

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
POSTGRADO

**”IMPLEMENTACIÓN DE LA INTEGRAL J DE DOMINIO PARA EL
ANÁLISIS DE GRIETAS EN PROBLEMAS TERMOELÁSTICOS
TRIDIMENSIONALES UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS
DE CONTORNO”**

Trabajo de Grado para optar al título de
Magister Scientiarum en Ingeniería Mecánica

Realizado por: Ing. Rafael Balderrama Gastelu
Tutor: Prof. Manuel Martínez, Ph.D.

Caracas, Mayo de 2004

© Balderrama Gastelu, Rafael, 2004
Hecho el depósito de Ley lft48720046208



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE INGENIERÍA
COMISION DE ESTUDIOS DE POSTGRADO

VEREDICTO

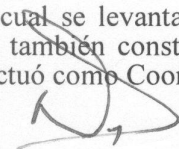
Quienes suscriben, Miembros del Jurado Designado por el Consejo de la Facultad de Ingeniería y por el Consejo de Estudios de Postgrado de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo de Grado presentado por el Ing. **Rafael Balderrama Gastelu** portador de la Cédula de Identidad 17.145.584 bajo el Título: **“Implementación de la Integral J de Dominio para el Análisis de Grietas en Problemas Termoelásticos Tridimensionales Utilizando el Método de Elementos de Contorno”** a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al Grado de MAGISTER SCIENTIARUM EN INGENIERÍA MECÁNICA, dejan constancia de lo siguiente:

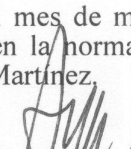
1.- Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los Miembros del Jurado, éste fijó el día 14 de mayo de 2004, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la sala Aula 213, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el Jurado; todo conforme a lo dispuesto en los Artículos 44, 49, 50, 51 y 52 del Reglamento de Estudios de Postgrado.

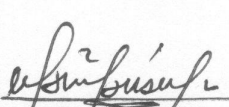
2.- Finalizada la defensa pública del trabajo, el Jurado decidió aprobarlo por considerar, sin hacerse solidario de las ideas expuestas por el autor, que se ajusta a lo dispuesto y exigido en el Reglamento de Estudios de Postgrado. El Ing. Rafael Balderrama realizó su exposición mostrando rigurosidad metodológica y exhibiendo amplio dominio del tema. La investigación realizada es un aporte significativo en el área de mecánica de fractura computacional; la incorporación de termoelasticidad en la implementación de la integral J de dominio mediante el método de elementos de contorno demuestra ser adecuada en el análisis de grietas; el cálculo de factores de intensidad de esfuerzo mediante la integral de interacción permite la obtención de resultados más precisos, lo que otorga mayor confiabilidad en la aplicación del método de elementos de contorno en problemas de ingeniería donde la mecánica de fractura tiene importancia en el diseño de componentes mecánicos y estructuras. El método de elementos de contorno es una técnica numérica en desarrollo y su aplicación en problemas de ingeniería se demuestra a través del trabajo realizado significando un aporte importante.

Así mismo el jurado consideró por unanimidad y en vista de la excelente calidad y del valioso aporte de la investigación realizada en la tesis presentada, otorgarle Mención Honorífica y Mención Publicación.

En fe de cual se levanta la presente acta, a los catorce días del mes de mayo de 2004, dejándose también constancia de que conforme a lo dispuesto en la normativa jurídica vigente, actuó como Coordinador del Jurado el Profesor: Manuel Martínez,


Prof. Raúl Goncalves, M.Sc.
Universidad Simón Bolívar


Prof. Amado Quintero, Ph.D.
Universidad Central de Venezuela


Prof. Manuel Martínez, Ph.D.
Universidad Central de Venezuela
Tutor

APROBACIÓN DEL TUTOR

En carácter de tutor del Trabajo de Grado de Maestría, presentado por el Ing. Rafael Balderrama Gastelu para optar al título de Magíster Scientiarum en Ingeniería Mecánica, considero que dicho trabajo cuenta con los requisitos y méritos suficientes para ser sometido a la presentación pública y la evaluación por parte del jurado examinador designado.

Caracas, a los 22 días del mes de Abril 2004

Prof. Manuel Martínez, PhD.

A mi familia

AGRADECIMIENTOS

Durante el desarrollo de este trabajo he tenido la oportunidad de conocer y compartir con muchas personas, es un orgullo haber contado con la ayuda del Profesor Manuel Martínez como tutor y guía y también del Profesor Adrián Cisilino, por su dedicación y apoyo para la realización de esta investigación. El desarrollo académico logrado estuvo acompañado de una invaluable enseñanza de trabajo, colaboración y amistad. Espero que este trabajo sirva para fortalecer nuestro equipo de trabajo, que marca una nueva etapa en nuestra escuela para poder continuar con una labor tan noble como es la investigación.

La visión de trabajo y esfuerzo en grupo a lo largo de esto dos años me ha permitido desarrollar con éxito este proyecto, debo agradecer a mis compañeros de estudio con quienes tuve oportunidad de compartir.

El apoyo incondicional de mis papas y hermanos esta reflejado en el esfuerzo de esta tarea.

A la Escuela de Ingeniería Mecánica y al Postgrado de la Universidad Central de Venezuela y sus profesores por haberme dado la posibilidad de poder realizar mi programa de Maestría con éxito.

A las instituciones y organismos como son: Fondo Nacional de Ciencia y Tecnología (FONACIT) del Ministerio de Ciencia y Tecnología de Venezuela, al Postgrado de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela y al Instituto de Investigaciones en Ciencia y Tecnología de Materiales (INTEMA) de la Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina, por el apoyo financiero y académico otorgado para la realización de la pasantía de investigación que realicé en el INTEMA bajo supervisión del Profesor Adrián Cisilino.

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
POSTGRADO

**IMPLEMENTACIÓN DE LA INTEGRAL J DE DOMINIO PARA EL
ANÁLISIS DE GRIETAS EN PROBLEMAS TERMOELÁSTICOS
TRIDIMENSIONALES UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS
DE CONTORNO**

Autor: Rafael Balderrama Gastelu
Tutor: Prof. Manuel Martínez, PhD.

RESUMEN

En este trabajo se presenta la implementación de la integral J de dominio mediante el Método de Elementos de Contorno (MDEC) para el análisis de grietas tridimensionales considerando el efecto termoelástico en componentes mecánicos o estructuras. Esta técnica está relacionada con la metodología de extensión virtual del frente de grieta. Se calculan los esfuerzos, deformaciones, derivadas de desplazamientos y temperatura en puntos internos para evaluar la integral de energía de dominio mediante las ecuaciones integrales apropiadas.

Para el cálculo de los factores de intensidad de esfuerzo se utiliza la integral M. Esta técnica está basada en la utilización de campos auxiliares para poder desacoplar los factores en grietas sometidas a modos mixtos. La implementación y desarrollo para grietas en cuerpos sometidos a gradientes térmicos es presentada y demuestra ser adecuada para este análisis. Se presentan algunos ejemplos para demostrar la robustez del método, los resultados obtenidos son compatibles con los reportados en trabajos de otros autores.

Palabras Clave: Integral J de dominio, Integral M, mecánica de fractura, método de elementos de contorno, termoelasticidad.

