UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
POSTGRADO EN FÍSICA

"LA TEORÍA DE CHERN-SIMONS-WONG Y SU RELACIÓN CON INVARIANTES DE NUDO"

Trabajo de Grado de Maestría presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por la Licenciada Yisely Martínez, para optar al título de Magíster Scientiarum, mención Física.

Tutores: Dr. Ernesto Fuenmayor
Dr. Ernesto Contreras

Caracas – Venezuela
Mayo de 2019

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
COMISIÓN DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

Comisión de Estudios de Postgrado

VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del jurado designado por el Consejo de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el **Trabajo de Grado** presentado por: **YISELY DE LOS ÁNGELES MARTÍNEZ,** Cédula de identidad N.º **15.664.475**, bajo el título " **LA TEORÍA DE CHERN-SIMONS-WONG Y SU RELACIÓN CON INVARIANTES DE NUDO** ", a fin de cumplir con el requisito legal para optar al grado académico de **MAGÍSTER SCIENTIARUM, MENCIÓN FÍSICA**, dejan constancia de lo siguiente:

1.- Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del jurado, se fijó el día **21 de Febrero de 2019** a las **11:00 A.M**, para que **la autora** lo defendiera en forma pública, lo que **ésta** hizo en **la Sala Guillermo Ruggeri**, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual **respondió satisfactoriamente** a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado, todo ello conforme con lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

2.- Finalizada la defensa del trabajo, el jurado decidió **aprobarlo**, por considerar, sin hacerse solidario con la ideas expuestas por **el autor**, que **se ajusta** a lo dispuesto y exigido en el Reglamento de Estudios de Postgrado

Para dar este veredicto, el jurado estimó que el trabajo examinado representa una contribución original al estudio de los invariantes de nudo obtenidos por medio de una acción topológica no abeliana de Chern-Simons-Wong evaluada sobre las ecuaciones de movimientos o acción On-Shell.
Algunos aspectos obtenidos en este trabajo han sido presentados en eventos científicos nacionales en los cuales se han planteado posibles extensiones y futuros desarrollos.

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA FACULTAD DE CIENCIAS POSTGRADO EN FÍSICA UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA

En fe de lo cual se levanta la presente ACTA, a los **21** días del mes de **Febrero** del año **2019**, conforme a lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado, actuó como **Coordinador** del jurado el **Dr. Ernesto Fuenmayor.**

El presente trabajo fue realizado bajo la dirección de del **Dr. Ernesto Fuenmayor** y el **Dr. Ernesto Contreras.**

Dr. Pio Arias
C.I. 7183922
Universidad Central de Venezuela

Dr. Rolando Gaitan
C.I. 17387931
Universidad de Carabobo

Dr. Ernesto Fuenmayor
C.I. 10336198
Universidad Central de Venezuela
Tutor

PA/RG/EF.- 21/02/2019

Resumen

LA TEORÍA DE CHERN-SIMONS-WONG Y SU RELACIÓN CON INVARIANTES DE NUDO

Yisely Martínez

Dr. Ernesto Fuenmayor, Tutor

Dr. Ernesto Contreras, Tutor

Universidad Central de Venezuela

Se estudia la teoría clásica no-Abeliana de Chern-Simons acoplada con partículas que portan carga cromoeléctrica conocidas como partículas de Wong y su relación con invariantes de nudo. Cada uno de los invariantes obtenidos pueden ser escritos en un lenguaje puramente geométrico que permite posteriormente describir las propiedades de anudamiento de algunos *link's* conocidos. Se muestra que el invariante obtenido al orden dos del desarrollo perturbativo de la acción *on-shell* de la teoría, puede describir perfectamente las propiedades de anudamiento de un Link de cuatro componentes asi como anudamiento del Link de Whitehead, el cual es un link de dos componentes.

Palabras Claves: Teoría de Chern-Simons, Invariantes de nudo, Link de Whitehead.

Índice General

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introducción

Es bien conocida en la bibliografía la relación entre la Teoría Cuántica de Campos y la Teoría de Nudos. El punto de partida de esta relación fue el reconocimiento de que el valor esperado en el vacío del Loop de Wilson en la Teoría de Chern-Simons corresponde a un polinomio invariante de nudos [1]. Este resultado, junto con los estudios acerca de las propiedades de las teorías topológicas masivas de Yang-Mills realizados previamente por Jackiw [2] establecieron las bases para el estudio de teorías de campo topológicas como la de Chern-Simons.

En el campo de los sistemas dinámicos, la teoría de nudos asiste a los investigadores en el estudio de los anudamientos y enlaces formados en las trayectorias cerradas de dichos sistemas cuando se hallan inmersos para su descripción en variedades tridimensionales. Así se concluyó que en sistemas gobernados por las ecuaciones diferenciales de Lorentz en R^3 solo pueden aparecer un tipo de nudos llamados "nudos positivos" [3]. Por otro lado, los conocidos como modelos de vértices permiten obtener el polinomio de Jones a partir de las funciones de partición de la Mecánica Estadística. Y en la mecánica de fluidos son muy habituales los modelos con tubos de flujo y vórtices anudados o enlazados, lo que conduce a una nueva cantidad medible llamada "helicidad". La helicidad resulta ser una magnitud invariante bajo deformaciones continuas de la estructura del fluido, lo cual permite realizar estimaciones medias de magnitudes geométricas relacionadas con el sistema [5].

También se ha recurrido a la teoría de nudos en el intento de esclarecer problemas de la física de partículas relacionados con la estadística fraccionaria asociada con la transformación de propiedades entre bosones y fermiones en modelos bidimensionales. Los métodos topológicos desarrollados para los nudos han acabado generalizando los clásicos grupos de Lie, con importantes aplicaciones en teoría de cuerdas, en física de la materia condensada y en la búsqueda de invariantes en las teorías cuánticas topológicas. Pero sobre todo el estudio matemático de lo nudos ha revelado insospechadas consecuencias relativas a la Gravedad Cuántica. Asimismo, la teoría de nudos permite caracterizar la estructura espacial de las moléculas de ADN antes y después de un proceso bioquímico (transcripción,isomerización, ruptura y unión), facilitando la deducción del mecanismo enzimático involucrado [4].

En este trabajo estamos interesados en estudiar el campo de Chern-Simons no-Abeliano en interacción con partículas de Wong [8] y la relación existente entre esta teoría y los invariantes de nudo. Se ha encontrado en [9,10] que este modelo físico está relacionado con el segundo, tercer y cuarto Coeficiente de Anudamiento de Milnor, que son los tres primeros miembros de una familia de invariantes de nudo descubiertos por Milnor [11]. En este trabajo consideraremos la acción que describe la interacción entre el campo de Chern-Simons no-Abeliano con n partículas Wong. Esta acción es el resultado de los trabajos de Balachandran [12] y es invariante de calibre e invariante bajo difeomorfismos. La idea principal es obtener expresiones analíticas de invariantes de nudos a partir de la acción *on-shell* (acción evaluada sobre las ecuaciones de movimiento). Seguidamente obtenemos las ecuaciones de movimiento de la teoría y vemos que constituyen un sistema no lineal, difícil de resolver exactamente. Por lo tanto se propone un esquema perturbativo de solución. Aplicando el método perturbativo y evaluando la acción sobre las ecuaciones de movimiento se obtienen las tres primeras contribuciones de la ación, a orden cero $S^{(0)}$, a orden uno $S^{(1)}$ y a orden dos $S^{(2)}$, las cuales fueron estudiadas previamente en [9, 13, 14], y están vinculadas directamente con invariantes de nudos. Luego a partir de un esquema geométrico introducido en [14] y el cual fue inspirado por los trabajos previos [9, 10], se realizan las interpretaciones geométricas de cada uno de los invariantes obtenidos previamente. Se demuestra que $S^{(0)}$ puede detectar el anudamiento del Link de Hopf, $S^{(1)}$ puede caracterizar las propiedades de anudamiento de los Anillos Borromeanos y $S^{(2)}$ el anudamiento no trivial de un Link de cuatro componentes.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el capítulo 2 realizamos un breve resumen sobre fundamentos de la teoría clásica de campos y de la teoría de grupos, aplicándose luego a la teoría de campos de Yang-Mills. En el siguiente capítulo se estudia el campo de Chern-Simons no-Abeliano acoplado con partículas de carga cromodinámica y a partir de un estudio perturbativo para resolver las ecuaciones de movimiento de la teoría se puede obtener invariantes de nudo. Exactamente obtendremos los tres primeros invariantes. También se estudia un método de interpretación de los invariantes, que llamaremos "Esquema de Haces Paralelos" y la Forma esquemática de interpretación introducidas previamente en [14] para medir el anudamiento de algunos *links* conocidos a través de los invariantes. En el capítulo 4 se realiza la interpretación geométrica para el caso particular del invariante a orden dos que sólo considera dos partículas de Wong con isocargas ortonormales y su aplicación al esquema de haces para el Link de Whitehead. En el último capítulo se exponen las concluciones de cada uno de los aspectos abordados en nuestro estudio.

Capítulo 2

Elementos de Teoría Clásica de campos y Teoría de grupos

En este capítulo realizaremos un breve repaso de aspectos básicos de la teoría clásica de campos y la teoría de grupos. Además estudiaremos algunas de sus aplicaciones a las teorías de campo de Yang-Mills. Estos fundamentos fijarán las bases para el estudio de la teoría clásica de Chern-Simons no-Abeliana acoplada con materia que estudiaremos en el siguiente capítulo.

2.1. Formulación Lagrangiana para la teoría de campos

Consideremos un sistema descrito por una familia de funciones continuas $\varphi_i(x)$, con $i = 1, ..., N$ y x como cada punto del cuadriespacio. Cada función $\varphi_i(x)$ es un campo, esto es, a cada punto del cuadriespacio se le asigna un número complejo a través de la función $\varphi_i(x)$. Es evidente que esta definición implica sistemas con infinitos grados de libertad que pueden ser descritos a través de la densidad Lagrangiana $L(x, \varphi_i(x), \partial_\mu \varphi_i(x))$. La acción del sistema viene dada por:

$$S = \int_R d^4x L(x, \varphi_i(x), \partial_\mu \varphi_i(x)), \tag{2.1}$$

donde d^4x es el diferencial en el cuadriespacio y R es la región de integración del cuadriespacio. Para obtener las ecuaciones de movimiento que describen la evolución del sistema en el tiempo partimos de un principio variacional, que puede enunciarse como: bajo variaciones infinitesimales de los campos, $\varphi_i(x) \longrightarrow \varphi_i(x) + \delta\varphi_i(x)$, independientes y arbitrarias que se anulen en la frontera ∂R de R, la primera variación en la acción se anula sobre las trayectorias físicas. Aplicando dicho principio calculemos la primera variación de la acción :

$$\delta S = \int_R d^4x(L'(x) - L(x)), \tag{2.2}$$

donde:

$$L'(x) = L(x, \varphi_i'(x), \partial_\mu \varphi_i'(x)) \tag{2.3}$$

$$\varphi_i'(x) = \varphi_i(x) + \Delta\varphi_i(x). \tag{2.4}$$

Luego:

$$\delta S = \int_R d^4x(L(x) + \Delta\varphi_i(x)\frac{\partial}{\partial\varphi_i(x)}L(x) + \Delta(\partial_\mu\varphi_i(x))\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\varphi_i(x))}L(x) - L(x)), \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\delta S = \int_R d^4x(\Delta\varphi_i(x)\frac{\partial}{\partial\varphi_i(x)}L(x) + \partial_\mu(\Delta\varphi_i(x)\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\varphi_i(x))}L(x)) +& \\ -\Delta\varphi_i(x)(\partial_\mu\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\varphi_i(x))}L(x))).&\end{aligned} \tag{2.6}$$

Si intregramos el término central y evaluamos en la frontera, se anula; obteniendo:

$$\delta S = \int_R d^4x(\Delta\varphi_i(x)\frac{\partial}{\partial\varphi_i(x)}L(x) - \Delta\varphi_i(x)(\partial_\mu\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu\varphi_i(x))}L(x))). \tag{2.7}$$

Usando el principio variacional enunciado anteriormente, obtenemos finalmente:

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi_i(x)} - \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\varphi_i(x))}\right) = 0, \tag{2.8}$$

que son las conocidas ecuaciones de Euler-Lagrange, que determinan la dinámica del sistema.trabajo estudiaremos una teoría de campos la siguiente sección estudiaremos algunos aspectos de teorías de grupos y algunas aplicaciones

2.2. Grupos y sus representaciones

La teoría de grupos proporciona el lenguaje adecuado para formular y desarrollar los principios de simetría inherentes a la Física. Gran parte de la estructura que aparece en la resolución de un sistema, tanto en la física clásica como en la física cuántica, es consecuencia de la simetría subyacente en dicho sistema. La teoría de grupos trata de desarrollar aspectos universales que presentan todos los sistemas que contienen simetrías de naturaleza análoga. La teoría de grupos es muy amplia, por tanto daremos una breve introducción que nos proporcione las herramientas básicas necesarias para nuestro estudio.

Un grupo es un conjunto G de elementos g_i con una ley de multiplicación ($\circ$) que obedece:

- Clausura: si g_1, g_2 pertenecen a G, entonces:

$$g_1 \circ g_2 = g_3 \in G.$$

- Asociatividad: si g_1, g_2 y g_3 pertenecen a G, entonces:

$$(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3).$$

- Existencia del elemento identidad g_0, tal que:

$$g_0 \circ g = g \circ g_0 = g \; \forall \in G.$$

- Existencia del elemento inverso $g^{-1} \in G$, tal que:

$$g^{-1} \circ g = g \circ g^{-1} = g_0 \; \forall \in G.$$

Adicionalmente, si los elementos del grupo cumplen $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1 \; \forall \; g_1, \; g_2 \in G$ el grupo se llama Abeliano.

Un grupo puede realizarse en términos de operadores actuando sobre elementos de un conjunto. Para obtener los operadores se establece una aplicación desde los elementos del grupo a un conjunto de operadores, $g \longrightarrow O(g)$, que debe cumplir:

$$\begin{aligned} O(g_1) \circ O(g_2) &= O(g_1 \circ g_2) \\ O(g_0) &= \mathbb{I}. \end{aligned}$$

Si esta aplicación es uno a uno, se dice que la aplicación es “fiel”.

Estamos interesados en las realizaciones de un grupo en términos de matrices $D_{N\times N}$ que actúan en un espacio vectorial V. Diremos que el conjunto de las matrices $D(g)$ constituye una representación del grupo en el espacio vectorial V. Dos representaciones D_1 y D_2 serán equivalentes si están relacionadas por una transformación de similaridad:

$$\mathbb{D}_2(g) = \mathbb{S}\mathbb{D}_1(g)\mathbb{S}^{-1} \;\; \forall\, g \,\in\, G, \tag{2.9}$$

donde la matriz $\mathbb{S}$ es la matriz de transformación y es única para el par de representaciones D_1 y D_2; a pesar de ello no es necesario que la matriz $\mathbb{S}$ esté relacionada con algún elemento del grupo.

Una representación $D_{N\times N}$ es reducible si es equivalente a alguna otra representación D' de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}'(g) &= \mathbb{S}\mathbb{D}(g)\mathbb{S}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{D}'_1(g) & O \\ O & \mathbb{D}'_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde las submatrices $\mathbb{D}'_1(g)$ y $\mathbb{D}'_2(g)$ son de dimensión $N_1 \times N_1$ y $N_2 \times N_2$ respectivamente, adicionalmente $N_1 + N_2 = N$ es la dimensión de la representación original. Si esto es posible se dice que la representación es suma directa de D'_1 y D'_2 de lo contrario se dice que la representación es irreducible.

Existen grupos cuyos elementos están etiquetados por d parámetros reales continuos ε^a, $a = 1, ..., d$, tales que $g(\varepsilon^a) \equiv \mathbb{I}$ para $\varepsilon^a = 0$. Adicionalmente, la ley de multiplicación de estos grupos depende suavemente de los parámetro del grupo, esto es, si $g(\varepsilon)$, $g(\lambda) \in G$, se verifica que $g(\varepsilon) \circ g(\lambda) = g(\phi(\varepsilon, \lambda))$, donde $\phi^a(\varepsilon, \lambda)$ posee expansión en serie de Taylor en ambos parámetros. Estos grupos reciben el nombre de *grupos de Lie* y son de fundamental importancia en Física. Muchas de las simetrías continuas de la naturaleza puede ser expresadas en términos de grupos de Lie.

2.2.1. Álgebra de Lie

Todo elemento de un grupo de Lie puede representarse como:

$$g = e^{i\lambda_a \mathbb{X}_a}, \tag{2.11}$$

donde los λ_a son números reales denominados *parámetros de grupo* y los $\mathbb{X}_a$ son matrices hemíticas linealmente independientes conocidas como los *generadores del grupo de Lie*.

Los generadores del grupo obedecen las relaciones de conmutación de tipo:

$$[\mathbb{L}_a, \mathbb{L}_b] = iC_{abc}\mathbb{L}_c, \tag{2.12}$$

las C_{abc} son las *constantes de estructura* y son antisimétricas solamente en los dos primeros índices $C_{abc} = -C_{bac}$. Del álgebra de Lie se puede ver que los generadores de grupo poseen traza nula. A raíz de las relaciones de conmutación de los generadores de grupo, es fácil mostrar que los generadores satisfacen la identidad de Jacobi y que esto establece relaciones entre las constantes de estructura:

$$[\mathbb{L}_a, [\mathbb{L}_b, \mathbb{L}_c]] + [\mathbb{L}_c, [\mathbb{L}_a, \mathbb{L}_b]] + [\mathbb{L}_b, [\mathbb{L}_c, \mathbb{L}_a]] = 0 \tag{2.13}$$

$$C_{abn}C_{ncd} + C_{bcn}C_{nad} + C_{can}C_{nbd} = 0. \tag{2.14}$$

Si las constantes de estructura son nulas para todo conjunto de índices entonces tendremos un grupo Abeliano. Vemos entonces que las constantes de estructura dan origen a una representación en términos de matrices con igual dimensión del grupo. A esta representación se le llama *representación adjunta*.

2.3. Campos de Yang-Mills

Ahora consideraremos teorías de campos con grados de libertad internos. Las transformaciones de calibre pertenecerán a un grupo de Lie simple y compacto. Consideraremos el grupo *SU(N)* (transformaciones especiales, unitarias, complejas $N \times N$); cuando se representan los elementos del grupo en forma de matrices $N \times N$ se dice que se está en la representación fundamental (a diferencia de la representación adjunta de matrices $d \times d$, donde d es la dimensión del grupo, por ejemplo, $SU(N)$ tiene $N^2 - 1$ parámetros).

En cualquier representación podemos tomar las siguientes relaciones como verdaderas:

$$\begin{aligned} [\mathbb{X}_a, \mathbb{X}_b] &= i f_{abc} \mathbb{X}_c & (2.15) \\ Tr(\mathbb{X}_a \mathbb{X}_b) &= \frac{1}{2}\delta_{ab}. & (2.16) \end{aligned}$$

Introducimos entonces $N^2 - 1$ campos vectoriales $A^a_\mu(x)$ que llamaremos *campos de Yang-Mills*, formando las matrices:

$$A_\mu(x) = A^a_\mu(x)\mathbb{X}_a, \tag{2.17}$$

recordando que, en la representación fundamental, los $A_\mu(x)$ serán matrices $N \times N$. Notamos adicionalmente que:

$$Tr(A_\mu(x)\mathbb{X}_b) = A^a_\mu(x) Tr(\mathbb{X}^a \mathbb{X}^b) = \frac{1}{2} A^b_\mu(x). \tag{2.18}$$

Definimos también el tensor de intensidad de campo de Yang Mills $F^a_{\mu\nu}$, tal que,

$$F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}\mathbb{X}_a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu], \tag{2.19}$$

esta definición implica:

$$\begin{aligned} F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + 2iTr([A_\mu, A_\nu]\mathbb{X}^a) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + 2iTr(A^b_\mu A^c_\nu f^{bcd}\mathbb{X}^d\mathbb{X}^a) \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - f^{bcd} A^b_\mu A^c_\nu. & (2.20) \end{aligned}$$

Consideremos ahora la transformación local:

$$A_\mu(x) \to \mathbb{U}(x)A_\mu(x)\mathbb{U}^\dagger(x) - i\mathbb{U}(x)\partial_\mu\mathbb{U}^\dagger(x), \tag{2.21}$$

donde las matrices $\mathbb{U}(x)$ pertenecen al grupo $SU(N)$ y pertenecen a la misma representación de los generadores del grupo, esto es:

$$\mathbb{U}(x) = e^{i\lambda_a\mathbb{X}_a} = e^{i\lambda(x)}. \tag{2.22}$$

Notemos que si los $A_\mu(x)$ son potenciales de Maxwell las matrices $\mathbb{U}(x) \to e^{i\Lambda(x)}$ son elementos de $U(1)$ se tiene:

$$A_\mu(x) \to e^{i\Lambda(x)}A_\mu(x)e^{-i\Lambda(x)} - ie^{i\Lambda(x)}\partial_\mu e^{-i\Lambda(x)} = A_\mu - \partial_\mu\Lambda(x), \tag{2.23}$$

que es una transformación de calibre usual. Esta correspondencia nos asegura que la transformación propuesta es apropiada para estudiar campos de calibre.

Veamos ahora cómo transforma el tensor $F_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} = {} & \partial_\mu(\mathbb{U}(x)A_\nu(x)\mathbb{U}^\dagger(x) - i\mathbb{U}(x)\partial_\nu\mathbb{U}^\dagger(x)) - \partial_\nu(\mathbb{U}(x)A_\mu(x)\mathbb{U}^\dagger(x) - i\mathbb{U}(x)\partial_\mu\mathbb{U}^\dagger(x)) \\ & + i[\mathbb{U}(x)A_\mu(x)\mathbb{U}^\dagger(x) - i\mathbb{U}(x)\partial_\mu\mathbb{U}^\dagger(x), \mathbb{U}(x)A_\nu(x)\mathbb{U}^\dagger(x) - i\mathbb{U}(x)\partial_\nu\mathbb{U}^\dagger(x)]. \end{aligned}$$

Luego de algunas operaciones y usando que

$$\mathbb{U}\partial_\nu\mathbb{U}^\dagger = -\partial_\nu\mathbb{U}\mathbb{U}^\dagger, \tag{2.24}$$

se obtiene que la regla de transformación del tensor de campo viene dada por:

$$F'_{\mu\nu} = \mathbb{U}F_{\mu\nu}\mathbb{U}^\dagger. \tag{2.25}$$

Consideremos ahora las transformaciones infinitesimales, esto es, las transformaciones de la forma:

$$\mathbb{U} = e^{i\lambda(x)}, \tag{2.26}$$

con $\lambda^a(x)$ pequeño. Empleando el desarrollo de Taylor de la matriz $\mathbb{U}$ escribimos:

$$\mathbb{U} \approx \mathbb{I} + i\lambda(x) \Rightarrow \partial_\mu \mathbb{U} \approx i\lambda_{,\mu}(x), \tag{2.27}$$

donde hemos usado $\partial_\mu \lambda \equiv \lambda_{,\mu}$. Los campos A_μ transforman según

$$\begin{aligned} A'_\mu &= (\mathbb{I} + i\lambda)A_\mu(\mathbb{I} - i\lambda) - i(\mathbb{I} + i\lambda)(-i\lambda_{,\mu}) \\ &= A_\mu - (\lambda_{,\mu} + i[A_\mu, \lambda]), \end{aligned} \tag{2.28}$$

y los tensores de campo $F_{\mu\nu}$ transforman de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= (\mathbb{I} + i\lambda)F_{\mu\nu}(\mathbb{I} - i\lambda) \\ &= F_{\mu\nu} - i[\lambda, F_{\mu\nu}]. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Con el desarrollo de todas estas herramientas podemos estudiar apropiadamente el campo de Yang-Mills. La acción correspondiente a los campos de Yang-Mills viene dada por:

$$S_{YM} = -\frac{1}{2}\int d^4x\, Tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}). \tag{2.30}$$

Para encontrar las ecuaciones de movimiento usaremos la expresión:

$$\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta A_\nu + i\delta A_\mu A_\nu + iA_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu - i\delta A_\nu A_\mu - iA_\nu \delta A_\mu. \tag{2.31}$$

Al realizar las variación de la acción con respecto a los campos, obtenemos:

$$\begin{aligned} \delta S_{YM} &= -\int d^4x\, Tr(F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}) \\ &= 2\int d^4x (Tr(\partial_\mu F^{\mu\nu}\delta A_\nu) + iTr([A_\mu, F^{\mu\nu}]\delta A_\nu)), \end{aligned} \tag{2.32}$$

y como el principio de Hamilton nos dice que las variaciones arbitrarias de la acción deben anularse, entonces el integrando de la ecuación anterior debe ser cero para obtener las ecuaciones de movimiento

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + i[A_\mu, F^{\mu\nu}] = 0. \tag{2.33}$$

La expresión anterior representa las ecuaciones de movimiento de los campos de Yang-Mills. Se pueden escribir de la siguiente manera:

$$D_\mu F^{\mu\nu} = 0, \tag{2.34}$$

donde hemos introducido el operador $D_\mu \equiv \partial_\mu + i[A_\mu,]$ que llamaremos *derivada covariante de calibre* para los objetos que transforman como $F_{\mu\nu}$. La expresión (2.34) está en completa analogía con las ecuaciones de Maxwell [16].

Adicionalmente, es fácil probar que los campos tensoriales $F^{\mu\nu}$ cumplen las identidades de Bianchi:

$$D_\mu F^{\nu\lambda} + D_\lambda F^{\mu\nu} + D_\nu F^{\lambda\mu} = 0, \tag{2.35}$$

que no son sino la formulación dual de las ecuaciones de Maxwell:

$$D^*_\mu F^{\mu\nu} = 0. \tag{2.36}$$

De esta manera damos por terminado la breve introducción del formalismo Lagrangiano para teorías clásicas de campos y teoría de grupos. Estas herramientas nos serán útiles para el estudio de una teoría de campos no-Abeliana acoplada con materia.

Capítulo 3

La Teoría de Chern-Simons-Wong y su relación con invariantes de Nudo

En este capítulo estudiaremos la relación entre la teoría clásica de Chern-Simons interactuando con partículas de carga no-Abeliana y su relación con invariantes de nudo. A través de un método desarrollado previamente en [9, 10] podemos obtener expresiones análiticas para invariantes de nudo. Luego cada invariante puede ser escrito en términos de variables puramente geométricas gracias a los trabajos desarrollados en [9,14,18], esto permite aplicar cada invariante a *link's* conocidos como el Número de Anudamiento de Gauss y los Anillos de Borromeo permitiendo describir las propiedades de anudamiento de los mismos.

