omega \frac{2\pi \epsilon}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \right) \bar{V}(z) \quad (5-80)$$

Al poner la ecuación anterior de una forma más condensada:

$$\frac{d}{dz} \bar{I}(z) = - (G + j\omega C) \bar{V}(z) \quad (5-81)$$

donde G y C son la conductancia y la capacitancia del cable respectivamente, por unidad de longitud y vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$G = \frac{2\pi\sigma}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (\text{S/m}) \quad (5-82)$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (\text{F/m}) \quad (5-83)$$

La ecuación (5-81) es una de las ecuaciones de Heaviside, es la misma presentada anteriormente en (2-4) pero obtenida a través de la ecuación de propagación para el campo eléctrico dada por (5-65).

La segunda ecuación de Heaviside se obtiene a través del vector campo magnético, aunque la ecuación (5-72) muestra la solución general para el campo magnético, en este caso es preferible trabajar con la ecuación (3-4) para obtener la solución particular para el campo magnético.

Al aplicar el teorema de Stoke a la ecuación (3-4), en el dominio de la frecuencia, teniendo en cuenta las propiedades del medio dadas en (3-5) y (3-7), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\oint \bar{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{sup} \bar{J}_s \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{sup} (\sigma + j\omega\epsilon) \bar{E} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (5-84)$$

donde ds es un diferencial de superficie, sup es la superficie limitada por un camino cerrado y \mathbf{n} es un vector unitario, normal a la superficie.

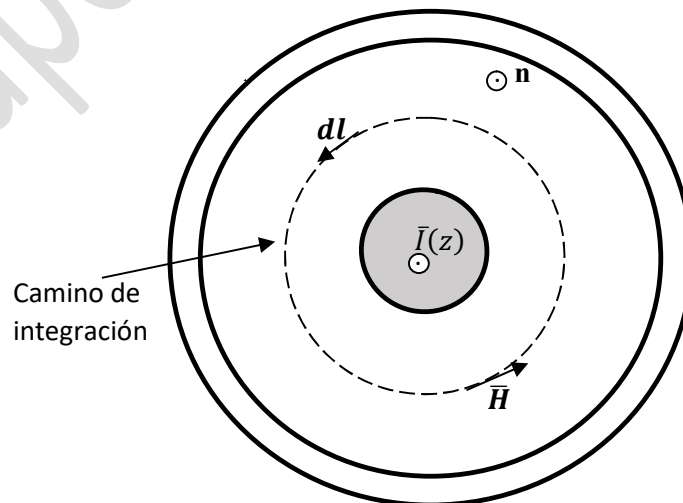


Fig. 5-8 Sección de un cable coaxial donde se muestra el vector campo magnético

Al aplicar la ecuación anterior al camino de integración que se muestra en la figura 5-8, la tercera integral debe ser nula ya que en el modo TEM no existe campo eléctrico en la dirección axial del cable y en cuanto a la segunda integral, su solución es la corriente $\bar{I}(z)$ que circula por el conductor; entonces al resolver (5-84) se obtiene el campo magnético:

$$\bar{H}_\phi(\rho, z) = \frac{\bar{I}(z)}{2\pi\rho} \quad (5-85)$$

Al comparar las ecuaciones (5-72) con la anterior se obtiene la siguiente igualdad:

$$\bar{I}(z) = h_1 e^{-\gamma z} + h_2 e^{\gamma z} \quad (5-86)$$

Según la ecuación anterior, la corriente en el cable está compuesta por dos componentes que viajan en direcciones opuestas.

La figura 5-9 muestra una sección longitudinal de un cable coaxial, también se muestra un camino cerrado de integración, en línea segmentada, que será utilizado para aplicar la ley de Faraday, dada por la expresión (5-54), luego de aplicar el teorema de Stoke:

$$\oint \bar{E} \cdot d\mathbf{l} = -j\omega\mu \int_{sup} \bar{H} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (5-87)$$

La integral de línea del campo eléctrico en un camino cerrado, se puede descomponer en cuatro integrales de línea, limitadas por los vértices a, b, c y d y que se indican en la figura 5-9.

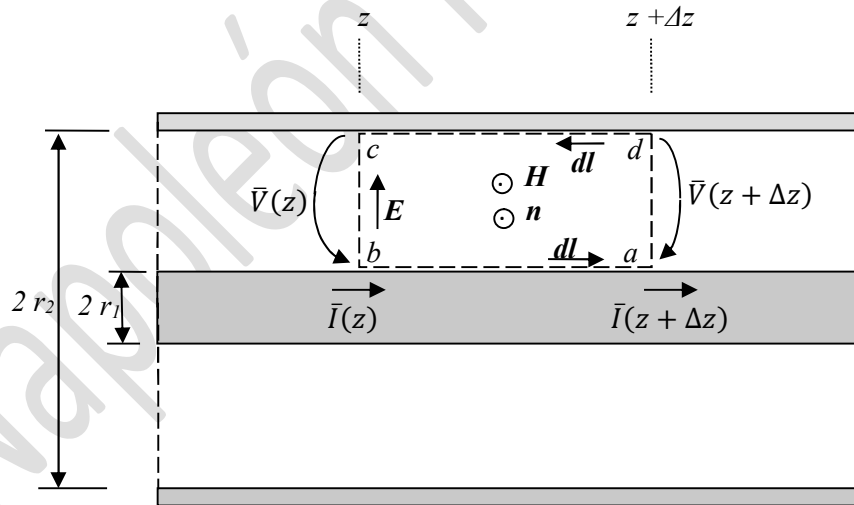


Fig. 5-9 Sección de un cable coaxial donde se muestra el vector campo magnético

$$\oint \bar{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_b^a \bar{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_c^b \bar{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_d^c \bar{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_a^d \bar{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (5-88)$$

La primera y la tercera de las cuatro integrales, se realizan sobre la superficie de los conductores, en el caso de que estos sean conductores ideales, estas integrales son nulas, pero en el caso de conductores reales, por condiciones de frontera, tienen que ser iguales a la caída de tensión que sufre el conductor por el paso de la corriente:

$$\int_b^a \bar{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_z^{z+\Delta z} \bar{Z}_{int,1} \cdot \bar{I}(m) dm \quad (5-89)$$

$$\int_a^c \bar{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{l} = \int_z^{z+\Delta z} \bar{Z}_{int,2} \bar{I}(m) dm \quad (5-90)$$

donde $\bar{Z}_{int,1}$ y $\bar{Z}_{int,2}$ son las impedancias interna o superficial³⁹ que tiene el conductor interior y el exterior, respectivamente, por unidad de longitud; la parte real de estas impedancias contienen las resistencias de los conductores.

En la segunda y cuarta integral de la ecuación (5-88), como la integración se realiza en dirección del eje ρ , ambas están relacionada con las tensiones del cable:

$$\int_c^b \bar{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{l} = -\bar{V}(z) \quad (5-91)$$

$$\int_a^d \bar{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{l} = \bar{V}(z + \Delta z) \quad (5-92)$$

Al substituir (5-89), (5-90), (5-91), (5-85) y (5-92) en (5-87) y al reordenar la ecuación, se obtiene lo siguiente:

$$\bar{V}(z + \Delta z) - \bar{V}(z) = -(\bar{Z}_{int,1} + \bar{Z}_{int,2}) \int_z^{z+\Delta z} \bar{I}(m) dm - j\omega\mu \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{2\pi\rho} d\rho \right) \left(\int_z^{z+\Delta z} \bar{I}(m) dm \right) \quad (5-93)$$

Si en la ecuación anterior Δz tiende a cero, se obtiene una ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dz} \bar{V}(z) = - \left(\bar{Z}_{int,1} + \bar{Z}_{int,2} + j\omega \frac{\mu}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \right) \bar{I}(z) \quad (5-94)$$

La ecuación anterior se puede escribir de manera más condensada:

$$\frac{d}{dz} \bar{V}(z) = -(\bar{Z}_{int,1} + \bar{Z}_{int,2} + j\omega L_{ext}) \bar{I}(z) \quad (5-95)$$

donde:

$$L_{ext} = \frac{\mu}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad (\text{H / m}) \quad (5-96)$$

L_{ext} es la inductancia del cable, por unidad de longitud, debido a los enlaces de flujo que se encuentra en el dieléctrico.

La ecuación anterior, es la segunda ecuación de Heaviside, similar a la presentada en (2-3) pero obtenida a través de las ecuaciones de campo.

³⁹ Consultar la página 84 del libro de Perry [1985] para el cálculo de la impedancia superficial en cables.

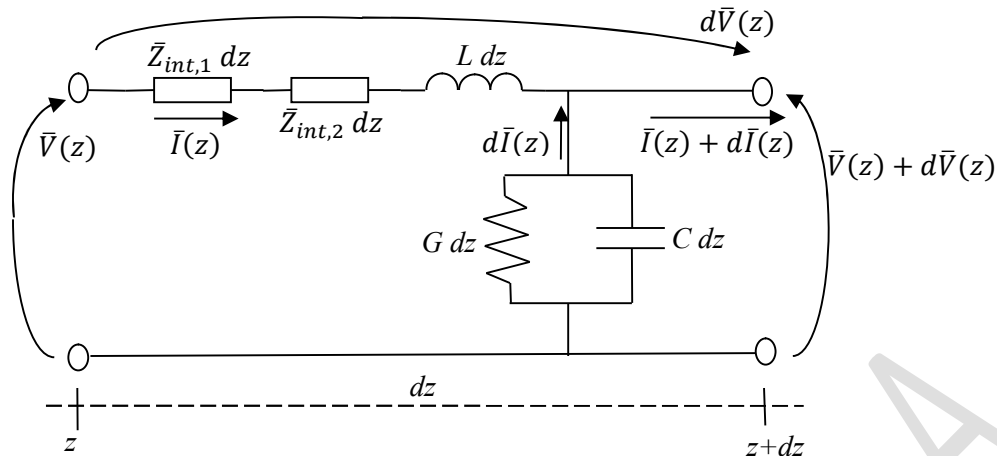


Fig. 5-10 Red eléctrica equivalente para un diferencial de longitud dz de un cable

Con las ecuaciones diferenciales de Heaviside, dadas por (5-95) y (5-81) se puede deducir la red eléctrica equivalente para un diferencial de longitud Δz del cable o de la línea, la figura 5-10 muestra la red en cuestión, y los parámetros eléctricos como G , L y C pueden ser calculados usando (5-82), (5-83) y (5-96).

Los parámetros eléctricos G , L y C deducidos en este apartado, dadas por las ecuaciones (5-82), (5-83) y (5-96), son válidos para cables coaxiales. Para el caso de la línea balanceada, que es aquella formada por dos conductores cilíndricos iguales, puestos en paralelo, separados a una distancia d , el cálculo de los parámetros eléctricos se obtienen con las mismas ecuaciones (5-82), (5-83) y (5-96) teniendo el cuidado de substituir el radio del conductor exterior del cable r_2 coaxial por la separación d de los cables de la línea balanceada.

5.4 Modelación de barras para puesta a tierra usando el modelo de la línea de transmisión de Heaviside.

Como se ha dicho en la introducción de este trabajo, las ecuaciones de Heaviside también son utilizadas para modelar electrodos de puesta a tierra; sin embargo, las ecuaciones en cuestión no se amoldan o se adaptan completamente para modelar electrodos, en este apartado se explica con detalle estos inconvenientes encontrados.

a) Los modos de propagación.

La figura 5-11 muestra las líneas de fuerza de la densidad de corriente o del campo eléctrico, que tiene el suelo, en coordenadas cilíndricas, a causa de la inyección de corriente a través de una barra. El cálculo fue realizado usando el programa de libre uso, de elementos finitos FEMM en su versión 3.3 [Malpica, 2005].

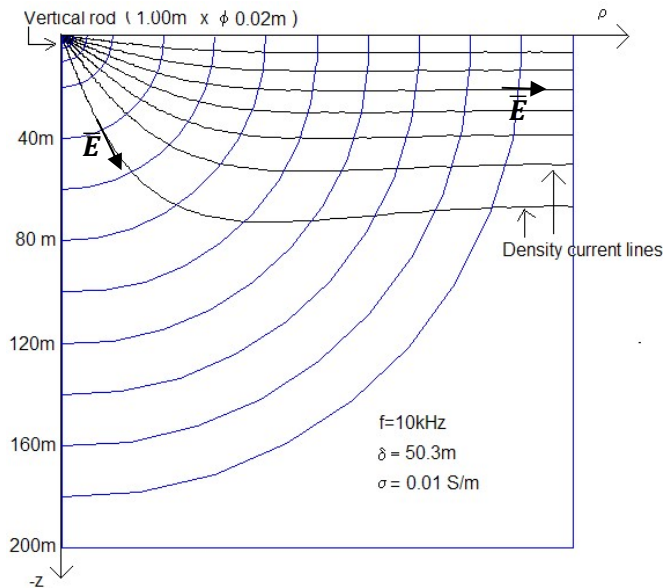


Fig. 5-11 Líneas de fuerza para el vector densidad de corriente y campo eléctrico para una barra enterrada en el suelo.

Para el caso mostrado en la figura 5-11, se consideró una barra de 1 metro de longitud y 2 cm de diámetro, se asumió una conductividad del suelo igual a 0.01 (S m) y una frecuencia de 10 kHz. Como el vector campo eléctrico tiene que ser tangente a las líneas de fuerza, nótese en la figura que el campo eléctrico, cercano al electrodo, tiene componentes en la dirección axial de la barra (eje z); por lo tanto, el campo electromagnético, no es un campo del tipo TEM exclusivamente.

Ya en los apartados 5.1 y 5.2, donde se trata la formación de los modos TE y TM, se intuye que si se modela una barra como si fuera una línea de transmisión, es factible la aparición de estos modos, debido a que la atenuación para estos modos se hace comparable con la atenuación del modo TEM, modos que no contemplan las ecuaciones de Heaviside.

b) *El cálculo de los parámetros eléctricos G, L, C*

En los sistemas de puesta a tierra, por lo general se asume que la corriente que se inyecta en la tierra, a través de los electrodos, la misma retorna en el infinito, esto se explica en el apartado 4.6 de este trabajo.

Entonces, si se quiere modelar el electrodo como si fuera una línea de transmisión, ya sea como un cable coaxial, tal como se muestra en la figura 5-3, asumiendo que el radio del conductor exterior es infinito ($r_2 = \infty$); o como una línea balanceada, como se muestra en la figura 4-11, con una separación infinita entre los electrodos ($d = \infty$), los parámetros eléctricos R , L y C , deducidos para la línea de transmisión dados por las ecuaciones (5-82), (5-83) y (5-96), no pueden ser utilizados bajo esta condición.