Nomenclatura

- ξ Coordenada local
- b Fuerza de volumen
- d Distancia interatómica
- E Módulo de elasticidad
- G Energía relajada por avance de grieta
- f Función genérica
- G_c Fuerza impulsora crítica
- J Parámetro fractomecánico o Jacobiano de transformación de coordenadas
- \bar{J} Valor promedio de J
- K Factor de intensidad de esfuerzo
- k Parámetro de discontinuidad
- q Flujo de calor o función de la extensión virtual de grieta
- q^* Solución fundamental de flujo de calor
- t_i Tracción en la dirección i
- u_i Desplazamiento en la dirección i
- P Tensor de momentum
- r Distancia entre puntos
- S Superficie
- x_i Coordenada cartesiana en la dirección i
- Y Parámetro adimensional
- W Densidad de energía elástica
- α Coeficiente de expansión térmica
- β Parámetro de la función optimizada
- δ Tensor identidad

- Δa Área de extensión virtual de grieta
- ε Deformación
- Ψ Función de forma para elementos bidimensionales
- Γ Contorno
- γ Tensión superficial o coordenada local
- η Coordenada local
- λ Coeficiente de conducción de calor
- μ Módulo de corte
- ν Módulo de Poisson
- Π Energía potencial elástica
- θ Temperatura
- θ^* Solución fundamental de temperatura
- ρ Radio de entalla
- σ Esfuerzo
- Ω Dominio
- ω_i Factor de peso para integración por puntos de Gauss en el punto i o parámetro función optimizada
- Φ Función de forma para elementos tridimensionales

Índice General

1	Introducción	13
1.1	Antecedentes	14
1.2	Objetivos	17
1.2.1	Objetivos Específicos	17
2	Fundamento teórico	18
2.1	Ecuaciones Básicas de los Medios Continuos	18
2.1.1	Termoelasticidad en Estado Estacionario.	18
2.1.2	Ecuación de Conducción de Calor	19
2.2	Mecánica de Fractura	20
2.3	Campos Termoelásticos en el Frente de Grieta	21
2.4	Factores de Intensidad de Esfuerzos	22
2.5	Razón de Energía de Deformación Relajada	23
2.6	La Integral J	24
3	Método de Elementos de Contorno	27
3.1	Método Dual de Elementos de Contorno	28
3.2	Ecuaciones Integrales de Contorno	28
3.3	Soluciones Fundamentales	29
3.4	Metodología	30
3.5	Estrategia de Discretización	31
3.6	Discretización del MDEC	34
3.7	Ensamble del Sistema de Ecuaciones	37
3.8	Tratamiento de las Integrales Singulares	38
3.9	Cálculo de Variables de Postproceso	38
3.9.1	Puntos Internos	38
3.9.2	Puntos Sobre el Contorno	39
4	Cálculo de Factores de Intensidad de Esfuerzo	42
4.1	Método de Integrales de Contorno	43
4.2	Integral de Energía de Dominio	43
4.3	La Función q	47
4.3.1	Función q Bicuadrática	47

4.3.2	Función q Optimizada	48
4.4	La Integral M_I	48
4.5	Implementación Numérica	50
5	Ejemplos y resultados	56
5.1	Probeta con Grieta Lateral en Condición de Deformación Plana	56
5.2	Probeta con Grieta Interna en Condición de Deformación Plana	59
5.3	Probeta Gruesa con Grieta Lateral	59
5.4	Probeta con Grieta Interna con una Superficie Libre	61
5.5	Cuerpo Cilíndrico con Grieta Circular Interna	64
5.5.1	Caso 1	66
5.5.2	Caso 2	66
5.6	Probeta con Grieta Semicircular	68
6	Conclusiones	71

Índice de Figuras

2.1	a) Modos de Fractura, b) Sistema de coordenadas local en el frente de grieta	20
2.2	Grieta elíptica en una placa sometida a carga.	24
2.3	Contorno de la integral J alrededor del vértice de la grieta.	25
2.4	Extensión virtual de grieta en un continuo bidimensional.	25
3.1	Estrategia de discretización.	32
3.2	Transformación de un sistema de coordenadas global a uno local.	33
3.3	Elementos discontinuo y semidiscontinuo.	35
3.4	Sistema de coordenadas local (ξ_1, ξ_2) y sistema de coordenadas x_i^o	39
4.1	Área y contorno para la evaluación de la integral J en el frente de grieta.	43
4.2	a) Frente de grieta, b) Extensión virtual del frente de grieta.	44
4.3	a) Dominio de integración encerrado por las superficies S_t, S^+, S^- y S_1 . b) Esquema de la entalla de altura h	46
4.4	Dominio tubular encerrando un segmento en el frente de grieta.	47
4.5	Formas de la función q bicuadrática y optimizada.	49
4.6	Tipos de celdas: a) continuas, b) semidiscontinuas.	51
4.7	Extensión del frente de grieta en función del nodo de interés M	54
4.8	Discretización del contorno y dominios de integración para la evaluación de la integral J	55
5.1	Placa con grieta lateral, geometría y carga.	57
5.2	Distribución de temperatura y deformación exagerada de la probeta con grieta lateral, malla fina y extra fina.	58
5.3	Malla fina probeta con grieta central.	60
5.4	Esquema probeta gruesa, (a) grieta sobre un borde libre, (b) grieta interna.	60
5.5	Valores de K_I^* a lo largo del frente de grieta.	61
5.6	Valores de K_I^* a lo largo del frente de grieta calculados con la función q bicuadrática y optimizada.	62
5.7	Probeta gruesa (a) con grieta lateral, (b) con grieta central.	63
5.8	Valores de K_I^* en la ubicación $y/t = 0.96875$ para los 4 caminos de integración (r/a) mediante la función q bicuadrática.	64

5.9	Valores de K_I^* en la ubicación $y/t = 0.96875$ para los 4 caminos de integración (r/a) mediante la función q optimizada.	65
5.10	Grieta circular en una barra cilíndrica.	67
5.11	Variación de K_I^* a lo largo del frente de grieta ($\beta/2\pi$)	67
5.12	Factores de intensidad de esfuerzo en modo I, II y III normalizados para la grieta circular interna inclinada a 45°	68
5.13	Grieta semicircular en una barra con grieta inclina a 0° y 45°	69
5.14	Factores de intensidad de esfuerzo en modo I, II y III normalizados para la grieta semicircular inclinada a 0° y 45° a lo largo del frente de grieta (β/π).	69
5.15	Deformadas de las probetas con grieta semicircular inclinada a 0° y 45°	70

Índice de Tablas

5.1	Valores de K_I^* probeta fina.	57
5.2	Valores de K_I^* probeta extra fina, (*) implica que el promedio fue calculado sin considerar el valor del primer camino de integración.	58
5.3	Valores de K_I^* probeta con grieta central en deformación plana.	59
5.4	Valores normalizados K_I^* utilizando la variación bicuadrática.	65
5.5	Valores normalizados K_I^* utilizando la función q optimizada (* los valores promedio no consideran el valor del primer camino de integración $r/a = 0.20$).	66

Capítulo 1

Introducción

El primer matemático en considerar la resistencia de los sólidos a la ruptura fue Galileo [27]. Aunque no consideró el comportamiento elástico de los sólidos definió la dirección que siguieron varios investigadores. La teoría matemática de la elasticidad, como se la conoce hoy, trata el cálculo de deformaciones, o desplazamientos relativos, en un sólido sujeto a fuerzas o movimiento. Los descubrimientos más importantes basados en esta teoría fueron la determinación de la relación lineal entre esfuerzos y deformaciones, propuesta por Hooke en 1660 y que se conoce como la Ley de Hooke y la formulación de las ecuaciones de movimiento de Navier en 1821. Desde que estas teorías se establecieron, todos los problemas de deformaciones pequeñas de cuerpos elásticos se redujeron a cálculos matemáticos. Lord Kelvin trabajó en la determinación de esfuerzos y deformaciones en cuerpos sólidos elásticos sujetos a variaciones de temperatura. Los resultados a los que llegó, basado en la termodinámica, no obtuvo una formulación de un sistema de ecuaciones diferenciales. En 1838, Duhamel derivó los términos adicionales que debían contener las ecuaciones en el tensor de deformaciones cuando un cuerpo está sujeto a un gradiente de temperatura. Sin embargo el estudio de esfuerzos térmicos ha tomado reciente interés en la solución de problemas prácticos y es un factor de diseño en muchos componentes de estructuras modernas sujetas, por ejemplo, a calentamiento.

Hoy en día, se encuentran muchas estructuras de ingeniería sujetas a cargas termomecánicas. En plantas nucleares, por ejemplo, los reactores utilizan sodio líquido como refrigerante y operan a temperaturas elevadas, la carga de origen térmico es la más importante para estos componentes. Por otra parte, ciertos componentes electrónicos utilizados en plantas de generación pueden estar sujetos a esfuerzos térmicos inducidos por calentamiento por efecto Joule debido al flujo de corriente en materiales conductivos. El monitoreo y prueba de componentes de reactores en fusión nuclear han sido incrementados desde los accidentes en la unidad 2 de Three Mile Island en 1979 y la unidad 4 de Chernobyl en 1886.

