UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

UNA DUALIDAD DE TIPO MONGE-KANTORÓVICH PARA FUNCIONES SEMICONTINUAS

Autor: Br. Boris Prieto
Tutor: Dr. Ángel Padilla

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Licenciado en Matemática

Caracas, Venezuela
Septiembre 2019

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado **"Una Dualidad de Tipo Monge-Kantoróvich Para Funciones Semicontinuas"**, presentado por el **Br. Boris Alejandro Prieto Figuera**, titular de la Cédula de Identidad **18.589.554**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Ángel Padilla
Tutor

Ronald Ramírez
Jurado

Arturo Carreño
Jurado

Agradecimientos

A mi madre por su amor y apoyo incondicional.

A mi padre que aunque ya no está, siempre lo tengo presente.

A mi tutor Ángel Padilla por ser guía en la culminación de esta meta.

A la Universidad Central de Venezuela por verme crecer.

A Mairene Colina y Alejandra Aguilera porque al discutir con ellas aprendí a ser un matemático.

A mi gyal por ser parte de mi evolución.

A todos ustedes que están y los que ya no.

Gracias.

Índice general

Resumen

El objetivo principal de este Trabajo Especial de Grado consiste en dar una demostración de una dualidad de tipo Monge-Kantoróvich para funciones de costo semicontinuas inferiormente, acotadas inferiormente, en el producto de espacios completamente regulares. Para ello se utilizaran propiedades de las medidas de Radon, que permiten la representación de ciertos funcionales como integrales respecto a ellas.

Utilizando el teorema de Hahn-Banach se extenderan los funcionales antes mencionados para demostrar una versión de la dualidad para funciones continuas y acotadas.

Finalmente se considerará el caso en que la función de costo sea semicontinua inferiormente y acotada inferiormente.

Palabras Claves: transporte oṕtimo, dualidad, funciones semicontinuas, Monge-Kantoróvich, medidas de Radon.

Introducción

Gaspard Monge fue un célebre matemático francés del siglo XVIII, amigo íntimo de Napoleon Bonaparte, devoto revolucionario y uno de los fundadores de la Escuela Politécnica(1794) en Francia, muy conocido por su intuición geométrica. En su “Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais” [**2**], que aparece alrededor de 1781, propone un problema en el cuál busca minimizar el costo de transportar la tierra en una excavación al moverla a un destino final.

Se puede pensar que el material en la excavación tiene una cierta distribución digamos μ y se quiere organizar respecto a otra distribución ν en el sitio de llegada, de tal manera que el costo del transporte sea mínimo. Un modelo matemático para el problema anterior es el que sigue:

$$\min_{T(\mu)=\nu} \int c(x, T(x))d\mu(x),$$

donde c es una función de costo y el mínimo se toma respecto a todas las funciones T que llevan μ a ν; es decir, la medida imagen.

No fue hasta aproximadamente 220 años más tarde que se demostró que éste problema en general tiene solución, Monge había asumido que la tenía y dio interesantes aportes sobre su geometría. Por otra parte, el matemático y economista ruso, Leonid Kantoróvich, premio Nobel en economía en 1975 y cuyos aportes varían entre otros en las ramas de análisis funcional, análisis numérico, programación lineal, se interesó en el problema de Monge pero sin saber de su trabajo y reformuló el problema de la siguiente manera:

$$\min_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \iint c(x,y)d\pi(x,y),$$

donde c nuevamente es una función de costo, $\pi(x, y)$ es una medida de probabilidad conjunta y el mínimo se toma sobre todas las medidas π que satisfacen

$$\int_Y d\pi(x,y) = d\mu(x), \qquad \int_X d\pi(x,y) = d\nu(y).$$

Esta condición se debe a que para admitir un transporte debe ser necesario que la cantidad de material tomado del punto de partida x coincida con $d\mu(x)$ y que toda la masa transferida al punto final y coincida con $d\nu(y)$. Más rigurosamente, se pide que π cumpla:

$$\pi[A \times Y] = \mu[A], \quad \pi[X \times B] = \nu[B],$$

para todos los conjuntos medibles A de X y B de Y.

Este problema es una versión probabilística del propuesto por Monge, en el sentido que se permite que el material tomado del lugar inicial pueda ser distribuido en varias partes en el lugar final. Kantoróvich demostró un resultado en el cuál no determina el transporte óptimo, pero de existir, puede ser reformulado en términos de precios óptimos. Dicho resultado es la Dualidad de Kantoróvich que establece:

$$\min_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \iint c(x,y)d\pi(x,y) = \sup_{\substack{\varphi,\Psi\to\mathbb{R} \\ \varphi(y)-\Psi(x)\leq c(x,y)}} \left\{ \int \varphi(y)d\nu - \int \Psi(x)d\mu \right\}.$$

Una interpretación de la igualdad anterior puede ser la siguiente: Imagine que usted es el jefe de una compañía tratando de organizar cómo enviar la producción de algún bien a un establecimiento donde será comprado o almacenado por un consumidor final, de manera que el coste del transporte sea mínimo; es decir, se tiene el problema del lado izquierdo de la igualdad. En medio de esta organización, se acerca un tercero que dice ser especialista en transporte y le propone comprar sus bienes en la fábrica y venderlos de vuelta a usted en el lugar de destino, asegurándole que él se encargara del transporte y sin importar el lugar de llegada o el de salida, no le cobrará más de lo que costó el transporte. La expresión entre llaves del lado derecho de la igualdad es lo que el especialista habrá ganado al final del día, al venderle de vuelta los productos que le compró al inicio, por lo que si desea maximizar su ganancia, el supremo es lo que debe alcanzar.

Desde éste punto de vista, la dualidad de Kantoróvich nos dice que es equivalente para usted minimizar el costo del transporte a que un tercero maximice su ganancia al venderle de vuelta sus productos en el lugar de consumo.

A finales del siglo XIX, hubo una revolución en la materia de transporte óptimo, gracias a trabajos independientes hechos por Yann Brenier [**3**], mostrando alguna relación entre éste problema y mecánica de fluidos, por Mike Cullen [**4**] relacionándolo con problemas de meteorología y por John Mather [**5**], a problemas de sistemas dinámicos.

En el presente trabajo se estudiará un resultado relacionado a la dualidad antes mencionada.

En el Capítulo 1 se estudiarán algunas propiedades de las funciones semicontinuas, así como de las medidas de Radon definidas en el producto de espacios completamente regulares y con marginales prescritos.

En el Capítulo 2 se estudiarán ciertos funcionales, así como su representación integral respecto a una medida de Radon.

En el Capítulo 3 se unirán las herramientas desarrolladas en los capítulos anteriores para demostrar una dualidad de tipo Monge-Kantoróvich.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se darán algunas definiciones y algunos resultados referentes a las redes, funciones semicontinuas y medidas de Radon, lo cual servirá de base en el desarrollo de este Trabajo Especial de Grado.

1. Redes y Semicontinuidad

Las redes generalizan la noción de sucesión, de manera que ciertos resultados familiares sobre la relación entre sucesiones y espacios métricos puedan ser demostrados para espacios topológicos arbitrarios. Tal generalización se hace necesaria ya que, a menos que se imponga alguna condición extra sobre el espacio topológico; como los axiomas de numerabilidad, no siempre es posible construir sucesiones y subsucesiones de la manera que se quisiera. La solución a este problema viene dada por expandir la noción de una sucesión $\{x_n\}$ a algún objeto matemático para el cual el índice n, no necesariamente sea un número natural, sino que pueda tomar valores en un conjunto parcialmente ordenado (no necesariamente numerable).

Definición 1.1. Una *topología* τ sobre un conjunto X es una colección de subconjuntos de X tal que:

(1) $\emptyset$, $X \in \tau$.
(2) τ es cerrado bajo intersecciones finitas.
(3) τ es cerrado bajo uniones arbitrarias.

Definición 1.2. Un conjunto no vacío X junto con una topología τ es llamado *espacio topológico*, y se denota por (X, τ).

Observación 1.3. Sobre un conjunto X se pueden definir varias topologías, si no hay confusión respecto a la topología considerada entonces se hablará del espacio topológico X. A los elementos de τ se le denominan *conjuntos abiertos* y a los complementos de éstos se le denominan *conjuntos cerrados*.

Definición 1.4. Sean (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Un *entorno* de x es un conjunto $U \in \tau$ tal que $x \in U$.

Definición 1.5. Un conjunto Λ es un *conjunto dirigido* si existe una relación $\preceq$ sobre Λ que satisface:

(a) $\lambda \preceq \lambda$, *para cada* $\lambda \in \Lambda$,

(b) *si* $\lambda_1 \preceq \lambda_2$ *y* $\lambda_2 \preceq \lambda_3$, *entonces* $\lambda_1 \preceq \lambda_3$,

(c) *si* $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, *entonces existe* $\lambda_3 \in \Lambda$ *tal que* $\lambda_1 \preceq \lambda_3$ *y* $\lambda_2 \preceq \lambda_3$.

La relación $\preceq$ es llamada dirección sobre Λ, o se dice que dirige a Λ.

Observación 1.6. Las primeras dos propiedades son requerimientos familiares de una relación de orden parcial, sin embargo, note que no está la antisimetría . Una dirección no necesariamente es un orden parcial.

El concepto de red, que generaliza la noción de sucesión se puede introducir ahora usando conjuntos dirigidos arbitrarios para reemplazar el conjunto de los números naturales.

Definición 1.7. Una *red* en un espacio topológico X es una función $g : \Lambda \to X$, donde Λ es un conjunto dirigido. El punto $g(\lambda)$ usualmente se denota por x_λ, y se hablará de la red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, o si no hay confusión respecto al conjunto dirigido tomado, se hablará de la red $\{x_\lambda\}$.

La definición de convergencia de una red se modela de la conocida convergencia de sucesiones.

Definición 1.8. Sea $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una red en un espacio topológico X. Se dice que $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a $x \in X$ si para cada entorno $\mathcal{U}$ de x, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\lambda \geq \lambda_0$ implica $x_\lambda \in \mathcal{U}$.

Observación 1.9. Si la red $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ converge a x entonces se escribe $x_\lambda \to x$.
Una notación que también se utilizará es la siguiente:

$$\lim_{\lambda} x_\lambda = x.$$

Definición 1.10. Sean X un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ una función definida en X. Se dice que f es una función *semicontinua inferiormente* (resp. *semicontinua superiormente*) en un punto $a \in X$, si para cada número real s con $s < f(a)$ (resp. $s > f(a)$), existe un entorno $\mathcal{V}$ de a tal que $s < f(x)$ (resp. $s > f(x)$) para todo $x \in \mathcal{V}$.

Observación 1.11. Una función se dice semicontinua inferiormente (resp.semicontinua superiormente) en X si es semicontinua inferiormente (resp.semicontinua superiormente) para todo $x \in X$.

Ejemplo 1.12. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \neq 0 \\ -1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es semicontinua inferiormente.

Observación 1.13. La condición para que f sea semicontinua inferiormente en un punto a, puede ser expresada de la siguiente manera: para cada $s < f(a)$, el conjunto $f^{-1}(s, \infty]$ debe ser un entorno de a.
De la definición 1.10 se observa que f es semicontinua inferiormente si $-f$ es semicontinua superiormente.

Definición 1.14. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de un espacio topológico X. Se dice que $\mathcal{F}$ tiene la *propiedad de intersección finita* si la intersección de cualquier subfamilia finita de $\mathcal{F}$ es no vacía.

Una caracterización sobre la compacidad de un espacio topológico en términos de la propiedad de intersección finita viene dada por el siguiente resultado que se dará sin demostración. Ver [**17**].

Proposición 1.15. *Sea (X, τ) un espacio topológico. X es compacto si y sólo si cualquier familia $\{F_i\}_{i \in I}$ de conjuntos cerrados en X que tiene la propiedad de intersección finita, tiene intersección no vacía.*

El siguiente resultado es una versión del Teorema del Valor Extremo [ver [**19**] Theo 4.16, p.89] para funciones semicontinuas inferiormente definidas en un espacio topológico compacto.

Teorema 1.16 (ver [**8**]). *Si X es un espacio topológico compacto y $f : X \to [-\infty, \infty]$ es una función semicontinua inferiormente sobre X. Entonces*

$$K = \left\{ x \in X : f(x) = \inf_{y \in X} f(y) \right\}$$

es un subconjunto cerrado no vacío de X.