Es por este motivo que al querer modelar una barra usando el modelo de la línea de transmisión, para el cálculo de los parámetros eléctricos, los investigadores utilizan otras formulaciones, diferentes a las obtenidas para la línea de transmisión.

Por ejemplo, para calcular las conductancias y las capacitancias se emplean las contribuciones de Dwight [1936], Sunde [1967], Howe [1914], Schwarz [1954], Rudenberg [1945], Takahashi [1991] y Tagg [1964] y para calcular las inductancias se emplean las formulaciones de Rosa [1908, 1912] y Grover [1946].

Por todo lo anterior, el modelo de Heaviside para líneas de transmisión, no se adapta totalmente para modelar barras de puesta a tierra, por este motivo, en este trabajo se deducen un par de ecuaciones, similares a las obtenidas por Heaviside, pero que sean válidas para ser utilizadas en barras para puesta a tierra y extraer de las nuevas ecuaciones los parámetros eléctricos. En el capítulo siguiente se desarrollan las nuevas ecuaciones.

Napoleón Malpica

6 Nuevas ecuaciones del tipo Heaviside, válidas para modelar barras para puesta a tierra.

En este capítulo, se desarrollan unas nuevas ecuaciones, con la misma topología de las ecuaciones de Heaviside, pero para ser utilizadas en barras para puesta a tierra [Malpica, 2014]

6.1 Desarrollo de las ecuaciones

Como hipótesis, se asume que en el suelo ocurre un fenómeno de propagación del campo electromagnético; y que dicho campo se puede obtener a través de los potenciales escalar eléctrico y vectorial magnético. Para comenzar, se plantea resolver la ecuación de propagación (3-31) para el vector potencial magnético y que se transcribe nuevamente a continuación [Malpica, 2006]:

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{A}} - \gamma^2 \bar{\mathbf{A}} = -\mu \bar{\mathbf{J}}_s \quad (6-1)$$

donde $\bar{\mathbf{J}}_s$ es la densidad de corriente fuente que origina el campo magnético, esta densidad de corriente se asume que se encuentra en los electrodos de puesta a tierra.

El potencial escalar eléctrico \bar{V} , se puede obtener a través de la condición de Lorentz, si el potencial vectorial magnético es conocido:

$$\bar{V} = -\frac{j\omega}{\gamma^2} \nabla \cdot \bar{\mathbf{A}} \quad (6-2)$$

Con los potenciales, tanto el vector campo eléctrico como el vector densidad de flujo magnético se obtienen con las ecuaciones (3-36) y (3-22) respectivamente:

$$\bar{\mathbf{E}} = -\nabla \bar{V} - j\omega \bar{\mathbf{A}} \quad (6-3)$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \nabla \times \bar{\mathbf{A}} \quad (6-4)$$

Nótese que para calcular tanto el campo eléctrico como el vector densidad de flujo magnético, la mayor dificultad está en resolver la ecuación diferencial vectorial, en derivadas parciales, dada por (6-1). Para resolver la ecuación en cuestión, se aplica un método de integración, que se deduce de la segunda identidad de Green [Panofsky, 1956]⁴⁰ y cuyo resultado se muestra a seguir:

$$\bar{\mathbf{A}}(x, y, z) = \mu_1 \int_{v'} g(x, y, z, x', y', z') \bar{\mathbf{J}}_f(x', y', z') dv' \quad (6-5)$$

donde: x, y, z son las coordenadas donde se quiere evaluar el campo; $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ son las coordenadas donde se encuentran la densidad de corriente fuente; v' es el volumen donde se encuentran las corrientes fuentes, μ_1 es la permeabilidad del suelo y g es la

⁴⁰ Consultar la página 210 del libro de Panofsky para la ecuación de onda, no homogénea y su solución mediante funciones de Green.

función de Green que, para un medio infinito y bi-estratificados [Sommerfeld, 1949]⁴¹; [Stinson, 1976]⁴², es la siguiente:

$$g(x, y, z, x', y', z') = \frac{e^{-\gamma_1 r}}{4\pi r} + \frac{e^{-\gamma_1 r'}}{4\pi r'} - 2 \int_0^{\infty} \frac{u J_0(\rho u) \gamma_1^2 \sqrt{u^2 + \gamma_0^2} e^{\sqrt{u^2 + \gamma_1^2}(z+z')}}{4\pi (\gamma_0^2 \sqrt{u^2 + \gamma_1^2} + \gamma_1^2 \sqrt{u^2 + \gamma_0^2}) \sqrt{u^2 + \gamma_1^2}} du \quad (6-6)$$

donde: J_0 es la función de Bessel de primer tipo y orden cero, γ_0 es la constante dada por (3-33) pero evaluada tomando en cuenta las propiedades del aire (conductividad, permeabilidad y permitividad), γ_1 es la constante dada también por (3-33) pero evaluando ϵ , μ , y σ de acuerdo a las propiedades del suelo y las variables r , r' y ρ vienen dadas por las siguientes relaciones:

$$r = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}, \quad r' = \sqrt{\rho^2 + (z + z')^2} \quad (6-7)$$

$$\rho = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \quad (6-8)$$

La función de Green dada en (6-6), sólo es válida para el caso que las corrientes fuentes estén en dirección vertical o en dirección del eje z , para corrientes fuentes que tengan otras direcciones, consultar la obra de Sommerfeld [1949].

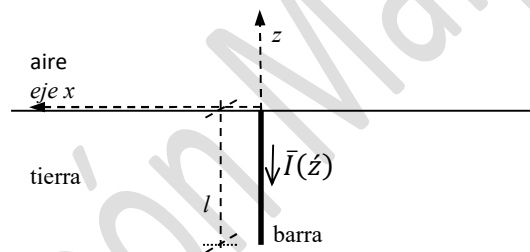


Fig. 6-1 Barra de puesta a tierra y sistema de coordenadas cartesiano

La figura 6-1 muestra una barra o jabalina enterrada en el suelo; el sistema de coordenadas seleccionado y que se muestra en la figura, se ubicó de manera tal que el eje z quede coaxial con la barra; por otra parte, el plano $z = 0$ se ubicó de forma tal que coincide con el plano formado por la frontera aire – tierra y el eje y , aunque no se muestra, se encuentra saliendo normal al plano de la figura.

Una aproximación que se realiza a la solución propuesta en (6-5) consiste en substituir la barra por un alambre muy fino [Noda, 2002]; de esta forma, en lugar de integrar la densidad de corriente fuente, se integra la corriente en la barra (elemento de corriente⁴³):

⁴¹ Consultar la página 236 del libro de Arnold Sommerfeld, en el capítulo “Problems of Radio” donde se deduce la función de Green para un medio infinito formado por dos estratos.

⁴² Consultar la página 227 del libro de Stinson para las funciones de Green.

⁴³ Elemento de corriente: “En un punto dado de un tubo filiforme de corriente, es la cantidad vectorial igual al producto de la corriente eléctrica y el vector diferencial de longitud en dicho punto. Nota: Un elemento de corriente es expresado por $I \, d\mathbf{r}$ donde I es la corriente y $d\mathbf{r}$ es el vector diferencial de longitud”

Fuente: IEC Vocabulario Electrotécnico Internacional

$$\vec{A}(x, y, z) = -\mathbf{a}_z \mu_1 \int_{-l}^0 g(x, y, z, x', y', z') \bar{I}(z') dz' \quad (6-9)$$

donde $\bar{I}(z')$ es la corriente en la barra, \mathbf{a}_z es un vector unitario que apunta en la dirección del eje z , l es la longitud de la barra, el signo negativo en la ecuación obedece a que en la figura se toma como sentido positivo de la corriente la dirección $-\mathbf{a}_z$; y por último, por la ubicación de los ejes de coordenada, se tiene que $\dot{x} = \dot{y} = 0$.

Si la corriente en la barra $\bar{I}(z')$ fuera conocida, el vector potencial magnético en la tierra se obtiene resolviendo (6-9) y luego el campo eléctrico y la densidad de flujo magnético se pueden obtener usando (6-2), (6-3) y (6-4); pero en este caso, la corriente en la barra $\bar{I}(z')$ es desconocida; por lo tanto, la ec. (6-9) por si sola no tiene mucha utilidad; sin embargo, la ec. (6-9) será usada para determinar las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de la barra.

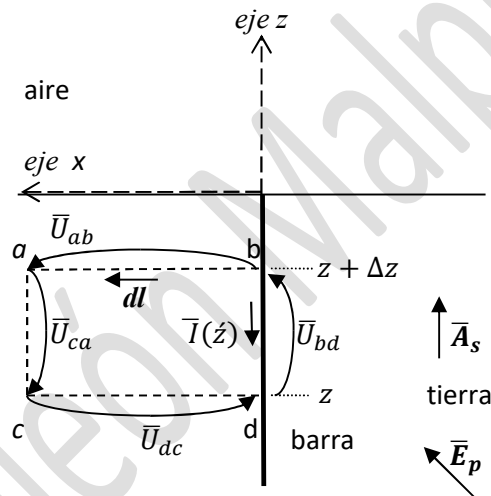


Fig. 6-2 Barra de puesta a tierra sometida a un campo eléctrico primario \vec{E}_p

La figura 6-2 muestra nuevamente una barra enterrada en el suelo, sometida a un campo eléctrico primario \vec{E}_p que puede ser generado o producido por la corriente debida a una descarga atmosférica que impactó en la tierra cercano a la barra, o el campo generado por otros electrodos de puesta a tierra o el campo producido por cualquier otro evento eléctrico o electromagnético.

Lo primero que se quiere hacer es sumar las tensiones que se muestran en el camino cerrado formado por un rectángulo hecho con líneas segmentadas mostradas en la figura 6-2 y cuyos vértices están designados por las letras a, b, c y d . Los puntos o vértices a y c se encuentran muy alejados de la barra o en el infinito y los puntos b y d se encuentran sobre la superficie de la barra, las tensiones \bar{U}_{ab} y \bar{U}_{dc} están calculadas siguiendo un camino horizontal, en dirección paralela al eje x mostrado en la figura 6-2.

Para calcular la tensión entre dos puntos cualesquiera k y m , se integra el vector campo eléctrico dado por (6-3):

$$\bar{U}_{km} = - \int_m^k \bar{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{l} = j\omega \int_m^k \bar{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{l} + \bar{V}_k - \bar{V}_m \quad (6-10)$$

donde \bar{U}_{km} es la tensión entre los puntos k y m , $d\mathbf{l}$ es el vector diferencial de longitud tangente al camino de integración y \bar{V}_k y \bar{V}_m son los potenciales escalares eléctrico de los puntos k y m respectivamente.

La suma de las tensiones, en un camino cerrado, es igual a la integral de línea del campo eléctrico, dado por (6-3) , siguiendo el mismo camino cerrado (ver la fig. 6-2) :

$$- \oint \bar{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{l} = j\omega \oint \bar{\mathbf{A}} \cdot d\mathbf{l} = \bar{U}_{ab} + \bar{U}_{ca} + \bar{U}_{dc} + \bar{U}_{bd} \quad (6-11)$$

Por otra parte, se asume que el campo eléctrico que existe en el suelo está compuesto por dos componentes: un campo primario $\bar{\mathbf{E}}_p$, originado por una fuente externa a la barra (ver la fig. 6-2) y un campo secundario $\bar{\mathbf{E}}_s$, creado por la propia corriente de la barra, entonces el campo eléctrico en el suelo viene dado por la suma de ambos campos:

$$\bar{\mathbf{E}} = \bar{\mathbf{E}}_p + \bar{\mathbf{E}}_s \quad (6-12)$$

Si el campo eléctrico se descompone en sus potenciales, según (6-3), entonces los potenciales también tendrán dos componentes:

$$\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}_p + \bar{\mathbf{A}}_s \quad (6-13)$$

$$\bar{V} = \bar{V}_p + \bar{V}_s \quad (6-14)$$

donde $\bar{\mathbf{A}}_p$ y $\bar{\mathbf{A}}_s$ son los potenciales vectoriales primario y secundario respectivamente y a la vez, \bar{V}_p y \bar{V}_s son los potenciales escalares primario y secundario respectivamente.

Entonces, en cuanto a las tensiones que se muestran en la figura 6-2, tendrán también dos componentes, una primaria creada por la fuente de campo externa y la tensión secundaria creada por la propia corriente de la barra.

Para la tensión \bar{U}_{ab} mostrada en la figura:

$$\bar{U}_{ab} = \bar{U}_{p,ab} + \bar{U}_{s,ab} \quad (6-15)$$

donde $\bar{U}_{p,ab}$ y $\bar{U}_{s,ab}$ son las componentes de la tensión \bar{U}_{ab} debido al campo primario y secundario respectivamente.

Igual sucede con la tensión \bar{U}_{dc} que tendrá dos componentes:

$$\bar{U}_{dc} = \bar{U}_{p,dc} + \bar{U}_{s,dc} \quad (6-16)$$

Como el vector potencial magnético $\bar{\mathbf{A}}_s$ solo tiene componente en la dirección \mathbf{a}_z , según (6-9) , la tensión $\bar{U}_{s,ab}$ calculada según (6-10) es igual a menos el potencial escalar que tiene el punto b mostrado en la figura 6-2:

$$\bar{U}_{s,ab} = -\bar{V}_s(r, 0, z + \Delta z) \quad (6-17)$$

donde $(r, 0, z + \Delta z)$ son las coordenadas del punto b , que es un punto que se encuentra sobre la superficie del electrodo, r es el radio de la barra y $\Delta z > 0$. El punto a mostrado en la figura 6-2, se asume que tiene potencial nulo por encontrarse en el infinito.

Análogamente, la tensión $\bar{U}_{s,dc}$ es igual al potencial escalar que tiene el punto d mostrado en la figura 6-2:

$$\bar{U}_{s,dc} = \bar{V}_s(r, 0, z) \quad (6-18)$$

donde $(r, 0, z)$ son las coordenadas del punto d mostrado en la figura 6-2 y que se encuentra sobre la superficie del electrodo.

