



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN MATEMÁTICA

ESTIMACIÓN DE LA DEFORMACIÓN DE PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y SU APLICACIÓN A LA FORMA A PARTIR DE LA TEXTURA

Autor: Lcdo. José G. Hernández S.
Tutor: Dr. José Rafael León

Trabajo de Grado de Maestría presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Magister Scientiarum, Mención Matemática.

Caracas, Venezuela
Julio 2018



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
COMISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO



Comisión de Estudios
de Postgrado

VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del jurado designado por el Consejo de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el **Trabajo de Grado de Maestría** presentado por el **JOSÉ GREGORIO HERNANDEZ SALAZAR**, C.I.V-9.309.546, bajo el título "*Estimación de la Deformación de Procesos Estocásticos y su Aplicación a la Forma a partir de la Textura*", a fin de cumplir con el requisito legal para optar al grado académico de **MAGISTER EN CIENCIAS, MENCIÓN MATEMÁTICA**, dejan constancia de lo siguiente:

1.- Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del jurado, se fijó el día **18 de Julio de 2018** a las **10:00 am**, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la **Sala de Postgrado en Matemática de la Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela**, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado, todo ello conforme con lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

2.- Finalizada la defensa del trabajo, el jurado decidió **aprobarlo**, por considerar, sin hacerse solidario con la ideas expuestas por el autor, que se ajusta a lo dispuesto y exigido en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

Para dar este Veredicto, el jurado estimó que el trabajo examinado reúne los requisitos de presentación, originalidad, revisión bibliográfica e impacto necesarios para constituir un Trabajo de Grado, dado que el autor hace uso de técnicas de análisis armónico, estadística de procesos y puesta en marcha de algoritmos de estadística computacional, para dar solución al problema de estimación de la deformación de texturas estacionarias.

3.- El jurado por unanimidad decidió otorgar la calificación de **EXCELENTE** al presente trabajo por considerar que presenta contribuciones valiosas a los temas abordados que se sustentan por opiniones de investigadores reconocidos en el área.

En fe de lo cual se levanta la presente ACTA, a los **18 días del mes de Julio del año 2018**, conforme a lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado. Actuó como **Coordinador del Jurado** el **DR. JOSÉ RAFAEL LEÓN (UCV-Universidad de la República-Uruguay) (Tutor)**.

DRA. MAIRENE COLINA (UCV)

C.I.V-12.761.954

Jurado designado por Consejo Facultad

DRA. ELVIA FLORES (UCV)

C.I.V-4.128.598

Jurado designado por Consejo de Facultad

DR. JOSÉ RAFAEL LEÓN

(UCV-Universidad de la República-Uruguay) (Tutor) (Coordinador)

C.I.V-3.846.337



Resumen

Se estudia cierta clase de proceso no estacionario X que resulta de la deformación D de un proceso estacionario Y . Se establecen condiciones suficientes sobre el proceso Y , para identificar unívocamente, a través de la covarianza del proceso deformado X , la clase de deformación involucrada. Bajo ciertas hipótesis, se construye un estimador consistente para la recuperación local de D a partir de una realización del proceso deformado.

Se construye un modelo estocástico unidimensional asociado a la imagen de una superficie texturizada bajo proyección perspectiva, la cual es una versión deformada de la textura sobre la superficie $3D$. Así, *la forma a partir de la textura* se convierte en un problema de estimación estadística. El gradiente de deformación aparece como el coeficiente de velocidad de cierta ecuación de transporte asociada al comportamiento local de la covarianza del modelo estocástico de la imagen.

Se realiza una simulación en una dimensión de la consistencia del estimador de *la forma a partir de la textura*, mediante un algoritmo que requiere $\mathcal{O}(N \log N)$ operaciones, donde N es la longitud de la realización del proceso deformado.

Palabras claves: Forma a partir de la textura, gradiente de deformación, wavelet.

Índice general

Resumen	i
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Introducción	2
1. Estimación de la deformación de procesos estocásticos	3
1.1. Introducción	3
1.2. El problema inverso	4
1.2.1. Las clases de soluciones	4
1.2.2. El grupo de estacionariedad invariante	18
1.3. Conservación y Transporte	26
1.3.1. Transporte en grupo	26
1.3.2. Transporte de escala 1-dimensión	33
1.4. Estimación de la deformación	48
1.4.1. El gradiente de deformación en 1-dimensión	49
2. Recuperación de la distorsión de la superficie de la escena	61
2.1. Introducción	61
2.2. Formación de la imagen	62
2.2.1. Proyección perspectiva	62
2.2.2. Brillo de la imagen	63
2.2.3. Reflectancia superficial	64
2.3. Imágenes de superficies texturizadas	65
2.3.1. Modelo estocástico en una dimensión	66
2.3.2. La importancia del gradiente de deformación	71
2.4. Experimentación numérica 1D	74
2.4.1. Coeficientes wavelet y escalograma	75
2.4.2. Wavelet discreta	77
2.4.3. Algoritmo para la estimación de la deformación estocástica en una dimensión	78
2.4.4. Simulación 1D	78
2.5. Conclusiones y recomendaciones	82

A. Wavelet	84
B. Demostración ecuación 1.81	85
C. Función exponencial compleja	89
D. Demostración del Lema 1.4.1.2	93
E. Demostración ecuación 1.23	103
F. Simulación de la estimación de la deformación estocástica en una dimensión	105
G. Prueba del Lema 1.4.1.3	117
Bibliografía	117

Dedicatoria

Dedico esta tesis a mi familia, a mi esposa Ivanova, quien fue parte fundamental de este "sueño alcanzado".

Agradecimientos

Mis agradecimientos más sincero a Mildred Luna por su apoyo excepcional. Asimismo para mis suegros *Licha* y *Moncho*.

Igor (hermano matemático) quien con sus *tips* o literatura recomendada, en más de una ocasión me dio luces para superar los obstáculos. Mi gran amigo Julio Cedeño, por ayudarme en las copias de algunos libros.

Para todo y cada uno de los Profesores que formaron parte en mi proceso de nivelación en la Escuela de Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela. En particular, mi Profesora guía, Dra. Mairene Colina, siempre con sus acertados consejos.

Finalmente, al Dr. José Rafael León, por creer en mi y por su excepcional apoyo y orientaciones. Fue un privilegio y un honor contar con su asistencia, toda una autoridad del mundo de la matemática.

Introducción

En muchas aplicaciones de visión por computadora el objetivo consiste en conseguir la forma de los objetos, esto es, las superficies y su orientación $3D$. Con tal propósito, existe una familia de técnicas denominadas *formas a partir de X*, donde X representa un cierto número de opciones. Marr ([20], [21]) trató de determinar los criterios por los que el sistema de visión humano obtiene la forma de los objetos. En el espíritu de la teoría de Marr esas opciones son aquellas que los humanos utilizamos para obtener la profundidad de los objetos a partir de las imágenes de la retina. Con estas consideraciones, son varios los métodos para obtener una representación de la imagen en $3D$, a saber: formas a partir de las sombras, formas a partir del movimiento, formas a partir de los contornos, formas a partir del enfoque, formas a partir de la visión estereoscópica y *formas a partir de la textura*.

En este trabajo se aborda el problema de la recuperación de las coordenadas de la superficie $3D$ a partir de la deformación de su textura en la imagen, esto es, la *forma a partir de la textura*. En este sentido, una respuesta cualitativa a este problema es la evidencia psico-física de que los humanos tienen la capacidad de extraer la profundidad a partir de la textura. Para apreciar esto sólo es necesario considerar un objeto con un patrón de textura visto en $3D$

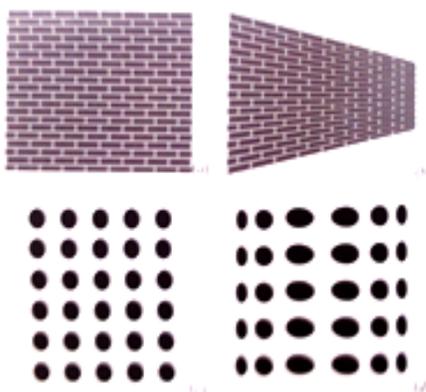


Figura 1:

Dos efectos son aparentes; por un lado, el ángulo bajo el cual se observa la superficie producida por la distorsión del texel (unidad mínima de una textura aplicada a una superficie.) original y por otro, la dimensión relativa de los texels varía de acuerdo a la distancia del observador. Las imágenes sintéticas de la figura anterior ilustran las afirmaciones anteriores.

La relación entre las variaciones en las propiedades de la textura y la forma de la superficie fue abordado por primera vez por Gibsson [13], quién partió de la idea que la percepción de la forma proviene tanto de la observación de la uniformidad como del *gradiente de la textura*. Desde entonces han surgido numerosos estudios referente al problema de recrear la superficie $3D$ a partir de la distorsión de la textura en la imagen, a saber: [4], [12], [16] y [29]. Más recientemente, [14], [26], [27] y [30].

La recuperación de la forma a partir de la textura es intuitivamente simple: la imagen de una superficie texturizada bajo proyección perspectiva es una versión deformada de la textura sobre la superficie $3D$, esa distorsión está relacionada con la profundidad, orientación y curvatura de la superficie ([12] y [15]).

En general, las investigaciones relacionadas con el problema de la forma a partir de la textura siguen dos líneas principales: (1) La medición y uso del gradiente de textura o, (2) la inferencia estadística basada en un modelo probabilístico de la textura, ambos enfoques sujetos a la transformación perspectiva u ortográfica. No obstante, cualquiera sea la orientación del estudio, el problema de la forma a partir de la textura usualmente es tratado en dos etapas [6]. En la primera etapa se mide la distorsión de la textura en la imagen, y en la segunda etapa se recuperan las coordenadas de la superficie $3D$ contenida en esa distorsión.

Esta investigación aborda el problema de la forma a partir de la textura desde una perspectiva estadística. En este sentido, los resultados de Clerc y Mallat ([6] y [7]) son fundamentales para el desarrollo de esta investigación, ellos reducen el problema de la restauración de la forma a un problema de estimación estadística, partiendo de la modelización de la distorsión de la textura en la imagen como la deformación de un proceso estocástico. Demuestran que tal deformación contiene la información suficiente para la recuperación de las coordenadas de la superficie $3D$, lo cual es congruente con los resultados geométricos de Gradin [12].

En el Capítulo 1, se dan las bases teóricas para cierta clase de deformación de un proceso estocástico estacionario, se caracterizan tales deformaciones a través de la covarianza del proceso deformado, imponiendo para ello condiciones sobre el proceso estacionario. Por medio de cierta ecuación de transporte, el gradiente de deformación aparece como el coeficiente de velocidad. Se construye un estimador consistente de la deformación del proceso estacionario.

Como aplicación de los resultados teóricos del capítulo anterior, el Capítulo 2, basado en el proceso de formación de las imágenes, que involucra: proyección perspectiva, la relación entre el brillo de la escena y el brillo de la imagen, y finalmente la reflectancia superficial, se construye un modelo estocástico en una dimensión para imágenes de superficies texturizadas. Se realiza una experimentación numérica en una dimensión que muestra la recuperación estadística de la forma a partir de la textura, mediante un estimador consistente.

En este trabajo nos basamos en los artículos de Clerc & Mallat [6] y [7] con el objetivo de exponerlos detalladamente y simplificar en lo posible su exposición. Nuestro estudio puede calificarse de una lectura en profundidad y que culmina con la puesta en marcha de sus algoritmos para la detección de la deformación de la textura.

Capítulo 1

Estimación de la deformación de procesos estocásticos

1.1. Introducción

Cuando un proceso no estacionario X resulta de la deformación D de un proceso estacionario Y , estimar la deformación puede proporcionar valiosa información acerca del proceso físico subyacente. Por ejemplo, el efecto Doppler produce un aumento o disminución de la frecuencia de una onda sonora o electromagnética cuando la fuente que la produce y el observador que la capta se alejan la una de la otra o se aproximan la una a la otra. En este caso, la deformación $X(x) = Y(\theta(x))$, es tal que $\theta'(x)$ depende de la velocidad.

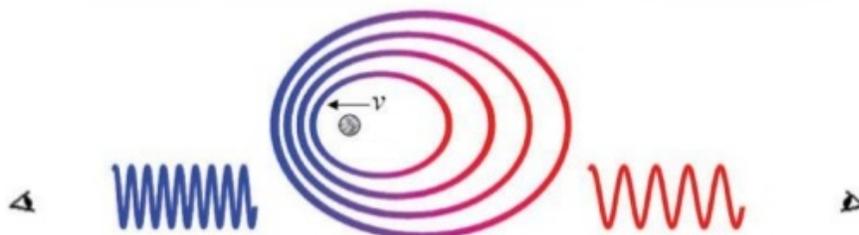


Figura 1.1: Efecto Doppler

Análogamente, la proyección en perspectiva de la textura estacionaria de una superficie sobre el plano imagen, distorsiona esa textura; aquí el Jacobiano de $\theta(x)$ caracteriza localmente la orientación y la curvatura de un pedazo de superficie tridimensional, esto es de interés en este trabajo.

La línea zigzag en la la Figura 1.2 es un proeso estocástico estacionario que respresenta la textura estacionaria de la superficie de la imagen izquierda. Cuando esa superficie es proyectada en perspectiva sobre el plano de la imagen, la textura de la imagen está distorsionada y da lugar a un proceso deformado. En este sentido, este capítulo muestra que la autocovarianza de tales procesos deformados satisfacen una ecuación de transporte a escala pequeña, cuya velocidad está relacionado con el *gradiente de deformación*. Se deduce un estimador

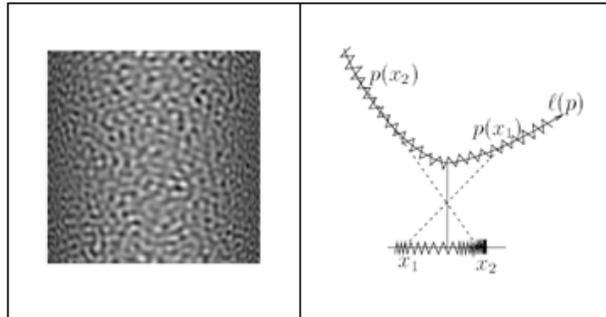


Figura 1.2: Deformación de una textura estacionaria

consistente del gradiente de deformación a partir de una realización del proceso deformado. Los resultados expuesto en este capítulo son esenciales para implementar en el Capitulo 2 la manera de recuperar la *forma a partir de la textura*.

1.2. El problema inverso

Se desea estimar el operador de deformación D , el cual pertenece a cierto grupo \mathcal{D} , a partir de una realización de $X = DY$, donde Y es un proceso estacionario en sentido amplio. Dado que estamos limitados a una sola realización, nos concentramos en los momentos de segundo orden. Por esta razón, en lo que sigue siempre estacionariedad se entenderá en el sentido amplio, esto es:

$$\mathbb{E}\{Y(x)\} = \mathbb{E}\{Y(0)\}$$

y

$$\mathbb{E}\{Y(x)Y^*(y)\} = c_Y(x - y) \quad \text{con } c_Y(0) < +\infty.$$

donde z^* denota el conjugado complejo de $z \in \mathbb{C}$. Supondremos que $Y(x)$ es estocásticamente continua.

Los operadores de deformación D que consideraremos están definidos sobre la distribución del proceso Y . No obstante, por simplicidad, restringimos su dominio a distribuciones d -dimensionales de Y , dado que la distribución de un proceso está caracterizada por el conjunto de todas las distribuciones finito dimensionales.

Un operador D actúa sobre el proceso Y realización por realización. Así consideraremos procesos Y cuyas realizaciones son funciones a valores reales con variable en \mathbb{R}^d .

1.2.1. Las clases de soluciones

Puesto que solo conocemos que el proceso Y es estacionario, el conjunto de soluciones al problema inverso es el conjunto de todos los operadores $\tilde{D} \in \mathcal{D}$ tal que $\tilde{D}^{-1}X$ es estacionario. Sea \mathcal{G} el conjunto de todos los operadores $G \in \mathcal{D}$ tal que si Y es un proceso estacionario en

sentido amplio, entonces GY también lo es. Como veremos más adelante, \mathcal{G} es un subgrupo de \mathcal{D} , el cual denominaremos *grupo de estacionariedad invariante*. Si D es una solución del problema inverso, cualquier operador $\tilde{D} = DG$ con $G \in \mathcal{G}$ es también solución. En efecto, puesto que D es solución al problema inverso, $D^{-1}X$ es un proceso estacionario. Luego,

$$\tilde{D}^{-1}X = G^{-1}(D^{-1}X)$$

también es un proceso estacionario. Por lo tanto, el conjunto de soluciones del problema inverso contiene las clases laterales izquierdas de \mathcal{G} en \mathcal{D} :

$$\mathcal{D}/\mathcal{G} = \{\mathcal{D}\mathcal{G} : \mathcal{D} \in \mathcal{D}\} \subseteq \{\mathcal{D}\}. \quad (1.1)$$

El conjunto \mathcal{D}/\mathcal{G} tiene estructura de grupo bajo la multiplicación de subconjuntos de \mathcal{D} , definido como sigue: dados dos subconjuntos S y T de \mathcal{D} , su producto:

$$ST = \{st \mid s \in T \text{ y } t \in T\}.$$

En efecto, puesto que \mathcal{G} es un subgrupo del grupo abeliano \mathcal{D} , entonces \mathcal{G} es un subgrupo normal de \mathcal{D} . Por consiguiente, se sigue de un teorema de álgebra, \mathcal{D}/\mathcal{G} con la operación de multiplicación de subconjuntos de \mathcal{D} es un grupo (grupo cociente). Además, se tiene:

$$1. (D_1\mathcal{G})(D_2\mathcal{G}) = D_1D_2\mathcal{G}; \quad \forall D_1, D_2 \in \mathcal{D}.$$

$$2. \mathcal{G} \text{ es el elemento neutro de } \mathcal{D}/\mathcal{G}.$$

$$3. (D\mathcal{G})^{-1} = D^{-1}\mathcal{G}; \quad \forall D \in \mathcal{D}.$$

En efecto, veamos que $(D_1\mathcal{G})(D_2\mathcal{G}) = D_1D_2\mathcal{G}$, para todo $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$.

$$\begin{aligned} (D_1\mathcal{G})(D_2\mathcal{G}) &= D_1(\mathcal{G}D_2)\mathcal{G}; \text{ por asociatividad del grupo } \mathcal{D}. \\ &= D_1(D_2\mathcal{G})\mathcal{G}; \mathcal{G} \text{ es normal.} \\ &= D_1D_2\mathcal{G}\mathcal{G}. \\ &= D_1D_2\mathcal{G}; \text{ puesto que } \mathcal{G} \text{ es un subgrupo.} \end{aligned}$$

lo que prueba el inciso (1). Probemos (2):

Sea $D\mathcal{G} \in \mathcal{D}/\mathcal{G}$ arbitrario. Luego

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(D\mathcal{G}) &= (\mathcal{G}D)\mathcal{G} \\ &= (D\mathcal{G})\mathcal{G} \\ &= D\mathcal{G}\mathcal{G} \\ &= D\mathcal{G}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$(D\mathcal{G})\mathcal{G} = \mathcal{D}\mathcal{G}\mathcal{G} = \mathcal{D}\mathcal{G}.$$

Finalmente, la tercera afirmación:

$$\begin{aligned} (D\mathcal{G})(D^{-1}\mathcal{G}) &= DD^{-1}\mathcal{G} \quad (\text{por inciso (1)}) \\ &= \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$(D^{-1}\mathcal{G})(\mathcal{D}\mathcal{G}) = \mathcal{D}^{-1}\mathcal{D}\mathcal{G} = \mathcal{G}.$$

De la relación (1) es claro que $\pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}/\mathcal{G}$ es un homomorfismo sobreyectivo, por consiguiente, $\text{card}(\mathcal{D}) \geq \text{card}(\mathcal{D}/\mathcal{G})$.

El conjunto cociente \mathcal{D}/\mathcal{G} contiene la clase de equivalencia de D . En este sentido, dados dos operadores $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$, decimos que ellos son equivalentes si y solo si existe $G \in \mathcal{G}$ tal que $D_2 = D_1G$:

$$D_1 \sim D_2 \Leftrightarrow \exists G \in \mathcal{G} : D_2 = D_1G. \quad (1.2)$$

La ecuación anterior define una relación de equivalencia. En efecto:

Puesto que \mathcal{G} es un grupo este contiene un elemento neutro que relaciona D consigo mismo, según la relación (1.2) (*Reflexión*).

Si $D_1 \sim D_2$ entonces $D_2 \sim D_1$ puesto que $G^{-1} \in \mathcal{G}$ (*Simetría*).

Si $D_1 = D_2G_1$ y $D_2 = D_3G_2$, donde $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$, entonces $D_1 \sim D_3$ puesto que $G_2G_1 \in \mathcal{G}$ (*Transitividad*).

Para que el conjunto de soluciones al problema inverso sea exactamente igual a la clase de equivalencia de D en \mathcal{D}/\mathcal{G} , se requiere imponer una condición al proceso estacionario Y , así para cualquier deformación $\tilde{D} \in \mathcal{D}$ tal que $\tilde{D}Y$ es estacionario en sentido amplio, necesariamente $\tilde{D} \in \mathcal{G}$. Esto no ocurre con todos los procesos estacionarios Y , pero daremos condiciones suficientes sobre la covarianza de Y para garantizar esta forma de unicidad. A tal fin introducimos algunas definiciones y proposiciones.

Definición 1.2.1.1 (Grupo de operadores de deformación 1-dimensión) *El grupo de operadores de deformación 1-dimensión se define*

$$\mathcal{D} = \left\{ D : Df(x) = f(\theta(x)), \text{ donde } \theta(x) \in \mathbb{C}^3, \text{ y } \theta'(x) > 0 \right\}.$$

Es claro que \mathcal{D} es equivalente al conocido grupo de funciones biyectivas, con lo cual \mathcal{D} es un grupo abeliano.

Proposición 1.2.1.1 (Subgrupo de estacionariedad invariante 1-dimensión) \mathcal{G} es un subgrupo del grupo de operadores de deformación 1-dimensional definido:

$$\mathcal{G} = \{G_{u,s} : G_{u,s}f(x) = f(u + sx) \text{ con } (u, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}\}.$$

\mathcal{G} se denomina grupo de estacionariedad invariante.

Demostración

Es evidente que \mathcal{G} es un subconjunto del grupo de deformación 1-dimensional. Falta ver que \mathcal{G} es un grupo.

Como consecuencia inmediata de la definición de \mathcal{G} :

1. $G_{(0,1)}f(x) = f(x).$

2. $G_{(u,s)}G_{(0,1)} = G_{(0,1)}G_{(u,s)}.$

3. Sean $(u_1, s_1), (u_2, s_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$

$$G_{(u_1,s_1)}G_{(u_2,s_2)} = G_{(u_1,s_1)}f(u_2 + s_2x) = f(u_1 + s_1u_2 + s_1s_2x) = G_{(u_1+s_1u_2,s_1s_2)}f(x), \text{ de donde}$$

$$G_{(u_1,s_1)}G_{(u_2,s_2)} = G_{(u_1+s_1u_2,s_1s_2)}.$$

Basta intercambiar los subíndices para ver que las traslaciones no conmutan.

4. Sean $(u_i, s_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, i = 1, 2, 3.$ Aplicando el resultado del inciso (3) se tiene:

$$(G_{(u_1,s_1)}G_{(u_2,s_2)})G_{(u_3,s_3)} = G_{(u_1+s_1u_2+s_1s_2u_3,s_1s_2s_3)} = G_{(u_1,s_1)}(G_{(u_1,s_1)}G_{(u_2,s_2)}).$$

5. Del inciso (3) se sigue fácilmente que para cada $(u, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ existe $\tilde{u} = -\tilde{s}u$ y $\tilde{s} = 1/s$ tal que

$$G_{(u,s)}G_{(\tilde{u},\tilde{s})} = G_{(\tilde{u},\tilde{s})}G_{(u,s)} = G_{(0,1)}.$$

Los resultados (1) hasta (5) muestran que el conjunto $\{G_{u,s}\}$ es un grupo. Puesto que $g \subset \mathcal{D}$ entonces \mathcal{G} es subgrupo de \mathcal{D} .

□

Note que \mathcal{G} es un subgrupo del grupo abeliano \mathcal{D} , por consiguiente, \mathcal{G} es normal en \mathcal{D} .

Definición 1.2.1.2 (Homomorfismo) Sean $\mathcal{A} = (A, \circ_1, \dots, \circ_k)$ y $\mathcal{B} = (B, *_1, \dots, *_k)$ dos sistemas algebraicos del mismo tipo, donde A y B son conjuntos no vacíos y $\circ_1, \dots, \circ_k, *_1, \dots, *_k$ son las operaciones algebraicas definidas en dichos conjuntos.

Una función $\phi : A \rightarrow B$ es un homomorfismo si verifica:

$$\phi(\circ_i(a_1, \dots, a_{n_i})) = *_i(\phi(a_1), \dots, \phi(a_{n_i}))$$

para cada $i = 1, \dots, k$ y $a_1, \dots, a_{n_i} \in A$.

Un \mathbb{K} -espacio (donde \mathbb{K} es un cuerpo) es un conjunto que tiene definida una suma entre elementos del grupo y producto de escalares por elementos del conjunto; la suma tiene un elemento neutro y cada elemento tiene opuesto. Por lo tanto, utilizando la definición anterior, para una función $f : V \rightarrow W$ entre dos espacios sea un homomorfismo debe verificar:

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$ para todo $v_1, v_2 \in V$.
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v)$, para todo $v \in V$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.
3. $f(0_V) = 0_W$.
4. $f(-v) = -f(v)$ para todo $v \in V$.

Las transformaciones lineales son exactamente las funciones que cumplen esto (las condiciones 3 y 4 se deducen de 1 y 2). Por lo tanto, los homomorfismo de espacios vectoriales son las transformaciones lineales.

Un homomorfismo biyectivo cuya inversa es también un homomorfismo se llama isomorfismo. Dos objetos se dicen isomorfos si existen isomorfismo uno en el otro. En general, pensamos a dos objetos isomorfos como indistinguibles por lo que a la estructura en cuestión se refiere.

Un homomorfismo de un conjunto a si mismo se llama endomorfismo. Si es además un isomorfismo se llama automorfismo.

Definición 1.2.1.3 (Afinidad de \mathbb{R}^d) Por afinidad de \mathbb{R}^d se entenderá a la composición de un automorfismo f de \mathbb{R}^d con una traslación.

Definición 1.2.1.4 (Espacio afín de dimensión d) Por espacio afín de dimensión d se entenderá al espacio vectorial \mathbb{R}^d , a cuyos elementos se les llamará puntos.

Definición 1.2.1.5 (Grupo afín) El conjunto de todas las afinidades de un espacio afín \mathbb{R}^d constituye un grupo denominado el grupo afín.

Proposición 1.2.1.2 \mathcal{G} es un grupo afín.

Demostración

Para cada $(u, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, $x \xrightarrow{\Gamma} u + sx$ es una afinidad, así $\{\Gamma\}$ es el conjunto de todas las afinidades de un espacio afín \mathbb{R} . Por consiguiente, $\{\Gamma\}$ dotado de la composición constituye un grupo afín, el cual es isomorfo con \mathcal{G} . Es claro que cada operador $G_{(u,s)}$ está asociado a una única afinidad Γ y viceversa. Por lo tanto, el grupo de estacionariedad invariante \mathcal{G} es un grupo afín. □

La siguiente Proposición muestra que dos operadores del grupo de deformación 1-dimensional están en la misma clase de equivalencia en \mathcal{D}/g si y solo si existe (u, s) tal que $\theta_1(x) = u + s\theta_2(x)$, lo cual es equivalente a cualesquiera de las siguiente dos expresiones:

$$\frac{\theta_1''(x)}{\theta_1'(x)} = \frac{\theta_2''(x)}{\theta_2'(x)} \quad \text{o} \quad \left(\log \theta_1'(x)\right)' = \left(\log \theta_2'(x)\right)' . \quad (1.3)$$

Además, se da una condición suficiente para la covarianza de Y para caracterizar la clase de equivalencia de D de forma única. Por ejemplo, dado D invariante estacionario necesariamente $D \in g$.

Proposición 1.2.1.3 Sea $X = DY$, donde Y es estacionario y D pertenece al grupo de deformación 1-dimensional. Si existe un $\epsilon > 0$ tal que $c_Y \in \mathcal{C}^1$ sobre $(0, \epsilon]$ y

$$\forall x \in (0, \epsilon], \quad c_Y'(x) < 0$$

entonces la clase de equivalencia de D en \mathcal{D}/g está caracterizada de manera única por la covarianza de X .

Demostración

Sea Y un proceso estacionario que satisface la hipótesis de la Proposición. Sea \tilde{Y} otro proceso estacionario tal que la covarianza de $DY(x) = Y(\theta(x))$ y $\tilde{D}\tilde{Y}(x) = \tilde{Y}(\tilde{\theta}(x))$ son iguales. Sea $u = \theta \circ \tilde{\theta}^{-1}$ el cual es de clase \mathcal{C}^3 puesto que θ y $\tilde{\theta}$ lo son.

Veamos que demostrar la Proposición es equivalente a probar que u es lineal, esto es, $u'' = 0$.

$$c_{\tilde{Y}}(\tilde{\theta}(x) - \tilde{\theta}(y)) = c_Y(\theta(x) - \theta(y)) \xrightarrow[\text{Por definición de } u]{\tilde{\theta}^{-1}} c_{\tilde{Y}}(x - y) = c_Y(u(x) - u(y)). \quad (1.4)$$

Derivando el consecuente de (1.4) con respecto a x obtenemos:

$$c'_{\tilde{Y}}(x - y) = c'_Y(u(x) - u(y))u'(x). \quad (1.5)$$

Derivando nuevamente (1.4) con respecto a y se tiene:

$$-c'_{\tilde{Y}}(x - y) = -c'_Y(u(x) - u(y))u'(y). \quad (1.6)$$

Sumando las ecuaciones (1.5) y (1.6) se tiene de inmediato:

$$c'_Y(u(x) - u(y))(u'(x) - u'(y)) = 0.$$

Fijemos $x \in \mathbb{R}$ y elijamos $y \neq x$, pero suficientemente cercano a x tal que $|u(x) - u(y)| < \epsilon$. Esto es posible puesto que u es absolutamente continua.

Puesto que $c'_Y(u(x) - u(y)) < 0$, necesariamente $u'(x) - u'(y) = 0$. Por lo tanto, $u''(y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$, si y solo si existe v y λ tal que:

$$u(y) = v + \lambda y.$$

Note que $u \in \mathcal{D}$, con lo cual $u'(y) > 0$, esto impone la condición $\lambda > 0$.

Reemplazando $y = \tilde{\theta}(x)$ en la ecuación anterior y por definición de u se obtiene:

$$\theta(x) = v + \lambda \tilde{\theta}(x) \quad (1.7)$$

lo que implica que los procesos deformados:

- $DY(x) = Y(\theta(x)) = Y(v + \lambda \tilde{\theta}(x))$,
- $\tilde{D}\tilde{Y}(x) = \tilde{Y}(\tilde{\theta}(x))$.

tienen la misma covarianza, es decir, existe $G \in g$ tal que

$$D = G_{(v,\lambda)}\tilde{D}.$$

Puesto que \mathcal{D} es un grupo abeliano, podemos escribir la ecuación anterior como sigue:

$$D = \tilde{D}G_{(v,\lambda)}.$$

Así, D y \tilde{D} son equivalentes si existe $G \in g$ tal que

$$D = \tilde{D}G \quad (1.8)$$

es decir, las deformaciones sobre una familia de procesos estacionarios que guardan una covarianza común, pertenecen a la misma clase, esto es, la covarianza del proceso deformado caracteriza unívocamente la clase de equivalencia de D en el grupo cociente \mathcal{D}/\mathcal{G} .

□

De la ecuación (1.8) se sigue, si D en el grupo cociente es un operador estacionario, necesariamente $D \in \mathcal{G}$ por la cerradura del grupo \mathcal{G} .

De la ecuación (1.7) se tiene que existe (v, λ) tal que $\theta'(x) = \lambda \tilde{\theta}'(x)$ y $\theta''(x) = \lambda \tilde{\theta}''(x)$. Por lo tanto,

$$\frac{\theta''(x)}{\theta'(x)} = \frac{\tilde{\theta}''(x)}{\tilde{\theta}'(x)} \quad (1.9)$$

lo cual es equivalente a la expresión

$$\left(\log \theta' \right)'(x) = \left(\log \tilde{\theta}' \right)'(x). \quad (1.10)$$

Así, (1.9) o (1.10) caracterizan la clase de equivalencia del operador D en \mathcal{D}/g .

En efecto, si $X(x) = Y(\theta(x))$, donde Y es estacionario, y si $\tilde{\theta}(x) = \alpha\theta(x) + \beta$, entonces podemos encontrar otro proceso estacionario $\tilde{Y}(x) \stackrel{d}{=} Y(\alpha x + \beta)$, tal que $X(x) = \tilde{Y}(\tilde{\theta}(x))$. Las funciones $\theta(x)$ y $\tilde{\theta}(x)$, que satisfacen la ecuación (1.9) o (1.10), no pueden distinguirse con el único conocimiento de que X se obtiene a través de la deformación de un proceso estacionario.

Para los propósitos de esta investigación vale destacar que la Proposición anterior garantiza que la deformación local del proceso Y está unívocamente relacionada con el comportamiento local de la covarianza del proceso deformado X . Además, la condición exigida para la covarianza de Y involucra un amplio rango de procesos estacionarios, incluyendo Proceso pulso Poisson y los procesos Ornstein-Uhlenbeck [32]. No obstante, no involucra el ruido blanco puesto que $c_Y = 0$ para todo $x \neq 0$.

Ahora bien, el problema de deformación en dos dimensiones tiene una aplicación importante en el análisis de imagen, particularmente en la recuperación de la forma analizando la distorsión de la textura (forma a partir de la textura). En esta sección estudiamos el problema de la deformación d -dimensional, dado por un campo vectorial invertible de \mathbb{R}^d a \mathbb{R}^d :

$$\theta(x_1, \dots, x_d) = (\theta_1(x_1, \dots, x_d), \dots, \theta_d(x_1, \dots, x_d)).$$

El Jacobiano de θ en $x \in \mathbb{R}^d$ se escribe como:

$$J_\theta(x) = \left(\frac{\partial \theta_i(x)}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d}.$$

Si el determinante del Jacobiano $\det J_\theta$ es localmente invertible, este corresponde a un cambio de métrica y $\theta(x)$ es invertible.

A continuación definimos el grupo de operadores de deformación en \mathbb{R}^d .

Definición 1.2.1.6 (Grupo de operadores de deformación d -dimensional)

$$\mathcal{D} = \{ D : Df(x) = f(\theta(x)), \text{ donde } \theta(x) \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^d) \text{ y } \det J_\theta(x) > 0 \}.$$

Es evidente que esta definición es equivalente al grupo de funciones biyectivas. Por lo tanto, \mathcal{D} es un grupo abeliano.

Sea $GL^+(\mathbb{R}^d)$ el grupo de operadores lineales en \mathbb{R}^d con determinante estrictamente positivo

Proposición 1.2.1.4 (Operadores de estacionariedad invariante d -dimensional) \mathcal{G} es un subgrupo del grupo de operadores de deformación d -dimensional definido

$$g = \{G_{(u,S)} : G_{(u,S)}f(x) = f(u + Sx), \text{ con } (u, S) \in \mathbb{R}^d \times GL^+(\mathbb{R}^d)\}.$$

Este grupo no es abeliano puesto que en general el producto de matrices no es conmutativo, esto es, $\forall A, B \in GL^+(\mathbb{R}^d) : AB \neq BA$. Observe que si f es un proceso estacionario autosimilar entonces, la trayectoria de f y su transformada $G_{(u,S)}f$ son equivalentes debido a un reescalamiento adecuado del tiempo y la amplitud. Esto se estudiará con detalles en el Teorema 1.2.2.1.

Demostración

La prueba es análoga al caso 1-dimensión, Proposición 1.2.1.1.

□

Proposición 1.2.1.5 \mathcal{G} definido como en la Proposición 1.2.1.4 es un grupo afín.

Demostración

La prueba es análoga a la Proposición 1.2.1.2.

□

Similar al caso 1-dimensión, dos operadores D y \tilde{D} tales que $Df(x) = f(\theta(x))$ y $\tilde{D}f(x) = f(\tilde{\theta}(x))$ están en la misma clase de equivalencia en \mathcal{D}/g si y solo si

$$\exists (u, S) \in \mathbb{R}^d \times GL^+(\mathbb{R}^d), \quad \theta(x) = u + S\tilde{\theta}(x). \quad (1.11)$$

La derivada parcial de la matriz Jacobiana en una dirección particular fija x_k es la matriz

$$\frac{\partial J_\theta(x)}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial^2 \theta_i(x)}{\partial x_k \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d}.$$

En este trabajamos utilizaremos la notación $\vec{\nabla} J_\theta(x)$ para denotar el conjunto de matrices $\left\{ \frac{\partial J_\theta(x)}{\partial x_k} \right\}_{k=1,2,\dots,d}$. La condición (1.11) es equivalente a la siguientes igualdades de matrices, la cual generaliza (1.3):

$$\forall k \in \{1, \dots, d\}, \quad J_{\theta}^{-1}(x) \frac{\partial J_{\theta}(x)}{\partial x_k} = J_{\tilde{\theta}}^{-1}(x) \frac{\partial J_{\tilde{\theta}}(x)}{\partial x_k}. \quad (1.12)$$

La prueba de esta equivalencia se puede ver en la demostración de la Proposición 1.2.1.6.

Existen casos para el cual el problema inverso no puede ser resuelto. Por ejemplo, considere un proceso estacionario $Y(x) = Y_1(x_1)$ que solo depende de la primera variable y una deformación que deja x_1 invariante: $\theta(x_1, \dots, x_d) = (x_1, \theta_1(x_2, \dots, x_d))$. En este caso,

$$X(x) = Y(x_1, \theta_1(x_2, \dots, x_d)) = Y_1(x_1) = Y(x).$$

Por lo tanto, θ no puede ser recuperado. La siguiente Proposición da condiciones suficientes sobre $c_Y(x)$ para garantizar que el problema inverso tiene una única solución en \mathcal{D}/g .