En los últimos años las fallas en estructuras y el deseo de contar con estructuras seguras y confiables ha llevado al desarrollo de varios criterios de fractura para distintas aplicaciones, incluyendo puentes, aeronaves y recipientes a presión convencionales y nucleares; así como también al desarrollo de planes de control de fractura para nuevas

e inusuales estructuras como: torres de perforación costa afuera, plantas nucleares flotantes, transbordadores espaciales, etc.

Una de las razones por las que ocurren fallas en estructuras o componentes de máquinas se deben a defectos en los materiales que los componen. Las grietas son un tipo de defecto [29], que al aumentar su tamaño hasta uno crítico pueden producir la falla total del componente por fractura. Los defectos están presentes debido al proceso de fabricación, manufactura o servicio. La Mecánica de Fractura se ha convertido en la herramienta primaria para controlar la fractura frágil y las fallas por fatiga en estructuras.

La Mecánica de Fractura Lineal y Elástica es un campo de la mecánica de fractura que se usa para analizar situaciones dentro del límite elástico y lineal de los materiales. Es una disciplina que se ocupa de mantener y determinar la seguridad estructural referente a grietas, puede ayudar al proceso de diseño en la selección inicial de materiales, niveles de esfuerzos de diseño, tamaños tolerables de grieta para control de calidad e inspección.

Para aplicaciones prácticas de ingeniería, el diseño de componentes de geometría compleja para ser empleados en condiciones reales sujetos a cargas termo-mecánicas requieren del uso de métodos experimentales o numéricos y de los dos, los métodos numéricos son una opción más económica y flexible. Debido a esto el desarrollo de una herramienta para modelado tridimensional de componentes sujetos a cargas termo-mecánicas está razonablemente justificado. Durante las últimas décadas el desarrollo de los métodos numéricos ha surgido como una poderosa herramienta de diseño e investigación en problemas relacionados con propagación de grietas. Principalmente debido al rápido desarrollo de los métodos numéricos en análisis de esfuerzos, conjuntamente a la disponibilidad de recursos computacionales de gran capacidad se pueden realizar cálculos de forma rápida y eficaz.

El objetivo de este trabajo consiste en la implementación de la integral J de dominio en el análisis de grietas tridimensionales utilizando el método de elementos de contorno. Se expondrán los conceptos de la metodología aplicada, sus ventajas y características, así como una descripción de la importancia del problema a tratar. La precisión y robustez del método será probada a través de algunos ejemplos, comparando los resultados obtenidos con soluciones analíticas o aproximadas si es que existen.

1.1 Antecedentes

Las primeras investigaciones realizadas en el campo de la mecánica de fractura fueron llevadas a cabo por Griffith [8] en materiales como el vidrio, basado en la formulación matemática de Inglis (1913) , quien analizó placas con agujeros elípticos sometidas a carga para determinar la concentración de esfuerzos. En los inicios de 1920, Griffith encontró que la falla frágil de un material elástico podía ser caracterizada por una variable, llamada más tarde *razón de energía relajada*, cuyo valor crítico, independiente de la geometría de la estructura, es una propiedad mecánica del material. Se observó

que el fenómeno de concentración de esfuerzos esencialmente ocurría en la vecindad del vértice de la grieta y es posible estudiarlo desde un punto de vista macroscópico con la ayuda de variables intrínsecas como la geometría, solicitaciones y propiedades del material. En elasticidad lineal esta respuesta se representa como una singularidad en el campo de esfuerzos. Irwin [8] realizó el estudio de esta singularidad y en 1956 definió los factores de intensidad de esfuerzo en grietas para casos particulares.

A pesar que muchos modelos de investigación se enfocan en modelos bidimensionales, existen aplicaciones de ingeniería que demandan un modelo tridimensional. La investigación del fenómeno de fractura se realiza en el campo experimental y computacional. Entre estas dos opciones los métodos numéricos han resultado ser más económicos y flexibles por su adaptabilidad a diversas situaciones. Una técnica numérica que esta consolidándose actualmente es el método de Elementos de Contorno debido a que resulta ser ventajoso respecto al método de elementos finitos y adecuado en el análisis de fractura. En elementos finitos la formulación requiere continuidad de bajo orden para soluciones que son de un orden mayor, para obtener resultados precisos la malla debe ser muy refinada en la región donde las variables de campo presentan gradientes, en termoelasticidad estas regiones están situadas alrededor del vértice de la grieta debido a que los esfuerzos y la temperatura teóricamente tienden al infinito en esa región; otro inconveniente es el remallado del modelo para cada incremento en el tamaño de la fisura lo que resulta en una gran demanda de recurso computacional.

Una de las principales ventajas del método de elementos de contorno es que sólo se requiere la discretización del contorno, lo que significa una reducción en el modelo y tamaño de los sistemas de ecuaciones que se generan. La malla del contorno puede ser fácilmente ensamblada alrededor de la fisura y de acuerdo a la complejidad del problema se pueden ensayar con una buena aproximación mallas gruesas. La formulación de elementos de contorno está basada en la teoría de ecuaciones integrales y representa en forma natural el comportamiento singular en el vértice de grieta; además que relaciona las variables físicas del problema (en termoelasticidad: temperatura, flujo de calor, desplazamientos y tracciones en el contorno) de forma directa.

Los fundamentos de teoría de ecuaciones integrales fueron introducidas en la mecánica del continuo en teoría de potencial por Fredholm [44], y por Betti, Somigliana, Muskhelishvili [34] y Kupradze [26] en elasticidad. El método directo de elementos de contorno fue desarrollado en elasticidad por Rizzo [45], y en teoría de potencial por Jaswon [23] y Symm [50]. En las formulaciones iniciales del método directo, las variables primarias se consideraban constantes sobre segmentos lineales aunque en algunos casos reflejaba demasiada imprecisión. Más tarde Lachat y Watson [44] desarrollaron representaciones paramétricas de la geometría y las variables resultando en una mejor aproximación de las variables. Esta formulación fue mejorada y expandida en las disciplinas de ingeniería, haciendo del método de elementos de contorno algo manejable para aplicaciones en ingeniería, por ejemplo se puede revisar el trabajo de Brebbia, Telles y Wrobel [7]. Existen muchas formas de formular las ecuaciones integrales; en teoría potencial Jaswon y Ponter [24] utilizaron la tercera identidad de Green y sus derivadas como variables de contorno, luego Brebbia y Brebbia y Dominguez [6] derivaron las ecuaciones integrales

utilizando el método de residuos ponderados. En elastostática, la formulación directa fue presentada por Cruse y Rizzo [13] basado en el teorema recíproco de Betti. Las ecuaciones integrales de contorno utilizadas en termoelasticidad son las correspondientes a potencial y elasticidad. En la década de 1960 Nowacki e Ignaczak contribuyeron a la formulación integral de contorno para solución de problemas con valor en la frontera.

En la aplicación en mecánica de fractura, fue Cruse [15] quien demostró que las ecuaciones integrales resultaban en un sistema matemático inconsistente debido a la coincidencia de las superficies de la grieta. Se propusieron distintas metodologías para sobrellevar este problema, por ejemplo se modelaron problemas con simetría de cargas y geometría. Otra técnica propuesta fue la formulación por subregiones de Blandford, Ingraffea y Liggett [5], en este método el dominio es dividido en múltiples regiones en la dirección de la grieta creando unos contornos artificiales que no son únicos, lo que representa una desventaja en el análisis de propagación. Otro método utilizado fue el de discontinuidad de desplazamientos desarrollado por Crouch como lo cita [11], así la grieta es tratada como una superficie simple en la cual la diferencia de desplazamientos es la única incógnita a determinar [3]. En este trabajo se aplica el método dual de elementos de contorno que consiste en la utilización de dos tipos de ecuaciones en las superficies de fractura resolviendo el problema de la inconsistencia matemática, de esta manera el problema es resuelto en una región simple y única. El método dual de elementos de contorno bidimensional fue reportado por Portela, Aliabadi y Rooke en las publicaciones [36], [37], [38]; luego este se extendió a tres dimensiones por Mi y Aliabadi [31], [32]. Actualmente ha sido implementado en elastoplasticidad por Leitao, en elastodinámica por Fedelinski y en concreto por Saleh y Aliabadi.