3.1. Acción de Chern-Simons-Wong y ecuaciones de movimiento

Consideremos la acción para la interacción de partículas clásicas con carga cromoeléctrica, también conocidas como partículas de Wong [8], a través de un campo topológico no-Abeliano de Chern-Simons. Nuestra acción viene dada por [9, 12]

$$S_{CSW} = S_{CS} + S_{int}, \tag{3.1}$$

donde

$$S_{CS} \;=\; -\Lambda^{-1}\int d^3x\epsilon^{\mu\nu\rho}\,Tr\left(A_\mu\partial_\nu A_\rho+\frac{2}{3}A_\mu A_\nu A_\rho\right), \tag{3.2}$$

corresponde a la acción de Chern-Simons para $SU(N)$ y

$$S_{int}=\sum_{i=1}^{n}\int_{\gamma_i}d\tau Tr(K_i g_i^{-1}(\tau)D_\tau g_i(\tau)), \tag{3.3}$$

a la interacción campo-partícula de n partículas de Wong. Los parámetros de integración γ_i de (3.3) corresponden a la línea de mundo de la partícula *i-ésima* parametrizada con el tiempo τ. Los objetos $g_i(\tau)$ son elementos de $SU(N)$ y a partir de ellos se construyen los elementos de carga cromoeléctrica $I_i(\tau)$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} I_i(\tau) &\equiv g_i(\tau)K_i g_i^{-1}(\tau)) \\ &= I_i^a(\tau)T^a, \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde los $K_i \equiv K_i^a T^a$ son elementos constantes del álgebra. También hemos introducido en (3.3) la derivada covariante de los $g_i(\tau)$ a lo largo de la línea de mundo de la partícula *i-ésima*:

$$D_\tau g_i(\tau)=\dot{g}_i(\tau)+A_i(\tau)g_i(\tau). \tag{3.5}$$

Además usaremos las siguientes convenciones y notaciones:

$$Tr(T^aT^b)=-\frac{1}{2}\delta^{ab} \tag{3.6}$$

$$\left[T^a,T^b\right]=f^{abc}T^c \tag{3.7}$$

$$A_\mu=A_\mu^aT^a \tag{3.8}$$

$$A_i(\tau)=A_\mu(z_i(\tau))\dot{z}_i^\mu(\tau), \tag{3.9}$$

para los N^2-1 generadores T^a del álgebra del grupo y para el campo de calibre A_μ.

En la acción (3.1) las variables dinámicas serán los campos A_μ^a y las matrices $g_i(\tau)$ que están relacionadas con los grados de libertad de las partículas. Se podría considerar las posiciones de las partículas como variables dinámicas, lo que nos llevaría a obtener las ecuaciones que determinan a las curvas γ_i, pero en principio no es nuestro objetivo, ya que deseamos estudiar las características topológicas de las curvas, por lo que vamos a tomarlas como objetos externos dados, esto es, consideraremos que las trayectorias de las partículas son completamente conocidas y como queremos estudiar invariantes de nudo consideraremos que las curvas γ_i son curvas cerradas en $\Re^3$. La acción de Chern-Simons (3.2) es invariante de calibre, siempre que la transformación esté conectada con la identidad, esto es:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^\Omega = \Omega^{-1} A_\mu \Omega + \Omega^{-1}\partial_\mu \Omega. \tag{3.10}$$

Por otra parte, la acción S_{int} es invariante de calibre si

$$K_i \rightarrow K_i^\Omega = K_i \tag{3.11}$$

$$g_i \rightarrow g_i^\Omega = \Omega^{-1} g_i, \tag{3.12}$$

en virtud de que

$$(D_\tau g_i)^\Omega = \Omega^{-1} D_\tau g_i, \tag{3.13}$$

como corresponde a una derivada covariante. Así la carga interna I_i transforma covariantemente en la representación adjunta:

$$I_i^\Omega = \Omega^{-1} I_i \Omega. \tag{3.14}$$

Para encontrar las ecuaciones de movimiento con respecto a los campos A_μ^a es conveniente escribir explicitamente la derivada covariante en (3.3):

$$\begin{aligned} S_{int} = & \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} d\tau \dot{z}_i^\mu(\tau) (Tr(K_i g_i^{-1}\partial_\mu g_i) + Tr(K_i g_i^{-1} A_\mu(z_i) g_i)) \\ = & \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} d\tau \dot{z}_i^\mu(\tau) Tr(K_i g_i^{-1}\partial_\mu g_i) + \\ & + \int d^3x \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} d\tau \dot{z}_i^\mu(\tau) \delta^3(x - z_i(\tau)) Tr(I_i(\tau) A_\mu(z_i(\tau))). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Realizando las variaciones con respecto a los campos y empleando la propiedad cíclica de la traza, se obtienen las ecuaciones de movimiento para los campos:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} = \Lambda J^{\mu}, \tag{3.16}$$

donde la corriente la hemos definido como

$$J^{\mu} \equiv \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} d\tau \dot{z}_i^{\mu}(\tau) I_i(\tau) \delta^3(x - z_i(\tau)), \tag{3.17}$$

y el tensor de campo dado por $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$.

Ahora nos queda hallar las ecuaciones de movimiento asociadas a las variables internas $g_i(\tau)$. Se debe tomar en cuenta que son matrices de *SU(N)* cuyos elementos de matriz no son independientes, siguiendo el procedimiento dado en [12], se procede en primer lugar a parametrizar los g_i de la forma:

$$g_i = g_i(\xi_i) = e^{\xi_i^a T^a}, \tag{3.18}$$

donde los ξ_i^a serán $n \times (N^2 - 1)$ parámetros independientes (recordemos que n es el número de partículas y $N^2 - 1$ es el número de generadores de grupo). Usando dicha parametrización escribimos las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_i^a} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i^a}\right) = 0, \tag{3.19}$$

donde el Lagrangiano viene dado por:

$$\begin{aligned} L &\equiv \sum_{i=1}^{n} (Tr(K_i g_i^{-1}(\tau) D_\tau g_i(\tau)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (Tr(K_i g_i^{-1}(\dot{g}_i + A_i g_i)). \end{aligned} \tag{3.20}$$

En el Apéndice A se demuestra que las ecuaciones (3.19) se pueden escribir finalmente en la forma:

$$D_\tau I_i \equiv \dot{I}_i + [A_i, I_i] = 0. \tag{3.21}$$

Esta ecuación es similar a la ecuación de evolución de los operadores en mecánica cuántica en la representación de Heinsenberg:

$$\frac{d\hat{I}}{dt} + [\hat{H}, I] = 0, \tag{3.22}$$

así que aplicamos su solución formal:

$$I_i(\tau) = U_i(\tau) I_i(0) U_i^{-1}(\tau), \tag{3.23}$$

con $U_i(\tau)$ dado por la exponencial tiempo ordenada de $A_i(\tau)$ a lo largo de la curva γ_i

$$U_i(\tau) = \mathbf{T}exp\left\{-\int_0^\tau A_i(\tau')d\tau'\right\}. \tag{3.24}$$

Por otra parte, al tomar derivada covariante D_μ de la ecuación (3.16):

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} D_\mu F_{\nu\rho} = \Lambda D_\mu J^\mu, \tag{3.25}$$

obtenemos que el lado izquierdo se anula directamente (en virtud de las identidades de Bianchi para el campo de Yang-Mills), por consistencia matematica el lado derecho también debe anularse. Esto implica que la corriente J^μ debe conservarse $D_\mu J^\mu = 0$. Vemos usando (3.16) que,

$$\begin{aligned} D_\mu J^\mu &= \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} d\tau \dot{z}_i^\mu(\tau) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta^{(3)}(x - z_i(\tau)) I_i(\tau) + \delta^{(3)}(x - z_i(\tau))[A_\mu(x), I_i(\tau)]\right) = 0 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(-\int_0^{\tau_f} d\tau \frac{d}{d\tau}[I_i(\tau)\delta^{(3)}(x - z_i(\tau))] + \int_0^{\tau_f} d\tau (\dot{I}_i(\tau))\delta^{(3)}(x - z_i(\tau))\right) \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} d\tau \dot{z}_i^\mu(\tau) \delta^{(3)}(x - z_i(\tau))[A_\mu(x), I_i(\tau)] = 0, \end{aligned} \tag{3.26}$$

El primer término de esta expresión puede escribirse como

$$\sum_{i=1}^n \left(-\int_0^{\tau_f} d\tau \frac{d}{d\tau}[I(\tau)\delta^{(3)}(x - z_i(\tau))] + \int_0^{\tau_f} d\tau (\dot{I}(\tau))\delta^{(3)}(x - z_i(\tau))\right), \tag{3.27}$$

donde τ_f es el valor final del parámetro τ. A su vez, el primer término de la expresión de arriba equivale a:

$$\sum_{i=1}^n \left(-I_i(\tau_f)\delta^{(3)}(x - z_i(\tau_f)) + I_i(0)\delta^{(3)}(x - z_i(0))\right), \tag{3.28}$$

debido a que estamos considerando curvas cerradas se tiene que $z_i(0) = z_i(\tau_f)$, y si además exigimos que $I_i(\tau_f) = I_i(0)$ entonces la expresión (3.28) se anula. Entonces, sustituyendo (3.28) en (3.27) se tiene que $D_\mu J^\mu$ conduce a

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} d\tau \delta^{(3)}(x - z_i(\tau)) D_\tau I_i = 0, \tag{3.29}$$

que se verifica sobre las ecuaciones de movimiento para las partículas (3.21).

Finalmente tenemos que las ecuaciones de movimiento de la teoría de Chern-Simons-Wong son consistentes. En la próxima sección platearemos un esquema de solución para las mismas.

3.2. Acción on-shell y desarrollo perturbativo

La acción (3.1) es invariante de calibre e independiente de la métrica, es decir, es una acción topológica. Emplearemos estas características para obtener invariantes de nudo. En virtud de que las ecuaciones (3.16) y (3.21) constituyen un sistema no lineal de ecuaciones para los campos y los elementos de carga interna no intentaremos resolverlas de forma exacta, sino que asumiremos que existen soluciones y que bajo ciertas condiciones de frontera se pueden obtener los campos como funcionales de las curvas γ_i que forman parte de la corriente J^μ definida anteriormente, esto es:

$$A^a_\mu = A^a_\mu[\gamma_i]. \tag{3.30}$$

Puesto que se han resuelto formalmente las ecuaciones para las I_i como funciones de los campos, mediante (3.23) y (3.24), la única ecuación que queda por resolver sería:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho} = \Lambda \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} d\tau \dot{z}^\mu_i(\tau) I_i[A] \delta^3(x - z_i(\tau)), \tag{3.31}$$

y claramente sus soluciones han de ser funcionales de las curvas que dan soporte a las corrientes, como sugiere (3.30). Al introducir la solución $A^a_\mu[\gamma_i]$ en (3.1) obtendríamos la acción S como un funcional de las curvas γ_i, $S = S[\gamma_i]$, donde toda dependencia de los campos se ha eliminado. Ahora bien, como la acción es independiente de la métrica, se tiene que la acción sobre las ecuaciones de movimiento $S[\gamma_i]$ (acción *on-shell*) es un invariante topológico. Pero un invariante topológico que depende de una colección de curvas es precisamente un invariante de nudos o *link* (un *link* es una colección de nudos).

De esta manera, podemos obtener invariantes de link al resolver las ecuaciones de Chern-Simons-Wong y calcular la acción *on-shell* correspondiente. Debido a la complejidad de las ecuaciones a resolver, se seguirá la idea presentada en [9], donde se adopta un esquema perturbativo de solución que preserva las características topológicas que queremos estudiar. Ese esquema puede esbozarse de la manera siguiente. La ecuación (3.31) puede resolverse perturbativamente en potencias del parámetro Λ. Al sustituir dicha solución perturbativa en la acción se tendrá la acción *on-shell* escrita, a su vez, como una serie de potencias en el parámetro Λ:

$$S_{\textit{on-shell}}([\gamma;\Lambda]) = \sum_{p=0}^{\infty} \Lambda^p S^{(p)}[\gamma], \tag{3.32}$$

donde $S^{(p)}[\gamma]$ es el coficiente p-ésimo de la expansión. Como la acción *on-shell* es un invariante de nudo, sus derivadas con respecto al parámetro Λ también lo serán. Una consecuencia práctica de este sencillo argumento, es que no es preciso obtener la serie completa de (3.32) para obtener invariantes de nudo. Uno decide hasta cual orden quiere llegar. En el presente trabajo se estudiarán los tres primeros invariantes que surgen de aplicar el esquema anterior.

Para comenzar el cálculo de la acción *on-shell*, debemos notar que, debido a (3.23) tenemos:

$$I(\tau) = U(\tau)g(0)Kg^{-1}(0)U^{-1}(\tau) = g(\tau)Kg^{-1}(\tau). \tag{3.33}$$

Esto nos permite tomar $g(\tau) = U(\tau)g(0)$, con lo cual

$$D(\tau)g(\tau) = 0, \tag{3.34}$$

y como la derivada covariante de $g(\tau)$ se anula sobre las ecuaciones de movimiento, nos lleva a concluir que

$$S^{int}_{on-shell} = 0. \tag{3.35}$$

De este modo, resta por considerar $S^{CS}_{on-shell}$. Para ello, consideremos la ecuación de movimiento para los elementos de carga interna I_i:

$$\dot{I}_i + [A_i, I_i] = 0, \tag{3.36}$$

que reescribiremos de la siguiente manera:

$$\frac{dI^a_i}{d\tau} + \Lambda R^{ac}_i(\tau) I^c_i(\tau) = 0, \tag{3.37}$$

donde

$$R^{ac}_i \equiv f^{abc} \dot{z}^{\mu}_i a^b_{\mu}(z_i) \tag{3.38}$$

$$a_\mu = \Lambda^{-1} A_\mu. \tag{3.39}$$

De (3.37) observamos que la solución expresada en las ecuaciones (3.23) y (3.24) debe ser equivalente a

$$I^a_i(\tau) = \mathbf{T}exp\left[-\Lambda \int_0^\tau d\tau' R^{ac}_i(\tau')\right] I^c_i(0). \tag{3.40}$$

donde $\vec{I}_i$ es el vector de N^2-1 componentes I^a_i, y R_i es la matriz de (N^2-1) elementos R^{ac}_i definidos en (3.38). Desarrollando la exponencial ordenada de la expresión (3.40) y usando las ecuaciones (3.38) y (3.39), la ecuación de movimiento (3.31) puede escribirse como:

$$
\begin{aligned}
2\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu a^a_\rho(x) = & - \quad \Lambda \epsilon^{\mu\nu\rho} f^{abc} a^c_\rho(x) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} dz^\mu \delta^3(x-z) I^a_i(0) \\
& - \quad \Lambda \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} dz^\mu \int_0^z dz_1^{\mu_1} R^{aa_1}_{\mu_1}(z_1) \delta^3(x-z) I^{a_1}_i(0) \\
& + \quad \Lambda^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} dz^\mu \int_0^z dz_1^{\mu_1} \int_0^{z_1} dz_2^{\mu_2} R^{aa_1}_{\mu_1}(z_1) R^{a_1 a_2}_{\mu_2}(z_2) \delta^3(x-z) I^{a_2}_i(0) \\
& \vdots \\
& + \quad (-\Lambda)^p \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} dz^\mu \int_0^z dz_1^{\mu_1} \ldots \int_0^{z_{p-1}} dz_p^{\mu_p} R^{aa_1}_{\mu_1}(z_1) \\
& \cdots \quad R^{a_{p-1}a_p}_{\mu_p}(z_p) \delta^3(x-z) I^{a_p}_i(0) \\
& \vdots \quad .
\end{aligned} \tag{3.41}
$$

Si ahora intoducimos la serie de potencias:

$$
a^a_\mu = \sum_{p=0}^{\infty} \Lambda^p a^{(p)a}_\mu, \tag{3.42}
$$

en la ecuación (3.41), la expresión que resulta al *p-ésimo* orden, se escribe como:

$$
\begin{aligned}
2\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu a^{(p)a}_\rho(x) \quad = \quad & -\epsilon^{\mu\nu\rho} f^{abc} \sum_{r,s=0}^{r+s=p-1} a^{(r)b}_\nu a^{(s)c}_\rho + \\
& + \quad \sum_{r=1}^{p} (-1)^r \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} dz^\mu \int_0^z dz_1^{\mu_1} \cdots \int_0^{z_{r-1}} dz_r^{\mu_r} \sum_{s_1,\cdots s_r=0}^{s_1+\cdots+s_r=p-1} R^{(s_1)aa_1}_{\mu_1}(z_1) \times \\
& \times \quad R^{(s_2)a_1a_2}_{\mu_2}(z_2) \cdots R^{(s_r)a_{r-1}a_r}_{\mu_r}(z_r) I^{a_r}_i(0) \delta^3(x-z),
\end{aligned} \tag{3.43}
$$

para $p \geq 1$. Para $p = 0$ la ecuación correspondiente es

$$
2\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu a^{(0)a}_\rho = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} dz_i^\mu \delta^3(x-z_i) I^a_i(0). \tag{3.44}
$$

Las ecuaciones (3.43) y (3.44) tienen la forma de la ley de Ampere

$$
\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu a^{(p)a}_\rho = J^{(p)\mu a}(x), \tag{3.45}
$$

cuya solución viene dada por el correspondiente análogo de la Ley de Biot-Savart:

$$
a^{(p)a}_\mu(x) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \epsilon_{\mu\nu\rho} J^{(p)\nu a}(x') \frac{(x-x')^\rho}{|x-x'|^3}. \tag{3.46}
$$

En las ecuaciones (3.45) y (3.46), $J^{(p)\mu a}$ representa el miembro derecho de la ecuación (3.43) o (3.44), (según sea el caso) dividido por dos. La expresión (3.46) nos permite obtener $a_\alpha^a(x)$ orden por orden. Por lo tanto estamos en capacidad de obtener la acción *on-shell* dada por

$$S_{on-shell} = S^{CS}_{on-shell} + S^{int}_{on-shell}, \tag{3.47}$$

donde, como ya sabemos, el término de la acción *on-shell* correspondiente a la interacción de las partículas se anula, lo que nos lleva a que cada uno de los términos del desarrollo proviene únicamente de la acción de Chern-Simons:

$$\begin{aligned} S_{on-shell} &= S^{CS}_{on-shell} \\ &= \frac{\Lambda}{2}\int d^3x\epsilon^{\mu\nu\rho}\left(a^a_\mu\partial_\nu a^a_\rho + \frac{\Lambda}{3}f^{abc}a^a_\mu a^b_\nu a^c_\rho\right)|_{on-shell}. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Usando las ecs. (3.43) y (3.46) podemos llevar lo anterior a:

$$S_{on-shell} = \frac{\Lambda}{2}\sum_{p=0}^{\infty} S^{(p)}\Lambda^{(p)} \tag{3.49}$$

donde

$$S^{(p)} = \int d^3x\epsilon^{\mu\nu\rho}\left(\sum_{r,s}^{r+s=p}(a^{(r)a}_\mu\partial_\nu a^{(s)a}_\rho) + \frac{f^{abc}}{3}\sum_{r,s,q}^{r+s+q=p-1}(a^{(r)a}_\mu a^{(s)b}_\nu a^{(q)c}_\rho)\right). \tag{3.50}$$

Las ecuaciones (3.50), (3.43) y (3.46) nos proporcionan todas las herramientas necesarias para obtener cualquier contribución de la acción *on-shell* y de esta manera relacionar cada contribución con posibles invariantes de nudos. En la próxima sección introduciremos una nueva notación que simplificará de manera considerable la obtención de cada una de las contribuciones para la acción *on-shell.* También ciertas variables geométricas que nos permitirán a futuro poder realizar de manera analítica la interpretación de los invariantes de nudo.

3.3. Coordenadas de Caminos y convenciones

A continuación implementaremos una nueva notación que nos permitirá escribir de manera más compacta y simplificada las expresiones del problema que estamos considerando. Además introduciremos ciertos objetos geométricos que serán de gran utilidad para realizar la interpretación geométrica de cada uno de los invariantes.

Para comenzar, denotaremos la dependencia de una función tensorial en alguna variable continua colocándole un índice que indica dicha variable, esto es:

$$A_{\mu\nu\dots\rho}(x,y\dots,z) \equiv A_{\mu x\,\nu y\dots\rho z}. \tag{3.51}$$

La expresión anterior permitirá establecer una especie de convención de Einstein para la suma de índices repetidos [18] para variables continuas, en donde en lugar de sumar se integran las funciones en la variable repetida:

$$A_{\mu x}B^{\mu x\,\nu y\dots} \equiv \sum_{\mu}\int A_{\mu x}B^{\mu x\,\nu y\dots}d^3x = \sum_{\mu}\int A_{\mu}(x)B^{\mu\nu\dots}(x,y\dots)d^3x. \tag{3.52}$$

Cuando aparezcan índices repetidos que no se integren les colocaremos una “barra” arriba de la letra,

$$A_{\mu x\,\nu\bar{y}}B^{\mu x\,\nu\bar{y}\dots} \equiv \sum_{\mu}\int A_{\mu x\,\nu\bar{y}}B^{\mu x\,\nu\bar{y}\dots}d^{(3)}x. \tag{3.53}$$

En muchos casos será conveniente y para una mayor simplificación, escribir un conjunto de índices “discreto-continuo” por un sólo índice, el cual denotaremos con una letra latina minúscula de esta forma:

$$A^{\mu x\,\nu y\dots\rho z} \equiv A^{ab\dots c}. \tag{3.54}$$

Por último, vamos a indicar con una “flecha”, indicando que son vectores, a toda cantidad que tenga componentes en el espacio interno. Por ejemplo:

$$a^{(p)a}_{\mu x} = \vec{a}^{(p)}_{\mu x}. \tag{3.55}$$

A continuación introduciremos lo que se conoce como coordenadas para un espacio de ciclos (o coordenadas de caminos). Éstas fueron introducidas por primera vez en [18] y vienen dadas por:

$$T^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}_{\gamma_i}(x_1,x_2,\dots,x_n) = T^{\mu_1 x_1\,\mu_2 x_2\dots\mu_n x_n}_{\gamma_i} \equiv \oint_{\gamma_i} dz^{\mu_1}\int_0^z dz_1^{\mu_2}\times$$
$$\times\int_0^{z_1} dz_1^{\mu_3}\dots\int_0^{z_{n-1}} dz_{n-1}^{\mu_n}\delta^{(3)}(x_1-z)\delta^{(3)}(x_2-z_1)\delta^{(3)}(x_3-z_2)\dots\delta^{(3)}(x_n-z_{n-1}). \tag{3.56}$$

La relación anterior define a los objetos $T's$ de "rango" n, también se conocen con el nombre de multitangentes de los ciclos o multitangentes de caminos. De la definición podemos ver que el T de 1-índice viene dado por:

$$T^{\mu}_{\gamma_i}(x) = \oint_{\gamma_i} dz^{\mu}\delta^{(3)}(x-z), \tag{3.57}$$

y se conoce como factor de forma o distribución de tangentes de la curva γ_i. Esta distribución extrae el vector tangente a la curva en el punto $\vec{x}$. Al factor de forma le sigue un objeto bi-local (T-objeto de 2-índices) asociado a la curva γ_i:

$$T^{\mu x,\nu y}_{\gamma_i} \equiv \oint_{\gamma_i} dz^{\mu} \int_0^z dz'^{\nu}\delta^{(3)}(x-z)\delta^{(3)}(y-z'). \tag{3.58}$$

Dichas cantidades son densidades contravariantes, independientes de la métrica y obedecen las ligaduras diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} T^{\mu x,\nu y}_{\gamma} &= \left(-\delta^{(3)}(y-x_0) + \delta^{(3)}(y-x)\right) T^{\nu y}_{\gamma} \\ \frac{\partial}{\partial y^{\nu}} T^{\mu x,\nu y}_{\gamma} &= \left(\delta^{(3)}(y-x_0) - \delta^{(3)}(y-x)\right) T^{\mu x}_{\gamma}, \end{aligned} \tag{3.59}$$

y una ligadura algebraica:

$$T^{(\mu x,\nu y)}_{\gamma} = \frac{1}{2}\left(T^{(\mu x,\nu y)}_{\gamma} + T^{(\nu y,\mu x)}_{\gamma}\right) = T^{\mu x}_{\gamma} T^{\nu y}_{\gamma}. \tag{3.60}$$

Usaremos también en nuestro trabajo, la antisimetrización de los índices del T-objeto bi-local (3.58), que se expresa por medio de:

$$T^{[\mu x,\nu y]}_{\gamma} \equiv \frac{1}{2}\left(T^{\mu x,\nu y}_{\gamma} - T^{\nu y,\mu x}_{\gamma}\right). \tag{3.61}$$

Ahora vamos a introducir la cantidad $H_{\mu\nu}(x,\gamma^{\vec{y}})$ la cual es una 2-forma y que usaremos ampliamente para realizar la interpretación geométrica de los invariantes de nudo en una próxima sección. La misma está definida por:

$$H_{\mu\nu}(x,\gamma) = \int_{\gamma} dy^{\rho}\epsilon_{\mu\nu\rho}\delta^{(3)}(x-y). \tag{3.62}$$

Esta cantidad es miembro de una familia de formas diferenciales asociadas con objetos geométricos como volúmenes, superficies, caminos y puntos en $\Re^3$ introducidas inicialmente en [9]. Dentro de formalismo geométrico los invariantes obtenidos hasta primer orden pueden ser escritos manifiestamente covariantes bajo difeomorfismos, y en este caso lucen como invariantes de superficie más que como invariantes de nudo [9,10,13]. Las superficies que aparecen en esta presentación tienen por fronteras a las curvas que configuran el conjunto de nudos y en el lenguaje de Teoría de Nudos, reciben el nombre de superficies de Seifert [11].

Ahora el factor de forma (3.57) se puede escribir usando la 2-forma $H_{\mu\nu}$ como:

$$T_{\gamma}^{\mu x} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}H_{\nu\rho}(x,\gamma). \tag{3.63}$$

Vamos a introducir a continuación los objetos $g^{\mu x\,\nu y}$ y $g_{\mu x\,\nu y}$, que son simétricos en sus pares de índices y se definen como:

$$\begin{aligned} g^{\mu x\,\nu y} &\equiv \epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\rho\delta(x-y) \\ g_{\mu x\,\nu y} &\equiv -\frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho}\frac{(x-y)^\rho}{|x-y|^3}. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Estas cantidades aparecen naturalmente en la solución de la ligadura diferencial que obedecen los T-objetos y constituyen una métrica en el espacio de densidades vectoriales transversas de rango uno [18]. De hecho, $g_{\mu x\,\nu y}$ es el núcleo (kernel) del invariante de nudo conocido como Número de Gauss.

También consideraremos la cantidad D_μ definida para curvas cerradas en [9], como:

$$D_\mu(x,\gamma) \equiv \frac{1}{4\pi}\oint_{\gamma_i} dz^\rho \frac{(x-z)^\nu}{|x-z|^3}\epsilon_{\mu\nu\rho}. \tag{3.65}$$

Escribiremos algunas cantidades útiles para el desarrollo de nuestro trabajo usando la nueva notación y en términos de la métrica $g_{\mu x\,\nu y}$ y de los T objetos de 1-índice. Comenzamos con la expresión (3.65):

$$D_\mu(x,\gamma) \equiv D_{i\mu x} = \frac{1}{4\pi}\oint_{\gamma_i} dz^\rho \frac{(x-z)^\nu}{|x-z|^3}\epsilon_{\mu\nu\rho} = g_{\mu x\,\nu y}T_i^{\nu y}. \tag{3.66}$$

El Número de Anudamiento de Gauss, el cual veremos está relacionado con el invariante a primer orden, se escribe como:

$$\begin{aligned} L(i,j) &= \frac{1}{4\pi}\oint_{\gamma_i} dz^{\mu}\oint_{\gamma_j} dy^{\rho}\frac{(z-y)^{\nu}}{|z-y|^3}\epsilon_{\mu\nu\rho} \\ &= \int T_i^{\mu\bar{x}} D_{j\mu\bar{x}} d^3x = \oint_{\gamma_i} dz^{\mu} D_j \\ &= T^{\mu x} g_{\mu x\,\nu y} T^{\nu y}. \end{aligned} \tag{3.67}$$

La Ley de Biot-Savart, solución para obtener los campos $a_{\mu}^{(p)a}(x)$ a cualquier orden se simplifica por:

$$\begin{aligned} a_{\mu x}^{(p)a} &= -\frac{1}{4\pi}\int d^3x' \epsilon_{\mu\nu\rho} J^{(p)\nu a}(x')\frac{(x-x')^{\rho}}{|x-x'|^3} \\ &= -J^{(p)\nu y} g_{\mu x\,\nu y}. \end{aligned} \tag{3.68}$$

Por último consideremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} g^{\mu x\,\nu y} a_{\nu y}^{(p)a} &= \int \epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_{\rho}^{\vec{x}}(\delta^{(3)}(x-\bar{y}))a_{\nu\bar{y}}^{(p)a} d^3y \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho}\int \partial_{\rho}^{\vec{y}} a_{\nu\bar{y}}^{(p)a} d^3y = \epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_{\rho} a_{\nu x}^{(p)a} = -\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_{\nu} a_{\rho}^{(p)a}. \end{aligned} \tag{3.69}$$

De la expresión anterior podemos ver que el rotor del campo $a_{\mu x}^{(p)a}$ puede ser escrito en función de la métrica contravariante.