Las tensiones $\bar{U}_{p,ab}$ y $\bar{U}_{p,dc}$ se calculan usando (6-10):

$$\bar{U}_{p,ab} = j\omega \int_r^\infty \bar{\mathbf{A}}_p(x, 0, z + \Delta z) \cdot \mathbf{a}_x dx - \bar{V}_p(r, 0, z + \Delta z) \quad (6-19)$$

$$\bar{U}_{p,dc} = j\omega \int_\infty^r \bar{\mathbf{A}}_p(x, 0, z) \cdot \mathbf{a}_x dx + \bar{V}_p(r, 0, z) \quad (6-20)$$

La tensión \bar{U}_{ca} se asume nula ya que se considera que no hay fuentes en el infinito:

$$\bar{U}_{ca} = 0 \quad (6-21)$$

Por último, la tensión \bar{U}_{bd} , como se calcula sobre la superficie de la barra, por condiciones de frontera se impone que el campo eléctrico tangencial a la superficie, debe ser continuo, entonces dicha tensión debe ser igual a la integral del producto de la impedancia interna o la impedancia superficial de la barra [Perry, 1985]⁴⁴ multiplicada por la corriente en la barra:

$$\bar{U}_{bd} = \int_z^{z+\Delta z} \bar{Z}_{int} \bar{I}(z) dz \quad (6-22)$$

Al substituir (6-13) en (6-11) se obtiene lo siguiente:

$$\bar{U}_{ab} + \bar{U}_{ca} + \bar{U}_{dc} + \bar{U}_{bd} = j\omega \left(\oint \bar{\mathbf{A}}_p \cdot d\mathbf{l} + \oint \bar{\mathbf{A}}_s \cdot d\mathbf{l} \right) \quad (6-23)$$

donde las dos integrales de línea vienen dadas por:

$$\oint \bar{\mathbf{A}}_p \cdot d\mathbf{l} = \int_r^\infty \bar{\mathbf{A}}_p(x, 0, z + \Delta z) \cdot \mathbf{a}_x dx + \int_\infty^r \bar{\mathbf{A}}_p(x, 0, z) \cdot \mathbf{a}_x dx + \int_z^{z+\Delta z} \bar{\mathbf{A}}_p(r, 0, m) \cdot \mathbf{a}_z dm \quad (6-24)$$

$$\oint \bar{\mathbf{A}}_s \cdot d\mathbf{l} = \int_z^{z+\Delta z} \bar{\mathbf{A}}_s(r, 0, m) \cdot \mathbf{a}_z dm \quad (6-25)$$

Al substituir (6-17), (6-18), (6-19), (6-20), (6-21), (6-22), (6-24), y (6-25) en (6-23) se obtiene lo siguiente:

⁴⁴ Consultar la página 85 del libro de Perry para el cálculo de la impedancia superficial.

$$\begin{aligned} \bar{V}_s(r, 0, z + \Delta z) - \bar{V}_s(r, 0, z) - \int_z^{z+\Delta z} \bar{Z}_{int} \bar{I}(\zeta) d\zeta + j\omega \int_z^{z+\Delta z} \bar{A}_s(r, 0, m) \cdot \mathbf{a}_z dm = -\bar{V}_p(r, 0, z + \Delta z) + \dots \\ \dots + \bar{V}_p(r, 0, z) - j\omega \int_z^{z+\Delta z} \bar{A}_p(r, 0, m) \cdot \mathbf{a}_z dm \end{aligned} \quad (6-26)$$

Si la ecuación anterior se divide toda por Δz y si $\Delta z \rightarrow 0$, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dz} \bar{V}_j(z) - \bar{Z}_{int} \bar{I}(z) + j\omega \bar{A}_s(r, 0, z) \cdot \mathbf{a}_z - \left[\frac{\partial}{\partial z} \bar{V}_p(r, 0, z) + j\omega \bar{A}_p(r, 0, z) \cdot \mathbf{a}_z \right] = 0 \quad (6-27)$$

donde $\bar{V}_j(z)$ es el potencial escalar eléctrico, que tiene la superficie de la barra o jabalina, en la posición z debido a su propia corriente:

$$\bar{V}_j(z) = \bar{V}_s(r, 0, z) \quad (6-28)$$

Lo que está dentro de los paréntesis en la ecuación (6-27) se puede simplificar, teniendo en cuenta (6-3):

$$\bar{E}_p(r, 0, z) \cdot \mathbf{a}_z = -\frac{\partial}{\partial z} \bar{V}_p(r, 0, z) - j\omega \bar{A}_p(r, 0, z) \cdot \mathbf{a}_z \quad (6-29)$$

donde $\bar{E}_p(r, 0, z)$ es el campo eléctrico primario evaluado sobre la superficie de la barra.

Al substituir (6-9) y (6-29) en (6-27):

$$\frac{d}{dz} \bar{V}_j(z) - \bar{Z}_{int} \bar{I}(z) - j\omega \mu_1 \int_{-l}^0 g(r, 0, z, 0, 0, \zeta) \bar{I}(\zeta) d\zeta = \bar{E}_p(r, 0, z) \cdot \mathbf{a}_z \quad (6-30)$$

donde g viene dada por la ec. (6-6).

La ecuación anterior representa una de las ecuaciones del tipo Heaviside para barras de puesta a tierra, donde la fuente es un campo externo \bar{E}_p que irradia la superficie de la misma. Nótese la similitud de la ecuación anterior con la ecuación (2-3), en ambas la derivada de la tensión está en función de la corriente.

La otra ecuación equivalente del telegrafista, se obtiene al calcular el potencial escalar eléctrico, usando la condición de Lorentz dada por (6-2). Para calcular el potencial escalar en la tierra, es necesario calcular previamente la divergencia del vector potencial magnético dado por (6-9):

$$\nabla \cdot \bar{A}_s(x, y, z) = -\mu_1 \int_{-l}^0 \frac{\partial}{\partial z} [g(x, y, z, x', y', z')] \bar{I}(z') dz' \quad (6-31)$$

Pero se desea que la divergencia del potencial vectorial magnético quede en función de la derivada de la corriente, para ello se calculará nuevamente la divergencia del vector potencial magnético, pero en el dominio de las coordenadas de las fuentes (x', y', z'), usando el operador especial ∇' que opera en las coordenadas en cuestión:

$$\nabla' \cdot \bar{A}_s(x, y, z) = 0 \quad (6-32)$$

Cuyo resultado debe ser cero, en vista de que el potencial magnético sólo depende de las coordenadas (x, y, z) . Pero al substituir (6-9) en (6-32) se obtiene la siguiente igualdad:

$$\frac{\partial}{\partial z'} [g(x, y, z, x', y', z')] \bar{I}(z') = -g(x, y, z, x', y', z') \frac{d}{dz'} \bar{I}(z') \quad (6-33)$$

La ecuación anterior es válida para cualquier función de Green, entonces se plantea encontrar otra función de Green f tal que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\frac{\partial}{\partial z} [g(x, y, z, x', y', z')] = \frac{\partial}{\partial z'} [f(x, y, z, x', y', z')] \quad (6-34)$$

Si f existe, entonces haciendo uso de (6-33), la divergencia del vector potencial magnético se puede expresar como una función que depende de la derivada de la corriente en la barra:

$$\nabla \cdot \bar{A}_s(x, y, z) = \mu_1 \int_{-l}^0 f(x, y, z, x', y', z') \frac{d}{dz'} \bar{I}(z') dz' \quad (6-35)$$

Haciendo una inspección de la función de Green g dada por la ecuación (6-6), se obtiene f :

$$f(x, y, z, x', y', z') = -\frac{e^{-\gamma_1 r}}{4\pi r} + \frac{e^{-\gamma_1 r'}}{4\pi r'} - 2 \int_0^\infty \frac{u J_0(\rho u) \gamma_1^2 \sqrt{u^2 + \gamma_0^2} e^{\sqrt{u^2 + \gamma_1^2}(z+z')}}{4\pi (\gamma_0^2 \sqrt{u^2 + \gamma_1^2} + \gamma_1^2 \sqrt{u^2 + \gamma_0^2}) \sqrt{u^2 + \gamma_1^2}} du \quad (6-36)$$

Finalmente, usando (6-2), (6-35) y (3-35) se obtiene el potencial escalar eléctrico, para cualquier punto del suelo:

$$\bar{V}_s(x, y, z) = \frac{-1}{\sigma_1 + j\omega \varepsilon_1} \int_{-l}^0 f(x, y, z, x', y', z') \frac{d}{dz'} \bar{I}(z') dz' \quad (6-37)$$

donde σ_1 y ε_1 son la conductividad y la permitividad del suelo respectivamente y $x = y = 0$.

Con la ecuación anterior, evaluada sobre la superficie de la barra, ver la ec. (6-28) se obtiene el potencial de la misma:

$$\frac{-1}{\sigma_1 + j\omega \varepsilon_1} \int_{-l}^0 f(r, 0, z, 0, 0, z') \frac{d}{dz'} \bar{I}(z') dz' - \bar{V}_j(z) = 0 \quad (6-38)$$

La ecuación anterior es la segunda ecuación del tipo Heaviside que se quería obtener.

6.2 Discusión

Las ecuaciones obtenidas en (6-30) y (6-38), para modelar barras, presentan la misma topología que tienen las ecuaciones de Heaviside dadas en (2-3) (2-4) y que se presentan nuevamente a seguir:

a) Ecuaciones de Heaviside para líneas de transmisión:

$$\frac{d}{dz} \bar{V}(z) - R \bar{I}(z) - j\omega L \bar{I}(z) = E_0 \quad (6-39)$$

$$(G + j\omega C)^{-1} \frac{d}{dz} \bar{I}(z) - \bar{V}(z) = 0 \quad (6-40)$$

donde E_0 es la componente de un campo eléctrico externo o primario, en la dirección axial, que irradia a la línea⁴⁵.

b) Ecuaciones del tipo Heaviside para barras de puesta a tierra:

$$\frac{d}{dz} \bar{V}_j(z) - \bar{Z}_{int} \bar{I}(z) - j\omega \mu_1 \int_{-l}^0 g(r, 0, z, 0, 0, z') \bar{I}(z') dz' = \bar{E}_p(r, 0, z) \cdot \mathbf{a}_z \quad (6-41)$$

$$\frac{-1}{\sigma_1 + j\omega \varepsilon_1} \int_{-l}^0 f(r, 0, z, 0, 0, z') \frac{d}{dz'} \bar{I}(z') dz' - \bar{V}_j(z) = 0 \quad (6-42)$$

donde $g(r, 0, z, 0, 0, z')$ y $f(r, 0, z, 0, 0, z')$ vienen dadas por (6-6) y (6-36).

La primera ecuación de Heaviside, dada por (6-39), relaciona la derivada de la tensión con la corriente de la línea y esto mismo sucede con la nueva ecuación del tipo Heaviside (6-41) donde la derivada de la tensión de la barra se relaciona con la corriente de la misma barra.

La segunda ecuación de Heaviside, dada por (6-40), relaciona la derivada de la corriente con la tensión de la línea y esto mismo ocurre con la ecuación (6-42) donde la derivada de la corriente de la barra se relaciona con la tensión que adquiere la misma barra.

Es por esta razón, que en este trabajo se pretende llamar al sistema de ecuaciones obtenido, como ecuaciones del tipo Heaviside.

Haciendo nuevamente una comparación de (6-39) con (6-41) ambas están asociadas con los efectos inductivos y resistivos que existen tanto en la línea de transmisión como en la barra. En la ecuación (6-39) se observa que la derivada de la tensión, evaluada en el punto z de la línea, depende de la corriente que hay en el mismo punto z . Si se hace el mismo análisis para la ecuación obtenida para la barra (6-41) se observa, por la integración, que toda la corriente de la barra influye en la derivada de la tensión, evaluada en el punto z y esto se debe a que toda la corriente contribuye con el campo magnético que existe en el punto z .

Según la ecuación (3-30), se sabe que las cargas eléctricas son las fuentes del potencial escalar eléctrico; sin embargo, las ecuaciones (2-4) y (6-38) parecieran que no están en concordancia con tal hecho, ya que en ambas ecuaciones la tensión está en función de la derivada de la corriente. No obstante, al usar la ecuación de continuidad [Marshall, 1997]⁴⁶, se encuentra la relación entre la carga y la derivada de la corriente, para un conductor cilíndrico que está en contacto directo con el suelo:

⁴⁵ Esta componente E_0 la incluye Heaviside en sus ecuaciones, consultar la página 85 del tomo II del libro de Heaviside [1894].

⁴⁶ Consultar la página 316 del libro.

$$\zeta(z) = - \frac{\varepsilon_1}{(\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1)2\pi r_1} \frac{d}{dz} \bar{I}(z) \quad (6-43)$$

donde $\zeta(z)$ es la densidad superficial de carga que se encuentra sobre la superficie del conductor o de la barra y r_1 es el radio del conductor o de la barra.

Entonces de acuerdo a la ecuación anterior, si la derivada de la corriente no es nula, es porque existen cargas sobre la superficie del conductor o de la barra.

Al analizar y comparar las ecuaciones (6-40) con (6-42), teniendo en cuenta la ecuación (6-43), se observa que en la ecuación (6-40), obtenida por Heaviside, el potencial que existe en el punto z de la línea, sólo es generado por las cargas que se encuentra en el mismo punto z ; y para la barra, según (6-42), toda la carga que se encuentra distribuida a lo largo de la superficie de la barra, contribuye con el potencial escalar que tiene el punto z sobre la superficie de la barra.

En cuanto a los modos de propagación, en el capítulo 5 dedicado a las líneas de transmisión, se demuestra la existencia de ondas cilíndricas (ver (5-19) y (5-20)) que se propagan en la dirección axial y para que ocurra el modo de propagación TEM, el autovalor $a_{m,k}$ debe ser nulo, y este autovalor es determinante al evaluar la constante de propagación $\Gamma_{m,k}$, (ver las ecuaciones (5-29) y (5-51)) y para los modos TM y TE, el autovalor en cuestión debe ser diferente de cero.

Ahora bien, hasta ahora no se ha hecho mención sobre los autovalores seleccionados para el caso de las nuevas ecuaciones desarrolladas en este capítulo; pues bien, la solución presentada fue hecha con base a la función de Green dada en (6-6), dicha función está compuesta por dos ondas esféricas y la integración representa una suma infinita de ondas cilíndricas.