Proposición 1.2.1.6 *Sea $X = DY$, donde Y es un proceso estacionario y $D \in \mathcal{D}$, donde \mathcal{D} es el grupo de deformación d -dimensional. Si la covarianza de Y satisface*

$$c_Y(0) - c_Y(x) = |x|^h \eta(x), \quad \text{con } h > 0 \text{ y } \eta(0) > 0 \quad (1.13)$$

donde $\eta(x) \in \mathcal{C}^2$ en un entorno de 0, entonces la clase de equivalencia de D en \mathcal{D}/g está caracterizada únicamente por la autocovarianza de X .

Demostración

Debemos probar que bajo las hipótesis dadas tiene que ocurrir (1.12) lo cual debe ser equivalente a (1.11).

Sea Y un proceso estacionario tal que c_Y satisface (1.13). Sea \tilde{Y} otro proceso estacionario y supongamos que los kernels de las autocovarianzas de $Y(\theta(x))$ y $\tilde{Y}(\tilde{\theta}(x))$ son iguales. Sea $u = \theta \circ \tilde{\theta}^{-1}$. Por definición de u :

$$c_Y(u(x) - u(y)) = c_{\tilde{Y}}(x - y). \quad (1.14)$$

Diferenciando esta expresión con respecto a x obtenemos:

$$\nabla c'_{\tilde{Y}}(x - y) = \vec{\nabla} c_Y(u(x) - u(y)) J_u(x). \quad (1.15)$$

Por otra parte, diferenciando (1.14) con respecto a y se tiene

$$-\nabla c'_{\tilde{Y}}(x - y) = -\vec{\nabla} c_Y(u(x) - u(y)) J_u(y) \quad (1.16)$$

sumando las ecuaciones (1.15) y (1.16) obtenemos:

$$\vec{\nabla} c_Y(u(x) - u(y)) J_u(y) = \vec{\nabla} c_Y(u(x) - u(y)) J_u(x). \quad (1.17)$$

Ahora fijemos $x \in \mathbb{R}^d$ y demostremos que $\vec{\nabla} J_u(x) = 0$.

Sea $\epsilon > 0$ tal que $\eta(z) \in \mathbb{C}^2$ para $|z| < \epsilon$. Elijamos $y \in \mathbb{R}^d$ tal que $0 < |u(x) - u(y)| < \epsilon$ y hagamos $z = u(x) - u(y)$. Esto es posible puesto que las derivadas parciales del campo vectorial u existen y son continuas en un entorno de 0 entonces, u es diferenciable y por consiguiente continua. Además, u es localmente biunívoca ($\det J_u \neq 0 \Rightarrow J_{u^{-1}} = J_u^{-1}$, Teorema de la función inversa).

Ahora se sigue de la condición (1.13):

$$\vec{\nabla} c_Y(z) = - \left(h|z|^{h-1} \frac{z}{|z|} \eta(z) + |z|^h \vec{\nabla} \eta(z) \right)$$

de aquí que

$$\vec{\nabla} c_Y(z) = -|z|^{h-2} \left(h\eta(z)z + |z|^2 \vec{\nabla} \eta(z) \right).$$

Reemplazamos esta expresión en (1.17) además sustituyendo en el jacobiano del lado derecho $x = u^{-1}(z + u(y))$ (esto es consecuencia de la definición de z y del teorema de la función inversa):

$$-|z|^{h-2} \left(h\eta(z)z + |z|^2 \vec{\nabla} \eta(z) \right) J_u(y) = -|z|^{h-2} \left(h\eta(z)z + |z|^2 \vec{\nabla} \eta(z) \right) J_u(u^{-1}(z + u(y))).$$

Dividimos esta ecuación por $-h|z|^{h-2}\eta(z)$:

$$\frac{|z|^{h-2}}{h|z|^{h-2}\eta(z)} \left(h\eta(z)z + |z|^2 \vec{\nabla} \eta(z) \right) J_u(y) = \frac{|z|^{h-2}}{h|z|^{h-2}\eta(z)} \left(h\eta(z)z + |z|^2 \vec{\nabla} \eta(z) \right) J_u(u^{-1}(z + u(y))).$$

Simplificando la ecuación anterior obtenemos:

$$\left(z + h^{-1}|z|^2 \vec{\nabla} \log \eta(z) \right) J_u(y) = \left(z + h^{-1}|z|^2 \vec{\nabla} \log \eta(z) \right) J_u(u^{-1}(z + u(y))). \quad (1.18)$$

Introduzcamos una función \tilde{u} tal que

$$\tilde{u}(z) = J_u(y)u^{-1}(z + u(y)) \quad (1.19)$$

de aquí que

$$J_{\tilde{u}}(z) = J_u(y)J_u^{-1}(u^{-1}(z + u(y))).$$

Por consiguiente, podemos reescribir (1.18) como sigue:

$$\left(z + h^{-1}|z|^2 \vec{\nabla} \log \eta(z) \right) J_{\tilde{u}}(z) = z + h^{-1}|z|^2 \vec{\nabla} \log \eta(z)$$

de aquí que

$$\begin{aligned}
zJ_{\tilde{u}}(z) &= z + h^{-1}|z|^2\vec{\nabla} \log \eta(z) - h^{-1}|z|^2\vec{\nabla} \log \eta(z)J_{\tilde{u}}(z) \\
&= z + h^{-1}|z|^2\vec{\nabla} \log \eta(z) (I_d - J_{\tilde{u}(z)}).
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Note que $zJ_{\tilde{u}}(\lambda z) = \frac{d}{d\lambda}\tilde{u}(\lambda z)$. Para $\lambda > 0$ se sigue de la última igualdad (1.20):

$$\lambda zJ_{\tilde{u}}(\lambda z) = \lambda z + h^{-1}|\lambda z|^2\vec{\nabla} \log \eta(\lambda z) (I_d - J_{\tilde{u}}(\lambda z)).$$

Dividiendo esta ecuación por λ se obtiene:

$$\frac{d}{d\lambda}\tilde{u}(\lambda z) = z + h^{-1}|z|^2\lambda\vec{\nabla} \log \eta(\lambda z) (I_d - J_{\tilde{u}}(\lambda z)).$$

Integrando la ecuación sobre el intervalo $0 \leq \lambda \leq 1$ nos da:

$$\tilde{u}(z) - \tilde{u}(0) = z + h^{-1}|z|^2 \int_0^1 \lambda\vec{\nabla} \log \eta(\lambda z) (I_d - J_{\tilde{u}}(\lambda z)) d\lambda.$$

Reemplazamos \tilde{u} con (1.19) y tomando en cuenta que $\tilde{u}(0) = J_u(y)y$. Obtenemos:

$$J_u(y)u^{-1}(z + u(y)) - J_u(y)y = z + h^{-1}|z|^2 \int_0^1 \lambda\vec{\nabla} \log \eta(\lambda z) (I_d - J_{\tilde{u}}(\lambda z)) d\lambda$$

despejamos el primer término del lado izquierdo de la ecuación anterior:

$$J_u(y)u^{-1}(z + u(y)) = z + J_u(y)y + h^{-1}|z|^2 \int_0^1 \lambda\vec{\nabla} \log \eta(\lambda z) (I_d - J_{\tilde{u}}(\lambda z)) d\lambda.$$

Luego premultiplicamos esta ecuación por $J_u^{-1}(y)$:

$$u^{-1}(z + u(y)) = J_u^{-1}(y)z + y + J_u^{-1}(y)h^{-1}|z|^2 \int_0^1 \lambda\vec{\nabla} \log \eta(\lambda z) (I_d - J_{\tilde{u}}(\lambda z)) d\lambda. \tag{1.21}$$

Denotemos $\vec{\nabla} \log \eta(z) = |z|\vec{a}(z)$. En el Apéndice E justificamos tal representación.

Ahora bien, diferenciando (1.21) con respecto a z obtenemos:

$$J_u^{-1}(u^{-1}(z + u(y))) = J_u^{-1}(y) + J_u^{-1}(y)\frac{\partial}{\partial z}h^{-1}|z|^2 \int_0^1 \lambda|z|\vec{a}(z) (I_d - J_{\tilde{u}}(\lambda z)) d\lambda$$

lo cual reescribimos convenientemente como sigue:

$$J_u^{-1}(u^{-1}(z + u(y))) = J_u^{-1}(y) (I_d + |z|^2 A(z)) \tag{1.22}$$

donde $A(z)$ es la matriz definida:

$$A(z) = |z|^{-2} \frac{\partial}{\partial z} \left(h^{-1}|z|^2 \int_0^1 \lambda \underbrace{|\lambda z|\vec{a}(\lambda z)}_{\vec{\nabla} \log \eta(\lambda z)} (I_d - J_{\tilde{u}}(\lambda z)) d\lambda \right). \tag{1.23}$$

En el Apéndice E se muestra que $A(z)$ está acotada en un entorno de 0.

Ahora sustituyendo z por $u(x) - u(y)$ en (1.22) se tiene:

$$J_u^{-1}(x) = J_u^{-1}(y) [I_d + |u(x) - u(y)|^2 A(u(x) - u(y))].$$

Reagrupando los términos obtenemos:

$$J_u^{-1}(y) - J_u^{-1}(x) = J_u^{-1}(y) |u(x) - u(y)|^2 A(u(x) - u(y)).$$

Sustituimos $y = x + \lambda e_k$, donde e_k es el vector de la base canónica cuya coordenada es uno en el lugar k y cero las otras. Además, dividimos por λ la ecuación anterior:

$$\frac{J_u^{-1}(x + \lambda e_k) - J_u^{-1}(x)}{\lambda} = -J_u^{-1}(x + \lambda e_k) \frac{|u(x) - u(x + \lambda e_k)|^2}{\lambda} A(u(x) - u(x + \lambda e_k)).$$

Por el teorema del valor medio, para algún $K \subset \mathbb{R}^d$ compacto y convexo existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|u(x) - u(x + \lambda e_k)| \leq M\lambda$$

para todo $x, x + \lambda e_k \in K$.

Luego,

$$\left| \frac{J_u^{-1}(x + \lambda e_k) - J_u^{-1}(x)}{\lambda} \right| \leq |J_u^{-1}(x + \lambda e_k)| |A(u(x) - u(x + \lambda e_k))| M^2 \lambda.$$

Si λ es lo suficientemente pequeño tal que $|u(x) - u(x + \lambda e_k)| < \epsilon$, $\epsilon > 0$, $A(z)$ está acotado en un entorno de 0, por consiguiente, se sigue de la desigualdad anterior:

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_k} J_u^{-1}(x) \right| = 0 \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, d\}$$

si y solo si $\vec{\nabla} J_u^{-1}(x) = 0$. Por lo tanto, $J_u^{-1}(x)$ es una matriz constante, en consecuencia, $J_u(x)$, también lo es, con lo cual $\vec{\nabla} J_u(x) = 0$.

Por lo antes expuesto, para cada dirección x_k , $\frac{\partial}{\partial x_k} J_u(\tilde{\theta}(x)) = 0$. Puesto que $u = \theta \circ \tilde{\theta}^{-1}$ entonces por la regla de la cadena de la derivada:

$$\begin{aligned} J_u(x) &= J_\theta(\tilde{\theta}^{-1}(x)) J_{\tilde{\theta}^{-1}}(x) \\ &= J_\theta(\tilde{\theta}^{-1}(x)) J_{\tilde{\theta}}^{-1}(\tilde{\theta}^{-1}(x)). \end{aligned}$$

Se sigue de esta última ecuación, para cada dirección k :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} J_u(\tilde{\theta}(x)) = \frac{\partial}{\partial x_k} (J_\theta(x) J_{\tilde{\theta}}^{-1}(x)) = 0. \quad (1.24)$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial J_\theta(x)}{\partial x_k} J_{\tilde{\theta}}^{-1}(x) + J_\theta(x) \frac{\partial J_{\tilde{\theta}}^{-1}(x)}{\partial x_k} = 0.$$

Expandiendo el término que contiene la derivada parcial del inverso del Jacobiano obtenemos:

$$\frac{\partial J_\theta(x)}{\partial x_k} J_{\tilde{\theta}}^{-1}(x) - J_\theta(x) J_{\tilde{\theta}}^{-1}(x) \frac{\partial J_{\tilde{\theta}}(x)}{\partial x_k} J_{\tilde{\theta}}^{-1}(x) = 0. \quad (1.25)$$

Multiplicando por la izquierda y luego por la derecha esta ecuación por los factores $J_\theta^{-1}(x)$ y $J_{\tilde{\theta}}(x)$ respectivamente, obtenemos para todo $k = 1, 2, \dots, d$:

$$J_\theta^{-1}(x) \frac{\partial J_\theta(x)}{\partial x_k} - J_{\tilde{\theta}}^{-1}(x) \frac{\partial J_{\tilde{\theta}}(x)}{\partial x_k} = 0 \quad (1.26)$$

la cual es equivalente a la ecuación (1.12). Vale decir que la ecuación (1.26) muestra la equivalencia entre (1.11) y (1.12). En efecto, si θ y $\tilde{\theta}$ satisfacen (1.11) claramente $J_\theta(x) = S J_{\tilde{\theta}}(x)$, por consiguiente: $J_\theta(x) J_{\tilde{\theta}}^{-1}(x) = S$ es independiente de x lo que nos conduce a la ecuación (1.24) y por ende (1.12).

Recíprocamente, supongamos que θ y $\tilde{\theta}$ satisfacen (1.12) lo cual podemos escribir como (1.26). Luego, pre y post multiplicando esa ecuación por $J_\theta(x)$ y $J_{\tilde{\theta}}^{-1}(x)$ obtenemos (1.25) entonces se sigue que para dirección x_k , $\frac{\partial}{\partial x_k} \left(J_\theta(x) J_{\tilde{\theta}}^{-1}(x) \right) = 0$, lo cual prueba que $J_\theta(x) J_{\tilde{\theta}}^{-1}(x)$ es una matriz constante $S \in GL^+(\mathbb{R}^d)$ dado por el producto de dos elementos de $GL^+(\mathbb{R}^d)$. Por consiguiente, $J_\theta(x) = S J_{\tilde{\theta}}(x)$. Este sistema diferencial parcial se puede integrar obteniendo $\theta(x) = u + S\tilde{\theta}(x)$.

□

Para los propósitos de esta investigación vale destacar que la ecuación (1.26) para $d = 2$, es decir

$$J_\theta^{-1}(x) \frac{\partial J_\theta(x)}{\partial x_1} \quad J_\theta^{-1}(x) \frac{\partial J_\theta(x)}{\partial x_2} \quad (1.27)$$

es de sumo interés en el problema de la recuperación de la forma $3D$ a partir de la distorsión de la textura bajo proyección perspectiva. De hecho las derivaciones en el ámbito de la geometría diferencial dado por [10], demostraron que estas matrices especifican la orientación local y la curvatura de la superficie de $3D$ de la escena de una imagen. El conocimiento de estos parámetros de la superficie permite recuperar las coordenadas tridimensional de la superficie, hasta un factor de escala constante. Más adelante veremos que las matrices Jacobianas (1.27) aparecen como vectores de velocidad en una ecuación de transporte satisfecha por la covarianza del proceso deformado X .

1.2.2. El grupo de estacionariedad invariante

El grupo invariante estacionario \mathcal{G} especifica la clase de soluciones del problema inverso $X = DY$. Esta sección examina las propiedades de los operadores que pertenecen a tal grupo.

El siguiente teorema caracteriza esa clase de operadores. Denotaremos $x \cdot y$ el producto punto de dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^d$

Teorema 1.2.2.1 *Un operador G es invariante estacionario si y solo si existe $\hat{\rho}(w)$ de \mathbb{R}^d a \mathbb{C} con $\text{ess sup}_{w \in \mathbb{R}^d} |\hat{\rho}(w)| < \infty$, y $\lambda(w)$ de \mathbb{R}^d a \mathbb{R}^d tal que*

$$Ge^{iw \cdot x} = \hat{\rho}(w)e^{i\lambda(w) \cdot x}. \quad (1.28)$$

El operador del grupo de estacionariedad invariante actúa sobre una sinusoidal por la transposición de su frecuencia y la modificación de su amplitud.

Demostración

(\Rightarrow) (Por construcción)

Consideremos una familia de procesos estocásticos débilmente estacionarios, centrado, definido:

$$Y_w(x) = Y e^{iw \cdot x}$$

donde Y es una variable aleatoria con varianza $\mathbb{E}\{YY^*\} = \sigma^2$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{Y_w(x)Y_w^*(y)\} &= \mathbb{E}\{(Y e^{iw \cdot x})(Y e^{iw \cdot y})^*\} \\ &= \mathbb{E}\{YY^*\} e^{iw \cdot (x-y)} \\ &= \sigma^2 e^{iw \cdot (x-y)} \\ &= c_{Y_w}(x-y). \end{aligned}$$

Por lo tanto, cada proceso débilmente estacionario, como el definido aquí arriba, le corresponde una función de covarianza que solo depende de la diferencia $x - y$, covarianza estacionaria.

Sea G un operador invariante estacionario. Si $X_w(x) = GY_w(x)$ entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{X_w(x)X_w^*(y)\} &= \mathbb{E}\{(GY_w(x))(GY_w(y))^*\} \\ &= \mathbb{E}\{(GY e^{iw \cdot x})(GY e^{iw \cdot y})^*\} \\ &= \mathbb{E}\{YY^*\} (Ge^{iw \cdot x})(Ge^{iw \cdot y})^* \\ &= \sigma^2 f_w(x)f_w^*(y) \end{aligned}$$

donde $f_w(x) = Ge^{iw \cdot x}$.

Puesto que G es invariante estacionario, $X_w(x)$ es un proceso estacionario, con lo cual, $\mathbb{E}\{X_w(x)X_w^*(y)\}$ es una función de covarianza estacionaria. En consecuencia, tiene que ocurrir

$$\sigma^2 f_w(x)f_w(y) = \sigma^2 f_w(x - y). \quad (1.29)$$

La única función no trivial que satisface la propiedad (1.29) es la función exponencial de la forma:

$$C(u)e^{i\varphi(u) \cdot v}$$

donde $C(u) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ y $\varphi(u) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ (ver Apéndice C).

Por lo tanto, existe un campo escalar $\hat{\rho}(w) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ y un campo vectorial $\lambda(w) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que

$$f_w(x) = Ge^{iw \cdot x} = \hat{\rho}(w)e^{i\lambda(w) \cdot x}$$

de donde se obtiene (1.28).

(\Leftarrow) Sea Y un proceso estocásticamente continuo. Entonces, su función de covarianza admite la siguiente representación:

$$\mathbb{E}\{Y(x)Y^*(y)\} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{iw \cdot (x-y)} dF(w) \quad (1.30)$$

donde $F(w)$ es alguna función acotada no decreciente.

Consecuente a (1.30), se sigue de un resultado en [24], $Y(x)$ tiene una representación de la forma

$$Y(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{iw \cdot x} dZ(w)$$

donde $Z(w)$ es un proceso ortogonal con $\mathbb{E}\{|dZ(w)|^2\} = dF(w)$.

Ahora

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{Y(x)Y^*(y)\} &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{iw \cdot (x-y)} \mathbb{E}\{|dZ(w)|^2\} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{iw \cdot (x-y)} dF(w). \end{aligned}$$

De la última igualdad se tiene que la función de covarianza Y es estacionaria. Además, para $x - y = 0$,

$$c_Y(0) = \int_{\mathbb{R}^d} dF(w) < \infty$$

puesto que F es acotada. Por lo tanto, Y es un proceso estocásticamente continuo y estacionario.

Sea G un operador que satisface la condición (1.28):

$$GY(x) = G \int_{\mathbb{R}^d} e^{iw \cdot x} dZ(w).$$

Se sigue de la linealidad de la integral:

$$\begin{aligned} &= \lim_{\mathbb{L}^2(\Omega)} G \sum_{i=1}^n e^{iw_i \cdot x} (Z(w_{i+1}) - Z(w_i)) \\ &= \lim_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \sum_{i=1}^n G e^{iw_i \cdot x} (Z(w_{i+1}) - Z(w_i)) \\ &= \lim_{\mathbb{L}^2(\Omega)} \sum_{i=1}^n \hat{\rho}(w_i) e^{i\lambda(w_i) \cdot x} (Z(w_{i+1}) - Z(w_i)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\rho}(w) e^{i\lambda(w) \cdot x} dZ(w). \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \{ (GY(x)) (GY(y))^* \} &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda(w) \cdot (x-y)} |\hat{\rho}(w)|^2 \mathbb{E} \{ |dZ(w)|^2 \} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\lambda(w) \cdot (x-y)} |\hat{\rho}(w)|^2 dF(w) \end{aligned}$$

por hipótesis, $\hat{\rho}(w)$ es esencialmente acotada y esto con la finitud de la medida $dF(w)$, la última integral converge. Así, la covarianza del proceso GY depende de la diferencia $x - y$ y su varianza es finita. Por lo tanto, GY es proceso estacionario en sentido amplio, puesto que Y también es estacionario en sentido amplio, tiene que ocurrir que G es un operador invariante estacionario.

La convergencia de la integral ocurre si y solo si, $\hat{\rho}(w)$ es esencialmente acotado, y en consecuencia, la covarianza del proceso GY es finito y estacionario. Por lo tanto, G es un operador invariante estacionario.

Para cualquier proceso estocástico en sentido amplio, podemos escribir:

$$GY(x) = G\mathbb{E} \{Y(0)\} + G(Y(x) - \mathbb{E} \{Y(0)\}).$$

Puesto que $Y(x) - \mathbb{E} \{Y(0)\}$ es un proceso centrado, estacionario en sentido amplio entonces, $G(Y(x) - \mathbb{E} \{Y(0)\})$ también lo es. Por consiguiente, $GY(x)$ es un proceso estacionario en sentido amplio.

□

Definición 1.2.2.1 (Operador traslación) Se define el operador traslación T_v para $v \in \mathbb{R}^d$ como

$$T_v f(x) = f(x - v).$$

Definamos δ_x la medida de probabilidad tal que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(y) \delta_x(dy) = f(x).$$

La transformada de Fourier de esa medida es

$$\widehat{\delta}_x(w) = \mathcal{F}(\delta_x)(w) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iw \cdot t} \delta_x(dt) = e^{-iw \cdot x}.$$

Por consiguiente, para todo $v \in \mathbb{R}^d$ y $S \in GL^+(\mathbb{R}^d)$

$$\widehat{\delta}_{Sv}(w) = \mathcal{F}(\delta_{Sv})(w) = e^{-iw \cdot Sv}.$$

Dado $S \in GL^+(\mathbb{R}^d)$, para cualquier $v \in \mathbb{R}^d$ y $\rho \in L^2(\mathbb{R}^d)$, se define la función H_v como sigue:

$$H_v \rho(z) = \rho(z - Sv)$$

donde $H_v(\rho)(\cdot)$ es una función de $L^2(\mathbb{R}^d)$ y, su transformada de Fourier es:

$$\begin{aligned} \widehat{H_v \rho}(w) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iw \cdot z} H_v \rho(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iw \cdot z} \rho(z - Sv) dz. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable, $y = z - Sv$, obtenemos:

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iw \cdot (y + Sv)} \rho(y) dy \\ &= e^{-iw \cdot Sv} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iw \cdot y} \rho(y) dy \\ &= \widehat{\rho}(w) e^{-iw \cdot Sv}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{F}[T_{Sv} \rho(\cdot)](w) = \widehat{\rho}(w) e^{-iw \cdot Sv}. \quad (1.31)$$

Proposición 1.2.2.1 Un operador lineal G que es acotado en $L^2(\mathbb{R}^d)$ es invariante estacionario y satisface

$$Gf(x) = e^{i\xi \cdot x} f \star \rho(Sx) \quad (1.32)$$

donde $\rho(x)$ es la transformada inversa de Fourier de $\widehat{\rho}(w)$,

si y solo si satisface

$$\exists \xi \in \mathbb{R}^d, \exists S \in GL^+(\mathbb{R}^d), \forall v \in \mathbb{R}^d, GT_{Sv} = e^{i\xi \cdot v} T_v G. \quad (1.33)$$

Demostración

(\Leftarrow) Dado un operador lineal G , acotado en $L^2(\mathbb{R}^d)$ que satisface (1.33), queremos probar que es invariante estacionario y satisface (1.32).

Veamos que G es invariante estacionario.

El operador de autocovarianza de un proceso Z se define:

$$K_Z h(x) = \int \mathbb{E} \{Z(x)Z^*(y)\} h(y) dy.$$

Sea Y un proceso estacionario y $X = GY$

$$\begin{aligned} K_X h(x) &= G \int \mathbb{E} \{Y(x)Y^*(y)\} \overline{G}h(y) dy \quad (\text{linealidad de } G) \\ &= GK_Y(\overline{G}h)(x). \end{aligned}$$

Por consiguiente, en notación de operadores obtenemos:

$$K_X = GK_Y \overline{G}. \quad (1.34)$$

Puesto que Y es estacionario, K_Y conmuta con el operador de traslación T_v para todo $v \in \mathbb{R}^d$: $T_v K_Y = K_Y T_v$.

En efecto:

$$\begin{aligned} T_v K_Y h(x) &= T_v \left(\int \mathbb{E} \{Y(x)Y^*(y)\} h(y) dy \right) \quad (\text{Def. } K_Y) \\ &= \int \mathbb{E} \{Y(x-v)Y^*(y)\} h(y) dy \\ &= \int \mathbb{E} \{Y(x)Y^*(y+v)\} h(y) dy \\ &= \int \mathbb{E} \{Y(x)Y^*(y)\} T_v h(y) dy \\ &= K_Y(T_v h)(x). \end{aligned}$$

Veamos que esta conmutación también ocurre para X .

Por hipótesis, $GT_{Sv} = e^{i\xi \cdot v} T_v G$ de aquí que

$$T_v G = e^{-i\xi \cdot v} GT_{Sv}. \quad (1.35)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
GT_{Sv} = e^{i\xi \cdot v} T_v G &\Rightarrow T_{-Sv} \bar{G} = \bar{G} T_{-v} e^{-i\xi \cdot v} \\
&\Rightarrow \bar{G} = T_{Sv} \bar{G} T_{-v} e^{-i\xi \cdot v} \\
&\Rightarrow \bar{G} e^{i\xi \cdot v} = T_{Sv} \bar{G} T_{-v} \\
&\Rightarrow \bar{G} e^{i\xi \cdot v} T_v = T_{Sv} \bar{G}.
\end{aligned}$$

Se sigue de la linealidad de G

$$\Rightarrow e^{i\xi \cdot v} \bar{G} T_v = T_{Sv} \bar{G}. \quad (1.36)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
T_v K_X &= T_v G K_Y \bar{G} && \text{(por (1.34))} \\
&= e^{-i\xi \cdot v} G T_{Sv} K_Y \bar{G} && \text{(por (1.35))} \\
&= e^{-i\xi \cdot v} (G K_Y) (T_{Sv} \bar{G}) && (T \text{ conmuta con } K_Y) \\
&= G K_Y \bar{G} T_v && \text{(por (1.36))} \\
&= K_X T_v. && \text{(por (1.34))}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, Tv conmuta para X .

Ahora veamos que el hecho que T_v conmute para X implica que X es estacionario.

$$\begin{aligned}
T_v K_X h(x) &= T_v \int \mathbb{E} \{X(x) X^*(y)\} h(y) dy \\
&= \int \mathbb{E} \{X(x-v) X^*(y)\} h(y) dy \\
&= G \int \mathbb{E} \{Y(x-v) Y^*(y)\} \bar{G} h(y) dy \\
&= G \int \mathbb{E} \{Y(x) Y^*(y+v)\} \bar{G} h(y) dy.
\end{aligned}$$

Por hipótesis, G es acotado en $L^2(\mathbb{R}^2)$ entonces, también lo es su adjunto \bar{G} . Luego por definición de un operador acotado, existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|\bar{G}h\|_2 \leq c \|h\|_2 < \infty.$$

Por lo tanto, la última igualdad es cierta para toda $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ con soporte compacto en la bola cerrada con centro u y radio $T/2$, $\bar{B}(u, T/2)$, $T > 0$.

$$\mathbb{E} \{X(x-v)X^*(y)\} = \mathbb{E} \{X(x)X^*(y+v)\}.$$

Si hacemos $v = x$ la igualdad anterior implica $c_X(x, y+x) = c_X(0, y)$. Si definimos $\varphi(y) = c_X(0, y)$ entonces se verifica $\mathbb{E} \{X(x)X^*(y+x)\} = \varphi(y)$. Claramente la función de covarianza depende de la diferencia entre sus argumentos. Además, como G es acotado en $L^2(\mathbb{R}^d)$, $c_X(0) < \infty$. Por lo tanto, X es un proceso estacionario, en consecuencia, G es un operador invariante estacionario.

G satisface la condición (1.32)

Puesto que G es un operador invariante estacionario, se sigue del Teorema 1.2.2.1

$$Ge^{iw \cdot x} = \hat{\rho}(w)e^{i\lambda(w) \cdot x}$$

y por hipótesis, $GT_{Sv} = e^{i\xi \cdot v}T_vG$ vale para toda función o señal f . En particular, aplica para la señal básica $f(x) = e^{iw \cdot x}$. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} GT_{Sv}e^{iw \cdot x} &= Ge^{iw \cdot (x-Sv)} \\ &= Ge^{iw \cdot x}e^{-iSv \cdot w} \\ &= \hat{\rho}(w)e^{i\lambda(w) \cdot x}e^{-iSv \cdot w}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} e^{i\xi \cdot v}T_vGe^{iw \cdot x} &= e^{i\xi \cdot v}T_v\hat{\rho}(w)e^{i\lambda(w) \cdot x} \\ &= e^{i\xi \cdot v}\hat{\rho}(w)e^{i\lambda(w) \cdot (x-v)} \end{aligned} \tag{1.38}$$

igualando las ecuaciones (1.37) y (1.38) obtenemos:

$$GT_{Sv}e^{iw \cdot x} = \hat{\rho}(w)e^{i\lambda(w) \cdot x}e^{-iSv \cdot w} = e^{i\xi \cdot v}\hat{\rho}(w)e^{i\lambda(w) \cdot (x-v)}.$$

Si $\hat{\rho}(w) \neq 0$ se tiene la igualdad $e^{-iSv \cdot w} = e^{i\xi \cdot v}e^{-i\lambda(w) \cdot v}$, de donde obtiene:

$$\begin{aligned} e^{i\lambda(w) \cdot v} &= e^{i\xi \cdot v}e^{iSv \cdot w} \\ &= e^{i\xi \cdot v}e^{iv \cdot \bar{S}w} \\ &= e^{i(\xi + \bar{S}w) \cdot v} \end{aligned}$$

lo que implica que existe $\xi \in \mathbb{R}^d$ y $S \in GL^+(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\lambda(w) = \bar{S}w + \xi. \tag{1.39}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
Gf(x) &= G \int_{\mathbb{R}^d} e^{iw \cdot x} \hat{f}(w) dw && \text{(Teorema de inversión)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} G e^{iw \cdot x} \hat{f}(w) dw && \text{(linealidad de } G \text{ y aprox. integral en } L^2(\mathbb{R}^d)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\rho}(w) e^{i\lambda(w) \cdot x} \hat{f}(w) dw && \text{(Teorema 1.2.2.1)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\rho}(w) e^{i(\xi + \bar{S}w) \cdot x} \hat{f}(w) dw && \text{(por (1.39)) (a)} \\
&= e^{i\xi \cdot x} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iw \cdot Sx} \hat{f}(w) \hat{\rho}(w) dw \\
&= e^{i\xi \cdot x} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iw \cdot Sx} \mathcal{F}(f \star \rho)(w) dw && \text{(Teorema de la convolución)} \\
&= e^{i\xi \cdot x} (f \star \rho)(Sx)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Gf = e^{i\xi \cdot x} f \star \rho(Sx).$$

Esta ecuación muestra que Gf se obtiene utilizando la información contenida en $\rho(Sx)$. Vamos a demostrar en la implicación directa que tal proceso involucra un proceso de transporte o traslado del soporte de f de un entorno a otro.

(\Rightarrow) Veamos que se satisface (1.33).

Por hipótesis, para todo f :

$$Gf(x) = e^{i\xi \cdot x} f \star \rho(Sx) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\rho}(w) e^{i(\xi + \bar{S}w) \cdot x} \hat{f}(w) dw. \quad \text{(por (a))}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
GT_{Sv}f(x) &= G(T_{Sv}f)(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\rho}(w) e^{i(\xi + \bar{S}w) \cdot x} \mathcal{F}(T_{Sv}f)(w) dw \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\rho}(w) e^{i(\xi + \bar{S}w) \cdot x} \hat{f}(w) e^{-iw \cdot Sv} dw && \text{(por (1.31))} \\
&= e^{i\xi \cdot x} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iw \cdot S(x-v)} \hat{f}(w) \hat{\rho}(w) dw \\
&= e^{i\xi \cdot x} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iw \cdot S(x-v)} \mathcal{F}(f \star \rho)(w) dw && \text{(Teorema de la convolución)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
GT_{Sv}f(x) &= e^{i\xi \cdot x} (f \star \rho)(S(x-v)) \quad (\text{Teorema de inversión}) \\
&= e^{i\xi \cdot v} \cdot e^{i\xi \cdot (x-v)} f \star \rho(S(x-v)) \\
&= e^{i\xi \cdot v} T_v e^{\xi \cdot x} (f \star \rho(Sx)) \\
&= e^{i\xi \cdot v} T_v Gf(x). \quad (\text{por hipótesis})
\end{aligned}$$

Por lo tanto, existen $\xi \in \mathbb{R}^d$ y $S \in GL^+(\mathbb{R}^d)$, para todo $v \in \mathbb{R}^d$, tal que

$$GT_{Sv} = e^{i\xi \cdot v} T_v G.$$

□

Por lo anterior, queda claro que la Proposición 1.2.2.1 se puede ver como una propiedad de transporte que traslada el soporte compacto de f en un entorno de v a un entorno de u . En el resto de este capítulo trabajaremos con el grupo de operadores de deformación para las cuales los operadores invariantes estacionarios satisfacen la propiedad de transporte (1.33).

1.3. Conservación y Transporte

La estacionariedad de un proceso aleatorio Y involucra, por definición, una propiedad de conservación de su autocovarianza a través de la traslación, es decir, el operador de autocovarianza es invariante a traslaciones en el espacio de entrada. Después de deformar Y , se obtiene el proceso $X(x) = DY(x)$, el cual no es estacionario y cuya autocovarianza no satisface la misma propiedad de conservación. En esta sección mostramos que la estacionariedad de Y implica una conservación de la autocovarianza de X a lo largo de *curvas características* en un apropiado espacio de parámetros. Estas curvas características identifican la clase de equivalencia de D en \mathcal{D}/\mathcal{G} , las cuales son calculadas aproximando localmente D^{-1} por un operador "tangencial" $G_{\beta(v)} \in \mathcal{G}$. Asumiendo que los operadores invariantes estacionarios satisfagan la propiedad de transporte indicada en la Proposición 1.2.2.1, la ecuación de conservación puede ser reescrita como una ecuación de transporte cuyo término de velocidad, denominaremos *gradiente de deformación*, y está relacionado con $\vec{\nabla}\beta(v)$. Tal como se muestra en la prueba de la Proposición 1.2.1.6, el gradiente de deformación caracteriza la clase de equivalencia de D en \mathcal{D}/\mathcal{G} (ver ecuación (1.26)).

1.3.1. Transporte en grupo

Consideremos un grupo invariante estacionario \mathcal{G} cuyos elementos satisfacen la propiedad de transporte (1.33) y por ende la condición (1.32), la cual podemos escribirla de la siguiente forma paramétrica:

$$G_{\beta}f(x) = G_{(\phi, \xi, S, v)}f(x) = e^{i(\xi \cdot x + \phi)} f \star \rho(Sx - v)$$

donde ρ es una distribución temperada. En términos de operadores la ecuación anterior puede ser reescrita como:

$$G_\beta = e^{i\phi} F_\alpha T_v; \text{ donde } F_\alpha f(x) = e^{i\xi \cdot x} f \star \rho(Sx); \alpha = (\xi, S) \in \mathbb{R}^d \times GL^+(\mathbb{R}^d). \quad (1.40)$$

Nótese que la representación del operador G_β está dado por la acción de un conjunto de grupos de operadores parametrizables, tales que T_v es un elemento del grupo de traslación, F_α parametrizada por el vector ξ y la matriz S , es un elemento del grupo afín y, el producto y la inversa del grupo se indican como

$$F_{\alpha_1} F_{\alpha_2} = F_{\alpha_1 * \alpha_2} \text{ y } F_\alpha^{-1} = F_{\alpha^{-1}}.$$

Bajo el supuesto de que ρ es una distribución temperada, el grupo invariante estacionario es un grupo de Lie.

En efecto, ρ es un elemento del espacio dual topológico del espacio vectorial de funciones de clase $C^\infty(U)$ sobre un cierto conjunto $U \subset \mathbb{R}^d$, con soporte compacto y de decrecimiento rápido. Es decir, ρ es un funcional lineal, diferenciable definido sobre conjuntos compactos contenidos en U . Las funciones definidas sobre U se llama espacio de funciones de prueba y conforman una estructura diferenciable. Así el conjunto $\{G_\beta\}$ es un espacio topológico dotado de una estructura diferenciable, es decir, es una variedad diferenciable.

Es un resultado conocido de la teoría de grupos de Lie [28] que una variedad diferenciable \mathcal{G} , con estructura de grupo es un grupo de Lie si y solo si

$$(a, b) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \xrightarrow{\mu} ab^{-1} \in \mathcal{G}.$$

Es claro que $(f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}) \in \{F_\alpha\} \times \{F_\alpha\} \xrightarrow{\mu} f_{\alpha_1 * \alpha_2^{-1}} \in \{F_\alpha\}$. Por lo tanto, $\{G_\beta\}$ es un grupo de Lie.

Veamos cómo identificar el operador de deformación tangencial $G_{\beta(v)} \in \mathcal{G}$, el cual aproxima D^{-1} para funciones con soporte compacto en un entorno de $v \in \mathbb{R}^d$.

En particular, sea D un operador del grupo de deformación 1-dimensional (Def. 1.2.1.1). Puesto que $D \in \mathcal{D}$ entonces $D^{-1} \in \mathcal{D}$, en consecuencia $D^{-1}f(x) = f(\theta^{-1}(x))$.