En la mecánica de fractura lineal los campos del frente de grieta se caracterizan por un factor de intensidad de esfuerzos denominado K , este valor depende de la configuración de carga del cuerpo, de la forma de la grieta y del modo de sollicitación. Este factor se puede obtener por distintos métodos aproximados, tales como: extrapolación de desplazamientos y esfuerzos [14], elementos especiales en el vértice de la grieta [25], la técnica de substracción de singularidad [2] y por relajación de energía de deformación [16]. El método de integrales independientes del camino de integración está basado en principios energéticos y proveen una alternativa en el cálculo de la razón de energía relajada por avance del frente de grieta. La más conocida es la integral J [33] basado en el tensor de *momentum de energía* de Eshelby. En el análisis de grietas tridimensionales con termoelasticidad Aliabadi, dell'Erba y Prasad [1] aplicaron la integral J como una integral compuesta por una parte que se integra sobre una línea y otra sobre una superficie. Una formulación distinta en el cálculo de la razón de energía relajada en el frente de grieta fue propuesta por Moran y Nakamura [46] utilizando la integral de energía de dominio; esta aproximación es versátil, ya que puede ser aplicada a problemas estáticos o cuasiestáticos con elasticidad, elastoplasticidad o viscoplasticidad [9] y termoelasticidad.

1.2 Objetivos

El objetivo general de este trabajo consiste en la implementación de la integral J de dominio para el análisis tridimensional de grietas con termoelasticidad utilizando el método de elementos de contorno.

1.2.1 Objetivos Específicos

1. Implementar en un código computacional las ecuaciones de elasticidad y potencial requeridas para modelar el problema termoelástico de grietas tridimensionales.
2. Implementar de la integral J , como integral de dominio considerando los efectos termoelásticos.
3. Desacoplar los factores de intensidad de esfuerzo para los distintos modos de sollicitación.
4. Validar los resultados obtenidos con esta formulación y presentarlos en un informe final.

Capítulo 2

Fundamento teórico

2.1 Ecuaciones Básicas de los Medios Continuos

El estudio en termoelasticidad permite determinar los esfuerzos producidos por un campo de temperatura y también calcular la distribución de temperatura debido a la acción de fuerzas internas que varían con el tiempo [44]. La termoelasticidad contiene la teoría de conducción de calor y la teoría de esfuerzos y deformaciones debidas al flujo de calor cuando se acoplan los campos de temperatura y deformaciones.

La deformación total en cada punto de un cuerpo considerando el efecto de la temperatura esta compuesta de dos partes: una debido a las deformaciones requeridas para mantener la continuidad del cuerpo como las producidas por cargas actuando en el contorno, y otra parte debido a la expansión proporcional a la temperatura

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha \theta \delta_{ij} \quad (2.1)$$

donde E es el módulo de Young, ν es el módulo de Poisson y α el coeficiente lineal de expansión térmica. Se puede observar de lo anterior que las deformaciones por corte no dependen de la variación de temperatura, debido a que la expansión libre no produce distorsión angular en un material isotrópico.

Las deformaciones están relacionadas a los esfuerzos por medio de la Ley de Hooke para elasticidad en caso isotérmico. La ecuación 2.1 se puede expresar en términos de esfuerzos:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) - \frac{E}{1 + \nu} \alpha \theta \delta_{ij} \quad (2.2)$$

2.1.1 Termoelasticidad en Estado Estacionario.

Para un sólido elástico el estado de equilibrio se expresa como:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.3)$$

donde b_i son las fuerzas de cuerpo y la ecuación (2.3) es la ecuación de equilibrio.

Las deformaciones se pueden representar por el tensor de deformaciones infinitesimal de Cauchy como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$

donde u_i son los desplazamientos. A través de la ecuación de equilibrio (2.3), la Ley de Hooke y la ecuación (2.4) se puede definir una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden que expresa la condición de equilibrio conocida como la ecuación de Navier:

$$\mu u_{i,jj} + \frac{\mu}{1-2\nu} u_{j,ji} + b_i = \frac{2\mu\nu(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha \theta_{,i} \quad (2.5)$$

donde θ es la temperatura, b_i son las fuerzas de volumen y μ la constante de Lamé. Según la convención de suma u_i representa un tensor de primer orden, donde i toma los valores 1, 2 y 3 y $u_{i,j}$ representa la derivada parcial de la componente i del tensor u_i en la dirección j .

2.1.2 Ecuación de Conducción de Calor

El flujo de calor es una cantidad de calor que pasa a través de una superficie por unidad de área y tiempo, se relaciona con la temperatura como

$$q = q_i n_i = -\lambda \theta_{,i} n_i \quad (2.6)$$

donde λ es el coeficiente de conducción de calor y n_i son los componentes del vector normal a la superficie. Considerando conducción en estado estacionario

$$\theta_{,ii} = 0 \quad (2.7)$$

donde se expresa que la temperatura solo es una función escalar de posición y no depende del tiempo en este caso.

2.2 Mecánica de Fractura

Se puede definir la fractura como la culminación del proceso de deformación plástica en un cuerpo sometido a carga que se manifiesta como la separación o fragmentación de un cuerpo sólido en dos o más partes.

Existen dos tipos de fractura: dúctil y frágil. En la primera, los metales sometidos a un ensayo de tracción presentarán una estricción en la zona central de la probeta para romper finalmente con valores de reducción de área de hasta 100 % en algunos casos. Por otro lado, la fractura frágil se caracteriza por pequeñas cantidades de deformación plástica, con fisuras propagándose rápidamente a lo largo de planos cristalográficos bien definidos que poseen baja energía superficial. Ambos casos se diferencian al tener en cuenta la deformación localizada en el material que rodea el vértice de fisura durante la propagación de la grieta.

La mayoría de los estudios de mecánica de fractura son realizados en el campo lineal elástico lo que es válido y constituye una buena aproximación para muchas aplicaciones en ingeniería. En el vértice de fisura se presenta un campo de deformación no lineal, que se puede considerar relativamente pequeño comparado con el dominio que lo rodea, en ese caso puede decirse que el material está en un estado de fluencia a pequeña escala y los conceptos de Mecánica de Fractura Lineal Elástica (MFLE) son aplicables.

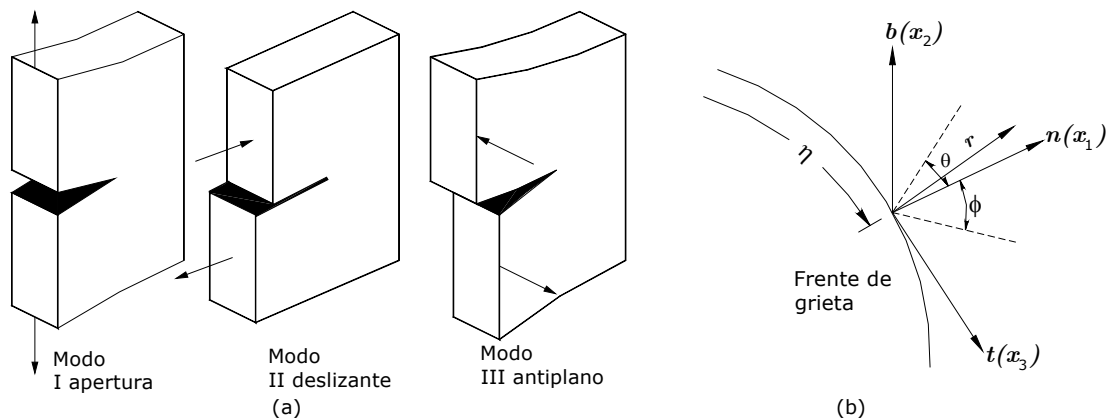


Figura 2.1: a) Modos de Fractura, b) Sistema de coordenadas local en el frente de grieta

La separación de las caras de una fisura están asociadas con tres modos de deformación, figura (2.1a). Estos modos de carga están referidos en números romanos I, II y III, descritos como: modo I de apertura o tensión en el plano, modo II debido a corte y modo III antiplano. Considerando un sistema de coordenadas esférico centrado en la posición η en el frente de grieta, figura (2.1b), el campo de tensiones está constituido por los esfuerzos en las direcciones normal, tangencial, binormal y combinaciones, siendo función del ángulo θ y de la distancia r desde el vértice de la grieta [8].