Pero una onda esférica, puede ser transformada en ondas cilíndricas, mediante el uso de la siguiente relación [Sommerfeld, 1949]⁴⁷:

$$\frac{e^{-\gamma r}}{r} = \int_0^\infty \frac{u e^{-\sqrt{u^2 + \gamma^2} |z-z'|}}{\sqrt{u^2 + \gamma^2}} J_0(\rho u) du \quad (6-44)$$

Al substituir la ecuación anterior, en la función de Green (6-6) y teniendo en cuenta (6-5), se obtiene el vector potencial magnético en la tierra, vector que fue utilizado para calcular todos los parámetros eléctricos de la barra y el campo eléctrico en la tierra:

⁴⁷ Consultar las páginas 84 y 240 del libro para ondas esféricas y cilíndricas.

$$d\bar{A}_1 = (-\mu\bar{I} dl a_z) \left[\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{J_0(\rho u) u e^{-\sqrt{u^2 + \gamma_1^2} |z-z'|}}{4\pi \sqrt{u^2 + \gamma_1^2}} du + \\ & \int_0^\infty \frac{J_0(\rho u) u e^{-\sqrt{u^2 + \gamma_1^2} |z+z'|}}{4\pi \sqrt{u^2 + \gamma_1^2}} du + \\ & - 2 \int_0^\infty \frac{u J_0(\rho u) \gamma_1^2 \sqrt{u^2 + \gamma_0^2} e^{\sqrt{u^2 + \gamma_1^2} (z+z')}}{4\pi (\gamma_0^2 \sqrt{u^2 + \gamma_1^2} + \gamma_1^2 \sqrt{u^2 + \gamma_0^2}) \sqrt{u^2 + \gamma_1^2}} du \end{aligned} \right] \quad (6-45)$$

Las tres integrales representan una suma infinita de ondas cilíndricas, con autovalores (u) que van desde cero hasta el infinito; por lo tanto, se están tomando absolutamente todos los modos de propagación que pueden existir en la tierra.

En cuanto a la impedancia de puesta a tierra, al resolver el sistema de ecuaciones formado por (6-41) y (6-42), la impedancia vendrá dada por la tensión de la barra, calculada en la parte superior de la misma ($z = 0$) y la corriente inyectada en la tierra a través del electrodo (ver la figura 6-2):

$$\bar{Z}_{barra} = \frac{\bar{V}_f(0)}{\bar{I}(0)} \quad (6-46)$$

En este trabajo no se presenta la solución del sistema de ecuaciones dadas por (6-41) y (6-42) y será tema de otra investigación. Sin embargo, en el próximo capítulo, a partir del par de ecuaciones dadas por (6-41) y (6-42), se deduce un circuito eléctrico equivalente, discreto, para una barra y a partir de la red eléctrica, se deduce un método matricial para determinar la distribución de la corriente en la misma.

7 Deducción de la red eléctrica equivalente para modelar barras de puesta a tierra, el cálculo de la corriente en la barra y el cálculo de los potenciales del suelo.

7.1 Red eléctrica equivalente.

Si la barra se divide en n segmentos, tal como se muestra en la figura 7-1, todos ellos de igual longitud Δl [Malpica, 2014], se puede obtener la red eléctrica equivalente discreta, usando las nuevas ecuaciones del tipo Heaviside dadas por (6-41) y (6-42),

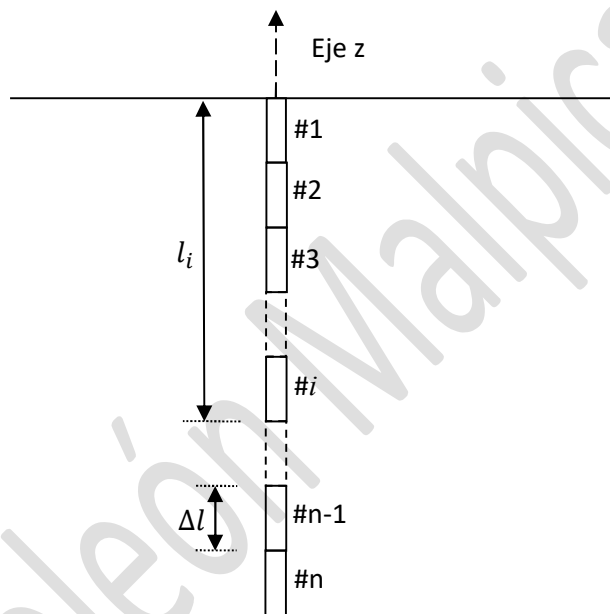


Fig. 7-1 Barra dividida en n secciones o segmentos.

Si el número de elementos en que se divide la barra es lo suficientemente grande, entonces la corriente en el segmento i se puede aproximar a una constante igual a \bar{I}_i y por lo tanto no depende de la variable \hat{z} :

$$\bar{I}(\hat{z}) = \bar{I}_i \quad \text{si} \quad -l_{i-1} > \hat{z} \geq -l_i, \quad \text{donde} \quad \hat{z} \leq 0 \quad (7-1)$$

en la figura 7-2 se muestran las corrientes en cuestión para una barra dividida en n secciones.

La tensión $\Delta \bar{V}_i$ que cae en el elemento i de una barra (ver la figura 7-2), se puede obtener integrando la ecuación (6-41), considerando que el campo primario \bar{E}_p es nulo y tomando en cuenta (7-1):

$$\overline{\Delta V}_i = \int_{-l_i}^{-l_{i-1}} \frac{d}{dz} \overline{V}_j(z) dz = (\overline{Z}_{int} \Delta l) \overline{I}_i + j\omega\mu_1 \sum_{j=1}^n \left[\int_{-l_i}^{-l_{i-1}} \int_{-l_j}^{-l_{j-1}} g(r, 0, z, 0, 0, \acute{z}) d\acute{z} dz \right] \overline{I}_j \quad (7-2)$$

donde l_i es la distancia medida desde la superficie de la tierra hasta la extremo inferior del elemento i , ($l_i \geq 0$), como se muestra en la figura 7-1.

Pero la ecuación (7-2) se puede simplificar y escribir como una ecuación de red eléctrica, donde la caída de tensión se debe a la corriente que pasa por un grupo de impedancias series:

$$\overline{\Delta V}_i = \sum_{j=1}^n \overline{z}_{ij} \overline{I}_j \quad (7-3)$$

donde cada elemento de la impedancia serie \overline{z}_{ij} viene dado por:

$$\overline{z}_{ii} = \overline{Z}_{int} \Delta l + j\omega\mu_1 \int_{-l_i}^{-l_{i-1}} \int_{-l_i}^{-l_{i-1}} g(r, 0, z, 0, 0, \acute{z}) d\acute{z} dz \quad (7-4)$$

$$\overline{z}_{ij} = j\omega\mu_1 \int_{-l_i}^{-l_{i-1}} \int_{-l_j}^{-l_{j-1}} g(r, 0, z, 0, 0, \acute{z}) d\acute{z} dz, \quad \text{si } i \neq j \quad (7-5)$$

De igual manera, si el número de elementos en que se divide la barra es elevado, entonces la derivada de la corriente $\frac{d}{dz} \overline{I}(\acute{z})$, en cada elemento i , se puede aproximar a una constante y por lo tanto, no es función de la posición \acute{z} . La derivada de la corriente se iguala a lo siguiente:

$$\frac{d}{dz} \overline{I}(\acute{z}) \approx \frac{\overline{\Delta I}_i}{\Delta l} \quad \text{si } -l_{i-1} > \acute{z} > -l_i \quad (7-6)$$

donde $\overline{\Delta I}_i$ es la corriente que drena a tierra el elemento i , (ver la figura 7-2).

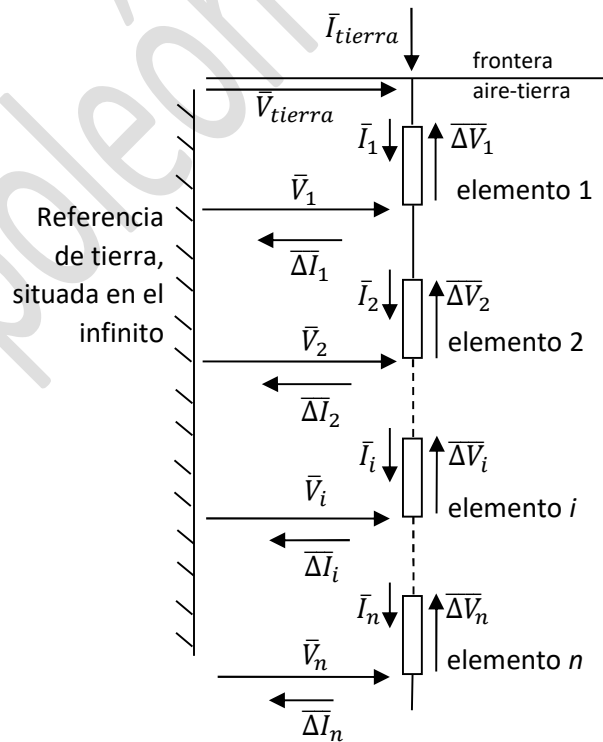


Fig. 7-2 Barra dividida en n secciones o segmentos

Entonces con la ecuación (6-42) y con la aproximación dada en (7-6), se puede calcular el potencial \bar{V}_i promedio que tiene el elemento i :

$$\bar{V}_i = \frac{\int_{-l_i}^{-l_{i-1}} \bar{V}(z) dz}{\Delta l} = \frac{-1}{\Delta l^2 (\sigma_1 + j\omega \epsilon_1)} \sum_{j=1}^n \left(\int_{-l_i}^{-l_{i-1}} \int_{-l_j}^{-l_{j-1}} f(r, 0, z, 0, 0, z') dz' dz \right) \Delta \bar{l}_j \quad (7-7)$$

La ecuación anterior se puede poner también como una ecuación de red eléctrica formada por un conjunto de impedancias transversales a la barra:

$$\bar{V}_i = \sum_{j=1}^n (\hat{z}_{ij} \Delta \bar{l}_j) \quad (7-8)$$

donde \hat{z}_{ij} son impedancias que se encuentran transversales a la barra y vienen dadas por:

$$\hat{z}_{ij} = \frac{-1}{\Delta l^2 (\sigma_1 + j\omega \epsilon_1)} \int_{l_i}^{l_{i-1}} \int_{l_j}^{l_{j-1}} f(r, 0, z, 0, 0, z') dz' dz \quad (7-9)$$

Con la ecuación (7-9) se construye la matriz denominada matriz impedancia paralelo $|\hat{Z}_p|$, de orden $n \times n$, donde n es el número de segmentos en que se encuentra dividida la barra. Al invertir la matriz $|\hat{Z}_p|$, se obtiene la matriz admitancia paralelo $|\hat{Y}_p|$.

Luego, con los elementos de la matriz admitancia paralelo se obtienen las admitancias de la red equivalente que se muestran en la figura 7-3:

$$\bar{y}_{ii} = \sum_{j=1}^n \hat{y}_{ij} \quad (7-10)$$

$$\bar{y}_{ij} = -\hat{y}_{ij} \quad (7-11)$$

donde \hat{y}_{ij} son los elementos extraídos de la matriz $|\hat{Y}_p|$ y \bar{y}_{ij} son las admitancias usadas para formar la red eléctrica equivalente y que se muestran en la figura 7-3.

La figura 7-3 muestra el circuito equivalente para tres secciones de una barra dividida en n segmentos, particularmente se muestra el primer segmento y los segmentos j y k ; nótese en la figura que se incluyen las impedancias serie \bar{z}_{ij} , calculadas con (7-4) y (7-4) y las admitancias paralelo \bar{y}_{ij} , calculadas con (7-10) y (7-11). El modelo eléctrico obtenido con las nuevas ecuaciones, es mucho más complejo que el desarrollado por Heaviside para líneas de transmisión, (ver la Fig. 2-1 b) por el hecho de que se consideran otros modos de propagación. Se puede notar la aparición de impedancias y admitancias “mutuas” entre secciones que no están presentes en el modelo de Heaviside para la línea de transmisión.

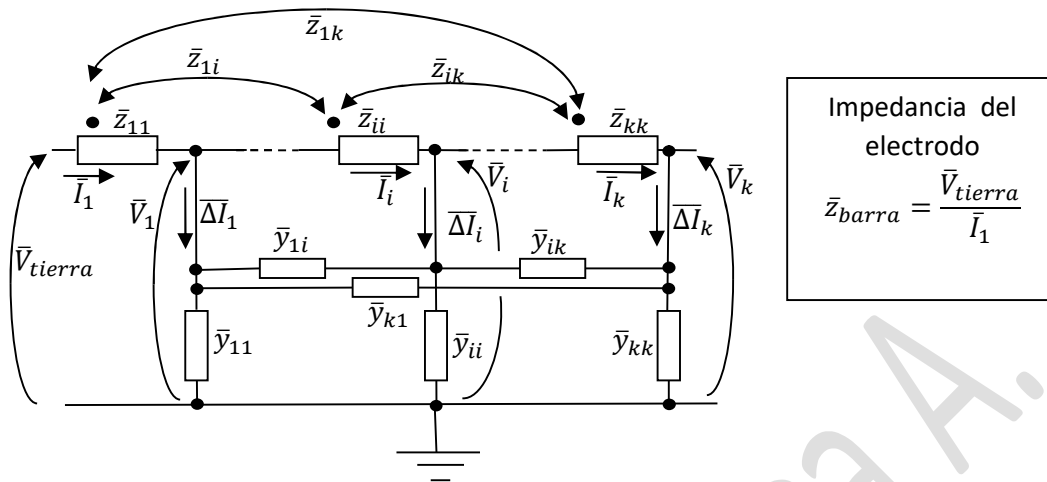


Fig. 7-3 Red eléctrica equivalente para tres secciones (1, j y k) de una barra.

La impedancia de la barra o del electrodo, que es uno de los parámetros que tiene mayor interés a la hora de modelar sistemas de puesta a tierra, vendrá dada por la siguiente relación:

$$\bar{z}_{barra} = \frac{\bar{V}_{tierra}}{\bar{I}_1} \quad (7-12)$$

7.2 Cálculo de la corriente en la barra

Existen diversas formas de calcular la distribución de la corriente en la barra, una de ellas consiste en resolver analíticamente o numéricamente el par de ecuaciones integro – diferenciales del tipo Heaviside, dadas por (6-41) y (6-42), pero estos métodos matemáticos no son tratados en este trabajo.

Otra manera aproximada de calcular la corriente que circula por la barra, consiste en dividir el electrodo en n segmentos, tal como se muestra en la figura 7-1 y las corrientes de cada segmento se pueden obtener al resolver la red eléctrica equivalente y que se muestra en la figura 7-3.