Supongamos D^{-1} es lineal entonces, existe un único operador $\overline{D^{-1}}$ tal que

$$\langle D^{-1}f, g \rangle = \langle f, \overline{D^{-1}}g \rangle.$$

Si $y = \theta^{-1}(x)$ se sigue de la ecuación anterior y del teorema de cambio de variables:

$$\int f(\theta^{-1}(x)) g(x) dx = \int f(y) \theta'(y) g(\theta(y)) dy.$$

Por lo tanto, para $D^{-1} \in \mathcal{D}$ y lineal

$$\overline{D^{-1}}f(x) = \theta'(x)f(\theta(x)). \quad (1.41)$$

Queda claro que el operador $\overline{D^{-1}}$ mueve el soporte de f desde un entorno de u a un entorno $v = \theta(u)$.

Bajo el mismo argumento anterior obtenemos:

$$\overline{D}f(x) = \left(\theta'(x)\right)^{-1} f(\theta^{-1}(x)). \quad (1.42)$$

Consideremos un operador invariante estacionario, G_β , el cual es un elemento del grupo \mathcal{D} , donde θ es la transformación afín $\theta(x) = u + sx$:

$$G_\beta f(x) = f(u + sx); (u, s) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}).$$

Se sigue de (1.42)

$$\overline{G}_\beta f(x) = s^{-1}f(s^{-1}(x - u)). \quad (1.43)$$

No obstante, por (1.41), el lado derecho de la ecuación de arriba puede interpretarse como la actuación del operador $\overline{D^{-1}}$ sobre f , donde la correspondiente función de deformación es la afinidad θ^{-1} . Por consiguiente:

$$\overline{G}_\beta f(x) = s^{-1}f(s^{-1}(x - u)) = \overline{D^{-1}}f(x) \quad (1.44)$$

lo que implica $G_\beta = D^{-1}$. Por tanto, si $D = G_\beta^{-1} \in \mathcal{G}$ es en si mismo un operador invariante estacionario, D^{-1} está plenamente determinado por el operador tangencial G_β . Note que el operador \overline{G}_β traslada el soporte de f , es decir, está dotado de cierta propiedad de transporte.

Se sigue de los resultados (1.40) y (1.44):

$$\overline{G}_\beta f(x) = T_u \overline{F}_s f(x) \quad (1.45)$$

donde $\overline{F}_s f(x) = s^{-1}f(s^{-1}x)$. Así la ecuación (1.45) respresenta una familia infinita de funciones escaladas y trasladadas de la función f , es decir, \overline{G}_β , con $\beta = (u, s)$, es equivalente a la actuación conjunta de un grupo de operadores parametrizables.

En general, si $D \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{G}$, para identificar el *operador tangencial*, el cual aproxima D^{-1} en un entorno compacto de $v \in \mathbb{R}^d$, usaremos la ecuación (1.45), esto es, una familia de funciones obtenidas de una función madre $f(x) = \psi(x)$ cuyo soporte compacto está en $[-1, 1]^d$. Para $\sigma > 0$, $\psi_\sigma(x) = \psi(x/\sigma)$ tal que $|x/\sigma| \leq 1$. Una *descomposición atómica* del proceso X se obtiene correlacionando su operador de autocovarianza con una familia de funciones de prueba deformadas y trasladadas, las cuales se denominan *átomos*:

$$A_X^\sigma(u, \alpha) = \mathbb{E} \left\{ \left| \langle X, T_u \overline{F}_\alpha \psi_\sigma \rangle \right|^2 \right\}. \quad (1.46)$$

La descomposición atómica depende únicamente de X a través de su autocovarianza.

En efecto:

$$\begin{aligned}
A_X^\sigma(u, \alpha) &= \iint \mathbb{E}(X(x)X^*(y))(T_u \bar{F}_\alpha \psi_\sigma(x))^* (T_u \bar{F}_\alpha \psi_\sigma(y)) dx dy \\
&= \int \left[\int \mathbb{E}(X(x)X^*(y)) T_u \bar{F}_\alpha \psi_\sigma(y) dy \right] (T_u \bar{F}_\alpha \psi_\sigma(x)) dx \\
&= \langle K_X T_u \bar{F}_\alpha \psi_\sigma, T_u \bar{F}_\alpha \psi_\sigma \rangle \\
&= \langle K_X \psi_{u, \alpha, \sigma}, \psi_{u, \alpha, \sigma} \rangle, \quad \psi_{u, \alpha, \sigma} = T_u \bar{F}_\alpha \psi_\sigma.
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Si X es un proceso estacionario, $A_X^\sigma(u, \alpha)$ solamente depende de X a través de su autocovarianza, la cual posee una propiedad de conservación invarianza por traslaciones. En ese caso, la descomposición atómica de X no depende del parámetro u . En efecto, $A_X^\sigma(u, \alpha)$ es igual a:

$$\iint c_X(x-y) s^{-1} \psi^*((\sigma s)^{-1}(x-u)) s^{-1} \psi((\sigma s)^{-1}(y-u)) dx dy.$$

Si hacemos el cambio de variable $\tilde{x} = (\sigma s)^{-1}(x-u)$ y $\tilde{y} = (\sigma s)^{-1}(y-u)$ la descomposición atómica de X toma la forma:

$$A_X^\sigma(u, \alpha) = \sigma^2 \iint c_X(\sigma s(\tilde{x} - \tilde{y})) \psi^*(\tilde{x}) \psi(\tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}. \tag{1.48}$$

Claramente, $A_X^\sigma(u, \alpha)$ no depende del parámetro u . Por lo tanto, $\partial_u A_X^\sigma(u, \alpha) = 0$. Más aún, se sigue de (1.47), para todo g con soporte compacto entorno a u , $\partial_u \langle K_X g, g \rangle = 0$.

En general, para cualquier campo vectorial f

$$\left(\vec{\nabla}_v + \vec{\nabla}_x \right) T_v f(x) = 0. \tag{1.49}$$

En efecto:

$$\vec{\nabla}_v T_v f(x) = \vec{\nabla}_v f(x-v) = -f'(x-v),$$

$$\vec{\nabla}_x T_v f(x) = \vec{\nabla}_x f(x-v) = f'(x-v).$$

Evidentemente la suma de las dos ecuaciones anteriores nos da el resultado deseado.

Consideremos la Proposición (1.3.1.1) y el papel de la función $\beta(v)$ en la ecuación (1.50). Cuando el operador de deformación D es invariante estacionario, una función β tal que $\psi_{v, \alpha, \sigma} = \overline{G_\beta(v)} T_v \bar{F}_\alpha \psi_\sigma$ y satisface (1.50), puede ser seleccionada independientemente de v . En efecto, la ecuación (1.44) muestra que $\overline{G_{\beta(v)}} = \overline{D}^{-1}$. Por consiguiente, $\overline{D} \psi_{v, \alpha, \sigma} = T_v \bar{F}_\alpha \psi_\sigma$ y se sigue de (1.49):

$$\left(\vec{\nabla}_v + \vec{\nabla}_x \right) \overline{D} \psi_{v, \alpha, \sigma} = \left(\vec{\nabla}_v + \vec{\nabla}_x \right) T_v \bar{F}_\alpha \psi_\sigma = 0.$$

Cuando D no es invariante estacionario y σ lo suficientemente pequeño, $\beta(v)$ puede ser seleccionado tal que satisface (1.50). De hecho, la Proposición 1.3.1.1 prueba que si \overline{D}^{-1} puede ser aproximado por el *operador tangencial* $\overline{G}_{\beta(v)}$, para funciones que tienen soporte compacto en un entorno de v , entonces existe una función γ tal que, para todo u y α ,

$$\vec{\nabla}_u A_X^\sigma(u, \alpha * \gamma(u)) \approx 0, \text{ para } \sigma \text{ lo suficientemente pequeño.}$$

Así A_X^σ satisface una particular propiedad de conservación a lo largo de *líneas características* que viven en el espacio paramétrico $u \times \alpha$. Tales curvas son descrita por $\beta(v)$ y dependen del operador D .

Antes de iniciar la demostración de la Proposición 1.3.1.1, algunas consideraciones sobre la notación. Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones definidas en \mathbb{R}^d , entonces $\vec{\nabla}_x g$ es un vector con d componentes, esto es, $\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_d}\right)$, y $\langle f, \vec{\nabla}_x g \rangle$ también es un vector, cuyas d componentes son los productos internos $\langle f, \partial g / \partial x_k \rangle$, es decir, $\left(\langle f_1, \frac{\partial g}{\partial x_1} \rangle, \dots, \langle f_d, \frac{\partial g}{\partial x_d} \rangle\right)$. Denotaremos $Re\langle f, \vec{\nabla}_x g \rangle$ la parte real de este vector. Escribiremos $c(\sigma) = \mathcal{O}(\sigma)$ si existe una constante C tal que, para σ pequeño, $|c(\sigma)| \leq C\sigma$.

Si X es estacionario, la descomposición atómica de X es independiente del parámetro v y se sigue de la ecuación (1.49), para todo f , $\vec{\nabla}_x \langle K_X f, f \rangle = 2Re \langle K_X f, \vec{\nabla}_x f \rangle = 0$.

Proposición 1.3.1.1 *Sea $X = DY$, con Y estacionario. Supongamos que para cada $v \in \mathbb{R}^d$, existe $\beta(v)$ tal que, para cada α , la función $\psi_{v,\alpha,\sigma} = \overline{G}_{\beta(v)} T_v \overline{F}_\alpha \psi_\sigma$ satisface:*

$$\left| Re\langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \overline{D}^{-1}(\vec{\nabla}_v + \vec{\nabla}_x) \overline{D} \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle \right| = \mathcal{O}(\sigma) \left| Re\langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \vec{\nabla}_x \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle \right|. \quad (1.50)$$

Si existe un difeomorfismo $u(v)$ y dos funciones $\phi(u)$ y $\gamma(u)$ tal que

$$\overline{G}_{\beta(v)} T_v = e^{i\phi(u(v))} T_{u(v)} \overline{F}_{\gamma(u(v))} \quad (1.51)$$

entonces, para cada (u, α) , tenemos, $t = u$

$$\left| \vec{\nabla}_u A_X^\sigma(u, \alpha * \gamma(t)) + \vec{\nabla}_t A_X^\sigma(u, \alpha * \gamma(t)) \right| = \mathcal{O}(\sigma) \left| \vec{\nabla}_u A_X^\sigma(u, \alpha * \gamma(t)) \right| \quad (1.52)$$

Demostración

El operador de autocovarianza de $X = DY$ satisface la condición $K_X = DK_Y \overline{D}$, con lo cual la descomposición atómica del proceso X puede escribirse como sigue:

$$\langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle = \langle K_Y \overline{D} \psi_{v,\alpha,\sigma}, \overline{D} \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle.$$

Luego, la derivada espacial de la descomposición atómica del proceso deformado X , viene dado por:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}_v \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle &= 2Re \langle K_Y \bar{D} \psi_{v,\alpha,\sigma}, \vec{\nabla}_v \bar{D} \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle \\
&= 2Re \langle K_Y \bar{D} \psi_{v,\alpha,\sigma}, \vec{\nabla}_v \bar{D} \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle \pm 2Re \langle K_Y \bar{D} \psi_{v,\alpha,\sigma}, \vec{\nabla}_x \bar{D} \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle \\
&= 2Re \langle K_Y \bar{D} \psi_{v,\alpha,\sigma}, (\vec{\nabla}_v + \vec{\nabla}_x) \bar{D} \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle - 2Re \langle K_Y \bar{D} \psi_{v,\alpha,\sigma}, \vec{\nabla}_x \bar{D} \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle.
\end{aligned}$$

Puesto que Y es estacionario, el último término es igual a cero. Note que ese término es igual a $\vec{\nabla}_x A_Y^\sigma(\cdot)$.

Por lo tanto,

$$\vec{\nabla}_v \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle = 2Re \langle K_Y \bar{D} \psi_{v,\alpha,\sigma}, (\vec{\nabla}_v + \vec{\nabla}_x) \bar{D} \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle.$$

Pero, $K_Y = D^{-1} K_X \bar{D}^{-1}$. Por consiguiente,

$$= 2Re \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \bar{D}^{-1} (\vec{\nabla}_v + \vec{\nabla}_x) \bar{D} \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle.$$

La hipótesis (1.50) implica que

$$|\vec{\nabla}_v \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle| = \mathcal{O}(\sigma) |Re \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \vec{\nabla}_x \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle|. \quad (1.53)$$

La función $\psi_{v,\alpha,\sigma} = \bar{G}_{\beta(v)} T_v \bar{F}_\alpha \psi_\sigma$ satisface la ecuación (1.53) y se sigue de la propiedad de transporte (1.51):

$$\begin{aligned}
\psi_{v,\alpha,\sigma} &= (\bar{G}_{\beta(v)} T_v) \bar{F}_\alpha \psi_\sigma \\
&= (e^{i\phi(u(v))} T_{u(v)} \bar{F}_{\gamma(u(v))}) \bar{F}_\alpha \psi_\sigma \\
&= e^{i\phi(u(v))} T_{u(v)} \bar{F}_{\alpha * \gamma(u(v))} \psi_\sigma.
\end{aligned} \quad (1.54)$$

Ahora, calculamos la descomposición atómica del proceso X , usando la función (1.54), que involucra la propiedad de transporte de los operadores invariantes estacionarios.

$$\begin{aligned}
\langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle &= \langle K_X e^{i\phi(u(v))} T_{u(v)} \bar{F}_{\alpha * \gamma(u(v))} \psi_\sigma, e^{i\phi(u(v))} T_{u(v)} \bar{F}_{\alpha * \gamma(u(v))} \psi_\sigma \rangle \\
&= \langle K_X T_{u(v)} \bar{F}_{\alpha * \gamma(u(v))} \psi_\sigma, T_{u(v)} \bar{F}_{\alpha * \gamma(u(v))} \psi_\sigma \rangle \\
&= A_X^\sigma(u(v), \alpha * \gamma(u(v))).
\end{aligned}$$

Por consiguiente, se tiene el gradiente de la descomposición atómica, con respecto al parámetro v :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}_v \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle &= \vec{\nabla}_v A_X^\sigma(u(v), \alpha * \gamma(u(v))) \\
&= \vec{\nabla}_u A_X^\sigma(u(v), \alpha * \gamma(u(v))) J_u(v) \\
&= \vec{\nabla}_u A_X^\sigma(u(v), \alpha * \gamma(u(v))) J_v^{-1}(u).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\vec{\nabla}_u A_X^\sigma(u(v), \alpha * \gamma(u(v))) = \vec{\nabla}_v \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle J_v(u).$$

Puesto que u es un difeomorfismo, J_v es una transformación lineal acotada sobre cualquier entorno compacto y convexo de $u \in \mathbb{R}^d$. Esto implica

$$|\vec{\nabla}_u \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle| \leq \|J_v(u)\| |\vec{\nabla}_v \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle|$$

donde $\|J_v(u)\|$ es el operador sup norm de $J_v(u)$. Luego se tiene por (1.53), para u fijo:

$$|\vec{\nabla}_u A_X^\sigma(u, \alpha * \gamma(u))| = \mathcal{O}(\sigma) |Re \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \vec{\nabla}_x \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle|. \quad (1.55)$$

La expansión del gradiente con respecto a la posición, en el primer miembro de la ecuación (1.55), resulta en una ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) de primer orden, en las variables u y α . No obstante, para u fijo, tal EDP puede escribirse como una ecuación de transporte en el dominio (u, α) . En efecto, para $t = u$, la expansión del gradiente con respecto a t , según la regla de la cadena, toma la forma:

$$\vec{\nabla}_t A_X^\sigma(u, \alpha * \gamma(t)) = \vec{\nabla}_t(\alpha * \gamma(t)) \cdot \vec{\nabla}_\alpha A_X^\sigma(u, \alpha * \gamma(t)) \quad (1.56)$$

donde $\vec{\nabla}_t(\alpha * \gamma(t))$ es un vector de derivadas parciales con respecto a cada componente del parámetro α . Reemplazando la variable libre α por $\alpha * \gamma^{-1}(u)$ en (1.55), para $t = u$, da lugar la siguiente ecuación de transporte:

$$|\vec{\nabla}_u A_X^\sigma(u, \alpha) + \vec{\nabla}_t(\alpha * \gamma^{-1}(u) * \gamma(t)) \cdot \vec{\nabla}_\alpha A_X^\sigma(u, \alpha)| = \mathcal{O}(\sigma) |Re \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \vec{\nabla}_x \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle|; \quad t = u.$$

De aquí que escribimos la ecuación (1.55) de la siguiente forma:

$$|\vec{\nabla}_u A_X^\sigma(u, \alpha * \gamma(t)) + \vec{\nabla}_t A_X^\sigma(u, \alpha * \gamma(t))| = \mathcal{O}(\sigma) |Re \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \vec{\nabla}_x \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle|; \quad t = u. \quad (1.57)$$

Note que se sigue de la propiedad de transporte de los operadores invariantes estacionarios (1.51), para todo $v \in \mathbb{R}^d$ existe una función $\tilde{\beta}(v)$ tal que

$$\overline{G}_{\tilde{\beta}(v)} T_v = e^{i\phi(u(v))} T_{u(v)} \overline{F}_{\alpha * \gamma(u(v))}.$$

Así $\tilde{\beta}(v)$ puede ser seleccionado tal que (1.57) se cumple para σ suficientemente pequeño.

Por otra parte, sabemos de (1.49), $(\vec{\nabla}_u + \vec{\nabla}_x)\psi_{(v,\alpha,\sigma)} = 0$. Por consiguiente, $\vec{\nabla}_u\psi_{(v,\alpha,\sigma)} = -\vec{\nabla}_x\psi_{(v,\alpha,\sigma)}$. Luego, para u fijo:

$$2\text{Re}\langle K_X\psi_{v,\alpha,\sigma}, \vec{\nabla}_x\psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle = -\vec{\nabla}_u A_X^\sigma(u, \alpha * \gamma(t)); \quad t = u. \quad (1.58)$$

Finalmente, sustituyendo (1.58) en el lado derecho de la ecuación (1.57), obtenemos (1.52). \square

1.3.2. Transporte de escala 1-dimensión

Sea D un operador lineal del grupo de deformación 1-dimensión (Def. 1.2.1.1) entonces, para el caso de una dimensión, la ecuación (1.41) toma la forma: $\overline{D}^{-1}f(x) = \theta'(x)f(\theta(x))$. El subgrupo invariante estacionario (Prop. 1.2.1.1) es el grupo afín cuyos elementos son $G_\beta f(x) = f(u + sx)$ con $\beta = (u, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.

El adjunto de G_β está determinado por la ecuación (1.43) cuando el parámetro de escala es un escalar $s > 0$ y, caracterizado por un conjunto de grupos de operadores parametrizables (1.40). Por consiguiente:

$$\overline{G}_\beta f(x) = s^{-1}f(s^{-1}(x - u)) = T_u \overline{F}_s f(x) \quad \text{con} \quad \overline{F}_s f(x) = s^{-1}f(s^{-1}x). \quad (1.59)$$

Sea ψ una función con media cero: $\int \psi(x)dx = 0$. La función ψ se denomina *wavelet* (Apéndice A). Usando la ecuación (1.59), tenemos $T_u \overline{F}_s \psi_\sigma(x) = s^{-1}\psi\left(\frac{x-u}{s\sigma}\right)$, con lo cual la descomposición atómica $A_X^\sigma(u, s)$ (ver Ec. (1.46)) toma la forma:

$$A_X^\sigma(u, s) = \mathbb{E} \left\{ \left| \langle X(s), s^{-1}\psi((s\sigma)^{-1}(x-u)) \rangle \right|^2 \right\}.$$

Podemos reducir el número de parámetros de la ecuación anterior dividiendo la descomposición atómica de X por $\sigma^2 > 0$ y escribiendo s en lugar de σs , esto es:

$$\frac{A_X^\sigma(u, s)}{\sigma^2} \Rightarrow \mathbb{E} \left\{ \left| \langle X(x), (s\sigma)^{-1}\psi((s\sigma)^{-1}(x-u)) \rangle \right|^2 \right\}.$$

Así tenemos

$$A_X(u, s) = \mathbb{E} \left\{ \left| \langle X(x), \psi_{u,s}(x) \rangle \right|^2 \right\} \quad (1.60)$$

donde $\psi_{u,s}(x) = s^{-1}\psi(s^{-1}(x-u))$. El producto interno $\langle X, \psi_{u,s} \rangle$ se denomina *coeficiente wavelet* de X en la posición u y escala s , y denominaremos *escalograma* de X la varianza de ese coeficiente dado por (1.60), esa ecuación también puede interpretarse como el promedio del cuadrado de la *transformada de wavelet* en la posición u y escala s (ver Apéndice A).

Veamos que los operadores \overline{D}^{-1} y $\overline{G}_{\beta(v)}$, ambos trasladan el soporte de f desde un entorno de u a un entorno de v que depende de u . Además, se puede dar la expresión $\beta(v)$

correspondiente al operador tangencial que aproxima D^{-1} en la Proposición 1.3.1.1.

De la definición de grupo de operadores de deformación 1-dimensión (Def. 1.2.1.1), consideremos $\theta : [u - s, u + s] \rightarrow \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ y $s > 0$, una función de clase C^3 tal que $\theta'(x) > 0$.

Sea f una función regular con soporte en un entorno de u . Sabemos que si D es un operador lineal se obtiene:

$$\overline{D^{-1}}f(x) = \theta'(x)f(\theta(x)).$$

Queda claro de la ecuación de arriba que $\overline{D^{-1}}$ mueve el soporte de f desde un entorno de u a un entorno de $v = \theta(u)$.

Por otra parte, para todo x en un entorno de u , $\theta(x) = \theta(u) + \theta'(u)(x - u) + \frac{\theta''(u)}{2}(x - u)^2 + \frac{\theta'''(c)}{6}(x - u)^3$, donde c es algún punto entre u y x . Luego, si los términos de mayor potencia del polinomio de Taylor para θ son insignificante obtenemos:

$$\overline{D^{-1}}f(x) \approx \theta'(u)f(v + \theta'(u)(x - u)). \quad (1.61)$$

El lado derecho de la ecuación de arriba se puede escribir como $\overline{G}_{\beta(u)}$. Veamos quién es $\beta(u)$ y qué representa.

En términos generales, la tesis de la Proposición 1.3.1.1, muestra que la propiedad de conservación del proceso deformado X es una consecuencia de la propiedad de transporte de los operadores lineales invariantes estacionarios, (1.51), lo que implica la existencia de una función γ , tal que, para σ suficientemente pequeño se cumple:

$$\vec{\nabla}_u A_X^\sigma(u, \alpha * \gamma(u)) = 0. \quad (1.62)$$

Así, en el sentido de la Proposición 1.3.1.1, podemos decir:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_v \mathbb{E} \{ |\langle X, \psi_{v, \alpha, \sigma} \rangle|^2 \} &= \vec{\nabla}_v \mathbb{E} \left\{ |\langle X, (\overline{G}_{\beta(v)} T_v) \overline{F}_\alpha \psi_\sigma \rangle|^2 \right\} \\ &= \vec{\nabla}_v \mathbb{E} \left\{ |\langle X, e^{i\phi(u(v))} T_{u(v)} (\overline{F}_{\gamma(u(v))} \overline{F}_\alpha) \psi_\sigma \rangle|^2 \right\} \\ &= \vec{\nabla}_v \mathbb{E} \left\{ |\langle X, e^{i\phi(u(v))} T_{u(v)} \overline{F}_{\alpha * \gamma(u(v))} \psi_\sigma \rangle|^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}_v \mathbb{E} \{ |\langle X, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle|^2 \} &= \vec{\nabla}_v \langle K_X T_{u(v)} \bar{F}_{\alpha * \gamma(u(v))} \psi_\sigma, T_{u(v)} \bar{F}_{\alpha * \gamma(u(v))} \psi_\sigma \rangle & (a) \\
&= \vec{\nabla}_v A_X^\sigma(u(v), \alpha * \gamma(u(v))) \\
&= \vec{\nabla}_v \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle \\
&= \vec{\nabla}_u A_X^\sigma(u(v), \alpha * \gamma(u(v))) J_u(v) \\
&= \vec{\nabla}_u A_X^\sigma(u(v), \alpha * \gamma(u(v))) J_v^{-1}(u).
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\vec{\nabla}_u A_X^\sigma(u(v), \alpha * \gamma(u(v))) = \vec{\nabla}_v \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle J_v(u)$$

lo que implica

$$|\vec{\nabla}_u A_X^\sigma(u(v), \alpha * \gamma(u(v)))| \leq \|J_v(u)\| |\vec{\nabla}_v \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle|.$$

No obstante, las hipótesis de la Proposición 1.3.1.1 implica:

$$|\vec{\nabla}_v \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle| = \mathcal{O}(\sigma) |Re \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \vec{\nabla}_x \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle|$$

(ver ec. (1.53)).

Por lo tanto, para u fijo, obtenemos la expresión asintótica para la propiedad de conservación del proceso deformado X , (1.62):

$$|\vec{\nabla}_u A_X^\sigma(u, \alpha * \gamma(u))| = \mathcal{O}(\sigma) |Re \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \vec{\nabla}_x \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle|.$$

Por otra parte, la Proposición 1.2.2.1 muestra que la propiedad de transporte de los operadores lineales invariantes estacionarios, también satisfacen la condición:

$$G_\beta f(x) = G_{(\phi,\xi,S,v)} f(x) = e^{i(\xi \cdot x + \phi)} f \star \rho(Sx - v)$$

la cual podemos escribir en términos de operadores como:

$$G_\beta = e^{i\phi} F_\alpha T_v$$

donde $F_\alpha f(x) = e^{i\xi \cdot x} f \star \rho(Sx)$; $\alpha = (\xi, S) \in \mathbb{R}^d \times GL^+(\mathbb{R}^d)$. De aquí que:

$$\bar{G}_\beta = e^{-i\phi} T_v \bar{F}_\alpha; \quad \beta = (v, \alpha).$$

Este resultado nos muestra que la propiedad de transporte de los operadores lineales invariantes estacionario es equivalente a la actuación conjunta de un grupo de operadores parametrizables, donde la función β no es más que la caracterización de dicha parametrización. Por consiguiente, se sigue de (a):

$$\overline{G}_{(u(v), \alpha * \gamma(u(v)))} = T_{u(v)} \overline{F}_{\alpha * \gamma(u(v))}.$$

Sabemos que localmente ($\sigma \approx 0$), el operador \overline{D}^{-1} puede ser aproximado por el adjunto de un operador invariante estacionario. Por lo tanto, para u fijo y σ suficientemente pequeño, existe una función γ tal que para cada α :

$$\overline{D}^{-1} \approx \overline{G}_{(u, \alpha * \gamma(u))} \quad (1.63)$$

donde $\beta(u) = (u, \alpha * \gamma(u))$.

El resultado anterior prueba que la propiedad de conservación del proceso deformado X , ocurre a lo largo de curvas, *líneas características*, que viven en el espacio paramétrico posición-escala. Tales curvas son descrita por $\beta(u) = (u, \alpha * \gamma(u))$ y dependen del operador de deformación D .

Puesto que la ecuación (1.61) pasa por la expansión de θ por Taylor, la aproximación de \overline{D}^{-1} por $\overline{G}_{\beta(u)}$, depende de cuan *suave* es θ .

Por lo antes expuesto, estamos en condiciones de indentificar quién es $\beta(u)$ en el lado derecho de la ecuación (1.61).

Para el caso particular de una dimensión, se sigue de la ecuación (1.59):

$$\overline{G}_\beta = T_u \overline{F}_s; \quad (u, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$$

donde $\overline{F}_s f(x) = s^{-1} f(s^{-1}x)$. Por consiguiente, queremos expresar $\theta'(u) f(v + \theta'(u)(x - u))$, $v = \theta(u)$, como el resultado de la acción conjunta sobre f de los operadores T y \overline{F} .

Se sigue de la Proposición 1.3.1.1, la propiedad de transporte del operador lineal \overline{G}_β . Luego, para todo $v \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \overline{G}_{\beta(v)} T_v f(x) &= T_v \overline{G}_{\beta(v)} f(x) \\ &= T_v \theta'(u) f(v + \theta'(u)(x - u)) \\ &= \theta'(u) f(\theta'(u)(x - u)) \\ &= T_{u(v)} \overline{F}_{\alpha(u(v))} f(x) \quad ; \alpha(u(v)) = 1/\theta'(u(v)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para u fijo:

$$\beta(u) = \left(u, 1/\theta'(u) \right)$$

esto implica

$$\overline{D}^{-1} \approx \overline{G}_{(u, 1/\theta'(u))}.$$

El siguiente teorema presenta una ecuación de transporte, consecuencia de la Proposición 1.3.1.1, para ello se imponen condiciones adicionales al núcleo de la autocovarianza en una vecindad de cero, a fin de asegurar la unicidad de la solución del problema inverso. Tal condición es más fuerte que la presentada en la Proposición 1.2.1.3. Además se establecen ciertas condiciones sobre ψ para garantizar que $\partial_{\log s} A_X(u, s)$ no se anule para $s > 0$.

El gradiente de deformación $(\log \theta')'(u)$, el cual especifica la clase de equivalencia de D en \mathcal{D}/g (Ec. (1.3)), puede ser calculado a partir de (1.66), tomando s suficientemente pequeño. La estimación del gradiente de deformación a partir de una realización de X será el objeto de estudio en la sección **Estimación de las deformaciones**.

Denotaremos $\partial f/\partial a = \partial_a f$ y $\partial_{\log s} f = \partial f/\partial \log s = s\partial f/\partial s$.

Teorema 1.3.2.1 (Transporte de escala 1D) *Sea Y un proceso estacionario cuya covarianza satisface*

$$c_Y(0) - c_Y(x) = |x|^h \eta(x), \quad \text{con } h > 0, \eta(0) > 0 \quad (1.64)$$

donde η es C^1 en un entorno de cero. Sea $\psi(x)$ una función C^1 con soporte compacto en $[-1, 1]$ tal que

$$\int \psi(x) dx = 0 \quad \text{y} \quad \text{Re} \iint |x - y|^h \psi^*(x) \psi(y) dx dy \neq 0 \quad (1.65)$$

Si

$$X(x) = Y(\theta(x))$$

donde $\theta(x)$ es C^3 y $\theta'(x) > 0$, entonces, para cada $u \in \mathbb{R}$ tal que $\theta''(u) \neq 0$, cuando s tiende a cero

$$\partial_u A_X(u, s) - (\log \theta')'(u) \partial_{\log s} A_X(u, s) = \mathcal{O}(s) \partial_u A_X(u, s) \quad (1.66)$$

Demostración

Este teorema es una consecuencia de la Proposición 1.3.1.1. El operador $\overline{G}_{\beta(v)}$ es dado por (1.61):

$$\overline{G}_{\beta(v)} f(x) = \theta'(u) f\left(v + \theta'(u)(x - u)\right)$$

donde $u = \theta^{-1}(v)$ es un difeomorfismo local. Luego:

$$\begin{aligned}
\overline{G}_{\beta(v)} T_v f(x) &= T_v \overline{G}_{\beta(v)} f(x) \quad (\text{Conmutatividad de los operadores}) \\
&= T_v \theta'(u) f(v + \theta'(u)(x - u)) \\
&= \theta'(u) f(\theta'(u)(x - u)) \\
&= T_{u(v)} \overline{F}_{\alpha(u(v))} f(x)
\end{aligned}$$

donde $\alpha(u(v)) = 1/\theta'(u(v))$. Por lo tanto, se satisface la propiedad de transporte (1.51). Veamos que se cumple la hipótesis (1.50) concerniente a la función:

$$\psi_{v,s,\sigma} = \overline{G}_{\beta(v)} T_v \overline{F}_s \psi_\sigma$$

$$\text{con } \overline{F}_s f(x) = \frac{1}{s} f\left(\frac{x}{s}\right).$$

$$\begin{aligned}
\psi_{v,s,\sigma} &= (\overline{G}_{\beta(v)} T_v) \overline{F}_s \psi_\sigma \\
&= T_{u(v)} \overline{F}_{\alpha(u(v))} \overline{F}_s \psi_\sigma \quad (\text{por (1.51)}) \\
&= T_{u(v)} \overline{F}_{\alpha(u(v))*s} \psi_\sigma
\end{aligned}$$

donde $\alpha(u(v)) * s = s/\theta'(u(v))$. Luego,

$$= \frac{\theta'(u(v))}{s} \psi\left(\frac{\theta'(u(v))}{s\sigma}(x - u(v))\right)$$

renormalizando esta función como en (1.60), obtenemos:

$$\psi_{v,s,\sigma}(x) = \varphi_{v,s}(x) = \frac{\theta'(u)}{s} \psi\left(\frac{\theta'(u)}{s}(x - u)\right). \quad (1.67)$$

Si probamos

$$\left| \text{Re} \left\langle K_X \varphi_{v,s}, \overline{D}^{-1} (\partial_v + \partial_x) \overline{D} \varphi_{v,s} \right\rangle \right| = \mathcal{O}(s) \left| \text{Re} \left\langle K_X \varphi_{v,s}, \partial_x \varphi_{v,s} \right\rangle \right| \quad (1.68)$$

entonces, se sigue de la Proposición 1.3.1.1 la ecuación de transporte (1.52) con $\alpha = s$, $\gamma(u) = \frac{1}{\theta'(u)}$ y $\alpha * \gamma(t) = \frac{s}{\theta'(t)}$, esto es:

$$\left| \partial_u A_X(u, \frac{s}{\theta'(t)}) + \partial_t A_X(u, \frac{s}{\theta'(t)}) \right| = \mathcal{O}\left(\frac{s}{\theta'(u)}\right) \left| \partial_u A\left(u, \frac{s}{\theta'(t)}\right) \right|.$$

Expandiendo $\partial_t A_X$ obtenemos:

$$\partial_t A_X(u, \frac{s}{\theta'(u)}) = \partial_t \frac{s}{\theta'(t)} \cdot \partial_s A_X(u, \frac{s}{\theta'(t)}).$$

Luego

$$\begin{aligned} \left| \partial_u A_X \left(u, \frac{s}{\theta'(t)} \right) + \partial_t \left(\frac{s}{\theta'(t)} \right) \partial_s A_X \left(u, \frac{s}{\theta'(t)} \right) \right| = \\ = \left| \partial_u A_X \left(u, \frac{s}{\theta'(t)} \right) - \frac{s}{\theta'(t)} \frac{\theta''(t)}{\theta'(t)} \partial_s A_X \left(u, \frac{s}{\theta'(t)} \right) \right|. \end{aligned}$$

Puesto que $\partial_{\log s} = s\partial_s$, fijando $t = u$ y s suficientemente pequeño se obtiene:

$$\left| \partial_u A_X(u, s) + \left(\log \theta' \right)'(u) \partial_{\log s} A_X(u, s) \right| = \mathcal{O}(s) |\partial_u A_X(u, s)|$$

lo cual prueba (1.66). De aquí que solo queda demostrar (1.68).