Demostración.
Sea $C = f(X) \subseteq [-\infty, \infty]$, y para $c \in C$ se define el conjunto $F_c = \{x \in X : f(x) \leq c\}$. Como

$$F_c = \{x \in X : f(x) \leq c\} = f^{-1}\left([-\infty, c]\right) = f^{-1}\left(X \setminus (c, \infty]\right) = X \setminus f^{-1}(c, \infty],$$

y f es una función semicontinua inferiormente, entonces F_c es un conjunto cerrado.
Suponga que $c_1, \ldots, c_n \in C$ y sea $c_0 = \min\{c_k : 1 \leq k \leq n\}$. Por ser $c_0 \leq c_k$ para todo $k = 1, \ldots, n$, se tiene que

$$\bigcap_{k=1}^{n} F_{c_k} = F_{c_0} \neq \emptyset;$$

es decir, se tiene una familia $\{F_c : c \in C\}$ de conjuntos cerrados que tiene la propiedad de intersección finita, y como un espacio topológico es compacto si y sólo si cualquier familia de conjuntos cerrados con la propiedad de intersección finita, tiene intersección no vacía, se sigue que

$$\bigcap_{c \in C} F_c \neq \emptyset,$$

y además ésta intersección es cerrada ya que cada F_c es cerrado.
Ahora bien, veamos por doble contención que el conjunto K es precisamente ésta intersección.
Sea $x \in \bigcap\limits_{c \in C} F_c$, entonces para todo $c \in C$ se cumple que $f(x) \leq c$, y como $C = f(X)$, entonces tenemos que para todo $y \in X$, $f(x) \leq f(y)$; esto es, $x \in K$.
Por otro lado, sea $x_0 \in K$. Entonces para todo $y \in X$ se tiene que $f(x_0) \leq f(y)$, por lo tanto para todo $c \in C$, $f(x_0) \leq c$, es decir

$$x_0 \in \bigcap_{c \in C} F_c.$$

En consecuencia $K = \bigcap\limits_{c \in C} F_c$ que ya se vio es un conjunto cerrado no vacío de X.

□

Definición 1.17. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es *regular* si dado un conjunto cerrado $A \neq \emptyset$ y un punto $x \notin A$, existen conjuntos disjuntos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ abiertos tal que $x \in \mathcal{U}$ y $A \subset \mathcal{V}$.

Definición 1.18. Sea X un espacio topológico X. Se dice que X es *completamente regular* si dado un conjunto cerrado $A \neq \emptyset$ y un punto $x \notin A$, existe una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(A) = 1$.

Proposición 1.19. *Si X es un espacio completamente regular y A es un conjunto cerrado. Entonces existe una función continua $g : X \to [0, 1]$ tal que $g(x) = 1$ y $g(A) = 0$ si $x \notin A$.*

Demostración.
Sea $x \in X$ tal que $x \notin A$. Como X es un espacio completamente regular, entonces existe

una función continua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(A) = 1$. Por lo tanto basta tomar la función $g = 1 - f$. $\square$

Observación 1.20. Los espacios completamente regulares son regulares y el producto de espacios completamente regulares es completamente regular.[Ver [**13**], Theo. 14.10, p.95]

Teorema 1.21 (ver [**8**][**16**]). *Si (X, τ) es un espacio topológico completamente regular y $f \geq 0$ es una función real finita semicontinua inferiormente definida en X. Entonces*

$$f = \sup \{g : X \to \mathbb{R} \mid g \in \mathcal{C}(X), g \leq f\}.$$

Demostración.
Sea $M(f) = \{g : X \to \mathbb{R} \mid g \in \mathcal{C}(X), g \leq f\}$. Como $f \geq 0$, se tiene que $0 \in M(f)$ y por lo tanto es no vacío. Ahora bien, sean $x \in X$, $\epsilon > 0$ y considere el conjunto

$$F = f^{-1}(-\infty, f(x) - \epsilon].$$

Por la semicontinuidad de la función f se sigue que

$$X \setminus F = f^{-1}(f(x) - \epsilon, \infty] \in \tau,$$

y en consecuencia F es un conjunto cerrado. Note que $x \notin F$, y como X es completamente regular entonces existe una función continua $h : X \to [0, 1]$ tal que $h(x) = 1$ y $h(F) = 0$.
Si $f(x) - \epsilon \leq 0$, entonces

$$(f(x) - \epsilon)\, h \leq f,$$

ya que $h \geq 0$ y $f \geq 0$.
Si $f(x) - \epsilon > 0$ y $y \in X$, entonces

$$\begin{aligned}
(f(x) - \epsilon)\, h(y) &= \begin{cases} 0, & \text{si } y \in F \\ (f(x) - \epsilon)\, h(y), & \text{si } y \notin F \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} 0, & \text{si } y \in F \\ (f(x) - \epsilon)\,, & \text{si } y \notin F \end{cases} \\
&\leq f(y),
\end{aligned}$$

por lo tanto $(f(x) - \epsilon)\, h \leq f$; y como $(f(x) - \epsilon)\, h$ es una función continua, se tiene que $(f(x) - \epsilon)\, h \in M(f)$. De donde

$$\sup (M(f)(x)) \geq (f(x) - \epsilon)\, h(x) = f(x) - \epsilon,$$

como ϵ es arbitrario, se sigue que $\sup(M(f)(x)) \geq f(x)$ y como x se tomó arbitrariamente,

$$\sup M(f) \geq f.$$

Por otro lado, f es cota superior de $M(f)$, es decir,

$$\sup M(f) \leq f,$$

y en consecuencia se tiene que $f = \sup M(f)$. $\square$

2. Medidas de Radon

En lo sucesivo X denotará un espacio topológico Hausdorff.
Uno de los principales conceptos de la teoría de la medida es el de un algebra de conjuntos.

DEFINICIÓN 1.22. Un *algebra* de conjuntos $\mathcal{A}$ es una clase de subconjuntos de un conjunto X dado tal que:

i) $X, \emptyset \in \mathcal{A}$,

ii) *Si* $A, B \in \mathcal{A}$, *entonces* $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

DEFINICIÓN 1.23. Un algebra de conjuntos $\mathcal{A}$ se dice σ-*algebra* si para cualquier sucesión de conjuntos $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ se cumple que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

DEFINICIÓN 1.24. Al par $(X, \mathcal{A})$ que consiste de un conjunto X y una σ-algebra $\mathcal{A}$ de sus subconjuntos es llamado *espacio medible*.

DEFINICIÓN 1.25. Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X. A la menor σ-algebra de subconjuntos de X que contiene a $\mathcal{F}$ se le llama la σ-*algebra generada* por $\mathcal{F}$ y se denotara por $\sigma(\mathcal{F})$.

DEFINICIÓN 1.26. Una función real de conjuntos μ, definida sobre una clase de conjuntos $\mathcal{A}$ se dice σ-*aditiva* si

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

siempre que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ y los conjuntos A_n sean disjuntos dos a dos.

DEFINICIÓN 1.27. Una *medida* μ es una función de conjuntos no negativa σ-aditiva definida en una σ-algebra, tal que $\mu(\emptyset) = 0$.

DEFINICIÓN 1.28. A la tupla $(X, \mathcal{A}, \mu)$ donde X es un conjunto, $\mathcal{A}$ es una σ-algebra de subconjuntos de X y μ es una medida sobre $\mathcal{A}$, se le llama *espacio de medida*.

OBSERVACIÓN 1.29. En el caso particular cuando $\mu(X) = 1$ se dice que μ es una medida de probabilidad y que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de probabilidad.

Una de las σ-algebras más utilizadas sobre un espacio topológico X es la *σ-algebra de Borel*; aquella generada por todos los conjuntos abiertos de X, que se denotara por $\mathcal{B}(X)$, y es la σ-algebra que se utilizará a menos que explícitamente se diga lo contrario.

OBSERVACIÓN 1.30. Si $\mathcal{K}$ es la clase de todos los conjuntos cerrados de X entonces $\mathcal{K} \subset \mathcal{B}(X)$ ya que un conjunto es cerrado si su complemento es abierto. Como $\mathcal{B}(X)$ es una σ-algebra entonces $\sigma(\mathcal{K}) \subset \mathcal{B}(X)$, y por el mismo argumento antes mencionado se tiene que $\mathcal{B}(X) \subset \sigma(\mathcal{K})$ y en consecuencia $\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{K})$. Esto es, la σ-algebra $\mathcal{B}(X)$ también es generada por los conjuntos cerrados de X.

DEFINICIÓN 1.31. Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f : X \to Y$ se dice que es de Borel o que es *Borel medible* si $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(X)$ para todo $B \in \mathcal{B}(Y)$.

LEMA 1.32. *Toda función continua entre espacios topológicos es Borel medible.*

Otra σ-algebra importante sobre un espacio topológico X es aquella generada por los conjuntos de la forma $\{x \in X : f(x) > 0\}$, donde f es una función continua sobre X. Esta σ-algebra es llamada la *σ-algebra de Baire* y se denotará por $\mathcal{B}a(X)$.

OBSERVACIÓN 1.33. Los conjuntos de la forma $\{x \in X : f(x) > 0\}$ donde $f \in \mathcal{C}(X)$ son llamados conjuntos *funcionalmente abiertos* y sus complementos son llamados conjuntos *funcionalmente cerrados*. La σ-algebra $\mathcal{B}a(X)$ también es generada por la clase $\mathcal{C}_b(X)$ de todas las funciones reales continuas y acotadas definidas en un espacio topológico X.

OBSERVACIÓN 1.34. A los conjuntos que pertenecen a $\mathcal{B}(X)$ se les dice *conjuntos de Borel* y a los conjuntos que pertenecen a $\mathcal{B}a(X)$ se les dice *conjuntos de Baire*.
Si $E \in \mathcal{B}a(X)$ entonces tiene la forma

$$\{x : (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots) \in B\}, \; f_i \in \mathcal{C}(X), \; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty).$$

En efecto, la clase

$$\mathcal{E} = \{E \in \mathcal{B}a(X) | E \; se \; representa \; de \; la \; forma \; antes \; mencionada\},$$

contiene a los conjuntos de la forma $\{f > 0\}, f \in \mathcal{C}(X)$, que por definición generan la σ-algebra $\mathcal{B}a(X)$, por lo tanto basta ver que $\mathcal{E}$ es una σ-algebra.
Si $E \in \mathcal{E}$ entonces el complemento del conjunto E tiene la misma representación de E con la misma familia f_i pero se considera el conjunto $\mathbb{R}^\infty \setminus B$ en vez de B.

Por otro lado, dada una sucesión de conjuntos $\{E_j\}_{j\geq 1} \subset \mathcal{E}$, entonces para cada E_j se tiene un conjunto B_j y una familia $f_{j,n}$ en la que E_j se representa, por lo tanto $E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$ puede representarse de la forma requerida al considerarse $B = \prod_{j=1}^{\infty} B_j$ y en consecuencia $\mathcal{E} = \mathcal{B}a(X)$.

Definición 1.35. Sea X un espacio topológico.

- Una medida definida sobre la σ-algebra de Borel $\mathcal{B}(X)$ se dice que es una *medida de Borel*.
- Una medida definida sobre la σ-algebra de Baire $\mathcal{B}a(X)$ se dice que es una *medida de Baire*.
- Una medida de Borel μ sobre X se dice que es una *medida de Radon* si para todo $B \in \mathcal{B}(X)$ y $\epsilon > 0$, existe un conjunto compacto $K_\epsilon \subset B$ tal que $\mu(B \setminus K_\epsilon) < \epsilon$.

Definición 1.36. Sean X, Y espacios topológicos, μ una medida sobre X y $f : X \to Y$ una función μ-medible. La *medida imagen* sobre Y viene dada por $\nu = \mu \circ f^{-1} : B \mapsto \mu(f^{-1}(B))$. Y se usará la notación $f(\mu) = \mu \circ f^{-1}$.

Observación 1.37. La medida imagen $f(\mu)$ es una medida en $(Y, \mathcal{B}(Y))$. En efecto, para todo $B \in \mathcal{B}(Y)$,

$$f(\mu)(B) = (\mu \circ f^{-1})(B) = \mu(f^{-1}(B)) \geq 0,$$

ya que μ es una medida.
Por otro lado, dada una sucesión $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}(Y)$ de conjuntos disjuntos dos a dos, entonces

$$\begin{aligned} f(\mu)(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) &= \mu(f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(E_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f^{-1}(E_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\mu)(E_n). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$f(\mu)(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Definición 1.38. Una función de conjuntos no negativa μ definida en algún sistema $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un espacio topológico X se dice *regular interior* sobre $\mathcal{A}$ si para todo $\epsilon > 0$, existe un conjunto compacto K_ϵ en X tal que $\mu(A) < \epsilon$ para todo elemento $A \in \mathcal{A}$ que no intersecta a K_ϵ.

Definición 1.39. Una función de conjuntos no negativa μ definida en algún sistema $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un espacio topológico X se dice *regular* en $\mathcal{A}$ si para todo $A \in \mathcal{A}$ y todo $\epsilon > 0$, existe un conjunto cerrado F_ϵ tal que $F_\epsilon \subset A$, $A \setminus F_\epsilon \in \mathcal{A}$ y $\mu(A \setminus F_\epsilon) < \epsilon$.