Otro método que se puede aplicar consiste en obtener de los n segmentos, un conjunto de n ecuaciones, teniendo como incógnitas la corriente de cada segmento y que se explica a continuación:

De acuerdo a la figura 7-2, la caída de tensión que tiene el elemento i debe ser igual a lo siguiente:

$$\Delta \bar{V}_i = \bar{V}_{i-1} - \bar{V}_i \quad (7-13)$$

Al substituir la ecuación anterior en la ecuación (7-3), que permite calcular la caída de tensión en el elemento i, se obtiene:

$$\bar{V}_{i-1} - \bar{V}_i = \sum_{j=1}^n \bar{z}_{ij} \bar{I}_j \quad (7-14)$$

donde \bar{V}_i es el potencial que tiene uno de los extremos del elemento i y que puede ser calculado con la ecuación (7-8). Al substituir (7-8) en la ecuación anterior y al reordenarla, se obtiene la siguiente relación:

$$0 = \sum_{j=1}^n \bar{z}_{ij} \bar{I}_j + \sum_{j=1}^n (\dot{z}_{ij} \bar{\Delta I}_j) - \sum_{j=1}^n (\dot{z}_{(i-1)j} \bar{\Delta I}_j) \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, n \quad (7-15)$$

Pero de acuerdo a la figura 7-2, la corriente $\bar{\Delta I}_j$ es igual a lo siguiente:

$$\bar{\Delta I}_j = \bar{I}_j - \bar{I}_{j+1} \quad (7-16)$$

Al substituir la relación anterior en la ecuación (7-15) se obtiene una ecuación que relaciona las corrientes para el elemento i , con excepción del primer elemento ($i=1$):

$$0 = \sum_{j=1}^n (\bar{z}_{ij} + \dot{z}_{ij} + \dot{z}_{(i-1)(j-1)} - \dot{z}_{(i-1)j} - \dot{z}_{i(j-1)}) \bar{I}_j \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, n \quad (7-17)$$

donde \bar{z}_{ij} y \dot{z}_{ij} son impedancias que se calculan con las ecuaciones (7-4), (7-5) y (7-9) y para el caso que $j = 1$ debe tenerse en cuenta lo siguiente:

$$\dot{z}_{(i-1)(j-1)} = 0, \quad \dot{z}_{i(j-1)} = 0 \quad \text{si } j = 1 \quad (7-18)$$

La ecuación (7-17) se puede escribir de una forma más compacta:

$$0 = \sum_{j=1}^n (\bar{Zeq}_{i,j}) \bar{I}_j \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, n \quad (7-19)$$

donde $\bar{Zeq}_{i,j}$ viene dado por:

$$\bar{Zeq}_{i,j} = \bar{z}_{ij} + \dot{z}_{ij} + \dot{z}_{(i-1)(j-1)} - \dot{z}_{(i-1)j} - \dot{z}_{i(j-1)} \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, n \quad (7-20)$$

Si se aplica la ecuación (7-14) al primer elemento que se muestra en la figura 7-2, donde se asume que la tensión \bar{V}_{tierra} es conocida y siguiendo el mismo procedimiento explicado anteriormente, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\bar{V}_{tierra} = \sum_{j=1}^n (\bar{z}_{1j} + \dot{z}_{1j} - \dot{z}_{1(j-1)}) \bar{I}_j \quad \text{donde: } i = 1 \quad (7-21)$$

para la ecuación anterior, también aplica las relaciones dadas en (7-18).

La ecuación anterior también puede ser escrita de una forma más compacta:

$$\bar{V}_{tierra} = \sum_{j=1}^n (\bar{Zeq}_{1,j}) \bar{I}_j \quad (7-22)$$

donde:

$$\bar{Zeq}_{1,j} = \bar{z}_{1j} + \dot{z}_{1j} - \dot{z}_{1(j-1)} \quad (7-23)$$

Con las ecuaciones (7-19) y (7-22) se forma una ecuación matricial cuya solución permite obtener las corrientes en cada uno de los segmentos de la barra, si se asume que la tensión del sistema de puesta a tierra \bar{V}_{tierra} es conocida:

$$\begin{bmatrix} \bar{V}_{tierra} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = |\bar{Z}_{eq}| \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \vdots \\ \bar{I}_{n-1} \\ \bar{I}_n \end{bmatrix} \quad (7-24)$$

donde $|\bar{Z}_{eq}|$ es una matriz cuadrada formada por los elementos de las impedancias $\bar{Z}_{eq_{i,j}}$ calculadas con las ecuaciones (7-20) y (7-23).

Al resolver la ecuación matricial anterior, la impedancia del sistema de puesta a tierra se puede obtener aplicando la ecuación (7-12).

Si el número de elementos en que se divide la barra y que se muestra en la figura 7-1, tiende a infinito, de forma tal que Δl tienda a cero; entonces la solución de la ecuación anterior corresponde a la solución analítica de las ecuaciones integro – diferenciales del tipo Heaviside, dadas por (6-41) y (6-42), para barras de puesta a tierra.

7.3 Cálculo de los potenciales en cualquier punto del suelo

Si la corriente \bar{I}_j de cada segmento de la barra es conocida, el potencial escalar eléctrico que existe en cualquier punto del suelo se puede calcular mediante la ecuación (6-42):

$$\bar{V}(x, y, z) = \frac{-1}{\Delta l(\sigma_1 + j\omega\epsilon_1)} \sum_{j=1}^n \left(\int_{-l_j}^{-l_{j+1}} f(x, y, z, 0, 0, z') dz' (\bar{I}_j - \bar{I}_{j+1}) \right) \quad (7-25)$$

donde x, y, z son las coordenadas donde se quiere calcular el potencial escalar

Con la ecuación anterior, se pueden obtener las curvas iso-potenciales en la superficie del suelo ($z = 0$), curvas que son utilizadas para determinar las tensiones de toque y de paso del sistema de puesta a tierra⁴⁸.

⁴⁸ Consultar la norma IEEE 80-2000 para tensiones de toque y paso.

8 Resultados y su comparación con valores medidos

En este capítulo se comparan los valores calculados de impedancias en barras, obtenidas con las nuevas ecuaciones del tipo Heaviside, con valores medidos, para un rango de frecuencia comprendido desde los 100Hz hasta los 10MHz. Este rango de frecuencia permite analizar el comportamiento del sistema de puesta a tierra tanto para eventos lentos, como la corriente que se drena a tierra por una falla monofásica, ocurrida en el sistema de suministro de energía eléctrica; como para eventos rápidos, tal como la corriente originada por una descarga atmosférica y que se drena a tierra a través del sistema de puesta a tierra.

Las mediciones fueron realizadas por el autor de este trabajo en el año 2007, [Malpica, 2011] correspondientes a dos barras, una de 30cm de longitud y otra de 1m de longitud, ambas de $\frac{1}{2}$ pulgada de diámetro y enterradas en un suelo cuya resistividad, para el momento de la medición, era de $16.6 \Omega\text{m}$.

Las mediciones de impedancia fueron hechas empleando el método de caída de potencial y que se describe en la norma ANSI/IEEE 81-1983⁴⁹, aunque la norma no cubre mediciones por encima de los 25kHz.

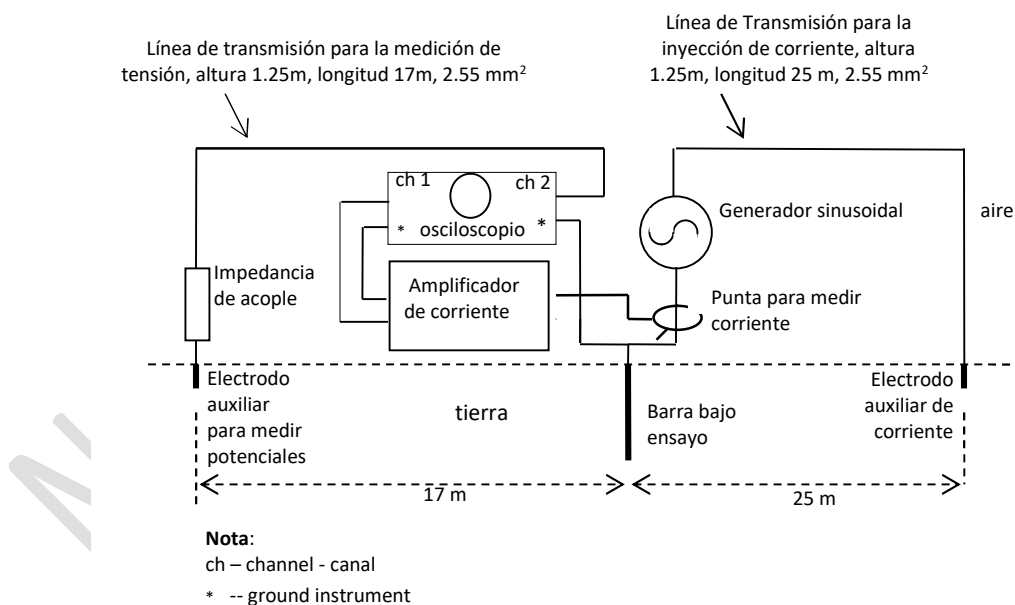


Fig. 8-1 Medición de impedancia de una barra por el método de caída de potencial

⁴⁹ IEEE Guide for Measuring Earth Resistivity, Ground Impedance and Earth Surface Potentials of a Ground System.

En la Fig. 8-1 se muestra el arreglo de equipos e instrumentos utilizados para la medición de la impedancia por el método de caída de potencial; para la medición, se requirió utilizar dos electrodos auxiliares, colocados ambos fuera de la zona de influencia de la barra y (ver la sección 4.5 de este trabajo y la ecuación (4-35)). Uno de los electrodos auxiliares se utilizó para inyectar corriente por la barra y el otro electrodo se empleó para medir la diferencia de potencial que existe entre la barra y un punto remoto del suelo, que es el punto donde se encuentra el electrodo auxiliar de potencial.

Como se aprecia en la Fig. 8-1, se empleó también un osciloscopio, en la medición, para registrar simultáneamente la corriente inyectada a la barra y la tensión que cae en la superficie del suelo, estas imágenes fueron guardadas para luego ser procesadas para obtener la impedancia de la barra en cuestión.

Para el cálculo de las impedancias de puesta a tierra, las curvas isopotenciales, la distribución de la corriente en las barras, y la comparación de los resultados, fue necesario elaborar un programa, empleando la herramienta de simulación MathLab, en su versión 2008.

8.1 Barra de 1m de longitud

Para calcular la impedancia de la barra, primero se calculó la corriente en cada segmento, siguiendo el procedimiento descrito en la sección 7.2, luego de conocer las corrientes de cada segmento, la impedancia de puesta a tierra fue calculada usando la ecuación (7-12). Para el cálculo, la barra fue dividida en 100 secciones o segmentos, donde cada sección tiene una longitud de 1cm y este valor de 100 corresponde al orden de la ecuación matricial a resolver, para calcular las corrientes de cada segmento, de acuerdo a la ecuación (7-24). En cuanto a la permitividad relativa del suelo, se asumió un valor igual a 3.

En la figura 8-2 se compara la magnitud de la impedancia calculada con la medida y en la figura 8-3 se compara el ángulo de la impedancia, nótese que los valores calculados siguen en muy buena medida los valores medidos hasta una frecuencia de 1MHz.

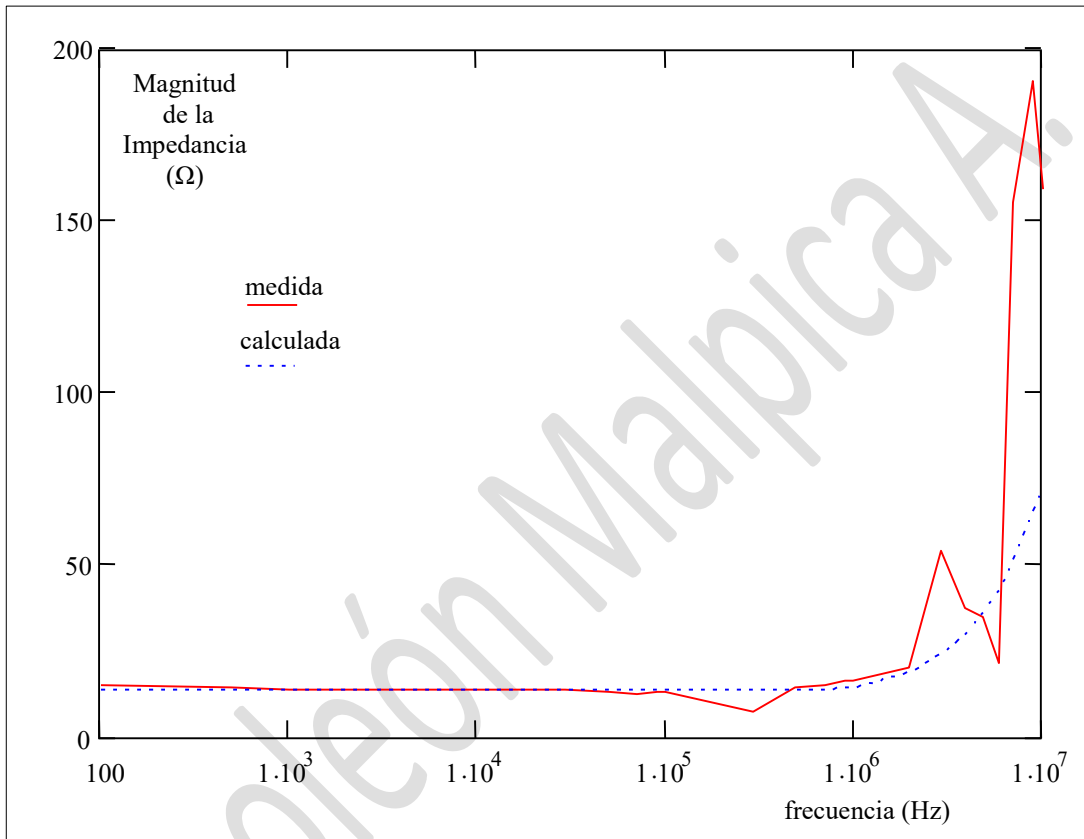


Fig. 8-2 Impedancia de puesta a tierra en función de la frecuencia, para una barra de 1m de longitud y ½ pulgada de diámetro. Resistividad del suelo 16.6 Ω m.