Calculemos

$$\phi_{v,s} = \overline{D}^{-1}(\partial_v + \partial_x)\overline{D}\varphi_{v,s}. \quad (1.69)$$

En una dimensión, las ecuaciones (1.41) y (1.42) toman respectivamente la forma:

$$\overline{D}^{-1}f(x) = \theta'(x)f(\theta(x)) \quad (1.70)$$

y

$$\overline{D}f(x) = \left((\theta' \circ \theta^{-1})(x) \right)^{-1} f(\theta^{-1}(x)). \quad (1.71)$$

Cálculo de $\overline{D}^{-1}\partial_x\overline{D}\varphi_{v,s}$

$$\overline{D}\varphi_{v,s}(x) = \left((\theta' \circ \theta^{-1})(x) \right)^{-1} \varphi_{v,s}(\theta^{-1}(x)) \quad (\text{por (1.42)})$$

$$= \left((\theta' \circ \theta^{-1})(x) \right)^{-1} \frac{\theta'(u)}{s} \psi \left(\frac{\theta'(u)}{s} (\theta^{-1}(x) - u) \right). \quad (\text{por (1.67)})$$

Luego,

$$\begin{aligned} \partial_x \overline{D}\varphi_{v,s}(x) &= \frac{\theta'(u)}{s} \underbrace{\partial_x \left((\theta' \circ \theta^{-1})(x) \right)^{-1}}_{\text{por (1.71)}} \cdot \psi \left(\frac{\theta'(u)}{s} (\theta^{-1}(x) - u) \right) \\ &\quad + \frac{\theta'(u)}{s} \underbrace{\left((\theta' \circ \theta^{-1})(x) \right)^{-1} \partial_x \psi \left(\frac{\theta'(u)}{s} (\theta^{-1}(x) - u) \right)}_{\text{por (1.67)}}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Pero

$$\partial_x \left((\theta' \circ \theta^{-1})(x) \right)^{-1} = - \left((\theta' \circ \theta^{-1})(x) \right)^{-3} (\theta'' \circ \theta^{-1})(x) \quad (1.73)$$

y

$$\partial_x \psi \left(\frac{\theta'(u)}{s} (\theta^{-1}(x) - u) \right) = \psi' \left(\frac{\theta'(u)}{s} (\theta^{-1}(x) - u) \right) \cdot \frac{\theta'(u)}{s} \left((\theta' \circ \theta^{-1})(x) \right)^{-1} \quad (1.74)$$

donde $\partial_x \theta^{-1}(x) = ((\theta' \circ \theta^{-1})(x))^{-1}$. Sustituyendo (1.74) y (1.73) en (1.72) se obtiene:

$$\begin{aligned} \partial_x \bar{D} \varphi_{v,s}(x) &= -\frac{\theta'(u)}{s} \left((\theta' \circ \theta^{-1})(x) \right)^{-3} (\theta'' \circ \theta^{-1})(x) \psi \left(\frac{\theta'(u)}{s} (\theta^{-1}(x) - u) \right) \\ &+ \left(\frac{\theta'(u)}{s} \right)^2 \left((\theta' \circ \theta^{-1})(x) \right)^{-2} \psi' \left(\frac{\theta'(u)}{s} (\theta^{-1}(x) - u) \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \bar{D}^{-1} \partial_x \bar{D} \varphi_{v,s}(x) &= \theta'(x) \left[-\frac{\theta'(u)}{s} (\theta'(x))^{-3} \cdot \theta''(x) \psi \left(\frac{\theta'(u)}{s} (x - u) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\theta'(u)}{s} \right)^2 (\theta'(x))^{-2} \psi' \left(\frac{\theta'(u)}{s} (x - u) \right) \right] \\ &= -\frac{\theta'(u) \theta''(x)}{s (\theta'(x))^2} \psi \left(\frac{\theta'(u)}{s} (x - u) \right) + \frac{(\theta'(u))^2}{s^2 \theta'(x)} \psi' \left(\frac{\theta'(u)}{s} (x - u) \right). \quad (1.75) \end{aligned}$$

Cálculo de $\bar{D}^{-1} \partial_v \bar{D} \varphi_{v,s}$

De los cálculos anteriores sabemos cual es la expresión para $\bar{D} \varphi_{v,s}(x)$. Sustituyendo en la misma $u = \theta^{-1}(v)$ se obtiene:

$$\bar{D} \varphi_{v,s}(x) = \frac{(\theta' \circ \theta^{-1})(v)}{s} \left((\theta' \circ \theta^{-1})(x) \right)^{-1} \psi \left(\frac{(\theta' \circ \theta^{-1})(v)}{s} (\theta^{-1}(x) - \theta^{-1}(v)) \right).$$

Luego,

$$\begin{aligned} \partial_v \bar{D} \varphi_{v,s}(x) &= \underbrace{\partial_v \frac{(\theta' \circ \theta^{-1})(v)}{s}}_s \cdot \left((\theta' \circ \theta^{-1})(x) \right)^{-1} \psi \left(\frac{(\theta' \circ \theta^{-1})(v)}{s} (\theta^{-1}(x) - \theta^{-1}(v)) \right) \\ &+ \frac{(\theta' \circ \theta^{-1})(v)}{s} \left((\theta' \circ \theta^{-1})(x) \right)^{-1} \underbrace{\psi' \left(\frac{(\theta' \circ \theta^{-1})(v)}{s} (\theta^{-1}(x) - \theta^{-1}(v)) \right)}_s \\ &\quad \underbrace{\partial_v \frac{(\theta' \circ \theta^{-1})(v)}{s} (\theta^{-1}(x) - \theta^{-1}(v))}_s \quad (1.76) \end{aligned}$$

pero,

$$\partial_v(\theta' \circ \theta^{-1})(v) = (\theta'' \circ \theta^{-1})(v) \left((\theta' \circ \theta^{-1})(v) \right)^{-1} \quad (1.77)$$

y

$$\begin{aligned} \partial_v \frac{(\theta' \circ \theta^{-1})(v)}{s} (\theta^{-1}(x) - \theta^{-1}(v)) &= \frac{(\theta'' \circ \theta^{-1})(v) \left((\theta' \circ \theta^{-1})(v) \right)^{-1}}{s} (\theta^{-1}(x) - \theta^{-1}(v)) \\ &\quad - \frac{(\theta' \circ \theta^{-1})(v)}{s} \left((\theta' \circ \theta^{-1})(v) \right)^{-1} \end{aligned} \quad (1.78)$$

Luego, sustituyendo (1.77) y (1.78) en (1.76) se obtiene para $\partial_v \overline{D} \phi_{v,s}(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} (\theta'' \circ \theta^{-1})(v) \left((\theta' \circ \theta^{-1})(v) \right)^{-1} \left((\theta' \circ \theta^{-1})(x) \right)^{-1} \psi \left(\frac{(\theta' \circ \theta^{-1})(v)}{s} (\theta^{-1}(x) - \theta^{-1}(v)) \right) \\ + \frac{1}{s} (\theta' \circ \theta^{-1})(v) \left((\theta' \circ \theta^{-1})(x) \right)^{-1} \psi' \left(\frac{(\theta' \circ \theta^{-1})(v)}{s} (\theta^{-1}(x) - \theta^{-1}(v)) \right) \\ \left(\frac{1}{s} (\theta'' \circ \theta^{-1})(v) \left((\theta' \circ \theta^{-1})(v) \right)^{-1} (\theta^{-1}(x) - \theta^{-1}(v)) - \frac{1}{s} \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se sigue de (1.70) y la sustitución $u = \theta^{-1}(v)$:

$$\begin{aligned} \overline{D}^{-1} \partial_v \overline{D} \phi_{v,s}(x) &= \theta'(x) \left[\frac{1}{s} \frac{\theta''(u)}{\theta'(u)} \frac{1}{\theta'(x)} \psi \left(\frac{\theta'(u)}{s} (x - u) \right) + \frac{1}{s} \frac{\theta'(u)}{\theta'(x)} \psi' \left(\frac{\theta'(u)}{s} (x - u) \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{s} \theta''(u) \frac{1}{\theta'(u)} (x - u) - \frac{1}{s} \right) \right] \\ &= \frac{\theta''(u)}{s \theta'(u)} \psi \left(\frac{\theta'(u)}{s} (x - u) \right) + \frac{1}{s^2} ((x - u) \theta''(u) - \theta'(u)) \psi' \left(\frac{\theta'(u)}{s} (x - u) \right). \end{aligned} \quad (1.79)$$

Finalmente, obtenemos la expresión para $\phi_{v,s}$ en (1.69) sumando los resultados (1.75) y (1.79) con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned} \phi_{v,s}(x) &= \frac{1}{s \theta'(u)} \left(\theta''(u) - \left(\frac{\theta'(u)}{\theta'(x)} \right)^2 \theta''(x) \right) \psi \left(\frac{\theta'(u)}{s} (x - u) \right) \\ &\quad + \frac{1}{s^2} \left(\frac{\theta'(u)}{\theta'(x)} (\theta'(u) - \theta'(x)) - (u - x) \theta''(u) \right) \psi' \left(\frac{\theta'(u)}{s} (x - u) \right). \end{aligned} \quad (1.80)$$

Por hipótesis, ψ tiene soporte compacto en $[-1, 1]$, por ende debe cumplirse $\left| \frac{\theta'(u)}{s} (x - u) \right| \leq 1$, por lo tanto, $\phi_{v,s}$ tiene soporte en $[u - s/\theta'(u), u + s/\theta'(u)]$; puesto que $\theta \in \mathbf{C}^3$, para

s suficientemente pequeño, el desarrollo de Taylor para $\theta'(x)$ y $\theta''(x)$ muestra que para x cercano al punto u (Apendice B):

$$\left| \phi_{v,s}(x) - \left(2 \frac{\theta''(u)^2}{\theta'(u)^3} - \frac{\theta'''(u)}{\theta'(u)^2} \right) \left[\frac{\theta'(u)(x-u)}{s} \psi \left(\frac{\theta'(u)(x-u)}{s} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta'(u)(x-u)}{s} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. \psi' \left(\frac{\theta'(u)(x-u)}{s} \right) \right] \right| = \mathcal{O}(x-u). \quad (1.81)$$

Veamos que $\left| \text{Re} \left\langle K_X \varphi_{v,s}, \underbrace{\overline{D^{-1}}(\partial_v + \partial_x) \overline{D} \varphi_{v,s}}_{\phi_{v,s}} \right\rangle \right| = \mathcal{O}(s^{h+1})$.

La autocovarianza del kernel de $X(x)$ es $c_X(x, y) = c_Y(\theta(x) - \theta(y))$. Luego, la descomposición atómica del proceso X en un entorno pequeño de u es igual a:

$$\langle K_X \varphi_{v,s}, \phi_{v,s} \rangle = \iint c_Y(\theta(x) - \theta(y)) \varphi_{v,s}^*(x) \phi_{v,s}(y) dx dy.$$

Por hipótesis, $\int \psi(x) dx = 0$, lo que implica de (1.69) y (1.67), $\int \phi_{v,s} = 0$, así reescribimos la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$\langle K_X \varphi_{v,s}, \phi_{v,s} \rangle = - \iint (c_Y(0) - c_Y(\theta(x) - \theta(y))) \varphi_{v,s}^*(x) \phi_{v,s}(y) dx dy \quad (1.82)$$

donde φ y ϕ tienen soporte en $[u - s/\theta'(u), u + s/\theta'(u)]$.

La función η es \mathbf{C}^1 en un entorno de 0, por lo tanto, $\eta'(0)$ existe:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\eta(z) - \eta(0)}{z} = \eta'(0)$$

Así para z suficientemente cercano a 0:

$$\eta(z) \approx \eta(0) + \eta'(0)|z|$$

por consiguiente

$$\eta(z)|z|^h \approx \eta(0)|z|^h + \eta'(0)|z|^{h+1}$$

Por la continuidad de η escribimos:

$$\eta(z)|z|^h = \eta(0)|z|^h + o(|z|^h)$$

lo que implica por hipótesis sobre la covarianza del proceso Y :

$$c_Y(0) - c_Y(z) = \eta(0)|z|^h + o(|z|^h) \quad (1.83)$$

$\theta \in \mathbf{C}^3$ y su expansión en serie de Taylor para todo x en un entorno de u :

$$\theta(x) = \theta(u) + \theta'(u)(x - u) + \frac{\theta''(u)}{2}(x - u)^2 + \frac{\theta'''(c)}{6}(x - u)^3 \quad (1.84)$$

donde c es un punto entre x y u .

Sean x, y puntos diferentes y cercanos al punto u tal que $x - y$ vive en un entorno de cero. Supongamos que θ es lo suficientemente *suave* para que por (1.84) se obtenga:

$$\theta(x) - \theta(y) \approx \theta'(u)(x - y).$$

Luego,

$$\begin{aligned} c_Y(0) - c_Y(\theta(x) - \theta(y)) &\approx c_Y(0) - c_Y(\theta'(u)(x - y)) \\ &\approx \eta(0)|\theta'(u)(x - y)|^h. \quad (\text{por (1.83)}) \end{aligned}$$

Sustituyendo este último resultado en el integrando de (1.82), conjuntamente con la expresión para $\phi_{v,s}$ en un entorno de u , (1.81), obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle K_X \varphi_{v,s}, \phi_{v,s} \rangle &\approx - \iint \eta(0) |\theta'(u)(x - y)|^h \frac{\theta'(u)}{s} \psi^* \left(\frac{\theta'(u)}{s} (x - u) \right) \left(\frac{2\theta''(u)^2}{\theta'(u)^3} - \frac{\theta'''(u)}{\theta'(u)^2} \right) \times \\ &\quad \left[\frac{\theta'(u)(y - u)}{s} \psi \left(\frac{\theta'(u)}{s} (y - u) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta'(u)(y - u)}{s} \right)^2 \psi' \left(\frac{\theta'(u)}{s} (y - u) \right) \right] dx dy. \quad (1.85) \end{aligned}$$

Sea z una variable genérica que representa x o y . Luego, en (1.85) hacemos el cambio de variable $\tilde{z} = \frac{\theta'(u)(z - u)}{s}$, por ende, $dz = \frac{sd\tilde{z}}{\theta'(u)}$ y $\theta'(u)(x - y) = s(\tilde{x} - \tilde{y})$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \langle K_X \varphi_{v,s}, \phi_{v,s} \rangle &= \\ &\iint \eta(0) |s(\tilde{x} - \tilde{y})|^h \psi^*(\tilde{x}) \left(\frac{2\theta''(u)^2}{\theta'(u)^3} - \frac{\theta'''(u)}{\theta'(u)^2} \right) \left[\tilde{y} \psi(\tilde{y}) + \frac{\tilde{y}^2}{2} \psi'(\tilde{y}) \right] \frac{s}{\theta'(u)} d\tilde{x} d\tilde{y} \quad (1.86) \end{aligned}$$

donde,

$$|\tilde{x} - \tilde{y}|^h \psi^*(\tilde{x}) \left[\tilde{y} \psi(\tilde{y}) + \frac{\tilde{y}^2}{2} \psi'(\tilde{y}) \right]$$

es una función continua sobre el compacto $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Por lo tanto, existe una constante positiva N tal que

$$|\tilde{x} - \tilde{y}|^h |\psi^*(\tilde{x})[\tilde{y}\psi(\tilde{y}) + \frac{\tilde{y}^2}{2}\psi'(\tilde{y})]| \leq N$$

para todo $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.

Por consiguiente,

$$|Re\langle K_X \varphi_{v,s}, \phi_{v,s} \rangle| \leq N s^{h+1} \Rightarrow |Re\langle K_X \varphi_{v,s}, \phi_{v,s} \rangle| = \mathcal{O}(s^{h+1}). \quad (1.87)$$

Ahora calculemos $\langle K_X \varphi_{v,s}, \partial_x \varphi_{v,s} \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle K_X \varphi_{v,s}, \partial_x \varphi_{v,s} \rangle &= \iint c_Y(\theta(x) - \theta(y)) \varphi_{v,s}^*(x) \frac{d}{dy} \varphi_{v,s}(y) dx dy \\ &= \int \varphi_{v,s}^*(x) \left[\int c_Y(\theta(x) - \theta(y)) \frac{d}{dy} \varphi_{v,s}(y) dy \right] dx. \end{aligned}$$

Integrando por parte la integral entre corchetes, obtenemos:

$$= \underbrace{\int c_Y(\theta(x) - \theta(y)) \varphi_{v,s}^*(x) \varphi_{v,s}(y) dx}_I + \underbrace{\iint \theta'(y) c_Y'(\theta(x) - \theta(y)) \varphi_{v,s}^*(x) \varphi_{v,s}(y) dx dy}_{II}$$

donde

$$I = \varphi_{v,s}(y) \int c_Y(\theta(x) - \theta(y)) \frac{\theta'(u)}{s} \psi\left(\frac{\theta'(u)}{s}(x - u)\right) dx. \quad (\text{por (1.67)})$$

Hacemos el cambio de variable $\tilde{x} = \frac{\theta'(u)}{s}(x - u)$ y reemplazamos $\theta(x)$ por su aproximación de Taylor entorno al punto u : $\theta(x) = \theta(u) + \theta'(u)(x - u) + o(x - u)$. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} I &\approx \varphi_{v,s}(y) \int c_Y(s(\tilde{x} - \tilde{y})) \psi(\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &= \varphi_{v,s}(y) \int \left[c_Y(0) - \eta(0) |s(\tilde{x} - \tilde{y})|^h \right] \psi(\tilde{x}) d\tilde{x}. \quad (\text{por (1.83)}) \end{aligned}$$

Puesto que $\int \psi = 0$ se tiene:

$$I \approx -\varphi_{v,s}(y) \int \eta(0) |s(\tilde{x} - \tilde{y})|^h \psi(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Por lo tanto,

$$|I| = \mathcal{O}(s^h).$$

Por otra parte,

$$II = \iint \theta'(y) c_Y'(\theta(x) - \theta(y)) \varphi_{v,s}^*(x) \varphi_{v,s}(y) dx dy.$$

Puesto que $c'_Y(z)$ es anti simétrica ($c'_Y(-x) = -c'_Y(x)$), escribimos:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle K_X \varphi_{v,s}, \partial_x \varphi_{v,s} \rangle &= \iint \frac{\theta'(y)c'_Y(\theta(x) - \theta(y)) - \theta'(x)c'_Y(\theta(x) - \theta(y))}{2} \operatorname{Re}(\varphi_{v,s}^*(x)\varphi_{v,s}(y)) dx dy \\ &= -\frac{1}{2} \iint (\theta'(x) - \theta'(y))c'_Y(\theta(x) - \theta(y)) \operatorname{Re}(\varphi_{v,s}^*(x)\varphi_{v,s}(y)) dx dy \\ &= -\frac{1}{2} \iint (\theta'(x) - \theta'(y))c'_Y(\theta(x) - \theta(y)) \operatorname{Re}\left[\frac{\theta'(u)}{s}\psi^*\left(\frac{\theta'(u)}{s}(x-u)\right)\frac{\theta'(u)}{s}\psi\left(\frac{\theta'(u)}{s}(y-u)\right)\right] dx dy. \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable, $\tilde{x} = \frac{\theta'(u)}{s}(x-u)$ y $\tilde{y} = \frac{\theta'(u)}{s}(y-u)$, donde $x = u + \frac{s\tilde{x}}{\theta'(u)}$ y $y = u + \frac{s\tilde{y}}{\theta'(u)}$. Luego:

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \iint \left(\theta'\left(u + \frac{s\tilde{x}}{\theta'(u)}\right) - \theta'\left(u + \frac{s\tilde{y}}{\theta'(u)}\right)\right) \times c'_Y\left(\theta\left(u + \frac{s\tilde{x}}{\theta'(u)}\right) - \theta\left(u + \frac{s\tilde{y}}{\theta'(u)}\right)\right) \times \\ &\qquad \qquad \qquad \operatorname{Re}[\psi^*(\tilde{x})\psi(\tilde{y})] d\tilde{x}d\tilde{y}. \end{aligned}$$

Por otra parte, se sigue de (1.83):

$$-c'_Y(z) = h\eta(0) \cdot \operatorname{sign}(z)|z|^{h-1} + o(|z|^{h-1}); \quad \operatorname{sign}(z) = \frac{z}{|z|}. \quad (1.88)$$

Regresamos a la última integral y reemplazamos $\theta(x)$ y $\theta'(x)$ por sus expansiones en serie de Taylor, entorno al punto u . Asimismo, usamos (1.88) en el integrando, con lo cual obtenemos para s suficientemente pequeño:

$$|\operatorname{Re}\langle K_X \varphi_{v,s}, \partial_x \varphi_{v,s} \rangle| = \left| \frac{1}{2} \iint \frac{\theta''(u)}{\theta'(u)} h\eta(0) s^h |\tilde{x} - \tilde{y}|^h \operatorname{Re}[\psi^*(\tilde{x})\psi(\tilde{y})] d\tilde{x}d\tilde{y} \right| = \mathcal{O}(s^h). \quad (1.89)$$

Observación: Si $z > 0$ o $z < 0$, en cualquier caso, $\operatorname{sign}(z) \cdot z = |z|$.

No obstante, por hipótesis $\operatorname{Re} \iint |x-y|^h \psi^*(x)\psi(y) dx dy \neq 0$ y $\theta''(u) \neq 0$, entonces existen una función continua $a(u) > 0$ y un entorno de u tales que:

$$|\operatorname{Re}\langle K_X \varphi_{v,s}, \partial_x \varphi_{v,s} \rangle| \geq a(u)s^h + o(s^h). \quad (1.90)$$

Por lo tanto, se sigue de las propiedades del orden asintótico, (1.87) implica (1.68). En efecto, se sigue de (1.87), existe una constante positiva N tal que:

$$|\operatorname{Re}\langle K_X \varphi_{v,s}, \phi_{v,s} \rangle| \leq s^{h+1} N.$$

Luego, conjuntamente con (1.90) obtenemos:

$$\frac{a(u)}{Ns} |Re\langle K_X \varphi_{v,s}, \phi_{v,s} \rangle| \leq a(u)s^h \leq |Re\langle K_X \varphi_{v,s}, \partial_x \varphi_{v,s} \rangle|$$

lo que implica

$$|Re\langle K_X \varphi_{v,s}, \phi_{v,s} \rangle| \leq s \frac{N}{a(u)} |Re\langle K_X \varphi_{v,s}, \partial_x \varphi_{v,s} \rangle|$$

donde $N/a(u)$ es una constante positiva. Por lo tanto,

$$|Re\langle K_X \varphi_{v,s}, \phi_{v,s} \rangle| = \mathcal{O}(s) |Re\langle K_X \varphi_{v,s}, \partial_x \varphi_{v,s} \rangle|.$$

con lo cual se satisface la hipótesis (1.68) de la Proposición 1.3.1.1, en consecuencia se obtiene la ecuación de transporte (1.66). □

La ecuación de transporte (1.66) muestra que el coeficiente de velocidad tiende al gradiente de deformación $\theta''(u)/\theta'(u)$ cuando $s \rightarrow 0$. Veamos que esto es consecuencia de la propiedad de conservación del proceso X , debido a su vez a la estacionariedad del proceso Y . Esto se resume en una propiedad de migración de los parámetros entre los escalogramas de los procesos X y Y sobre el espacio paramétrico (u, s) .

Puesto que $X(x) = Y(\theta(x))$, donde $\theta : [u - s, u + s] \rightarrow \mathbb{R}$ una función, para $u \in \mathbb{R}$ y $s > 0$ tal que $\theta \in \mathcal{C}^3$ y $\theta'(x) > 0$. Se sigue de la definición de los coeficientes de wavelet de X , en la posición u y escala s , para una función madre ψ :

$$\langle X, \psi_{u,s} \rangle = \int Y(\theta(x)) \frac{1}{s} \psi\left(\frac{x-u}{s}\right) dx.$$

Hacemos el cambio de variable: $\tilde{x} = \theta(x)$ en un entorno pequeño de u (s pequeño). Por consiguiente, $dx = \frac{d\tilde{x}}{\theta'(\theta^{-1}(\tilde{x}))}$, con lo cual obtenemos:

$$\langle X, \psi_{u,s} \rangle = \int Y(\tilde{x}) \frac{1}{s} \psi\left(\frac{\theta^{-1}(\tilde{x}) - u}{s}\right) \frac{d\tilde{x}}{\theta'(\theta^{-1}(\tilde{x}))}.$$

Puesto que ψ tiene soporte compacto en $[-1, 1]$, $\psi\left(\frac{\theta^{-1}(\tilde{x}) - u}{s}\right) \neq 0$ si y solo si $\left|\frac{\theta^{-1}(\tilde{x}) - u}{s}\right| \leq 1$, esto es, $\tilde{x} \in [\theta(u-s), \theta(u+s)]$, puesto que θ es creciente en un entorno de x . Si $s \ll \frac{\theta'(u)}{\theta''(u)}$ (escala s es pequeña con relación a la escala de variación de la deformación), una expansión de Taylor para θ alrededor de la posición u implica $|\tilde{x} - \theta(u)| \leq 2\theta'(u)s$.

En efecto, para todo x en un entorno pequeño de u , $[u - s, u + s]$:

$$\begin{aligned}
\theta(x) &= \theta(u) + \theta'(u)(x - u) + \frac{1}{2}\theta''(u)(x - u)^2 + o(x - u)^2 = \tilde{x} \\
&= \theta(u) + s \left(\theta'(u) \frac{x - u}{s} + \frac{1}{2}s\theta''(u) \left(\frac{x - u}{s} \right)^2 \right) + o(x - u)^2.
\end{aligned}$$

Para s lo suficientemente pequeño tal que $s\theta''(u) \ll \theta'(u)$, obtenemos:

$$|\tilde{x} - \theta(u)| \leq \theta'(u)|x - u| \leq 2\theta'(u)s.$$

Por lo tanto, es claro que cuando $s \rightarrow 0$, $\tilde{x} \rightarrow \theta(u)$ y $\theta'(\theta^{-1}(\tilde{x})) \approx \theta'(u)$.

Por otra parte, puesto que $\psi \in \mathcal{C}^1$,

$$\psi \left(\frac{x - u}{s} \right) = \psi(0) + \psi'(0) \left(\frac{x - u}{s} \right) + o(x - u). \quad (1.91)$$

Pero, $\tilde{x} \approx \theta(u) + \theta'(u)(x - u)$, lo que implica

$$\frac{\tilde{x} - \theta(u)}{s\theta'(u)} \approx \frac{x - u}{s}. \quad (1.92)$$

Dado que ψ tiene soporte compacto en el intervalo $[-1, 1]$, tiene que ocurrir $\left| \frac{\tilde{x} - \theta(u)}{s\theta'(u)} \right| \leq 1$ entonces, para s pequeño:

$$\begin{aligned}
\psi \left(\frac{\tilde{x} - \theta(u)}{s\theta'(u)} \right) &\approx \psi(0) + \psi'(0) \left(\frac{\tilde{x} - \theta(u)}{s\theta'(u)} \right) \\
&\approx \psi(0) + \psi'(0) \left(\frac{x - u}{s} \right) \quad (\text{por (1.92)}) \\
&\approx \psi \left(\frac{x - u}{s} \right). \quad (\text{por (1.91)})
\end{aligned}$$

Pero, $x = \theta^{-1}(\tilde{x})$. Luego, se sigue de la última aproximación:

$$\psi \left(\frac{\theta^{-1}(\tilde{x}) - u}{s} \right) \approx \psi \left(\frac{\tilde{x} - \theta(u)}{s\theta'(u)} \right).$$

En consecuencia,

$$\langle X, \psi_{u,s} \rangle \approx \int Y(x) \frac{1}{s\theta'(u)} \psi \left(\frac{x - \theta(u)}{s\theta'(u)} \right) dx$$

donde $\frac{1}{s\theta'(u)} \psi \left(\frac{x - \theta(u)}{s\theta'(u)} \right) = \psi_{\theta(u), \theta'(u)s}(x)$.

Así, $\langle X, \psi_{u,s} \rangle \approx \langle Y, \psi_{\theta(u), \theta'(u)s} \rangle$, lo que implica una relación de los escalogramas de los procesos X y Y , dada por una migración de sus parámetros en el espacio paramétrico posición-escala, esto es:

$$A_X(u, s) \approx A_Y(\theta(u), \theta'(u)s).$$

Sea s_o una constante fija, $s_o \ll \frac{\theta'(u)}{\theta''(u)}$ y sea $s(u) = \frac{s_o}{\theta'(u)}$. Para $s = s(u)$

$$A_X(u, s(u)) \approx A_Y(\theta(u), s_o). \quad (1.93)$$

Puesto que Y es estacionario, $A_Y(\theta(u), s_o)$ no depende del parámetro u ; por lo tanto,

$$\frac{d}{du} A_X(u, s(u)) \approx 0.$$

Expandiendo la derivada total $\frac{d}{du}$ como una combinación lineal de las derivadas parciales, se tiene:

$$\frac{d}{du} A_X(u, s(u)) = \partial_u A_X(u, s(u)) + s'(u) \partial_s A_X(u, s(u)).$$

Note que

$$s_o = s(u)\theta'(u) \Rightarrow s'(u) = -\frac{\theta''(u)}{\theta'(u)}s(u).$$

Luego, para $s = s(u)$ suficientemente pequeño

$$\partial_u A_X(u, s) - \frac{\theta''(u)}{\theta'(u)} \partial_{\log s} A_X(u, s) \approx 0. \quad (1.94)$$

Esto muestra que el gradiente de deformación es solución de la ecuación de transporte eligiendo s suficientemente pequeño. Más aún, el cociente $\frac{\theta''}{\theta'}(u)$ representa localmente, en un entorno de u , la clase de deformación involucrada en el proceso estocástico Y . Por otra parte, la ecuación (1.93) permite afirmar que la distorsión del proceso estacionario Y se traduce en la migración del escalograma en el espacio paramétrico posición-escala, para escala fina.

1.4. Estimación de la deformación

El gradiente de deformación aparece como un vector de velocidad de la ecuación de transporte (1.94). Para estimarlo a partir de una sola realización de X , las derivadas $\partial_u A_X(u, s)$ y $\partial_{\log s} A_X(u, s)$ de la descomposición atómica de X tienen que ser estimadas a partir de una sola realización de ese proceso. Esta sección estudia la consistencia de tales estimadores para el problema de la estimación del gradiente de deformación en una dimensión.

1.4.1. El gradiente de deformación en 1-dimensión

La siguiente declaración es una ligera adaptación de la Proposición 1.3.1.1, útil para la prueba del Lema 1.4.1.1.

Proposición 1.4.1.1 *Sea $X = DY$, con Y estacionario. Supongamos que para cada $v \in \mathbb{R}^d$, existe $\beta(v)$ tal que, para cada α , la función $\psi_{v,\alpha,\sigma} = \overline{G}_{\beta(v)} T_v \overline{F}_\alpha \psi_\sigma$ satisface:*

$$Re \langle K_X \underbrace{\psi_{v,\alpha,\sigma}}_{\varphi_{v,s}}, \underbrace{\overline{D}^{-1}(\partial_v + \partial_x) \overline{D} \psi_{v,\alpha,\sigma}}_{\phi_{v,s}} \rangle = c(u, \sigma) Re \langle K_K \psi_{v,\alpha,\sigma}, \partial_x \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle \quad (1.95)$$

Si existe un difeomorfismo $u(v)$ y dos funciones $\phi(u)$ y $\gamma(u)$ tal que

$$\overline{G}_{\beta(v)} T_v = e^{i\phi(u(v))} T_{u(v)} \overline{F}_{\gamma(u(v))} \quad (1.96)$$

entonces, para cada (u, α) , dado $t = u$:

$$\partial_u A_X^\sigma(u, \alpha) + \partial_t (\alpha * \gamma^{-1}(u) * \gamma(t)) \partial_\alpha A_X^\sigma(u, \alpha) = c(u, \alpha) \partial_u A_X^\sigma(u, \alpha) \quad (1.97)$$

Demostración

Por analogía usaremos un argumento similar a la prueba de la Proposición 1.3.1.1.

El operador de la autocovarianza de $X = DY$ satisface la ecuación $K_X = DK_Y \overline{D}$ (1.34). Por lo tanto:

$$\langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle = \langle K_Y \overline{D} \psi_{v,\alpha,\sigma}, \overline{D} \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle.$$

Calculemos la derivada espacial del proceso X :

$$\partial_v \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle = 2Re \langle K_Y \overline{D} \psi_{v,\alpha,\sigma}, (\partial_v + \partial_x) \overline{D} \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle - 2Re \langle K_Y \overline{D} \psi_{v,\alpha,\sigma}, \partial_x \overline{D} \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle.$$

Puesto que Y es estacionario, para cualquier g se tiene $\langle K_Y g, \partial_x g \rangle = 0$, así:

$$\partial_v \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle = 2Re \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \overline{D}^{-1}(\partial_v + \partial_x) \overline{D} \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle.$$

La hipótesis (1.95) implica que

$$\partial_v \langle K_K \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle = c(u, \sigma) Re \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \partial_x \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle. \quad (1.98)$$

Puesto que $\psi_{v,\alpha,\sigma} = \overline{G}_{\beta(v)} T_v \overline{F}_\alpha \psi_\sigma$, se sigue de la propiedad de transporte (1.96):

$$\begin{aligned} \psi_{v,\alpha,\sigma} &= e^{i\phi(u(v))} T_{u(v)} \overline{F}_{\gamma(u(v))} \overline{F}_\alpha \psi_\sigma \\ &= e^{i\phi(u(v))} T_{u(v)} \overline{F}_{\alpha * \gamma(u(v))} \psi_\sigma. \end{aligned}$$

Es claro que la fase $e^{i\phi(u(v))}$ desaparece en $\langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle$. Luego:

$$\begin{aligned} \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle &= \langle K_X T_{u(v)} \overline{F}_{\alpha * \gamma(u(v))} \psi_\sigma, T_{u(v)} \overline{F}_{\alpha * \gamma(u(v))} \psi_\sigma \rangle \\ &= A_X^\sigma(u(v), \alpha * \gamma(u(v))) \end{aligned} \quad (1.99)$$

por definición de la descomposición atómica del proceso X (1.47).

Ahora,

$$\begin{aligned} \partial_v \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle &= \partial_v A_X^\sigma(u(v), \alpha * \gamma(u(v))) \\ &= \partial_u A_X^\sigma(u(v), \alpha * \gamma(u(v))) \frac{\partial u}{\partial v}. \end{aligned}$$

Esto implica:

$$\partial_u A_X^\sigma(u(v), \alpha * \gamma(u(v))) = \frac{\partial v}{\partial u} \partial_v \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle.$$

Usando (1.98) tenemos para u fijo:

$$\partial_u A_X^\sigma(u, \alpha * \gamma(u)) = c(u, \sigma) \operatorname{Re} \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \partial_x \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle.$$

Esta ecuación puede reescribirse como una ecuación de transporte en el dominio $(u; \alpha)$ expandiendo el gradiente con respecto a t , tal como se indica en (1.56), así:

$$\partial_u A_X^\sigma(u, \alpha * \gamma(t)) + \partial_t (\alpha * \gamma(t)) \partial_\alpha A_X^\sigma(u, \alpha * \gamma(t)) = c(u, \sigma) \operatorname{Re} \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \partial_x \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle. \quad (1.100)$$

De la ecuación (1.49), $(\partial_u + \partial_x) T_u f(x) = 0$, lo que implica $\partial_u T_u f(x) = -\partial_x T_u f(x)$. Luego:

$$\begin{aligned} \partial_u \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma}, \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle &= 2 \operatorname{Re} \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \partial_u \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle \\ &= 2 \operatorname{Re} \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, -\partial_x \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle \\ &= -2 \operatorname{Re} \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \partial_x \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle. \end{aligned}$$

Para u fijo, se deduce de (1.99):

$$2 \operatorname{Re} \langle K_X \psi_{v,\alpha,\sigma}, \partial_x \psi_{v,\alpha,\sigma} \rangle = -\partial_u A_X^\sigma(u, \alpha * \gamma(t)); \quad t = u.$$

Por lo tanto, sustituyendo este resultado en (1.100) y reemplazando la variable libre α por $\alpha * \gamma^{-1}(u)$, obtenemos (1.97).

□

Lema 1.4.1.1 *Bajo las hipótesis del Teorema 1.3.2.1 (transporte de escala 1D):*

$$\partial_u A_X(u, s) - (\log \theta')'(u) \partial_{\log s} A_X(u, s) = s(C(u) + o(1)) \partial_u A_X(u, s) \quad (1.101)$$

donde C es continua.

Demostración

Este lema es una consecuencia de la Proposición 1.4.1.1, el cual es simplemente un arreglo de la propiedad de conservación del proceso deformado X .

Bajo las hipótesis del teorema de transporte de escala unidimensional (Teo. 1.3.2.1), el adjunto de todo operador invariante estacionario satisface cierta propiedad de transporte (1.51) y, para la función $\psi_{v,s,\sigma}$ se satisface la condición (1.50), donde

$$\psi_{v,s,\sigma}(x) = \varphi_{v,s}(x) = \frac{\theta'(u)}{s} \psi \left(\frac{\theta'(u)}{s} (x - u) \right)$$

y

$$\phi_{v,s}(x) = \overline{D^{-1}}(\partial_v + \partial_x) \overline{D} \varphi_{v,s}(x).$$

Puesto que $\psi \in \mathbf{C}^1$ con soporte compacto en $[-1, 1]$ y $\theta \in \mathbf{C}^3$, las series de Taylor de $\theta'(x)$ y $\theta''(x)$ en un entorno de u , muestra que para x cercano a la posición u : (ver Apéndice B):

$$\left| \phi_{v,s}(x) - \left(2 \frac{\theta''(u)^2}{\theta'(u)^3} - \frac{\theta'''(u)}{\theta'(u)^2} \right) \left[\frac{\theta'(u)(x-u)}{s} \psi \left(\frac{\theta'(u)(x-u)}{s} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta'(u)(x-u)}{s} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. \psi' \left(\frac{\theta'(u)(x-u)}{s} \right) \right] \right| = \mathcal{O}(x-u). \quad (1.102)$$

Veamos que

$$Re \langle K_X \varphi_{v,s}, \phi_{v,s} \rangle = c(u, s) Re \langle K_X \varphi_{v,s}, \partial_x \varphi_{v,s} \rangle. \quad (1.103)$$

Considerando el comportamiento casi h -homogéneo de la covarianza del proceso estacionario Y ; c_Y , en un entorno de 0, así como $\eta \in \mathbf{C}^1$ en una vecindad de cero y, las hipótesis involucradas en el resultado (1.102), se obtiene (1.86), esto es

$$\langle K_X \varphi_{v,s}, \phi_{v,s} \rangle = \\ \iint \eta(0) |s(\tilde{x} - \tilde{y})|^h \psi^*(\tilde{x}) \left(\frac{2\theta''(u)^2}{\theta'(u)^3} - \frac{\theta'''(u)}{\theta'(u)^2} \right) \left[\tilde{y} \psi(\tilde{y}) + \frac{\tilde{y}^2}{2} \psi'(\tilde{y}) \right] \frac{s}{\theta'(u)} d\tilde{x} d\tilde{y}$$

donde la integral es una función continua B en un entorno de u . Por consiguiente:

$$Re \langle K_X \varphi_{v,s}, \phi_{v,s} \rangle = s^{h+1} (B(u) + o(1)). \quad (1.104)$$

Por hipótesis, $Re \iint |x - y|^h \psi^*(x) \psi(y) dx dy \neq 0$ y $\theta''(u) \neq 0$. Por lo tanto se sigue del cálculo de $\langle K_X \varphi_{v,s}, \partial_x \varphi_{v,s} \rangle$ (ver prueba del Teorema 1.3.2.1, Ec. (1.89)):

$$\begin{aligned} Re \langle K_X \varphi_{v,s}, \partial_x \varphi_{v,s} \rangle &= \frac{1}{2} \iint \frac{\theta''(u)}{\theta'(u)} h \eta(0) s^h |\tilde{x} - \tilde{y}|^h Re(\psi^*(\tilde{x}) \psi(\tilde{y})) d\tilde{x} d\tilde{y} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\theta''(u)}{\theta'(u)} s^h (1 + o(1)) h \eta(0) \iint |\tilde{x} - \tilde{y}|^h Re(\psi^*(\tilde{x}) \psi(\tilde{y})) d\tilde{x} d\tilde{y} \end{aligned} \quad (1.105)$$

donde $\theta''(u)/\theta'(u)$ es una función continua en u .

Al comparar el orden de (1.104) con el orden de (1.105), sobre un entorno pequeño de u , se observa que (1.103) se satisface con $c(u, s) = s(C(u) + o(1))$, C continua. Por consiguiente, se sigue de la Proposición 1.4.1.1 la ecuación (1.101), con $\alpha = s$, $\gamma(u) = \frac{1}{\theta'(u)}$ y $\alpha * \gamma(t) = \frac{s}{\theta'(t)}$.

□

1.4.1.1. Estimador de la deformación en 1-dimensión y sus propiedades estadísticas

Esta sección se centra en el problema de hallar el estimador del gradiente de deformación en 1-dimensión, a partir de una realización del proceso X . Se desea estimar $\frac{\theta''(u)}{\theta'(u)}$, que es solución de la ecuación de transporte (1.66), para valores pequeños del parámetro de escala s . Por consiguiente, se requiere estimar las derivadas parciales $\partial_u A_X(u, s)$ y $\partial_{\log s} A_X(u, s)$.