3.4. Contribuciones de la acción *on-shell*

A continuación calcularemos los tres primeros órdenes de la acción *on-shell* con el propósito de relacionarlos con posibles invariantes de nudos y estudiar cómo dichos invariantes pueden detectar formas de anudamiento no triviales [9,13,14]. Con el fin de simplicar el problema vamos a considerar el caso más simple, no trivial, que consiste en restringir el grupo de calibre a $SU(2)$. Por lo tanto, las constantes de estructura generales f^{abc} pasan a ser los símbolos de Levi-Civita ϵ^{ijk}.

De la ec. (3.50) se obtiene de manera sencilla la acción a orden cero, $S^{(0)}$:

$$S^{(0)} = \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} a_{\mu}^{(0)a}\partial_{\nu} a_{\rho}^{(0)a}, \tag{3.70}$$

la cual se escribe usando la nueva notación como:

$$S^{(0)} = \epsilon^{\mu\nu\rho}\vec{a}^{(0)}_{\mu x} \cdot \partial_\nu \vec{a}^{(0)}_{\rho x}, \tag{3.71}$$

donde el rotor de $\vec{a}^{(0)}_{\rho x}$ se obtiene directamente de la ec.(3.44). Además $\vec{a}^{(0)}_{\mu x}$ se obtiene de la expresión (3.46) con $\vec{J}^{(0)\nu}$ dado por:

$$\vec{J}^{(0)\nu}(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int_{\gamma_i} dz_i^\nu \delta^3(x - z_i) I_i^a(0). \tag{3.72}$$

Usando las coordenadas de caminos introducidas en el apartado anterior, podemos escribir el rotor de $\vec{a}^{(0)}_{\rho x}$ como:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu \vec{a}^{(0)}_{\rho x} = \frac{1}{2}\sum_i T_i^{\mu x}\vec{I}_i, \tag{3.73}$$

y de la misma manera:

$$\vec{a}^{(0)}_{\mu x} = -\frac{1}{2}\sum_i D_{i\mu x}\vec{I}_i = -\frac{1}{2}T_i^{\nu y} g_{\mu x \nu y}\vec{I}_i, \tag{3.74}$$

donde hemos usado el resultado (3.66). Sustituyendo las ecuaciones (3.73) y (3.74) en la expresión (3.71), obtenemos:

$$S^{(0)} = -\frac{1}{4}\sum_{i,j}(\vec{I}_i \cdot \vec{I}_j) T_i^{\mu x} g_{\mu x \nu y} T_j^{\nu y}, \tag{3.75}$$

o de manera equivalente:

$$S^{(0)} = -\frac{1}{4}\sum_{i,j}(\vec{I}_i \cdot \vec{I}_j) L(i,j). \tag{3.76}$$

De la expresión anterior se desprende que la acción a orden cero $S^{(0)}$ es proporcional al Número de Anudamiento de Gauss (Gauss Linking Number) $L(i,j)$ de las curvas γ_i y γ_j, que es un invariante de *link* bien conocido [21]. Hemos encontrado entonces, el primer invariante de nudo dentro del desarrollo perturbativo de la acción *on-shell*, que además se corresponde con la teoría de Chern-Simons Abeliana acoplada con corrientes con base en curvas cerradas.

Ahora pasemos a considerar el siguiente orden. Según la ecuación (3.50) $S^{(1)}$ se escribe como:

$$S^{(1)} = \epsilon^{\mu\nu\rho}\left[2\vec{a}^{(0)}_{\mu x}\partial_\nu \vec{a}^{(1)}_{\rho x} + \frac{1}{3}(\vec{a}^{(0)}_{\mu x}\cdot(\vec{a}^{(0)}_{\nu x}\times\vec{a}^{(0)}_{\rho x}))\right]. \tag{3.77}$$

En esta expresión sólo nos faltaría determinar el rotor de $\vec{a}^{(1)}_{\rho x}$ el cual se obtiene de la ecuación (3.43) para $p = 1$:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu \vec{a}^{(1)}_{\rho x} = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\vec{a}^{(0)}_{\nu x}\times\vec{a}^{(0)}_{\rho x} - \frac{1}{2}\sum_i T_i^{\mu x\nu y}\vec{a}^{(0)}_{\nu y}\times\vec{I}_i, \tag{3.78}$$

y al sustituir la expresión para los campos a orden cero, nos resulta en:

$$\begin{aligned}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu \vec{a}^{(1)}_{\rho x} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\vec{I}_i\times\vec{I}_j)\Big[\frac{1}{4}&\epsilon^{\mu\nu\rho}T_i^{\mu_1 x_1}T_j^{\mu_2 x_2}g_{\mu_1 x_1 \nu\bar{x}}g_{\mu_2 x_2 \rho\bar{x}}\\ &+\frac{1}{2}T_i^{\mu x\mu_1 x_1}T_j^{\mu_2 x_2}g_{\mu_1 x_1 \mu_2 x_2}\,\Big].\end{aligned} \tag{3.79}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.74) y (3.79) en la expresión (3.77), obtenemos el orden uno de la acción *on-shell* en función de las coordenadas de caminos y de la métrica:

$$\begin{aligned}S^{(1)} = \sum_{i,j,k}\left[\left(\vec{I}_i\times\vec{I}_j\right)\cdot\vec{I}_k\right]\Big\{&\frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho}T_i^{\mu_1 x_1}T_j^{\mu_2 x_2}T_k^{\mu_3 x_3}g_{\mu_1 x_1 \mu x}g_{\mu_2 x_2 \nu x}g_{\mu_3 x_3 \rho x}\\ &+\frac{1}{4}T_i^{\mu x\mu_1 x_1}T_j^{\mu_2 x_2}T_k^{\mu_3 x_3}g_{\mu_1 x_1 \mu_2 x_2}g_{\mu x\mu_3 x_3}\\ &-\frac{1}{24}\epsilon^{\mu\nu\rho}T_i^{\mu_1 x_1}T_j^{\mu_2 x_2}T_k^{\mu_3 x_3}g_{\mu x\mu_1 x_1}g_{\nu x\mu_2 x_2}g_{\rho x\mu_3 x_3}\,\Big\}.\end{aligned} \tag{3.80}$$

Podemos agrupar el primer y tercer término y obtener una expresión más simplificada para $S^{(1)}$:

$$\begin{aligned}S^{(1)} = \frac{1}{4}\sum_{i,j,k}\left[\left(\vec{I}_i\times\vec{I}_j\right)\cdot\vec{I}_k\right]\Big\{&\frac{1}{3}\epsilon^{\mu\nu\rho}T_i^{\mu_1 x_1}T_j^{\mu_2 x_2}T_k^{\mu_3 x_3}g_{\mu_1 x_1 \mu x}g_{\mu_2 x_2 \nu x}g_{\mu_3 x_3 \rho x}\\ &-T_i^{\mu_1 x_1}T_j^{\mu x\nu y}T_k^{\mu_2 x_2}g_{\mu x\mu_2 x_2}g_{\nu y\mu_1 x_1}\,\Big\}\end{aligned} \tag{3.81}$$

El factor que involucra a las corrientes en la expresión anterior, el cual puede ecribirse como $\epsilon^{abc}I_i^a I_j^b I_k^c$, se anula cuando los isovectores $\vec{I}_i$, $\vec{I}_j$ y $\vec{I}_k$ son linealmente dependientes, como consecuencia de esto, $S^{(1)}$ es cero cuando la corriente consta de una o dos partículas de Wong. Además, dicho factor es totalmente antisimétrico en las corrientes, por tanto para que $S^{(1)}$ sea distinto de cero, el término entre llaves debe ser antisimétrico también en i, j y k. Al realizar la antisimetrización resulta:

$$S^{(1)} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\left[\left(\vec{I}_i \times \vec{I}_j\right)\cdot \vec{I}_k\right]\left\{\epsilon^{\mu\nu\rho}T_i^{\mu_1 x_1}T_j^{\mu_2 x_2}T_k^{\mu_3 x_3}g_{\mu x\mu_1 x_1}g_{\nu x\mu_2 x_2}g_{\rho x\mu_3 x_3}\right.$$
$$+T_i^{[\mu x,\nu y]}T_j^{\mu_1 x_1}T_k^{\mu_2 x_2}g_{\mu x\mu_1 x_1}g_{\nu y\mu_2 x_2} + T_j^{[\mu x,\nu y]}T_k^{\mu_1 x_1}T_i^{\mu_2 x_2}g_{\mu x\mu_1 x_1}g_{\nu y\mu_2 x_2}$$
$$\left. +T_k^{[\mu x,\nu y]}T_i^{\mu_1 x_1}T_j^{\mu_2 x_2}g_{\mu x\mu_1 x_1}g_{\nu y\mu_2 x_2}\right\} \qquad (3.82)$$

La cantidad descrita por la ecuación (3.82) corresponde (salvo por un factor) con un invariante de nudo no trivial de tres curvas cerradas, conocido como el Tercer Coeficiente de Anudamiento de Milnor $M(i,j,k)$ [11,20]. Este invariante está definido siempre y cuando el Número de Anudamiento de Gauss de las curvas sea nulo a para cualquier par de curvas:

$$L(i,j) = 0. \qquad (3.83)$$

De hecho, el Tercer Coeficiente sigue al Número de Gauss en una secuencia infinita de invariantes de nudo descubiertos por Milnor: Coeficientes de Anudamiento de Orden Superior. El n-ésimo coeficiente está definido si todos los anteriores se anulan [6,11]. Además $S^{(1)}$ permite entre otras cosas, caracterizar las propiedades de anudamiento de los anillos Borromeanos [17].

El término de orden dos del desarrollo perturbativo $S^{(2)}$ corresponde a:

$$S^{(2)} = \epsilon^{\mu\nu\rho}\left[2\partial_\nu \vec{a}^{(2)}_{\rho x}\cdot \vec{a}^{(0)}_{\mu x} + \partial_\nu \vec{a}^{(1)}_{\rho x}\cdot \vec{a}^{(1)}_{\mu x} + \vec{a}^{(1)}_{\mu x}\cdot\left(\vec{a}^{(0)}_{\nu x}\times \vec{a}^{(0)}_{\rho x}\right)\right], \qquad (3.84)$$

y para determinar $S^{(2)}$ debemos calcular el rotor del orden dos del campo $\vec{a}^{(2)}_{\rho x}$ partiendo de la ecuación (3.43) para $p=2$:

$$2\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu \vec{a}^{(2)}_{\rho x} = -2g^{\mu x\nu y}\vec{a}^{(2)}_{\nu y} = -2\epsilon^{\mu\nu\rho}\vec{a}^{(1)}_{\nu\bar{x}}\times \vec{a}^{(0)}_{\rho\bar{x}} - \sum_i T_i^{\mu x\mu_1 x_1}\vec{a}^{(1)}_{\mu_1 x_1}\times \vec{I}_i$$
$$+\sum_i T_i^{\mu x\mu_1 x_1 x\mu_2 x_2}\vec{a}^{(0)}_{\mu_1 x_1}\times\left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_2 x_2}\times \vec{I}_i\right). \qquad (3.85)$$

Nótese que debemos calcular el campo a orden uno, esto es $\vec{a}^{(1)}_{\nu x}$, el cual se puede obtener directamente de la ecuación (3.46) con:

$$J^{(1)\mu x} = -\frac{1}{2}\vec{a}^{(0)}_{\nu x}\times \vec{a}^{(0)}_{\rho x} - \frac{1}{2}\sum_i T_i^{\mu x\nu y}\vec{a}^{(0)}_{\nu y}\times \vec{I}_i. \qquad (3.86)$$

Usando (3.68) se tiene finalmente que:

$$\vec{a}^{(1)}_{\mu x} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\left(\vec{a}^{(0)}_{\beta y} \times \vec{a}^{(0)}_{\gamma y}\right) g_{\mu x\alpha y} + \frac{1}{2}\sum_i g_{\mu x\alpha y} T_i^{\alpha y\mu_1 x_1}\left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_1 x_1} \times \vec{I}_i\right). \tag{3.87}$$

Ya tenemos todos los "ingredientes" para escribir cada uno de los términos de la ecuación (3.84). Escribiendo el primer término:

$$\begin{aligned}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu \vec{a}^{(2)}_{\rho x}\cdot\vec{a}^{(0)}_{\mu x} = -\epsilon^{\mu\nu\rho}\left(\vec{a}^{(0)}_{\nu\bar{x}} \times \vec{a}^{(1)}_{\rho\bar{x}}\right)\cdot\vec{a}^{(0)}_{\mu x} - \frac{1}{2}\sum_i T_i^{\mu x\mu_1 x_1}\left(\vec{a}^{(1)}_{\mu_1 x_1} \times \vec{I}_i\right)\cdot\vec{a}^{(0)}_{\mu x} \\ +\frac{1}{2}\sum_i T_i^{\mu x\mu_1 x_1\mu_2 x_2}\left[\vec{a}^{(0)}_{\mu_1 x_1} \times \left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_2 x_2} \times \vec{I}_i\right)\right]\cdot\vec{a}^{(0)}_{\mu x}.\end{aligned} \tag{3.88}$$

Sustituimos ahora la expresión para $\vec{a}^{(1)}_{\mu x}$ en la ecuación anterior y luego de algunas operaciones algebraicas, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}2\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu \vec{a}^{(2)}_{\rho x}\cdot\vec{a}^{(0)}_{\mu x} &= -\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} g_{\rho x\alpha y}\left[\vec{a}^{(0)}_{\nu x} \times \left(\vec{a}^{(0)}_{\beta y} \times \vec{a}^{(0)}_{\gamma y}\right)\right]\cdot\vec{a}^{(0)}_{\mu x} \\ &- \frac{1}{2}\sum_i \epsilon^{\mu\nu\rho} g_{\rho x\alpha y} T_i^{\alpha y\mu_1 x_1}\left[\vec{a}^{(0)}_{\nu x} \times \left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_1 x_1} \times \vec{I}_i\right)\right]\cdot\vec{a}^{(0)}_{\mu x} \\ &- \frac{1}{2}\sum_i \epsilon^{\alpha\beta\gamma} g_{\mu_1 x_1\alpha y} T_i^{\mu x\mu_1 x_1}\left[\left(\vec{a}^{(0)}_{\beta y} \times \vec{a}^{(0)}_{\gamma y}\right) \times \vec{I}_i\right]\cdot\vec{a}^{(0)}_{\mu x} \\ &- \frac{1}{2}\sum_{i,j} g_{\mu_1 x_1\alpha y} T_i^{\mu x\mu_1 x_1} T_j^{\alpha y\mu_2 x_2}\left[\left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_2 x_2} \times \vec{I}_j\right) \times \vec{I}_i\right]\cdot\vec{a}^{(0)}_{\mu x} \\ &+ \sum_i T_i^{\mu x\mu_1 x_1\mu_2 x_2}\left[\vec{a}^{(0)}_{\mu_1 x_1} \times \left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_2 x_2} \times \vec{I}_i\right)\right]\cdot\vec{a}^{(0)}_{\mu x}.\end{aligned} \tag{3.89}$$

Usando (3.87) y (3.88) podemos escribir el segundo término de (3.84) como:

$$\begin{aligned}\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu \vec{a}^{(1)}_{\rho x}\cdot\vec{a}^{(1)}_{\mu x} &= -\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} g_{\mu x\alpha y}\left(\vec{a}^{(0)}_{\nu x} \times \vec{a}^{(0)}_{\rho x}\right)\cdot\left(\vec{a}^{(0)}_{\beta y} \times \vec{a}^{(0)}_{\gamma y}\right) \\ &- \frac{1}{4}\sum_i \epsilon^{\mu\nu\rho} g_{\mu x\alpha y} T_i^{\alpha y\mu_1 x_1}\left(\vec{a}^{(0)}_{\nu x} \times \vec{a}^{(0)}_{\rho x}\right)\cdot\left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_1 x_1} \times \vec{I}_i\right) \\ &- \frac{1}{4}\sum_j \epsilon^{\alpha\beta\gamma} g_{\mu x\alpha y} T_j^{\mu x\mu_2 x_2}\left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_2 x_2} \times \vec{I}_j\right)\cdot\left(\vec{a}^{(0)}_{\beta y} \times \vec{a}^{(0)}_{\gamma y}\right) \\ &- \frac{1}{4}\sum_{i,j} g_{\mu x\alpha y} T_i^{\mu x\mu_1 x_1} T_j^{\alpha y\mu_2 x_2}\left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_1 x_1} \times \vec{I}_i\right)\cdot\left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_2 x_2} \times \vec{I}_j\right).\end{aligned} \tag{3.90}$$

Agrupando el segundo y tercer término, la expresión anterior se reduce a:

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu\rho}\partial_\nu \vec{a}^{(1)}_{\rho x}\cdot\vec{a}^{(1)}_{\mu x} &= -\frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}g_{\mu x\alpha y}\left(\vec{a}^{(0)}_{\nu x}\times\vec{a}^{(0)}_{\rho x}\right)\cdot\left(\vec{a}^{(0)}_{\beta y}\times\vec{a}^{(0)}_{\gamma y}\right)\\
&- \frac{1}{2}\sum_i \epsilon^{\mu\nu\rho}g_{\mu x\alpha y}T_i^{\alpha y\mu_1 x_1}\left(\vec{a}^{(0)}_{\nu x}\times\vec{a}^{(0)}_{\rho x}\right)\cdot\left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_1 x_1}\times\vec{I}_i\right)\\
&- \frac{1}{4}\sum_{i,j} g_{\mu x\alpha y}T_i^{\mu x\mu_1 x_1}T_j^{\alpha y\mu_2 x_2}\left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_1 x_1}\times\vec{I}_i\right)\cdot\left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_2 x_2}\times\vec{I}_j\right).
\end{aligned} \tag{3.91}$$

El último término presente en $S^{(2)}$ es:

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu\rho}\vec{a}^{(1)}_{\mu x}\cdot\left(\vec{a}^{(0)}_{\nu x}\times\vec{a}^{(0)}_{\rho x}\right) &= \frac{1}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}g_{\mu x\alpha y}\left(\vec{a}^{(0)}_{\beta y}\times\vec{a}^{(0)}_{\gamma y}\right)\cdot\left(\vec{a}^{(0)}_{\nu x}\times\vec{a}^{(0)}_{\rho x}\right)\\
&+ \frac{1}{2}\sum_i \epsilon^{\mu\nu\rho}g_{\mu x\alpha y}T_i^{\alpha y\mu_1 x_1}\left(\vec{a}^{(0)}_{\nu x}\times\vec{a}^{(0)}_{\rho x}\right)\cdot\left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_1 x_1}\times\vec{I}_i\right).
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Antes de introducir cada uno de los términos en la expresión de $S^{(2)}$, nos damos cuenta que usando identidades vectoriales podemos relacionar términos semejantes entre los productos de los campos que aparecen en las ecuaciones (3.89), (3.91) y (3.92):

$$\begin{aligned}
\left(\vec{a}^{(0)}_{\nu x}\times\vec{a}^{(0)}_{\rho x}\right)\cdot\left(\vec{a}^{(0)}_{\beta y}\times\vec{a}^{(0)}_{\gamma y}\right) &= -\left[\vec{a}^{(0)}_{\nu x}\times\left(\vec{a}^{(0)}_{\beta y}\times\vec{a}^{(0)}_{\gamma y}\right)\right]\cdot\vec{a}^{(0)}_{\rho x}\\
\left(\vec{a}^{(0)}_{\nu x}\times\vec{a}^{(0)}_{\rho x}\right)\cdot\left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_1 x_1}\times\vec{I}_i\right) &= -\left[\vec{a}^{(0)}_{\nu x}\times\left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_1 x_1}\times\vec{I}_i\right)\right]\cdot\vec{a}^{(0)}_{\rho x}\\
\left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_1 x_1}\times\vec{I}_i\right)\cdot\left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_2 x_2}\times\vec{I}_j\right) &= -\left[\left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_2 x_2}\times\vec{I}_j\right)\times\vec{I}_i\right]\cdot\vec{a}^{(0)}_{\mu_1 x_1}.
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Introduciendo las ecuaciones (3.89), (3.91) y (3.92) en la expresión (3.84) para la acción *on-shell* a segundo orden, y usando las relaciones (3.93) se obtiene finalmente $S^{(2)}$ como:

$$\begin{aligned}
S^{(2)} &= \frac{3}{4}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}g_{\mu x\alpha y}\left[\vec{a}^{(0)}_{\nu x}\times\left(\vec{a}^{(0)}_{\beta y}\times\vec{a}^{(0)}_{\gamma y}\right)\right]\cdot\vec{a}^{(0)}_{\rho x}\\
&+ \sum_i \epsilon^{\mu\nu\rho}g_{\mu x\alpha y}\left[\vec{a}^{(0)}_{\nu x}\times\left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_1 x_1}\times\vec{I}_i\right)\right]\cdot\vec{a}^{(0)}_{\rho x}\left(T_i^{\alpha y\mu_1 x_1}-\frac{1}{2}T_i^{\mu_1 x_1\alpha y}\right)\\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i,j} g_{\mu x\alpha y}T_j^{\alpha y\mu_2 x_2}\left[\vec{I}_i\times\left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_2 x_2}\times\vec{I}_j\right)\right]\cdot\vec{a}^{(0)}_{\mu_1 x_1}\left(T_i^{\mu_1 x_1\mu x}-\frac{1}{2}T_i^{\mu x\mu_1 x_1}\right)\\
&+ \sum_i T_i^{\mu x\mu_1 x_1\mu_2 x_2}\left[\vec{a}^{(0)}_{\mu_1 x_1}\times\left(\vec{a}^{(0)}_{\mu_2 x_2}\times\vec{I}_i\right)\right]\cdot\vec{a}^{(0)}_{\mu x}.
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Ahora nos falta introducir en la expresión anterior el campo a orden cero y con esto tendremos $S^{(2)}$ escrito únicamente en función de las coordenadas de caminos y de la métrica. Usando la ecuación (3.74), renombrando índices y agrupando términos semejantes resulta:

$$
\begin{aligned}
S^{(2)} &= \frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l}\left(\left[\vec{I}_i \times \left(\vec{I}_j \times \vec{I}_k\right)\right]\cdot \vec{I}_l\right) g_{\mu x \alpha y} \times \\
&\times \left\{\frac{3}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} g_{\nu x \mu_1 x_1} g_{\rho x \mu_4 x_4} g_{\beta y \mu_2 x_2} g_{\gamma y \mu_3 x_3} T_i^{\mu_1 x_1} T_j^{\mu_2 x_2} T_k^{\mu_3 x_3} T_l^{\mu_4 x_4}\right. \\
&+ \epsilon^{\mu\nu\rho}\left(T_j^{\alpha y \mu_1 x_1} - \frac{1}{2}T_j^{\mu_1 x_1 \alpha y}\right) g_{\nu x \mu_2 x_2} g_{\rho x \mu_4 x_4} g_{\mu_1 x_1 \mu_3 x_3} T_i^{\mu_2 x_2} T_k^{\mu_3 x_3} T_l^{\mu_4 x_4} \\
&- T_j^{\alpha y \mu_2 x_2}\left(T_i^{\mu_1 x_1 \mu x} - \frac{1}{2}T_i^{\mu x \mu_1 x_1}\right) g_{\mu_2 x_2 \mu_3 x_3} g_{\mu_1 x_1 \mu_4 x_4} T_k^{\mu_3 x_3} T_l^{\mu_4 x_4} \\
&+ \left. T_j^{\mu x \mu_1 x_1 \mu_2 x_2} g_{\mu_1 x_1 \mu_3 x_3} g_{\mu_2 x_2 \mu_4 x_4} T_i^{\mu_3 x_3} T_k^{\mu_4 x_4} T_l^{\alpha y}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.95}
$$

Con el fin de obtener una expresión más simplificada de $S^{(2)}$, vamos a descomponer a los T-objetos de dos índices en su parte simétrica y en su parte antisimétrica ($T_i^{ab} = T_i^{(ab)} + T_i^{[ab]}$), además usaremos la ligadura algebraica (3.60) para factorizar la parte simétrica de los T's en dos T-objetos de un índice $T_i^{ab} = T_i^a T_i^b$. En algunos términos la combinación de estos factores con las métricas (g_{ab}) forman Números de Anudamiento de Gauss, los cuales desecharemos ya que como mencionamos anteriormente para que la teoría sea consistente éstos deben anularse. Todo esto conduce a:

$$
\begin{aligned}
S^{(2)} &= \frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l}\left(\left[\vec{I}_i \times \left(\vec{I}_j \times \vec{I}_k\right)\right]\cdot \vec{I}_l\right)\left\{\frac{3}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} g_{\nu x a} g_{\rho x d} g_{\beta y b} g_{\gamma y c} T_i^a T_j^b T_k^c T_l^d\right. \\
&+ \frac{3}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho} T_j^{[\alpha y, a]} g_{\nu x b} g_{\rho x d} g_{ac} T_i^b T_k^c T_l^d + \frac{3}{2} T_j^{[b,\alpha y]} T_i^{[a,\mu x]} g_{bc} g_{ad} T_k^c T_l^d \\
&+ \left. T_j^{\mu x a b} g_{ac} g_{bd} T_i^c T_k^d T_l^{\alpha y}\right\} g_{\mu x \alpha y}.
\end{aligned} \tag{3.96}
$$

La expresión anterior está escrita en términos de las coordenadas o variables que dependen de las curvas cerradas que son las trayectorias de las partículas de Wong. La misma puede verse como una suma sobre un coeficiente:

$$
\begin{aligned}
C_{ijkl} &= \left[\vec{I}_i \times \left(\vec{I}_j \times \vec{I}_k\right)\right]\cdot \vec{I}_l = \epsilon^{abc}\epsilon^{ade} I_j^b I_k^c I_l^d I_i^e \\
&= \left(I_i^a I_j^b I_k^a I_l^b - I_i^a I_j^a I_k^b I_l^b\right) \\
&= \left(\vec{I}_i \cdot \vec{I}_k\right)\left(\vec{I}_j \cdot \vec{I}_l\right) - \left(\vec{I}_i \cdot \vec{I}_j\right)\left(\vec{I}_k \cdot \vec{I}_l\right),
\end{aligned} \tag{3.97}
$$

el cual depende sólo de las corrientes, multiplicado por el factor entre llaves el cual denotaremos como una función $f_{ijkl}(\gamma' s)$ de las curvas, escrita en un lenguaje puramente geométrico. Esto es,

$$S^{(2)} = \sum_{i,j,k,l} C_{ijkl} f_{ijkl}. \tag{3.98}$$

En la próxima sección estudiaremos algunos casos particulares para este invariante (3.98). Estaremos interesados en el caso de dos partículas con iso-cargas independientes, ya que geométricamente sólo involucra dos curvas cerradas que son precisamente las trayectorias de las dos partículas de Wong. Queremos determinar si este invariante puede detectar el anudamiento del Link de Whitehead el cual corresponde a un link no trivial de dos componentes.