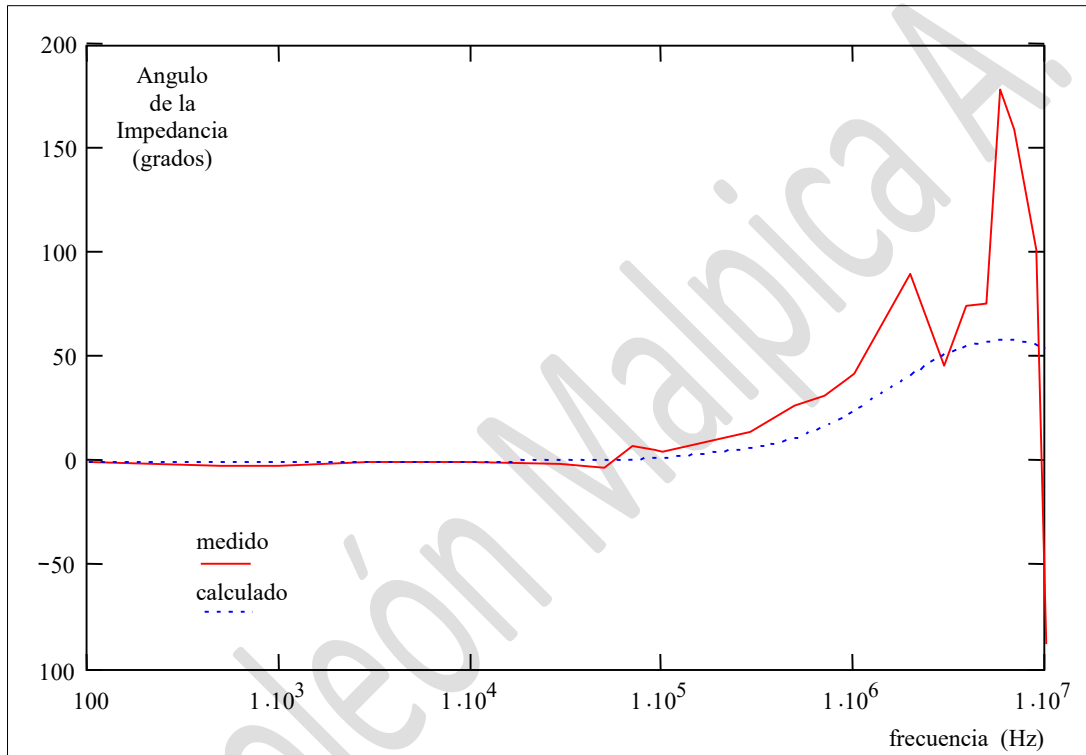


Fig. 8-3 Angulo de la impedancia de puesta a tierra, en función de la frecuencia, para una barra de 1m de longitud y ½ pulgada de diámetro. Resistividad del suelo 16.6 Ωm.

La figura 8-4 muestra la magnitud de la corriente en la barra, en función de la posición, para dos frecuencias diferentes, nótese como la corriente se reduce a medida que se incrementa la variable de posición z .

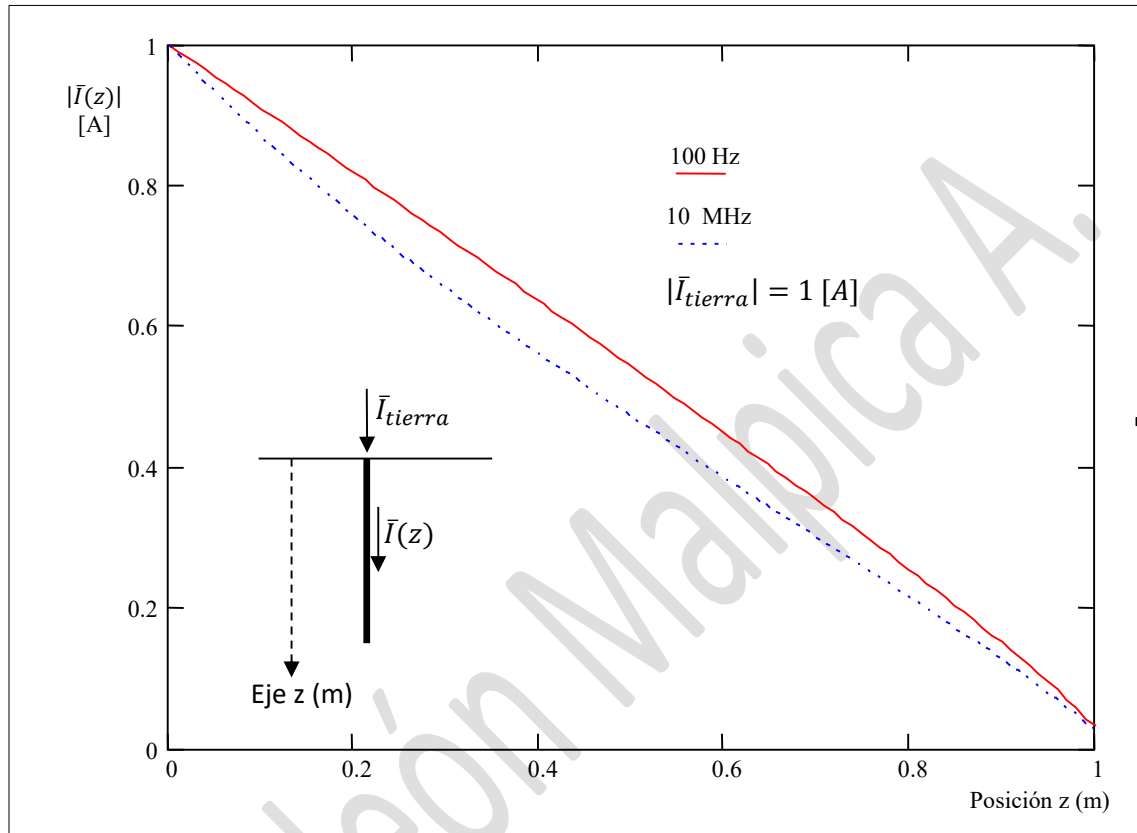


Fig. 8-4 Magnitud de la corriente en la barra, en función de la posición, para una barra de 1m de longitud y ½ pulgada de diámetro, para las frecuencias de 100Hz y 10 MHz . Resistividad del suelo 16.6 Ω m.

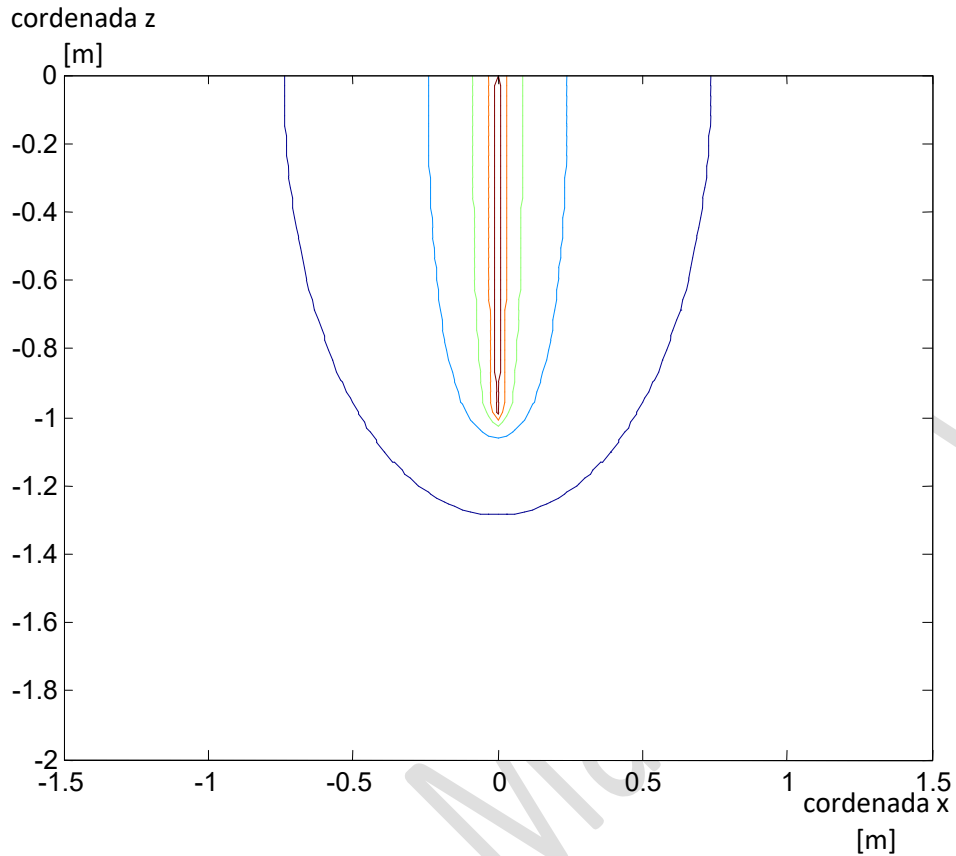


Fig. 8-5 Líneas equipotenciales calculadas para el plano vertical ($y=0$), para una barra de 1m de longitud y $\frac{1}{2}$ pulgada, a la frecuencia de 60Hz.
Resistividad del suelo $16.6 \Omega\text{m}$.

Por último, se presentan como resultados curvas equipotenciales calculadas según el método que se explica en el párrafo 7.3 , específicamente se emplea la ecuación (7-25) para obtener los potenciales.

En la figura . 8-5 se muestran las líneas equipotenciales para la barra de 1m de longitud, nótese que las líneas tienden a una simetría esférica, a medida que nos alejamos de la barra, esto evidencia en la simulación que el campo eléctrico tiene componentes en la dirección del eje de la barra, lo que corresponde al modo de propagación TM.

En la figura 8-6 se 8-6muestran las líneas equipotenciales, calculadas sobre la superficie del suelo, usando la ecuación (7-25), estas curvas se utilizan para calcular las tensiones de toque y de paso que exige la norma ANSI/IEEE 80-200.

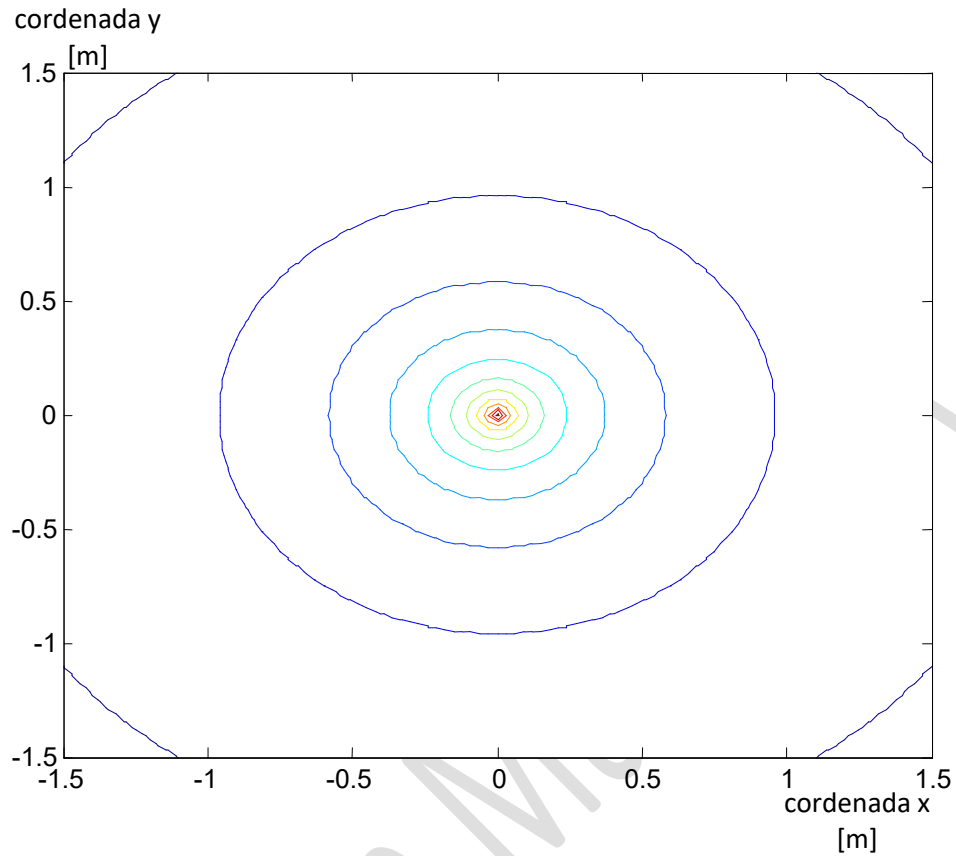


Fig. 8-6 Líneas equipotenciales calculadas sobre el plano de la tierra ($z = 0$), para una barra de 1m de longitud y $\frac{1}{2}$ pulgada de diámetro, para la frecuencia de 60Hz
Resistividad del suelo $16.6 \Omega\text{m}$.

8.2 Barra de 30cm de longitud

A continuación en las figuras 8-7 y 8-8 se comparan las impedancias calculadas con las medidas, para una barra de 30 cm de longitud, dividida en 30 segmentos, nótese la buena concordancia de los resultados hasta una frecuencia de 1MHz. También se presentan figuras en cuanto a la corriente en la barra y las curvas equipotenciales.

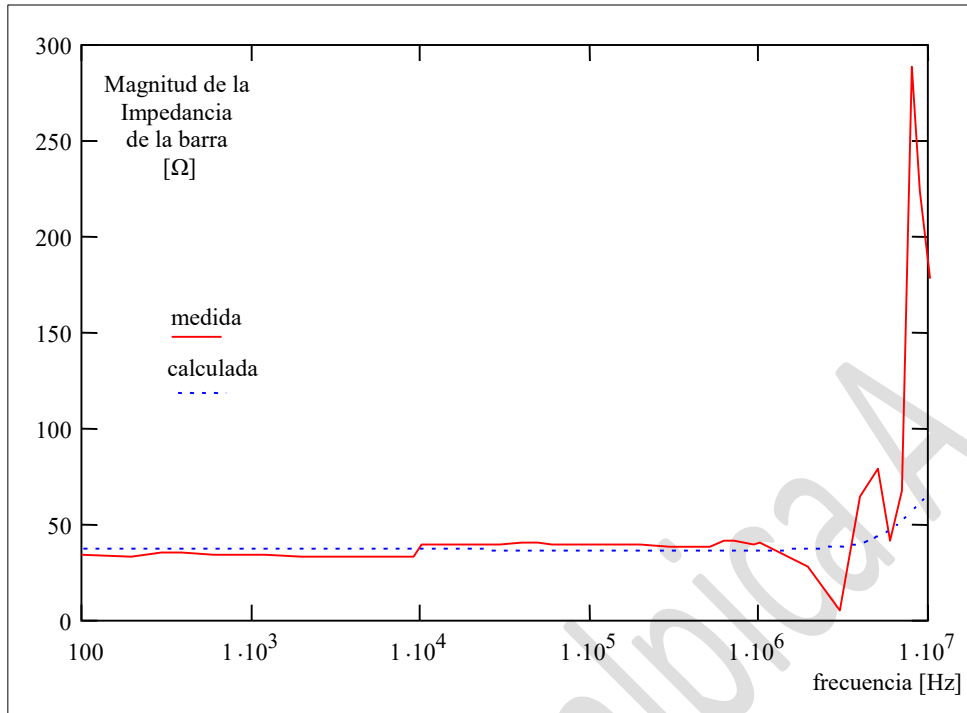


Fig. 8-7 Impedancia de puesta a tierra en función de la frecuencia, para una barra de 30cm de longitud y ½ pulgada de diámetro. Resistividad del suelo 16.6 Ωm.