Definición 1.4.1.1 *Sea 'a' una variable genérica que denota u o $\log s$, definimos*

$$\overline{\partial_a A_X}(u, s) = \int g(u - v) \partial_a A_X(v, s) dv$$

La definición anterior muestra que $\overline{\partial_a A_X}(u, s)$ es la convolución de g y $\partial_a A_X$, lo que implica un "suavizamiento" de $\partial_a A_X$.

Por definición, $A_X(u, s) = \mathbb{E} \{ |\langle X, \psi_{u,s} \rangle|^2 \}$ (1.60). Luego,

$$\partial_a A_X(u, s) = \partial_a \mathbb{E} \{ |\langle X, \psi_{u,s} \rangle|^2 \}.$$

donde 'a' es una variable genérica que denota u o s . Nótese que el operador de la derivada, ∂_a , está referida a una variable distinta a la variable que se integra mediante el operador \mathbb{E} . Por consiguiente, esos operadores pueden intercambiarse, con lo cual se tiene:

$$\partial_a A_X(u, s) = 2 Re \mathbb{E} \{ \langle X, \psi_{u,s} \rangle \langle X, \partial_a \psi_{u,s} \rangle^* \} \quad (1.106)$$

con

$$\partial_u \psi(x) = \psi'(x) \quad (1.107)$$

$$\partial_{\log s} \psi(x) = -\psi(x) - x\psi'(x) \quad (1.108)$$

Puesto que $\psi \in C^1$ entonces, $A_X(u, s)$ también es de clase C^1 con respecto al parámetro u o s .

La ecuación (1.106) sugiere un estimador para $\partial_a A_X(u, s)$, a partir de una realización del proceso estocástico X , de la siguiente forma:

$$\widehat{\partial_a A_X}(u, s) = 2Re \{ \langle X, \psi_{u,s} \rangle \langle X, \partial_a \psi_{u,s} \rangle^* \}. \quad (1.109)$$

Claramente $\widehat{\partial_a A_X}(u, s)$ es un estimador insesgado del parámetro $\partial_a A_X(u, s)$, esto es,

$$\mathbb{E} \left\{ \widehat{\partial_a A_X}(u, s) \right\} = \partial_a A_X(u, s). \quad (1.110)$$

Desafortunadamente, la varianza de $\widehat{\partial_a A_X}(u, s)$ es típicamente más grande que $\partial_a A_X(u, s)$, lo que conduce a un error cuadrático medio inaceptablemente grande. Para reducir la varianza, calculamos un promedio ponderado de la ecuación de transporte (1.66), por convolución con una función de ventana positiva continua g , soportada en $[u - \Delta, u + \Delta]$.

Si u es tal que $\theta''(u) \neq 0$, condición impuesta para la ecuación de transporte (1.66) - ver ec. (1.89) -, por continuidad de $\partial_u A_X$, su signo permanece constante sobre el compacto $[u - \Delta, u + \Delta]$, para Δ suficientemente pequeño y, por la continuidad de C en Lema 1.4.1.1, convolucionando el lado derecho de esa ecuación con g se tiene:

$$s \int_{u-\Delta}^{u+\Delta} g(u-v) (C(v) + o(1)) \partial_u A_X(v, s) dv \leq sM \int_{u-\Delta}^{u+\Delta} g(u-v) \partial_u A_X(v, s) dv$$

donde M es el supremo de la función C sobre el compacto $[u - \Delta, u + \Delta]$. Luego, se sigue de la Definición 1.4.1.1

$$g * s (C(u) + o(1)) \partial_u A_X = \mathcal{O}(s) \overline{\partial_u A_X}(u, s). \quad (1.111)$$

Por otra parte, convolucionando el primer miembro de (1.101) y g se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{u-\Delta}^{u+\Delta} g(u-v) (\partial_u A_X(v, s) - (\log \theta')(v) \partial_{\log s} A_X(v, s)) dv \\ &= \overline{\partial_u A_X}(u, s) - \int_{u-\Delta}^{u+\Delta} g(u-v) (\log \theta')'(v) \partial_{\log s} A_X(v, s) dv. \end{aligned} \quad (1.112)$$

La hipótesis del teorema de transporte de escala unidimensional (Teorema 1.3.2.1) implica que $\partial_{\log s} A_X(u, s)$ no se anule, es decir, las condiciones impuestas sobre c_Y (1.64) y ψ (1.65) garantizan que $\partial_{\log s} A_X(u, s) \neq 0$, para $s > 0$ (ver ecs.(1.89) y (1.90)) y, por continuidad de

$\partial_{\log s} A_X(v, s)$, este conserva el signo para v en $[u - \Delta, u + \Delta]$.

Puesto que la función de deformación θ es de clase C^3 , $(\log \theta')''$ es una función continua y acotada sobre el compacto $[u - \Delta, u + \Delta]$. Por consiguiente, para Δ suficientemente pequeño, cualquier $v \in [u - \Delta, u + \Delta]$, algún $c \in (u - \Delta, u + \Delta)$ y $|x - u| \leq 2\Delta$:

$$\begin{aligned} (\log \theta'(v))' &= (\log \theta'(u))' + (\log \theta'(c))'' (x - u) \\ &= (\log \theta'(u))' + \mathcal{O}(\Delta). \end{aligned}$$

Retomando el lado derecho de la integral (1.112) se tiene

$$\begin{aligned} \int g(u - v)(\log \theta'(v))' \partial_{\log s} A_X(v, s) dv &= \int g(u - v) ((\log \theta'(u))' + \mathcal{O}(\Delta)) \partial_{\log s} A_X(v, s) dv \\ &= (\log \theta'(u))' \int g(u - v) \partial_{\log s} A_X(v, s) dv + \mathcal{O}(\Delta) \int g(u - v) \partial_{\log s} A_X(v, s) dv \\ &= (\log \theta'(u))' \overline{\partial_{\log s} A_X}(u, s) + \mathcal{O}(\Delta) \overline{\partial_{\log s} A_X}(u, s). \end{aligned} \quad (1.113)$$

Sustituyendo los resultados de (1.111) y (1.113) en los respectivos lados de la ecuación (1.101) se tiene

$$\overline{\partial_u A_X}(u, s) - (\log \theta'(u))' \overline{\partial_{\log s} A_X}(u, s) - \mathcal{O}(\Delta) \overline{\partial_{\log s} A_X}(u, s) = \mathcal{O}(s) \overline{\partial_u A_X}(u, s).$$

Finalmente, reagrupando los términos de la ecuación anterior se obtiene:

$$\overline{\partial_u A_X}(u, s) - (\log \theta'(u))' \overline{\partial_{\log s} A_X}(u, s) = \mathcal{O}(s) \overline{\partial_u A_X}(u, s) + \mathcal{O}(\Delta) \overline{\partial_{\log s} A_X}(u, s) \quad (1.114)$$

esta ecuación puede interpretarse como una versión ponderada de la ecuación de transporte (1.66). Dividiendo (1.114) por $\overline{\partial_{\log s} A_X}(u, s) \neq 0$, podemos fácilmente reescribir esa ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{\theta''(u)}{\theta'(u)} = (1 + \mathcal{O}(s)) \frac{\overline{\partial_u A_X}(u, s)}{\overline{\partial_{\log s} A_X}(u, s)} + \mathcal{O}(\Delta).$$

Si $\Delta > s$, se sigue del álgebra \mathcal{O} grande, $\mathcal{O}(s) \frac{\overline{\partial_u A_X}(u, s)}{\overline{\partial_{\log s} A_X}(u, s)} \in \mathcal{O}(s)$ y $\mathcal{O}(s) + \mathcal{O}(\Delta) \in \mathcal{O}(\Delta)$.

Por consiguiente:

$$\frac{\theta''(u)}{\theta'(u)} = \frac{\overline{\partial_u A_X}(\cdot, s)}{\overline{\partial_{\log s} A_X}(\cdot, s)}(u) + \mathcal{O}(\Delta). \quad (1.115)$$

El término $\mathcal{O}(\Delta)$ puede interpretarse como el sesgo debido al suavizamiento sobre una anchura Δ . Así, la ecuación anterior sugiere el siguiente estimador para el gradiente de deformación unidimensional, a partir de una realización de X :

$$\frac{\widehat{\theta''(u)}}{\widehat{\theta'(u)}} = \frac{\widehat{\partial_u A_X}(\cdot, s) * g(u)}{\widehat{\partial_{\log s} A_X}(\cdot, s) * g(u)}. \quad (1.116)$$

Note

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \widehat{\partial_a A_X} * g \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \widehat{\partial_a A_X} \right\} * g \\ &= \partial_a A_X * g \quad (\text{ec. (1.110)}) \\ &= \overline{\partial_a A_X}. \quad (\text{Def. (1.4.1.1)}) \end{aligned}$$

No obstante, en la práctica resulta imposible evaluar el estimador (1.116) para todas las escalas y posiciones, de aquí que se recurre a su discretización. Así, si $X(x)$ se mide con una resolución N , se puede calcular el *escalograma empírico* $|\langle X, \psi_{u,s} \rangle|^2$ para $s \geq N^{-1}$ y posiciones $u = k/N$; $k \in \mathbb{Z}$ [19], esto nos permite discretizar los estimadores de las derivadas parciales de la descomposición atómica del proceso X , $\widehat{\partial_a A_X}(u, s)$, por ende, obtener un estimador modificado, discreto, para el gradiente de deformación, como indicamos a continuación:

Sea

$$g(x) = \begin{cases} \Delta^{-1}(1 - |x/\Delta|) & \text{si } |x| \leq \Delta \\ 0 & \text{si } |x| > \Delta \end{cases} \quad (1.117)$$

luego, se sigue de (1.109) y la convolución discreta

$$\widehat{\partial_a A_X}(u, s) = 2N^{-1} \sum_{|k/N - u| \leq \Delta} g(u - k/N) \text{Re} \left[\langle X, \psi_{k/N, s} \rangle \langle X, \partial_a \psi_{k/N, s} \rangle^* \right]. \quad (1.118)$$

El Lema 1.4.1.2, cuya prueba se da en el Apéndice D, muestra que el estimador (1.118) es consistente al parámetro $\overline{\partial_a A_X}(u, s)$. Además, como veremos en el Teorema 1.4.1.1, ajustando apropiadamente el valor de Δ , podemos reducir el sesgo indicado en la ecuación (1.115). Por lo tanto, se propone el siguiente estimador modificado para $\frac{\theta''(u)}{\theta'(u)}$:

$$\frac{\widehat{\theta''(u)}}{\widehat{\theta'(u)}} = \frac{\widehat{\partial_u A_X}(u, N^{-1})}{\widehat{\partial_{\log s} A_X}(u, N^{-1})} \quad (1.119)$$

donde $\widehat{\partial_a A_X}$ se define en (1.118).

Se debe garantizar que cuando $s = N^{-1}$ y $N \rightarrow \infty$, $\widehat{\partial_u A_X}(u, s)$ y $\widehat{\partial_{\log s} A_X}(u, s)$ estén cerca de $\partial_u A_X(u, s)$ y $\partial_{\log s} A_X(u, s)$ respectivamente. Para ello se introduce la hipótesis Gaussiana sobre el proceso estacionario subyacente Y . Este supuesto nos permite derivar la consistencia de los estimadores $\widehat{\partial_a A_X}$ y, por ende, la consistencia del estimador (1.119).

Lema 1.4.1.2 Sean X , Y y ψ satisfacen las hipótesis del Teorema 1.4.1.1 (Consistencia). Para cada u , para cada s suficientemente pequeño,

$$Prob \left\{ \left| \widehat{\partial_{\log s} A_X}(u, s) - \overline{\partial_{\log s} A_X}(u, s) \right| \geq C \left| \overline{\partial_{\log s} A_X}(u, s) \right| \right\} \leq \epsilon_1 \quad (1.120)$$

$$Prob \left\{ \left| \widehat{\partial_u A_X}(u, s) - \overline{\partial_u A_X}(u, s) \right| \geq C \left| \overline{\partial_u A_X}(u, s) \right| \right\} \leq \epsilon_2 \quad (1.121)$$

donde

$$C = \frac{\log(N\Delta)}{\Delta\sqrt{N\Delta}}, \quad \epsilon_1 = \frac{C_1(u)\Delta^2}{(\log(N\Delta))^2}, \quad \epsilon_2 = 6(N\Delta)^{-1/(2C_2(u))}$$

Los parámetros $C_1(u)$ y $C_2(u)$, los cuales son definidos en la prueba del lema, ambos son positivos.

Demostración: Apéndice D.

Lema 1.4.1.3 Si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias y $C < 1$ es una constante tal que

$$Prob \{ |X_1 - \mathbb{E}\{X_1\}| \leq C |\mathbb{E}\{X_1\}| \} \geq 1 - \epsilon_1$$

$$Prob \{ |X_2 - \mathbb{E}\{X_2\}| \leq C |\mathbb{E}\{X_2\}| \} \geq 1 - \epsilon_2$$

entonces

$$Prob \left(\left| \frac{X_2}{X_1} - \frac{\mathbb{E}\{X_2\}}{\mathbb{E}\{X_1\}} \right| \leq \frac{2C}{1-C} \left| \frac{\mathbb{E}\{X_2\}}{\mathbb{E}\{X_1\}} \right| \right) \geq 1 - \epsilon_1 - \epsilon_2$$

Demostración: Apéndice G.

Una wavelet $\psi(x)$ se dice que tiene m momentos cero si

$$\int \psi(x)x^k dx = 0 \quad \text{para } 0 \leq k < m.$$

Entonces, $\partial_u \psi$ y $\partial_{\log s} \psi$ son wavelet con soporte compacto y una integración por parte muestra que ellos tienen, respectivamente, $m + 1$ y m momentos cero.

En efecto, sea a una variable genérica que representa u o $\log s$. por hipótesis $\int \psi(x)dx = 0$ entonces,

$$0 = \partial_a \int \psi(x)dx = \int \partial_a \psi(x)dx.$$

El intercambio de la derivada e integral es posible porque se deriva una integral respecto a un parámetro distinto al que se integra y la derivada está acotada para poder aplicar el teorema de la convergencia acotada.

Veamos que $\int \partial_u \psi(x) x^k dx = 0$; $k < m + 1$.

Por hipótesis, $\int \psi(x) x^k dx = 0$.

Integrando por parte:

$$0 = \int \underbrace{\psi(x)}_u \underbrace{x^k dx}_{dv} = \frac{1}{k+1} \psi(x) x^{k+1} - \frac{1}{k+1} \int \psi'(x) x^{k+1} dx$$

Por consiguiente:

$$\int \psi'(x) x^{k+1} dx = \psi(x) x^{k+1}.$$

Nuevamente integrando por parte a la integral: $\int \psi'(x) x^{k+1} dx$, si hacemos $dv = \psi'(x) x^k dx$ entonces, $v = \int \psi'(x) x^k dx = \partial_u \int \psi(x) x^k dx = 0$. Por consiguiente, $\int \psi'(x) x^{k+1} dx = 0$. De esta última igualdad se tiene que $\partial_u \psi$ tiene $m + 1$ momentos cero.

Ahora veamos $\int \partial_{\log s} \psi(x) x^k dx = 0$; $k < m$.

$$\begin{aligned} \partial_{\log s} \int \psi(x) x^k dx &= \int \partial_{\log s} \psi(x) x^k dx \\ &= \int (-\psi(x) - \psi'(x)x) x^k dx \quad (\text{por (1.108)}) \\ &= -\int \psi(x) x^k dx - \int \psi'(x) x^{k+1} dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

puesto que ψ y $\partial_u \psi$ tienen m y $m + 1$ momentos cero.

La expresión (1.106) indica que $\partial_a A_X(u, s)$ simplemente depende de la transformada wavelet de X con las wavelet madre ψ y $\partial_a \psi$.

El siguiente teorema demuestra la consistencia débil del estimador modificado (1.119).

Teorema 1.4.1.1 (Consistencia) *Sea $X(x) = Y(\theta(x))$, donde Y es un proceso estacionario Gaussiano cuya covarianza satisface*

$$c_Y(0) - c_Y(x) = |x|^h \eta(x), \quad h > 0 \text{ y } \eta(0) > 0$$

Sea ψ de clase C^2 una wavelet con soporte en $[-1, 1]$, con p momentos cero tal que

$$2p - h > 1/2 \text{ y } \iint |x - y|^h \psi^*(x) \psi(y) dx dy \neq 0$$

Sea $\Delta = N^{-1/5}$. Si $\eta(x)$ es de clase \mathcal{C}^{2p} en un entorno de 0 y si $\theta(x) \in \mathcal{C}^3 \cap \mathcal{C}^{2p}$, entonces, para cada $u \in \mathbb{R}$ tal que $\theta''(u) \neq 0$,

$$\text{Prob} \left\{ \left| \widehat{(\log \theta')}'(u) - (\log \theta')'(u) \right| \leq 2 (\log N) N^{-1/5} \right\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$$

Demostración

Sea a una variable genérica que denota u o $\log s$.

Del Lema 1.4.1.2, para cada u y para cada s suficientemente pequeño,

$$\text{Prob} \left\{ \left| \widehat{\partial_a A_X}(u, s) - \overline{\partial_a A_X}(u, s) \right| \geq C \left| \widehat{\partial_a A_X}(u, s) \right| \right\} \leq \epsilon_a \quad (1.122)$$

donde $C = \frac{\log(N\Delta)}{\Delta\sqrt{N\Delta}}$ y

$$\epsilon_a = \begin{cases} \frac{C_1(u)\Delta^2}{(\log(N\Delta))^2} & \text{si } a = \log s \\ 6(N\Delta)^{-1/(2C_2(u))} & \text{si } a = u \end{cases}$$

Puesto que $\log z = \mathcal{O}(z^{1/2})$, esto es, la función $z \mapsto z^{1/2}$ mayor a la función $z \mapsto \log z$, se tiene $C < 1$ y $\epsilon_a \rightarrow 0$ para N suficientemente grande. Por consiguiente, se sigue de (1.122), $\widehat{\partial_a A_X}(u, s)$ es un estimador consistente de $\overline{\partial_a A_X}(u, s)$.

De (1.122) es claro que

$$\text{Prob} \left\{ \left| \widehat{\partial_a A_X}(u, s) - \overline{\partial_a A_X}(u, s) \right| \leq C \left| \overline{\partial_a A_X}(u, s) \right| \right\} \geq 1 - \epsilon_a.$$

Luego, podemos usar el Lema 1.4.1.3 tomando $X_1 = \widehat{\partial_{\log s} A_X}(u, s)$ y $X_2 = \widehat{\partial_u A_X}(u, s)$, donde $s = N^{-1}$ y, elegimos $C = \frac{\log(N\Delta)}{\Delta\sqrt{N\Delta}}$. Por consiguiente:

$$\text{Prob} \left\{ \left| \frac{\widehat{\partial_u A}(u, N^{-1})}{\widehat{\partial_{\log s} A}(u, N^{-1})} - \frac{\overline{\partial_u A}(u, N^{-1})}{\overline{\partial_{\log s} A}(u, N^{-1})} \right| \leq \frac{2 \log(N\Delta)}{\Delta\sqrt{N\Delta} - \log(N\Delta)} \left| \frac{\overline{\partial_u A}(u, N^{-1})}{\overline{\partial_{\log s} A}(u, N^{-1})} \right| \right\} \geq 1 - \sum_a \epsilon_a.$$

Se sigue de la ecuación de transporte ponderada (1.114):

$$\begin{aligned}
(\log \theta')'(u) &= \mathcal{O}(\Delta) + \frac{\overline{\partial_u A_X}(u, N^{-1})}{\overline{\partial_{\log s} A_X}(u, N^{-1})} (1 + \mathcal{O}(N^{-1})) \\
&= \frac{\overline{\partial_u A_X}(u, N^{-1})}{\overline{\partial_{\log s} A_X}(u, N^{-1})} + \mathcal{O}(\Delta) + \mathcal{O}(N^{-1}) \\
&= \frac{\overline{\partial_u A_X}(u, N^{-1})}{\overline{\partial_{\log s} A_X}(u, N^{-1})} + \mathcal{O}(\max\{\Delta, N^{-1}\}).
\end{aligned}$$

Puesto que $\Delta = N^{-1/5} > N^{-1}$ y $(\log \theta')'(u)$ es una función acotada sobre el compacto $[u - \Delta, u + \Delta]$, escribimos:

$$(\log \theta')'(u) = \mathcal{O}(\Delta) + \frac{\overline{\partial_u A_X}(u, N^{-1})}{\overline{\partial_{\log s} A_X}(u, N^{-1})}$$

o bien

$$\frac{\overline{\partial_u A_X}(u, N^{-1})}{\overline{\partial_{\log s} A_X}(u, N^{-1})} = (\log \theta')'(u) + \mathcal{O}(\Delta).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\text{Prob} \left(\left| \frac{\widehat{\partial_u A_X}(u, N^{-1})}{\widehat{\partial_{\log s} A_X}(u, N^{-1})} - (\log \theta')'(u) \right| \leq \frac{2 \log(N\Delta)}{\Delta \sqrt{N\Delta} - \log(N\Delta)} \left| (\log \theta')'(u) + \mathcal{O}(\Delta) \right| \right) &\geq 1 - \sum_a \epsilon_a \\
&\leq \frac{2 \log(N\Delta)}{\Delta \sqrt{N\Delta} - \log(N\Delta)} \left| (\log \theta')'(u) \right| + \mathcal{O}(\Delta) \geq 1 - \sum_a \epsilon_a.
\end{aligned}$$

Seleccionamos Δ tal que $\Delta^{-1}(N\Delta)^{-1/2} = \Delta$, esto es, $\Delta = N^{-1/5}$. En ese caso,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \epsilon_a = \begin{cases} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{C_1(u)}{\left(\frac{4}{5} \log N\right)^2 N^{2/5}} = 0 & \text{si } a = \log s \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{6 (N^{4/5})^{2C_2(u)}} = 0 & \text{si } a = u \end{cases}$$

Así, cuando $N \rightarrow \infty$, ϵ_a tiende a cero. Por otra parte, conservando el valor de Δ en $N^{-1/5}$ se tiene

$$\frac{2 \log(N\Delta)}{\Delta \sqrt{N\Delta} - \log(N\Delta)} = \frac{2 \log N^{4/5}}{N^{1/5} - \log N^{4/5}}.$$

Puesto que $\log z = \mathcal{O}(z^{1/5})$, para N suficientemente grande

$$\frac{2 \log N^{4/5}}{N^{1/5} - \log N^{4/5}} \leq \frac{2 \log N^{4/5}}{N^{1/5}} \leq \frac{2 \log N}{N^{1/5}}$$

donde $\frac{2 \log N}{N^{1/5}} \rightarrow 0$.

Por lo tanto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob} \left(\left| \frac{\widehat{\partial_u A_X}(u, N^{-1})}{\widehat{\partial_{\log s} A_X}(u, N^{-1})} - (\log \theta')'(u) \right| \leq 2(\log N)N^{-1/5} \right) = 1$$

□

Capítulo 2

Recuperación de la distorsión de la superficie de la escena

2.1. Introducción

La observación de una fotografía pone a prueba nuestra capacidad intuitiva de recuperar la forma de una superficie en la escena a partir de una sola imagen. Las señales de la forma de una superficie en la imagen, viene dada por la combinación de varios tipos de información: variaciones de sombreado, efectos de perspectiva y gradientes de textura. El objetivo de este capítulo, es aplicar los resultados de la deformación de procesos estocásticos, $X = DY$, a fin de responder a la pregunta: dada la imagen de una superficie texturizada, ¿cómo es posible recuperar la profundidad de la superficie? Las referencias recientes a este problema conocido como la *forma a partir de la textura* pueden encontrarse en ([3], [4], [6], [11], [17], [18], [25], [31]).

Este capítulo está organizado en tres secciones: (1) Iniciamos con el proceso de formación de las imágenes, centrándonos en tres de sus aspectos: la proyección perspectiva, la relación entre el brillo de la escena y el brillo de la imagen, y finalmente la reflectancia superficial, que modela la manera en que una superficie refleja la luz que recibe.

La siguiente sección (2) presenta un modelo estocástico para imágenes de superficies texturizadas, las cuales tienen una estructura que consta de unidades o elementos, relativamente homogéneos en tamaño y forma, distribuidos por la superficie con relativa regularidad. Así, la textura es modelada como un proceso estacionario Y , que ha sufrido una distorsión espacial D , y cuya amplitud se ve afectada por el sombreado, dando lugar a la imagen resultante a un proceso no estacionario, $X = DY$. Modelamos el tipo de proceso no estacionario que aparece en dichas imágenes, X . Los dos términos físicos relevantes que miden la distorsión de la estacionariedad son el gradiente de sombreado y el gradiente de deformación. En este trabajo nos centramos en el gradiente de deformación para recuperar la forma real de la superficie.

Presentamos un algoritmo y una experimentación numérica concerniente a la estimación de la deformación de la superficie en una dimensión.

2.2. Formación de la imagen

Para interpretar una imagen, es necesario saber en primer lugar, cómo se formó la imagen. Esta sección presenta tres aspectos de la formación de las imágenes: primero la proyección de perspectiva, que es la relación geométrica entre el punto de la imagen y los de la escena real. Luego, analizamos cómo se relacionan la intensidad de un píxel de la imagen y el brillo del punto de la escena correspondiente. La tercera parte se refiere a la reflectancia superficial; modela el modo en que los puntos de la superficie reflejan la luz que reciben, en función de las orientaciones referidas a la luz incidente, la normal a la superficie y del rayo luminoso reflejado o emitido.

2.2.1. Proyección perspectiva

La versión más simple de una cámara es el modelo de Pinhole que se muestra en la Figura 2.1.

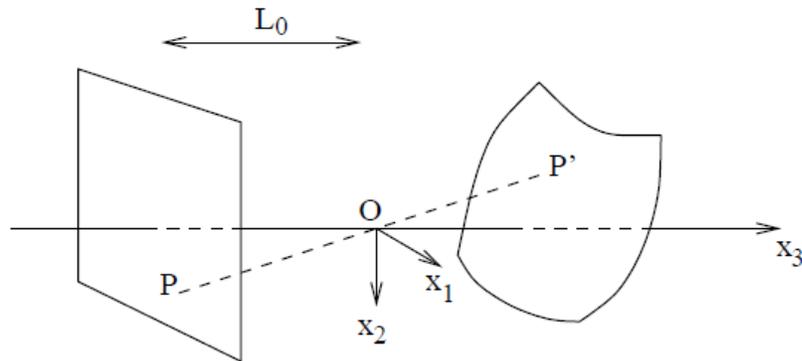


Figura 2.1: Modelo de la cámara Pinhole

Los únicos rayos de luz que alcanzan la imagen son los que vienen a través de un orificio ideal O , que se encuentra a una distancia L_0 del plano de los fotorreceptores o plano de la imagen. El *eje óptico* es la línea perpendicular al plano de la imagen y pasa por O . Introducimos un sistema de coordenadas centrado en O , cuyo eje x_3 coincide con el eje óptico. La Figura 2.1 muestra la orientación del sistema de coordenada (O, x_1, x_2, x_3) . La proyección de un punto P' de la escena con coordenadas $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ en un punto P en la imagen con coordenadas $x = (x_1, x_2, -L_0)$ es bien conocido como *proyección perspectiva*. Dado que OP y OP' son colineales, la coordenada cartesiana de P y P' satisface

$$(x_1, x_2, -L_0) = \lambda(x'_1, x'_2, x'_3).$$

Obviamente, $\lambda = -\frac{L_0}{x'_3}$, de ahí que la coordenada de la imagen y la coordenada de la escena obedezcan la relación

$$(x_1, x_2) = \left(-\frac{L_0 x'_1}{x'_3}, -\frac{L_0 x'_2}{x'_3} \right).$$

2.2.2. Brillo de la imagen

Ahora que tenemos la relación geométrica entre los puntos de la imagen y la escena, queremos saber cómo se relacionan sus respectivos brillos. Para ello introducimos dos magnitudes físicas que miden el brillo. La *irradiancia de la imagen* $i(x)$ es el flujo de energía luminosa recibido por la imagen en la posición x por unidad de área. El brillo de la escena es a su vez dado por la *radiancia de la escena* $l(x')$, que es el flujo de energía de luz emitido por la superficie del objeto en la posición x' por unidad de área, por unidad de ángulo sólido.

En esta ocasión, el modelo de cámara Pinhole ya no es adecuado y tiene que ser reemplazado por un modelo de lente más realista. Está claro que un pedazo de superficie en la escena emite luz en un hemisferio entero de direcciones. En el modelo de cámara Pinhole, el rayo de luz que llega a un punto de la imagen sólo puede provenir de una sola dirección (es decir, un cono con un ángulo sólido infinitamente pequeño). Por lo tanto, el flujo de energía luminosa recibido por un área unitaria de la imagen es en realidad igual a cero. Si reemplazamos el orificio por un agujero con un diámetro finito, el flujo de luz ya no sería cero; Sin embargo, un punto P' de la escena se proyectaría sobre un círculo en la imagen, lo cual es un inconveniente.

Una lente ideal (Figura 2.2) tiene la propiedad de recoger los rayos de luz desde un ángulo sólido finito en un punto dado, mientras que todavía produce una proyección en perspectiva. Aunque estrictamente hablando, la proyección en perspectiva sólo es válida para los puntos P y P' cuya distancia respectiva $-x_3$ y x'_3 de la lente satisfacen la relación

$$\frac{1}{-x_3} + \frac{1}{x'_3} = \frac{1}{L_f}$$

donde L_f es la longitud focal de la lente. Así, si el plano de la imagen se encuentra a una distancia $-x_3 = L_0$ de la lente, los puntos de la superficie están enfocados si están a una distancia x'_3 tal que

$$\frac{1}{x'_3} = \frac{1}{L_f} - \frac{1}{L_0}.$$

Para una lente de diámetro d y longitud focal L_f , existe una relación simple entre la radiación de la escena l y la irradiancia de la imagen i .

$$i(x) = l(x') \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{L_f} \right)^2 \cos^4 \theta \quad (2.1)$$

donde θ es el ángulo entre el eje óptico y la dirección del rayo de luz que conecta el pedazo de superficie al centro de la lente. (ver Figura 2.2). Vale decir que los sistemas se calibran generalmente de modo que se elimine la dependencia de $\cos^4 \theta$. El resultado de la proporcionalidad (2.1) indica que, al medir la irradiación de la imagen, tenemos acceso a la radiación de la escena, que a su vez, es la clave para obtener información local de la forma de la superficie en la escena, como lo haremos en la siguiente parte.

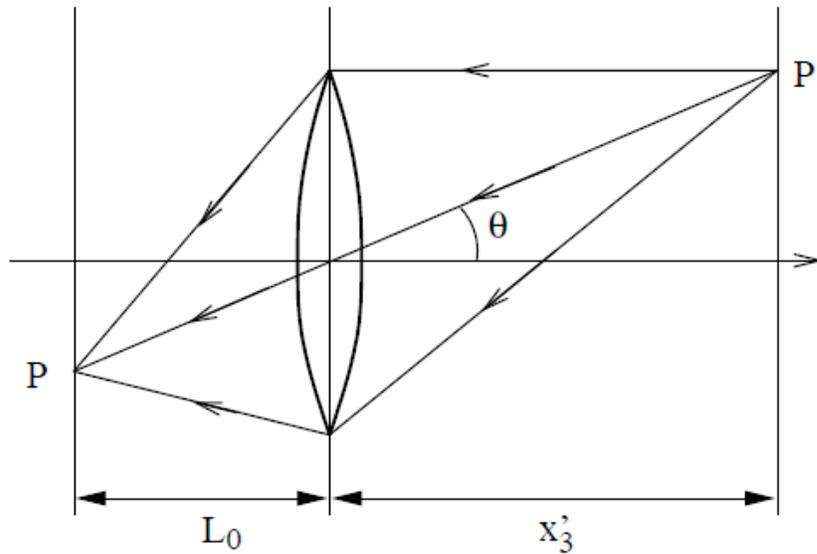


Figura 2.2: Lente del modelo

2.2.3. Reflectancia superficial

El resplandor de una superficie en la escena depende primero de la cantidad de luz que cae sobre ella, y también del modo en que la superficie refleja la luz incidente. La iluminación es una función de la *incidencia*, que es el ángulo ϕ_i entre el vector normal \vec{n} a la superficie y la dirección de la luz incidente \vec{n}_s (ver Figura 2.3)

Denotamos $e(\phi_i, x')\delta\omega_i$ la energía luminosa recibida por la superficie en un punto $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ desde un ángulo sólido $\delta\omega_i$ en dirección ϕ_i .

La *emitancia* es el ángulo ϕ_e entre la normal a la superficie y la dirección de observación, asociada a la energía luminosa reflejada en un punto x' de la superficie.

La *reflectancia superficial* es modelada por la *función de distribución de reflectancia*

$$r(\phi_e, \phi_i, x') = \frac{\delta l(\phi_e, x')}{e(\phi_i, x')\delta\omega_i}$$

que determina el brillo de un punto x' de la superficie bajo la emitancia ϕ_e , cuando este es iluminado bajo la incidencia ϕ_i .

La irradiancia total de la superficie es

$$e_0(x') = \int e(\phi_i, x')\delta\omega_i.$$

La radiancia de la superficie cuando se ve bajo la emitancia ϕ_e es

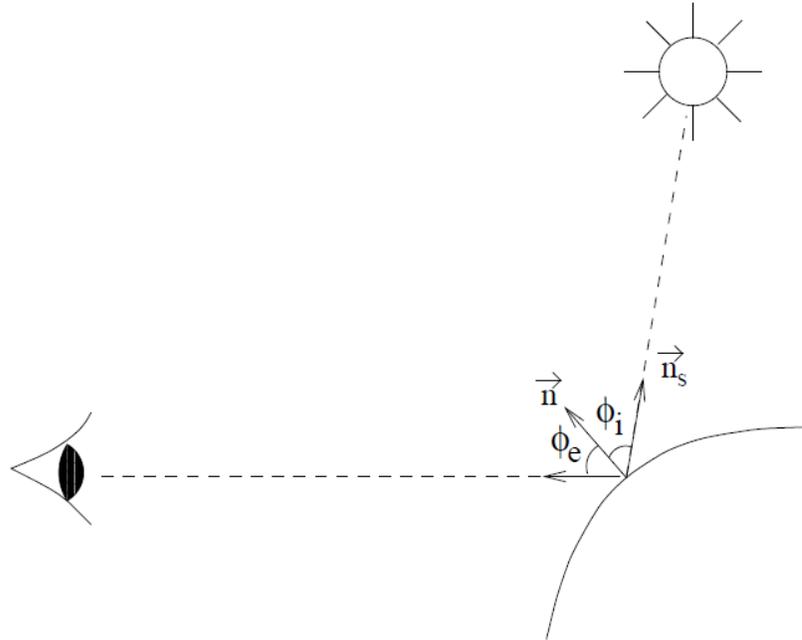


Figura 2.3: La incidencia es el ángulo ϕ_i entre la normal a la superficie \vec{n} y la dirección de la iluminación \vec{n}_s . La emitancia es el ángulo ϕ_e entre \vec{n} y la dirección de observación.

$$l(\phi_e, x') = \int r(\phi_e, \phi_i, x') e(\phi_i, x') \delta\omega_i.$$

Consideramos el caso de las superficies que reflejan toda la luz que reciben, igualmente en todas las direcciones: la función $r(\phi_e, \phi_i, x')$ solo depende de la posición x' del punto superficial y se denotará $r_0(x')$. Estas superficies, llamadas *superficies lambertianas*, son superficies mates sin especularidad, como la nieve, el papel o la superficie de la luna. La radiancia superficial es entonces

$$l(x') = e_0(x') r_0(x').$$

Para una fuente puntual de radiancia e procedente de una dirección \vec{n}_s ,

$$e_0(x') = e \vec{n}(x') \cdot \vec{n}_s$$

y por lo tanto

$$l(x') = e r_0(x') \vec{n}(x') \cdot \vec{n}_s. \quad (2.2)$$

2.3. Imágenes de superficies texturizadas

El paisaje marino en la Figura 2.4 transmite una impresión de profundidad 3D. Esa impresión parece ser debido al efecto de la perspectiva, a pesar de que no hay un borde real en la imagen que indique un punto de fuga. La escena allí descrita es una textura (es decir,

un patrón con cierta regularidad), y es un ejemplo de la *forma a partir de la textura*. En esta sección se introduce un modelo estocástico para imágenes de superficies texturizadas. La textura de la escena se supone estacionaria, pero debido a la proyección en perspectiva y la curvatura superficial, la textura observada en la imagen se corresponde a un proceso no estacionario. Explicamos que la no estacionariedad se debe a una deformación de un proceso estocástico estacionario. Introducimos el gradiente de deformación y un modelo estocástico de la forma a partir de la textura. Explicamos cómo se puede recuperar la forma de la superficie, utilizando la información del gradiente de deformación.



Figura 2.4: Este paisaje del mar transmite una impresión de profundidad 3D (forma de la textura)

2.3.1. Modelo estocástico en una dimensión

En esta sección, x representa la coordenada x_1 a lo largo de la línea de la imagen, y denotaremos x' las coordenadas (x_1, x_3) a lo largo de la curva (ver Figura 2.5).