3.5. Acción a orden dos $S^{(2)}$ para dos partículas con Iso-Cargas Independientes

Consideremos algunos casos particulares de la expresión (3.98). En primer lugar vemos que si I_j^b e I_k^c o si I_i^e e I_l^d son linealmente dependientes, entonces el coeficiente $C_{ijkl} = 0$ y por lo tanto $S^{(2)}$ se anula directamente.

Ahora consideremos el caso en el cual se involucra sólo a dos corrientes y $S^{(2)}$ es distinto de cero, esto sólo es posible si consideramos dos partículas con iso-vectores ortonormales, esto es, $I_i^a = \delta_i^a$, para i=1,2. Entonces, para este caso, $S^{(2)}$ toma la forma:

$$S^{(2)} = \sum_{i,j,k,l} \left(\delta_i^a \delta_j^b \delta_k^a \delta_l^b - \delta_i^a \delta_j^a \delta_k^b \delta_l^b \right) f_{ijkl}(\gamma). \tag{3.99}$$

Realizando la suma en los índices que indican las direcciones dentro del espacio interno,esto es, sumando en (a, b) se obtiene:

$$S^{(2)} = \sum_{i,j,k,l} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{ij} \delta_{kl} \right) f_{ijkl}(\gamma). \tag{3.100}$$

Ahora sumaremos en los índices relacionados a las partículas (en k,l):

$$S^{(2)} = \sum_{i,j} \left(f_{ijij}(\gamma) - f_{iijj}(\gamma) \right) = f_{1212} + f_{2121} - f_{1122} - f_{2211}, \tag{3.101}$$

Sustituyendo cada término en (3.96) se obtiene:

$$\begin{aligned} S^{(2)}_{2-part.} &= \frac{1}{8} g_{\mu x \alpha y} \Big[\frac{3}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} g_{\nu x a} g_{\rho x d} g_{\beta y b} g_{\gamma y c} \left(T_1^a T_1^c T_2^b T_2^d + T_1^b T_1^d T_2^a T_2^c \right) \\ &+ 3 \epsilon^{\mu\nu\rho} g_{\nu x b} g_{\rho x d} g_{ac} \left(T_1^b T_1^c T_2^d T_2^{[\alpha y, a]} + T_1^d T_2^c T_2^b T_1^{[\alpha y, a]} \right) \\ &- \frac{3}{2} g_{bc} g_{ad} T_{[1}^c T_{2]}^{[\alpha y, b]} T_{[2}^d T_{1]}^{[a, \mu x]} + 2 g_{ac} g_{bd} T_{[1}^c T_{2]}^{\alpha y} T_{[1}^d T_{2]}^{[\mu x, a] b} \Big]. \end{aligned} \tag{3.102}$$

La ecuación (3.102) será nuestro punto de partida para estudiar el anudamiento del link de Whitehead.

3.6. Interpretación Geométrica de los Invariantes de Nudos

En esta sección estudiaremos un método desarrollado en [14] que nos permite dar una interpretación geométrica para cualquier invariante obtenido a partir del desarrollo perturbativo de la acción *on-shell*. El principal objetivo será entender cómo a partir de las expresiones analíticas obtenidas para los invariantes de nudo se puede detectar formas de anudamientos específicos de curvas cerradas. Veremos que el invariante obtenido a orden cero, $S^{(0)}$, el cual está relacionado con el Número de Anudamiento de Gauss, puede detectar el anudamiento de dos curvas cerradas según el link de Hopf. También que el invariante obtenido a primer orden, $S^{(1)}$, relacionado con el Tercer Coeficiente de Milnor, puede caracterizar el anudamiento de los anillos de Borromeo. Por último, $S^{(2)}$ detecta la forma en que se entrelazan cuatro curvas cerradas anudadas de manera no trivial.

Iniciaremos nuestro estudio considerando la Ley de Biot-Savart, que puede ser escrita sustituyendo la métrica $g_{\mu x \nu y}$ por la 2-forma $H_{\mu\nu}(x, \gamma^{\vec{y}})$ dada por (3.62) de la siguiente manera:

$$\vec{a}_{\mu x} = -g_{\mu x \nu y} \vec{J}^{\nu y} \longrightarrow \quad \vec{a'}_{\mu x} = H_{\mu\nu}(x, \gamma^{\vec{y}}) \vec{J}^{\nu y}, \tag{3.103}$$

donde $\gamma^{\vec{y}} \equiv \gamma^{\vec{y}}_{x_0}$ es un camino abierto que comienza en un punto inicial x_0 y termina en $\vec{y}$. En general, tomaremos $x_0 \to \infty$, esto es, en el infinito espacial. Para implementar el método que estamos estudiando, recordemos también que la 2-forma $H_{\mu\nu}(x, \gamma^{\vec{y}})$ está relacionada con las densidades contravariantes $T^{\mu x}_{\gamma}$ de la siguiente manera:

$$T^{\mu x}_{\gamma} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho} H_{\nu\rho}(x, \gamma). \tag{3.104}$$

3.6.1. Interpretación geométrica de $\mathbf{S}^{(0)}$

Comencemos el análisis del método considerando el invariante obtenido a orden cero ($S^{(0)}$) el cual es una combinación de Números de Anudamiento de Gauss, implementemos el cambio $-g_{\mu x \nu y} \to H_{\mu\nu}(x, \gamma^{\vec{y}})$ en $L(i,j)$ con la finalidad de proveer una interpretación geométrica:

$$\begin{aligned} L(i,j) &= T^{\mu x} g_{\mu x\, \nu y} T^{\nu y} \\ &= -\int_{\gamma_i} dz_1^{\mu} \int_{\gamma_j} dz_2^{\nu} H_{\mu\nu}(z_1, \gamma^{\vec{z}_2}) \\ &= \int_{\gamma_i} dz_1^{\mu} \int_{\gamma_j} dz_2^{\nu} \epsilon_{\mu\nu\rho} \int_{\gamma^{\vec{z}_2}} dy^{\rho} \delta^{(3)}(y - z_1). \end{aligned} \tag{3.105}$$

Analicemos cada uno de los términos presentes en el lado derecho de la expresión anterior con el fin de obtener una interpretación de este invariante según el nuevo esquema. En primer lugar tenemos los vectores dz_1^{μ} y dz_2^{ν} que son tangentes a las curvas γ_i y γ_j respectivamente y corresponden con las trayectorias de las partículas de Wong. Además tenemos el vector dy^{ρ} tangente al camino abierto $\gamma^{\vec{z}_2}$, cuyo punto inicial se encuentra en el infinito espacial y termina en algún punto $\vec{z}_2$ perteneciente a la curva γ_j. El hecho de que aparezca $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ en (3.105) nos indica los vectores dz_1^{μ}, dz_2^{ν} y dy^{ρ} deben formar un volumen no degenerado para que $L(i,j)$ sea distinto de cero. Adicionalmente, debido a la integración realizada a lo largo de la coordenada que define a la trayectoria γ_j notamos que nos encontramos desplazando el punto final, lo que significa que necesitamos tantos caminos abiertos como puntos finales asociados a la trayectoria mencionada. Por lo tanto, el esquema de interpretación propuesto [14] considera un conjunto de caminos paralelos que finalizan en cada punto perteneciente a la curva γ_j creando de esta manera, un haz de caminos cuyos vectores tangentes pertenecen a un campo vectorial. Respetando la solución de la Ley de Ampere restringiremos todas estas curvas a ser parelaleas entre sí, de manera tal que estamos considerando un campo vectorial de vectores tangentes paralelos. Es importante resaltar que estos caminos no representan trayectoria de partícula alguna sino que han sido introducidos de manera conveniente. Este conjunto de haces forman una "especie" de superficie cuyo borde es la trayectoria γ_j de las partículas. Entonces, diremos que dos curvas γ_i y γ_j están anudadas según el Numero de Anudamiento de Gauss si la curva γ_i intersecta a alguno de los caminos abiertos pertenecientes a γ_j y si justo en ese punto los tres vectores mencionados anteriormente forman un volumen no degenerado, entonces se contará una contribución. Luego, si no existe ningún otro corte que "cuente" una contribución análoga pero de sentido contrario, entenderemos que la curva γ_i enlaza a la curva γ_j.

En la Fig. 3.1 planteamos de manera esquemática la interpretación geométrica mencionada anteriormente para el link de Hopf caracterizado por (3.105):

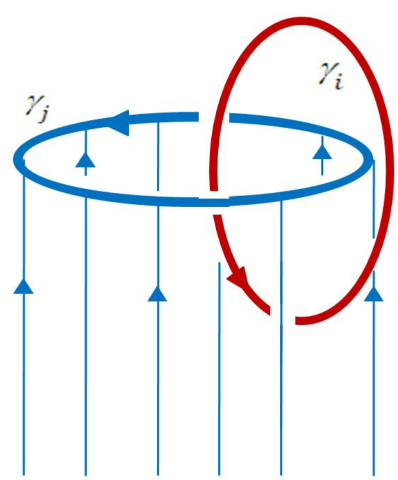

Figura 3.1: Esquema de haces de caminos paralelos para el Número de Gauss

Por otra parte, si ambas curvas γ_i y γ_j no estuvieran anudadas según el Número de Anudamiento de Gauss (3.105) un posible dibujo sería dado en la Fig. 3.2. En dicha figura existen dos cortes consecutivos (de signos contrarios) entre la trayectoria γ_i y el haz asociado a γ_j, por lo tanto, al aplicarle (3.105) a esta figura obtendremos que ambas contribuciones se cancelan, indicando con esto que no hay anudamiento entre las dos curvas.

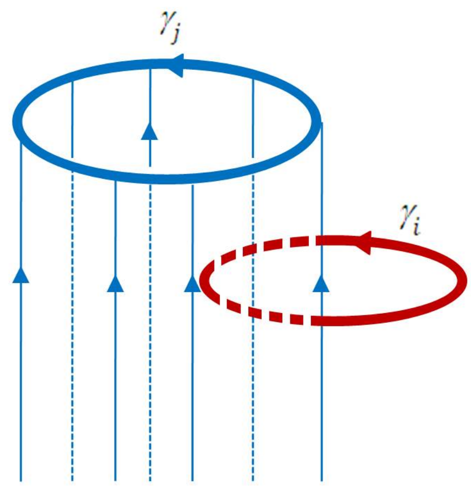

Figura 3.2: Link Trivial (no-anudado) según el esquema de haces

3.6.2. Interpretación geométrica de $\mathbf{S}^{(1)}$

Ahora pasemos a interpretar el invariante obtenido a primer orden del desarrollo perturbativo y que está relacionado con el Tercer Coeficiente de Milnor $M(i,j,k)$ escrito en (3.82). En dicha expresión hay tres términos de la forma:

$$T_i^{[\mu x,\nu y]} T_j^{\mu_1 x_1} T_k^{\mu_2 x_2} g_{\mu x \mu_1 x_1} g_{\nu y \mu_2 x_2} = T_i^{[\mu x,\nu y]} T_j^{\alpha z_3} T_k^{\beta z_4} g_{\mu x \alpha z_3} g_{\nu y \beta z_4}. \tag{3.106}$$

Realizando la sustitución de $g_{\mu x \nu y}$ por $H_{\mu\nu}(x,\gamma^{\vec{y}})$ en la ecuación anterior y luego sustituyendo explícitamente la expresión para la distribución de tangentes de uno y dos índices, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&\oint_{\gamma_i} dz_1^{\mu} \int_0^{z_1} dz_2^{\nu} \oint_{\gamma_j} dz_3^{\alpha} \oint_{\gamma_k} dz_4^{\beta} H_{\mu\alpha}(z_1, \gamma^{\vec{z}_3}) H_{\nu\beta}(z_2, \gamma^{\vec{z}_4}) \\
&= \oint_{\gamma_i} dz_1^{\mu} \int_0^{z_1} dz_2^{\nu} \oint_{\gamma_j} dz_3^{\alpha} \oint_{\gamma_k} dz_4^{\beta} \epsilon_{\mu\alpha\rho} \int_{\gamma^{\vec{z}_3}} dy_1^{\rho} \delta^{(3)}(y_1 - z_1) \epsilon_{\nu\beta\lambda} \int_{\gamma^{\vec{z}_4}} dy_2^{\lambda} \delta^{(3)}(y_2 - z_2).
\end{aligned}
\tag{3.107}
$$

Para que la expresión dada por (3.107) pueda contar alguna contribución debe ocurrir que la curva γ_i corte en primer lugar al haz de caminos paralelos que terminan en la trayectoria cerrada γ_k y seguidamente realice un corte con el haz $\gamma^{\vec{z}_3}$ que finaliza en la trayectoria cerrada de la partícula j. De nuevo, cada corte entre los vectores tangentes a las trayectorias de las partículas (dz) y los vectores tangentes a los haces de caminos abiertos (dy) es distinto de cero sólo si los vectores forman un volumen no degenerado y además la orientación de las curvas fija la dirección de los vectores tangentes, pudiéndose distinguir entonces por medio de un signo las intersecciones de entrada o de salida a la superficie que genera la “lluvia” de caminos del haz. Se puede fijar una dirección para los vectores tangentes a los haces de caminos paralelos dy^{α}, podemos por ejemplo, elegir la dirección 3, por lo tanto tendriamos dy^3.

Adicionalmente en (3.82) hay un primer término de la forma:

$$
\epsilon^{\mu\nu\rho} T_i^{\mu_1 x_1} T_j^{\mu_2 x_2} T_k^{\mu_3 x_3} g_{\mu x \mu_1 x_1} g_{\nu x \mu_2 x_2} g_{\rho x \mu_3 x_3} = \epsilon^{\mu\nu\rho} T_i^{\alpha x_1} T_j^{\beta x_2} T_k^{\gamma x_3} g_{\mu x \alpha x_1} g_{\nu x \beta x_2} g_{\rho x \gamma x_3},
\tag{3.108}
$$

que se convierte en:

$$
\begin{aligned}
&- \epsilon^{\mu\nu\rho} \int d^3x \oint_{\gamma_i} dz_1^{\alpha} \oint_{\gamma_j} dz_2^{\beta} \oint_{\gamma_k} dz_3^{\gamma} H_{\mu\alpha}(x, \gamma^{\vec{z}_1}) H_{\nu\beta}(x, \gamma^{\vec{z}_2}) H_{\rho\gamma}(x, \gamma^{\vec{z}_3}) \\
&= -\epsilon^{\mu\nu\rho} \oint_{\gamma_i} dz_{1\alpha} \oint_{\gamma_j} dz_2^{\beta} \oint_{\gamma_k} dz_3^{\gamma} \int_{\gamma^{\vec{z}_1}} dy_1^{\delta} \int_{\gamma^{\vec{z}_2}} dy_2^{\lambda} \int_{\gamma^{\vec{z}_3}} dy_3^{\sigma} \epsilon_{\mu\alpha\delta} \epsilon_{\nu\beta\lambda} \epsilon_{\rho\gamma\sigma} \times \\
&\qquad \times \delta^{(3)}(y_2 - y_1) \delta^{(3)}(y_3 - y_1).
\end{aligned}
\tag{3.109}
$$

La expresión anterior cuenta el número de veces que que las superficies generadas por los haces de caminos abiertos $\gamma^{\vec{z_1}}$, $\gamma^{\vec{z_2}}$ y $\gamma^{\vec{z_3}}$ que finalizan en las trayectorias cerradas γ_i, γ_j y γ_k respectivamente, se cortan en un mismo punto. Ahora bien, como estamos considerando que los haces asociados a todas las trayectorias cerradas de las partículas son paralelos, este término siempre será nulo.

Ahora usemos el esquema de haces paralelos para verificar que el invariante $M_{i,j,k}$ puede describir perfectamente el anudamiento de los Anillos de Borromeo (vea Fig. 3.3):

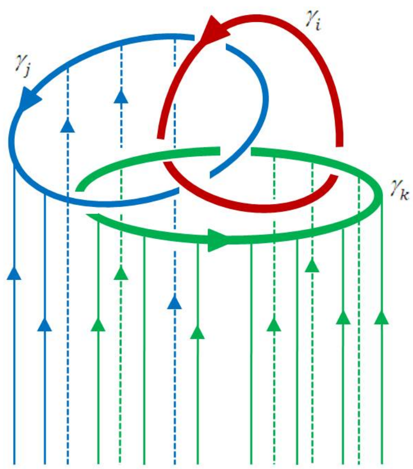

Figura 3.3: Esquema de haces de caminos paralelos para los Anillos de Borromeo

Vemos aquí que la curva γ_i corta primero al haz de curvas pegado a la trayectoria γ_k y luego al de caminos $\gamma^{\vec{z}_3}$ que finaliza en γ_j, tal cual como está descrito en (3.107).

3.6.3. Interpretación geométrica de $\mathbf{S}^{(2)}$

Hasta el momento hemos visto que la acción a orden cero $S^{(0)}$ está relacionada con el Número de Anudamiento de Gauss y que puede detectar el anudamiento de un link de dos componentes (Link de Hopf). También que el invariante a primer orden $S^{(1)}$ se encuentra relacionado con el Tercer Coeficiente de Milnor $M_{i,j,k}$ y puede describir de manera exacta el enlazamiento de un link de tres curvas cerradas (Anillos de Borromeo). Ahora veamos cómo el invariante a orden dos del desarrollo perturbativo de la acción *on-shell* para la teoría de Chern-Simons-Wong, puede describir el anudamiento de un link de 4 componentes y más aún, estamos estudiando si es posible que pueda detectar el anudamiento del Link de Whitehead, el cual es un nudo no trivial de dos componentes. Para este caso la expresión útil sería la ecuación (3.102), donde hemos particularizado la acción a segundo orden para el caso de sólo dos corrientes independientes.

Analicemos cada uno de los términos que involucra a $S^{(2)}$. Seguimos el mismo método de interpretación realizado para los invariantes $L(i,j)$ y $M(i,j,k)$. Comenzaremos por el último término de (3.96):

$$T_j^{\mu x ab} g_{ac} g_{bd} T_i^c T_k^d T_l^{\alpha y} g_{\mu x \alpha y} = T_j^{\mu_4 x_4 \mu_5 x_5 \mu_6 x_6} g_{\mu_5 x_5 \mu_1 x_1} g_{\mu_6 x_6 \mu_2 x_2} T_i^{\mu_1 x_1} T_k^{\mu_2 x_2} T_l^{\mu_3 x_3} \times \\ \times g_{\mu_4 x_4 \mu_3 x_3},$$

el cual se convierte en:

$$\begin{aligned}
-\oint_{\gamma_i} dz_1^{\mu_1} \oint_{\gamma_k} dz_2^{\mu_2} \oint_{\gamma_l} dz_3^{\mu_3} \oint_{\gamma_j} dz_4^{\mu_4} \int_0^{z_4} dz_5^{\mu_5} \int_0^{z_5} dz_6^{\mu_6} H_{\mu_5\mu_1}(z_5, \gamma^{\vec{z}_1}) H_{\mu_6\mu_2}(z_6, \gamma^{\vec{z}_2}) H_{\mu_4\mu_3}(z_4, \gamma^{\vec{z}_3}) \\
= \oint_{\gamma_i} dz_1^{\mu_1} \oint_{\gamma_k} dz_2^{\mu_2} \oint_{\gamma_l} dz_3^{\mu_3} \oint_{\gamma_j} dz_4^{\mu_4} \int_0^{z_4} dz_5^{\mu_5} \int_0^{z_5} dz_6^{\mu_6} \epsilon_{\mu_5\mu_1\alpha_1} \int_{\gamma^{\vec{z}_1}} dy_1^{\alpha_1} \delta^{(3)}(y_1 - z_5) \times \\
\times \epsilon_{\mu_6\mu_2\alpha_2} \int_{\gamma^{\vec{z}_2}} dy_2^{\alpha_2} \delta^{(3)}(y_2 - z_6) \epsilon_{\mu_4\mu_3\alpha_3} \int_{\gamma^{\vec{z}_3}} dy_3^{\alpha_3} \delta^{(3)}(y_3 - z_4).
\end{aligned} \tag{3.110}$$

La expresión anterior nos afirma que la curva γ_j debe cortar primero al haz asociado a la trayectoria γ_k ($\gamma^{\vec{z}_2}$), luego cortar en algún punto a $\gamma^{\vec{z}_1}$ que es el haz que termina en la trayectoria γ_i y por último, en ese orden, intersectar al haz que llega a la trayectoria γ_l ($\gamma^{\vec{z}_3}$) para que pueda detectar alguna contribución. Recordamos nuevamente que en cada corte los vectores considerados deben formar un volumen no degenerado y también que, una vez que la curva atraviesa el haz de caminos parelelos (en cualquier sentido) no deberá cruzarlo en sentido opuesto (contribuciones en sentido contrario se cancelan) para que este término sea distinto de cero.

A continuación analizaremos el segundo término entre llaves de la expresión (3.96):

$$\frac{3}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}T_j^{\alpha y\,,a}g_{\nu xb}g_{\rho xd}g_{ac}T_i^bT_k^cT_l^dg_{\mu x\,\alpha y} = \frac{3}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}T_j^{\mu_4x_4,\mu_5x_5}g_{\nu x\mu_1x_1}g_{\rho x\mu_2x_2}g_{\mu_5x_5\mu_3x_3} \times T_i^{\mu_1x_1}T_k^{\mu_3x_3}T_l^{\mu_2x_2}g_{\mu x\mu_4x_4}.$$

Por simplicidad vamos a tratarlos sin tomar en cuenta la antisimetrización de los índices presentes en las coordenadas bi-locales. Entonces este término toma la forma:

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\int d^3x\oint_{\gamma_i}dz_1^{\mu_1}\oint_{\gamma_l}dz_2^{\mu_2}\oint_{\gamma_k}dz_3^{\mu_3}\oint_{\gamma_j}dz_4^{\mu_4}\int_0^{z_4}dz_5^{\mu_5}H_{\nu\mu_1}(x,\gamma^{\vec{z}_1})H_{\rho\mu_2}(x,\gamma^{\vec{z}_2})\times\\
&\qquad\times H_{\mu_5\mu_3}(z_5,\gamma^{\vec{z}_3})H_{\mu\mu_4}(x,\gamma^{\vec{z}_4})\\
&=\frac{3}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\oint_{\gamma_i}dz_1^{\mu_1}\oint_{\gamma_l}dz_2^{\mu_2}\oint_{\gamma_k}dz_3^{\mu_3}\oint_{\gamma_j}dz_4^{\mu_4}\int_0^{z_4}dz_5^{\mu_5}\int_{\gamma^{\vec{z}_1}}dy_1^{\alpha_1}\int_{\gamma^{\vec{z}_2}}dy_2^{\alpha_2}\int_{\gamma^{\vec{z}_3}}dy_3^{\alpha_3}\int_{\gamma^{\vec{z}_4}}dy_4^{\alpha_4}\times\\
&\qquad\times\epsilon_{\nu\mu_1\alpha_1}\epsilon_{\rho\mu_2\alpha_2}\epsilon_{\mu_5\mu_3\alpha_3}\epsilon_{\mu\mu_4\alpha_4}\delta^{(3)}(y_1-y_2)\delta^{(3)}(y_1-y_4)\delta^{(3)}(y_3-z_5).
\end{aligned}\tag{3.111}$$

El término descrito por la ec. (3.111) puede ser distinto de cero si los haces de caminos paralelos $\gamma^{\vec{z}_1}$, $\gamma^{\vec{z}_2}$ y $\gamma^{\vec{z}_4}$ que terminan en γ_i, γ_l y γ_j respectivamente, se cortan en un mismo punto y adicionalmente que la curva γ_j tenga una intersección distinta de cero con el haz de caminos $\gamma^{\vec{z}_3}$ que finaliza en los puntos de la trayectoria γ_k.

Seguimos con el tercer término de (3.96):

$$\frac{3}{2}T_j^{b,\alpha y}T_i^{a,\,\mu x}g_{bc}g_{ad}T_k^cT_l^dg_{\mu x\,\alpha y} = \frac{3}{2}T_j^{\mu_3x_3\,\mu_4x_4}T_i^{\mu_1x_1\,\mu_2x_2}g_{\mu_3x_3\mu_5x_5}g_{\mu_1x_1\mu_6x_6}\times \times T_k^{\mu_5x_5}T_l^{\mu_6x_6}g_{\mu_2x_2\mu_4x_4},$$

que puede escribirse como:

$$\frac{3}{2}\oint_{\gamma_i} dz_1^{\mu_1}\int_0^{z_1} dz_2^{\mu_2}\oint_{\gamma_j} dz_3^{\mu_3}\int_0^{z_3} dz_4^{\mu_4}\oint_{\gamma_k} dz_5^{\mu_5}\oint_{\gamma_l} dz_6^{\mu_6} H_{\mu_3\mu_5}(z_3,\gamma^{\vec{z}_5})H_{\mu_1\mu_6}(z_1,\gamma^{\vec{z}_6})H_{\mu_2\mu_4}(z_2,\gamma^{\vec{z}_4})$$
$$= \frac{3}{2}\oint_{\gamma_i} dz_1^{\mu_1}\int_0^{z_1} dz_2^{\mu_2}\oint_{\gamma_j} dz_3^{\mu_3}\int_0^{z_3} dz_4^{\mu_4}\oint_{\gamma_k} dz_5^{\mu_5}\oint_{\gamma_l} dz_6^{\mu_6}\epsilon_{\mu_3\mu_5\alpha_1}\int_{\gamma^{\vec{z}_5}} dy_1^{\alpha_1}\delta^{(3)}(y_1-z_3)\times$$
$$\epsilon_{\mu_1\mu_6\alpha_2}\int_{\gamma^{\vec{z}_6}} dy_2^{\alpha_2}\delta^{(3)}(y_2-z_1)\epsilon_{\mu_2\mu_4\alpha_3}\int_{\gamma^{\vec{z}_4}} dy_3^{\alpha_3}\delta^{(3)}(y_3-z_2). \tag{3.112}$$

Para "contar" o contabilizar alguna contibución en este término debe suceder que la curva cerrada γ_i cruce ordenadamente primero a los caminos paralelos pertenecientes al haz $\gamma^{\vec{z}_4}$ que terminan en la trayectoria γ_j y luego debe intersectar en algún punto al haz de caminos $\gamma^{\vec{z}_6}$ los cuales finalizan en la curva asociada a la partícula l. Además para tener una contribución que no sea nula, la curva γ_j debe intersectar en algún punto al haz de caminos abiertos $\gamma^{\vec{z}_5}$ asociados a la trayectoria γ_k.