Proposición 1.40. *Si μ es una medida de Borel regular y regular interior. Entonces μ es una medida de Radon.*

Demostración.
Sean $B \in \mathcal{B}(X)$ y $\epsilon > 0$. Como μ es regular interior entonces existe un conjunto compacto K_ϵ tal que $\mu(B \setminus K_\epsilon) < \epsilon$. Además como μ es regular entonces existe un conjunto cerrado F_ϵ tal que $F_\epsilon \subset B$ y $\mu(B \setminus F_\epsilon) < \epsilon$, por lo tanto al tomar el conjunto compacto $H_\epsilon = F_\epsilon \cap K_\epsilon$ se obtiene que $H_\epsilon \subset B$ y $\mu(B \setminus H_\epsilon) < \epsilon$. Esto es, μ es una medida de Radon. □

Teorema 1.41. *Sea X un espacio métrico. Entonces todo conjunto cerrado es de la forma $g^{-1}(0)$ para alguna función real continua g.*

Demostración.
Sea (X, d) un espacio métrico y Z un conjunto cerrado. Como Z es un conjunto cerrado, entonces $Z = \{x \in X \mid d(x, Z) = 0\}$, por lo tanto basta definir $g(x) = d(x, Z)$. □

Definición 1.42. Sea (X, d) un espacio métrico. Se le dice δ-*entorno* de un conjunto $A \subset X$ al conjunto formado por la unión de todas las bolas de radio $\delta > 0$ y centros en los elementos del conjunto A.

Teorema 1.43. *Sea X un espacio métrico. Entonces toda medida de Borel μ sobre X es regular.*

Demostración.
Considere la clase $\mathcal{A}$ dada por:

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(X) | \ Dado\ \epsilon > 0\ existen\ F_\epsilon\ cerrado\ ,\ U_\epsilon\ abierto\ con\ F_\epsilon \subset A \subset U_\epsilon\},$$

cuyos elementos además satisfacen la propiedad

$$\mu(U_\epsilon \setminus F_\epsilon) < \epsilon.$$

La clase $\mathcal{A}$ es no vacía ya que al tomar $A = U_\epsilon = F_\epsilon = \emptyset$, se obtiene que

$$\mu(U_\epsilon \setminus F_\epsilon) = \mu(\emptyset) = 0 < \epsilon.$$

Se quiere ver que $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$.
Sea A un conjunto cerrado, entonces $A \in \mathcal{B}(X)$. Al elegir $F_\epsilon = A$ y $U_\epsilon = A^\delta$, donde A^δ es algún δ-entorno de A, se obtiene que

$$A^\delta \downarrow A\ cuando\ \delta \to 0,$$

y en consecuencia

$$\mu(A^\delta) \to \mu(A),$$

es decir,

$$\mu(U_\epsilon \setminus F_\epsilon) = \mu(A^\delta \setminus A) < \epsilon.$$

Por lo tanto la clase $\mathcal{A}$ contiene a los conjuntos cerrados que se sabe generan a la σ-algebra de Borel. Así, basta demostrar que la clase $\mathcal{A}$ es una σ-algebra.
Por construcción, la clase $\mathcal{A}$ es cerrada bajo la operación de complementación, por lo que es suficiente verificar que $\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones numerables.
Sea $\{A_i\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ una sucesión de conjuntos disjuntos y $\epsilon > 0$. Entonces existe un conjunto cerrado F_i y un conjunto abierto U_i tal que

$$F_i \subset A_i \subset U_i \;\; y \;\; \mu(U_i \setminus F_i) < \epsilon 2^{-i}$$

para cada $i \geq 1$.
El conjunto $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ es abierto y el conjunto $Z_k = \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ es cerrado para cualquier $k \geq 1$, de donde

$$Z_k \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset U,$$

y por la σ-subaditividad de μ se tiene que

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} (U_i \setminus F_i)) < \sum_{i=1}^{\infty} \epsilon 2^{-i} = \epsilon.$$

Como μ es σ-aditiva entonces $\mu(Z_k) \to \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)$ si $k \to \infty$. En consecuencia

$$\mu(U \setminus Z_k) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i)$$

$$= \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} (U_i \setminus F_i)) < \epsilon$$

cuando $k \to \infty$.

□

Corolario 1.44. *Toda medida de Baire μ sobre un espacio topológico X es regular. Más aún, para todo conjunto de Baire E y todo $\epsilon > 0$, existe una función continua f sobre X tal que $f^{-1}(0) \subset E$ y $\mu(E \setminus f^{-1}(0)) < \epsilon$.*

Demostración.
Sea $E \in \mathcal{B}a(X)$, entonces tiene la forma

$$E = \{x \in X : (f_1(x), \dots, f_n(x), \dots) \in B\},$$

donde $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ y $f_n \in \mathcal{C}(X)$ para todo $n \geq 1$.
La función $h : X \to \mathbb{R}^\infty$ definida por $h(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x), \dots)$ es continua ya que cada f_n es continua. Sea μ_0 la medida imagen de μ por h. Por el teorema anterior existe un conjunto cerrado $A \subset B$ tal que $\mu_0(B \setminus A) < \epsilon$, como $\mathbb{R}^\infty$ es un espacio métrico y se sabe que todo conjunto cerrado en un espacio métrico es de la forma $g^{-1}(0)$ para alguna función continua g, entonces se tiene que

$$\mu_0(B \setminus g^{-1}(0)) < \epsilon$$

con $g : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ continua en $\mathbb{R}^\infty$.
Ahora bien, la función $f : X \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = g(f_1(x), \dots, f_n(x), \dots)$ es continua en X ya que la composición de funciones continuas es continua y por definición de medida imagen se obtiene que

$$\begin{aligned} \mu_0(B \setminus g^{-1}(0)) &= \mu_0(B) - \mu_0(g^{-1}(0)) \\ &= \mu(h^{-1}(B)) - \mu(h^{-1}(g^{-1}(0))) = \mu(E) - \mu(f^{-1}(0)) = \mu(E \setminus f^{-1}(0)), \end{aligned}$$

de donde

$$\mu(E \setminus f^{-1}(0)) = \mu_0(B \setminus g^{-1}(0)) < \epsilon.$$

□

Observación 1.45. Dado un espacio completamente regular S, se denotará por $\mathcal{M}_b(S)$ el espacio de todas las medidas de Radon reales, acotadas sobre S.
Se denotará por $\mathcal{P}(S)$ el conjunto de todas las medidas de probabilidad de Radon sobre S, $\mathfrak{K}(S)$ el conjunto de todos los subconjuntos compactos de S y $\mathcal{C}_b(S)$ el espacio de las funciones reales continuas y acotadas sobre S, que estará dotado de la norma

$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in S} | f(x) |$$

para toda $f \in \mathcal{C}_b(S)$.

Definición 1.46. Una medida $\sigma \in \mathcal{M}_b(S)$ es *positiva* si

$$\int_S f d\sigma \geq 0$$

para toda $f \in \mathcal{C}_b^+(S)$.

OBSERVACIÓN 1.47. Se utilizará la notación funcional para integrales. Por ejemplo, para $\tau \in \mathcal{P}(S)$, $\tau(f)$ denotará la integral

$$\int_S f d\tau.$$

DEFINICIÓN 1.48. Sea $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ un espacio de medida. Se denotará por $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ al conjunto

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}(X), \mu) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \textit{ es Borel medible y } \int_X |f| d\mu < \infty \right\},$$

y en algunos casos se utilizará la notación $\mathcal{L}^1(\mu)$.

PROPOSICIÓN 1.49. *Sean S, T espacios completamente regulares y $\phi : S \to T$ una función continua y sobreyectiva. Sean $\sigma \in \mathcal{P}(S)$ y $\tau \in \mathcal{P}(T)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

$$(i)\ \tau = \phi(\sigma),$$
$$(ii)\ \tau(f) = \sigma(f \circ \phi) \textit{ para toda } f \in \mathcal{C}_b(T);$$
$$(iii)\ \textit{Para toda función de Borel } f : T \to [-\infty, \infty] \textit{ en } \mathcal{L}^1(\tau),$$
$$\textit{se tiene que } f \circ \phi \in \mathcal{L}^1(\sigma) \textit{ y } \sigma(f \circ \phi) = \tau(f).$$

DEMOSTRACIÓN.
$((i) \Rightarrow (ii))$ Note que

$$\{x : (f \circ \phi)(x) \in M\} = \phi^{-1}(\{y : f(y) \in M\})$$

para $M \subseteq [-\infty, \infty]$. En efecto: si $x_o \in \{x : (f \circ \phi)(x) \in M\}$, entonces

$$f(\phi(x_o)) \in M,$$

al hacer $\phi(x_0) = y_0$ se tiene que $f(y_0) \in M$, de donde

$$y_0 \in \{y : f(y) \in M\},$$

y así

$$x_0 \in \phi^{-1}(\{y : f(y) \in M\}),$$

por lo tanto

$$\{x : (f \circ \phi)(x) \in M\} \subseteq \phi^{-1}(\{y : f(y) \in M\}).$$

Análogamente se obtiene la otra contención.

Ahora bien, para ver que $f \circ \phi$ es integrable y su integral coincide con la de f, es suficiente tratar con funciones no negativas f.

Si f es la función indicadora de un conjunto medible A en $[-\infty, \infty]$, entonces se sigue de lo anterior que $f \circ \phi$ es la función indicadora de $\phi^{-1}(A)$ y por lo tanto

$$\int_A f d\phi(\sigma) = \phi(\sigma)(A) = \sigma(\phi^{-1}(A)) = \int_{\phi^{-1}(F)} (f \circ \phi)\, d\sigma.$$

La igualdad anterior permanece válida para f como función simple.
En el caso general, sea f una función medible y $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión creciente de funciones simples que converge a f. Entonces $\{f_n \circ \phi\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de funciones simples que converge a la función medible $f \circ \phi$. Por definición de integral de una función medible no negativa, se tiene que

$$\int_X f d\phi(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\phi(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \int_X (f_n \circ \phi)\, d\sigma = \int_X (f \circ \phi)\, d\sigma.$$

$((iii) \Rightarrow (ii))$ Esta implicación es directa.

$((ii) \Rightarrow (i))$ Sea G un subconjunto abierto de T. Una función $f : T \to [-\infty, \infty]$ es semicontinua inferiormente si (ver 1.10) $t \in \mathbb{R}$ implica que $f^{-1}(t, \infty]$ pertenece a la topología. Note que

$$I_G^{-1}(t, \infty] = \begin{cases} T, & \text{si } t < 0 \\ G, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ \emptyset, & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

y como G es abierto, entonces I_G es semicontinua inferiormente.
Dado que T es un espacio completamente regular, existe (ver 1.21) una red $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ en $\mathcal{C}_b^+(T)$ tal que $f_\alpha(x) \uparrow I_G(x)$, para todo $x \in T$.
Por otra parte, como $\tau(f) = \sigma(f \circ \phi)$ para todo $f \in \mathcal{C}_b(T)$ y al observar que

$$I_G \circ \phi = I_{\phi^{-1}(G)},$$

entonces, al pasar al límite en la ecuación $\tau(f_\alpha) = \sigma(f_\alpha \circ \phi)$ y al aplicar el Teorema de Convergencia Monótona ([ver[**9**], Theo. 1.5, p.20]) se obtiene que:

$$\lim_\alpha \tau(f_\alpha) = \lim_\alpha \int_T f_\alpha d\tau = \int_T I_G d\tau = \tau(G)$$

y

$$\lim_\alpha \sigma(f_\alpha \circ \phi) = \lim_\alpha \int_S (f_\alpha \circ \phi)\, d\sigma = \int_S (I_G \circ \phi)\, d\sigma = \sigma(\phi^{-1}(G)) = \phi(\sigma)(G),$$

es decir ambas medidas $\tau, \phi(\sigma)$ coinciden en conjuntos abiertos y por lo tanto en conjuntos de Borel y en consecuencia son iguales.

($(i) \Rightarrow (iii)$) Sea f la función indicadora de un conjunto medible Borel B en $[-\infty, \infty]$. Como $\tau = \phi(\sigma)$, entonces

$$\tau(f) = \int_B f d\tau = \int_B f d\phi(\sigma)$$

$$= \phi(\sigma)(B) = \sigma(\phi^{-1}(B))$$

$$= \int_{\phi^{-1}(B)} f \circ \phi d\sigma = \sigma(f \circ \phi).$$

Como se vio en el apartado $(i) \Rightarrow (ii)$, la igualdad anterior permanece válida para funciones simples y en el caso general para funciones medibles Borel.

□

Ahora bien, dados dos espacios completamente regulares X,Y. Se denotará por Z al espacio $Z = X \times Y$, y por pr_X, pr_Y a las proyecciones naturales de Z sobre X y Y respectivamente. Esto es,

$$\begin{aligned} pr_X :& X \times Y \to X, & pr_Y :& X \times Y \to Y. \\ & (x,y) \mapsto x & & (x,y) \mapsto y \end{aligned}$$

Dadas $\mu \in \mathcal{P}(X)$ y $\nu \in \mathcal{P}(Y)$, se denotará por $\Pi(\mu, \nu)$ el conjunto de todas las medidas $\pi \in \mathcal{P}(Z)$ tales que $pr_X(\pi) = \mu$ y $pr_Y(\pi) = \nu$.