2.3 Campos Termoelásticos en el Frente de Grieta

Sih [49] a través del método de variable compleja en dos dimensiones en un cuerpo infinito demostró que la característica singular de los esfuerzos térmicos son similares a los mecánicos. Los campos de desplazamientos y esfuerzos en el sistema de coordenadas local en el frente de grieta fueron dados por Hartranf y Sih [22], ellos demostraron que en ciertos planos los campos bidimensionales y tridimensionales coinciden.

El campo de desplazamientos en el plano (n, b) esta dado por:

$$\begin{aligned}
 u_n &= \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left\{ K_I \cos \frac{\varphi}{2} \left[(1-2\nu) + \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} \right] \right. \\
 &\quad \left. + K_{II} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \left[2(1-2\nu) + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right] \right\} + O(r) \\
 u_b &= \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \left\{ K_I \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \left[2(1-2\nu) + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right] \right. \\
 &\quad \left. + K_{II} \cos \frac{\varphi}{2} \left[(1-2\nu) + \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} \right] \right\} + O(r) \\
 u_n &= 2 \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} K_{III} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} + O(r)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

y para esfuerzos:

$$\begin{aligned}
 \sigma_n &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen} \frac{3\varphi}{2} \right] - \\
 &\quad \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\varphi}{2} \left[2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \right] + O(1) \\
 \sigma_b &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen} \frac{3\varphi}{2} \right] + \\
 &\quad \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} + O(1) \\
 \sigma_t &= \frac{2\nu}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \cos \frac{\varphi}{2} - K_{II} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \right] + O(1) \\
 \sigma_{nb} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} + \\
 &\quad \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen} \frac{3\varphi}{2} \right] + O(1) \\
 \sigma_{nt} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\varphi}{2} + O(1) \\
 \sigma_{bt} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} + O(1)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde (r, φ, ϕ) corresponden a un sistema de coordenadas esféricas, K_i son los factores de intensidad en el punto Q, $O(r)$ corresponde a términos de orden mayor a medida que $r \rightarrow 0$ y $O(1)$ son términos globales.

Aplicando análisis geométrico y expandiendo en series las expresiones anteriores, Hartranft y Sih generalizaron el campo de esfuerzos para puntos fuera del plano (n, b) . Los resultados obtenidos son:

$$\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r \cos \phi}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen} \frac{3\varphi}{2} \right] - \\
&\quad \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r \cos \phi}} \sin \frac{\varphi}{2} \left[2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \right] + O(1) \\
\sigma_b &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r \cos \phi}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 + \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen} \frac{3\varphi}{2} \right] + \\
&\quad \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r \cos \phi}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} + O(1) \\
\sigma_t &= \frac{2\nu}{\sqrt{2\pi r \cos \phi}} \left[K_I \cos \frac{\varphi}{2} - K_{II} \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \right] + O(1) \\
\sigma_{nb} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r \cos \phi}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} + \\
&\quad \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r \cos \phi}} \cos \frac{\varphi}{2} \left[1 - \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \operatorname{sen} \frac{3\varphi}{2} \right] + O(1) \\
\sigma_{nt} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r \cos \phi}} \sin \frac{\varphi}{2} + O(1) \\
\sigma_{bt} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r \cos \phi}} \cos \frac{\varphi}{2} + O(1)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Existen dos características importantes de estos campos: los desplazamientos tienen un orden de variación $O(\sqrt{r})$ en el plano perpendicular al frente y los esfuerzos presentan una singularidad del orden $O(1/\sqrt{r})$.

2.4 Factores de Intensidad de Esfuerzos

Uno de los conceptos más importantes en mecánica de fractura es el factor de intensidad de esfuerzos. Es una herramienta efectiva para caracterizar los campos elásticos en la región del vértice de grieta. Si dos cuerpos con grietas de formas distintas y bajo cargas diferentes tienen el mismo valor del factor de intensidad de esfuerzos alrededor del frente de grieta, entonces los campos elásticos cerca del frente serán los mismos.

El factor de intensidad de esfuerzo se puede definir como

$$K = Y\sigma\sqrt{\pi a} \tag{2.11}$$

donde σ es el esfuerzo, a es la longitud de la grieta y Y es un número adimensional que depende de la geometría. Los factores de intensidad de esfuerzos se pueden expresar

explícitamente de las ecuaciones (2.10) como los valores de esfuerzo en el límite cuando se aproxima el frente de grieta. Sustituyendo $\phi = 0$ en las ecuaciones (2.10)

$$\begin{aligned} K_I &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_b(r, 0, 0) \\ K_{II} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{nb}(r, 0, 0) \\ K_{III} &= \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{bt}(r, 0, 0) \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde K_I , K_{II} y K_{III} son los factores de intensidad de esfuerzos en Modo I, Modo II y Modo III y representan una medida de la singularidad $1/\sqrt{r}$ del campo de esfuerzos en el vértice de grieta.

2.5 Razón de Energía de Deformación Relajada

El primer estudio sistemático para tratar el fenómeno de fractura fue llevado a cabo por Griffith basado en un balance energético. Propuso que para que la fisura se torne inestable y comience a propagarse, la disminución de la energía potencial por relajación de tensiones durante el avance de la fisura debe ser mayor o igual que el aumento de energía superficial representado por la creación de las nuevas superficies de fractura.

$$\frac{d\Pi}{da} \geq \frac{dU}{da} \quad (2.13)$$

Siendo Π es la energía potencial expresada como un balance de la energía de deformación y el trabajo hecho por las cargas y U la energía requerida para el crecimiento de la grieta. El trabajo por unidad de área para extender la fisura suele designarse fuerza impulsora crítica y se representa con el símbolo G_c . Este criterio también puede expresarse en términos del parámetro K y K_c que es la tenacidad a fractura o fractotenacidad y es una propiedad del material, talque $K \geq K_c$,

$$K_c^2 = E G_c \quad (2.14)$$

Criterio de Orowan. Orowan encontró que el valor crítico de la tensión remota para que se produzca la propagación de la fisura es:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{\gamma E \rho}{4a d}} \quad (2.15)$$

donde E es el módulo de Young, γ es la tensión superficial, d la distancia interatómica en ausencia de carga y ρ es el radio del extremo de la entalla.

Para cuerpos lineales elásticos la energía potencia relajada G esta relacionada con los factores de intensidad de esfuerzo K a través de la formula siguiente:

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 + \frac{1 - \nu^2}{E} K_{II}^2 + \frac{1 - \nu}{E} K_{III}^2 \quad (2.16)$$

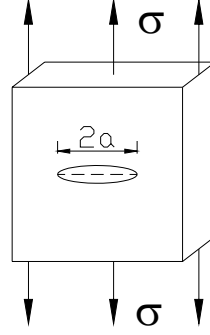


Figura 2.2: Grieta elíptica en una placa sometida a carga.

Los factores de intensidad de esfuerzo y la razón de energía relajada son equivalentes en el campo lineal elástico en fractura mecánica, sin embargo es muy común en ingeniería usar los valores de K como referencia.

2.6 La Integral J

Consideremos un cuerpo homogéneo con un material elástico lineal o no lineal, libre de fuerzas de volumen y sujeto a un estado bidimensional de esfuerzos σ_{ij} que dependen solamente de las coordenadas x_1 y x_2 , supongamos que el cuerpo contiene una entalla o fisura paralela al eje x_1 como se muestra en la figura (2.3). La densidad de energía elástica está dada por

$$W = \int^{\epsilon} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (2.17)$$

Consideremos ahora la integral J definida como:

$$J = \int_{\Gamma} (W n_1 - t_i u_{i,1}) d\Gamma \quad (2.18)$$

donde Γ es un contorno que rodea el vértice de la grieta en sentido antihorario, n_1 es el vector normal exterior al contorno, t_i son las componentes de tracción, $u_{i,1}$ son las derivadas de desplazamiento u_i con respecto a la dirección del eje x_1 y $d\Gamma$ es un elemento de arco a lo largo de Γ .