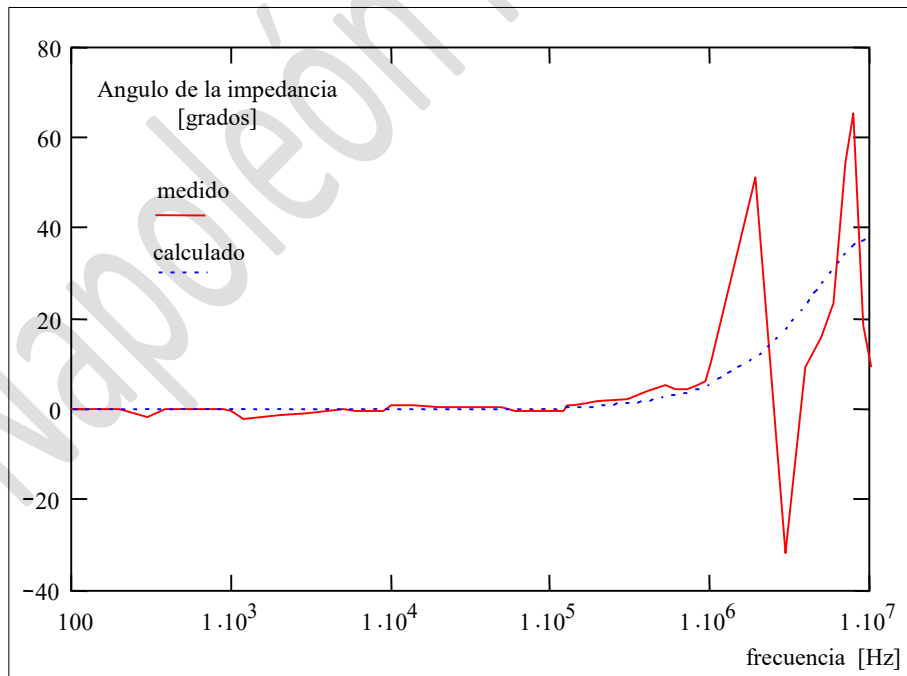


Fig. 8-8 Angulo de la impedancia de puesta a tierra, en función de la frecuencia, para una barra de 30cm de longitud y ½ pulgada de diámetro. Resistividad del suelo 16.6 Ωm.

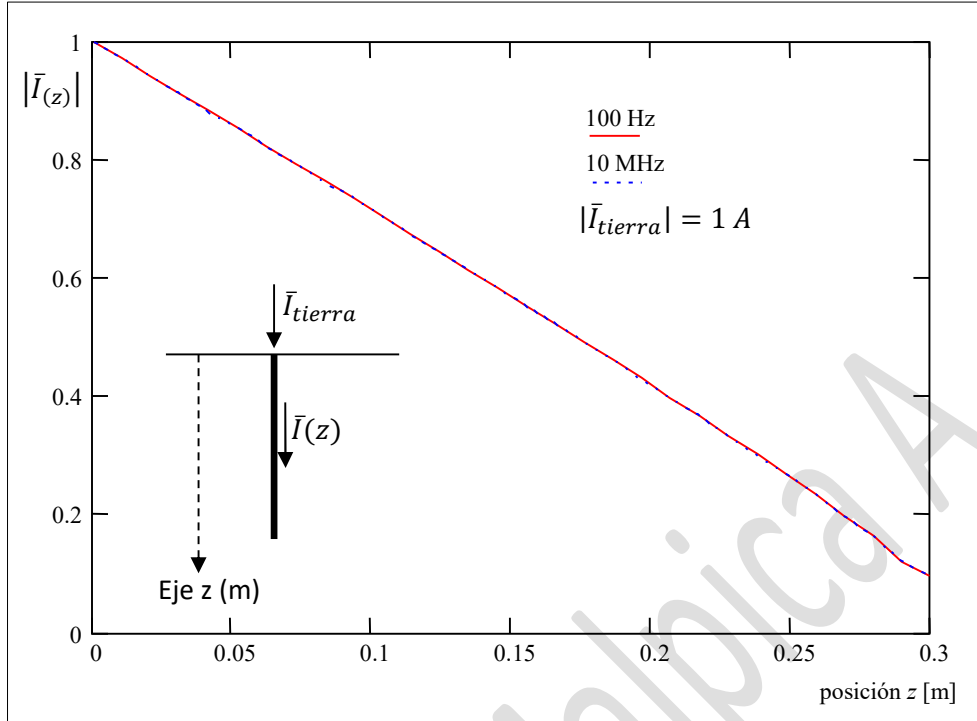


Fig. 8-9 Magnitud de la corriente en la barra, en función de la posición, para una barra de 30cm de longitud y ½ pulgada de diámetro, para 100Hz y 10MHz.
Resistividad del suelo 16.6 Ω m.

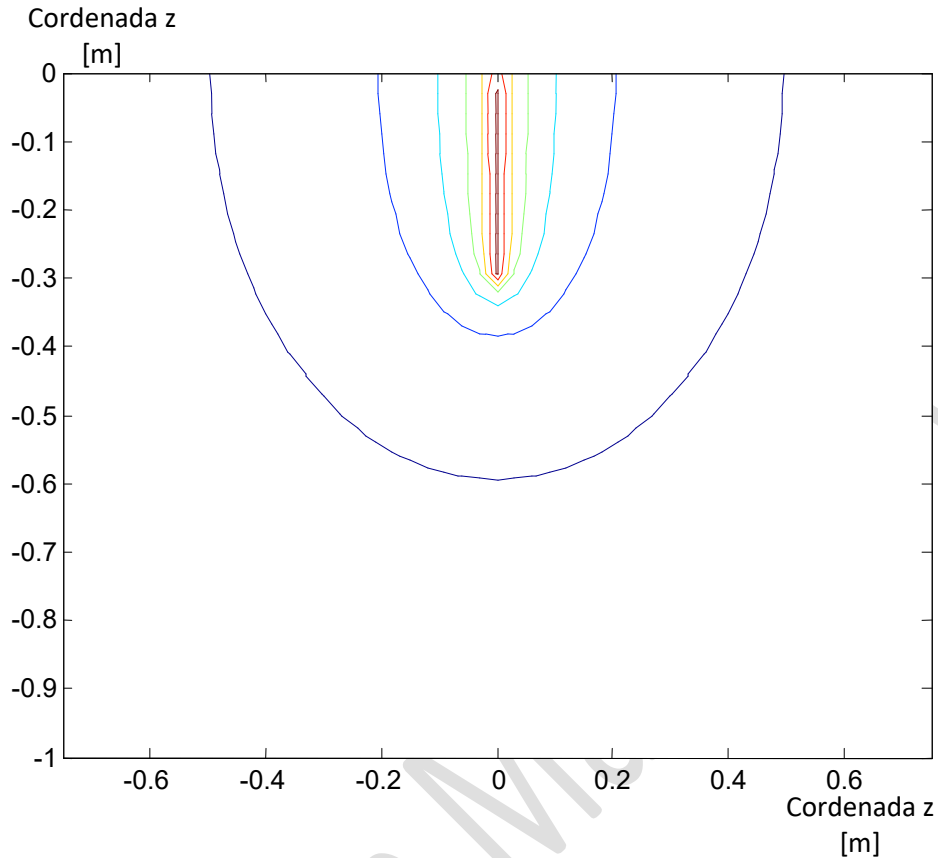


Fig. 8-10 Líneas equipotenciales calculadas para el plano vertical ($y=0$), para una barra de 30cm de longitud y $\frac{1}{2}$ pulgada, a la frecuencia de 60Hz.
Resistividad del suelo $16.6 \Omega\text{m}$.

8.3 Análisis de resultados

Como ya se ha mencionado en los párrafos anteriores, la impedancia de puesta a tierra calculada, sigue en buena medida la impedancia medida hasta una frecuencia de 1MHz, a frecuencias superiores, el modelo propuesto con las nuevas ecuaciones del tipo Heaviside, a pesar de ser un modelo extremadamente complejo y con parámetros distribuidos (ver la fig. 7-3) y que considera todos los modos de propagación, parece no responder de manera adecuada por encima de esta frecuencia.

Sin embargo es importante señalar algunos aspectos de suma importancia ocurridas en la medición:

- De acuerdo a la Fig. 8-1, para inyectar corriente en la barra, se empleó una pequeña línea de transmisión aérea de 25 m de longitud, sección del conductor 1.25 mm^2 y una altura sobre el suelo de 1.25m; de esta forma la impedancia característica de la línea permanece constante en todo su recorrido.

- El electrodo por donde retorna la corriente, se ubicó a una distancia de 25m de la barra, de tal forma que éste quedara fuera de la zona de influencia de la barra (16 m es la zona de influencia de la barra de 1m), con esto, se reduce algún efecto que pudiera tener el electrodo auxiliar en la medición (consultar los apartados 4.5 y 4.6).
- Pero para frecuencias del orden de los mega Hertz, la longitud de la línea (25m) se hace comparable con las longitudes de ondas presentes en la línea (ver la figura 8-11). Al ocurrir esta situación, no se tiene la garantía que la corriente inyectada a la barra retorne totalmente por el otro extremo de la línea, donde está el electrodo auxiliar, por la presencia de ondas estacionarias.
- Por otra parte, en el rango de frecuencias entre 1MHz y 10 MHz, la longitud de la línea, puede corresponder a $\frac{1}{4}$ de longitud de onda o $\frac{1}{2}$ de la longitud de onda o múltiplos de ello, ocurriendo puntos de resonancia que se evidencia en los abruptos cambios de fase (pasos por cero) que se presentan en las figuras 8-3 y 8-8.

Ahora bien, los problemas mencionados se hubieran evitado si en la línea para inyectar corriente se hubiera empleado una impedancia de acoplamiento, tal como se muestra en la otra línea utilizada para medir tensión (ver Fig. 8-1), de esta forma se reducen o eliminan las ondas estacionarias causantes de estos problemas.

Pero debido a la poca potencia del generador de ondas utilizado, fue necesario eliminar la impedancia de acoplamiento ya que al utilizarla, las señales registradas por el osciloscopio eran de baja magnitud y comparable con los niveles de ruido electromagnético registrados en el ambiente.

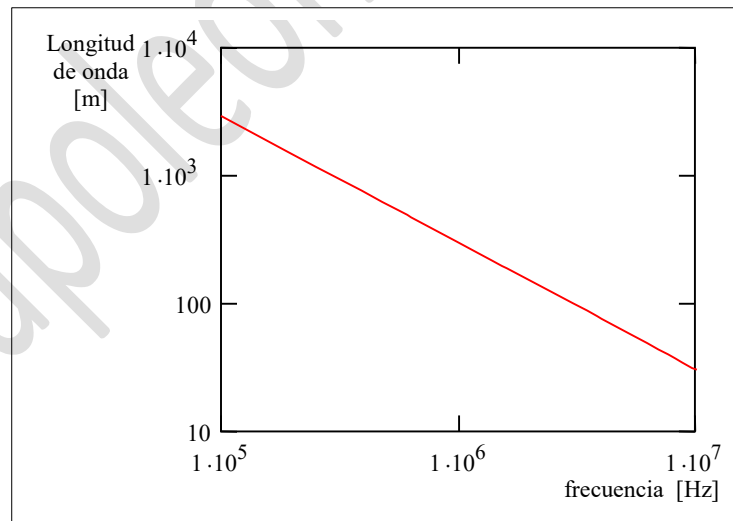


Fig. 8-11 Longitud de ondas, en función de la frecuencia, para una línea aérea de 1.25m de altura, conductor de cobre de 1.25 mm² de sección y resistividad del suelo igual a 16.6 [Ω m], calculada según el modelo de Deri [1981]

Por lo anterior, es factible que el modelo desarrollado responda satisfactoriamente a frecuencias por encima de 1MHz, se recomienda en un futuro hacer comparaciones con otras herramientas de simulación o comparar con otras mediciones.

De las gráficas de equipotenciales, se observa que cercano a la barra, el modo de propagación tiende a ser del tipo TEM y a medida que nos alejamos de la barra, el campo tiende a ser TM

Napoleón Malpica A.

9 Contribuciones al conocimiento

Son las siguientes:

- A partir de las ecuaciones de Maxwell, se ha obtenido un par de ecuaciones integro – diferenciales (6-41) y (6-42) con la misma topología de las ecuaciones de la línea de transmisión de Heaviside (6-39) y (6-40), pero válidas para modelar barras de puesta a tierra, las mismas fueron obtenidas asumiendo que en la tierra ocurre un fenómeno de propagación de ondas del campo electromagnético.
- De las nuevas ecuaciones integro - diferenciales se obtuvo la red eléctrica equivalente, con parámetros distribuidos, que resultó mucho más compleja que el modelo de la línea de transmisión con parámetros distribuidos de Heaviside.
- De las nuevas ecuaciones, se obtuvieron también las fórmulas para el cálculo de los parámetros eléctricos G , L y C de las barras, en el dominio de la frecuencia.
- Las nuevas ecuaciones incluyen otros modos de propagación, además del modo TEM que contempla las ecuaciones de Heaviside.
- El trabajo presenta adicionalmente una contribución didáctica en cuanto al análisis del modelo de la línea de transmisión y las ecuaciones de Heaviside, para ser aplicadas a barras de puesta a tierra.

10 Conclusiones

Las ecuaciones de Heaviside, permiten modelar las líneas de transmisión, con parámetros distribuidos, dichas ecuaciones tienen la propiedad que toman en cuenta los fenómenos de propagación de ondas que ocurren en las líneas de transmisión.