Observación 1.50. $\Pi(\mu, \nu) \neq \emptyset$, ya que la medida producto $\theta = \mu \otimes \nu \in \Pi(\mu, \nu)$. Dadas $u : X \to (-\infty, \infty]$ y $v : Y \to (-\infty, \infty]$, la expresión $u \oplus v$ denotará la función $(x, y) \mapsto u(x) + v(y)$.

Corolario 1.51. *Si $\pi \in \mathcal{P}(Z)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$;

(ii) *Para todo* $A \in \mathfrak{B}(X)$ *y* $B \in \mathfrak{B}(Y)$ *se tiene* $\pi(A \times Y) = \mu(A)$ *y* $\pi(X \times B) = \nu(B)$;

(iii) *Para toda* $u \in \mathcal{C}_b(X)$ *y* $v \in \mathcal{C}_b(Y)$ *se tiene que* $\pi(u \oplus v) = \mu(u) + \nu(v)$;

(iv) *Siempre que* $u : X \to (-\infty,\infty]$ *y* $v : Y \to (-\infty,\infty]$ *sean funciones de Borel en* $\mathcal{L}^1(\mu)$ *y* $\mathcal{L}^1(\nu)$ *respectivamente, se tiene entonces que* $u \oplus v \in \mathcal{L}^1(\pi)$ *y* $\pi(u \oplus v) = \mu(u) + \nu(v)$.

Demostración.
$((i) \Rightarrow (ii))$ Por definición se tiene que

$$\Pi(\mu,\nu) = \{\pi \in \mathcal{P}(Z) : pr_X(\pi) = \mu,\ pr_Y(\pi) = \nu\}.$$

Si $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$, $A \in \mathfrak{B}(X)$, $B \in \mathfrak{B}(Y)$ entonces

$$\mu(A) = pr_X(\pi)(A) = \pi(pr_X^{-1}(A)) = \pi(A \times Y),$$

y

$$\nu(B) = pr_Y(\pi)(B) = \pi(pr_Y^{-1}(B)) = \pi(X \times B).$$

$((i) \Rightarrow (iii))$ Sea $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$, entonces $pr_X(\pi) = \mu$ y $pr_Y(\pi) = \nu$, es decir μ es la medida imagen de π en $X \times Y$ por pr_X, y ν es la medida imagen de π por pr_Y.
Sean $u \in \mathcal{C}_b(X)$ y $v \in \mathcal{C}_b(Y)$, por la proposición anterior se tiene que

$$\mu(u) = \pi(u \circ pr_X) \ \ y \ \ \nu(v) = \pi(v \circ pr_Y).$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\mu(u)+\nu(v) &= \pi(u \circ pr_X)+\pi(v \circ pr_Y) \\
&= \int_{X\times Y} (u \circ pr_X)(x,y)d\pi(x,y) + \int_{X\times Y} (v \circ pr_Y)(x,y)d\pi(x,y) \\
&= \int_{X\times Y} [u(x)+v(y)]\, d\pi(x,y) \\
&= \int_{X\times Y} (u \oplus v)(x,y)d\pi(x,y) \\
&= \pi(u \oplus v).
\end{aligned}
$$

($(i) \Rightarrow (iv)$) Sean $u \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y $v \in \mathcal{L}^1(\nu)$, por la proposición anterior se tiene que

$$u \circ pr_X \in \mathcal{L}^1(\pi) \ \ y \ \ v \circ pr_Y \in \mathcal{L}^1(\pi),$$

de donde

$$(u \circ pr_X) + (v \circ pr_Y) \in \mathcal{L}^1(\pi)$$

y por lo tanto

$$u(x)+v(y) = [(u \circ pr_X) + (v \circ pr_Y)](x,y) \in \mathcal{L}^1(\pi),$$

es decir

$$u \oplus v \in \mathcal{L}^1(\pi).$$

Por otra parte, por hipótesis

$$\mu = pr_X(\pi) \ \ y \ \ \nu = pr_Y(\pi),$$

entonces

$$\pi(u \oplus v) = \mu(u) + \nu(v).$$

($(ii) \Rightarrow (i)$) Note que

$$A \times Y = pr_X^{-1}(A),$$

de donde

$$\mu(A) = \pi(A \times Y) = \pi(pr_X^{-1}(A)),$$

y en consecuencia

$$\mu = pr_X(\pi).$$

Similarmente para

$$X \times B \subseteq X \times Y,$$

se obtiene que

$$\nu(B) = \pi(X \times B) = \pi(pr_Y^{-1}(B)),$$

es decir

$$\nu = pr_Y(\pi).$$

$((iii) \Rightarrow (i))$ Sea $f \in \mathcal{C}_b(X)$ y considere las siguientes funciones:

$$u(x) = (f \circ pr_X)(x,y), \;\; y \;\;\; v(y) = 0.$$

Como $u \in \mathcal{C}_b(X)$ y $v \in \mathcal{C}_b(Y)$ entonces

$$\pi(u \oplus v) = \pi(f \circ pr_X) = \mu(f \circ pr_X) = \mu(f)$$

para toda $f \in \mathcal{C}_b(X)$, por lo tanto, por la proposición anterior

$$\mu = pr_X(\pi).$$

Similarmente para $g \in \mathcal{C}_b(Y)$, al considerar las funciones $u(x) = 0$ y $v(y) = (f \circ pr_Y)(x,y)$ se obtiene que $\nu = pr_Y(\pi)$. En consecuencia

$$\pi \in \Pi(\mu, \nu).$$

$((iv) \Rightarrow (ii))$ Sean $u_1 : X \to (-\infty, \infty]$ y $v_1 : Y \to (-\infty, \infty]$ definidas por

$$u_1(x) = I_{A \times Y}(x,y), \qquad v_1(y) = 0,$$

para todo $x \in X$, $y \in Y$ y $A \in \mathcal{B}(X)$. Entonces

$$u_1 \oplus v_1 \in \mathcal{L}^1(\pi) \;\; y \;\; \pi(u_1 \oplus v_1) = \mu(u_1) + \nu(v_1),$$

es decir

$$\pi(I_{A \times Y} + 0) = \mu(I_{A \times Y}),$$

además se tiene que

$$I_{A\times Y} = \begin{cases} 1, & \text{si } (x,y) \in A \times Y \\ 0, & \text{si } (x,y) \notin A \times Y \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases} = I_A,$$

de donde

$$\pi(A \times Y) = \mu(A).$$

Similarmente para $u_2 = 0$, $v_2 = I_{X\times B}$ y $B \in \mathcal{B}(Y)$, se tiene que

$$\pi(X \times B) = \nu(B).$$

□

Observación 1.52. En el capítulo 3 se utilizará el siguiente resultado que se da sin demostración:

Teorema 1.53 (ver [**10**][**11**]). $\Pi(\mu,\nu)$ *es un subconjunto no vacío débilmente compacto de* $\mathcal{P}(Z)$.

En el teorema anterior se hace referencia a la topología débil inducida sobre $\mathcal{M}_b(Z)$ por $\mathcal{C}_b(Z)$.

Definición 1.54. Sea X un espacio topológico. la topología débil sobre el espacio $\mathcal{M}_b(Z)$ de medidas de Radon sobre X es aquella cuya base consiste de los conjuntos

$$U_{f_1,\ldots,f_n,\epsilon}(\mu) = \left\{ \nu : \left| \int_X f_i d\mu - \int_X f_i d\nu \right| < \epsilon, i = 1, \ldots, n \right\},$$

donde $\mu \in \mathcal{M}_b(Z)$, $f_i \in \mathcal{C}_b(Z)$, $\epsilon > 0$, y se denotará por $\sigma(\mathcal{M}_b(Z), \mathcal{C}_b(Z))$.

Capítulo 2

Representación de algunos funcionales

1. El funcional p y algunas propiedades

En lo sucesivo se considerarán los espacios de probabilidad $(X,\mathcal{B}(X),\mu)$,$(Y,\mathcal{B}(Y),\nu)$, $(Z,\mathcal{B}(Z),\pi)$ y $\mathcal{F}(Z)$ denotará el conjunto de todas las funciones $f:Z\to[-\infty,\infty)$ que son semicontinuas superiormente, y para $f\in\mathcal{F}(Z)$, $\Phi(f)$ denotará el conjunto de pares (u,v) de funciones de Borel $u:X\to(-\infty,\infty]$ y $v:Y\to(-\infty,\infty]$ tales que $u\in\mathcal{L}^1\left(X,\mathcal{B}(X),\mu\right)$ y $v\in\mathcal{L}^1\left(Y,\mathcal{B}(Y),\nu\right)$, que además satisfacen

$$f(x,y)\le u(x)+v(y),$$

para todo $(x,y)\in Z$. Es decir:

$$\mathcal{F}(Z)=\{f:Z\to[-\infty,\infty)\mid f\ \textit{es semicontinua superiormente}\},$$

$$\Phi(f)=\left\{(u,v)|u:X\to(-\infty,\infty],v:Y\to(-\infty,\infty],u\in\mathcal{L}^1(\mu),v\in\mathcal{L}^1(\nu),f\le u+v\right\}.$$

Para $f\in\mathcal{F}(Z)$ se define el funcional p como :

$$p(f)=\begin{cases}\text{ínf}\left\{\mu(u)+\nu(v):(u,v)\in\Phi(f)\right\}, & \text{si } \Phi(f)\neq\emptyset\\ \infty, & \text{si } \Phi(f)=\emptyset.\end{cases}$$

Proposición 2.1. *El funcional $p(f)$ es monótono y además cumple que $p(0)=0$, $p(-1)=-1$, $p(1)=1$.*

Demostración.
Sean $f,g\in\mathcal{F}(Z)$ con $f\le g$.
Si $\Phi(g)\neq\emptyset$, entonces existen $u\in\mathcal{L}^1(\mu)$, $v\in\mathcal{L}^1(\nu)$ tales que $g\le u+v$, por lo tanto

$$f\le g\le u+v,$$

es decir, $\Phi(f)\neq\emptyset$ y además $p(f)\le p(g)$.
Si $\Phi(g)=\emptyset$, entonces $p(g)=\infty$ y cualquiera sea el valor de $p(f)$ se obtiene $p(f)\le p(g)$; es decir,

$$f\mapsto p(f)$$

es monótono.

Por otra parte, de las obvias desigualdades $0(x,y) \leq 0(x)+0(y)$, $1(x,y) \leq 1(x)+0(y)$, $-1(x,y) \leq 0(x)+(-1)(y)$ y como μ, ν, π son medidas de probabilidad en X, Y, Z respectivamente, entonces

$$p(0)=0, \quad p(1)=1 \quad y \quad p(-1)=-1.$$

$\square$

Observación 2.2. Por el Corolario 1.51, si $f \in \mathcal{F}(Z)$, $(u,v) \in \Phi(f)$ y $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$. Entonces

$$\pi(f) \leq \pi(u \oplus v) = \mu(u)+\nu(v),$$

es decir $\pi(f) \leq p(f)$ para toda $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ y $f \in \mathcal{F}(Z)$.

Proposición 2.3. *Sobre el espacio $\mathcal{C}_b(Z)$, el funcional $p : \mathcal{C}_b(Z) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tiene las siguientes propiedades:*

$$(i)\ -\| f \|_\infty \leq \inf_{(x,y)\in Z} f(x,y) \leq p(f) \leq \sup_{(x,y)\in Z} f \leq \| f \|_\infty \ \ \forall f \in \mathcal{C}_b(Z);$$

$$(ii)\ Para\ f \in \mathcal{C}_b(Z),\ la\ función\ f \mapsto p(f)\ es\ sublineal;$$

$$(iii)\ p(u \oplus v) = \mu(u)+\nu(v)\ para\ toda\ u \in \mathcal{C}_b(X)\ y\ v \in \mathcal{C}_b(Y).$$

Demostración.
(i) Sea $f \in \mathcal{C}_b(Z)$. Como $\| f \|_\infty = \sup\{| f(x,y) | : (x,y) \in Z\}$, entonces se tiene que

$$-\| f \|_\infty \leq \inf_{(x,y)\in Z} f(x,y) \quad y \quad \sup_{(x,y)\in Z} f(x,y) \leq \| f \|_\infty .$$

Para el caso $\inf\limits_{(x,y)\in Z} f \leq p(f)$:
Sea $f : Z \to [-\infty,\infty)$, si $\Phi(f)=\emptyset$ entonces se cumple que $\inf\limits_{(x,y)\in Z} f \leq p(f)$.
Si $\Phi(f) \neq \emptyset$, existen u, v tales que $f \leq u+v$, y como

$$\inf_{(a,b)\in Z} f(a,b) \leq f(x,y) \leq u(x)+v(y),$$

entonces al integrar se obtiene que

$$\int_{X\times Y} \inf_{(a,b)\in Z} f(a,b)d\pi \leq \int_{X\times Y} f(x,y)d\pi \leq \int_X u(x)d\mu + \int_Y v(y)d\nu = \mu(u)+\nu(v)\ \forall (x,y) \in Z,$$

de donde

$$\inf_{(a,b)\in Z} f(a,b) \leq p(f)$$

ya que π es una medida de probabilidad.