Por último, el primer término entre llaves de (3.96):

$$\frac{3}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}g_{\nu xa}g_{\rho xd}g_{\beta yb}g_{\gamma yc}T_i^aT_j^bT_k^cT_l^dg_{\mu x\alpha y} = \frac{3}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}g_{\nu x\mu_1x_1}g_{\rho x\mu_2x_2}g_{\beta y\mu_3x_3}g_{\gamma y\mu_4x_4}\times$$
$$\times T_i^{\mu_1x_1}T_j^{\mu_3x_3}T_k^{\mu_4x_4}T_l^{\mu_2x_2}g_{\mu x\alpha y},$$

se escribe por medio de

$$\frac{3}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\int d^3x\int d^3y\oint_{\gamma_i} dz_1^{\mu_1}\oint_{\gamma_l} dz_2^{\mu_2}\oint_{\gamma_j} dz_3^{\mu_3}\oint_{\gamma_k} dz_4^{\mu_4}H_{\nu\mu_1}(x,\gamma^{\vec{z}_1})\times$$
$$\times H_{\rho\mu_2}(x,\gamma^{\vec{z}_2})H_{\beta\mu_3}(y,\gamma^{\vec{z}_3})H_{\beta\mu_4}(y,\gamma^{\vec{z}_4})H_{\mu\alpha}(x,\gamma^{\vec{y}}), \tag{3.113}$$

que finalmente podemos escribir como:

$$\frac{3}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\oint_{\gamma_i} dz_1^{\mu_1}\oint_{\gamma_l} dz_2^{\mu_2}\oint_{\gamma_j} dz_3^{\mu_3}\oint_{\gamma_k} dz_4^{\mu_4}\epsilon_{\nu\mu_1\alpha_1}\epsilon_{\rho\mu_2\alpha_2}\epsilon_{\beta\mu_3\alpha_3}\epsilon_{\gamma\mu_4\alpha_4}\int_{\gamma^{\vec{z}_1}} dy_1^{\alpha_1}\times$$
$$\times\int_{\gamma^{\vec{z}_2}} dy_2^{\alpha_2}\int_{\gamma^{\vec{z}_3}} dy_3^{\alpha_3}\int_{\gamma^{\vec{z}_4}} dy_4^{\alpha_4}\delta^{(3)}(y_1-y_2)\delta^{(3)}(y_3-y_4)\epsilon_{\mu\alpha\alpha_5}\int_{\gamma^{\vec{y}_3}} dy_5^{\alpha_5}\delta^{(3)}(y_5-y_1). \tag{3.114}$$

En esta expresión podemos notar una característica diferente que no poseían a los otros términos y es que además de los haces asociados a cada una de las trayectorias de las partículas de Wong, tenemos un haz cuyos vectores tangentes $dy_5^{\alpha_5}$ comienzan en el infinito y termina en el haz de caminos $\gamma^{\vec{z}_3}$ y no tienen asociado trayectoria de partícula alguna, es decir, se encuentra "solo". La expresión (3.114) afirma que los haces $\gamma^{\vec{z}_1}$ y $\gamma^{\vec{z}_2}$ al igual que $\gamma^{\vec{z}_3}$ y $\gamma^{\vec{z}_4}$ deben coincidir y además el haz de caminos que se encuentra solo debe coincidir con los dos primeros y terminar cortando a los dos últimos.

En lo sucesivo veremos cómo el conjunto de términos de $S^{(2)}$ expuestos y analizados anteriormente, pueden detectar el anudamiento de un Link de 4 componentes (Fig. 3.4):

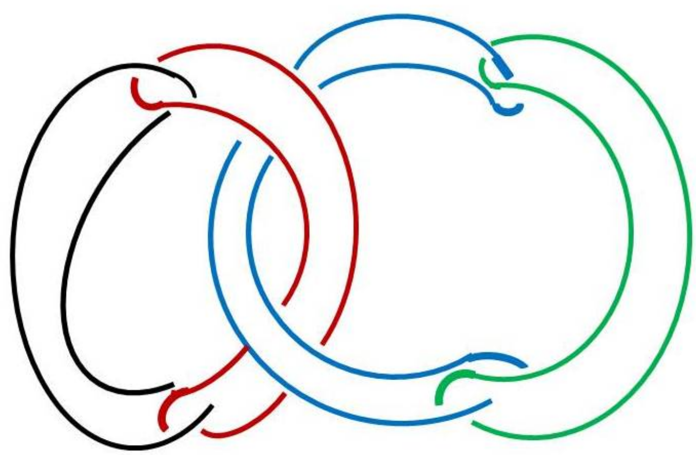

Figura 3.4: Link de cuatro-componentes

En primer lugar dibujaremos los haces de caminos paralelos asociados a las distintas trayectorias cerradas (Fig. 3.5). Esto nos permite poder realizar la interpretación geométrica del Link usando el esquema planteado en [14], que proporciona las herramientas necesarias para la interpretación.

Si observamos el caso mostrado por la Fig. 3.5 podemos argumentar que el último término de (3.96) descrito por la ec. (3.110) será nulo ya que ninguna de las curvas

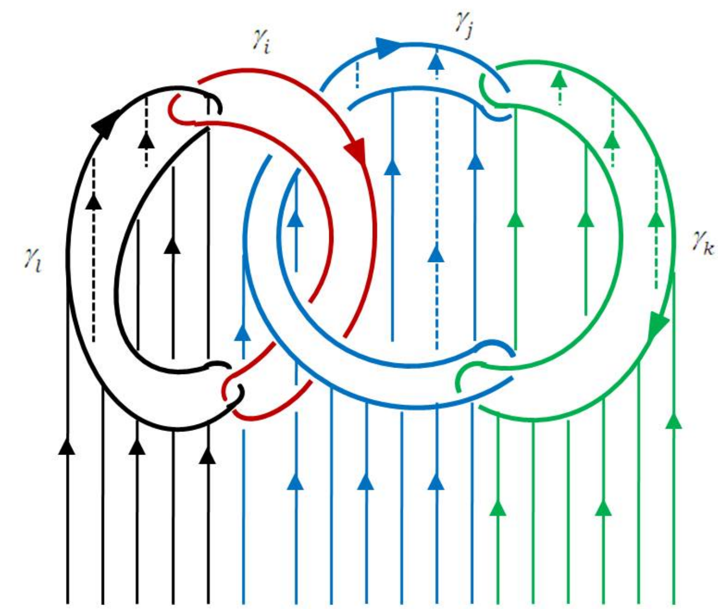

Figura 3.5: Esquema de haces asociados a las curvas cerradas para el Link de cuatro-componentes

.

cerradas, vea (Fig. 3.5), cortan sucesivamente a los haces de caminos abiertos asociados a las tres trayectorias restantes. El segundo término dado por la expresión (3.111) también se cancela porque nunca se cortan tres haces de caminos abiertos asociados a distintas trayectorias de Wong. De igual manera el primer término es nulo dado que ningun par de haces coinciden. El término que aporta una contribución distinta de cero es el tercero, ya que la curva γ_i corta primero el haz perteneciente a la curva γ_l, seguidamente se enlaza con la superficie generada por los haces paralelos de la curva γ_j y además hay un corte distinto de cero entre la curva γ_j y los haces paralelos de la curva cerrada γ_k. Finalmente, el invariante de link dado por la acción a orden dos aplicado al ejemplo de la Fig. 3.5 se escribe como:

$$S^{(2)} = \frac{3}{16} \sum_{i,j,k,l} \left(\left[\vec{I}_i \times \left(\vec{I}_j \times \vec{I}_k \right) \right] \cdot \vec{I}_l \right) \left(T_j^{[b,\alpha y]} T_i^{[a,\mu x]} g_{bc} g_{ad} T_k^c T_l^d g_{\mu x\, \alpha y} \right). \qquad (3.115)$$

La expresión anterior detecta que las curvas cerradas de la Fig. 3.5 se encuentran anudadas de manera no-trivial por medio del arreglo mostrado.

3.7. Forma Esquemática de Interpretación de los Invariantes

A continuación usaremos un formalismo introducido en [9,14] que permite obtener una interpretación de forma sistemática de los invariantes de nudo obtenidos anteriormente. Para ello es necesario escribir cada uno de los invariantes en términos de las cantidades $D_{i\mu x}$'s que representan las Superficies de Seifert [9] cuyo borde lo constituyen las curvas γ_i. Adicionalmente cada $g_{\mu x\, \alpha y}$, que es equivalente a $-H_{\mu\alpha}(x, \gamma^{\vec{y}})$, corresponde con un haz de caminos paralelos que terminan en una de las trayectorias seguidas por las partículas de Wong. Debe tomarse en consideración que los términos que involucren a los T-objetos de dos o más índices fijan el orden en que una curva intersecta a determinadas superficies o "haces". Este método nos permitirá obtener una "medida" cuantitativa del anudamiento del Link de cuatro componentes, resultado que no puede obtenerse considerando sólo las expresiones analíticas de la sección anterior.

Para implementar el método consideraremos el invariante $S^{(2)}$ dado por (3.96). Tomemos el último término de dicha expresión:

$$T_j^{e\,a\,b} g_{a\,c} g_{b\,d} T_i^c T_k^d T_l^f g_{e\,f} = T_j^{e\,a\,b} D_{i\,a} D_{k\,b} D_{l\,e}, \tag{3.116}$$

donde hemos usado $D_{i\mu x} = g_{\mu x\, \nu y} T_i^{\nu y}$. Este término involucra a las superficies de γ_i, γ_k y γ_l, ya que aparecen las cantidades $D_{i\,a}$, $D_{k\,b}$ y $D_{l\,e}$ respectivamente. También está presente el T-objeto de rango tres $T_j^{e\,a\,b}$ asociado a la curva γ_j, cuyos índices indican el orden en que γ_j debe cortar o intersectar a las superficies asociadas a las curvas mencionadas. Por lo tanto, este término puede interpretarse de la siguiente manera, la curva γ_j realiza tres cortes consecutivos y ordenados, en primer lugar intersecta a la superficie de γ_k, seguidamente a la superficie asociada a γ_i y por último a la superficie de γ_l. Esta interpretación está en concordancia con los resultados expresados por (3.110).

Ahora consideremos el segundo término de (3.96):

$$\frac{3}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}T_j^{\alpha y,\,a}g_{\nu x\,b}g_{\rho x\,d}g_{a\,c}T_i^bT_k^cT_l^dg_{\mu x\,\alpha y} = \frac{3}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}T_j^{\alpha y,\,a}D_{i\,\nu x}D_{l\,\rho x}D_{k\,a}g_{\mu x\,\alpha y} \tag{3.117}$$

En este término aparecen las superficies asociadas con las curvas γ_i, γ_l y γ_k que en virtud de $D_{i\mu x} = g_{\mu x\,\nu y}T_i^{\nu y} = -H_{\mu\nu}(x,\gamma^{\vec{y}})T_i^{\nu y}$ pueden entenderse de manera equivalente como el conjunto de "haces" paralelos que terminan en la curva correspondiente γ_i. El hecho de que las superficies $D_{i\,\nu x}$ y $D_{l\,\rho x}$ tienen en común el subíndice x representa que las mismas se cortan en un mismo punto. Además la combinación de los factores $g_{\mu x\,\alpha y}T_j^{\alpha y,\,a}$ indica que el haz asociado a la curva γ_j también se corta en el mismo punto que las superficies de γ_i y γ_l pero antes de que esto ocurra γ_j debe intersectar a la superficie de γ_k.
Podemos resumir la interpretación de este término como sigue, las superficies o haces de las curvas γ_i, γ_l y γ_j se cortan en un mismo punto. Además la curva γ_j intersecta en algún punto a la superficie asociada a γ_k.

Seguidamente, consideremos el tercer término de (3.96):

$$\frac{3}{2}T_j^{b,\,\alpha y}T_i^{a,\,\mu x}g_{b\,c}g_{a\,d}T_k^cT_l^dg_{\mu x\,\alpha y} = \frac{3}{2}T_j^{b,\,\alpha y}T_i^{a,\,\mu x}D_{k\,b}D_{l\,a}g_{\mu x\,\alpha y} \tag{3.118}$$

En virtud de la "destreza" adquirida para interpretar los términos anteriores, podemos leer la expresión (3.118) de la siguiente manera, la curva γ_i intersecta en primer lugar al haz (o superficie) de γ_j y seguidamente corta a la superficie de γ_l. Adicionalmente, cuando ocurre la intersección de γ_i con la superficie asociada a γ_j, esta última debe intersectar a la superficie de γ_k.

Por último, el primer término entre llaves de (3.96):

$$\frac{3}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}g_{\nu xa}g_{\rho xd}g_{\beta yb}g_{\gamma yc}T_i^aT_j^bT_k^cT_l^dg_{\mu x\alpha y} = \frac{3}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}D_{i\,\nu x}D_{l\,\rho x}D_{j\,\beta y}D_{k\,\gamma y}g_{\mu x\,\alpha y}. \tag{3.119}$$

En este término aparecen las superficies de γ_i y γ_l ($D_{i\,\nu x}$ y $D_{l\,\rho x}$) las cuales se cortan en un mismo punto. También las superficies $D_{j\,\beta y}$ y $D_{k\,\gamma y}$ asociadas a las curvas γ_j y γ_k se cortan en un mismo punto. Además el haz que no tiene asociado a ninguna partícula de Wong dado por $g_{\mu x\,\alpha y} = -H_{\mu\alpha}$, coincide con γ_i y γ_l y termina cortando a γ_j y γ_k.

Aplicaremos el análisis esquemático de interpretación al invariante de nudo que detecta el anudamiento no trivial del Link de cuatro componentes dado por la expresión (3.115). Para ello lo reescribiremos en términos de la cantidad $D_{i\mu x}$:

$$S^{(2)} \;=\; \frac{3}{16}\sum_{i,j,k,l}\left(\left[\vec{I}_i \times \left(\vec{I}_j \times \vec{I}_k\right)\right]\cdot \vec{I}_l\right)\left(T_j^{[b,\,\alpha y]}T_i^{[a,\,\mu x]}D_{k\,b}D_{l\,a}g_{\mu x\,\alpha y}\right). \quad (3.120)$$

Este invariante mide el número orientado de veces en que la curva γ_i intersecta en primer lugar al haz o (superficie) asociado a la curva γ_j y luego cruza al haz o superficie de γ_l. Adicionalmente, cuando ocurre la intersección de γ_i con la superficie asociada a γ_j, esta última debe intersectar a la superficie de γ_k. Si escribimos el invariante explícitamente:

$$S^{(2)} = \frac{3}{16}\sum_{i,j,k,l}\left(\left[\vec{I}_i \times \left(\vec{I}_j \times \vec{I}_k\right)\right]\cdot \vec{I}_l\right)\oint_{\gamma_i} dz_1^{\mu_1}\int_0^{z_1} dz_2^{\mu_2}\oint_{\gamma_j} dz_3^{\mu_3}\int_0^{z_3} dz_4^{\mu_4}\oint_{\gamma_k} dz_5^{\mu_5}\oint_{\gamma_l} dz_6^{\mu_6}\times$$
$$\times\epsilon_{\mu_3\mu_5\alpha_1}\int_{\gamma^{\vec{z}_5}} dy_1^{\alpha_1}\delta^{(3)}(y_1-z_3)\epsilon_{\mu_1\mu_6\alpha_2}\int_{\gamma^{\vec{z}_6}} dy_2^{\alpha_2}\delta^{(3)}(y_2-z_1)\epsilon_{\mu_2\mu_4\alpha_3}\int_{\gamma^{\vec{z}_4}} dy_3^{\alpha_3}\delta^{(3)}(y_3-z_2), \quad (3.121)$$

tenemos que en cada una de las intersecciones el volumen formado por los vectores dz^ν y dz^λ (los cuales son vectores tangentes a las trayectorias seguidas por las partículas de Wong), y el vector dy^α (que es el vector tangente a los haces de caminos paralelos introducidos en nuestro esquema de interpretación geométrica) debe ser distinto de cero. Para entenderlo de una manera más clara consideremos el producto de factores $\epsilon_{\mu_3\mu_5\alpha_1}dz_3^{\mu_3}dz_5^{\mu_5}dy_1^{\alpha_1}$ de la expresión (3.121), donde el vector $dz_3^{\mu_3}$ corresponde al vector tangente a la trayectoria γ_j, el vector $dz_5^{\mu_5}$ es el vector tangente a la trayectoria γ_k y $dy_1^{\alpha_1}$ es el vector tangente a los haces que terminan en la trayectoria γ_k. Por consiguiente este producto de factores determina el volumen formado por estos vectores cuando la curva γ_j intersecta a la curva γ_k. De manera similar, $\epsilon_{\mu_2\mu_4\alpha_3}dz_2^{\mu_2}dz_4^{\mu_4}dy_3^{\alpha_3}$ representa el volumen no degenerado cuando la curva γ_i intersecta a los haces asociados a γ_j. También tenemos que $\epsilon_{\mu_1\mu_6\alpha_2}dz_1^{\mu_1}dz_6^{\mu_6}dy_2^{\alpha_2}$ es el volumen formado por los vectores cuando γ_i intersecta a los haces de caminos paralelos asociado a la curva γ_l.

Observemos la Fig. 3.6 donde se muestra el número de "cortes" entre las curvas del Link de cuatro componentes, cada uno de estos "cortes" se dan entre las curvas γ_i y γ_l; γ_i y γ_j; γ_j y γ_k. En cada una de estas intersecciones podemos definir una "comunicación" como la unión de dos curvas a través del haz asociado a una de ellas. Si por ejemplo, para un corte dado las curvas no están unidas por el haz que viene desde el infinito entonces diremos que no están comunicadas. Esta definición nos permitirá considerar sólo las comunicaciones válidas para poder medir el anudamiento entre curvas.

Para que la expresión del invariante pueda detectar el anudamiento del Link de cuatro componentes deben ocurrir tres cortes consecutivos de forma ordenada, por tanto hay distintas maneras de combinar los 16 cortes de 3 en 3 para obtener un resultado distinto de cero. Calculemos el número de combinaciones totales para este número de cortes:

$$\begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{16!}{13!\,3!} = 560. \tag{3.122}$$

De la expresión anterior se obtiene que hay 560 maneras de combinar los 16 cortes de 3 en 3. Este número de combinaciones pueden disminuir analizando cuáles "cortes" o intersecciones no contribuyen debido a que no representan una "comunicación" entre curvas. Estos cortes son: 2, 3, 5, 6, 11 y 12. Por lo tanto, el número total de combinaciones se ve disminuido, resultando

$$\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120. \tag{3.123}$$

También se pueden eliminar dos cortes más considerando dónde "comienza" (realmente el haz viene desde el infinito pero sólo estamos considerando el tramo que conecta a

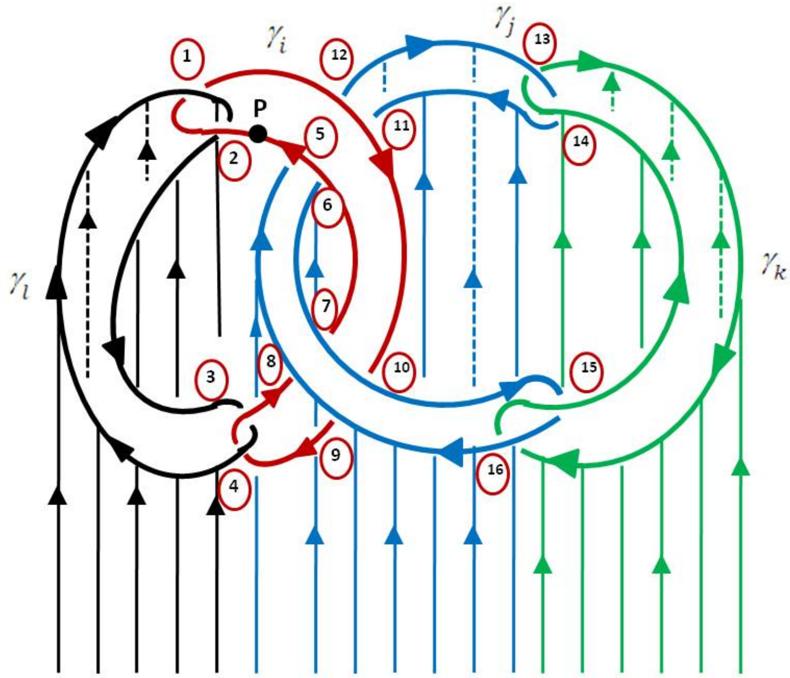

Figura 3.6: Fig. 3.6: Números de cortes en el Link de cuatro-componentes

.

las dos curvas) y dónde termina el haz en la "comunicación" que existe entre γ_j y γ_k. Analicemos el término entre paréntesis de (3.120) escrito en función de $H_{\mu\nu}$:

$$T_j^{b,\,\alpha y} T_i^{a,\,\mu x} T_k^f T_l^e H_{bf} H_{ae} H_{\mu x\,\alpha y},$$

en la expresión anterior el mencionado haz viene dado por H_{bf} y según el orden de sus índices (b y f), el haz "comienza" en γ_j y finaliza en γ_k. Entonces, γ_j debe estar por debajo de γ_k. Si observamos la figura (Fig. 3.6) tenemos cuatro "comunicaciones" entre γ_j y γ_k y vienen dadas por los números: 13, 14, 15 y 16. Sabemos de nuestro análisis de (3.120) que la curva γ_j es quien intersecta a la superficie o haz asociado a γ_k y eso ocurre en las "comunicaciones" 14 y 15. En las "comunicaciones" 13 y 16 la curva γ_j está por encima de la curva γ_k por lo tanto éstas comunicaciones no contribuyen.

Entonces, el número de "comunicaciones" válidas se reducen a 8:

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{8!}{5!\,3!} = 56. \tag{3.124}$$

En total nos quedan 56 formas de combinar las "comunicaciones" de 3 en 3. El orden en que deben ocurrir las "comunicaciones" reducirá en un número considerable las combinaciones posibles.

Como queremos establecer una forma de medida y poder cuantificar el anudamiento del Link de cuatro componentes a través del invariante dado por (3.120), usaremos la convención para el volumen no degenerado formado por los vectores dz^ν, dz^λ y dy^α dada por la Figura 3.7. Luego, mostraremos las combinaciones de intersecciones válidas ("comunicaciones") que contribuyen al invariante a través de los Diagramas Planares. El orden en que deben ocurrir las "comunicaciones" reducen las 56 combinaciones a sólo 4 que son distintas de cero.

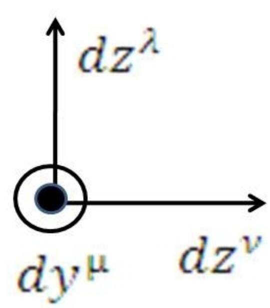

Figura 3.7: Fig. 3.7: Usaremos la convención $\epsilon_{\mu\nu\lambda} dz^\nu dz^\lambda dy^\mu = +1$

.

Tomemos como punto de partida para recorrer a la curva γ_i el punto de inicio mostrado en la Figura 3.6. Cada una de las curvas tienen un sentido de recorrido. Al iniciar el recorrido de la curva γ_i ésta debe "comunicarse" en primer lugar con la curva γ_j, seguidamente con la curva γ_l. Cuando ocurre la "comunicación" de γ_i con γ_j esta última debe "comunicarse" con la curva γ_k. De tal manera que la primera combinación no nula se logra combinando las "comunicaciones" 10, 4 y 15:

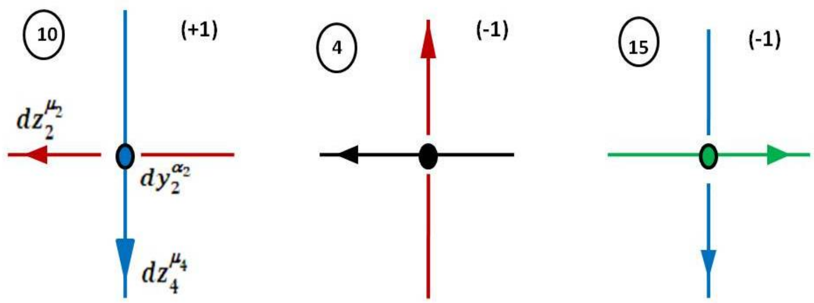

Figura 3.8: Diagrama Planar de los cruces 10, 4 y 15

.

En el Diagrama Planar dado en la figura (Fig. 3.8) se muestra las intersecciones de la curva γ_i (color rojo) primero con la curva γ_j (color azul) y luego con la curva γ_l (color negro). Finalmente se muestra la intersección de la curva γ_j con la curva γ_k (color verde). Usando el convenio establecido para el volumen, en cada cruce el volumen no degenerado formado por los vectores dz^ν, dz^λ y el vector dy^α son: $(+1)$, (-1) y (-1) respectivamente.

Para obtener el resultado cuantitativo para el anudamiento del Link de cuatro componentes reescribiremos el invariante dado por (3.121) como:

$$S^{(2)} = \frac{3}{16} \sum_{i,j,k,l} \left(\left[\vec{I}_i \times \left(\vec{I}_j \times \vec{I}_k \right) \right] \cdot \vec{I}_l \right) S_n, \tag{3.125}$$

con

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} S_i. \tag{3.126}$$

Donde n indica el número de combinaciones de intersecciones válidas entre curvas (trayectorias i, j, k y l) que contribuyen con el invariante. Entonces para la primera combinación dada por el Diagrama Planar de la Figura 3.8 tenemos que el producto de los volúmenes no degenerados resulta:

$$S_1 = \{(+1) \times (-1) \times (-1)\} = +1. \tag{3.127}$$

Luego sigue la combinación de intersecciones dadas por las "comunicaciones" 7, 1 y 15:

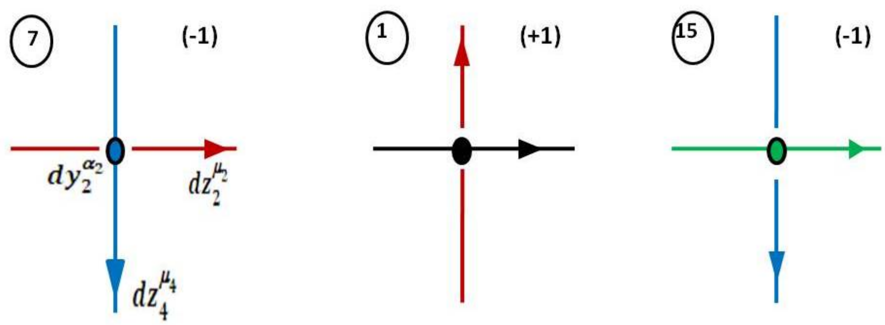

Figura 3.9: Diagrama Planar de los cruces 7, 1 y 15

.

$$S_2 = \{(-1) \times (+1) \times (-1)\} = +1. \tag{3.128}$$

La siguiente combinación de intersecciones que contribuyen con el invariante corresponde a las "comunicaciones" 8, 1 y 14. Calculando el producto de los volúmenes no degenerados para esta combinación, obtenemos:

$$S_3 = \{(+1) \times (+1) \times (+1)\} = +1. \tag{3.129}$$

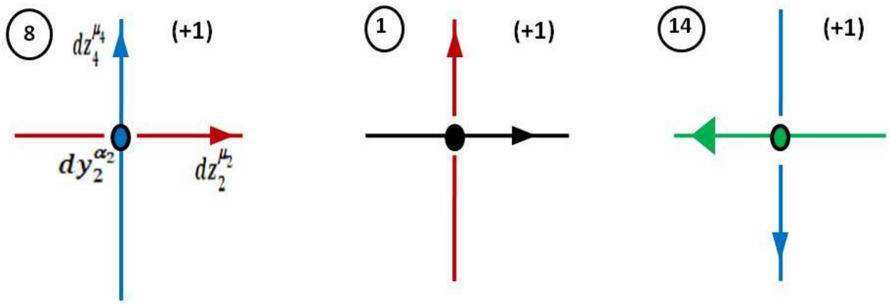

Figura 3.10: Diagrama Planar de los cruces 8, 1 y 14

.