Rice demostró que la integral J es una integral independiente del camino de integración, para materiales elásticos (lineales y no lineales) y es igual al cambio en la energía potencial Π debido a una extensión virtual de grieta da :

$$J = -\frac{d\Pi}{da} \quad (2.19)$$

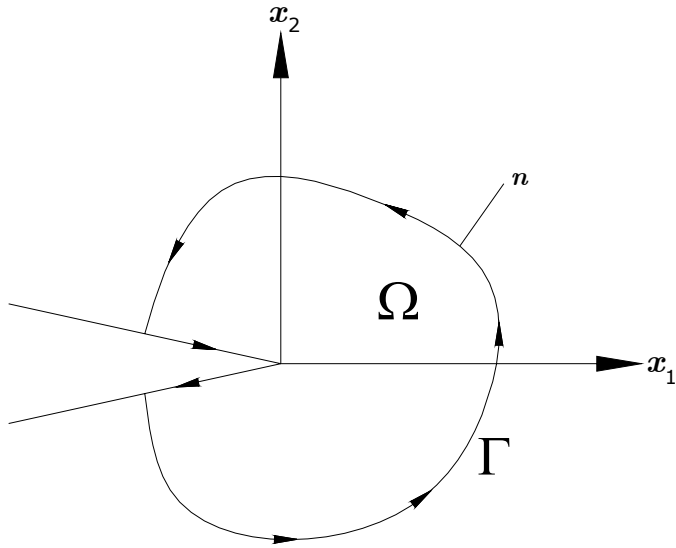


Figura 2.3: Contorno de la integral J alrededor del vértice de la grieta.

Si se selecciona una curva arbitrariamente pequeña Γ alrededor del vértice de fisura, la independencia del valor de la integral de la curva elegida nos dice que J puede considerarse un parámetro que caracteriza el campo de esfuerzos y deformaciones en dicho vértice.

Consideremos el caso en que una fisura sufre una extensión da llevando consigo el contorno de integración como se muestra en la figura (2.4)

$$J da = \int_{\Gamma} (W n_1 da - t_i u_{i,1} da) d\Gamma \quad (2.20)$$

Se puede interpretar que el primer término de la integral representa el incremento

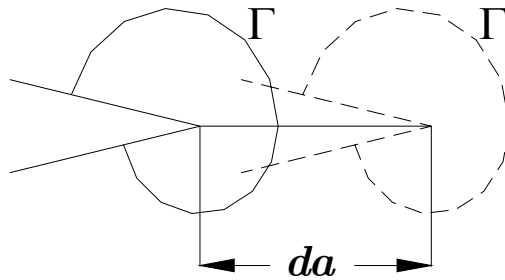


Figura 2.4: Extensión virtual de grieta en un continuo bidimensional.

neto de energía de deformación elástica dentro del contorno Γ . Este incremento se produce porque al moverse el contorno una distancia da se produce un flujo positivo de energía en el frente del contorno y un flujo negativo en la parte posterior del mismo. Es importante destacar que la variación de energía en este caso está referida por unidad de espesor. Analizando el segundo término de la ecuación (2.20), representa el trabajo elemental realizado por los vectores tracción que actúan sobre el elemento de contorno $d\Gamma$, durante el desplazamiento da , por unidad de espesor, siendo el trabajo total realizado por las fuerzas que actúan sobre el contorno a medida que este se desplaza, dado que este trabajo es un trabajo gastado, surge que del producto de $J da$, para continuos elásticos (lineales o no), es la energía neta que entra al contorno y está disponible para la extensión de la fisura, entonces se encuentra la correspondencia entre la razón de energía relajada G y J .

$$J = G = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 + \frac{1 - \nu^2}{E} K_{II}^2 + \frac{1 - \nu}{E} K_{III}^2 \quad (2.21)$$

Capítulo 3

Método de Elementos de Contorno

El método de elementos de contorno consiste en la solución de ecuaciones integrales, o en forma más específica, en la solución de ecuaciones integrales singulares. Se fundamenta en la transformación de ecuaciones diferenciales parciales que describen el comportamiento de las incógnitas dentro de un dominio y sobre el contorno del mismo en una ecuación integral que relaciona solamente las variables del contorno. La forma del método como se le conoce hoy es el resultado de muchos aportes realizados por otros investigadores en los últimos años. Las primeras investigaciones en esta área fueron publicadas por Betti, quien formuló el teorema de trabajo recíproco al considerar el trabajo realizado por los esfuerzos en un estado elástico realizando trabajo en las deformaciones de un estado solución distinto, que puede concluirse es un trabajo con un sentido matemático. Somigliana fue el primero en utilizar el teorema de Betti para derivar una forma de las identidades integrales.

La disponibilidad de recursos computacionales de gran capacidad hizo posible implementar el proceso algebraico mediante la discretización tal que una solución numérica es alcanzable.

Existen dos aproximaciones básicas en la formulación de ecuaciones integrales dependiendo de las incógnitas. La más conocida es la *formulación directa* donde las variables desconocidas son las variables físicas del problema, por ejemplo, temperatura, flujo de calor, desplazamientos y tracciones en el análisis termoelástico. En oposición se tiene la *formulación indirecta* en la cual las variables desconocidas son representadas mediante funciones ficticias de densidad, que para muchos casos no tienen sentido físico, pero a partir de las cuales las variables físicas pueden derivarse.

Fue necesario relacionar la capacidad numérica del método de elementos de contorno (MEC) con el de método de elementos finitos, muy bien conocido en la comunidad de ingeniería. La terminología del MEC indica el carácter de discretización de superficies. Hoy día el MEC está bien establecido y se utiliza con gran interés en muchas aplicaciones de ingeniería, así lo muestran algunos autores de libros como Brebbia y Dominguez [6], Brebbia, Telles y Wroble [7] entre otros.

3.1 Método Dual de Elementos de Contorno

En el análisis de mecánica de fractura computacional, una grieta se modela como dos superficies coplanares, esto hace la aplicación del MEC en las superficies de la grieta lleve a una degeneración numérica de la formulación (matriz singular) por la aplicación de un mismo tipo de ecuación integral a dos superficies coincidentes, tal como lo demostró Cruse [15].

Algunas estrategias para sobrellevar esta dificultad han sido propuestas: el método con funciones de Green presentado por Snyder y Cruse [48], el método de discontinuidad de desplazamientos por Crouch [12], el método de subregiones de Blandford, Ingraffea y Liggett [5] y el método dual de elementos de contorno desarrollado por Portela, Aliabadi y Rooke [37].

El método con funciones de Green utiliza soluciones fundamentales que incluyen una solución exacta para una grieta libre de tracciones en un dominio infinito, por lo tanto no se requiere el modelo de la grieta, la técnica es exacta pero limitada a problemas bidimensionales con grietas rectas. El método de discontinuidad de desplazamientos reemplaza cada par de puntos coincidentes de la grieta por un punto fuente único, en esta técnica la única incógnita sobre la grieta son las diferencias de desplazamiento entre superficies de la grieta, la desventaja de esta metodología es que si son requeridos los valores de desplazamiento sobre la grieta deben llevarse a cabo cálculos extras y no es tan general en problemas con tracciones o desplazamientos en las superficies de la grieta. El método de subregiones ha sido ampliamente utilizado para tratar el problema de las superficies coplanares de la grieta. Con esta metodología se consideran los puntos coincidentes sobre la grieta integrables sobre curvas distintas. El problema principal consiste en la creación de superficies nuevas a partir del vértice de la grieta, las cuales no tienen porque ser únicas dificultando el proceso de mallado para propagación.

El método dual de elementos de contorno (MDEC) sobrelleva el problema de modelado al considerar los puntos coincidentes sobre la grieta pero introduciendo una ecuación integral adicional (la ecuación de flujo de calor y tracciones en termoelasticidad). Todas las ecuaciones tienen el mismo camino de integración sobre el contorno, por lo tanto el problema se resuelve en una región simple. El MDEC ha sido aplicado en problemas bi-dimensionales por Prasad, Aliabadi y Rooke [40] y en problemas tridimensionales por dell'Erba y Aliabadi [1].

En este capítulo se presentan las ecuaciones utilizadas en el método dual de elementos de contorno en tres dimensiones para termoelasticidad en problemas de fractura lineal elástica. Se presenta la estrategia de discretización en el contorno para satisfacer las condiciones de continuidad para las integrales singulares, así como su tratamiento dependiendo del grado de singularidad.