Para el caso $p(f) \leq \sup f$:
Se sabe que

$$f(x,y) \leq \sup_{(a,b)\in Z} f(a,b), \ \forall (x,y) \in Z,$$

luego al tomar

$$u(x) = \sup_{(a,b)\in Z} f(a,b) \quad y \quad v(y) = 0,$$

se tiene que $f(x,y) \leq u(x) + v(y)$, y al integrar, se obtiene

$$\int_X \sup_{(a,b)\in Z} f(a,b) d\mu + \int_Y 0 d\nu = \sup_{(a,b)\in Z} f(a,b),$$

de donde

$$p(f) \leq \sup_{(a,b)\in Z} f(a,b).$$

(ii) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda > 0$ y $f \in \mathcal{C}_b(Z)$, entonces

$$\begin{aligned} p(\lambda f) &= \begin{cases} \text{ínf}\left\{\mu(\lambda u) + \nu(\lambda v) : (\lambda u, \lambda v) \in \Phi(\lambda f)\right\}, & \text{si } \Phi(\lambda f) \neq \emptyset \\ \infty, & \text{si } \Phi(\lambda f) = \emptyset. \end{cases} \\ &= \lambda \begin{cases} \text{ínf}\left\{\mu(u) + \nu(v) : (u,v) \in \Phi(f)\right\}, & \text{si } \Phi(f) \neq \emptyset \\ \infty, & \text{si } \Phi(f) = \emptyset. \end{cases} \\ &= \lambda p(f). \end{aligned}$$

Ahora bien, sean $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_b(Z)$, $(u_1, v_1) \in \Phi(f_1)$ y $(u_2, v_2) \in \Phi(f_2)$. Entonces

$$(u_1 + u_2, v_1 + v_2) \in \Phi(f_1 + f_2),$$

por lo que

$$p(f_1 + f_2) \leq \mu(u_1 + u_2) + \nu(v_1 + v_2) = (\mu(u_1) + \nu(v_1)) + (\mu(u_2) + \nu(v_2)),$$

es decir

$$p(f_1 + f_2) \leq p(f_1) + p(f_2).$$

(iii) Como $(u,v) \in \Phi(u \oplus v)$ y $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$, por el Corolario 1.51 se tiene que

$$\pi(u \oplus v) \leq p(u \oplus v),$$

de donde

$$\mu(u) + \nu(v) = \pi(u \oplus v) \leq p(u \oplus v) \leq \mu(u) + \nu(v),$$

y por lo tanto se sigue que

$$p(u \oplus v) = \mu(u) + \nu(v).$$

□

2. Representación de ciertos funcionales

En ésta sección se recordarán algunos resultados y definiciones de teoría de la medida que permitirán la representación de funcionales que cumplen ciertas condiciones de regularidad, en términos de integrales respecto a una medida de Radon.

DEFINICIÓN 2.4. Dado S un espacio completamente regular y $L : \mathcal{C}_b(S) \to \mathbb{R}$ un funcional lineal. Se dice que L es *regular interior* si para todo $\epsilon > 0$ existe un conjunto compacto $Q(\epsilon) \in \mathfrak{K}(S)$ tal que $\mid L(f) \mid < \epsilon$ para toda $f \in \mathcal{C}_b(S)$ que cumpla:
(i) f se anula en $Q(\epsilon)$,
(ii) $\| f \|_\infty \leq 1$.

DEFINICIÓN 2.5. Sea X un conjunto y $m : 2^X \to [0, +\infty]$ una función definida sobre todos los subconjuntos de X. Se dice que m es una *medida exterior* sobre X si:

$$(i)\ m(\emptyset) = 0;$$
$$(ii)\ m(A) \leq m(B),\ \textit{siempre que } A \subset B;$$
$$(iii)\ m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n),\ \textit{para toda sucesión } \{A_n\}_{n\geq 1} \subset X.$$

DEFINICIÓN 2.6. Sea X un conjunto y $m : 2^X \to [0, +\infty]$ una función definida sobre todos los subconjuntos de X tal que $m(\emptyset) = 0$. Un conjunto $A \subset X$ se dice *medible Carathéodory* respecto a m (o *Carathéodory m-medible*) si para todo $E \subset X$, se tiene que

$$m(E \cap A) + m(E \setminus A) = m(E).$$

La clase de todos los conjuntos Carathéodory m-medibles se denotará por $\mathfrak{M}_m$.

TEOREMA 2.7 (ver [**12**]). *Sea m una función de conjuntos con valores en $[0,+\infty]$ definida sobre la clase de todos los subconjuntos de un conjunto X tal que $m(\emptyset)=0$. Entonces:*

(1) *$\mathfrak{M}_m$ es un algebra y la función m es aditiva sobre $\mathfrak{M}_m$.*

(2) *Para toda sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos, $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset \mathfrak{M}_m$ se cumple que*

$$m(E\cap\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}m(E\cap A_i),\quad \forall E\subset X;$$

$$m(E\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}m(E\cap A_i)+\lim_{n\to\infty}m(E\cap\bigcup_{i=n}^{\infty}A_i),\quad \forall E\subset X.$$

(3) *Si la función m es una medida exterior sobre X, entonces la clase $\mathfrak{M}_m$ es una σ-algebra y la función m con valores en $[0,+\infty]$ es σ-aditiva sobre $\mathfrak{M}_m$.*

DEMOSTRACIÓN.

(1) Sea $A\subset X$, se sabe que $A\setminus\emptyset=A$ y $(A^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}}=A$. Por lo tanto, de la igualdad

$$m(E\cap A)+m(E\setminus A)=m(E)$$

se sigue que, $\emptyset\in\mathfrak{M}_m$ y la clase $\mathfrak{M}_m$ es cerrada bajo complementos.
Sean $A_1,A_2\in\mathfrak{M}_m$ y $E\subset X$; como A_1 y A_2 son m-medibles se tiene que

$$\begin{aligned}m(E)&=m(E\cap A_1)+m(E\setminus A_1)\\&=m(E\cap A_1)+m((E\setminus A_1)\cap A_2)+m((E\setminus A_1)\setminus A_2)\\&=m(E\cap A_1)+m((E\setminus A_1)\cap A_2)+m(E\setminus(A_1\cup A_2)).\end{aligned}\tag{I}$$

De las siguientes igualdades:

$$E\cap(A_1\cup A_2)\cap A_1=E\cap A_1,\quad E\cap(A_1\cup A_2)\cap A_1^{\mathsf{c}}=(E\setminus A_1)\cap A_2,$$

y la m-medibilidad de A_1, se obtiene

$$\begin{aligned}m(E\cap(A_1\cup A_2))&=m(E\cap(A_1\cup A_2)\cap A_1)+m(E\cap(A_1\cup A_2)\setminus A_1)\\&=m(E\cap A_1)+m((E\setminus A_1)\cap A_2).\end{aligned}\tag{II}$$

Al sustituir la expresión anterior en (I), se tiene que

$$m(E)=m(E\cap(A_1\cup A_2))+m(E\setminus(A_1\cup A_2));$$

es decir, $A_1\cup A_2\in\mathfrak{M}_m$ y por lo tanto $\mathfrak{M}_m$ es un algebra.

Sean A_1,A_2 conjuntos disjuntos y al considerar $E=X$ en la expresión (II) se obtiene

$$m(A_1\cup A_2)=m(A_1)+m(A_2).$$

(2) Sea $\{A_i\}_{i\geq 1} \subset \mathfrak{M}_m$ una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos. Si se denota por S_n y R_n como:

$$S_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad y \quad R_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i.$$

De la igualdad (II), se tiene

$$m(E \cap S_n) = m(E \cap S_{n-1}) + m(E \cap A_n),$$

ya que

$$(E \setminus S_{n-1}) \cap A_n = E \cap S_{n-1}^{\mathsf{c}} = E \cap A_n.$$

Al hacer inducción sobre n se obtiene la primera igualdad de (2).
Ahora bien, de las igualdades

$$R_1 \cap S_{n-1} = S_{n-1} \quad y \quad R_1 \setminus S_{n-1} = R_n,$$

se sigue que

$$\begin{aligned} m(E \cap R_1) &= m(E \cap R_1 \cap S_{n-1}) + m(E \cap R_1 \setminus S_{n-1}) \\ &= m(E \cap S_{n-1}) + m(E \cap R_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} m(E \cap A_i) + m(E \cap R_n). \end{aligned}$$

Por otra parte, de la medibilidad de A_n se obtiene que:

$$\begin{aligned} m(E \cap R_n) &= m(E \cap R_n \cap A_n) + m(E \cap R_n \setminus A_n) \\ &= m(E \cap A_n) + m(E \cap R_{n+1}). \end{aligned}$$

En consecuencia $\{m(E \cap R_n)\}_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente y así

$$m(E \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E \cap A_i) + \lim_{n\to\infty} m(E \cap \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i),$$

(3) Sea $\{A_i\}_{i\geq 1} \subset \mathfrak{M}_m$ una sucesión de conjuntos disjuntos dos a dos.
Sea $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. La segunda igualdad en (2) implica que para $E \subset X$ se tiene

$$m(E \cap A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m(E \cap A_i),$$

y como m es una medida exterior entonces m es σ-subaditiva y en consecuencia se tiene la otra desigualdad. Por lo tanto

$$\text{(III)} \qquad m(E \cap A) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E \cap A_i).$$

Por otra parte, como $\mathfrak{M}_m$ es un algebra entonces

$$S_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \in \mathfrak{M}_m,$$

por lo tanto, de la primera igualdad en (2) se sigue que

$$m(E) = m(E \cap S_n) + m(E \setminus S_n) \geq \sum_{i=1}^{n} m(E \cap A_i) + m(E \setminus A) \quad \forall n,$$

y de la igualdad (III) se obtiene que

$$m(E) \geq m(E \cap A) + m(E \setminus A),$$

y por la subaditividad de m se tiene la desigualdad contraria; de donde, $A \in \mathfrak{M}_m$ y en consecuencia $\mathfrak{M}_m$ es una σ-algebra.
Por último al considerar el conjunto $E = X$ en (III) se obtiene la σ-aditividad de m sobre $\mathfrak{M}_m$.

□

OBSERVACIÓN 2.8. En lo sucesivo el símbolo **1** denotará la función constantemente igual a 1.

LEMA 2.9. *Sea $\mathcal{F}$ un espacio vectorial de funciones sobre un conjunto Ω tal que $\max(f,g) \in \mathcal{F}$ para todo $f, g \in \mathcal{F}$ y $\mathbf{1} \in \mathcal{F}$. Sea L un funcional lineal sobre $\mathcal{F}$ con las siguientes propiedades: $L(f) \geq 0$ siempre que $f \geq 0$, $L(\mathbf{1}) = 1$, y $L(f_n) \to 0$ para toda sucesión de funciones $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ decreciente a cero. Sea el conjunto $\mathcal{L}^+$ definido por*

$$\mathcal{L}^+ = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} | f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}, 0 \leq f_n \leq f_{n+1},\ f \text{ es acotada}, \right\}.$$

Entonces el funcional $L_1 : \mathcal{L}^+ \to \mathbb{R}$ definido por $L_1(f) = \lim_{n\to\infty} L(f_n)$ está bien definido, coincide con el funcional L sobre funciones acotadas no negativas en $\mathcal{F}$ y posee las siguientes propiedades:

(i) $L_1(f) \leq L_1(g)$ *para toda* $f, g \in \mathcal{L}^+$ *con* $f \leq g$.

(ii) $L_1(f+g) = L_1(f) + L_1(g)$, *y* $L_1(cf) = cL_1(f)$ *para toda* $f, g \in \mathcal{L}^+$ *y todo* $c \in [0, +\infty)$.

(iii) $\min(f,g) \in \mathcal{L}^+$, $\max(f,g) \in \mathcal{L}^+$ *para toda* $f, g \in \mathcal{L}^+$, *y* $L_1(f) + L_1(g) = L_1(\min(f,g)) + L_1(\max(f,g))$.

(iv) $\lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{L}^+$ *para toda sucesión* $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{L}^+$ *de funciones creciente acotada uniformemente, y se tiene que* $L_1(\lim_{n\to\infty} f_n) = \lim_{n\to\infty} L_1(f_n)$.