Consideramos una superficie texturizada en una dimensión. El brillo de la escena en un punto x' de una superficie Lambertiana es (2.2)

$$l(x') = er_0(x')\vec{n}(x') \cdot \vec{n}_s.$$

Sea $x = p(x')$ el punto de la imagen correspondiente a x' por la proyección de perspectiva p . De (2.1) sabemos que la irradiancia de la imagen $i(x)$ es proporcional a la radiancia de la escena en el punto x' . Después de una renormalización, que es común en el procesamiento de imagen

$$i(x) = r_0(p^{-1}(x))\vec{n}(p^{-1}(x)) \cdot \vec{n}_s. \quad (2.3)$$

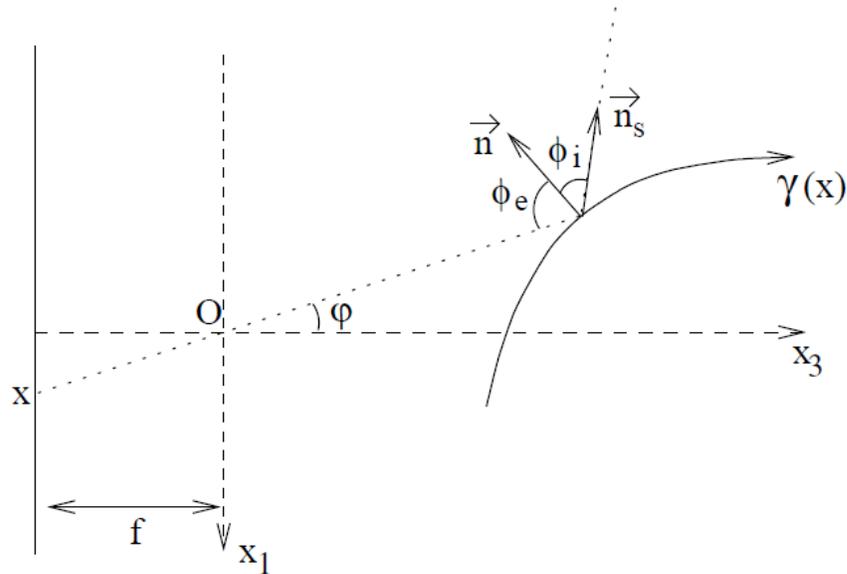


Figura 2.5: La longitud del arco $\gamma(x)$ mide la longitud a lo largo de la curva, cuando se ve desde la posición x en la imagen

La textura en la escena es modelada por un proceso estocástico R , que es estacionario en sentido amplio. Un proceso estacionario en sentido amplio $R(x)$ es por definición [5] un proceso cuya media $\bar{R} = \mathbb{E}\{R(x)\}$ e independiente de x y cuya covarianza $\mathbb{E}\{(R(x) - \bar{R})(R(y) - \bar{R})\}$ es una función de $x - y$. Para abreviar, vamos a escribir *estacionario* en lugar de *estacionario en sentido amplio*. Asumiremos que los procesos estacionarios son de media cero ($\bar{R} = 0$).

Consideremos Σ una curva lisa parametrizada por una trayectoria lisa $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ que suponemos de clase \mathcal{C}^3 tal que $\Sigma = g([a, b])$. Definamos la longitud de Σ como $S(\Sigma) = S(g)$, donde S es la función de longitud de arco definida

$$S(g) = \int_a^b \|g'(t)\|^2 dt$$

Supongamos que la trayectoria lisa g es tal que $g'(t) \neq 0$, para todo $t \in [a, b]$.

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$\gamma(t) = \int_a^t \|g'(y)\| dy$$

Entonces

1. $\gamma(a) = 0$, $\gamma(b) = S(\Sigma)$.
2. γ es derivable y $\gamma'(t) = \|g'(t)\| > 0$. Así γ es estrictamente creciente en $[a, b]$ y por lo tanto inyectiva. Más aún, $\gamma : [a, b] \rightarrow [0, S(\Sigma)]$ es biyectiva y de clase \mathcal{C}^3 .

Consideraremos la reflectancia de la curva Σ como la realización de un proceso estocástico débilmente estacionario sobre $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ que toma valores en \mathbb{R} que depende del cambio de la métrica entre la curva y el plano imagen, debido a la proyección perspectiva y la curvatura de la curva, esto es, $\gamma(x) = (\gamma \circ p)(x')$, así el brillo o irradiancia de un punto en el plano imagen puede tomar valores arbitrarios siempre y cuando se conserven los parámetros estadísticos de esos valores en un entorno pequeño, por lo tanto,

$$r_0(p^{-1}(x)) = R(\gamma(x)). \quad (2.4)$$

Denotamos

$$f(x) = \vec{n}(p^{-1}(x)) \cdot \vec{n}_s \quad (2.5)$$

y reemplazando (2.4) y (2.5) en (2.3), la irradiancia en la imagen tiene la siguiente expresión

$$I(x) = f(x)R(\gamma(x)).$$

Por consiguiente,

$$\mathbb{E}\{|I(x)|^2\} = |f(x)|^2 \mathbb{E}\{|R(\gamma(x))|^2\} = |f(x)|^2 C_R(0).$$

El término de sombreado $f(x)$ puede así estimarse hasta una constante multiplicativa a partir del segundo momento de la imagen $\mathbb{E}\{|I(x)|^2\}$. El estudio de la recuperación de la *forma a partir del sombreado* se encuentra en [22], [23]. En este trabajo nos centramos en la distorsión de la textura causada por la perspectiva y geometría de la superficie, por lo tanto compensamos los cambios de iluminación. Estimamos el segundo momento de la imagen, y luego calculamos $\mathbb{E}\{|I(x)|^2\}^{-1/2} I(x)$. La imagen resultante de esta renormalización de contraste local se denomina aun $I(x)$ por conveniencia. Así obtenemos el modelo:

$$I(x) = R(\gamma(x)). \quad (2.6)$$

Sea $C_I(u, \delta)$ la covarianza de I centrada en u sobre un entorno pequeño compacto de longitud $\delta > 0$, esto es:

$$\begin{aligned} C_I(u, \delta) &= \mathbb{E}\{I(u - \delta/2) I(u + \delta/2)\} \\ &= \mathbb{E}\{R(\gamma(u - \delta/2)) R(\gamma(u + \delta/2))\}. \quad (\text{por (2.6)}) \end{aligned}$$

Puesto que R es estacionario, el punto alrededor del cual la covarianza está centrada es irrelevante, solo depende de la diferencias de los tiempos o espacios. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} C_I(u, \delta) &= \mathbb{E}\{R(\gamma(u + \delta/2) - \gamma(u - \delta/2)) R(0)\} \\ &\approx \mathbb{E}\{R(\gamma'(u)\delta) R(0)\} \\ &= \mathbb{E}\{R(-\gamma'(u)\delta/2) R(\gamma'(u)\delta/2)\} \\ &= C_R(0, \gamma'(u)\delta). \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$C_I(u, \delta) \approx C_R(0, \gamma'(u)\delta).$$

Comparemos la covarianza de I centrada en dos puntos diferentes u y v pero cercanos. Por lo anterior se sigue:

$$C_I(v, \delta) \approx C_R(0, \gamma'(v)\delta).$$

Por la continuidad de γ' , para cada $\epsilon > 0$, podemos elegir u y v lo suficientemente cercanos tal que $|\gamma'(u) - \gamma'(v)| < \epsilon$. Por consiguiente, para cada par de pixeles o puntos arbitrarios cercanos u y v de la imagen, se tiene:

$$C_I(v, \delta) \approx C_R\left(0, \frac{\gamma'(v)}{\gamma'(u)}\delta\right).$$

El punto alrededor del cual C_R está centrada es irrelevante, puesto que la covarianza depende de la diferencia. Por consiguiente:

$$\begin{aligned} &= C_R\left(u, \frac{\gamma'(v)}{\gamma'(u)}\delta\right) \\ &\approx C_I\left(u, \frac{\gamma'(v)}{\gamma'(u)}\delta\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$C_I(v, \delta) \approx C_I\left(u, \frac{\gamma'(v)}{\gamma'(u)}\delta\right).$$

Por lo tanto, existe, un factor de deformación (o escalamiento) positivo $\frac{\gamma'(v)}{\gamma'(u)}$ entre $C_I(u, \cdot)$ y $C_I(v, \cdot)$.

Para u fijo y v en un entorno de u ,

$$\frac{\gamma'(v)}{\gamma'(u)} = \frac{\gamma'(u) + \gamma''(u)(v-u) + \mathcal{O}(v-u)^2}{\gamma'(u)} = 1 + (\log \gamma'(u))'(v-u) + \mathcal{O}(v-u)^2.$$

De aquí que para u y v los suficientemente cercanos,

$$\frac{\gamma'(v)}{\gamma'(u)} \approx 1 + (\log \gamma')'(u)(v-u).$$

La transformación entre las covarianzas centradas en los puntos u y v se especifica localmente por la *variación relativa de γ'* . Llamamos *gradiente de deformación* a la variación relativa de γ' : $(\log \gamma')'$.

2.3.1.1. La estructura de la función de covarianza

Para $x \in \mathbb{R}$ y para todo $H \in (0, 1)$, consideremos un proceso estocástico cuya función de covarianza responde a la siguiente estructura:

$$\gamma_H(x) = \frac{1}{2} [|x + 1|^{2H} - 2|x|^{2H} + |x - 1|^{2H}]. \quad (2.7)$$

Es fácil calcular la derivada de la función de covarianza γ_H :

$$\gamma'_H(x) = H [(x + 1)|x + 1|^{2H-2} - 2x|x|^{2H-2} + (x - 1)|x - 1|^{2H-2}].$$

Claramente γ'_H es una función continua. La región sombreada de la figura de abajo muestra el conjunto solución de la inecuación $\gamma'_H(x) < 0$, para un valor particular de H , $H = 0,7$, con lo cual evidentemente para ese valor de H existe $\epsilon > 0$ tal que

$$\forall x \in (0, \epsilon] : \gamma'_H(x) < 0 \quad (2.8)$$

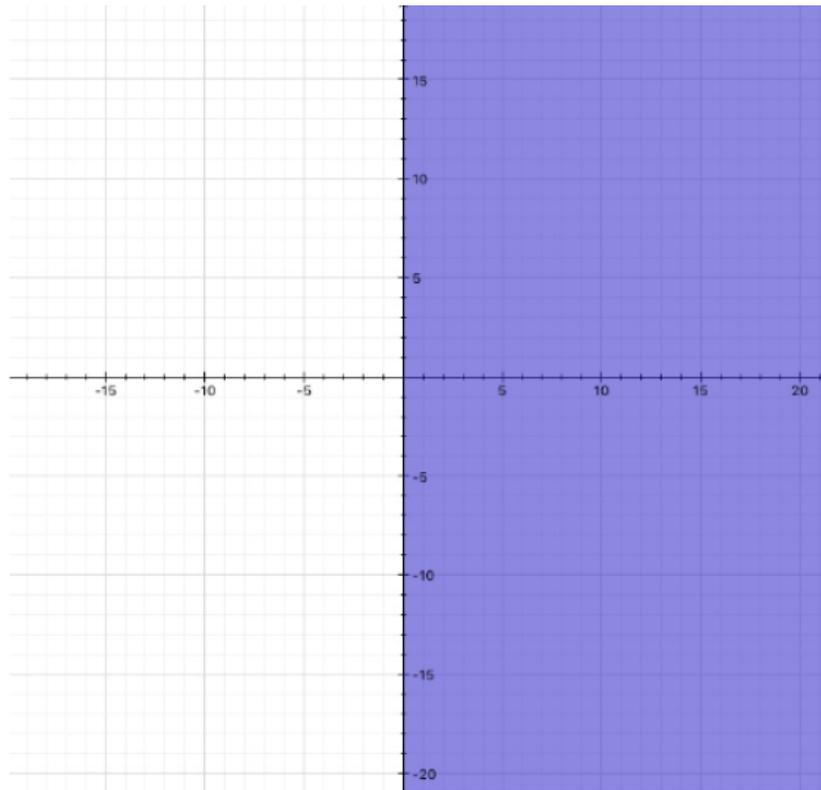


Figura 2.6:

No obstante, se puede probar sin mayores dificultades que la condición (2.8) también es verdadera para todo $H \in (0, 1)$, basta elegir $x = \epsilon$ y hacer algunos arreglos algebraicos. Por lo tanto, la estructura de covarianza de los procesos estacionarios involucrados en la Proposición 1.2.1.3 incluye a la ecuación (2.7).

Los incrementos de un movimiento Browniano fraccional estándar, $b_H\left(\frac{k}{n}\right) - b_H\left(\frac{k-1}{n}\right)$, $k = 0, 1, \dots, n$ es un proceso estacionario Gaussiano, cuya estructura de covarianza es $\gamma_H(i-j)$, para $i, j = 1, 2, \dots, n$ [8].

El criterio de Kolmogorov para la continuidad de procesos nos permite afirmar trayectorias continuas para los incrementos de un movimiento Browniano fraccionario (mBf). Por lo tanto, estos procesos Gaussianos también responden a la clase de procesos estacionarios involucrados en la Proposición 1.2.1.3.

Los resultados anteriores nos muestran que los procesos estocásticos estacionarios asociados a la modelación de la textura de la escena no son arbitrarios, responden a una estructura específica de covarianza (2.7) que involucran un amplio rango de procesos estocásticos [32] que incluyen a los procesos Gaussianos, como consecuencia de la condición impuesta a la covarianza en la Proposición 1.2.1.3. Como contrajemplo, el *ruido blanco* viola la condición (2.8) puesto que $c_Y(x) = 0$, para todo $x \neq 0$.

2.3.2. La importancia del gradiente de deformación

Se ha demostrado que el gradiente de deformación especifica la transformación de la covarianza de la irradiancia centrada entre diferentes puntos cercanos (Proposición 1.2.1.3). Esta sección está dedicada al estudio de ese gradiente, que muestra ser relevante en el modelo estocástico propuesto. En primer lugar, se mostrará en base a la teoría desarrollada en el capítulo anterior, un resultado matemático que muestra como el gradiente de deformación define de forma única la forma a partir de la irradiancia de la imagen modelada por (2.6). Asimismo, cómo interviene el gradiente de deformación en la recuperación de la forma.

2.3.2.1. Unicidad

En el modelo estocástico propuesto, la función γ' en realidad no están definidas de forma única, pero la siguiente Proposición, cuya demostración se extrae de la prueba de la Proposición 1.2.1.3, indica que su variación relativa $(\log \gamma')'$ si lo está.

Proposición 2.3.2.1 (Unicidad de la representación) *Sea $I(x)$ de la forma $I(x) = R(\gamma(x))$, donde R es un proceso estacionario. Bajo la hipótesis de la Proposición 1.2.1.3, existe una proceso estacionario \tilde{R} tal que $I(x) = \tilde{R}(\tilde{\gamma}(x))$ si y solo si $(\log \gamma')' = (\log \tilde{\gamma}')'$.*

Demostración

(\Rightarrow) Sea $u = \gamma \circ \tilde{\gamma}^{-1}$ la cual es de clase \mathcal{C}^3 y $u'(x) > 0$. Debe ocurrir:

$$C_{\tilde{R}}(\tilde{\gamma}(x) - \tilde{\gamma}(y)) = C_R(\gamma(x) - \gamma(y)).$$

Por definición de u :

$$C_{\tilde{R}}(x - y) = C_R(u(x) - u(y)).$$

Diferenciado esta ecuación con respecto a x e y obtenemos respectivamente,

$$C'_{\tilde{R}}(x - y) = C'_R(u(x) - u(y))u'(x)$$

$$-C'_{\tilde{R}}(x - y) = -C'_R(u(x) - u(y))u'(y)$$

Sumando las dos últimas ecuaciones se obtiene de inmediato,

$$C'_R(u(x) - u(y))(u'(x) - u'(y)) = 0.$$

Fijemos $x \in \mathbb{R}$ y elijamos $y \neq x$, pero suficientemente cercano a x tal que $|u(x) - u(y)| < \epsilon$.

Por hipótesis, $C'_R(u(x) - u(y)) < \epsilon$, necesariamente $u'(x) - u'(y) = 0$. Por lo tanto, $u''(y) = 0$, para todo $y \in \mathbb{R}$, si y solo si existe α y $\beta > 0$ ($u'(y) = \beta$) tal que

$$u(y) = \alpha + \beta y. \tag{2.9}$$

Reemplazando $y = \tilde{\gamma}(x)$ en (2.9) se tiene:

$$\gamma(x) = \alpha + \beta \tilde{\gamma}(x)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\gamma''(x)}{\gamma'(x)} = \frac{\tilde{\gamma}''(x)}{\tilde{\gamma}'(x)}.$$

(\Leftrightarrow) Sea $(\log \gamma')'(x) = (\log \tilde{\gamma}')'(x)$. Entonces se sigue por integración

$$\begin{aligned} \log \gamma'(x) &= \log \tilde{\gamma}'(x) + \log \beta; \quad \beta \in \mathbb{R} \\ &= \log \beta \tilde{\gamma}'(x) \end{aligned}$$

Luego,

$$\gamma'(x) = \beta \tilde{\gamma}'(x)$$

Por lo tanto,

$$\gamma(x) = \alpha + \beta \tilde{\gamma}(x); \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
R(\gamma(x)) &= R(\alpha + \beta\tilde{\gamma}(x)) \\
&= R(\beta\tilde{\gamma}(x)) \\
&= \beta^H R(\tilde{\gamma}(x)); \quad (\text{Propiedad de autosimilaridad del Mbf, } H > 0)
\end{aligned}$$

Existe, un proceso \tilde{R} tal que

$$\stackrel{d}{=} \tilde{R}(\tilde{\gamma}(x)).$$

□

La prueba anterior muestra que el gradiente de deformación es la función relevante a estimar a partir de la irradiancia I de una superficie (o curva) texturizada en la imagen.

2.3.2.2. Del gradiente de deformación a la forma

El gradiente de deformación $(\log \gamma')'$ representa las variaciones relativas de γ' , que es la derivada de la longitud de arco γ .

Queremos responder dos preguntas: suponiendo que conocemos la longitud del arco γ , ¿es posible recuperar una curva única? ¿Y qué información sobre la curva se pierde cuando conocemos el gradiente de deformación $(\log \gamma')'$ en lugar de γ .

Puesto que estamos considerando una proyección en perspectiva, parametricemos la longitud de arco usando φ , que es el ángulo entre el eje óptico y la dirección del rayo de luz que llega a la imagen (ver Figura 2.5). Existe una biyección entre x y φ puesto que $x(\varphi) = f \tan \varphi$. Ahora tenemos para la longitud de arco parametrizada con φ :

$$\begin{aligned}
\gamma(x') &= \gamma(p^{-1}(x(\varphi))) \\
&= \gamma(x(\varphi)) \\
&= \gamma(\varphi)
\end{aligned}$$

De aquí que

$$\gamma(\varphi) = \gamma(x(\varphi)).$$

Sea $r(\varphi)$ la distancia euclídea entre el centro óptico O y el punto superficial $x' = p^{-1}(x(\varphi))$. Entonces, la longitud del arco comprendido en el intervalo $[\varphi_1, \varphi_2]$, toma la forma

$$\gamma(\varphi) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2} d\varphi$$

con lo cual tenemos el siguiente resultado de unicidad:

Proposición 2.3.2.2 *Existe una curva única $r(\varphi)$ con una longitud de arco $\gamma(\varphi)$, definida para $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, y satisface las condiciones de contorno*

$$\begin{cases} r(\varphi_1) = r_1 \\ r(\varphi_2) = r_2 \end{cases}$$

Para la respuesta a la segunda pregunta, note que si dos longitudes de arco γ_1 y γ_2 satisfacen

$$\left(\log \gamma_1'\right)' = \left(\log \gamma_2'\right)'$$

entonces necesariamente existe una relación lineal entre γ_1 y γ_2 . Además de establecer las condiciones de contorno de $r(\varphi_1)$ y $r(\varphi_2)$, las derivadas $r'(\varphi_1)$ y $r'(\varphi_2)$, también deben especificarse en el límite para determinar unívocamente la curva $r(\varphi)$ a partir de $(\log \gamma')'$.

.

2.4. Experimentación numérica 1D

Para los efectos de la simulación numérica consideraremos:

$$\log \theta'(x) = \lambda_1 + \lambda_2 \text{sign}(1/2 - x)|x - 1/2|^2 \quad (2.10)$$

donde λ_1 y λ_2 son dos constantes. La gráfica de abajo es una curva de la ecuación (2.10) con $\lambda_1 = 1,5$ y $\lambda_2 = 2,5$.

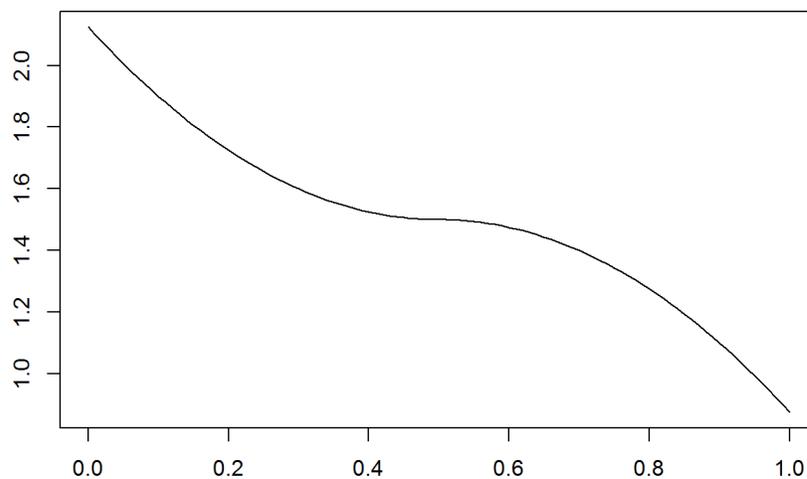


Figura 2.7: Log. de la derivada de la función de deformación

2.4.1. Coeficientes wavelet y escalograma

El coeficiente wavelet $\langle I, \psi_{u,s} \rangle$ puede representarse por medio del producto convolución:

$$\langle I, \psi_{u,s} \rangle = \int I(x) s^{-1} \psi^*(s^{-1}(x-u)) dx = I \star \tilde{\psi}_s(u) \quad (2.11)$$

con $\tilde{\psi}_s(x) = s^{-1} \psi(-s^{-1}x)$. La transformada de Fourier de $\tilde{\psi}_s(x)$ es $\widehat{\tilde{\psi}_s}(w) = \hat{\psi}^*(sw)$. Seleccionamos ψ tal que su transformada de Fourier es

$$\hat{\psi}(w) = \left(\frac{\sin(w/2 - \pi)}{w/2 - \pi} \right)^5 \exp(-i(w/2 - \pi)). \quad (2.12)$$

Para una señal discreta de tamaño N , la wavelet $\tilde{\psi}_s$ y la variable u son discretizadas, y (2.11) es calculada con **FFT**, la abreviatura usual (del inglés *Fast Fourier Transform*) de un eficiente algoritmo que permite calcular la transformada de Fourier discreta (**DFT**) y su inversa, requiriendo $\mathcal{O}(N \log N)$ [6].

Gráfica de la parte real de la transformada de Fourier de la wavelet madre (2.12).

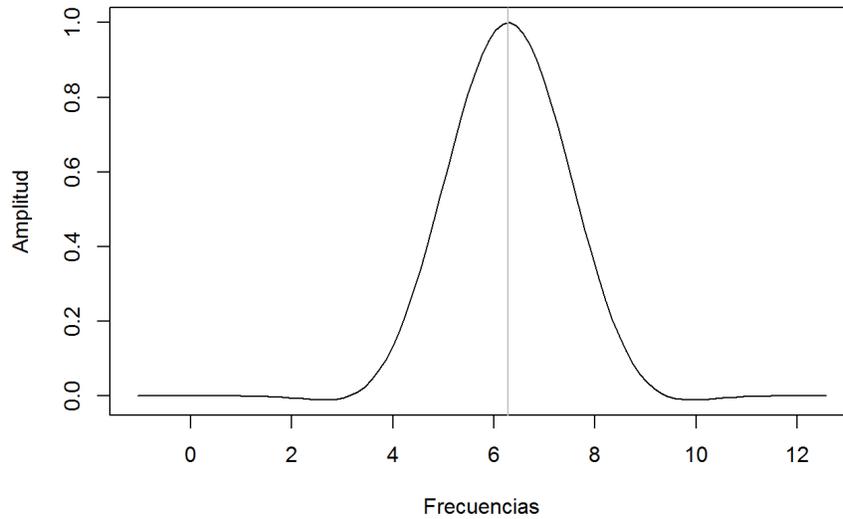


Figura 2.8: Parte real de la transformada de Fourier de la wavelet madre

Por definición de la transformada de Fourier se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{\tilde{\psi}_s}(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_s^*(x) e^{-iwx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s^{-1} \psi(-s^{-1}x) e^{-iwx} dx. \end{aligned}$$

Tras el cambio de variable $y = -s^{-1}x$ obtenemos:

$$\widehat{\tilde{\psi}_s}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) e^{-i(-sw)y} dy \quad (2.13)$$

$$= \tilde{\psi}(-sw). \quad (2.14)$$

Puesto que, $s^{-1}\psi(-s^{-1}x) \in \mathbb{R}$ entonces, $s^{-1}\psi(-s^{-1}x) = s^{-1}\psi^*(-s^{-1}x)$. Por lo tanto, se sigue de (2.13):

$$\begin{aligned} \widehat{\tilde{\psi}}_s(w) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)e^{i(sw)y} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(y)e^{i(sw)y} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi(y)e^{-i(sw)y})^* dy \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)e^{-i(sw)y} dy \right)^* \\ &= \tilde{\psi}^*(sw) \end{aligned} \quad (2.15)$$

lo que implica de las igualdades (2.14) y (2.15) que la transformada de Fourier de $\tilde{\psi}_s(x)$ es una función hermitiana.

$$\widehat{\tilde{\psi}}^*(sw) = \widehat{\tilde{\psi}}(-sw)$$

lo cual es natural puesto que ψ es una función real.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \langle I, \psi_{u,s} \rangle &= \int I(x)s^{-1}\psi(s^{-1}(x-u)) dx \\ &= \int I(x)s^{-1}\tilde{\psi}_s(u-x) dx \\ &= I \star \tilde{\psi}_s(u). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el coeficiente wavelet puede representarse por medio del producto convolución. Por consiguiente, para una señal discreta de tamaño N , su cálculo pasa por discretizar la wavelet $\tilde{\psi}_s$ y la variable u .

Si denotamos con \mathcal{F} el operador lineal de la transformada de Fourier, el teorema de la convolución garantiza:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(I \star \tilde{\psi}_s(u)) &= \mathcal{F}(I) \cdot \mathcal{F}(\tilde{\psi}_s(u)) \\ &= \mathcal{F}(I) \cdot \widehat{\tilde{\psi}}_s(u) \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde $\widehat{\tilde{\psi}}_s(u) = e^{-iuw}\widehat{\tilde{\psi}}_s(w)$. Dado que una **FFT** proporciona una transformada de Fourier rápida, también proporciona una convolución rápida, por el teorema de convolución (2.16). El uso de una **FFT** para realizar la convolución es realmente más eficiente en la práctica sólo para convoluciones razonablemente largas, $N > 100$. Para las convoluciones mucho más

largas, los ahorros se hacen considerables comparados con la convolución *directa*. Esto ocurre porque la convolución directa requiere del orden de las operaciones N^2 (multiplicaciones y adiciones), mientras que la convolución basada en **FFT** requiere del orden de las operaciones $N \log N$, donde \log denota el logaritmo base 2 de N [6], [19].

Por lo anterior, se sigue de (2.16) un método para calcular el coeficiente wavelet $\langle I, \psi_{u,s} \rangle$, calculando la Transformada de Fourier Rápida Inversa (**IFFT**) del producto de la Transformada de Fourier Rápida (**FFT**) del vector de la señal I con la conocida **FFT** del vector de la wavelet madre desplazada u unidades, esto es:

$$\langle I, \psi_{u,s} \rangle = IFFT \left(FFT(I) \cdot e^{-i u w} \widehat{\psi}_s(w) \right). \quad (2.17)$$

El escalograma empírico de I en (u, s) es el cuadrado de la magnitud de (2.17), $|\langle I, \psi_{u,s} \rangle|^2$.

2.4.2. Wavelet discreta

Sea $f(t)$ una señal continua que esta uniformemente muestreada a intervalos N^{-1} sobre $[0, 1]$. En este caso su transformada de wavelet solo puede ser calculada a escalas $N^{-1} < s < 1$. Un cambio de variable en la integral de la transformada de wavelet (2.11) muestra

$$\langle f(t), \psi_{u,s} \rangle = N^{-1/2} \langle f(t/N), \psi_{Nu,Ns} \rangle.$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \langle f(t), \psi_{u,s} \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt \\ &= \text{(hacemos el cambio de variable } t=y/N) \\ &= N^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(N^{-1}y) \frac{1}{\sqrt{Ns}} \psi^* \left(\frac{y-Nu}{Ns} \right) dy \\ &= N^{-1/2} \langle f(t/N), \psi_{Nu,Ns} \rangle. \end{aligned}$$

Sea $f[n]$ la señal discreta de tamaño N . Su transformada de wavelet discreta se calcula a escalas $s = a^j$, con $a = 2^{1/v}$, la cual proporciona v escalas intermedias en cada octava $[2^j, 2^{j+1})$ [19].

Sea $\psi(t)$ una wavelet cuyo soporte compacto está incluido en $[-K/2, K/2]$. Para $2 \leq a^j \leq NK^{-1}$, una wavelet discreta escalada por a^j se define [19]:

$$\psi_j[n] = \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi \left(\frac{n}{a^j} \right).$$

Esta wavelet discreta tiene Ka^j valores no nulos sobre $[-N/2, N/2]$. La escala a^j es mayor que 2, de lo contrario el intervalo de muestreo puede ser mayor que el soporte wavelet.

2.4.3. Algoritmo para la estimación de la deformación estocástica en una dimensión

Pasos básicos para la estimación de la deformación en una dimensión

- 1 Realizar la transformada de wavelet $\langle X, \psi_{u,si} \rangle$, en varios niveles de escala en que la señal tenga energía, y para cada una de esas transformaciones calcular (1.109).
- 2 A partir de la ecuación (1.66) suavizar los coeficientes wavelets y, estimar localmente el gradiente de deformación.

Presentamos en el Apéndice F una adaptación libre en R del script de Clerc and Mallat, originalmente escrito en MATLAB, para la simulación de la estimación de la deformación estocástica en una dimensión. En la siguiente sección se presenta la salida de esa simulación.

2.4.4. Simulación 1D

En esta sección emularemos el proceso de recuperación de la textura de una escena a partir de la observación de una imagen texturizada de la misma. Para hacer esto consideraremos que la textura de una imagen es una versión deformada de la textura de la escena como consecuencia de la curvatura del objeto en escena y la proyección perspectiva, tal como se aprecia en la figura de abajo. Más aun, el brillo o irradiancia de un punto sobre la imagen puede tomar valores arbitrarios siempre y cuando conserve constante el parámetro estadístico de segundo orden en una región pequeña de la imagen.

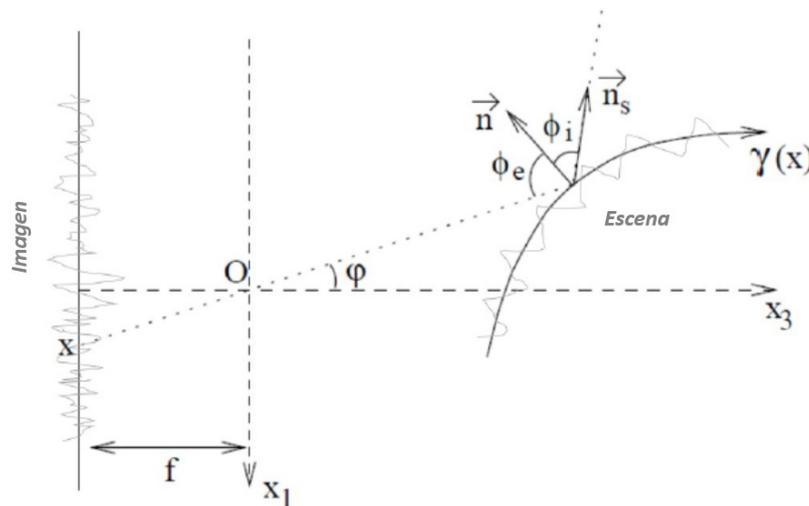


Figura 2.9: Restauración de la textura de la escena contenida en una imagen unidimensional como un problema de estimación estadística.

La textura de γ se supone que presenta un patrón con cierta regularidad y es emulada por un proceso estocástico estacionario Y , representado por la línea zig-zag sobre γ , pero

debido a la curvatura de ésta y a la proyección en perspectiva, la textura de γ observada en la imagen se corresponde a un proceso no estacionario X , representada por la línea irregular en zig-zag. Así, desde un punto de vista estadístico, X resulta de la deformación de Y , a través de cierto operador de deformación D , esto es, $X = DY$. La intención es experimentar numéricamente con la estimación del operador D , mediante el estimador (1.119), e invertir el proceso de deformación para recuperar la señal Y asociada a la textura regular de la escena.

Iniciamos el experimento numérico simulando la textura de la escena con un proceso estocástico Gaussiano estacionario Y . Puesto que este proceso es estacionario su energía es independiente de la posición, tal como se muestra muestra en la gráfica de su escalograma empírico, avalando experimentalmente el resultado obtenido en la ecuación (1.48).

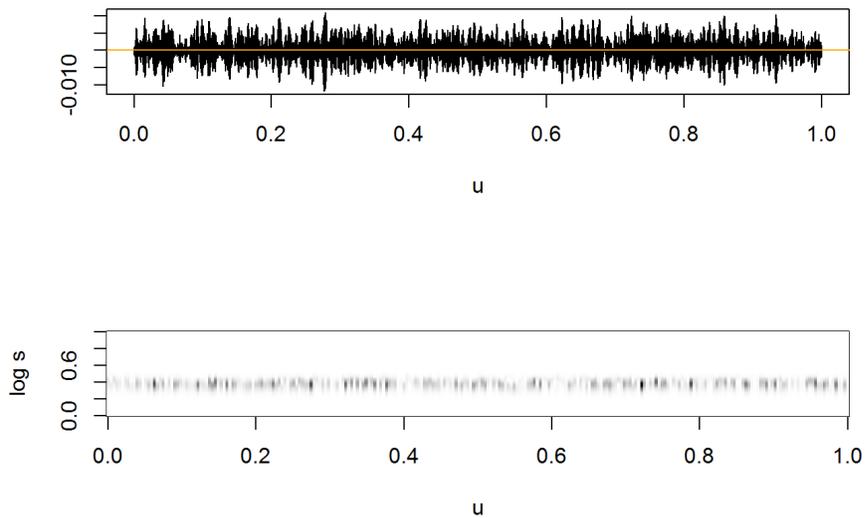


Figura 2.10: Señal estacionaria Y y su escalograma empírico $|\langle X, \psi_{u,s} \rangle|^2$

Para los efectos de esta simulación, se conoce la deformación θ , parametrizada de la siguiente forma:

$$\log\theta'(x) = \lambda_1 + \lambda_2 \text{sign}(1/2 - x) |x - 1/2|^2.$$

Esta ecuación es una abstracción de la clase de deformación involucrada en la representación de la escena bidimensional en una imagen unidimensional.

La función *hacer_deformacion* en el script (Ver Apéndice F) emula la deformación estocástica $X(x) = Y(\theta(x))$, esto es, la redistribución de la energía de la señal en el espacio paramétrico posición/escala, la cual observamos en la gráfica de abajo por la curvatura relativa de su escalograma empírico. La señal X así como su escalograma empírico son representaciones estocásticas equivalentes de la escena en la imagen, esto es, la distorsión de la textura estacionaria de la escena.

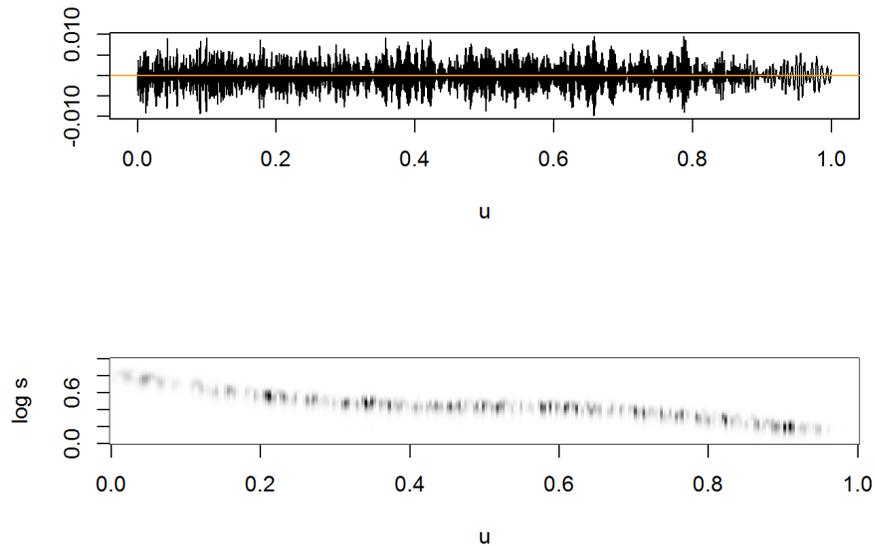


Figura 2.11: Señal deformada $X(x) = Y(\theta(x))$ y su escalograma empírico

La curva que presenta el escalograma empírico del proceso deformado es una muestra experimental de las implicaciones de la ecuación (1.63), esto es, la estacionariedad de la textura de la escena conlleva a una propiedad de conservación para el proceso deformado X a lo largo de curvas características que viven en el espacio paramétrico posición/escala $(u, \log s)$. Estas curvas características identifican la clase o naturaleza de la función de deformación θ involucradas en la formación de la imagen.

La siguiente gráfica muestra las estimaciones de $\log\theta'$ a partir del proceso deformado X (línea punteada), obtenido integrando el estimador $\widehat{\log\theta'}(u)$ y eligiendo la constante de integración tal que $\int_0^1 \exp(\widehat{\log\theta'}) = \int_0^1 \theta'$.

La gráfica de abajo muestra la razonable consistencia del estimador del gradiente de deformación, para una resolución lo suficientemente grande, $N = 4096$, previsto en el Teorema 1.4.1.1 y, por ende, cuan ajustado es la estimación de la función de deformación θ .