3.2 Ecuaciones Integrales de Contorno

A continuación se escriben las ecuaciones integrales de contorno para termoelasticidad en estado estacionario obtenidas a partir de la ecuación de Laplace (2.7) y la ecuación

de Navier (2.5).

La ecuación integral de temperatura para un punto x' que se encuentra en el contorno de un dominio Ω se escribe como:

$$c(x')\theta(x') - \int_{\Gamma}^{CPV.} q^*(x', x)\theta(x) d\Gamma = - \int_{\Gamma} \theta^*(x', x)q(x) d\Gamma \quad (3.1)$$

donde θ y q denotan las temperaturas y flujo respectivamente, Γ es el contorno de integración, θ^* y q^* son las soluciones fundamentales. La ecuación de flujo para un punto en el contorno:

$$c(x')q(x') + n_i(x') \int_{\Gamma}^{CPV.} \theta_i^{**}(x', x)q(x) d\Gamma = n_i(x') \int_{\Gamma}^{HPV.} q_i^{**}(x', x)\theta(x) d\Gamma \quad (3.2)$$

donde las integrales están en función de los valores principales de Hadamar (*HPV*) y Cauchy (*CPV*), siendo $n_i(x')$ el vector normal al contorno en punto de colocación.

La ecuación integral de desplazamiento se escribe como:

$$\begin{aligned} & c_{ij}(x')u_j(x') + \int_{\Gamma}^{CPV.} T_{ij}(x', x)u_j(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{P}_i(x', x)\theta(x) d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma} U_{ij}(x', x)t_j(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{Q}_i(x', x)q(x) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde u_j y t_j representan los valores de desplazamiento y tracción en el contorno respectivamente y T_{ij} , P_i , U_{ij} , Q_i son las soluciones fundamentales de elasticidad y termoelasticidad. La ecuación integral de tracción se escribe como:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}t_i(x') + n_j(x') \int_{\Gamma}^{HPV.} T_{kij}(x', x)u_k(x) d\Gamma - n_j(x') \int_{\Gamma}^{CPV.} \bar{P}_{ij}(x', x)\theta(x) d\Gamma + \\ & \frac{\mu(1+\nu)}{(1-2\nu)}\alpha n_j(x')\theta(x') = n_j(x') \int_{\Gamma}^{CPV.} U_{kij}(x', x)t_k(x) d\Gamma - n_j(x') \int_{\Gamma}^C \bar{Q}_{ij}(x', x)q(x) d\Gamma \end{aligned}$$

donde T_{ijk} , P_{ij} , U_{ijk} , Q_{ij} son las soluciones fundamentales de elasticidad y termoelasticidad para la ecuación de tracción.

3.3 Soluciones Fundamentales

Un campo fundamental elástico es un campo exacto definido en un espacio Ω_{∞} rodeado por un contorno Γ_{∞} , en el cual un sistema de fuerzas externas está dado por una carga unitaria en un punto arbitrario, $x' \in \Omega_{\infty}$. Esta carga unitaria se puede representar como una fuerza de cuerpo en función del Delta de Dirac. En potencial la solución corresponde a la ecuación de Laplace considerando una fuente de calor concentrada de magnitud unitaria en un punto. Una característica de estas soluciones es que dependen

de la distancia entre el punto fuente x' y el punto de dominio x , y son continuamente diferenciables; sin embargo cuando la distancia entre este par de puntos es muy pequeña algunas soluciones presentan un comportamiento singular y se clasifican como singulares suaves, singulares fuertes, o hipersingulares $\left[O\left(\frac{1}{r^n}\right), n = 0, 1, 2, 3\right]$.

$$\theta^*(X', x) = \frac{1}{4\pi\lambda r} \quad (3.5a)$$

$$q^*(X', x) = \frac{r_{,k}n_k}{4\pi r^2} \quad (3.5b)$$

$$\theta_i^{**}(X', x) = \frac{r_{,i}}{4\pi r^2} \quad (3.5c)$$

$$q_i^{**}(X', x) = \frac{-\lambda}{4\pi r^3} [3r_{,i}r_{,k}n_k - n_i] \quad (3.5d)$$

$$\overline{P}_i(X', x) = \frac{\alpha(1+\nu)}{8\pi(1-\nu)r} \left(n_i - \frac{\partial r}{\partial n} r_{,i} \right) \quad (3.5e)$$

$$\overline{Q}_i(X', x) = \frac{-\alpha(1+\nu)}{8\pi\lambda(1-\nu)} r_{,i} \quad (3.5f)$$

$$\overline{P}_{ij}(X', x) = \frac{E\alpha}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ n_k r_{,k} \left[\frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} - 3r_{,i}r_{,j} \right] + n_i r_{,j} + n_j r_{,i} \right\} \quad (3.5g)$$

$$\overline{Q}_{ij}(X', x) = \frac{-\alpha(1+\nu)}{8\pi\lambda(1-\nu)} \left(r_{,i}r_{,j} - \frac{\delta_{ij}}{1-2\nu} \right) \quad (3.5h)$$

$$T_{ij}(X', x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}] - (1-2\nu)(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right\} \quad (3.5i)$$

$$U_{ij}(X', x) = \frac{-1}{16\pi(1-\nu)\mu r} \{ (3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j} \} \quad (3.5j)$$

$$\begin{aligned} T_{kij}(X', x) = & \frac{E}{8\pi(1-\nu^2)r^3} \left\{ 3\frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 5r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \right. \\ & + 3\nu(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}) + (1-2\nu)(3n_k r_{,i}r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) \\ & \left. - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \quad (3.5k) \end{aligned}$$

$$U_{kij}(X', x) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} [(1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + 3r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (3.5l)$$

3.4 Metodología

El procedimiento de análisis en un problema por medio de métodos numéricos se puede subdividir en tres etapas importantes:

1. Preproceso: consiste en la preparación del modelo a ser analizado, los datos geométricos y condiciones de contorno que permitan aproximarse lo mejor posible al hecho físico. Aquí se realiza la discretización del contorno. El objetivo de esta etapa es

preparar los datos necesarios y suficientes para resolver el problema.

2. Proceso: se realizan todos los cálculos inherentes al método, utilizando los datos, condiciones de contorno para determinar las variables desconocidas, para esto se sigue la lógica de un algoritmo de cálculo fundamentado en este trabajo en el método de elementos de contorno.

3. Postproceso: se utilizarán los resultados de la etapa anterior, para el cálculo de esfuerzos, deformación, derivadas de desplazamiento y temperatura en puntos en el dominio, para poder evaluar la integral de energía de dominio.

3.5 Estrategia de Discretización

La solución para problemas termoelásticos consisten en determinar los campos de temperatura, flujo de calor, desplazamientos y tracciones relacionadas a través de las ecuaciones (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4). Estas variables son calculadas a través de un proceso de discretización de las ecuaciones anteriores sobre el contorno, de esta forma se genera un sistema de ecuaciones lineal que al ser resuelto algebraicamente definen todas las incógnitas. La estrategia general de modelado de un problema con el método de elementos de contorno puede resumirse como:

- El contorno es discretizado en una serie de elementos sobre los cuales los campos θ , q , u_i y t_i son interpolados utilizando las funciones de forma y un número finito de valores nodales.
- Los campos termoelásticos aproximados θ , q , u_i y t_i son expresados como combinación lineal de funciones básicas en un sistema local de coordenadas.
- Los campos termoelásticos aproximados son sustituidos en las ecuaciones integrales (3.1), (3.2), (3.3) y (3.4) y el punto de colocación x' es colocado sobre un nodo del contorno. Después de integrar elemento por elemento se obtiene un sistema de ecuaciones lineal con valores nodales.
- El procedimiento se repite para todos los nodos formando un sistema lineal de ecuaciones.
- Finalmente con las condiciones de contorno preescritas, el sistema de ecuaciones es resuelto y todos los valores nodales incógnita se determinan. Este proceso se lleva a cabo para puntos internos X' utilizando las ecuaciones integrales correspondientes en una etapa de postproceso.

Se debe tener especial cuidado en las ecuaciones integrales de flujo y tracción debido a los requerimientos de continuidad de los campos, esto se describe a continuación.