Demostración.
Observe que si $\{f_n\}_{n\geq 1}$ y $\{g_k\}_{k\geq 1}$ son dos sucesiones de funciones no negativas en $\mathcal{F}$ con

$$\lim_{n\to\infty} f_n \leq \lim_{k\to\infty} g_k,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} L(f_n) \leq \lim_{k\to\infty} L(g_k).$$

En efecto, si se tiene una sucesión de funciones $\{\psi_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ creciente a otra función ψ, entonces la sucesión $\{\psi - \psi_n\}_{n\geq 1}$ decrece a cero, y por las propiedades del funcional L, entonces se cumple que $L(\psi - \psi_n) \to 0$, es decir, $L(\psi) = \lim_{n\to\infty} L(\psi_n)$.
Ahora bien, como

$$\min(f_n, g_k) \in \mathcal{F} \quad y \quad \min(f_n, g_k) \uparrow f_n \quad \textit{cuando } k \to \infty$$

ya que

$$f_n \leq \lim_{k\to\infty} g_k,$$

entonces

$$L(f_n) = \lim_{k\to\infty} L(\min(f_n, g_k)) \leq \lim_{k\to\infty} L(g_k),$$

por lo tanto basta tomar el límite cuando $n \to \infty$. Esto muestra que L_1 sobre $\mathcal{L}^+$ está bien definido, i.e, es independiente de la elección de una sucesión creciente, convergente a un elemento en $\mathcal{L}^+$ y en particular, se obtiene que sobre $\mathcal{F} \cap \mathcal{L}^+$ el funcional L_1 coincide con L. Las propiedades (i) y (ii) se siguen del hecho que se satisfacen en $\mathcal{F}$.

Por otra parte, si $\{f_n\}_{n\geq 1}, \{g_n\}_{n\geq 1}$ son dos sucesiones en $\mathcal{F}$ no negativas tales que $f_n \uparrow f$ y $g_n \uparrow g$, entonces se tiene que

$$\max(f,g) = \lim_{n\to\infty} \max(f_n, g_n),$$

$$\text{mín}(f,g) = \lim_{n\to\infty} \text{mín}(f_n, g_n),$$

y ambos límites son monótonos ya que $\text{máx}(f_n, g_n) \uparrow \text{máx}(f,g)$ y $\text{mín}(f_n, g_n) \uparrow \text{mín}(f,g)$. Por lo tanto, la propiedad (iii) se sigue de la definición de L_1 y la igualdad

$$\text{máx}(f,g) + \text{mín}(f,g) = f + g,$$

ya que

$$L_1(\text{mín}(f,g)) + L_1(\text{máx}(f,g)) = \lim_{n\to\infty} L(\text{mín}(f_n,g_n) + \text{máx}(f_n,g_n))$$
$$= \lim_{n\to\infty} L(f_n + g_n) = \lim_{n\to\infty} L(f_n) + \lim_{n\to\infty} L(g_n) = L_1(f) + L_1(g).$$

Para verificar (iv), sea $\{f_{m,n}\}_{m\geq 1} \subset \mathcal{F} \uparrow f_n \in \mathcal{L}^+$ si $m \to \infty$. Si se define

$$g_m = \text{máx}_{n\leq m} f_{m,n},$$

entonces

$$g_m \in \mathcal{F},\;\; g_m \leq g_{m+1} \quad y \quad f_{m,n} \leq g_m \leq f_m \quad si\ n \leq m.$$

Al tomar

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad y \quad \lim_{m\to\infty} g_m = g,$$

como $g_m \leq f_m \leq f$, al fijar n y hacer $m \to \infty$ entonces

$$g \leq f \quad y \quad f_{m,n} \uparrow f_n,$$

en consecuencia

$$f_n \leq g \quad \forall n,$$

de donde $f \leq g$. Esto es

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{m\to\infty} g_m \in \mathcal{L}^+.$$

Por otra parte,

$$L_1(g_m) \leq L_1(g_{m+1}) \quad y \quad L_1(f_{m,n}) \leq L_1(g_m) \leq L_1(f_m)\ si\ n \leq m,$$

por lo tanto

$$\lim_{m\to\infty} L_1(f_m) = \lim_{m\to\infty} L_1(g_m) = L_1(\lim_{m\to\infty} g_m) = L_1(\lim_{m\to\infty} f_m).$$

$\square$

TEOREMA 2.10 (ver [**10**]). *Sea $\mathcal{F}$ un espacio vectorial de funciones sobre un conjunto Ω tal que* $\text{máx}(f,g) \in \mathcal{F}$ *para todo* $f, g \in \mathcal{F}$ *y* $\mathbf{1} \in \mathcal{F}$. *Sea L un funcional lineal sobre $\mathcal{F}$ con las siguientes propiedades: $L(f) \geq 0$ siempre que $f \geq 0$, $L(\mathbf{1}) = 1$, y $L(f_n) \to 0$ para toda sucesión de funciones $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ decreciente a cero. Entonces, existe una única medida de probabilidad μ en la σ-algebra $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{A}$ generada por $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ y*

$$L(f) = \int_\Omega f d\mu, \quad \forall f \in \mathcal{F}. \tag{2.10.1}$$

DEMOSTRACIÓN.
(1) Sea $\mathcal{G}$ la clase de todos los conjuntos G tal que $I_G \in \mathcal{L}^+$ y sea

$$\mu(G) = L_1(I_G) \quad \textit{para todo } G \in \mathcal{G},$$

donde L_1 es el funcional dado por el lema anterior. Como se tiene que

$$I_{G_1 \cap G_2} = \text{mín}(I_{G_1}, I_{G_2}),\ I_{G_1 \cup G_2} = \text{máx}(I_{G_1}, I_{G_2}),$$

entonces por la propiedad (iii) del lema 2.9, la clase $\mathcal{G}$ es cerrada respecto a intersecciones finitas y uniones finitas.
Para ver que la clase $\mathcal{G}$ es cerrada respecto a uniones numerables note que si $\{G_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de conjuntos en $\mathcal{G}$ tal que $G_n \uparrow G$, entonces $\{I_{G_n}\}_{n\geq 1} \uparrow I_G$ y por la propiedad (iv), entonces

$$I_G = \lim_{n\to\infty} I_{G_n} \in \mathcal{L}^+,$$

de donde

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \in \mathcal{G}.$$

Adicionalmente, la función μ es no negativa, monótona, aditiva en $\mathcal{G}$ y cumple que

$$\begin{aligned}\mu(G_1 \cap G_2) + \mu(G_1 \cup G_2) &= L_1(I_{G_1 \cap G_2}) + L_1(I_{G_1 \cup G_2}) \\ &= L_1(\text{mín}(I_{G_1}, I_{G_2})) + L_1(\text{máx}(I_{G_1}, I_{G_2})) \\ &= \mu(G_1) + \mu(G_2) \quad \textit{para todo } G_1, G_2 \in \mathcal{G},\end{aligned}$$

y

$$\mu(G) = L_1(I_G) = L_1(\lim_{n\to\infty} I_{G_n})$$
$$= \lim_{n\to\infty} L_1(I_{G_n}) = \lim_{n\to\infty} \mu(G_n),\ \textit{si } \{G_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{G} \textit{ es una sucesión creciente a } G.$$

Note además que $\mu(\Omega) = 1$. De acuerdo al Teorema 2.7, la función

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\{\mu(G) : G \in \mathcal{G}, A \subseteq G\},$$

es una medida en la clase

$$\mathcal{B} = \{B \subset \Omega : \mu^*(B) + \mu^*(\Omega \setminus B) = 1\},$$

por lo tanto la restricción de μ^* a $\mathcal{B}$ es la medida que se quiere y se denotará por μ.

(2) Se debe verificar que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{B}$.
Si $f \in \mathcal{L}^+$, entonces

$$\{f > c\} \in \mathcal{G} \quad \textit{para todo } c \in \mathbb{R}.$$

En efecto,

$$I_{\{f>c\}} = \lim_{n\to\infty} \min(1, n \max(f - c, 0)),$$

en consecuencia, todas las funciones en $\mathcal{L}^+$ son medibles respecto a la σ-algebra $\sigma(\mathcal{G})$.
Por otra parte, todas esas funciones son medibles respecto a $\sigma(\mathcal{F})$, y como $\mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{L}^+) = \sigma(\mathcal{F})$, entonces se obtiene la igualdad

$$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{G}).$$

Basta entonces demostrar que $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$.
Sean $G \in \mathcal{G}$ y $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ una sucesión creciente de funciones no negativas tal que

$$I_G = \lim_{n\to\infty} f_n,$$

entonces

$$\mu^*(G) = \mu(G) = \lim_{n\to\infty} L_1(f_n).$$

Como

$$\mu^*(G) + \mu^*(\Omega \setminus G) \geq 1,$$

para probar que $G \in \mathcal{B}$, es suficiente ver que

$$\mu^*(G) + \mu^*(\Omega \setminus G) \leq 1;$$

lo que es equivalente a la desigualdad

$$\mu^*(\Omega \setminus G) \leq \lim_{n\to\infty} L_1(1 - f_n). \tag{2.10.2}$$

Las funciones $\{1 - f_n\}_{n\geq 1}$ son decrecientes a $I_{\Omega\setminus G}$, además para cualquier n y cualquier $c \in (0, 1)$, el conjunto $U_c = \{1 - f_n > c\}$ contiene a $\Omega \setminus G$, y por lo anterior, entonces pertenece a $\mathcal{G}$. En consecuencia de la desigualdad

$$I_{U_c} \leq c^{-1}(1 - f_n),$$

se obtiene

$$\mu^*(\Omega \setminus G) \leq \mu(U_c) = L_1(I_{U_c}) \leq c^{-1} L_1(1 - f_n).$$

Al hacer $c \to 1$ y luego $n \to \infty$, se obtiene (2.10.2).

(4) Finalmente falta demostrar que $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}^1(\mu)$ y que (2.10.1) es cierto.

Se sabe del apartado anterior que todas las funciones en $\mathcal{L}^+$ son $\mathcal{A}$-medibles. Si $f = I_G$, donde $G \in \mathcal{G}$, entonces la igualdad se sigue de la definición de μ. Esta igualdad se mantiene para cualquier combinación lineal finita de funciones indicadoras de conjuntos en $\mathcal{G}$.
Sea $f \in \mathcal{L}^+$ y $f \leq 1$. Entonces f es el límite de la sucesión creciente de funciones

$$f_n := \sum_{j=1}^{2^n-1} j2^{-n} I_{\{j2^{-n}<f\leq(j+1)2^{-n}\}} = 2^{-n} \sum_{j=1}^{2^n-1} I_{\{f>j2^{-n}\}}.$$

Se sigue entonces que

$$L_1(f_n) = \int_\Omega f_n d\mu.$$

La propiedad (iv) que se estableció en el lema 2.9 y las propiedades de la integral muestran que cuando $n \to \infty$, el lado izquierdo y el lado derecho de la igualdad convergen a $L_1(f)$ y a $\int_\Omega f d\mu$, respectivamente. Más aún, se puede extender el mismo razonamiento a todas las funciones no negativas $f \in \mathcal{F}$, ya que

$$f = \lim_{n\to\infty} \min(f, n) \quad y \quad \min(f, n) \in \mathcal{L}^+.$$

Finalmente, para cualquier función $f \in \mathcal{F}$, se tiene que

$$f = \max(f, 0) - \max(-f, 0),$$

lo cual conlleva la afirmación.
La unicidad de μ en (2.10.1) se sigue del hecho que está únicamente determinada en la clase $\mathcal{G}$, que es cerrada respecto a intersecciones finitas y genera $\mathcal{A}$.

$\square$

TEOREMA 2.11 (ver [**10**]). *Sea $\mathcal{F}$ un espacio vectorial de funciones acotadas sobre un conjunto Ω tal que* $\max(f, g) \in \mathcal{F}$ *para todo $f, g \in \mathcal{F}$ y $\mathbf{1} \in \mathcal{F}$. Supongamos que existe un funcional lineal L sobre $\mathcal{F}$ continuo respecto a la norma $\|f\| = \sup_{x\in\Omega}|f(x)|$. Entonces L puede ser representado en la forma $L = L^+ - L^-$, donde $L^+ \geq 0$, $L^- \geq 0$ y para todo $f \in \mathcal{F}$ no negativa,*

$$L^+(f) = \sup_{0\leq g\leq f} L(g), \quad L^-(f) = -\inf_{0\leq g\leq f} L(g). \tag{2.11.1}$$

Demostración.
Dadas dos funciones no negativas $f, g \in \mathcal{F}$ y una función $h \in \mathcal{F}$ tal que $0 \leq h \leq f + g$, se puede escribir $h = h_1 + h_2$, donde $h_1, h_2 \in \mathcal{F}$,

$$0 \leq h_1 \leq f, \quad 0 \leq h_2 \leq g.$$

En efecto:

Sean $h_1 = \text{mín}(f, h)$, $h_2 = h - h_1$. Entonces

$$h_1, h_2 \in \mathcal{F}, \quad 0 \leq h_1 \leq f, \quad h_2 \geq 0 \quad y \quad h_2 \leq g,$$

ya que, si $h_1(x) = h(x)$, entonces $h_2(x) = 0$ y si $h_1(x) = f(x)$, entonces

$$h_2(x) = h(x) - f(x) \leq g(x),$$

porque $h \leq g + f$.