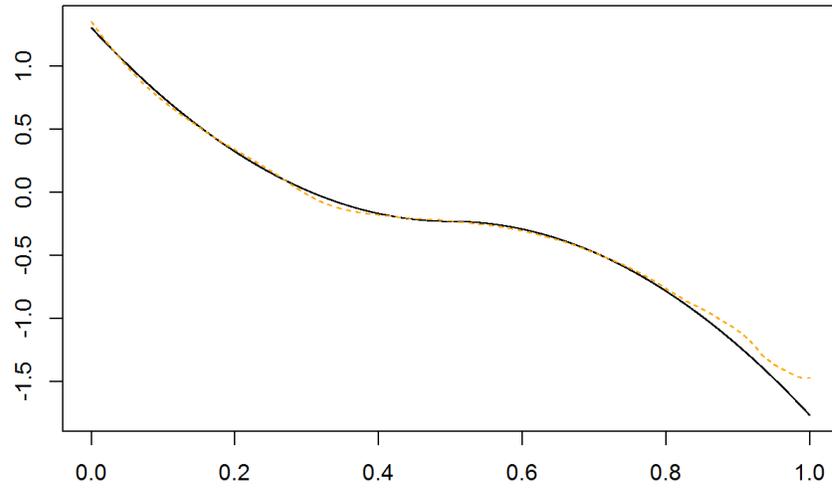


Figura 2.12: Consistencia del estimador del gradiente de deformación

Finalmente, podemos ver experimentalmente como la inversión del proceso de deformación da lugar a la restauración de la textura de la escena. Para ello la función *InvertLDP* (Ver Apéndice F) invierte el proceso $X(x) = Y(\theta(x))$, estacionarizando el proceso deformado X , devolviendo el proceso Y , esto es, $Y = X(\hat{\theta}^{-1}(x))$.

Naturalmente, la estimación de la textura de la escena es un proceso estacionario y, en consecuencia, su escalograma empírico es independiente de la posición, tal como se aprecia en la figura de abajo.

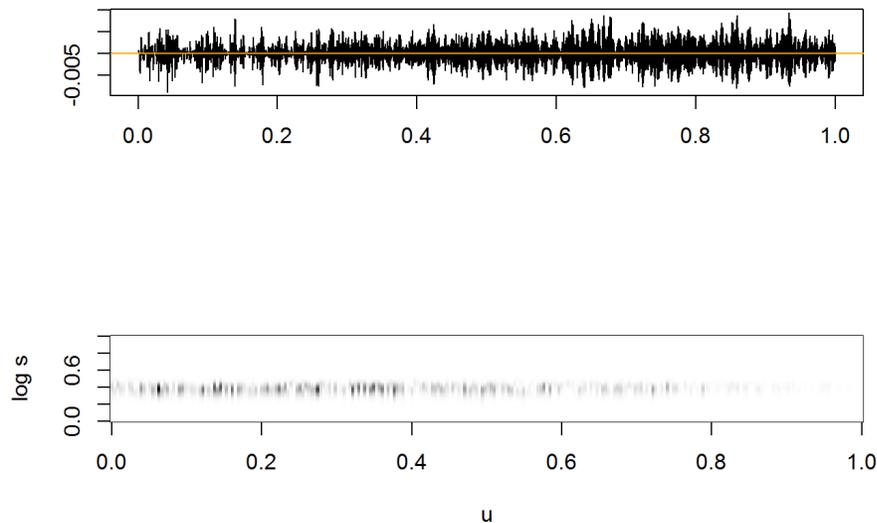


Figura 2.13: Señal estacionarizada y su escalograma empírico.

2.5. Conclusiones y recomendaciones

En este trabajo se establece en una dimensión las condiciones suficientes para la covarianza de la textura estacionaria de la escena Y , a fin de caracterizar de manera única, a través de la covarianza del proceso deformado X , la clase de deformación D involucrada en la formación de la imagen de la escena. En este sentido, se dispone de un estimador consistente que permite estimar localmente la distorsión de la escena en una pequeña región de la imagen. La integración de todas las estimaciones antes citadas da lugar a la deformación involucrada en la formación de toda la imagen y, la inversión de la deformación de la escena permite estimar la textura estacionaria de la escena. Para hacer esto se dispone de un algoritmo relativamente eficiente cuyo costo computacional es $\mathcal{O}(N \cdot \log N)$, donde N es la resolución de la imagen.

Esta investigación aun está en desarrollo. En este sentido, vale decir lo siguiente:

- Es posible extender el Teorema 1.3.2.1 (Transporte de escala 1D) a \mathbb{R}^d , aunque su generalización no es inmediata. En tal caso, aun no se tiene claro las hipótesis involucradas que permitan probar la consistencia del estimador del gradiente de deformación en \mathbb{R}^d ,

es decir, no se dispone actualmente de una versión multidimensional del Teorema 1.4.1.1 (Teorema de consistencia).

- El gradiente de deformación asociado a la versión multidimensional del Teorema de transporte 1D, en particular para $d = 2$, especifican la orientación local y la curvatura de una superficie $3D$ de la escena en la imagen. De hecho las derivaciones en el ámbito de la geometría diferencial dado por [10] así lo demuestran.
- Finalmente, como parte aun en desarrollo de esta investigación, se aspira desarrollar un algoritmo que permita recuperar la superficie de un objeto $3D$ contenida en una imagen texturizada.

Apéndice A

Wavelet

Una wavelet ψ es una función con promedio cero:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$$

la cual es dilatada con un parámetro escalar s , y trasladada por u :

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right).$$

La transformada de wavelet de f a la escala s y posición u se calcula correlacionando f con un wavelet átomo:

$$Wf(u, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-u}{s}\right) dt.$$

Referencia: [19], Pág. 26.

Apéndice B

Demostración ecuación 1.81

Para todo $u \in \mathbb{R}$ y $s > 0$, sea $\theta : [u - s, u + s] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $\theta(x) \in \mathcal{C}^3$ y $\theta'(x) > 0$. Sea ψ una función de clase \mathcal{C}^1 con soporte compacto en $[-1, 1]$. El desarrollo de Taylor para $\theta'(x)$ y $\theta''(x)$, entorno al punto u , muestra que para x suficientemente cercano a ese punto:

$$\left| \phi_{v,s}(x) - \left(\frac{2\theta''(u)^2}{\theta'(u)^3} - \frac{\theta'''(u)}{\theta'(u)^2} \right) \left[\frac{\theta'(u)(x-u)}{s} \psi \left(\frac{\theta'(u)(x-u)}{s} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\theta'(u)(x-u)}{s} \right)^2 \right. \right. \\ \left. \left. \times \psi' \left(\frac{\theta'(u)(x-u)}{s} \right) \right] \right| = \mathcal{O}(x-u). \quad (\text{B.1})$$

Demostración

Denotaremos por $G(x, u, \theta', \theta'', \theta''')$ la expresión asintótica de $\phi_{v,s}$ dado en (1.80). Así escribimos el primer miembro de (B.1) como sigue:

$$\left| \phi_{v,s} - G(x, u, \theta', \theta'', \theta''') \right|. \quad (\text{B.2})$$

Note que $\phi_{v,s} - G(x, u, \theta', \theta'', \theta''')$ es una combinación lineal de las funciones ψ y ψ' . Representamos con α y β los coeficientes de esa combinación lineal. Por lo tanto,

$$\left| \phi_{v,s} - G(x, u, \theta', \theta'', \theta''') \right| \leq |\alpha| |\psi| + |\beta| |\psi'|. \quad (\text{B.3})$$

Dado que ψ tiene soporte compacto en $[-1, 1]$, $\left| \frac{\theta'(u)(x-u)}{s} \right| \leq 1$. Sea $\tilde{x} = \frac{\theta'(u)(x-u)}{s}$. Luego,

$$x - u = \frac{s\tilde{x}}{\theta'(u)}; \quad |\tilde{x}| \leq 1. \quad (\text{B.4})$$

Usaremos esta ecuación para representar la expansión de Taylor de $\theta'(x)$ y $\theta''(x)$ en una vecindad del punto u . Por consiguiente:

$$\theta'(x) = \theta'(u) + \frac{\theta''(u)}{\theta'(u)} s\tilde{x} + \mathcal{O}(\tilde{x}) \quad (\text{B.5})$$

y

$$\theta''(x) = \theta''(u) + \frac{\theta'''(u)}{\theta'(u)} s\tilde{x} + \mathcal{O}(\tilde{x}). \quad (\text{B.6})$$

Puesto que ψ y ψ' son funciones continuas sobre el compacto $[-1, 1]$ entonces, existen constantes positivas M_1 y M_2 tales que para todo $\tilde{x} \in [-1, 1]$, $|\psi(\tilde{x})| \leq M_1$ y $|\psi'(\tilde{x})| \leq M_2$. Sea $M = \max\{M_1, M_2\}$.

De la ecuación (1.80) se tiene que el coeficiente de ψ en $\phi_{v,s}$ es

$$\frac{1}{s\theta'(u)} \left(\theta''(u) - \left(\frac{\theta'(u)}{\theta'(x)} \right)^2 \theta''(x) \right).$$

Por lo tanto, el coeficiente para ψ en (B.2) es

$$\underbrace{\frac{1}{s\theta'(u)} \left(\theta''(u) - \left(\frac{\theta'(u)}{\theta'(x)} \right)^2 \theta''(x) \right)}_A - \left(\frac{2\theta''(u)^2}{\theta'(u)^3} - \frac{\theta'''(u)}{\theta'(u)^2} \right) \frac{\theta'(u)(x-u)}{s}. \quad (\text{B.7})$$

El término A puede reescribirse como:

$$\frac{1}{s} \left(\frac{\theta''(u)\theta'(x)^2 - \theta'(u)^2\theta''(x)}{\theta'(u)\theta'(x)^2} \right).$$

Reemplazando en esta expresión la aproximación de Taylor para $\theta'(x)$ y $\theta''(x)$, dada en las ecuaciones (B.5) y (B.6), se obtiene:

$$A \approx \frac{2\theta''(u)^2 - \theta'(u)\theta'''(u) + \frac{\theta''(u)^3}{\theta'(u)^2} s\tilde{x}}{\theta'(u)(\theta'(u)^2 + 2\theta''(u)s\tilde{x} + \frac{\theta''(u)^2}{\theta'(u)^2} s^2\tilde{x}^2)} \tilde{x}.$$

Luego se sigue de (B.3):

$$\left| \frac{2\theta''(u)^2 - \theta'(u)\theta'''(u) + \frac{\theta''(u)^3}{\theta'(u)^2} s\tilde{x}}{\theta'(u)(\theta'(u)^2 + 2\theta''(u)s\tilde{x} + \frac{\theta''(u)^2}{\theta'(u)^2} s^2\tilde{x}^2)} - \underbrace{\left(\frac{2\theta''(u)^2}{\theta'(u)^3} - \frac{\theta'''(u)}{\theta'(u)^2} \right)}_{A(u)} \right| |\tilde{x}| |\psi(\tilde{x})| \leq$$

$$\left(\frac{|2\theta''(u)^2 - \theta'(u)\theta'''(u) + \frac{\theta''(u)^3}{\theta'(u)^2}s\tilde{x}|}{\underbrace{|\theta'(u)(\theta'(u)^2 + 2\theta''(u)s\tilde{x} + \frac{\theta''(u)^2}{\theta'(u)^2}s^2\tilde{x}^2)|}_B} + |A(u)| \right) |\tilde{x}||\psi(\tilde{x})|. \quad (\text{B.8})$$

Por la propiedad arquimediana, existe un número natural n tal que

$$n \left| \theta'(u) \left(\theta'(u)^2 + 2\theta''(u)s\tilde{x} + \frac{\theta''(u)^2}{\theta'(u)^2}s^2\tilde{x}^2 \right) \right| > \theta'(u)^3 + \left| 2\theta''(u)s\tilde{x} + \frac{\theta''(u)^2}{\theta'(u)^2}s^2\tilde{x}^2 \right|.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\theta'(u)^3}{n} < \frac{\theta'(u)^3 + \left| 2\theta''(u)s\tilde{x} + \frac{\theta''(u)^2}{\theta'(u)^2}s^2\tilde{x}^2 \right|}{n} < \left| \theta'(u) \left(\theta'(u)^2 + 2\theta''(u)s\tilde{x} + \frac{\theta''(u)^2}{\theta'(u)^2}s^2\tilde{x}^2 \right) \right|.$$

Por otra parte, puesto que $|\tilde{x}| \leq 1$ entonces,

$$|2\theta''(u)^2 - 2\theta'(u)\theta'''(u) + \frac{\theta''(u)^3}{\theta'(u)^2}s\tilde{x}| \leq 2\theta''(u)^2 + \theta'(u)|\theta'''(u)| + \frac{|\theta''(u)^3|}{\theta'(u)^2}s.$$

Además, $|\psi| \leq M$. Por lo tanto, (B.8) está mayorado por:

$$(\text{B.8}) \leq \left(n \frac{2\theta''(u)^2 + \theta'(u)|\theta'''(u)| + \frac{|\theta''(u)^3|}{\theta'(u)^2}s\tilde{x}}{\theta'(u)^3} + |A(u)| \right) |\tilde{x}|M.$$

Pero, $|\tilde{x}| = \left| \frac{\theta'(u)(x-u)}{s} \right| \leq 1$, por consiguiente:

$$\leq \left(n \frac{2\theta''(u)^2 + \theta'(u)|\theta'''(u)| + \frac{|\theta''(u)^3|}{\theta'(u)^2}s}{\theta'(u)^3} + |A(u)| \right) \frac{\theta'(u)}{s} |x-u|M \Rightarrow \mathcal{O}(x-u). \quad (\text{B.9})$$

Falta analizar el comportamiento asintótico del coeficiente de ψ' en (B.2) para x cercano a u .

El coeficiente de ψ' en $\phi_{v,s}$, ver (1.80), es

$$\frac{1}{s^2} \left(\frac{\theta'(u)}{\theta'(x)} \left(\theta'(u) - \theta'(x) \right) - (u-x)\theta''(u) \right).$$

Así, el coeficiente de ψ' en (B.2) es

$$\frac{1}{s^2} \left(\frac{\theta'(u)}{\theta'(x)} (\theta'(u) - \theta'(x)) - (u-x)\theta''(u) \right) - \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{2\theta''(u)^2}{\theta'(u)^3} - \frac{\theta'''(u)}{\theta'(u)^2} \right)}_{A(u)} \left(\frac{\theta'(u)}{s} (x-u) \right)^2. \quad (\text{B.10})$$

Puesto que $\tilde{x} = \frac{\theta'(u)(x-u)}{s}$ entonces, $u-x = -\frac{s\tilde{x}}{\theta'(u)}$. Hacemos estas sustituciones en (B.10) conjuntamente con la aproximación de Taylor para $\theta'(x)$ en un entorno de u , con lo cual obtenemos:

$$\left(\frac{\theta''(u)}{\theta'(u)(\theta'(u) + \theta''(u)s\tilde{x})} - \frac{1}{2}A(u) \right) \tilde{x}^2. \quad (\text{B.11})$$

Luego se sigue de (B.3):

$$\begin{aligned} (\text{B.11}) &\leq \left(\frac{\theta''(u)^2}{|\theta'(u)(\theta'(u)^2 + \theta''(u)s\tilde{x})|} + \frac{1}{2}|A(u)| \right) M|\tilde{x}^2| \\ &\leq \left(\frac{\theta''(u)^2}{|\theta'(u)(\theta'(u)^2 + \theta''(u)s\tilde{x})|} + \frac{1}{2}|A(u)| \right) M|\tilde{x}|. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Por la propiedad arquimediana de los números reales, existe un número natural m tal que

$$m \left| \theta'(u)(\theta'(u)^2 + \theta''(u)s\tilde{x}) \right| > \theta'(u)^3 + \theta'(u)|\theta''(u)s\tilde{x}|.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\theta'(u)^3}{m} < \frac{\theta'(u)^3 + \theta'(u)|\theta''(u)s\tilde{x}|}{m} < \left| \theta'(u)(\theta'(u)^2 + \theta''(u)s\tilde{x}) \right|.$$

Luego, se sigue del lado derecho de la desigualdad (B.12):

$$(\text{B.11}) \leq \left(m \frac{\theta''(u)^2}{\theta'(u)^3} + \frac{1}{2}|A(u)| \right) M \left| \frac{\theta'(u)(x-u)}{s} \right| \Rightarrow \mathcal{O}(x-u).$$

Este resultado conjuntamente con (B.9) muestra que

$$\begin{aligned} |\phi_{v,s} - G(x, u, \theta', \theta'', \theta''')| &= \mathcal{O}(x-u) + \mathcal{O}(x-u) \\ &= \mathcal{O}(x-u). \end{aligned}$$

□

Apéndice C

Función exponencial compleja

Sea $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función compleja que satisface la propiedad

$$\psi(z - w) = \psi(z)\overline{\psi(w)}; \quad z, w \in \mathbb{C}. \quad (\text{C.1})$$

Entonces, ψ es única y corresponde a la función exponencial.

Demostración

Existencia

La función $e^x \cos y + ie^x \sin y$ es la definición de la exponencial compleja. Por lo tanto, para $z = x + iy$ un número complejo, se sigue de la ecuación de Euler:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (\text{C.2})$$

Veamos que si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ son dos complejos, entonces $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2} \\ &= e^{x_1}e^{x_2}e^{iy_1}e^{iy_2} \\ &= e^{x_1+x_2} [(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)]. \end{aligned}$$

La parte real de la expresión en los corchetes es, por trigonometría, $\cos(y_1 + y_2)$. Análogamente, la parte imaginaria es igual a $\sin(y_1 + y_2)$. Por consiguiente:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)]. \quad (\text{C.3})$$

Luego por (C.2) tenemos:

$$\begin{aligned}
e^{z_1+z_2} &= e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \\
&= e^{x_1+x_2} [\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)].
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Por lo tanto, se sigue de (C.3) y (C.4):

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \tag{C.5}$$

Es fácil ver usando (C.2), tomando en cuenta que la función coseno y seno es par e impar, respectivamente,

$$\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}.$$

Sea $z_1 = iy_1$ y $z_2 = iy_2$ imaginarios puros, entonces

$$\begin{aligned}
(e^{z_1}) \overline{(e^{z_2})} &= e^{iy_1} e^{-iy_2} \\
&= e^{i(y_1-y_2)}.
\end{aligned}$$

Si denotamos $\exp(x) = e^{ix}$ se cumple,

$$\exp(x) \exp(y) = \exp(x-y). \tag{C.6}$$

Hemos probado que existe una función compleja que satisface la propiedad deseada.

Unicidad

Supongamos que existen dos funciones complejas ψ_1 y ψ_2 tales que

$$\psi_1(w) \overline{\psi_1(z)} = \psi_2(w) \overline{\psi_2(z)}; \quad w, z \in \mathbb{C}.$$

Si dichas funciones satisfacen la propiedad (C.1) entonces,

$$\psi_1(w-z) = \psi_2(w-z); \quad w, z \in \mathbb{C}$$

lo cual muestra que la propiedad (C.1) la satisface una única función. Por (C.6) se sigue que esa función es la exponencial compleja, en su forma más simple

$$\psi(z) = e^{ix}; \quad x \in \mathbb{R}.$$

□

Extensión de la prueba

Un resultado bien conocido es $\lim_{p \rightarrow 0} (1+p)^{1/p} = e$.

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{i(x+h)} - e^{ix}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ix} e^{ih} - e^{ix}}{h} \quad (\text{por (C.5)}) \\ &= e^{ix} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{ih} - 1}{h}.\end{aligned}$$

Sea $p = e^{ih} - 1$ entonces, $h = -i \frac{\log(p+1)}{\log e}$, donde \log es la inversa de la función exponencial compleja, función logaritmo complejo. Luego,

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{i(x+h)} - e^{ix}}{h} &= e^{ix} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{-i \frac{\log(p+1)}{\log e}} \\ &= e^{ix} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{i \log e}{\frac{1}{p} \log(p+1)} \\ &= i e^{ix} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\log e}{\log(p+1)^{1/p}} \\ &= i e^{ix} \frac{\log e}{\log \lim_{p \rightarrow 0} (p+1)^{1/p}} \quad (\text{por continuidad de } \log) \\ &= i e^{ix}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dw} e^{iw} = i e^{iw}; \quad w \in \mathbb{R}.$$

En general, si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, se sigue de la regla de la cadena de la derivada,

$$\frac{d}{dw} e^{ig(w)} = ig'(w) e^{ig(w)}; \quad w \in \mathbb{R}.$$

Este resultado puede extenderse en forma natural si $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ es un campo vectorial diferenciable d -dimensional. Por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dw} e^{ig(w) \cdot x} = ig'(w) \cdot x e^{ig(w) \cdot x} \quad (\text{C.7})$$

donde $x, w \in \mathbb{R}^d$ y \cdot representa al producto punto de vectores.

De (C.7) es fácil ver que la función exponencial satisface la EDO:

$$\Upsilon'(w) - ig'(w) \cdot x \Upsilon(w) = 0 \quad (\text{C.8})$$

cuyo factor integrante es $e^{ig(w)\cdot x}$. Más aun, por el Teorema de Existencia y Unicidad, (C.8) la satisface únicamente una familia de funciones exponenciales. Luego, se sigue de (C.8)

$$\begin{aligned} 0 &= e^{-ig(w)\cdot x}\Upsilon'(w) - ig'(w) \cdot xe^{-ig(w)\cdot x}\Upsilon(w) \\ &= \frac{d}{dw} (e^{-ig(w)\cdot x}\Upsilon(w)) \end{aligned}$$

de donde

$$e^{-ig(w)\cdot x}\Upsilon(w) = K(w); \quad K \in \mathbb{C}$$

K es una constante que depende de w . Por lo tanto, la forma general de una función exponencial compleja es:

$$\Upsilon(w) = K(w)e^{ig(w)\cdot x}; \quad w, x \in \mathbb{R}^d$$

donde K es un número complejo y g es un campo vectorial diferenciable d -dimensional.

Note

$$(K(w)e^{ig(w)\cdot x}) \cdot \overline{(K(w)e^{ig(w)\cdot y})} = |K(w)|^2 e^{ig(w)\cdot(x-y)}.$$

El producto de dos exponenciales complejas, es otra exponencial compleja que depende de la distancia de los argumentos de los factores.

□

Apéndice D

Demostración del Lema 1.4.1.2

Comenzaremos demostrando (1.120). Sea $n = N\Delta$ y sin pérdida de generalidad, seleccionemos $u = 0$. Busquemos una cota superior para la varianza de $\widehat{\partial_{\log s} A_X}(0, s)$.

$$V_{\log s} = \mathbb{E} \left\{ \left| \widehat{\partial_{\log s} A_X}(0, s) - \overline{\partial_{\log s} A_X}(0, s) \right|^2 \right\}. \quad (\text{D.1})$$

Veamos

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial_u \partial_{\log s}} A_X(u, s) \right| = \mathcal{O}(s^h). \quad (\text{D.2})$$

Sea $a = u$ o $a = \log s$. Se sigue de la definición de escalograma del proceso X :

$$\begin{aligned} \partial_a A_X(u, s) &= 2\text{Re} \langle K_X \psi_{u,s}, \partial_a \psi_{u,s} \rangle \\ &= 2\text{Re} \int K_X \psi_{u,s}^*(x) \partial_a \psi_{u,s}(x) dx. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \partial_{\log s} (\partial_u A_X(u, s)) &= 2\text{Re} \partial_{\log s} \int K_X \psi_{u,s}^*(x) \partial_u \psi_{u,s}(x) dx \\ &= 2\text{Re} \int \partial_{\log s} K_X \psi_{u,s}^*(x) \partial_u \psi_{u,s}(x) dx \\ &= 2\text{Re} \int K_X (\partial_{\log s} \psi_{u,s}^*(x) \partial_u \psi_{u,s}(x) + \psi_{u,s}^*(x) \partial_{\log s} \partial_u \psi_{u,s}(x)) dx. \end{aligned}$$

Vale decir que el intercambio derivada-integral aplica puesto que se deriva con respecto a una variable distinta a la que se integra. El hecho que $\psi_{u,s} \in \mathcal{C}^2$ garantiza la existencia de la integral, puesto que el integrando es una función continua sobre un compacto. Así, $\partial_{\log s} \partial_u A_X(u, s)$ existe y es continua. Lo mismo se puede decir para $\partial_u \partial_{\log s} A_X(u, s)$. Tomando en cuenta que $\partial_u \partial_{\log s} \psi_{u,s} = \partial_{\log s} \partial_u \psi_{u,s}$ obtenemos:

$$\partial_u \partial_{\log s} A_X(u, s) = \partial_{\log s} \partial_u A_X(u, s).$$

Sabemos $(\partial_u + \partial_x) \psi_{u,s} = 0$. El cálculo de $\langle K_X \varphi_{v,s}, \partial_x \varphi_{v,s} \rangle$, donde $\varphi_{v,s}(x) = \frac{\theta'(u)}{s} \psi\left(\frac{\theta'(u)}{s}(x-u)\right) = \psi_{u,s}(x)$, en la prueba del teorema de transporte de escala en una dimensión, muestra que

$$Re\langle K_X \varphi_{v,s}, \partial_x \varphi_{v,s} \rangle = \frac{1}{2} \iint \frac{\theta''(u)}{\theta'(u)} h \eta(0) s^h |x-y|^h Re\psi^*(x)\psi(y) dx dy = I(s).$$

Por consiguiente

$$\partial_{\log s} Re\langle K_X \varphi_{v,s}, \partial_x \varphi_{v,s} \rangle = s \frac{\partial}{\partial s} I(s)$$

de aquí resulta claro que

$$|\partial_{\log s} \partial_u A_X(u, s)| = \mathcal{O}(s^h).$$

Una aproximación en serie de Riemann para la integral $\int g(v) \partial_{\log s} A_X(v, s) dv$ muestra que

$$\int g(v) \partial_{\log s} A_X(v, s) dv - N^{-1} \sum_{k=-n}^n g(k/n) \partial_{\log s} A_X\left(\frac{k}{N, s}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{s^h}{N}\right). \quad (D.3)$$

Aproximemos el valor de la integral $\int g(v) \partial_{\log s} A_X(v, s) dv$ mediante la serie de Riemann S_n sobre el compacto $[u-\Delta, u+\Delta]$. Sea $\{k_i\}_{1 \leq i \leq n}$ los puntos de una partición $[u-\Delta, u+\Delta]$ tal que $u-\Delta = k_1 < k_2 < \dots < k_{n-1} < k_n = u+\Delta$.

Para $n=1$, $S_1 = 2\Delta g(u-\Delta,) \partial_{\log s} A_X(u-\Delta, s)$. Luego,

$$\begin{aligned} \left| \int_{u-\Delta}^{u+\Delta} g(v) \partial_{\log s} A_X(v, s) dv - S_1 \right| &\leq \\ &\left| \int_{u-\Delta}^{u+\Delta} g(v) \partial_{\log s} A_X(v, s) dv - \int_{u-\Delta}^{u+\Delta} g(u-\Delta) \partial_{\log s} A_X(u-\Delta, s) dv \right| \\ &\leq \left| \int_{u-\Delta}^{u+\Delta} (g(v) \partial_{\log s} A_X(v, s) - g(u-\Delta) \partial_{\log s} A_X(u-\Delta, s)) dv \right| \\ &\leq \int_{u-\Delta}^{u+\Delta} |g(v) \partial_{\log s} A_X(v, s) - g(u-\Delta) \partial_{\log s} A_X(u-\Delta, s)| dv. \end{aligned}$$

Se sigue del teorema del valor medio, para algún $c \in (u-\Delta, u+\Delta)$ y, tomando en cuenta que el máximo de la función g sobre el compacto $[u-\Delta, u+\Delta]$ es $1/\Delta$, ver ecuación (1.117) y, $|v - (u-\Delta)| \leq 2\Delta$:

$$\leq \int_{u-\Delta}^{u+\Delta} 2 |\partial_u \partial_{\log s} A_X(u, s)|_{u=c} dv.$$

Se sigue de (D.2), existe una constante K positiva tal que

$$\leq 4\Delta K s^h.$$

Por lo tanto,

$$\left| \int_{u-\Delta}^{u+\Delta} g(v) \partial_{\log s} A_X(v, s) dv - S_1 \right| \leq 4\Delta K s^h.$$

Al pasar del caso $n = 1$ al caso n cualquiera, se reemplaza el intervalo $[u - \Delta, u + \Delta]$, por otro de longitud n veces menor, es decir, se reemplaza Δ por $\frac{\Delta}{n} = \frac{1}{N}$, lo que implica:

$$\left| \int_{u-\Delta}^{u+\Delta} g(v) \partial_{\log s} A_X(v, s) dv - S_n \right| \leq 2 \frac{1}{N} K s^h$$

con lo cual obtenemos el resultado (D.3).

Reemplazando $\widehat{\partial_{\log s} A_X}(u, s)$ por su expresión (1.118) en (D.1), así como $\overline{\partial_{\log s} A_X}(u, s)$ por su aproximación en serie de Riemann y, tomando en cuenta que la parte real es más pequeña que el módulo, obtenemos:

$$V_{\log s} \leq 4N^{-2} \mathbb{E} \left\{ \left| \sum_{|k| \leq n} (g_k W_k Z_k - g_k \mathbb{E}(W_k Z_k)) \right|^2 \right\} + \mathcal{O} \left(\frac{s^{2h}}{N^2} \right)$$

donde g_k , W_k y Z_k , respectivamente, denota, $g(k/N)$, $\langle X, \psi_{k/N, s} \rangle$ y $\langle X, \partial_{\log s} \psi_{k/N, s} \rangle^*$. Expresando $\left| \sum_{|k| \leq n} \right|^2$ en $\left(\sum_{|k| \leq n} \right) \cdot \left(\sum_{|l| \leq n} \right)^*$:

$$\begin{aligned} V_{\log s} &\leq \frac{4}{N^2} \mathbb{E} \left\{ \sum_{|k| \leq n} [g_k W_k Z_k - g_k \mathbb{E}(W_k Z_k)] \cdot \sum_{|l| \leq n} [g_l W_l Z_l - g_l \mathbb{E}(W_l Z_l)]^* \right\} + \mathcal{O} \left(\frac{s^{2h}}{N^2} \right) \\ &\leq \frac{4}{N^2} \sum_{|k| \leq n, |l| \leq n} [g_k g_l \mathbb{E} \{W_k Z_k W_l^* Z_l^*\} - g_k g_l \mathbb{E} \{W_k Z_k\} \mathbb{E} \{W_l^* Z_l^*\}] + \mathcal{O} \left(\frac{s^{2h}}{N^2} \right). \end{aligned}$$

Puesto que Y es Gaussiano, también lo es X , como también las variables aleatorias W_k y Z_k . Por otra parte,

$$\mathbb{E} \{W_k Z_k W_l^* Z_l^*\} = \mathbb{E} \{W_k Z_k\} \mathbb{E} \{W_l^* Z_l^*\} + \mathbb{E} \{W_k W_l^*\} \mathbb{E} \{Z_k Z_l^*\} + \mathbb{E} \{W_k Z_l^*\} \mathbb{E} \{Z_k W_l^*\}.$$

Reemplazando esta esperanza en la sumatoria de arriba obtenemos:

$$V_{\log s} \leq \frac{4}{N^2} \sum_{|k| \leq n, |l| \leq n} g_k g_l [\mathbb{E} \{W_k W_l^*\} \mathbb{E} \{Z_k Z_l^*\} + \mathbb{E} \{W_k Z_l^*\} \mathbb{E} \{Z_k W_l^*\}] + \mathcal{O} \left(\frac{s^{2h}}{N^2} \right).$$

Note que el máximo de g_j es $1/\Delta = N/n$ (1.117) entonces,

$$V_{\log s} \leq \frac{4}{n^2} \sum_{|k| \leq n, |l| \leq n} [\mathbb{E} \{W_k W_l^*\} \mathbb{E} \{Z_k Z_l^*\} + \mathbb{E} \{W_k Z_l^*\} \mathbb{E} \{Z_k W_l^*\}] + \mathcal{O} \left(\frac{s^{2h}}{N^2} \right). \quad (\text{D.4})$$

Cada uno de los términos que aparecen en la suma anterior está acotado debido al siguiente Lema de decorrelación.

Lema D.0.0.1 Sean $X(x) = Y(\theta(x))$, $W_k = \langle X, \psi_{k/N,s} \rangle$ y $Z_k = \langle X, \partial_{\log s} \psi_{k/N,s} \rangle^*$. Bajo la hipótesis del teorema 1.4.1.1 (Teorema de consistencia), para s suficientemente pequeño, existen funciones continuas M_1 y M_2 tales que para $|k - l| \leq 2$:

$$|\mathbb{E} \{W_k W_l^*\}| \leq M_1(sk) s^h \quad (\text{D.5})$$

$$|\mathbb{E} \{W_k Z_l^*\}| \leq M_1(sk) s^h \quad (\text{D.6})$$

$$|\mathbb{E} \{Z_k Z_l^*\}| \leq M_1(sk) s^h \quad (\text{D.7})$$

y para $|k - l| > 2$:

$$|\mathbb{E} \{W_k W_l^*\}| \leq M_2(sk) \frac{s^{2p}}{(s(|k - l| - 2))^{2p-h}} \quad (\text{D.8})$$

$$|\mathbb{E} \{W_k Z_l^*\}| \leq M_2(sk) \frac{s^{2p}}{(s(|k - l| - 2))^{2p-h}} \quad (\text{D.9})$$

$$|\mathbb{E} \{Z_k Z_l^*\}| \leq M_2(sk) \frac{s^{2p}}{(s(|k - l| - 2))^{2p-h}} \quad (\text{D.10})$$

A fin de no perder la continuidad de la demostración, la prueba de este lema se muestra más adelante, la cual es presentada en [7].

Reemplazando los resultados del lema anterior en (D.4), vemos que, puesto que M_1 y M_2 son funciones continuas y $0 < s < k/N = \Delta$, para N suficientemente grande obtenemos:

$$V_{\log s} \leq \frac{4}{n^2} \left[\sum_{|k-l| \leq 2, |k| \leq n, |l| \leq n} 2 (M_1(0)^2 + o(1)) s^{2h} + \sum_{|k-l| > 2, |k| \leq n, |l| \leq n} \frac{2(M_2(0)^2 + o(1)) s^{4p}}{(s(|k-l|-2))^{4p-2h}} \right] + \mathcal{O} \left(\frac{s^{2h}}{N^2} \right). \quad (\text{D.11})$$

Por hipótesis (Teorema 1.4.1.1), $4p - 2h > 1$,

$$\sum_{|k-l| > 2, |k| \leq n, |l| \leq n} (|k - l| - 2)^{2h-4p} = Kpn.$$

para alguna constante positiva $K > 0$.

Por otra parte, un arreglo matricial permite ver fácilmente que para todo $n \geq 3$:

$$\sum_{|k-l| \leq 2, |k| \leq n, |l| \leq n} 1 = n + 2[(n-1) + (n-2)] = 5n - 6.$$

Si n es lo suficientemente grande

$$\sum_{|k-l|\leq 2, |k|\leq n, |l|\leq n} 1 \approx 5n.$$

Regresando a las sumatorias de (D.11) y para n lo suficientemente grande obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{4}{n^2} \sum_{|k-l|\leq 2, |k|\leq n, |l|\leq n} 2 (M_1(0)^2 + o(1)) s^{2h} &= \frac{8}{n^2} (M_1(0)^2 + o(1)) s^{2h} \cdot 5n \\ &= \frac{16}{n} s^{2h} (M_1(0)^2 + o(1)) + \frac{8}{n} s^{2h} (3M_1(0)^2 + o(1)). \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{4}{n^2} \sum_{|k-l|>2, |k|\leq n, |l|\leq n} \frac{2(M_2(0)^2 + o(1))s^{4p}}{(s(|k-l|-2))^{4p-2h}} &= \frac{8}{n^2} s^{2h} (M_2(0)^2 + o(1)) \sum_{|k-l|>2} (|k-l|-2)^{2h-4p} \\ &= \frac{8}{n^2} s^{2h} (M_2(0)^2 + o(1)) \cdot Kpn = \frac{8}{n} s^{2h} (M_2(0)^2 Kp + o(1)). \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Reemplazando (D.12) y (D.13) en (D.11) obtenemos:

$$V_{\log s} \leq \frac{8}{n} s^{2h} C^2 (3M_1(0)^2 + M_2(0)^2 Kp) + o\left(\frac{s^{2h}}{n}\right).$$

Puesto que $|\partial_u A_X(u, s)| \geq a(u)s^h + o(s^h)$, para Δ suficientemente pequeño, $\partial_u A_X(u, s)$ no cambia de signo para $|v| \leq \Delta$. Entonces, después de la convolución con g :

$$|\overline{\partial_u A_X}(u, s)| \geq A s^h + o(s^h). \quad (\text{D.14})$$

Por (1.114), lo mismo aplica para $\overline{\partial_{\log s} A_X}(0, s)$. Por lo tanto, existe una constante positiva C_1 tal que

$$V_{\log s} \leq C_1 \left[\frac{|\overline{\partial_{\log s} A_X}(0, s)|}{\sqrt{n}} \right]^2.$$

Aplicando el Lema de Chebyshev [2], para todo $\varepsilon > 0$

$$\text{Prob} \left\{ \left| \widehat{\partial_{\log s} A_X}(u, s) - \overline{\partial_{\log s} A_X}(u, s) \right| \geq \sqrt{C_1} \frac{|\overline{\partial_{\log s} A_X}(u, s)|}{\sqrt{n\varepsilon}} \right\} \leq \varepsilon^2.$$

Si elegimos $\varepsilon = \frac{\sqrt{C_1}\Delta}{\log n}$ se obtiene

$$\text{Prob} \left\{ \left| \widehat{\partial_{\log s} A_X}(u, s) - \overline{\partial_{\log s} A_X}(u, s) \right| \geq \frac{\log(N\Delta)}{\Delta\sqrt{N\Delta}} |\overline{\partial_{\log s} A_X}(u, s)| \leq \frac{C_1(u)\Delta^2}{(\log(N\Delta))^2} \right\}$$

donde C_1 es una constante que depende de las localizaciones $u = k/N$, $k \in \mathbb{Z}$, $C = \frac{\log(N\Delta)}{\Delta\sqrt{N\Delta}}$

y $\varepsilon_1 = \frac{C_1(u)\Delta^2}{(\log(N\Delta))^2}$, lo cual prueba (1.120).

Ahora probaremos (1.121). Denotemos $D_u = \left| \widehat{\partial_u A_X}(u, s) - \overline{\partial_u A_X}(u, s) \right|$.