La última combinación de intersecciones que contribuyen al invariante corresponde a las "comunicaciones" 9, 4 y 14. El producto de volúmenes no degerados formados en cada una de las tres intersecciones, resulta:

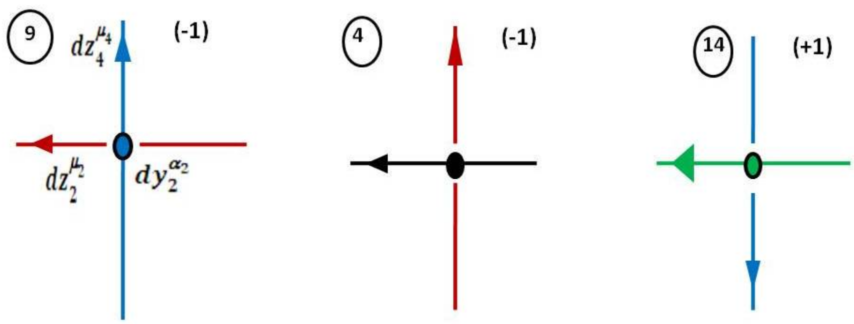

Figura 3.11: Diagrama Planar de los cruces 9, 4 y 14

.

$$S_4 = \{(-1) \times (-1) \times (+1)\} = +1. \tag{3.130}$$

Por último, realizando la suma de las combinaciones que contibuyen como se indica en (3.126), obtenemos:

$$S_n = (+1) + (+1) + (+1) + (+1) = +4. \tag{3.131}$$

Finalmente, al aplicar el invariante $S^{(2)}$ al Link de cuatro componentes obtenemos:

$$S^{(2)} = \frac{3}{16} \sum_{i,j,k,l} \left(\left[\vec{I}_i \times \left(\vec{I}_j \times \vec{I}_k \right) \right] \cdot \vec{I}_l \right) \times 4 = \frac{3}{4} \sum_{i,j,k,l} \left(\left[\vec{I}_i \times \left(\vec{I}_j \times \vec{I}_k \right) \right] \cdot \vec{I}_l \right). \quad (3.132)$$

Con este resultado podemos afirmar que el invariante dado por la acción a orden dos $S^{(2)}$ detecta el anudamiento dado por el Link de cuatro componentes mostrado en las figuras anteriores distinguiéndolo de cuatro curvas desanudadas.

En el siguiente capítulo usaremos todas las herramientas desarrolladas para realizar la interpretación geométrica del invariante dado por (3.102) y estudiaremos si el mismo puede enterarse del anudamiento del Link de Whitehead.

Capítulo 4

$S^{(2)}$: Link de Whitehead

En este capítulo emplearemos todas las herramientas desarrolladas anteriormente con el fin de estudiar si el invariante obtenido, para el caso particular de dos partículas de Wong con iso-cargas independientes, puede detectar y caracterizar al Link de Whitehead [17]. La motivación de este estudio surge del hecho de que Milnor [11] ubica al Link de Whitehead en la misma "categoría" del Link de cuatro componentes como nudos del mismo orden.

4.1. Interpretación geométrica de $S^{(2)}_{2-part.}$

Tomemos como punto de partida la expresión (3.102), que corresponde al invariante de nudo asociado a la acción $S^{(2)}$ para dos partículas independientes con iso-cargas ortonormales:

$$\begin{aligned} S^{(2)}_{2-part.} &= \frac{1}{8} g_{\mu x\, \alpha y} \Big[\frac{3}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} g_{\nu x\, a} g_{\rho x\, d} g_{\beta y\, b} g_{\gamma y\, c} \left(T_1^a T_1^c T_2^b T_2^d + T_1^b T_1^d T_2^a T_2^c \right) \\ &+ 3 \epsilon^{\mu\nu\rho} g_{\nu x\, b} g_{\rho x\, d} g_{ac} \left(T_1^b T_1^c T_2^d T_2^{[\alpha y, a]} + T_1^d T_2^c T_2^b T_1^{[\alpha y, a]} \right) \\ &- \frac{3}{2} g_{bc} g_{ad} T^c_{[1} T_{2]}^{[\alpha y, b]} T^d_{[2} T_{1]}^{[a, \mu x]} + 2 g_{ac} g_{bd} T^c_{[1} T_{2]}^{\alpha y} T^d_{[1} T_{2]}^{[\mu x, a] b} \Big]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

El objetivo es seguir el esquema planteado de interpretación geométrica para cada uno de los términos de $S^{(2)}_{2-part.}$ y luego determinar si este invariante puede "enterarse" del anudamiento del Link de Whitehead dado por la Figura 4.1.

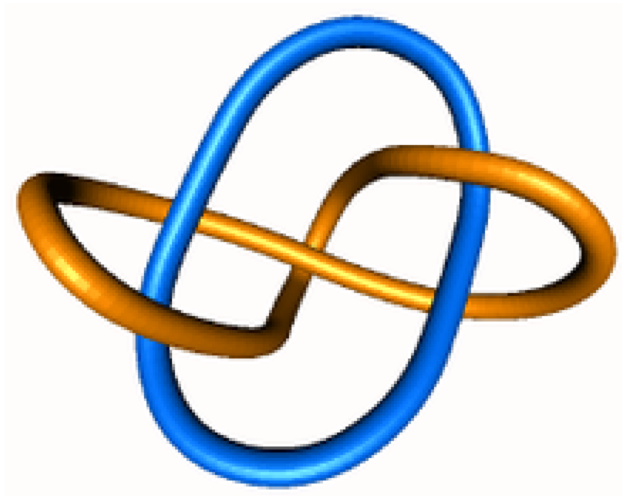

Figura 4.1: Fig. 4.1: Link de Whitehead

.

Consideremos de inmediato el primer término de (4.1), que podemos reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{3}{32} g_{\mu x\,\alpha y}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} g_{\nu x\,a} g_{\rho x\,d} g_{\beta y\,b} g_{\gamma y\,c} T_1^a T_1^c T_2^b T_2^d = \frac{3}{32}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} g_{\nu x\,\mu_1 x_1} g_{\rho x\,\mu_2 x_2} \times$$
$$\times g_{\beta y\,\mu_3 x_3} g_{\gamma y\,\mu_4 x_4} T_1^{\mu_1 x_1} T_1^{\mu_4 x_4} T_2^{\mu_3 x_3} T_2^{\mu_2 x_2} g_{\mu x\,\alpha y}$$

Sustituyendo la métrica $g_{\mu x\,\alpha y}$ por la dos forma $-H_{\mu\nu}(x,\gamma)$ y el factor de forma, obtenemos:

$$-\frac{3}{32}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\int d^3x \int d^3y \oint_{\gamma_1} dz_1^{\mu_1} \oint_{\gamma_1} dz_4^{\mu_4} \oint_{\gamma_2} dz_3^{\mu_3} \oint_{\gamma_2} dz_2^{\mu_2} H_{\nu\mu_1}(x,\gamma^{\vec{z}_1}) H_{\rho\mu_2}(x,\gamma^{\vec{z}_2}) \times$$
$$\times H_{\beta\mu_3}(y,\gamma^{\vec{z}_3}) H_{\gamma\mu_4}(y,\gamma^{\vec{z}_4}) H_{\mu\alpha}(x,\gamma^{\vec{y}})$$

$$= -\frac{3}{32}\epsilon^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\oint_{\gamma_1} dz_1^{\mu_1} \oint_{\gamma_1} dz_4^{\mu_4} \oint_{\gamma_2} dz_3^{\mu_3} \oint_{\gamma_2} dz_2^{\mu_2} \epsilon_{\nu\mu_1\alpha_1}\epsilon_{\rho\mu_2\alpha_2}\epsilon_{\beta\mu_3\alpha_3}\epsilon_{\gamma\mu_4\alpha_4}\int_{\gamma^{\vec{z}_1}} dy_1^{\alpha_1} \times$$
$$\times \int_{\gamma^{\vec{z}_2}} dy_2^{\alpha_2} \int_{\gamma^{\vec{z}_3}} dy_3^{\alpha_3} \int_{\gamma^{\vec{z}_4}} dy_4^{\alpha_4} \delta^{(3)}(y_1-y_2)\delta^{(3)}(y_3-y_4)\epsilon_{\mu\alpha\alpha_5}\int_{\gamma^{\vec{y}_3}} dy_5^{\alpha_5}\delta^{(3)}(y_1-y_5). \tag{4.2}$$

Al igual que en la discusión para la interpretación geométrica del Link de cuatro componentes en este término nos encontramos con un haz de caminos paralelos (cuyos vectores tangentes son $dy_5^{\alpha_5}$) que comienza en el infinito espacial y termina coincidiendo con el haz de caminos $\gamma^{\vec{z}_3}$. Este haz se encuentra "solo", es decir, no se encuentra asociado (por medio de los puntos finales) a ninguna trayectoria cerrada de las partículas de Wong. Entonces para que la ec.(4.2) pueda contar una contribución distinta de cero debe suceder que los haces de caminos paralelos $\gamma^{\vec{z}_1}$ y $\gamma^{\vec{z}_2}$ deben coincidir. Al igual debe suceder con los haces $\gamma^{\vec{z}_3}$ y $\gamma^{\vec{z}_4}$. Adicionalmente el haz de caminos que se encuentra solo debe coincidir con $\gamma^{\vec{z}_3}$ y $\gamma^{\vec{z}_4}$ y terminar cortando a $\gamma^{\vec{z}_1}$ y $\gamma^{\vec{z}_2}$.

Ahora pasemos a interpretar geométricamente el segundo término de la ec. (4.1), que viene dado por:

$$\frac{3}{32} g_{\mu x\ \alpha y} \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} g_{\nu x\ a} g_{\rho x\ d} g_{\beta y\ b} g_{\gamma y\ c} T_1^b T_1^d T_2^a T_2^c = \frac{3}{32} \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} g_{\nu x\ \mu_1 x_1} g_{\rho x\ \mu_2 x_2} \times \\ \times g_{\beta y\ \mu_3 x_3} g_{\gamma y\ \mu_4 x_4} T_1^{\mu_3 x_3} T_1^{\mu_2 x_2} T_2^{\mu_1 x_1} T_2^{\mu_4 x_4} g_{\mu x\ \alpha y}.$$

$$- \frac{3}{32} \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \int d^3x \int d^3y \oint_{\gamma_1} dz_3^{\mu_3} \oint_{\gamma_1} dz_2^{\mu_2} \oint_{\gamma_2} dz_1^{\mu_1} \oint_{\gamma_2} dz_4^{\mu_4} H_{\nu\mu_1}(x, \gamma^{\vec{z}_1}) H_{\rho\mu_2}(x, \gamma^{\vec{z}_2}) \times \\ \times H_{\beta\mu_3}(y, \gamma^{\vec{z}_3}) H_{\gamma\mu_4}(y, \gamma^{\vec{z}_4}) H_{\mu\alpha}(x, \gamma^{\vec{y}})$$

$$= - \frac{3}{32} \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \oint_{\gamma_1} dz_3^{\mu_3} \oint_{\gamma_1} dz_2^{\mu_2} \oint_{\gamma_2} dz_1^{\mu_1} \oint_{\gamma_2} dz_4^{\mu_4} \epsilon_{\nu\mu_1\alpha_1} \epsilon_{\rho\mu_2\alpha_2} \epsilon_{\beta\mu_3\alpha_3} \epsilon_{\gamma\mu_4\alpha_4} \int_{\gamma^{\vec{z}_1}} dy_1^{\alpha_1} \times \\ \times \int_{\gamma^{\vec{z}_2}} dy_2^{\alpha_2} \int_{\gamma^{\vec{z}_3}} dy_3^{\alpha_3} \int_{\gamma^{\vec{z}_4}} dy_4^{\alpha_4} \delta^{(3)}(y_1 - y_2) \delta^{(3)}(y_3 - y_4) \epsilon_{\mu\alpha\alpha_5} \int_{\gamma^{\vec{y}_3}} dy_5^{\alpha_5} \delta^{(3)}(y_1 - y_5). \tag{4.3}$$

La intepretación de este término es similar al anterior. Para que sea distinto de cero debe ocurrrir que los haces de caminos paralelos $\gamma^{\vec{z}_1}$ y $\gamma^{\vec{z}_2}$ coincidan. Al igual debe suceder con los haces $\gamma^{\vec{z}_3}$ y $\gamma^{\vec{z}_4}$. Además el haz que se encuentra solo debe coincidir con los dos últimos ($\gamma^{\vec{z}_3}$ y $\gamma^{\vec{z}_4}$) y terminar cortando a los dos primeros ($\gamma^{\vec{z}_1}$ y $\gamma^{\vec{z}_2}$).

A continuación analizaremos el tercer término entre corchetes del lado derecho de la expresión (4.1). Por simplicidad no tomaremos en cuenta la antisimetrización de los índices presentes en las coordenadas bi-locales. Entonces este término:

$$\frac{3}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho} g_{\nu x\,b} g_{\rho x\,d} g_{ac} T_1^b T_1^c T_2^d T_2^{\alpha y,\,a} g_{\mu x\,\alpha y} = \frac{3}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho} g_{\nu x\,\mu_1 x_1} g_{\rho x\,\mu_3 x_3} g_{\mu_5 x_5\,\mu_2 x_2} T_1^{\mu_1 x_1} T_1^{\mu_2 x_2} \times T_2^{\mu_3 x_3} T_2^{\mu_4 x_4,\,\mu_5 x_5} g_{\mu x\,\mu_4 x_4}$$

y sustituyendo al igual que antes la dos forma $H_{\mu\nu_3}(x,\gamma^{\vec{z}})$ se obtiene:

$$= -\frac{3}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho} \oint_{\gamma_1} dz_1^{\mu_1} \oint_{\gamma_1} dz_2^{\mu_2} \oint_{\gamma_2} dz_3^{\mu_3} \oint_{\gamma_2} dz_4^{\mu_4} \int_0^{z_4} dz_5^{\mu_5} \int_{\gamma^{\vec{z}_1}} dy_1^{\alpha_1} \int_{\gamma^{\vec{z}_2}} dy_2^{\alpha_2} \int_{\gamma^{\vec{z}_3}} dy_3^{\alpha_3} \int_{\gamma^{\vec{z}_4}} dy_4^{\alpha_4} \epsilon_{\nu\mu_1\alpha_1}\epsilon_{\mu_5\mu_2\alpha_2}\epsilon_{\rho\mu_3\alpha_3}\epsilon_{\mu\mu_4\alpha_4}\delta^{(3)}(y_1-y_3)\delta^{(3)}(y_2-z_5)\delta^{(3)}(y_1-y_4). \tag{4.4}$$

Para que el término descrito por la última expresión detecte alguna contribución debe suceder que los haces de caminos paralelos $\gamma^{\vec{z}_1}$, $\gamma^{\vec{z}_3}$ y $\gamma^{\vec{z}_4}$, que se encuentran asociados a las trayectorias γ_1, γ_2 y γ_2 respectivamente deben cortarse en un mismo punto y además la curva γ_2 debe tener una intersección distinta de cero con el haz $\gamma^{\vec{z}_2}$ que está asociado a la trayectoria cerrada γ_1. Adicionalmente, en cada punto donde se intersecten los haces y las curvas, los vectores involucrados deben formar un volumen no degenerado.

Ahora analizamos el cuarto término dado por:

$$\frac{3}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho} g_{\nu x\,b} g_{\rho x\,d} g_{ac} T_1^d T_2^c T_2^b T_2^{\alpha y,\,a} g_{\mu x\,\alpha y} = \frac{3}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho} g_{\nu x\,\mu_3 x_3} g_{\rho x\,\mu_1 x_1} g_{\mu_5 x_5\,\mu_2 x_2} T_1^{\mu_1 x_1} T_2^{\mu_2 x_2} \times T_2^{\mu_3 x_3} T_1^{\mu_4 x_4,\,\mu_5 x_5} g_{\mu x\,\mu_4 x_4}$$

$$= \frac{3}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho} \int d^3x \int d^3y \oint_{\gamma_1} dz_1^{\mu_1} \oint_{\gamma_2} dz_2^{\mu_2} \oint_{\gamma_2} dz_3^{\mu_3} \oint_{\gamma_1} dz_4^{\mu_4} \int_0^{z_4} dz_5^{\mu_5} H_{\nu\mu_3}(x,\gamma^{\vec{z}_3}) H_{\rho\mu_1}(x,\gamma^{\vec{z}_1}) \times \times H_{\mu_5\mu_2}(z_5,\gamma^{\vec{z}_2}) H_{\mu\mu_4}(x,\gamma^{\vec{z}_4})$$

$$= -\frac{3}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho} \oint_{\gamma_1} dz_1^{\mu} \oint_{\gamma_2} dz_2^{\mu_2} \oint_{\gamma_2} dz_3^{\mu_3} \oint_{\gamma_1} dz_4^{\mu_4} \int_0^{z_4} dz_5^{\mu_5} \int_{\gamma^{\vec{z}_1}} dy_1^{\alpha_1} \int_{\gamma^{\vec{z}_2}} dy_2^{\alpha_2} \int_{\gamma^{\vec{z}_3}} dy_3^{\alpha_3} \int_{\gamma^{\vec{z}_4}} dy_4^{\alpha_4} \epsilon_{\rho\mu_1\alpha_1}\epsilon_{\mu_5\mu_2\alpha_2}\epsilon_{\nu\mu_3\alpha_3}\epsilon_{\mu\mu_4\alpha_4}\delta^{(3)}(y_1-y_3)\delta^{(3)}(y_2-z_5)\delta^{(3)}(y_1-y_4). \tag{4.5}$$

El análisis de la expresión anterior es muy similar al realizado para la ecuación (4.4) ya que este término contará una contribución si los haces de caminos paralelos $\gamma^{\vec{z}_1}$,

$\gamma^{\vec{z}_3}$ y la curva $\gamma^{\vec{z}_4}$, que se encuentran asociados a las trayectorias γ_1, γ_2 y γ_1 respectivamente deben cortarse en un mismo punto y también que la curva γ_1 debe tener una intersección distinta de cero con el haz $\gamma^{\vec{z}_2}$ que está asociado a la trayectoria cerrada γ_2.

El quinto término de (4.1) lo podemos descomponer de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{16} g_{bc} g_{ad} T^{c}_{[1} T^{[\alpha y,\, b]}_{2]} T^{d}_{[2} T^{[a,\, \mu x]}_{1]} g_{\mu x\, \alpha y} &= \frac{3}{16} T^{[b,\, \alpha y]}_{2} T^{[a, \mu x]}_{1} g_{bc} g_{ad} T^{c}_{1} T^{d}_{2} g_{\mu x\, \alpha y} && (4.6)\\ &+ \frac{3}{16} T^{[b,\, \alpha y]}_{1} T^{[a,\, \mu x]}_{2} g_{bc} g_{ad} T^{c}_{2} T^{d}_{1} g_{\mu x\, \alpha y} && (4.7)\\ &- \frac{3}{16} T^{[b,\, \alpha y]}_{1} T^{[a,\, \mu x]}_{1} g_{bc} g_{ad} T^{c}_{2} T^{d}_{2} g_{\mu x\, \alpha y} && (4.8)\\ &- \frac{3}{16} T^{[b,\, \alpha y]}_{2} T^{[a,\, \mu x]}_{2} g_{bc} g_{ad} T^{c}_{1} T^{d}_{1} g_{\mu x\, \alpha y}. && (4.9) \end{aligned}$$

Para realizar la interpretación geométrica de este término analizaremos cada uno de los términos de la derecha dados por (4.6), (4.7), (4.8) y (4.9). Comenzamos analizando el término (4.6), por simplicidad no consideraremos la antisimetrización de los índices de los objetos bi-locales:

$$\frac{3}{16} T^{b,\, \alpha y}_{2} T^{a,\, \mu x}_{1} g_{bc} g_{ad} T^{c}_{1} T^{d}_{2} g_{\mu x\, \alpha y} = \frac{3}{16} g_{\mu_4 x_4\, \mu_2 x_2} T^{\mu_1 x_1,\, \mu_2 x_2}_{2} T^{\mu_3 x_3,\, \mu_4 x_4}_{1} g_{\mu_1 x_1\, \mu_5 x_5} g_{\mu_3 x_3\, \mu_6 x_6} \times \\ \times T^{\mu_5 x_5}_{1} T^{\mu_6 x_6}_{2}.$$

Al sustituir las coordenadas de caminos de uno y dos índices y la métrica $g_{\mu x\, \nu y}$ por $-H_{\mu\nu}(x, \gamma^{\vec{y}})$, obtenemos:

$$-\frac{3}{16} \oint_{\gamma_2} dz_1^{\mu_1} \int_0^{z_1} dz_2^{\mu_2} \oint_{\gamma_1} dz_3^{\mu_3} \int_0^{z_3} dz_4^{\mu_4} \oint_{\gamma_1} dz_5^{\mu_5} \oint_{\gamma_2} dz_6^{\mu_6} H_{\mu_1\mu_5}(z_1, \gamma^{\vec{z}_5}) H_{\mu_3\mu_6}(z_3, \gamma^{\vec{z}_6}) \times \\ \times H_{\mu_4\mu_2}(z_4, \gamma^{\vec{z}_2})$$

$$= \frac{3}{16} \oint_{\gamma_2} dz_1^{\mu_1} \int_0^{z_1} dz_2^{\mu_2} \oint_{\gamma_1} dz_3^{\mu_3} \int_0^{z_3} dz_4^{\mu_4} \oint_{\gamma_1} dz_5^{\mu_5} \oint_{\gamma_2} dz_6^{\mu_6} \epsilon_{\mu_1\mu_5\alpha_1} \int_{\gamma^{\vec{z}_5}} dy_1^{\alpha_1} \delta^{(3)}(y_1 - z_1) \times \\ \times \epsilon_{\mu_3\mu_6\alpha_3} \int_{\gamma^{\vec{z}_6}} dy_3^{\alpha_3} \delta^{(3)}(y_3 - z_3) \epsilon_{\mu_4\mu_2\alpha_2} \int_{\gamma^{\vec{z}_2}} dy_2^{\alpha_2} \delta^{(3)}(y_2 - z_4). \tag{4.10}$$

De esta expresión podemos argumentar que para contar alguna contribución debe suceder que la trayectoria cerrada γ_1 cruce ordenadamente primero a los caminos paralelos $\gamma^{\vec{z}_2}$ que terminan en la trayectoria γ_2 y luego debe intersectar en algún punto a los caminos que pertenecen a $\gamma^{\vec{z}_6}$ y que finalizan en la curva asociada a la partícula 2. Entonces lo anterior describe que γ_1 debe hacer dos cortes sucesivos al haz de la curva γ_2. De la misma forma, para contar una contribución que no sea nula, debe suceder que la curva γ_2 intersecte en algún punto al haz de caminos $\gamma^{\vec{z}_5}$ asociados a la trayectoria γ_1. Y en cada corte los vectores involucrados deben formar un volumen no degenerado.

Ahora esturiaremos el término (4.7):

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{16} T_1^{b,\,\alpha y} T_2^{a,\,\mu x} g_{bc} g_{ad} T_2^c T_1^d g_{\mu x\, \alpha y} &= \frac{3}{16} g_{\mu_4 x_4\, \mu_2 x_2} T_1^{\mu_1 x_1,\, \mu_2 x_2} T_2^{\mu_3 x_3,\, \mu_4 x_4} g_{\mu_1 x_1\, \mu_5 x_5} g_{\mu_3 x_3\, \mu_6 x_6} \times \\
&\qquad \times T_2^{\mu_5 x_5} T_1^{\mu_6 x_6} \\
&= -\frac{3}{16} \oint_{\gamma_1} dz_1^{\mu_1} \int_0^{z_1} dz_2^{\mu_2} \oint_{\gamma_2} dz_3^{\mu_3} \int_0^{z_3} dz_4^{\mu_4} \oint_{\gamma_2} dz_5^{\mu_5} \oint_{\gamma_1} dz_6^{\mu_6} H_{\mu_1\mu_5}(z_1, \gamma^{\vec{z}_5}) H_{\mu_3\mu_6}(z_3, \gamma^{\vec{z}_6}) \times \\
&\qquad \times H_{\mu_4\mu_2}(z_4, \gamma^{\vec{z}_2}) \\
&= \frac{3}{16} \oint_{\gamma_1} dz_1^{\mu_1} \int_0^{z_1} dz_2^{\mu_2} \oint_{\gamma_2} dz_3^{\mu_3} \int_0^{z_3} dz_4^{\mu_4} \oint_{\gamma_2} dz_5^{\mu_5} \oint_{\gamma_1} dz_6^{\mu_6} \epsilon_{\mu_1\mu_5\alpha_1} \int_{\gamma^{\vec{z}_5}} dy_1^{\alpha_1} \delta^{(3)}(y_1 - z_1) \times \\
&\qquad \times \epsilon_{\mu_3\mu_6\alpha_3} \int_{\gamma^{\vec{z}_6}} dy_3^{\alpha_3} \delta^{(3)}(y_3 - z_3) \epsilon_{\mu_4\mu_2\alpha_2} \int_{\gamma^{\vec{z}_2}} dy_2^{\alpha_2} \delta^{(3)}(y_2 - z_4).
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

El análisis de este término es similar al anterior siendo ahora la curva γ_2 la que debe realizar dos cortes sucesivos a los haces asociados a la trayectotia γ_1. Primero debe cortar al haz $\gamma^{\vec{z}_2}$ y luego en algún punto al haz $\gamma^{\vec{z}_6}$. Adicionalmente la curva γ_1 debe cortar en algún punto al haz de caminos paralelos y abiertos $\gamma^{\vec{z}_5}$ que terminan en γ_2, si es que queremos que este término en particular detecte alguna contribución.