Sea $L^+(f)$ definida como en (2.11.1). Note que la cantidad $L^+(f)$ es finita, ya que

$$|L(h)| \leq \|L\|\|h\| \leq \|L\|\|f\|,$$

además para todo número real no negativo t y $f \geq 0$,

$$L^+(tf) = \sup_{0 \leq tg \leq tf} L(tg) = t \sup_{0 \leq g \leq f} L(g) = tL^+(f).$$

Para funciones no negativas $f, g \in \mathcal{F}$ el funcional L^+ es aditivo. En efecto sean $f \geq 0$ y $g \geq 0$ funciones en $\mathcal{F}$, entonces

$$\begin{aligned}
L^+(f+g) &= \sup\{L(h) : 0 \leq h \leq f + g\} \\
&= sup\{L(h_1) + L(h_2) : 0 \leq h_1 \leq f,\ 0 \leq h_2 \leq g\} \\
&= \sup\{L(h_1) : 0 \leq h_1 \leq f\} + \sup\{L(h_2) : 0 \leq h2 \leq g\} \\
&= L^+(f) + L^+(g)
\end{aligned}$$

Ahora bien, para toda $f \in \mathcal{F}$, se define

$$L^+(f) = L^+(f^+) - L^+(f^-), \quad donde \quad f = f^+ - f^- \quad y \quad f^+ = \text{máx}(f, 0),\ f^- = -\text{mín}(f, 0).$$

Note que si $f = f_1 - f_2$, con $f_1, f_2 \geq 0$, entonces

$$L^+(f) = L^+(f_1) - L^+(f_2).$$

En efecto, como $f = f^+ - f^-$ entonces se obtiene que

$$f_1 + f^- = f_2 + f^+,$$

por lo tanto

$$L^+(f_1) + L^+(f^-) = L^+(f_2) + L^+(f^+),$$

que es lo que se quería y adicionalmente se sigue que

$$L^+(tf) = tL^+(f) \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ y } f \in \mathcal{F}.$$

La aditividad del funcional L^+ para funciones $f, g \in \mathcal{F}$ se sigue de su aditividad en funciones no negativas, las propiedades antes mencionadas y el hecho que se puede escribir $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$. Esto es

$$f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$$

y

$$\begin{aligned} L^+(f + g) &= L^+(f^+ + g^+) - L^+(f^- + g^-) \\ &= L^+(f) + L^+(g). \end{aligned}$$

Finalmente, por definición $L^+(f) \geq L(f)$ para funciones no negativas $f \in \mathcal{F}$, por lo tanto, el funcional L^- definido como $L^- := L^+ - L$ es no negativo y en consecuencia se tiene el resultado.

□

Corolario 2.12 (ver[**10**]). *Suponga que además de las condiciones del Teorema anterior, el funcional L tiene la siguiente propiedad: $L(f_n) \to 0$ para toda sucesión de funciones $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ monótona decreciente a cero. Entonces los funcionales L^+ y L^- también tienen ésta propiedad. En particular, L^+ y L^- están definidos por medidas sobre $\sigma(\mathcal{F})$ y tienen representación (2.10.1) respecto a esas medidas.*

Demostración.
Sea $\{f_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{F}$ monótona decreciente a cero y sea $\epsilon > 0$. Para cada n se puede encontrar una función $\varphi_n \in \mathcal{F}$ tal que $0 \leq \varphi_n \leq f_n$ y además

$$L(\varphi_n) \geq L^+(f_n) - \epsilon 2^{-n},$$

ya que $L^+(f) = \sup_{0\le g\le f} L(g)$.
Sea $g_n = \text{mín}(\varphi_1, ..., \varphi_n)$. Se puede verificar por inducción que

$$L^+(f_n) \le L(g_n) + \epsilon \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}. \tag{2.12.1}$$

Esta desigualdad se cumple para $n = 1$, ahora bien suponga que se cumple para $n = 1, ..., m$.
De las siguientes igualdades:

$$g_{m+1} = \text{mín}(g_m, \varphi_{m+1})$$

y

$$\text{máx}(g_m, \varphi_{m+1}) + \text{mín}(g_m, \varphi_{m+1}) = g_m + \varphi_{m+1},$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} L(\text{máx}(g_m, \varphi_{m+1})) + L(g_{m+1}) &= L(g_m) + L(\varphi_{m+1}) \\ &\ge L(g_m) + L^+(f_{m+1}) - \epsilon 2^{-m-1}. \end{aligned}$$

Por otro lado, como

$$g_m \le \varphi_m \le f_m, \quad \varphi_{m+1} \le f_{m+1} \le f_m,$$

y por la hipótesis inductiva entonces se sigue que

$$L(\text{máx}(g_m, \varphi_{m+1})) \le L^+(f_m) \le L(g_m) + \epsilon \sum_{i=1}^{m} 2^{-i},$$

y en consecuencia

$$L(g_m) + L^+(f_{m+1}) - \epsilon 2^{-m-1} - L(g_{m+1}) \le L(g_m) + \epsilon \sum_{i=1}^{m} 2^{-i},$$

por lo tanto se obtiene (2.12.1) para $n = m + 1$, es decir la desigualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.
Ahora bien, como $g_n \le f_n$ para todo n, entonces la sucesión $\{g_n\}_{n\ge1}$ decrece a cero, por lo que $L(g_n) \to 0$ y de (2.12.1) se sigue que

$$\limsup_{n\to\infty} L^+(f_n) \le \epsilon,$$

como ϵ es arbitrario y $L^+(f_n)$ es no negativo, entonces $L^+(f_n) \to 0$. La afirmación para L^- se sigue de manera similar. □

TEOREMA 2.13 (ver [**10**][**14**]). *Sea X un espacio topológico. Si L es un funcional lineal continuo sobre $\mathcal{C}_b(X)$ que satisface la siguiente propiedad:*

$$\lim_{n\to\infty} L(f_n) = 0,$$

para toda sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{C}_b(X)$ *decreciente puntualmente a cero. Entonces existe una medida de Baire tal que*

$$L(f) = \int_X f(x)d\mu(x),$$

para toda $f \in \mathcal{C}_b(X)$.

DEMOSTRACIÓN.
Se sigue del Teorema 2.10 y Corolario 2.12.

□

OBSERVACIÓN 2.14. Los Teoremas y Corolarios antes vistos permiten demostrar el siguiente resultado de representación de funcionales lineales continuos que son regulares interiores(ver definición2.4).

TEOREMA 2.15 (ver [**10**]). *Sea* S *un espacio completamente regular,* $L : \mathcal{C}_b(S) \to \mathbb{R}$ *un funcional lineal continuo y regular interior. Entonces existe una única medida de Radon* σ*, tal que*

$$L(f) = \int_S f d\sigma,$$

para toda $f \in \mathcal{C}_b(S)$.

DEMOSTRACIÓN.
Sean $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{C}_b(S)$ una sucesión de funciones monótonas decreciente a cero tal que $|f_n| < 1$ para todo $n \geq 1$ y suponga que $||L|| < 1$. Sea $\epsilon \in (0,1)$ y considere el correspondiente conjunto compacto K_ϵ. Por el Teorema de Dini ([ver[**19**], Theo. 7.13. p.150]), se sabe que toda sucesión de funciones continuas monótona decreciente a cero sobre un conjunto compacto converge uniformemente, por lo tanto existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{K_\epsilon} |f_n| < \epsilon,$$

para todo $n > n_0$.
Para todo $n \geq n_0$ sea $g_n \in \mathcal{C}_b(X)$ tal que $g_n = f_n$ sobre K_ϵ y $|g_n| < \epsilon$. Entonces

$$|L(g_n)| < \epsilon,$$

ya que L es regular interior. Como $f_n - g_n = 0$ sobre K_ϵ y $|f_n - g_n| \leq 2$, se sigue que

$$|L(f_n - g_n)| \leq 2\epsilon,$$

de donde

$$|L(f_n)| = |L(f_n - g_n + g_n)| \leq |L(f_n - g_n)| + |L(g_n)| < 3\epsilon,$$

y en consecuencia, como se verifican las hipótesis del teorema anterior, el funcional L es generado por una medida de Baire σ.
Para ver que σ es regular interior, suponga que $B \in \mathcal{B}a(S)$ no intersecta el conjunto compacto K_ϵ, por la regularidad de la medida de Baire σ se puede encontrar un conjunto funcionalmente cerrado $Z \subset B$ y un abierto U tal que $B \subset U$ y $\sigma(U \setminus Z) < \epsilon/2$.
Por la completa regularidad del espacio S, existe una función continua $f : S \to [0,1]$ tal que $f = 1$ sobre Z y $f = 0$ afuera de U; en particular $f = 0$ sobre K_ϵ, por lo tanto

$$\int_S f d\sigma = \int_U f d\sigma + \int_{S\setminus U} f d\sigma$$

$$\leq \int_Z f d\sigma + \int_{B\setminus Z} f d\sigma + \int_{U\setminus B} f d\sigma < \sigma(Z) + \epsilon/2 + \epsilon/2 = \sigma(Z) + \epsilon$$

de donde

$$\sigma(Z) \leq \int_S f d\sigma < \sigma(Z) + \epsilon \leq \sigma(B) + \epsilon,$$

en consecuencia

$$\sigma(Z) < \epsilon/2,$$

y así

$$\sigma(B) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

□

En el teorema anterior se obtuvo una representación para funcionales lineales continuos en términos de una medida de Baire que es regular interior. ¿Es suficiente ver esto para asegurar que la medida es de Radon?, es decir, ya se vio que toda medida de Borel que es regular y regular interior es una medida de Radon pero no se ha visto si esto es cierto para una medida de Baire.
La respuesta es si, y viene dada por el siguiente teorema que damos sin demostración.

Teorema 2.16 (ver [**10**]). *Sea X un espacio topológico completamente regular. Toda medida de Baire μ sobre X que es regular interior admite una única extensión a una medida de Radon.*

Ahora bien, después de desarrollar todas éstas herramientas para la representación de funcionales continuos, el siguiente resultado muestra una relación entre éstos y el funcional p antes definido.

TEOREMA 2.17. *Sea $I : \mathcal{C}_b(Z) \to \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que $I(f) \leq p(f)$ para toda $f \in \mathcal{C}_b(Z)$. Entonces existe una única medida $\sigma \in \Pi(\mu, \nu)$ tal que $I(f) = \int_Z f d\sigma$.*

DEMOSTRACIÓN.
Considere el Teorema 2.15 para el caso $S = Z$. Por el Corolario 1.51 y la proposición 2.3 se tiene que

$$I(f) \leq p(f) \leq \|f\|_\infty$$

para todo $f \in \mathcal{C}_b(Z)$. Al reemplazar f por $-f$ se obtiene que $-I(f) \leq \|f\|_\infty$ y por lo tanto

$$|I(f)| \leq \|f\|_\infty,$$

es decir, I es continuo. Para ver que I es regular interior sean $\epsilon > 0$ y K, L conjuntos compactos de X y Y respectivamente que satisfacen

$$\mu(X \setminus K) < \epsilon/2 \quad y \quad \nu(Y \setminus L) < \epsilon/2.$$

Sea $f \in \mathcal{C}_b(Z)$, suponga que f se anula en el conjunto compacto $K \times L$ y que $\|f\|_\infty \leq 1$.
Al hacer

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in X \setminus K \\ 0, & \text{si } x \in K \end{cases} \quad , \quad v(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y \in Y \setminus L \\ 0, & \text{si } y \in L \end{cases}$$

se tiene que $(u, v) \in \Phi(f)$, y así

$$I(f) \leq p(f) \leq \mu(u) + \nu(v) < \epsilon.$$

Similarmente $(u, v) \in \Phi(-f)$ y como $-I(f) = I(-f)$, entonces

$$|I(f)| < \epsilon,$$

es decir, I es regular interior. Por el Teorema 2.15 existe una única medida $\sigma \in \mathcal{M}_b(Z)$ tal que $I(f) = \int_Z f d\sigma$ para todo $f \in \mathcal{C}_b(Z)$.
Note que $\sigma \in \mathcal{P}(Z)$:
en efecto, observe que si $f \in \mathcal{C}_b^+(Z)$, entonces

$$-I(f) = I(-f) \leq p(-f) \leq 0$$

y por lo tanto $I(f) \geq 0$, esto es, $\sigma \in \mathcal{M}_b^+(Z)$ (ver definición 1.46), además

$$I(1) \leq p(1) = 1 \quad y \quad -I(1) = I(-1) \leq p(-1) = -1,$$

por lo que

$$\int_Z d\sigma = I(1) = 1.$$

Finalmente, sea

$$N = \{u \oplus v : u \in \mathcal{C}_b(X), v \in \mathcal{C}_b(Y)\},$$

entonces para $f \in N$ se tiene que $p(f) = \pi(f)$ (ver Corolario 1.51), y por lo tanto

$$I(f) \leq \pi(f) \quad y \quad I(-f) \leq \pi(-f),$$

en consecuencia $I(f) = \pi(f)$ para toda $f \in N$, esto es,

$$\sigma(u \oplus v) = \mu(u) + \nu(v)$$

para toda $u \in \mathcal{C}_b(X)$ y $v \in \mathcal{C}_b(Y)$, es decir,

$$\sigma \in \Pi(\mu, \nu).$$

$\square$

Capítulo 3

Dualidad de Monge-Kantoróvich en Espacios Completamente Regulares

1. Convergencia en Espacios Completamente Regulares

Hasta ahora se han desarrollado herramientas relativas a la teoría de la medida que permitieron representar funcionales continuos respecto a medidas de Radon. Ahora se dará un resultado sobre la convergencia de redes de funciones semicontinuas y un resultado que permitirá construir redes decrecientes.