Por definición:

$$\begin{aligned} \overline{\partial_u A_X}(0, s) &= \int_{-\Delta}^{\Delta} g(-v) \partial_u A_X(v, s) dv \\ &= \int_{-\Delta}^0 g(-v) \partial_u A_X(v, s) dv + \int_0^{\Delta} g(-v) \partial_u A_X(v, s) dv. \end{aligned}$$

Integrando por parte ambas integrales y, tomando en cuenta $|\overline{\partial_u A_X}(u, s)| = \mathcal{O}(s^h)$ obtenemos

$$\overline{\partial_u A_X}(0, s) = \frac{1}{\Delta} \left[\int_0^{\Delta} A_X(v, s) dv - \int_{-\Delta}^0 A_X(v, s) dv \right] + \mathcal{O}(s^h).$$

Aproximemos el valor de la integral $\int_0^{\Delta} A_X(v, s) dv$ por serie de Riemann S_n . Consideremos $\{k_i\}_{1 \leq i \leq n}$ los puntos de una partición del intervalo $[0, \Delta]$ tal que $0 = k_1 < k_2 < \dots < k_{n-1} < k_n = \Delta$.

Tomemos $n = 1$, en ese caso $S_1 = \Delta A_X(0, s)$. Luego,

$$\left| \int_0^{\Delta} A_X(v, s) dv - S_1 \right| \leq \int_0^{\Delta} |A_X(v, s)| dv \leq \Delta M s^h$$

para alguna constante positiva M . Por consiguiente, podemos escribir:

$$\Delta^{-2} \left| \int_0^{\Delta} A_X(v, s) dv - S_1 \right| = \Delta^{-1} \mathcal{O}(s^h). \quad (\text{D.15})$$

Para una partición del intervalo n -veces más fina, se tiene la serie de Riemann

$$S_n = \frac{\Delta}{n} \sum_{k=1}^n A_X \left(\frac{k}{N}, s \right)$$

puesto que $n = N\Delta$, entonces, $\Delta^{-1} = N/n$. Por consiguiente, para una resolución fija N , podemos reescribir la ecuación (D.15):

$$\Delta^{-2} \int_0^{\Delta} A_X(v, s) dv - \Delta^{-1} n^{-1} \sum_{k=1}^n A_X \left(\frac{k}{N}, s \right) = \mathcal{O} \left(\frac{s^h}{n} \right). \quad (\text{D.16})$$

Veamos que $\widehat{\partial_u A_X}(0, s)$, definido en (1.118) satisface:

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_u A_X}(0, s) &= \frac{1}{N\Delta^2} \sum_{0 \leq k/N - u \leq \Delta} |\langle X, \psi_{k/N, s} \rangle|^2 - \frac{1}{N\Delta^2} \sum_{-\Delta \leq k/N - u \leq 0} |\langle X, \psi_{k/N, s} \rangle|^2 \\ &\quad + \mathcal{O} \left(\frac{s^h}{N} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Sabemos que $|\partial_u A_X(u, s)| \geq a(u)s^h + o(s^h)$, para Δ suficientemente pequeño, $\partial_u A_X(u, s)$ no cambia de signo para $|v| \leq \Delta$, entonces, $|A_X(v, s)| = \mathcal{O}(s^h)$.

$$|\langle X, \psi_{v,s} \rangle|^2 - A_X(v, s) \leq |A_X(v, s) - |\langle X, \psi_{v,s} \rangle|^2| \leq A_X(v, s).$$

Por consiguiente,

$$|\langle X, \psi_{v,s} \rangle|^2 \leq 2 |A_X(v, s)|$$

lo que implica,

$$|\langle X, \psi_{v,s} \rangle|^2 = \mathcal{O}(s^h).$$

Aproximemos el valor de la integral $\Delta^{-2} \int_0^\Delta |\langle X, \psi_{v,s} \rangle|^2 dv$ sobre el compacto $[0, \Delta]$ por series de Riemann S_n . Sea $\{k_i\}_{1 \leq i \leq n}$ los puntos de una partición del intervalo $[0, \Delta]$ tal que $0 = k_1 < k_2 < \dots < k_{n-1} < k_n = \Delta$.

Consideremos $n = 1$, $S_1 = \Delta |\langle X, \psi_{0,s} \rangle|^2$. Luego

$$\left| \int_0^\Delta |\langle X, \psi_{v,s} \rangle|^2 - S_1 \right| \leq \int_0^\Delta |\langle X, \psi_{v,s} \rangle|^2 \leq \Delta s^h.$$

Por lo tanto,

$$\Delta^{-2} \left| \int_0^\Delta |\langle X, \psi_{v,s} \rangle|^2 - S_1 \right| = \Delta^{-1} \mathcal{O}(s^h).$$

Para el caso de una partición n -veces más fina del intervalo $[0, \Delta]$, S_n toma la forma:

$$S_n = \frac{\Delta}{n} \sum_{k=1}^n |\langle X, \psi_{k/N,s} \rangle|^2.$$

Por lo tanto,

$$\Delta^{-2} \int_0^\Delta |\langle X, \psi_{v,s} \rangle|^2 dv - \frac{1}{N\Delta} \sum_{k=1}^n |\langle X, \psi_{k/N,s} \rangle|^2 = \mathcal{O}\left(\frac{s^h}{N}\right). \quad (\text{D.18})$$

La ecuación (1.118) puede interpretarse como la representación discreta en serie de Riemann, de la formulación continua del estimador $\widehat{\partial_u A_X}(0, s)$, esto es

$$\widehat{\partial_u A_X}(0, s) = \int_{-\Delta}^\Delta g(-v) 2 \text{Re} \langle X, \psi_{v,s} \rangle \langle X, \partial_u \psi_{v,s} \rangle^* dv.$$

integrando por parte obtenemos:

$$\widehat{\partial_u A_X}(0, s) = \Delta^{-2} \left[\int_0^\Delta |\langle X, \psi_{v,s} \rangle|^2 dv - \int_{-\Delta}^0 |\langle X, \psi_{v,s} \rangle|^2 dv \right] + \mathcal{O}\left(\frac{s^h}{N}\right).$$

Reemplazando cada una de las integrales por su aproximación en serie de Riemann, según (D.18), obtenemos el resultado deseado, (D.17).

Usando nuevamente la notación $W_k = \langle X, \psi_{k/N,s} \rangle$, reescribimos D_u como sigue:

$$\begin{aligned}
D_u &= \frac{1}{n\Delta} \left| \sum_{k=1}^n |W_k|^2 - \sum_{k=-n+1}^0 |W_k|^2 - \left(\sum_{k=1}^n \mathbb{E} \{|W_k|^2\} - \sum_{k=-n+1}^0 \mathbb{E} \{|W_k|^2\} \right) \right| + \mathcal{O} \left(\frac{s^h}{n} \right) \\
&= \frac{1}{n\Delta} \left| \sum_{k=1}^n (|W_k|^2 - \mathbb{E} \{|W_k|^2\}) - \sum_{k=-n+1}^0 (|W_k|^2 - \mathbb{E} \{|W_k|^2\}) \right| + \mathcal{O} \left(\frac{s^h}{n} \right).
\end{aligned}$$

Denotando $\widetilde{W}^- = \sum_{k=-n+1}^0 |W_k|^2$ y $\widetilde{W}^+ = \sum_{k=1}^n |W_k|^2$, obtenemos:

$$D_u \leq \frac{1}{n\Delta} \left(\left| \widetilde{W}^+ - \mathbb{E} \{ \widetilde{W}^+ \} \right| + \left| \widetilde{W}^- - \mathbb{E} \{ \widetilde{W}^- \} \right| \right) + \mathcal{O} \left(\frac{s^h}{n} \right). \quad (\text{D.19})$$

Ahora probaremos que existe una constante estrictamente positiva C_2 tal que

$$\forall y : \text{Prob} \left\{ D_u > y C_2 \frac{s^h}{\Delta \sqrt{n}} \right\} \leq 6e^{-y/2}. \quad (\text{D.20})$$

puesto que $\left| \widehat{\partial_u A_X}(v, s) \right| \geq A s^h + o(s^h)$ con $A > 0$, la elección $y = \log n / C_2$ implicará (1.121).

Consideremos el vector aleatorio $W = (W_1, W_2, \dots, W_n)$, sea K_W el operador de covarianza de W y sea $(e_j)_{j=1,2,\dots,n}$ su base Karhunen-Loève. Si $(\alpha_j)_{j=1,2,\dots,n}$ son los autovalores de K_W correspondiente a los autovectores $(e_j)_{j=1,2,\dots,n}$ entonces

$$W = \sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j} \bar{W}_j e_j$$

donde \bar{W}_j son variables aleatorias independientes con varianzas 1. Como consecuencia

$$\widetilde{W}^+ = \|W\|^2 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{W}_j^2.$$

El siguiente Lema que se demuestra en [9], se basa en un teorema de Bákirov [1].

Lema D.0.0.2 Si $\widehat{W} = \sum_j \beta_j \bar{W}_j^2$, donde \bar{W}_j son variables aleatorias independientes Gaussianas con varianza 1, y $\sum_j \beta_j^2 = 1$, entonces

$$\forall y : \text{Prob} \left\{ \left| \widehat{W} - \mathbb{E} \{ \widehat{W} \} \right| > y \right\} \leq 6e^{-y/2}$$

La variable aleatoria $\widehat{W}^+ = \left(\sum_j \alpha_j^2 \right)^{-1/2} \widetilde{W}^+$ satisface los requerimientos del lema anterior. Por lo tanto,

$$\forall y : \text{Prob} \left\{ \left| \widehat{W}^+ - \mathbb{E} \{ \widehat{W}^+ \} \right| > y \left(\sum_j \alpha_j^2 \right)^{1/2} \right\} \leq 6e^{-y/2}$$

pero $\sum_j \alpha_j^2$ es igual a la norma Hilbert-Schmidt de K_w

$$\sum_j \alpha_j^2 = \sum_{j,k} \mathbb{E} \{W_j W_k^*\}$$

lo cual está acotado por $Bs^{2h}n$. (Lema D.0.0.1). Por lo tanto,

$$\forall y: \text{Prob} \left\{ \left| \widetilde{W}^+ - \mathbb{E} \left\{ \widetilde{W}^+ \right\} \right| > y\sqrt{Bs^h\sqrt{n}} \right\} \leq 6e^{-y/2}$$

lo mismo aplica a \widetilde{W}^- , y combinando los dos resultados y usando (D.19) obtenemos (D.20).

□

Prueba del Lema D.0.0.1: Los tres términos $\mathbb{E} \{W_k W_l^*\}$, $\mathbb{E} \{W_k Z_l^*\}$ y $\mathbb{E} \{Z_k Z_l^*\}$ puede ser escrito como

$$I = \iint c_Y (\theta(u + sx) - \theta(v + sy)) \psi(x) \psi^*(y) dx dy$$

donde $(u, v) = (sk, sl)$ y ψ y ψ^* son dos wavelet con p momentos cero. Claramente

$$I = \iint [c_Y (\theta(u + sx) - \theta(v + sy)) - c_Y(0)] \psi(x) \psi^*(y) dx dy \quad (\text{D.21})$$

Para $|u - v| \leq \Delta$, $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 1$, obtenemos:

$$|\theta(u + sx) - \theta(v + sy)| \leq (\Delta + 2s) \sup_{|x-u| \leq \Delta+2s} |\theta'(x)| \leq (\Delta + 2s) C_u$$

puesto que θ es continuamente diferenciable. Para Δ suficientemente pequeño, $|\theta(u + sx) - \theta(v + sy)|$ está en un entorno de cero. Puesto que η se asume continua en una vecindad de cero:

$$|\eta(\theta(u + sx) - \theta(v + sy))| \leq B$$

para $|u - v| \leq \Delta$, $|x| \leq 1$ y $|y| \leq 1$.

Por lo tanto,

$$|I| \leq \iint |\theta(u + sx) - \theta(v + sy)|^h B |\psi(x)| |\psi^*(y)| dx dy \leq C(u) s^h$$

donde $C(u)$ es continua. Esto prueba (D.5), (D.6) y (D.7).

Veamos ahora la prueba de (D.8), (D.9) y (D.10).

Puesto que ψ y ψ^* en (D.21) tienen soporte compacto y tienen p momentos cero, existen dos funciones con soporte compacto β y β^* tales que $\psi(x) = \beta^{(p)}(x)$ y $\psi^*(y) = \beta^{*(p)}(y)$. Integrando (D.21) por parte p veces con respecto a x y y se obtiene:

$$I = \iint \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^p}{\partial y^p} \left\{ |\theta(u + sx) - \theta(v + sy)|^h \eta(\theta(u + sx) - \theta(v + sy)) \right\} \times \beta(x) \beta^*(y) dx dy.$$

Para $|u - v| > 2s$, sin embargo, se obtiene:

$$\left| \frac{\partial^p}{\partial x^p} \frac{\partial^p}{\partial y^p} \left\{ |\theta(u + sx) - \theta(v + sy)|^h \eta(\theta(u + sx) - \theta(v + sy)) \right\} \right| \leq M_2(u) \frac{s^{2p}}{(s(|k - l| - 2))^{2p-h}}$$

donde $M(u)$ depende de h , de las derivadas de θ hasta el orden $2p$ en una vecindad de u y, las derivadas de η hasta el orden $2p$ en un entorno de cero. Por lo tanto, existe una función continua $M_2(u)$ tal que:

$$|I| \leq M_2(u) \frac{s^{2p}}{(s(|k - l| - 2))^{2p-h}}$$

lo cual prueba (D.8), (D.9) y (D.10).

□

Apéndice E

Demostración ecuación 1.23

Veamos que $A(z) = |z|^{-2} \frac{\partial}{\partial z} \left(h^{-1} |z|^2 \int_0^1 \lambda \vec{\nabla} \log \eta(\lambda z) (I_d - J_{\vec{u}}(\lambda z)) d\lambda \right)$ está acotada en un entorno del punto 0, donde $\vec{\nabla} \log(\lambda z) = |\lambda z| \vec{a}(\lambda z)$.

Sea $\vec{\nabla} \log \eta(z) = |z| \vec{a}(z)$. Por hipótesis, $\eta(0) > 0$. Por consiguiente, $\vec{\nabla} \eta(0) = 0$ y por ende $\vec{\nabla} \log \eta(0) = 0$. Por otra parte, se asume $\eta(z) \in \mathcal{C}^2$ en un entorno de cero, $\{z : 0 < |z| < \epsilon\}$, $\epsilon > 0$. Entonces, para algún $K \subset \{z : 0 \leq |z| < \epsilon\}$ compacto y convexo existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|\nabla \log \eta(z)| \leq |z| M \quad (\text{E.1})$$

para todo $z \in K$. Esto implica, $\vec{a}(z)$ está uniformemente acotado en $\{z : 0 < |z| < \epsilon\}$. Además se sigue de (E.1) que $\vec{\nabla} \log \eta(z)$ satisface una condición de Lipschitz con lo cual $\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \log \eta(z) \right)$ está acotado, lo que implica, $\vec{\nabla} \vec{a}(z)$ está uniformemente acotado. Por lo tanto, $\vec{a}(z)$ y $\vec{\nabla} \vec{a}(z)$ están acotado en un entorno de 0.

Calculemos $A(z)$ explícitamente: $|z|^2 A(z)$ es la suma de tres términos:

Si a y b son dos vectores, denotaremos $a \otimes b$ a la matriz $(a_i b_j)_{ij}$. Entonces

$$\begin{aligned} (I) &= 2h^{-1} \left(\int_0^1 \lambda |\lambda z| \vec{a}(\lambda z) (I_d - J_{\vec{u}}(\lambda z)) d\lambda \right) \otimes z \\ (II) &= h^{-1} |z|^2 \int_0^1 |\lambda|^2 \left(\vec{a}(\lambda z) \otimes \frac{z}{|\lambda z|} + \lambda |\lambda z| \vec{\nabla} \vec{a}(\lambda z) (I_d - J_{\vec{u}}(\lambda z)) \right) d\lambda \\ (III) &= -h^{-1} |z|^3 \int_0^1 |\lambda|^3 \vec{a}(\lambda z) \vec{\nabla}_z J_{\vec{u}}(\lambda z) d\lambda \end{aligned}$$

Para (III) el (i, j) -elemento de $\vec{a}(\lambda z) \vec{\nabla}_z J_{\vec{u}}(\lambda z)$ es $\sum_k a_k(\lambda z) \times \frac{\partial}{\partial z_j} (J_{\vec{u}})_{k_i}(\lambda z)$.

En efecto:

$$|z|^2 A(z) = \frac{\partial}{\partial z} \left(h^{-1} |z|^2 \int_0^1 \lambda |\lambda z| \vec{a}(\lambda z) (I_d - J_{\vec{u}}(\lambda z)) d\lambda \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{h^{-1} \frac{\partial}{\partial z} |z|^2 \int_0^1 \lambda |\lambda z| \vec{a}(\lambda z) (I_d - J_{\tilde{u}}(\lambda z)) d\lambda}_{(I)} + \\
&\quad \underbrace{h^{-1} |z|^2 \int_0^1 \lambda \frac{\partial}{\partial z} (|\lambda z| \vec{a}(\lambda z)) (I_d - J_{\tilde{u}}(\lambda z)) d\lambda}_{(II)} + \\
&\quad \underbrace{h^{-1} |z|^2 \int_0^1 \lambda |\lambda z| \vec{a}(\lambda z) \frac{\partial}{\partial z} (I_d - J_{\tilde{u}}(\lambda z)) d\lambda}_{(III)}
\end{aligned}$$

Luego, (I) y (III) son inmediatos y para (II):

$$\begin{aligned}
(I) &= 2h^{-1} \left(\int_0^1 \lambda |\lambda z| \vec{a}(\lambda z) (I_d - J_{\tilde{u}}(\lambda z)) d\lambda \right) \otimes z \\
(II) &= h^{-1} |z|^2 \int_0^1 \lambda \left[\lambda \vec{a}(\lambda z) \otimes \frac{\lambda z}{|\lambda z|} + |\lambda z| \vec{\nabla} \vec{a}(\lambda z) \lambda \right] (I_d - J_{\tilde{u}}(\lambda z)) d\lambda \\
&= h^{-1} |z|^2 \int_0^1 |\lambda|^2 \left[\vec{a}(\lambda z) \otimes \frac{z}{|z|} + \lambda |z| \vec{\nabla} \vec{a}(\lambda z) \right] (I_d - J_{\tilde{u}}(\lambda z)) d\lambda \\
(III) &= -h^{-1} |z|^3 \int_0^1 |\lambda|^3 \vec{a}(\lambda z) \vec{\nabla}_z J_{\tilde{u}}(\lambda z) d\lambda
\end{aligned}$$

Puesto que $\tilde{u} \in \mathbf{C}^2$ y $\vec{a}(\lambda z)$ como $\vec{\nabla} \vec{a}(\lambda z)$ están uniformemente acotados para $0 < |\lambda z| < \epsilon$, la matriz $A(z)$ se obtiene dividiendo los términos (I), (II) y (III) por $|z|^2$ el cual está uniformemente acotado para $0 < |z| < \epsilon$.

□

Apéndice F

Simulación de la estimación de la deformación estocástica en una dimensión

‡ LIBRERÍAS REQUERIDAS

```
library(waved); library(signal)
. library(daewr); library(graphics)
. library(rdetools)
```

‡ FUNCIONES PRINCIPALES:

‡ *hacer_deformacion* Realiza la transformación $X(t) = f(t) \cdot Y(g(t))$

‡ *estimar_deformacion* Resuelve el problema de deformación como se describe
en [7].

‡ *InvertLDP* Invierte el proceso $X(t) = f(t) \cdot Y(g(t))$

‡ FUNCIONES COMPLEMENTARIAS:

‡ *ModSpline* Función de soporte para el cálculo de los coeficientes wavelets.

‡ *integracion*
‡ *interpolar*

```

hacer_deformacion ← function(f,gp,Y){

# Argumentos:
. # f : Una función de longitud  $N$ 
. # gp : La derivada del cambio de variable (gp significa g prima)
. # Y : Proceso estacionario no deformado

# Valor :Proceso estocástico deformado

hacer_deformacion ← f · interpol(Y,gp)
. return(hacer_deformacion)
}

estimar_deformacion ← function(X,s,Delta,m){

# Argumentos:
. # X : Proceso deformado
. # s : Escala base
. # Delta : Anchura de la convolución
. # m : Orden de Splines

# Valor :new.gp alpha' (derivada de la función de deformación)
. # : new.Y señal estacionarizada.

M ← length(X)
. J ← log2(M)
. f ← matrix(rep(1,M),nrow = M)
. Y ← X

# Núcleo de la convolución
. Delta ← 1200
. rho ← seq(1,Delta/2)/(Delta/4)
. rho ← c(rho, sort(rho, decreasing=TRUE))
. intrho ← matrix(rep(1,Delta/2),byrow = Delta/2)/(Delta/4)
. intrho ← rbind(intrho,-intrho)

# Número de escalas a considerar
. ns ← 6
. vector ← matrix(rep(0,ns),nrow = ns)
. matriz ← matrix(rep(0,2*ns),nrow = ns)

```

```

# Define la diferentes escalas ns
.   escala ← c()

for (is in 1:ns){
.   escala[is] ← sqrt(is) * s
}

# Calcula las transformadas wavelet en las ns escalas diferentes
.   WX ← matrix(rep(0,length(Y)),ncol = length(Y),nrow = 1)
.   WXtilde ← matrix(rep(0,length(Y)),ncol = length(Y),nrow = 1)

for (is in 1:ns){

a ← ModSpline(Y,m,escala[is],Name="ModSpline")
.   atilde ← ModSpline(Y,m,escala[is],Name="scaleder")

WX ← rbind(WX,t(Mod(a)^2))
.   WXtilde ← rbind(WXtilde,t(Re(2*atilde*Conj(a))))

}

WX ← WX[-1,]; WXtilde ← WXtilde[-1,]

# Calcula las derivadas parciales suavizadas con respecto al espacio (u) y la escala (s).

spaceder ← matrix(rep(0,length(Y)+length(intrho)-1),
.   ncol = length(Y)+length(intrho)-1,nrow = 1)

scaleder ← matrix(rep(0,length(Y)+length(intrho)-1),
.   ncol = length(Y)+length(intrho)-1,nrow = 1)

for(is in 1:ns){

.   spaceder ← rbind(spaceder,conv(WX[is,],intrho))

.   scaleder ← rbind(scaleder,conv(WXtilde[is,],rho))

}

spaceder ← spaceder[-1,]; scaleder ← scaleder[-1,]

spaceder ← spaceder[(Delta/2+1):(N+Delta/2)]
.   scaleder ← scaleder[(Delta/2+1):(N+Delta/2)]

```

```

# Estimación de  $\alpha''/\alpha'$  (gradiente de deformación)

.   vA ← as.vector(spaceder); vB ← as.vector(scaleder)
.   AB ← matrix(vA*vB,nrow = ns, ncol = length(Y), byrow = FALSE)
.   C ← matrix(vB*vB,nrow = ns, ncol = length(Y), byrow = FALSE)
.   vAB ← as.vector(AB)
.   vC ← as.vector(C)
.   medias ← apply(AB,2,mean)
.   medias2 ← apply(C,2,mean)

.   ldgpp ← medias/medias2

# Liberar espacio de memoria RAM, borra variables temporales

rm(vA,vB,vAB,AB,C,medias,medias2)

# Estimación de alpha

new.gp ← integracion(ldgpp)

# Señal estacionarizada

new.Y ← InvertLDP(X,f,gp)

.   estimar_deformacion ← list()
.   estimar_deformacion[[1]] ← new.gp
.   estimar_deformacion[[2]] ← new.Y
.   return(estimar_deformacion)

}

```

```

integracion ← function(logfp){

# Argumentos:
. # logfp : La derivada de log(f)

# Valor :f tal que el promedio de f es igual a 1.

M ← length(logfp)
. logf ← cumsum(logfp)
. integracion ← exp(logf)
. integracion ← N * integracion / sum(integracion)
. return(integracion)

}

interpolar ← function(f,gp){

# Argumentos:
. # f : Una función de longitud N
. # gp : La derivada del cambio de variable (gp significa g prima), de longitud N

# Valor :La función f con el cambio de variable g.

M ← length(f)

if (length(gp) != M) print("Pb with length of gp in interpolate.m")

gp ← gp * M / sum(gp)

g ← cumsum(gp)

# Interpolación lineal de f por ambos lados

suppressWarnings(f[2:(N+1)]←f)
. f[1] ← 2*f[2]-f[3]
. f[N+2] ← 2*f[N+1]-f[N]
. g ← t(g)+1

floorg ← floor(g)
. interpolacion ← (g-floorg)*(f[floorg+1]-f[floorg]) + f[floorg]

return(interpolacion)

}

```

```

InvertLDP ← function(X,f,gp){
  # Argumentos:
  . # X : Proceso deformado.
  . # f : Una función de longitud N
  . # gp : La derivada del cambio de variable (gp significa g prima) de longitud N

  # Valor :Proceso estacionarizado Y.

  N ← length(X)

  if (length(gp) != N){
    . print("Pb with length of gp in InvertLDP.m")}

  gp ← gp * N /sum(gp)
  . g ← cumsum(gp)

  g[N] ← N

  invg ← c()
  . invg[1]← 0

  d ← min(g[g:1])
  . n ← 1

  while (g[n] != d) {
    . n ← n + 1
    . }

  imin ← n

  for(j in (imin+1):N){
    . p ← seq(ceiling(g[j-1]),ceiling(g[j]))
    . invg[p] = j - (g[j]-p) / (g[j]-g[j-1])
    . }

  invg[is.na(invg)]←0
  . invgp ← diff(invg)
  . invgp[N] ← invgp[N-1]

  InvertLDP ← interpol(1/f,invgp)*interpol(X,invgp)
  . return(InvertLDP)

}

```

```

ModSpline ← function(x,m,s,Name){

N ← length(x)
.   fftx ← fft(x)
.   fftx ← matrix(fftx,nrow = length(fftx))
.   M ← 50

omega ← c(seq(0,N/2),seq((-N/2+1),-1))*(2*pi/N)
.   omega ← matrix(omega,nrow = length(omega),ncol = 1)
.   freq ← s * omega - 2*pi/M
.   hattheta ← (sinc(M *freq/2/pi))^(m+1)
.   eps ← mod(m+1,2)
.   hattheta ← hattheta * (complex(1,cos(eps*M*freq/2), -sin(eps*M*freq/2)))

if (Name=="ModSpline"){
.   psi ← hattheta
.   ModSpline ← ifft(fftx * Conj(psi))
.   return(ModSpline)
}

if (Name=="scaleder"){
.   i ← complex(imaginary=1)
.   psi ← s * omega * hattheta *
.   (-i*M *eps/2 *matrix(rep(1,N),nrow = N) + M *
.   (m+1)/2 * (1/tan(M *freq/2)-2/M/freq))

ModSpline ← ifft(fftx * Conj(psi))

}

}

```

```

# Construcción de una señal estacionaria en el dominio de Fourier
. # Longitud o resolución de la señal

N ← 4096

# bandwidth
. sigma ← N/4

# Frecuencia central
. f0 ← pi/2.5

# Variable de Fourier
. x ← fftshift(seq(-N/2+1,N/2)*2*pi)

# Filtro paso banda centrado en f0
. filtro ← exp(-((x-N*f0)/sigma)^2)

# señal estacionaria R
. i=complex(imaginary=1)
. R ← ifft((rnorm(N)+ i*rnorm(N))*filtro)

# Deformar la señal estacionaria
. #  $\eta = \alpha'' / \alpha'$  gradiente de deformación
. #  $g_p = \alpha'$ 
. #  $g = \alpha$ 

eta ← -0.003*seq(N/2,1,-1)/N
. eta ← c(eta,sort(eta, decreasing = TRUE))

# Gradiente de deformación real
. gp ← integracion(eta)
. g ← cumsum(gp)

phi ← rep(0,N)
. f ← integracion(phi)

# Proceso deformado
. X ← hacer_deformacion(f,gp,R)

# Estimación de la deformación
. Delta ← 1200

# order of splines
. m ← 4
. s ← .05

```

```

estima.deformacion ← list()
. deformacion ← estimar_deformacion(X,s,Delta,m)

‡ alpha estimado
. newg ← cumsum(estima.deformacion[[1]])

‡ PRESENTACIÓN DE LOS RESULTADOS

nvoice ← 12
. m ← 4
. s0 ← .02
. subsample ← 16

‡ SEÑAL ESTACIONARIA CON SU RESPECTIVO ESCALOGRAMA EMPÍRICO

split.screen(c(2, 1))

plot(seq(1,N)/N,Re(R),type = "l",
.      xlab = "ü", ylab = , main = "Señal Estacionaria")
.      abline(h=0,col="orange")

screen(2)

n ← length(Re(estima.deformacion[[2]])[1,])

noctave ← floor(log2(n))-6
. nscale ← nvoice * noctave

a ← matrix(rep(0,n*nscale),nrow = n)

kscale ← 1
. scale ← s0

for(jo in 1:noctave){
.   for(jv in 1:nvoice){

s ← scale * (2^(jv/nvoice))
.   a[,kscale] ← ModSpline(R,m,s,Name="ModSpline")
.   kscale ← kscale + 1

```

```

.    }

.  scale ← scale *2

}

a ← a[seq(1,n,subsample),]

b ← matrix(rep(0,dim(a)[1]*dim(a)[2]),nrow =dim(a)[1])

for(j in 1:dim(a)[1]){

.  b[j,] ← a[(dim(a)[1]+1-j),]

}

screen(2)

image(1-Mod(Conj(b))^2,col=grey(seq(0,1,length=4096)),
.  axes = TRUE, xlab = "ü", ylab = "log s")

# SEÑAL DEFORMADA VS. ESCALOGRAMA EMPÍRICO

close.screen(all = TRUE)
.  split.screen(c(2, 1))
.  screen(1)

plot(seq(1,N)/N, Re(X[1,]),type = "l",
.  xlab = "ü", ylab = , main="Señal Deformada")
.  abline(h=0,col=".orange")

screen(2)

a ← matrix(rep(0,n*nscale),nrow = n)

kscale ← 1
.  scale ← s0

for(jo in 1:noctave){

.  for(jv in 1:nvoice){

```

```

s ← scale * (2^(jv/nvoice))
.   a[,kscale] ← ModSpline(X,m,s,Name="ModSpline")
.   kscale ← kscale + 1

.   }

scale ← scale *2

}

a ← a[seq(1,n,subsample),]

b ← matrix(rep(0,dim(a)[1]*dim(a)[2]),nrow =dim(a)[1])

for(j in 1:dim(a)[1]){
.   b[j,] ← a[(dim(a)[1]+1-j),]
}

screen(2)

image(1-Mod(Conj(b))^2, col=grey(seq(0,1,length=4096)),
.   axes = TRUE, xlab = "ü", ylab = "log s")

# CONSISTENCIA DEL ESTIMADOR DEL GRADIENTE DE DEFORMACIÓN
. # COMPARACIÓN DEL GRADIENTE DE DEFORMACIÓN
. # TEÓRICO VS ESTIMADO.

close.screen(all = TRUE)

datos ← data.frame(log(gp),log(estima.deformacion[[1]]))

matplot(seq(1,N)/N, datos, pch = 1, type = "l",
.   xlab=, ylab = , main="Consistencia del estimador del gradiente de deformación",
.   col = c("black", "orange"))

# RECUPERACIÓN DE LA SEÑAL ESTACIONARIA

split.screen(c(2, 1))

screen(1)

```

```

. plot(seq(1,N)/N, Re(estima.deformacion[[2]])[1,],type = "l",
.       xlab = , ylab = , main = "Señal Estacionalizada")
.       abline(h=0,col="orange")

screen(2)

a ← matrix(rep(0,n*nscale),nrow = n)

kscale ← 1
. scale ← s0

for(jo in 1:noctave){

.   for(jv in 1:nvoice){

.     s ← scale * (2^(jv/nvoice))
.     a[,kscale] ← ModSpline(estima.deformacion[[2]],m,s,Name="ModSpline")
.     kscale ← kscale + 1

.   }

scale ← scale *2

}

a ← a[seq(1,n,subsample),]

b ← matrix(rep(0,dim(a)[1]*dim(a)[2]),nrow =dim(a)[1])

for(j in 1:dim(a)[1]){
.   b[j,] ← a[(dim(a)[1]+1-j),]
. }

image(1-Mod(Conj(b))^2, col=grey(seq(0,1,length=4096)),
.     axes = TRUE, xlab = "ü", ylab = "log s")

```

Apéndice G

Prueba del Lema 1.4.1.3

Veamos que para C en $(0, 1)$:

$$|x - 1| \leq C \wedge |y - 1| \leq C \Rightarrow \left| \frac{y}{x} - 1 \right| \leq \frac{2C}{1 - C} \quad (\text{G.1})$$

donde

$$x = \frac{X_1}{\mathbb{E}X_1} \quad y = \frac{X_2}{\mathbb{E}X_2}$$

A efecto de que $A \subseteq A_1 \cup A_2$; $i = 1, 2$:

$$A_i = \{|X_i - \mathbb{E}X_i| > C |\mathbb{E}X_i|\} \quad A = \left\{ \left| \frac{X_2}{X_1} - \frac{\mathbb{E}X_2}{\mathbb{E}X_1} \right| > \frac{2C}{1 - C} \left| \frac{\mathbb{E}X_2}{\mathbb{E}X_1} \right| \right\}.$$

Por lo tanto,

$$P(A) \leq P(A_1) + P(A_2)$$

lo cual implica

$$P(A^c) \geq 1 - P(A_1^c) - P(A_2^c)$$

como se desea.

Ahora bien, para mostrar la implicación (G.1), note que, si

$$1 - C \leq x \leq 1 + C \quad 1 - C \leq y \leq 1 + C$$

entonces

$$\frac{1 - C}{1 + C} \leq \frac{y}{x} \leq \frac{1 + C}{1 - C}$$

Por lo tanto,

$$\frac{-2C}{1 - C} \leq \frac{y}{x} - 1 \leq \frac{2C}{1 - C}$$

□

Bibliografía

- [1] BAKIROV, N. K. Extrema of the distributions of quadratic forms of gaussian variables. *Theory Probab. Appl* 34 (1989), 207–215.
- [2] BILLINGSLEY, P. *Probability and Measure*, 3 ed. Wiley, New York, 1995.
- [3] BLAKE, A., AND MARINOS, C. Shape from texture: estimation, isotropy and moments. *Artificial Intelligence* 45 (1990), 323–380.
- [4] BLOSTEIN, D., AND AHUJA, N. Shape from texture: integrating texture-element extraction and surface estimation. *IEEE Trans. Patt. Ana. and Mach. Intell.* 11–12 (1990), 1233–1251.
- [5] BROCKWELL, P., AND DAVIS, R. *Times Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag, 1991.
- [6] CLERC, M., AND MALLAT, S. The texture gradient equation for recovering shape from texture. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 24, 4 (2002), 536–549.
- [7] CLERC, M., MALLAT, S., ET AL. Estimating deformations of stationary processes. *The Annals of Statistics* 31, 6 (2003), 1772–1821.
- [8] CORINNE B., A. L., AND LEON, J. *Inference on the Hurst Parameter and the Variance of Diffusions Driven by Fractional Brownian Motion*, 1 ed. Springer, Berlin, 2014.
- [9] GAO, H. Y. *Wavelet estimation of spectral densities in times series analysis*. Ph.D. dissertation, Dept. Statistics, Univ. California, Berkeley., 1993.
- [10] GARDING, J. Shape from texture for smooth curved surfaces in perspective projection. *Math, Imaging Vision* 2 (1992), 327–350.
- [11] GARDING, J. Shape from texture for smooth surface under perspective projection. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 2 (1992), 327–350.
- [12] GARDING, J. Surface orientation and curvature from differential texture distorsion. *Proc. 5th Int. Conf. on Computer Vision* (1995), 733–739.
- [13] GIBSSON, J. *The perception of the visual world*. Houghton Mifflin, Boston, 1950.

- [14] GROSSBERG, S., K. L., AND E., M. A neuronal model of 3d shape from texture: Multiple-scale filtering, boundary grouping and surface filling - in. *Vision Research* (2007), 634–672.
- [15] J., M., AND R., R. *Computing local surface orientation and shape from texture curved surfaces*. 1994.
- [16] K., K., AND T.C., C. Shape from texture: General principle. *Artificial Intelligence 38* (1989), 1–48.
- [17] KANATANI, K., AND CHOU, T. Shape from texture: General principle. *Artificial Intelligence 38* (1989), 1–48.
- [18] MALIK, J., AND ROSENHOLTZ, R. Computing local surface orientation and shape from texture for curved surface. *Int. J. of Computer Vision 23-2* (1997), 149–168.
- [19] MALLAT, S. *A Wavelet Tour of Signal Processing*, 2 ed. Academic Press, New York, 1999.
- [20] MARR, D. *Vision*. W.H. Freeman Co, San Francisco, 1982.
- [21] MARR, D. *La Vision*. Alianza Editorial, Madrid, 1985.
- [22] OLIENSIS, J. Uniqueness in shape from shading. *Int. J. Comput. Vision 6* (1991), 75–104.
- [23] P.L. LIONS, E. R., AND TOURIN, A. Shape-from-shading, viscosity solutions and edges. *Numer. Math. 64* (1993), 323–353.
- [24] PRIESTLEY, M. Evolutionary spectra and non-stationary processes. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological) 2* (1965), 327–350.
- [25] SUPER, B., AND BOVIK, A. Shape from texture using local spectral moments. *IEEE Trans. Patt. Anal. and Mach. Intell. 17-4* (1995), 333–343.
- [26] T., G., S. G. R., AND S., D. Estimation of orientation of a textured planar surface using projective equations and separable analysis with m-channel wavelet decomposition. *Pattern Recognition* (2010), 230–243.
- [27] THIBAUT, G., F. B. N. C. P. S. C. P. L. N. Y. O. Shape and texture indexes application to cell nuclei classification. *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence 27, 1* (2013).
- [28] UNIV. DE EXTREMADURA, D. M. *Apuntes de Grupos de Lie*, 1 ed. Badajoz, 2014.
- [29] W., H., C.-S. L., AND P-C, C. Shape from texture: Estimation of planar surface orientation through the ridge surface of continuous wavelet transform. *IEEE Trans. Image Proc 7* (1998), 773–780.

- [30] WARREN, P. A., AND MMASSIAN, P. Recovery of surface pose from texture orientation statistics under perspective projection. *Biological Cybernetics*.
- [31] WITKIN, A. Recovering surface shape and orientation from texture. *Artificial Intelligence 17* (1981), 17–45.
- [32] YALGLOM, A. *Correlation Theory of Stationary and Related Random Functions*, 1 ed. Springer, Berlin, 2009.