Ahora consideremos el término (4.8), que reescribremos de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
-\frac{3}{16} T_1^{b,\,\alpha y} T_1^{a,\,\mu x} g_{bc} g_{ad} T_2^c T_2^d g_{\mu x\, \alpha y} &= -\frac{3}{16} g_{\mu_4 x_4\, \mu_2 x_2} T_1^{\mu_1 x_1,\, \mu_2 x_2} T_1^{\mu_3 x_3,\, \mu_4 x_4} g_{\mu_1 x_1\, \mu_5 x_5} g_{\mu_3 x_3\, \mu_6 x_6} \times \\
&\qquad \times T_2^{\mu_5 x_5} T_2^{\mu_6 x_6}
\end{aligned}
$$

$$\frac{3}{16}\oint_{\gamma_1} dz_1^{\mu_1}\int_0^{z_1} dz_2^{\mu_2}\oint_{\gamma_1} dz_3^{\mu_3}\int_0^{z_3} dz_4^{\mu_4}\oint_{\gamma_2} dz_5^{\mu_5}\oint_{\gamma_2} dz_6^{\mu_6} H_{\mu_1\mu_5}(z_1,\gamma^{\vec{z}_5})H_{\mu_3\mu_6}(z_3,\gamma^{\vec{z}_6})\times$$
$$\times H_{\mu_4\mu_2}(z_4,\gamma^{\vec{z}_2})$$

$$= -\frac{3}{16}\oint_{\gamma_1} dz_1^{\mu_1}\int_0^{z_1} dz_2^{\mu_2}\oint_{\gamma_1} dz_3^{\mu_3}\int_0^{z_3} dz_4^{\mu_4}\oint_{\gamma_2} dz_5^{\mu_5}\oint_{\gamma_2} dz_6^{\mu_6}\epsilon_{\mu_1\mu_5\alpha_1}\int_{\gamma^{\vec{z}_5}} dy_1^{\alpha_1}\delta^{(3)}(y_1-z_1)\times$$
$$\times\epsilon_{\mu_3\mu_6\alpha_3}\int_{\gamma^{\vec{z}_6}} dy_3^{\alpha_3}\delta^{(3)}(y_3-z_3)\epsilon_{\mu_4\mu_2\alpha_2}\int_{\gamma^{\vec{z}_2}} dy_2^{\alpha_2}\delta^{(3)}(y_2-z_4). \tag{4.12}$$

Observamos en la expresión anterior que para contabilizar una contribución distinta de cero, debe ocurrir que la curva asociada a la partícula de Wong γ_1 debe cruzar ordenadamente primero al haz de caminos paralelos $\gamma^{\vec{z}_2}$ asociado consigo misma, luego cortar en algún punto a los caminos del haz $\gamma^{\vec{z}_6}$ que finaliza en la trayectoria γ_2. Finalmente cruzar al haz $\gamma^{\vec{z}_5}$ que también esta asociado a la trayectoria γ_2. Y en todas las intersecciones los vectores involucrados deben formar volumenes no degenerados. Por último el término (4.9) pasa a ser:

$$-\frac{3}{16}T_2^{b,\,\alpha y}T_2^{a,\,\mu x}g_{bc}g_{ad}T_1^cT_1^d g_{\mu x\,\alpha y} = -\frac{3}{16}g_{\mu_4x_4\,\mu_2x_2}T_2^{\mu_1x_1,\,\mu_2x_2}T_2^{\mu_3x_3,\,\mu_4x_4}g_{\mu_1x_1\,\mu_5x_5}g_{\mu_3x_3\,\mu_6x_6}\times$$
$$\times T_1^{\mu_5x_5}T_1^{\mu_6x_6}.$$

Al sustituir las coordenadas de caminos de uno y dos índices y la métrica $g_{\mu x\,\nu y}$ por $-H_{\mu\nu}(x,\gamma^{\vec{y}})$, obtenemos:

$$\frac{3}{16}\oint_{\gamma_2} dz_1^{\mu_1}\int_0^{z_1} dz_2^{\mu_2}\oint_{\gamma_2} dz_3^{\mu_3}\int_0^{z_3} dz_4^{\mu_4}\oint_{\gamma_1} dz_5^{\mu_5}\oint_{\gamma_1} dz_6^{\mu_6} H_{\mu_1\mu_5}(z_1,\gamma^{\vec{z}_5})H_{\mu_3\mu_6}(z_3,\gamma^{\vec{z}_6})\times$$
$$\times H_{\mu_4\mu_2}(z_4,\gamma^{\vec{z}_2})$$

$$= -\frac{3}{16}\oint_{\gamma_2} dz_1^{\mu_1}\int_0^{z_1} dz_2^{\mu_2}\oint_{\gamma_2} dz_3^{\mu_3}\int_0^{z_3} dz_4^{\mu_4}\oint_{\gamma_1} dz_5^{\mu_5}\oint_{\gamma_1} dz_6^{\mu_6}\epsilon_{\mu_1\mu_5\alpha_1}\int_{\gamma^{\vec{z}_5}} dy_1^{\alpha_1}\delta^{(3)}(y_1-z_1)\times$$
$$\times\epsilon_{\mu_3\mu_6\alpha_3}\int_{\gamma^{\vec{z}_6}} dy_3^{\alpha_3}\delta^{(3)}(y_3-z_3)\epsilon_{\mu_4\mu_2\alpha_2}\int_{\gamma^{\vec{z}_2}} dy_2^{\alpha_2}\delta^{(3)}(y_2-z_4). \tag{4.13}$$

Para que el término descrito por la última expresión detecte alguna contribución debe ocurrir que la curva cerrada γ_2 cruce ordenadamente primero al haz de caminos paralelos $\gamma^{\vec{z}_2}$ asociado consigo misma, luego cortar en algún punto a los caminos paralelos

$\gamma^{\vec{z}_6}$ que terminan en γ_1. Finalmente debe realizar un corte al haz de caminos abiertos y paralelos $\gamma^{\vec{z}_5}$ que terminan en la trayectoria de la partícula γ_1.

Ahora continuamos nuestro análisis para el último término de (4.1), que se puede descomponer de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}g_{ac}g_{bd}T_1^cT_2^{\alpha y}T_{[1}^dT_{2]}^{[\mu x,\, a]b}g_{\mu x\,\alpha y} &= \frac{1}{8}T_2^{[\mu x, a]b}g_{ac}g_{bd}T_1^cT_1^dT_2^{\alpha y}g_{\mu x\,\alpha y} && (4.14)\\
&+ \frac{1}{8}T_1^{[\mu x,\, a]b}g_{ac}g_{bd}T_2^cT_2^dT_1^{\alpha y}g_{\mu x\,\alpha y} && (4.15)\\
&- \frac{1}{8}T_1^{[\mu x,\, a]b}g_{ac}g_{bd}T_1^cT_2^dT_2^{\alpha y}g_{\mu x\,\alpha y} && (4.16)\\
&- \frac{1}{8}T_2^{[\mu x,\, a]b}g_{ac}g_{bd}T_2^cT_1^dT_1^{\alpha y}g_{\mu x\,\alpha y}. && (4.17)
\end{aligned}$$

Para analizar este término estudiaremos cada uno de sus componentes dados por (4.14), (4.15), (4.16) y (4.17). Consideremos el término (4.14), que puede ser reescrito de la siguiente manera

$$\frac{1}{8}T_2^{\mu x\, a\, b}g_{ac}g_{bd}T_1^cT_1^dT_2^{\alpha y}g_{\mu x\,\alpha y} = \frac{1}{8}T_2^{\mu_1 x_1\;\mu_2 x_2\;\mu_3 x_3}T_1^{\mu_4 x_4}T_1^{\mu_5 x_5}T_2^{\mu_6 x_6}\times$$
$$\times g_{\mu_2 x_2\;\mu_4 x_4}g_{\mu_3 x_3\;\mu_5 x_5}g_{\mu_1 x_1\;\mu_6 x_6}.$$

Al sustituir las coordenadas de caminos de uno y tres índices y $g_{\mu x\,\nu y} = -H_{\mu\nu}(x,\gamma^{\vec{y}})$ obtenemos:

$$-\frac{1}{8}\oint_{\gamma_2}dz_1^{\mu_1}\int_0^{z_1}dz_2^{\mu_2}\int_0^{z_2}dz_3^{\mu_3}\oint_{\gamma_1}dz_4^{\mu_4}\oint_{\gamma_1}dz_5^{\mu_5}\oint_{\gamma_2}dz_6^{\mu_6}H_{\mu_2\mu_4}(z_2,\gamma^{\vec{z}_4})H_{\mu_3\mu_5}(z_3,\gamma^{\vec{z}_5})\times$$
$$\times H_{\mu_1\mu_6}(z_1,\gamma^{\vec{z}_6}),$$

si ahora sustituimos la dos formas $H_{\mu\nu}(x,\gamma^{\vec{y}})$:

$$\frac{1}{8}\oint_{\gamma_2}dz_1^{\mu_1}\int_0^{z_1}dz_2^{\mu_2}\int_0^{z_2}dz_3^{\mu_3}\oint_{\gamma_1}dz_4^{\mu_4}\oint_{\gamma_1}dz_5^{\mu_5}\oint_{\gamma_2}dz_6^{\mu_6}\epsilon_{\mu_1\mu_6\alpha_1}\int_{\gamma^{\vec{z}_6}}dy_1^{\alpha_1}\delta^{(3)}(y_1-z_1)\times$$
$$\times\epsilon_{\mu_2\mu_4\alpha_2}\int_{\gamma^{\vec{z}_4}}dy_2^{\alpha_2}\delta^{(3)}(y_2-z_2)\epsilon_{\mu_3\mu_5\alpha_3}\int_{\gamma^{\vec{z}_5}}dy_3^{\alpha_3}\delta^{(3)}(y_3-z_3). \tag{4.18}$$

La expresión (4.18) muestra que para que detecte alguna contribución debe suceder que la trayectoria cerrada γ_2 cruce ordenadamente primero a los caminos paralelos

pertenecientes al haz $\gamma^{\vec{z}_5}$ que termina en la trayectoria γ_1 y luego debe intersectar en algún punto a los caminos que pertenecen a $\gamma^{\vec{z}_4}$ y que finalizan nuevamente en la curva γ_1. Finalmente debe realizar un corte al haz de caminos paralelos $\gamma^{\vec{z}_6}$ que terminan en la propia curva γ_2.
Con un procedimiento similar para la obtención del término (4.14) se obtienen los tres términos restantes. El término (4.15) viene dado por:

$$\frac{1}{8}T_1^{\mu x\,a\,b}g_{ac}g_{bd}T_2^cT_2^dT_1^{\alpha y}g_{\mu x\,\alpha y} = \frac{1}{8}T_1^{\mu_1x_1\;\mu_2x_2\;\mu_3x_3}T_2^{\mu_4x_4}T_2^{\mu_5x_5}T_1^{\mu_6x_6}\times$$
$$\times g_{\mu_2x_2\;\mu_4x_4}g_{\mu_3x_3\;\mu_5x_5}g_{\mu_1x_1\;\mu_6x_6},$$

$$= \frac{1}{8}\oint_{\gamma_1}dz_1^{\mu_1}\int_0^{z_1}dz_2^{\mu_2}\int_0^{z_2}dz_3^{\mu_3}\oint_{\gamma_2}dz_4^{\mu_4}\oint_{\gamma_2}dz_5^{\mu_5}\oint_{\gamma_1}dz_6^{\mu_6}\epsilon_{\mu_1\mu_6\alpha_1}\int_{\gamma^{\vec{z}_6}}dy_1^{\alpha_1}\delta^{(3)}(y_1-z_1)\times$$
$$\times\epsilon_{\mu_2\mu_4\alpha_2}\int_{\gamma^{\vec{z}_4}}dy_2^{\alpha_2}\delta^{(3)}(y_2-z_2)\epsilon_{\mu_3\mu_5\alpha_3}\int_{\gamma^{\vec{z}_5}}dy_3^{\alpha_3}\delta^{(3)}(y_3-z_3). \tag{4.19}$$

De esta expresión podemos argumentar que para contabilizar alguna contribución debe suceder que la trayectoria cerrada γ_1 cruce ordenadamente primero a los caminos paralelos pertenecientes al haz $\gamma^{\vec{z}_5}$ que terminan en la trayectoria γ_2 y luego debe intersectar en algún punto al haz de caminos paralelos $\gamma^{\vec{z}_4}$ que también están asociados a γ_2. Quiere decir que γ_1 debe realizar dos cortes sucesivos no nulos sobre el haz de caminos asociado a γ_2. Seguidamente γ_1 debe realizar una intersección con el haz $\gamma^{\vec{z}_6}$ que terminan en la propia curva γ_1.

Ahora realizaremos la interpretación geométrica de (4.16), que viene dado por:

$$-\frac{1}{8}T_1^{\mu x\,a\,b}g_{ac}g_{bd}T_1^cT_2^dT_2^{\alpha y}g_{\mu x\,\alpha y} = -\frac{1}{8}T_1^{\mu_1x_1\;\mu_2x_2\;\mu_3x_3}T_1^{\mu_4x_4}T_2^{\mu_5x_5}T_2^{\mu_6x_6}\times$$
$$\times g_{\mu_2x_2\;\mu_4x_4}g_{\mu_3x_3\;\mu_5x_5}g_{\mu_1x_1\;\mu_6x_6}$$

$$= -\frac{1}{8}\oint_{\gamma_1}dz_1^{\mu_1}\int_0^{z_1}dz_2^{\mu_2}\int_0^{z_2}dz_3^{\mu_3}\oint_{\gamma_1}dz_4^{\mu_4}\oint_{\gamma_2}dz_5^{\mu_5}\oint_{\gamma_2}dz_6^{\mu_6}\epsilon_{\mu_1\mu_6\alpha_1}\int_{\gamma^{\vec{z}_6}}dy_1^{\alpha_1}\delta^{(3)}(y_1-z_1)\times$$
$$\times\epsilon_{\mu_2\mu_4\alpha_2}\int_{\gamma^{\vec{z}_4}}dy_2^{\alpha_2}\delta^{(3)}(y_2-z_2)\epsilon_{\mu_3\mu_5\alpha_3}\int_{\gamma^{\vec{z}_5}}dy_3^{\alpha_3}\delta^{(3)}(y_3-z_3). \tag{4.20}$$

La expresión (4.20) nos afirma que la curva γ_1 debe cortar primero, en ese orden, al haz asociado a la trayectoria γ_2 ($\gamma^{\vec{z}_5}$), luego intersectar en algún punto a los caminos paralelos de $\gamma^{\vec{z}_4}$ que terminan en si misma. Finalmente cortar al haz $\gamma^{\vec{z}_6}$ asociado con la trayectoria de la partícula de Wong número 2.

Llegamos de esta manera a la interpretación geométrica del último término, que corresponde a (4.17):

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{8}T_2^{\mu x\, a\, b} g_{ac} g_{bd} T_2^c T_1^d T_1^{\alpha y} g_{\mu x\, \alpha y} = -\frac{1}{8} T_2^{\mu_1 x_1\, \mu_2 x_2\, \mu_3 x_3} T_2^{\mu_4 x_4} T_1^{\mu_5 x_5} T_1^{\mu_6 x_6} \times \\
\times g_{\mu_2 x_2\, \mu_4 x_4} g_{\mu_3 x_3\, \mu_5 x_5} g_{\mu_1 x_1\, \mu_6 x_6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= -\frac{1}{8} \oint_{\gamma_2} dz_2^{\mu_1} \int_0^{z_1} dz_2^{\mu_2} \int_0^{z_2} dz_3^{\mu_3} \oint_{\gamma_2} dz_4^{\mu_4} \oint_{\gamma_1} dz_5^{\mu_5} \oint_{\gamma_1} dz_6^{\mu_6} \epsilon_{\mu_1 \mu_6 \alpha_1} \int_{\gamma^{\vec{z}_6}} dy_1^{\alpha_1} \delta^{(3)}(y_1 - z_1) \times \\
\times \epsilon_{\mu_2 \mu_4 \alpha_2} \int_{\gamma^{\vec{z}_4}} dy_2^{\alpha_2} \delta^{(3)}(y_2 - z_2) \epsilon_{\mu_3 \mu_5 \alpha_3} \int_{\gamma^{\vec{z}_5}} dy_3^{\alpha_3} \delta^{(3)}(y_3 - z_3).
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

La expresión (4.21) muestra que para contar alguna contribución debe suceder que la trayectoria cerrada γ_2 cruce ordenadamente primero a los caminos paralelos pertenecientes al haz $\gamma^{\vec{z}_5}$ que termina en la trayectoria γ_1 y luego debe intersectar en algún punto a los caminos que pertenecen a $\gamma^{\vec{z}_4}$ y que finalizan en la propia curva γ_2. Finalmente debe realizar un corte al haz de caminos paralelos $\gamma^{\vec{z}_6}$ que terminan en la curva γ_1. En cada uno de estos cortes debe suceder que los vectores involucrados deben formar volúmenes no degenerados.

Hemos explicado qué debe suceder con cada término que compone al invariante dado por $S^{(2)}_{2-part.}$ para que cuente o detecte alguna contribución que no sea nula. En la próxima sección analizaremos si todos los componentes anteriores pueden describir el anudamiento del Link de Whitehead.

4.2. Interpretación geométrica del Link de Whitehead

En esta sección estudiaremos si el anudamiento del Link de Whitehead puede describirse a través del invariante $S^{(2)}_{2-part.}$. Para realizar este análisis nos apoyaremos en los resultados obtenidos en la sección previa y en la forma esquemática de interpretación introducida en la sección 3.5 del capítulo 3.

Para comenzar procedamos a introducir debidamente en el dibujo de la Fig. 4.1 los haces de caminos paralelos asociadas a las dos trayectorias cerradas, vea la Fig. 4.2. De esta manera seguiremos el esquema planteado de interpretación geométrica aplicando las expresiones de los términos que componen a $S^{(2)}_{2-part.}$ al anudamiento de Whitehead.

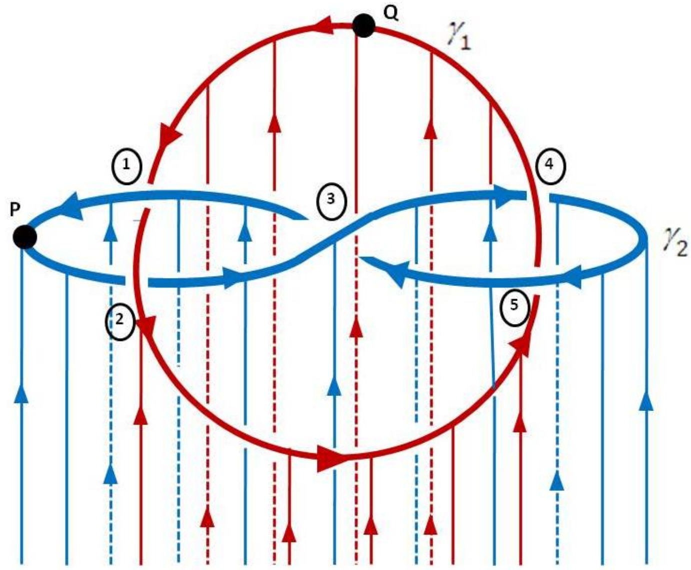

Figura 4.2: Esquema de haces asociados para el Link de Whitehead

.

Observando la Fig. 4.2 podemos decir que el primer término del invariante dado por la expresión (4.2) es nulo debido a que los productos vectoriales de los vectores tangentes involucrados en las intersecciones de los haces de caminos paralelos se degeneran. De igual manera, ocurre con el segundo término de (4.1) dado por la expresión (4.3). También tenemos que el tercer y cuarto término, expresiones (4.4) y (4.5), son nulos porque nunca (en la Fig. 4.2) se cortan los haces de caminos abiertos asociados a las dos curvas para el Link de Whitehead.
Por lo tanto, los términos que pueden ser distintos de cero para la Fig. 4.2 son los términos quinto y sexto de (4.1). Entonces el invariante $S^{(2)}_{2-part}$ puede escribirse como:

$$S^{(2)}_{2-part} = S_5 + S_6, \tag{4.22}$$

donde $S_5 = \sum_{i=1}^{4} S_{5i}$ y $S_6 = \sum_{j=1}^{4} S_{6j}$ corresponden a la suma de los componentes del quinto y sexto término respectivamente.

Al igual que para el Link de cuatro componentes estamos interesados en cuantificar el anudamiento del Link de Whitehead y de esta manera determinar si el invariante $S^{(2)}_{2-part}$ puede medir dicho anudamiento. Con este fin hemos enumerado cada uno de las intersecciones válidas o "comunicaciones" entre las curvas γ_1 (de color rojo) y γ_2 (de color azul). También usaremos la convención del volumen formado por los vectores dz^ν, dz^λ y dy^α en cada una de las intersecciones dada por la Figura 3.7.

A continuación apliquemos el quinto término de (4.1) al esquema de haces mostrado en la Fig.4.2. Para facilitar el análisis, escribiremos cada uno de los componentes de este término en función de las cantidades $D_{i\mu x}$ y de esta manera complementar la interpretación geométrica de cada uno de ellos usando la forma esquemática de interpretación discutida en la sección (3.5). Entonces, el término (4.6) lo podemos reescribir:

$$\frac{3}{16} T_2^{b,\,\alpha y} T_1^{a,\,\mu x} g_{bc} g_{ad} T_1^c T_2^d g_{\mu x\,\alpha y} = \frac{3}{16} T_2^{b,\,\alpha y} T_1^{a,\,\mu x} D_{1\,b} D_{2\,a} g_{\mu x\,\alpha y}. \tag{4.23}$$

Esta expresión nos indica que la curva γ_1 debe "comunicarse" dos veces seguidas con la curva γ_2 y además justo cuando γ_1 realiza la primera "comunicación" con γ_2, esta última "comunicarse" con γ_1 en algún punto. Por otra parte, la expresión para (4.14) dada por las integrales:

$$\frac{3}{16}\oint_{\gamma_2} dz_1^{\mu_1}\int_0^{z_1} dz_2^{\mu_2}\oint_{\gamma_1} dz_3^{\mu_3}\int_0^{z_3} dz_4^{\mu_4}\oint_{\gamma_1} dz_5^{\mu_5}\oint_{\gamma_2} dz_6^{\mu_6}\epsilon_{\mu_1\mu_5\alpha_1}\int_{\gamma^{\vec{z}_5}} dy_1^{\alpha_1}\delta^{(3)}(y_1 - z_1)\times$$
$$\times\epsilon_{\mu_3\mu_6\alpha_3}\int_{\gamma^{\vec{z}_6}} dy_3^{\alpha_3}\delta^{(3)}(y_3 - z_3)\epsilon_{\mu_4\mu_2\alpha_2}\int_{\gamma^{\vec{z}_2}} dy_2^{\alpha_2}\delta^{(3)}(y_2 - z_4), \tag{4.24}$$

nos dice que en cada intersección los volúmenes $\epsilon_{\mu_4\mu_2\alpha_2}dz_4^{\mu_4}dz_2^{\mu_2}dy_2^{\alpha_2}$, $\epsilon_{\mu_3\mu_6\alpha_3}dz_3^{\mu_3}dz_6^{\mu_6}dy_3^{\alpha_3}$ y $\epsilon_{\mu_1\mu_5\alpha_1}dz_1^{\mu_1}dz_5^{\mu_5}dy_1^{\alpha_1}$ deben ser no degenerados para contar una contribución distinta de cero.

Como el término (4.14) involucra tres "comunicaciones" ordenadas podemos calcular el número de combinaciones posibles para que dicho término cuente una contribución. Hay 5 cortes mostrados en la figura (Fig. 4.2), los cuales podemos combinar de 3 en 3. El número total de combinaciones resulta:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{5!}{2!\ 3!} = 10. \tag{4.25}$$

Entonces tenemos 10 maneras de escoger los 5 "comunicaciones" de 3 en 3. Podemos eliminar las "comunicaciones" que no contribuyen para este término, sería la número 3 ya que representa la intersección de γ_2 con los haces asociados consigo misma. Entonces el número de combinaciones se reduce a:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{4!}{1!\ 3!} = 4. \tag{4.26}$$

Es posible que este resultado se vea disminuido en virtud del orden en que debe ocurrir las "comunicaciones".

Veamos la Fig. 4.2 y tomaremos como punto de partida para recorrer a la curva γ_1, el punto Q. Al iniciar el recorrido de la curva γ_1 ésta debe intersectar en primer lugar a los haces asociados a γ_2, seguidamente cruzar nuevamente a los haces asociados a la curva γ_2. Cuando ocurre la primera intersección de γ_1 con los haces de γ_2 esta última debe intersectar a los haces asociados a γ_1. De tal manera que la única combinación no nula se logra combinando las "comunicaciones" 1, 5 y 2, mostrados en el Diagrama Planar de la Fig.4.3:

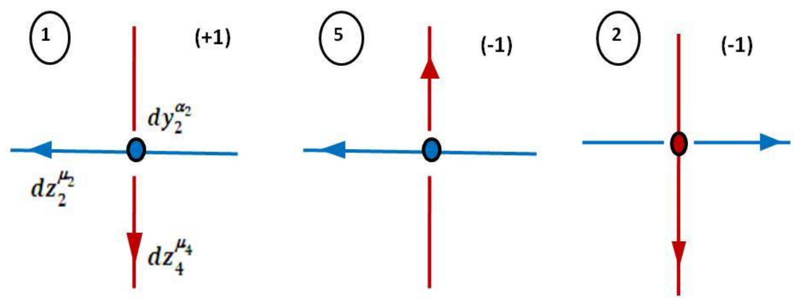

Figura 4.3: Diagrama Planar de los cruces 1, 5 y 2

.

Usando el convenio establecido para el volumen, en cada cruce el volumen no degenerado formado por los vectores $dz_2^{\mu_2}$, $dz_4^{\mu_4}$ y el vector $dy_2^{\alpha_2}$ son: $(+1)$, (-1) y (-1) respectivamente. Entonces para esta combinación tenemos que el producto de los volúmenes no degenerados resulta:

$$S_{51} = \frac{3}{16}\left\{(+1)\times(-1)\times(-1)\right\} = \frac{3}{16}(+1) = \frac{3}{16}. \tag{4.27}$$

Seguimos con el siguiente término dado por (4.7) que podemos reescribir:

$$\frac{3}{16}T_1^{b,\,\alpha y}T_2^{a,\,\mu x}g_{bc}g_{ad}T_2^{c}T_1^{d}g_{\mu x\,\alpha y} = \frac{3}{16}T_1^{b,\,\alpha y}T_2^{a,\,\mu x}D_{2\,b}D_{1\,a}g_{\mu x\,\alpha y}. \tag{4.28}$$

Leemos de esta expresión que la curva γ_2 cruza dos veces seguidas a los haces (o superficie) de γ_1. Además, justo cuando γ_2 realiza el primer "corte" al haz de γ_1 ésta intersecta al haz de γ_2 en algún punto. Existe una única combinación para que este término sea distinto de cero. La misma viene dada por las "comunicaciones" 2, 4 y 5 (vea Fig. 4.5).

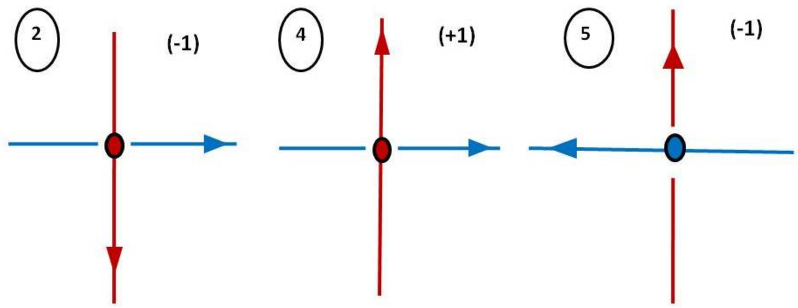

Figura 4.4: Diagrama Planar de los cruces 2, 4 y 5

.

Calculando el producto de los volúmenes formados por los vectores dz^{ν}, dz^{λ} y dy^{α} involucrados en cada intersección, obtenemos:

$$S_{52} = \frac{3}{16}\{(-1)\times(+1)\times(-1)\} = \frac{3}{16}(+1) = \frac{3}{16}. \tag{4.29}$$

Continuemos con el término (4.8), que rescribiremos usando la cantidad $D_{i\,\mu x}$:

$$-\frac{3}{16}T_1^{b,\,\alpha y}T_1^{a,\,\mu x}g_{bc}g_{ad}T_2^{c}T_2^{d}g_{\mu x\,\alpha y} = -\frac{3}{16}T_1^{b,\,\alpha y}T_1^{a,\,\mu x}D_{2\,b}D_{2\,a}g_{\mu x\,\alpha y} \tag{4.30}$$

Este término es distinto de cero si la curva γ_1 intersecta en primer lugar a los haces asociados consigo misma, luego realiza dos cortes seguidos a la superficie (o haz) de γ_2. Este término es directamente igual a cero porque según la Fig. 4.2 la curva γ_1 (de color rojo) nunca intersecta a los haces asociados consigo misma.