LEMA 3.1. *Sea Ω un espacio compacto y sea $\{g_\alpha\}_{\alpha\in A}$ una red decreciente en $\mathcal{C}(\Omega)$, que converge puntualmente a una función semicontinua superiormente $g : \Omega \to [-\infty, \infty)$. Entonces*

$$\lim_{\alpha} \max_{\omega\in\Omega} g_\alpha(\omega) = \inf_{\alpha} \max_{\omega\in\Omega} g_\alpha(\omega) = \max_{\omega\in\Omega} g(\omega).$$

DEMOSTRACIÓN.
Como Ω es un conjunto compacto y g es una función semicontinua superiormente entonces g alcanza su máximo (ver Teorema 1.16).
Sea Δ una constante tal que $\max\limits_{\omega\in\Omega} g(\omega) < \Delta$. Para cada α en el conjunto dirigido A se define

$$F(\alpha) = \{\omega \in \Omega : g_\alpha(\omega) \geq \Delta\}.$$

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$, entonces se puede encontrar $\beta \in A$ (ver definición 1.5) tal que $\alpha_r \leq \beta$ para $r = 1, \ldots, n$. Como $\{g_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es decreciente, entonces $g_{\alpha_r} \geq g_\beta$, por lo que

$$F(\beta) \subseteq F(\alpha_1) \cap F(\alpha_2) \cap \cdots \cap F(\alpha_n).$$

Además por ser g_α continua, $F(\alpha)$ es un conjunto cerrado.
Si $F(\alpha) \neq \emptyset$ para todo α entonces $\{F(\alpha)\}_{\alpha\in A}$ es una familia de conjuntos cerrados con la propiedad de intersección finita(ver definición 1.14), luego por ser Ω un conjunto compacto, se tiene que

$$\bigcap_{\alpha} F(\alpha) \neq \emptyset.$$

Sea $\omega_0 \in \bigcap_\alpha F(\alpha)$. Entonces $g_\alpha(\omega_0) \geq \Delta$ para todo α. Pero esto contradice el hecho que $\{g_\alpha(\omega_0)\}_{\alpha \in A}$ tiende a $g(\omega_0)$, por lo tanto existe α_0 tal que $F(\alpha_0) = \emptyset$, entonces

$$\max_{\omega \in \Omega} g(\omega) \leq \max_{\omega \in \Omega} g_\alpha(\omega) < \Delta$$

para todo $\alpha \geq \alpha_0$.

□

Lema 3.2. *Sean $z_0 \in Z$, $h \leq 0$ una función semicontinua superiormente y $t \in \mathbb{R}$ tal que $h(z_0) < t$. Entonces existe $g \in \mathcal{C}_b(Z)$ tal que $h \leq g \leq 0$.*

Demostración.
Si $t > 0$, entonces al elegir $g \equiv 0$ se obtiene el resultado.
Sean $t \leq 0$ y $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$h(z_0) < s < t,$$

al considerar

$$V = \{z : h(z) < s\},$$

entonces se tiene un punto z_0 y un conjunto abierto V, y por ser Z un espacio completamente regular entonces existe una función continua $f : Z \to [0, 1]$ tal que $f(z) = 0$ para todo $z \in Z \setminus V$ y $f(z_0) = 1$. Por lo que basta tomar $g = s \cdot f$.

□

2. Dualidad de tipo Monge-Kantoróvich para funciones semicontinuas

Teorema 3.3. *Sea $h : Z \to [-\infty, \infty)$ una función semicontinua superiormente. Si existen funciones reales semicontinuas inferiormente $a \in \mathcal{L}^1(\mu)$ y $b \in \mathcal{L}^1(\nu)$ tales que $h(x, y) \leq a(x) + b(y)$ para todo $(x, y) \in Z$. Entonces*

$$\max_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \pi(h) = \inf \{\mu(u) + \nu(v) : (u, v) \in \Phi(h)\}.$$

Demostración.
Considere primero el caso en el que $h \in \mathcal{C}_b(Z)$.
Sea M el espacio vectorial dado por $M = \{\lambda h : \lambda \in \mathbb{R}\}$ y sea $J : M \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(\lambda h) := \lambda p(h).$$

J es un funcional lineal dominado por p. En efecto:
Sean $\lambda_1 h, \lambda_2 h \in M$ y $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} J(\lambda_1 h + \lambda_2 h) &= J((\lambda_1 + \lambda_2)h) = (\lambda_1 + \lambda_2)p(h) \\ &= \lambda_1 p(h) + \lambda_2 p(h) \\ &= J(\lambda_1 h) + J(\lambda_2 h) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} J(\alpha(\lambda h)) &= J((\alpha\lambda)h) = (\alpha\lambda)p(h) \\ &= \alpha(\lambda p(h)) = \alpha J(\lambda h). \end{aligned}$$

Si $\lambda > 0$, entonces $J(\lambda h) = \lambda p(h) = p(\lambda h)$.

Si $\lambda \leq 0$, se tiene que

$$0 \leq p(0) = p(\lambda h - \lambda h) \leq p(\lambda h) + p(-\lambda h),$$

de donde $-p(-\lambda h) \leq p(\lambda h)$, luego

$$J(\lambda h) := \lambda p(h) = -p(-\lambda h) \leq p(\lambda h),$$

en consecuencia $J(\lambda h) \leq p(\lambda h)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
Ahora bien, por el Teorema de Hahn-Banach ([ver [**20**], Theo 3.3, p.58]) existe un funcional lineal $I : \mathcal{C}_b(Z) \to \mathbb{R}$ tal que $I(f) \leq p(f)$ para todo $f \in \mathcal{C}_b(Z)$ y además

$$I(h) = p(h).$$

Por el Teorema 2.17 existe una medida $\sigma \in \Pi(\mu, \nu)$ tal que $I(f) = \sigma(f)$ para todo $f \in \mathcal{C}_b(Z)$, por lo que la ecuación $I(h) = p(h)$ se puede escribir como

$$\sigma(h) = p(h).$$

Por otra parte, ya se vio que $\pi(h) \leq p(h)$ para todo $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ (ver Corolario 1.51), por lo tanto se tiene que

$$\max_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \pi(h) = \sigma(h) = p(h) = \inf \{\mu(u) + \nu(v) : (u, v) \in \Phi(h)\}.$$

Ahora considere el caso h semicontinua superiormente y $h \leq 0$:
Por el Lema 3.2 se puede construir una red decreciente $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{C}_b(Z)$ que converge puntualmente a h y tal que $h_\alpha \leq 0$ para todo α.

Entonces $\{\pi(h_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ es una red decreciente en $[-\infty,0]$ para cada $\pi\in\Pi(\mu,\nu)$ y por el Teorema de Convergencia Monótona ([ver[**9**], Theo. 1.5, p.20]),

$$\pi(h_\alpha)\to\pi(h)\in[-\infty,0].$$

Al escribir

$$f_\alpha(\pi)=\pi(h_\alpha),\;\; f(\pi)=\pi(h)$$

y como $\Pi(\mu,\nu)$ es un conjunto no vacío $\sigma\left(\mathcal{M}_b(Z),\mathcal{C}_b(Z)\right)$-compacto (ver Teorema 1.53), entonces $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es una red decreciente en $\mathcal{C}(\Pi(\mu,\nu))$, que converge a f. Por el Lema 3.1 se tiene que

$$\lim_{\alpha}\max_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}f_\alpha(\pi)=\inf_{\alpha}\max_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}f_\alpha(\pi)=\max_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}f(\pi),$$

además por el Corolario 1.51, $f(\pi)\le p(h)$ y por el primer caso ya visto, entonces

$$\max_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}f_\alpha(\pi)=p(h_\alpha)$$

para todo α. Por lo tanto

$$f(\pi)\le p(h)\le p(h_\alpha)=\max_{\rho\in\Pi(\mu,\nu)}f_\alpha(\rho)$$

para todo $\pi\in\Pi(\mu,\nu)$ y todo α. En consecuencia

$$\max_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}f(\pi)\le p(h)\le\inf_{\alpha}p(h_\alpha)=\inf_{\alpha}\max_{\rho\in\Pi(\mu,\nu)}f_\alpha(\rho)=\max_{\rho\in\Pi(\mu,\nu)}f(\rho)$$

y por lo tanto se obtiene la igualdad

$$\max_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}f(\pi)=p(h),$$

al devolver la notación se obtiene

$$\max_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\pi(h)=p(h)=\inf\left\{\mu(u)+\nu(v):(u,v)\in\Phi(h)\right\}$$

como se quería.
Finalmente considere el caso general, donde la condición $h\le a\oplus b$ reemplaza el hecho de asumir $h\le 0$. Sea $k=h-a\oplus b$, entonces $k:Z\to[-\infty,0]$ es una función semicontinua superiormente y por lo que ya se vio,

$$\max_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\pi(k)=p(k).$$

Mas aún

$$p(h)=p(k)+\mu(a)+\nu(b),$$

y para toda $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$

$$\pi(h) = \pi(k) + \mu(a) + \nu(b).$$

Por lo tanto

$$\max_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \pi(h) = \max_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \pi(k) + \mu(a) + \nu(b) = p(k) + \mu(a) + \nu(b) = p(h),$$

es decir

$$\max_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \pi(h) = p(h) = \inf \left\{ \mu(u) + \nu(v) : (u, v) \in \Phi(h) \right\}.$$

$\square$

En conclusión, el transporte óptimo es una importante herramienta para el análisis que ha encontrado aplicaciones en áreas como la economía. Pero más recientemente con el auge de la inteligencia artificial ésta teoría ha mostrado utilidad al enfrentar problemas de machine learning al optimizar algunos algoritmos que involucran funciones de pérdida, por lo que sin duda alguna gracias al progreso de ésta se lograrán avances tanto en la ciencia de datos como en la matemática.

Bibliografía

[1] D.A. Edwards, A Simple Proof in Monge-Kantoróvich duality theory, Studia Mathematica, 200 (1) (2010), pp. 67-77 . página(s):

[2] G. Monge, Mémoire sur la théorie des Déblais et des Remblais, Histoire de l´Académie des Sciences de Paris, 1781 . página(s): 2

[3] Y. Brenier, Connections between Optimal Transport, Combinatorial Optimization and Hydrodynamics. 2014. hal-01070575 . página(s): 3

[4] M. Cullen, R. Purser, Properties of the Lagrangian Semigeostrophic Equations. J. Atmospheric Sci. 46, 17 (1989), 2684-2697. página(s): 3

[5] J. Mather, G. Forni, Action Minimizing Orbits in Hamiltonian systems. In Transition to chaos in classical and quantum mechanics, vol. 1589 of Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 1994, pp. 92-186. página(s): 3

[6] C. Villani, Topics in Optimal Transportation, Grad. Stud. Math. 58, Amer. Math. Soc., Providence RI, 2003. página(s):

[7] C. Villani, Optimal Transport, Old and New, Grundlehren Math. Wiss. 338, Springer, Berlin, 2009. página(s):

[8] J. Bell, Semicontinuous Functions and Convexity, Department of Mathematics, University of Toronto, 2014. 5-6 . páginas(s): 7, 9

[9] C. Berg, J.P.R Christensen and P. Ressel, Harmonic Analysis on Semigroups. Theory of Positive and Related Functions, Grad. Texts Math. 100, Springer, New York, 1984. página(s): 17, 45

[10] V.I. Bogachev, Measure Theory, Vol II, Springer, Berlin, 2007. página(s): 22, 32, 34, 36, 37, 38, 39

[11] N. Bourbaki, Elements of Mathematics: Integration, Vol. II, Springer, Berlin. 2004. página(s): 22

[12] V.I. Bogachev, Measure Theory, Vol I, Springer, Berlin, 2007. página(s): 27

[13] S. Willard, General Topology, Addison-Wesley, Series in Mathematics, 1970. página(s): 9

[14] P. Halmos, Measure Theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer, Berlin, 1914. página(s): 37

[15] B. Singh, Baire Measures and its Unique Extension to a Regular Borel Measure. International Journal of Academic Research and Development. Volume2 (issue 5). 2017: Mahilpur, Punjab, India. página(s):

[16] K. Pedersen, Analysis Now, Springer, Berlin, 2001. página(s): 9

[17] L.A. Steen, J.A. Seebach Jr. CounterExamples in Topology. Dover Publications, INC, NewYork 1995 . página(s): 7

[18] I.K. Rana, An Introduction to Measure and Integration, Graduate Studies in Mathematics, AMS, 2002. página(s):

[19] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw Hill, 1976. página(s): 7, 38

[20] W.Rudin, Functional Analysis, McGraw Hill, 1991. página(s): 44