Algunos investigadores utilizan las ecuaciones de Heaviside, para modelar electrodos para puesta a tierra, pero las ecuaciones de Heaviside no se adaptan del todo para modelar los electrodos ya que sólo toma en cuenta el modo de propagación TEM, cuando en los sistemas de puesta a tierra pueden ocurrir otros modos de propagación.

Por lo anterior, en este trabajo se han desarrollado un par de ecuaciones del tipo integro – diferencial, con la misma topología de las ecuaciones de Heaviside, pero deducidas para ser aplicadas específicamente en barras para puesta a tierra.

Las ecuaciones en cuestión fueron deducidas con base a las ecuaciones de Maxwell, asumiendo que el medio es infinito, formado por dos estratos (tierra – aire) y asumiendo que en la tierra ocurre un fenómeno de propagación de ondas.

No se presentó una solución analítica para el par de ecuaciones integro diferenciales, sin embargo, se presenta una solución discreta de las ecuaciones, si el electrodo se divide en n segmentos finitos, cada uno de ellos de longitud Δl .

Del par de ecuaciones también se extrajo la red eléctrica discreta equivalente para una barra de puesta a tierra, con parámetros distribuidos, donde la red resultante resultó mucho más compleja que la empleada para modelar líneas de transmisión.

Las ecuaciones en cuestión, además de considerar el modo de propagación TEM, también consideran otros modos que están presentes en el suelo.

Del par de ecuaciones se dedujeron las expresiones que permiten calcular todos los parámetros eléctricos de la barra G , L y C , todos ellos con dependencia de la frecuencia y de la posición.

11 Futuros trabajos

Se proponen los siguientes trabajos de investigación:

- Resolver numéricamente el sistema de ecuaciones del tipo Heaviside dadas en (6-41) y (6-42).
- Proponer una metodología para medición de impedancia de puesta a tierra, en el dominio del tiempo, mediante ondas de impulso.
- Proponer una metodología para la medición de impedancia de puesta a tierra, en el dominio de la frecuencia y para frecuencias superiores a 1MHz.
- Plantear las ecuaciones del tipo Heaviside, para electrodos horizontales y para una combinación de arreglos de electrodos (verticales y horizontales) considerando todos los modos de propagación
- Estudiar el comportamiento del sistema de puesta a tierra, cuando se encuentra expuesto a un campo eléctrico primario \bar{E}_p (ver la figura 6-2).
- Hacer un estudio para establecer cuáles de los métodos usados para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, es el más conveniente para resolver problemas de puesta a tierra (elementos finitos, elementos infinitos, método de los momentos, diferencias finitas, diferencias finitas en el dominio del tiempo, etc).
- Hacer un estudio para establecer las condiciones que son necesarias para considerar o no la dinámica del campo electromagnético, en el cálculo de la impedancia de puesta a tierra.
- Hacer un estudio de sensibilidad para simplificar el modelo eléctrico obtenido para una barra y que se muestra en la figura 7-3.

Referencias

- [Almeida, 2002] Almeida, M. E.; Correia de Barros, M. T., "Critical Length of Long Horizontal Ground Electrodes", International Conference on Grounding and Earthing 3rd Brazilian Workshop on Atmospheric Electricity, Ground` 2002 and 3rd WAE, Rio de Janeiro – Brazil, pp. 175-178, 4-7 November 2002.
- [Almeida, 1999] Almeida, M. E.; Correia de Barros, M. T., "Frequency Dependent Behaviour of Long Ground Electrodes", V International Symposium on Lightning Protection, V SIPDA, S. Paulo, 17-21 May. 1999.
- [Atwater, 1962] H. A. Atwater, "Introductoin to Microwave Theory", McGRAW-HILL Company, INC., International Student Edition, Tokyo, 1962
- [Bourg, 1995] Bourg, S; Sacepe, B.; Debu, T., "Deep Earth Electrodes in Highly Resistive Ground: Frequency Behaviour", IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility, 1995. Symposium Record. 1995, 14-18 Aug. 1995, Page(s):584 – 589.
- [Burke, 1984] Burke, Gerald; Miller, Edmund, "Modelling Antennas Near to and Penetrating a Lossy Interface", IEEE Transaction on Antennas and Propagation, Vol. AP-32, No. 10, October 1984.
- [Carson, 1926] Carson, John. R., "Wave Propagation in Overhead Wires with Ground Return", The Bell System Technical Journal", Vol. V, Number 4, October 1926.
- [Deri, 1981] Deri, A.; Tevan, G.; Semlyen, A.; Castanheira, A., "The Complex Ground Return Plane a Simplified Model for Homogeneous and Multi-Layer Earth Return" IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100, No. 8, August 1981
- [Dettman, 1962] Dettman, John, "Mathematical Methods in Physics and Engineering" , McGraw-Hill Book Company, Inc.; New York, 1962.
- [Dwight, 1936] Dwight, H.B., "Calculation of Resistances to Ground", Trans. Am. Inst. Elec. Eng.; Vol. 55, No. 12, pp.1319 – 1328, December 1936.
- [Gao, 2002] Gao, Yanqing; Zeng, Rong; He, Jinliang; Liang, Xidong, "Loss Transmission Line Model of Grounding Electrodes Considering Soil Ionization of Lightning Impulse", 3rd International Symposium on Electromagnetic Compatibility, pp. 294-298, 21-24 May 2002.
- [Grcev, 2009] Grcev, L., "Modeling of Ground Electrodes Under Lightning Currents" IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, Vol. 51, Issue: 3, pages 559-571, Aug. 2009
- [Grcev, 2005] Grcev, L.; Popov, M., "On high-frequency circuit equivalents of a vertical ground rod", IEEE Transactions on Power Delivery, Volume: 20 Issue:2, April 2005.

- [Grcev, 1990]** Grcev, Leonid; Dawalibi, Farid, "An Electromagnetic Model for Transients in Grounding Systems", IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 5, No. 4, pp. 1773-1781, November 1990.
- [Grover, 1946]** Grover, Frederick, *"Inductance Calculation. Working Formulas and Tables"*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1946.
- [Heaviside, 1894]** Heaviside, Oliver, *"Electrical Papers"*, Vol. #1 and 2, The Macmillan Company, New York and London, 1894.
- [Howe, 1914]** Howe, G. W. O., "Capacity of Radio – Telegraph Antennas", The Electrician, Vol. 75, pp. 829-859, 1914.
- [Jackson, 1975]** Jackson, Jonh David, *"Classical Electrodinamics"*, John Wiley & Son, Inc.; New York, 1975, ISBN 0-471-43132-X.
- [Javid, 1963]** Mansour Javid, Philip Marshall Brown, "Field Analysis and Electromagnetics", McGRAW-HILL Book, Company, Inc., New York, 1963.
- [Juric, 2008]** Juric-Grgic, I. Lucic, R. Ljubicic, D., "Effective length of horizontal grounding electrode" 16th International Conference on Software, Telecommunications and Computer Networks, 2008. SoftCOM2008., Split, page 47, 25-27 Sept. 2008
- [Liu, 2005]** Yaqing Liu; Theethayi, N.; Thottappillil, R.; "An engineering model for transient analysis of grounding system under lightning strikes: non uniform transmission-line approach", IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 20, No 2, Part 1, pp.722 – 730, April 2005
- [Liu, 2001]** Liu, Yaqing; Zitnik, Mihael; Thottappillil, Rajeev, "An Improved Transmission-Line Model of grounding System", IEEE Transaction on Electromagnetic Compatibility, Vol. 43, No. 3, August 2001.
- [Lorentzou, 2003]** Lorentzou, M. I.; Hatziargyriou, N. D.; Papadias, B. C., "Time Domain Analysis of Grounding Electrodes Impulse Response", IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 18, No. 2, pp.517-524, April 2003.
- [Lorrain, 2000]** Paul Lorrain, Dale Corson, Francois Lorrain, Lorentzou, M. I.; Kldas, A. G.; Hatziargyriou, N. D., "Campos e Ondas Electromagnéticas", Fundación Calouste Gulbenkian, Lisboa.
- [Malpica, 2014]** Malpica, Wilmer; "Nuevas ecuaciones del telegrafista, para jabalinas, usadas en sistemas de puesta a tierra". Memorias del XII Congreso Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas, CIMENIC`2014, Isla de Margarita, 24 al 26 de marzo, 2014.
- [Malpica, 2011]** Malpica, Wilmer, "A Complete Aproach to Modellig Grounding Systems Including Electromagnetic Radiation Phenomena", Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico; Universidade Técnica de Lisboa, , 2011

- [Malpica, 2006]** Malpica, W; Correia de Barros, M. T.; Ametani, A., "An investigation on Sunde's Formula of a Grounding Electrode by Applying Vector Potential", Technical Meeting on High Voltage Engineering, IEE Japan, Vol. HV-06, No. 37-46, pp. 19-23, 2006
- [Malpica, 2005]** Malpica, W.; Maló Machado, V., "Earth Impedance for a Buried Vertical Rod in the Presence of Eddy Currents" ISEF 2005 – XII International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering, Baiona Spain, 15-17 September 2005
- [Marshall, 1997]** Marshall, Stanley V.; DuBroff, Richard f.; Skick, Gabriel, "*Electromagnetismo Conceptos y Aplicaciones*", Prentice Hall Hispanoamericana S. A., México, ISBN 968-880-954-3, 1997.
- [Maxwell, 1891]** Maxwell, James Clerk, "*A treatise on electricity and magnetism*", Dover, 3rd ed., unabridged, Vol. 1 and 2, New York, 1954.
- [Mazzetti, 1983]** Mazzetti, Carlos; Veca, Guiseppe M., "Impulse Behaviour of Ground Electrodes", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, No. 9, pp. 3148-3156, September 1983.
- [Meliopoulus, 1983]** Meliopoulus, A. P.; Moharam, M. G., "Transient Analysis of Grounding Systems", IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-102, No. 2, pp. 389-399, February 1983.
- [Menter, 1994]** Menter, Frank E.; Grecev, Leonid, "EMTP – Based Model for Grounding System Analysis", IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 9, No. 4, pp. 1838-1849, October 1994.
- [Mishra, 2007]** Arbind Kumar Mishra, Akihiro Ametani, Fellow, IEEE, Naoto Nagaoka, Member, IEEE, and Shigemitsu Okabe, Member, "Non uniform Characteristics of a Horizontal Grounding Electrode," IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 22, No. 4, October 2007
- [Morse, 1953]** Morse, Philip; Feshbach, Herman, "*Methods of Theoretical Physics*", McGraw-Hill Publishing Company, ISBN 0-07-043316-X, 1953
- [Noda, 2002]** Noda, Taku; Yokoyama, Shigeru, "Thin Wire Representation in Finite-Difference Time-Domain Surge simulation", IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 17, No. 3, pp.840 – 847, July 2002
- [Panofsky, 1956]** Panofsky, W.; Phillips, M., "*Classical Electricity and Magnetism*", Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Second printing, August 1956
- [Perry, 1985]** Perry, Michael, "Low Frequency Electromagnetic Design" Marcel Dekker, Inc., USA, 1985
- [Pipes, 1958]** Louis A. Pipes, "Applied Mathematics for Engineers and Physicists" International Student Edition, Second Edition, Mc-GRAW-HILL BOOK Company, Inc., Tokyo, 1958

- [Rosa, 1912] Rosa, E. B. ; Grover, F. W., "Formulas and Tables for The Calculation of Mutual and Self Inductance (Revised)", Bulletin of the Bureau of Standards, Volume 8, Nº 1, page 1, 1912.
- [Rosa, 1908] Rosa, Edward. B., " The Self and Mutual Inductance of Linear Conductor", Bulletin of the Bureau of Standards, Volume 4, Nº 2, page 303, 1908.
- [Rosa, 1908] Rosa, Edward. B., " The Self and Mutual Inductance of Linear Conductor", Bulletin of the Bureau of Standards, Volume 4, Nº 2, page 303, 1908.
- [Rochereau, 1988] Rochereau H., " Comportement des prises de terre localisées parcourues par des courants à front raide", E D F Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches – Serie B, Reseaux Electriques, Materiels Electriques Nº 2 1988, p 13-22 page 303, 1908.
- [Rüdenberg, 1945] Rüdenberg, Reinhold, "Grounding Principles and Practice. I-Fundamental Consideration on Ground Currents", Electrical Engineering, Vol. 64, Number 1, pp. 1-13, January 1945.
- [Schwarz; 1954] Schwarz; S, "Analytical Expressions for the Resistance of Grounding Systems", Transaction of the American Institute of Electrical Engineers, Part III-B, Power Apparatus and System, Vol. 73, pp 1011-1016, 1954.
- [Simonyi, 1963] Simonyi, K., "*Foundation of Electrical Engineering*", Pergamon Press Ltd., OxfordEngland, 1963.
- [Sommerfeld, 1949] Sommerfeld, Arnold, "*Partial Differential Equation in Physics*", Academic Press Inc., New York, 1949.
- [Spiegel, 1988] Spiegel, Murray; Abellanas, Lorenzo, "*Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada*", Serie Compendios Schaum, McGraw-Hill, Madrid, 1988.
- [Stinson, 1976] Stinson, Donald C., "*Intermediate Mathematics of Electromagnetics*", Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs N. J., 1976.
- [Sunde, 1967] Sunde, E. D., "Earth conduction effects in transmission systems", Dower Publication, Inc., New York, 1968.
- [Tagg, 1964] Tagg, G. F., "*Earth Resistances*", Pitman Publishing Corporation, New York, 1964.
- [Takahashi, 1991] Takahashi, Takehiko; Kawase, Taroh, "Calculation of Earth Resistance for a Driven Rod in a Multi – Layer Structure", IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 6, No. 2, April 1991.
- [Thug, 1964] Thug, G. F., "*Earth Resistance*", Georges Newnes Limited, London, 1964.

- [Velazquez, 1984]** Velazquez, R.; Mukhedkar, D., "Analytical Modeling of Grounding Electrodes Transient Behavior", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-103, No. 6, pp.1314-1322, June 1984.
- [Verma, 1980]** Verma, R. ; Mukhedkar, D., "Impulse impedance of buried ground wire", IEEE Trans. on PAS, Vol. PAS-99, No. 5, pp. 2003-2006; Sep./Oct. 1980.
- [Yu, 2003]** Yu, Shaofeng; Zou, Jun; He, Jinliang; Zeng, Rong; Gao, Yanqig; Guo, Jian, "Time-domain Analysis Method of Lightning Transient Characteristics of Grounding Electrode", Asia – Pacific Conference on Environmental Electromagnetic CEEM`2003, Hangzhou China, 4-7 Nov. 2003.

Napoleón Malpica A.