Nos queda por evaluar el último componente del quinto término sobre el esquema de haces paralelos del Link de Whitehead que corresponde a (4.9):

$$-\frac{3}{16}T_2^{b,\,\alpha y}T_2^{a,\,\mu x}g_{bc}g_{ad}T_1^{c}T_1^{d}g_{\mu x\,\alpha y} = -\frac{3}{16}T_2^{b,\,\alpha y}T_2^{a,\,\mu x}D_{1\,b}D_{1\,a}g_{\mu x\,\alpha y}. \tag{4.31}$$

Este término describe que la curva γ_2 debe intersectar ordenadamente a los haces asociados consigo misma y luego dos veces seguidas a los haces de γ_1. Observando la Fig. 4.2 e iniciando el recorrido de la curva γ_2 en el punto P, tenemos que existe una combinación distinta de cero para este término. La misma está dada por las "comunicaciones" 3, 2 y 4.

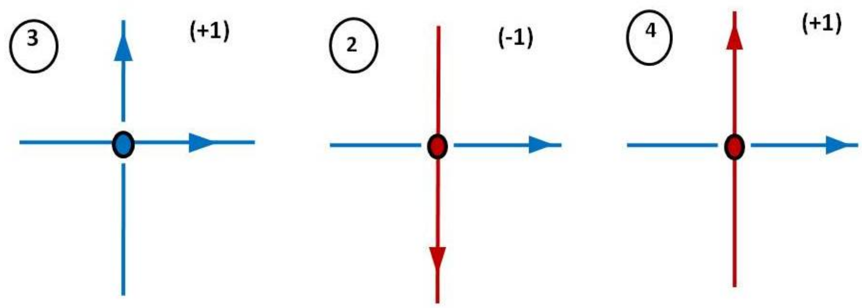

Figura 4.5: Diagrama Planar de los cruces 3, 2 y 4

.

En el Diagrama Planar dado en la Fig. 4.7 se muestra las "comunicaciones" de la curva γ_2 (color azul) primero consigo misma y luego las dos "comunicaciones" consecutivas con γ_1 (color rojo). Usando el convenio establecido para el volumen, en cada cruce el volumen no degenerado formado por los vectores dz^ν, dz^λ y el vector dy^α son: $(+1)$, (-1) y $(+1)$ respectivamente.

Por lo tanto, para esta combinación el producto de los volúmenes no degenerados resulta:

$$S_{54} = -\frac{3}{16}\{(+1)\times(-1)\times(+1)\} = -\frac{3}{16}(-1) = \frac{3}{16}. \tag{4.32}$$

Estos resultados nos permiten determinar S_5:

$$S_5 = \sum_{i=a}^{d} S_{5i} = S_{51} + S_{52} + S_{53} + S_{54} = \left(\frac{3}{16}\right) + \left(\frac{3}{16}\right) + (0) + \left(\frac{3}{16}\right) = \frac{9}{16} \tag{4.33}$$

Este resultado nos muestra que el quinto término del invariante $S^{(2)}_{2-part}$ detecta el anudamiento del Link de Whitehead. Ahora nos queda por determinar si el sexto término puede detectar dicho anudamiento y si no produce un resultado análogo pero de signo contrario que cancele la contribución del quinto término diremos que $S^{(2)}_{2-part}$ puede medir y caracterizar el anudamiento no trivial del Link de Whitehead.

Estudiemos ahora si el sexto término de (4.1) puede detectar el anudamiento de Whitehead. Comencemos aplicando el término (4.14) al esquema de haces de la Fig. 4.2. Escribiendo dicho término en función de la cantidad $D_{i\,\mu x}$, obtenemos:

$$\frac{1}{8}T_2^{\mu x\,a\,b}g_{ac}g_{bd}T_1^cT_1^dT_2^{\alpha y}g_{\mu x\,\alpha y} = \frac{1}{8}T_2^{\mu x\,a\,b}D_{2\,\mu x}D_{1\,a}D_{1\,b} \tag{4.34}$$

Esta expresión nos indica que la curva γ_2 debe realizar tres intersecciones válidas ordenadas, primero a la superficie (o haz) de γ_1, luego vuelve a intersectar a la superficie (o haz) de γ_1 y por último a la superficie asociada consigo misma. El número de combinaciones posibles para que este término sea distinto de cero viene dado por:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10. \tag{4.35}$$

Si eliminamos las "comunicaciones" 1 y 5 ya que no contribuyen a este término (estos corresponden a las intersecciones de la curva γ_1 con los haces de γ_2), el número de combinaciones se reduce a:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{3!}{0!\,3!} = 1. \tag{4.36}$$

Por lo tanto, tenemos sólo una combinación posible para que este término pueda contribuir con el invariante. De hecho, esta combinación viene dada por las "comunicaciones" 2, 4 y 3:

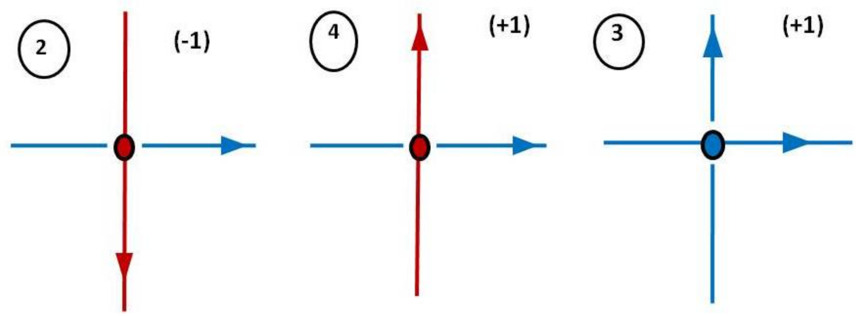

Figura 4.6: Diagrama Planar de los cruces 2, 4 y 3

.

En este diagrama se muestra las tres intersecciones y en cada una de ellas se forman volúmenes no degenerados entre los vectotes dz^{μ}, dz^{ν} y dy^{α} como lo exige la expresión para (4.14) dada por:

$$= \frac{1}{8}\oint_{\gamma_2} dz_1^{\mu_1}\int_0^{z_1} dz_2^{\mu_2}\int_0^{z_2} dz_3^{\mu_3}\oint_{\gamma_1} dz_4^{\mu_4}\oint_{\gamma_1} dz_5^{\mu_5}\oint_{\gamma_2} dz_6^{\mu_6}\epsilon_{\mu_1\mu_6\alpha_1}\int_{\gamma^{\vec{z}_6}} dy_1^{\alpha_1}\delta^{(3)}(y_1 - z_1)\times$$
$$\times\epsilon_{\mu_2\mu_4\alpha_2}\int_{\gamma^{\vec{z}_4}} dy_2^{\alpha_2}\delta^{(3)}(y_2 - z_2)\epsilon_{\mu_3\mu_5\alpha_3}\int_{\gamma^{\vec{z}_5}} dy_3^{\alpha_3}\delta^{(3)}(y_3 - z_3). \tag{4.37}$$

Por lo tanto, para esta combinación el producto de volúmenes no degenerados resulta:

$$S_{61} = \frac{1}{8}\{(-1)\times(+1)\times(+1)\} = \frac{1}{8}(-1) = -\frac{1}{8}. \tag{4.38}$$

Analicemos ahora que sucede al aplicar el término (4.15) al esquema de haces de la Fig. 4.2. Para ello, complementemos el análisis usando la forma esquemática de interpretación:

$$\frac{1}{8}T_1^{\mu x\, a\, b} g_{ac} g_{bd} T_2^c T_2^d T_1^{\alpha y} g_{\mu x\, \alpha y} = \frac{1}{8}T_1^{\mu x\, a\, b} D_{1\,\mu x} D_{2\,a} D_{2\,b} \tag{4.39}$$

Leemos de esta expresión que la curva γ_1 debe “comunicarse” dos veces seguidas con la curva γ_2, y por último consigo misma. Observando la Fig. 4.2 vemos que la curva γ_1 nunca se “comunica” consigo misma. Por lo tanto, este término es directamente igual a cero.

Del mismo modo, el término (4.16) puede escribirse en función de la cantidad $D_{i\,\mu x}$ como:

$$-\frac{1}{8}T_1^{\mu x\,a\,b}g_{ac}g_{bd}T_1^cT_2^dT_2^{\alpha y}g_{\mu x\,\alpha y} = -\frac{1}{8}T_1^{\mu x\,a\,b}D_{2\,\mu x}D_{1\,a}D_{2\,b} \tag{4.40}$$

De la expresión anterior podemos argumentar que la curva γ_1 debe intersectar ordenadamente en primer lugar a la superficie asociada a γ_2, luego a la superficie asociada consigo misma y por último a la superficie de γ_2. Como este término involucra nuevamente la "comunicación" de γ_1 consigo misma es nulo.

Finalmente, analicemos el término (4.17) sobre el esquema de haces paralelos del Link de Whitehead. Usemos nuevamente la forma esquemática de interpretación:

$$-\frac{1}{8}T_2^{\mu x\,a\,b}g_{ac}g_{bd}T_2^cT_1^dT_1^{\alpha y}g_{\mu x\,\alpha y} = -\frac{1}{8}T_2^{\mu x\,a\,b}D_{1\,\mu x}D_{2\,a}D_{1\,b} \tag{4.41}$$

Esta expresión indica que la curva γ_2 debe intersectar en primer lugar a la superficie (o haces) de γ_1, luego al haz asociado consigo misma y finalmente al haz asociado a γ_1. Para este término existe una combinación de intersecciones no nula, la misma viene dada por las "comunicaciones" 4, 3, 2: Por lo tanto, podemos contar una contribución

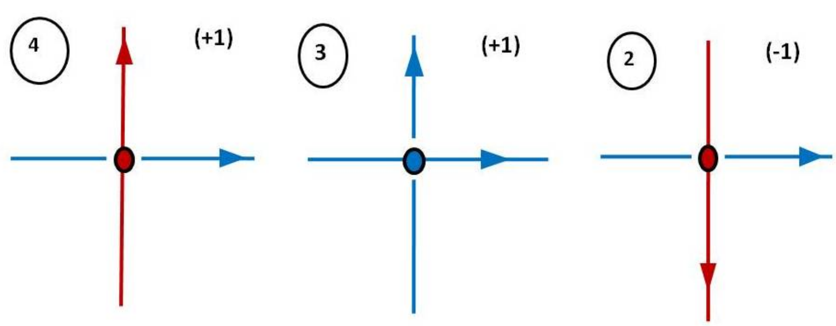

Figura 4.7: Diagrama Planar de los cruces 4, 3 y 2

.

para este término dada por:

$$S_{64} = -\frac{1}{8}\{(+1)\times(+1)\times(-1)\} = -\frac{1}{8}(-1) = +\frac{1}{8}. \tag{4.42}$$

Si ahora calculamos S_6, obtenemos:

$$S_6 = \sum_{i=a}^{d} S_{6i} = S_{61} + S_{62} + S_{63} + S_{64} = \left(-\frac{1}{8}\right) + (0) + (0) + \left(+\frac{1}{8}\right) = 0. \tag{4.43}$$

Este resultado muestra que aunque los términos (4.14) y (4.17) al aplicarlos sobre el esquema de haces para el Link de Whitehead puedan detectar el anudamiento, el término global S_6 no puede hacerlo ya que la contribución de (4.17) es igual y opuesta a la dada por (4.14).

De esta manera podemos decir que el invariante que puede detectar el anudamiento del Link de Whitehead vienen dados por los términos (4.6), (4.7) y (4.9):

$$\begin{aligned} S^{(2)}_{2-part.} \;=\; & \Big[\frac{3}{16} T_2^{[b,\,\alpha y]} T_1^{[a,\mu x]} g_{bc} g_{ad} T_1^c T_2^d g_{\mu x\;\alpha y} + \frac{3}{16} T_1^{[b,\,\alpha y]} T_2^{[a,\,\mu x]} g_{bc} g_{ad} T_2^c T_1^d g_{\mu x\;\alpha y} \\ - \; & \frac{3}{16} T_2^{[b,\,\alpha y]} T_2^{[a,\,\mu x]} g_{bc} g_{ad} T_1^c T_1^d g_{\mu x\;\alpha y}\Big]. \end{aligned} \tag{4.44}$$

El resultado dado por (4.44) puede describir la forma en como se enlazan las dos curvas que constituyen al Link de Whitehead, que en nuestro caso representan las trayectorias asociadas a dos partículas de Wong que interactúan de forma particular a través de un campo no-Abeliano de Chern-Simons. Este resultado demuestra que hay una estrecha relación entre las teorías topológicas con invariantes de nudo, no solo a nivel cuántico como lo expresan los resultados obtenidos por Witten [1] sino también a nivel clásico como se demuestra en este trabajo. En la actualidad los invariantes de nudo han sido invocados en la descripción de ciertas propiedades de arrollamiento de polímeros [22, 23] y recientemente se ha demostrado especial interés en la estructura de nudos en el desdoblamiento del ADN celular [4].

Capítulo 5

Conclusiones

En el presente trabajo hemos estudiado los invariantes de nudos obtenidos a partir del estudio de las ecuaciones clásicas de movimiento de la teoría no-Abeliana de Chern-Simons acoplada con fuentes. Partimos del hecho de que la acción clásica debe preservar su carácter topológico (independiente de la métrica) cuando se evalúa sobre las ecuaciones de movimiento; esto conduce a expresiones analíticas de invariantes de nudo asociadas a las líneas de universo de las partículas de Wong.

Siguiendo el método presentado en [9,10] calculamos las ecuaciones de movimiento de la teoría a partir de la acción desarrollada por Balachandran [12] la cual es invariante de calibre. Los resultados muestran que las ecuaciones obtenidas constituyen un sistema altamente no lineal díficil de resolver exactamente. Con el fin de poder resolver las ecuaciones, se propone un esquema perturbativo de solución y al sustituir dichas soluciones en la acción dada por (3.1) pudimos escribir la acción *on-shell* como una expansión en serie de un parámetro Λ, en donde cada uno de los términos de la serie corresponde a un invariante de nudo [9,10]. Una de las ventajas que ofrece este método es que no es necesario calcular la serie completa de $S_{on-shell}$ para obtener invariantes de nudos, y se puede estudiar el problema hasta el orden deseado. En este trabajo se obtuvieron las tres primeras contribuciones de la acción $S^{(0)}$, $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$ que están relacionadas con los tres primeros invariantes.

Con el fin de escribir los invariantes en un lenguaje puramente geométrico, esto es, en términos de variables que dependen exclusivamente de las trayectorias seguidas por las partículas de Wong se introdujo los T-objetos, conocidos también como multitangentes o coordenadas de caminos introducidas por primera vez en [18, 19] y los objetos $g_{\mu x\,\nu y}$ que aparecen naturalmente en las soluciones de las ligaduras diferenciales que satisfacen las coordenadas de caminos.

El primer invariante obtenido viene dado directamente por la acción a orden cero $S^{(0)}$ [9] y corresponde a una combinación de Números de Anudamiento de Gauss $L(i,j)$, que es un invariante bien conocido en la literatura y aparece en casi todas las discusiones de la teoría de Chern-Simons. El segundo invariante, de mayor complejidad corresponde al Tercer Coeficiente de Milnor $M_{(i,j,k)}$ y se encuentra identificado con la acción a primer orden $S^{(1)}$ [9]. Este invariante puede caracterizar las propiedades de anudamiento de los anillos de Borromeo, que constituyen un *link* no trivial de tres componentes que posee Números de Gauss nulos entre cualquier par de dichas componentes. El último invariante estudiado dado por la acción a orden dos $S^{(2)}$ [14] corresponde al Cuarto Coeficiente de Milnor, este invariante puede describir el anudamiento no trivial de un Link de cuatro componentes (Fig. 3.4), que posee Números de anudamiento de Gauss nulos para cualquier para de componentes asi como $M_{(i,j,k)}$ nulo para cualquier combinación de tres componentes. De hecho, estos tres invariantes corresponden con los tres primeros miembros de una familia de invariantes de nudo descubiertos por Milnor llamados Coeficientes de Anudamiento de Orden Superior, donde el *n-ésimo* coeficiente está definido si todos los anteriores son cero [6, 11].

Luego pasamos a interpretar geométricamente cada uno de los invariantes obtenidos y para ello utilizamos el método introducido previamente en [14] en el cual se sustituye la métrica $g_{\mu x\,\nu y}$ por la 2-forma $H_{\mu\nu}(x,\gamma^{\vec{y}})$ dependiente de caminos abiertos que finalizan en el punto $\vec{y}$. Dicho método permite describir la forma en que se encuentran anudadas las curvas cerradas asociadas a las partículas de Wong. De esta manera fue posible explicar analíticamente el anudamiendo del Link de Hopf (Fig.

3.1) mediante el Número de Anudamiento de Gauss $L(i, j)$. De igual modo, vimos que el Tercer coeficiente de Milnor $M_{(i,j,k)}$ es capaz de caracterizar las propiedades de anudamiento de los Anillos de Borromeo (Fig. 3.3) y que $S^{(2)}$ puede distinguir el anudamiento de un Link de cuatro componentes como el dado por la Figura 3.4.

También implementamos una forma esquemática de interpretación de los invariantes que nos permite medir cuantitativamente el anudamiento específico entre curvas. Este método es de gran utilidad ya que las expresiones analíticas para los invariantes de nudos no ofrecen la información suficiente para determinar si dos curvas están anudadas o no. A través de este esquema es posible descartar las "comunicaciones" que no contribuyen con los invariantes y obtener el valor númerico de las que si contibuyen. Esta forma esquemática puede simplificar considerablemente la interpretación de invariantes de ordenes superiores.

Los aspectos desarrollados anteriormente nos permitieron estudiar el anudamiento de Link de Whitehead a través del invariante obtenido para el orden dos de la acción *on-shell*, considerando el caso particular de dos partículas de Wong con corrientes ortonormales. Analizando cada uno de los términos que componen al inavariante $S^{(2)}_{2-part}$ y aplicando la forma esquemática de interpretación, obtuvimos que dicho invariante si detecta el anudamiento no trivial del Link de Whitehead. Estos resultados constituyen un aporte importante a la relación que existe entre teorías de campos interactuado con materia y la teoría de nudos.

Posibles trabajos futuros están enmarcados en la obtención de expresiones analíticas para Coeficientes de Anudamiento de Orden Superior a partir de sucesivas correcciones a la acción sobre las ecuaciones de movimiento. En virtud de lo complejo que pueden resultar las expresiones para estos invariantes sería conveniente desarrollar una diagramática al "estilo" de la de Feynman que permita obtener de una forma directa y simplificada las sucesivas correcciones, y por lo tanto sus invariantes asociados.

Por otro lado, sería interesante estudiar cuáles serían las teorías topológicas "Intermedias" cuya acción *on-shell* produce de manera exacta cada uno de los invariantes obtenidos. En este sentido, ya se ha desarrollado la teoria "Intermedia" [15] que resuelta de manera exacta produce el tercer coeficiente de Milnor $M_{i,j,k}$. Entonces cabría preguntarse: ¿Cuál será la teoría que resuelta a nivel exacto produce el invariante relacionado con $S^{(2)}$? ¿Existirá una manera sistemática de obtener las teorías Intermedias?. Éstas y otras interrogantes serán materia de estudios posteriores.

Bibliografía

[1] E. Witten, Commun. Math. Phys. 121, 351 (1989).

[2] Deser, S., Jackiw, R., Templeton, S. Phys. Rev. Lett. 48, 15 975–978 (1982).

[3] Birman, J.S., Williams, R.F. (1983). Knotted periodic orbits in Dynamical Systems-I: Lorenz's equations. Topology, 22, 47–82. Conway, J. H. (1970).

[4] Taylor, W.R., Nature 406, 916-919 (2005)

[5] Rica, R.L., Berger, M.A. Topological ideas and fluid mechanics. Physics Today, 49-12, 28–34. (1996)

[6] E. Guadagnini, M. Martellini and M. Mintchev, Nucl. Phys. B330, 575 (1990).

[7] Kreimer, D. New renormalisable structure in renormalisable quantum field theories trabajo por publicar disponible en abs/hep-th/0211136

[8] S.K. Wong, Nuovo Cimento A65, 689 (1970).

[9] L. Leal,*"Ecuaciones Clásicas de la Teoría de Chern-Simons e Invariantes de Nudo"*, Trabajo de Ascenso a la categoria de Profesor Titular, UCV, (2003).

[10] L. Leal, Phys. Rev. D 66, 125007 (2002).

[11] J. Milnor, Ann. of Math. 59, 177 (1954).

[12] A.P. Balachandran, M. Borchardt and A. Stern, Phys. Rev. D17, 3247 (1978).

[13] L. Leal, J. Pineda, Mod. Phys. Lett A23, 205-210 (2008).

[14] E. Fuenmayor y L. Leal *"Estudio de Representaciones Geométricas e Invariantes de Nudo en Teorías Topológicas de calibre acopladas con materia"* Tesis Doctoral,UCV, (2005).

[15] J. Pineda, *"Invariantes de nudo en desarrollos perturbativos de teorías de Chern-Simons"* Tesis de Licenciatura, U.S.B., (2006).

[16] Jackson, J.D. *Classical Electrodynamics*, third edition. Jhon Wiley, New York.(1999).

[17] M. Monastyrsky, V. Retakh, Commun. Math. Phys. 103, 445 (1986).

[18] C. Di Bartolo, R. Gambini and J. Griego, Commun. Math.Phys.158.

[19] C. Di Bartolo, R. Gambini and J. Griego and L. Leal, IFFI-92-01

[20] L. Rozansky, J. Math. Phys. 35, 5219 (1994).

[21] D. Rolfsen,Knots and Links, Wilmington, Publish or Perish (1976).

[22] Ferrari, F. J. Phys. A: Math. Gen. 36, 5083-5093 (2003)

[23] Ferrari, F. J. Math. Phys. 121, 138-145 (2003)

Apéndice A

Ecuaciones de movimento para las matrices

Para obtener las ecuaciones de movimiento para las matrices $g_i(\tau)$, relacionadas con las partículas de Wong, emplearemos el método descrito en el trabajo de Balachandran [12]. Las matrices $g_i(\tau)$ siendo elementos de $SU(N)$, pueden parametrizarse como

$$g_i = g_i(\xi_i) = e^{\xi_i^a T^a}, \tag{A.1}$$

donde los T^a son los generadores linealmente independientes de $SU(N)$. Mas inclusive, como $g_i(\alpha)$ es una representación de un grupo de Lie, se cumple que

$$g(\alpha)g(\beta) = g(\xi(\alpha,\beta)), \tag{A.2}$$

donde por simplicidad hemos suprimido el subíndice i que identifica a las partículas. Ahora escribiendo a $\xi(0,\beta) = \beta$ y $\xi(0,\alpha) = \alpha$ el parámetro ξ puede escribirse como:

$$\xi(\alpha,\beta) = \alpha + \beta + O(\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta). \tag{A.3}$$

Desarrollando hasta primer orden en $\delta\alpha$ obtenemos

$$\begin{aligned} g(\delta\alpha)g(\beta) &= g(\xi(\delta\alpha,\beta)) \\ &= g\left(\xi(0,\beta)+\frac{\partial\xi}{\partial\alpha^b}|_{\alpha=0}\delta\alpha^b\right) \\ &= g\left(\beta+\frac{\partial\xi}{\partial\alpha^b}|_{\alpha=0}\delta\alpha^b\right) \\ &= g(\beta)+\frac{\partial g}{\partial\beta^c}\frac{\partial\xi^c}{\partial\alpha^b}|_{\alpha=0}\delta\alpha^b. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Usando la ecuación anterior junto a la parametrización de los $g(\xi)$ obtenemos la relación

$$(1+\delta\alpha^a T^a)\, g(\beta) = g(\beta)+\frac{\partial g}{\partial\beta^c}N^{cb}\delta\alpha^b, \tag{A.5}$$

y así, vemos que

$$T^a g(\beta) = \frac{\partial g}{\partial\beta^c}N^{ca}(\beta), \tag{A.6}$$

donde hemos definido la matriz N^{cb} como:

$$N^{cb}(\beta) \equiv \frac{\partial\xi^c}{\partial\alpha^b}|_{\alpha=0}. \tag{A.7}$$

Además el hecho de que los generadores T^a son linealmente independientes, puede verse con facilidad [9] que la matriz N^{cb} es invertible, por lo que de (A.6) se tiene:

$$\frac{\partial g(\beta)}{\partial\beta^c} = (N^{-1})^{ca}T^a g(\beta). \tag{A.8}$$

También serán útiles en el calculo de las ecuaciones de Euler-Lagrange para los elemntos de grupo $g(\xi)$, las siguientes relaciones:

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial\xi^a}\dot{\xi}^a, \tag{A.9}$$

y derivando $gg^{-1}=1$ resulta

$$\frac{\partial g^{-1}}{\partial\xi^a} = -g^{-1}\frac{\partial g}{\partial\xi^a}g^{-1}. \tag{A.10}$$

Realizando variaciones de la acción dada por S_{int} con respecto a los N^2-1 parámetros independientes $\xi_i^a(\tau)$ se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange para las partículas:

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_i^a} - \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial L^a}{\partial \dot{\xi}_i}\right) = 0, \tag{A.11}$$

donde el Lagrangiano de interaación viene dado por:

$$L = \sum_{i=1}^{n} Tr\left(K_i g_i^{-1}(\tau) D_\tau g_i(\tau)\right) = \sum_{i=1}^{n} Tr\left(K_i g_i^{-1}(\tau)(\dot{g}_i + A_i g_i)\right). \tag{A.12}$$

Procediendo con este Lagrangiano evaluamos las expresiones presentes en (A.11) y obtenemos,

$$\frac{\partial L}{\partial \xi^a} = Tr\left(-Kg^{-1}\frac{\partial g}{\partial \xi^a}g^{-1}(\dot{g} + Ag)\right) + Tr\left(Kg^{-1}\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^a \partial \xi^b}\dot{\xi}^b + A\frac{\partial g}{\partial \xi^a}\right), \tag{A.13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^a} = Tr\left(Kg^{-1}\frac{\partial g}{\partial \xi^a}\right), \tag{A.14}$$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^a} = Tr\left(-Kg^{-1}\frac{\partial g}{\partial \xi^b}g^{-1}\dot{\xi}^b\frac{\partial g}{\partial \xi^a} + Kg^{-1}\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^a \partial \xi^b}\dot{\xi}^b\right). \tag{A.15}$$

Si ahora sustituimos en la ecuación de Euler-Lagrange:

$$Tr\left(-Kg^{-1}\frac{\partial g}{\partial \xi^a}g^{-1}D_\tau g + Kg^{-1}A\frac{\partial g}{\partial \xi^a}\right) = Tr\left(-Kg^{-1}\dot{g}g^{-1}\frac{\partial g}{\partial \xi^a}\right). \tag{A.16}$$

Usando la ecuación (A.8), obtenemos

$$\begin{aligned} Tr\left(T^a(-(D_\tau g)Kg^{-1} + gKg^{-1}A + gKg^{-1}\dot{g}g^{-1})\right) &= 0 \\ \Longrightarrow Tr\left(T^a(-\dot{g}g^{-1}I - AI + IA + I\dot{g}g^{-1})\right) &= 0 \end{aligned} \tag{A.17}$$

que, con unas pocas líneas de álgebra sencilla se convierte en:

$$\begin{aligned} Tr T^a[I, (\dot{g}g^{-1} + A)] &= 0 \\ \Longrightarrow [I, (\dot{g}g^{-1} + A)] &= 0. \end{aligned} \tag{A.18}$$

Finalmente, observando que,

$$\dot{I} = \dot{g}Kg^{-1} + gK\dot{g}^{-1} = [\dot{g}g^{-1}, I], \tag{A.19}$$

tenemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange para los parámetros independientes $\xi^a(\tau)$ se pueden escribir de la forma

$$D_\tau I_i \equiv \dot{I}_i + [A_i, I_i] = 0. \tag{A.20}$$