La estrategia de modelado del MDEC puede resumirse como lo implementaron Prasad y dell'Erba para los casos bidimensional y tridimensional respectivamente.

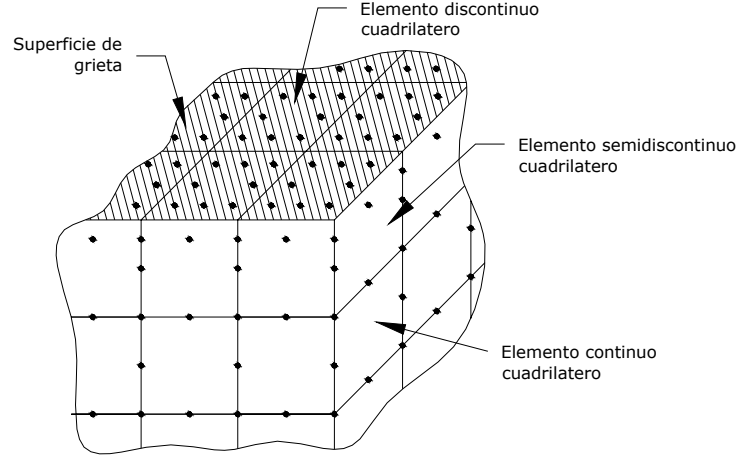


Figura 3.1: Estrategia de discretización.

- Las superficies de la grieta se discretizan con elementos cuadriláteros cuadráticos discontinuos.
- Todas las demás superficies se modelan con elementos continuos.
- La ecuación integral de desplazamiento (3.3) y temperatura (3.1) son aplicadas para puntos de colocación en una superficie de la grieta.
- La ecuación integral de tracción (3.4) y flujo (3.2) son aplicadas en los puntos de colocación en la otra superficie de grieta.
- Las ecuaciones integrales de desplazamiento (3.3) y temperatura (3.1) se aplica en los puntos de colocación de todas las demás superficies.

En este trabajo se utilizarán elementos isoparamétricos, significa que la geometría y las variables son interpoladas utilizando las mismas funciones. Las superficies de las grietas son modeladas utilizando elementos cuadráticos discontinuos, todas las demás superficies se modelan con elementos continuos y la transición entre ambos por medio de elementos semidiscontinuos. (ver figura 3.1)

De acuerdo a la representación isoparamétrica la variación de temperatura, flujo de calor, desplazamientos y tracciones sobre un elemento se aproximan como

$$\begin{aligned}
 \theta &= \sum_{\alpha=1}^{m^n} \Psi^\alpha(\xi_1, \xi_2) \theta^{n\alpha} & q &= \sum_{\alpha=1}^{m^n} \Psi^\alpha(\xi_1, \xi_2) q^{n\alpha} \\
 u_i &= \sum_{\alpha=1}^{m^n} \Psi^\alpha(\xi_1, \xi_2) u_i^{n\alpha} & t_i &= \sum_{\alpha=1}^{m^n} \Psi^\alpha(\xi_1, \xi_2) t_i^{n\alpha}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

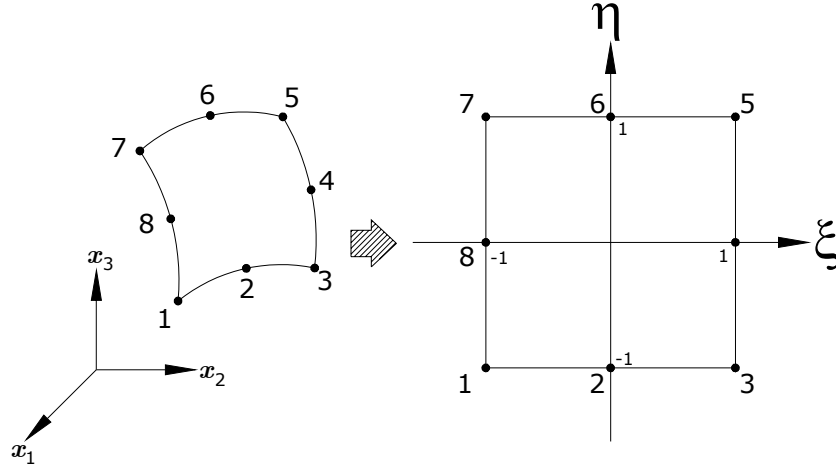


Figura 3.2: Transformación de un sistema de coordenadas global a uno local.

donde Ψ^α son las funciones de interpolación para el elemento Γ_n , en un sistema de coordenado local (ξ_1, ξ_2) , m^n es el número de nodos en el elemento n . En este trabajo se hacen uso de elementos cuadráticos cuadriláteros de 8 nodos, las funciones de forma para elementos continuos son:

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) (-\xi - \eta - 1) & \Psi_2 &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 - \eta) \\
 \Psi_3 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) (\xi - \eta - 1) & \Psi_4 &= \frac{1}{2} (1 + \xi) (1 - \eta^2) \\
 \Psi_5 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) (\xi + \eta - 1) & \Psi_6 &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta) \\
 \Psi_7 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) (-\xi + \eta - 1) & \Psi_8 &= \frac{1}{2} (1 - \xi) (1 + \eta^2) \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Para los elementos semidiscontinuos y totalmente discontinuos se puede distinguir que los nodos de colocación, también llamados nodos funcionales, están colocados dentro del elemento, la suavidad del punto fuente es entonces garantizada y por lo tanto el requerimiento de continuidad de las variables de contorno para la existencia de la solución de la ecuaciones integrales de termoelasticidad. Las variables de contorno dentro de un elemento discontinuo son interpoladas con las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
\Psi^1 &= \frac{1}{4k^3} (k - \xi) (k - \eta) (-\xi - \eta - k) & \Psi^2 &= \frac{1}{2k^3} (k^2 - \xi^2) (k - \eta) \\
\Psi^3 &= \frac{1}{4k^3} (k + \xi) (k - \eta) (\xi - \eta - k) & \Psi^4 &= \frac{1}{2k^3} (k + \xi) (k^2 - \eta^2) \\
\Psi^5 &= \frac{1}{4k^3} (k + \xi) (k + \eta) (\xi + \eta - k) & \Psi^6 &= \frac{1}{2k^3} (k^2 - \xi^2) (1 + \eta) \\
\Psi^7 &= \frac{1}{4k^3} (k - \xi) (k + \eta) (-\xi + \eta - k) & \Psi^8 &= \frac{1}{2k^3} (k - \xi) (k^2 + \eta^2) \quad (3.8)
\end{aligned}$$

donde k es un parámetro de posición para los nodos de colocación que varía entre $0 < k \leq 1$. El valor de $k = 0.5$ es utilizado en este trabajo, ya que permite una distribución homogénea de los puntos de colocación en las superficies de la grieta.

La transición entre elementos continuos y discontinuos en la boca de la fisura se produce con elementos semidiscontinuos, las funciones de forma para este tipo de elementos son:

$$\begin{aligned}
\Psi^1 &= \frac{1}{2(k+1)} (1 - \xi) (k - \eta) (-\xi - \eta - 1) & \Psi^2 &= \frac{1}{(k+1)} (1 - \xi^2) (k - \eta) \\
\Psi^3 &= \frac{1}{2(k+1)} (1 + \xi) (k - \eta) (\xi - \eta - 1) & \Psi^4 &= \frac{1}{2k} (1 + \xi) (k - \eta) (1 - \eta) \\
\Psi^5 &= \frac{1}{2k(k+1)} (1 + \xi) (1 + \eta) (k\xi + \eta - k) & \Psi^6 &= \frac{1}{2k^3} (1 - \xi^2) (k + \eta) \\
\Psi^7 &= \frac{1}{(k+1)} (k - \xi) (k + \eta) (-\xi + \eta - k) & \Psi^8 &= \frac{1}{2k} (1 - \xi) (k - \eta) (1 + \eta) \quad (3.9)
\end{aligned}$$

3.6 Discretización del MDEC

Siguiendo el procedimiento de la sección anterior las ecuaciones integrales pueden presentarse en forma discretizada. Para las ecuaciones (3.1) y (3.3) aplicadas en un punto x^ω en el contorno Γ^n

$$\begin{aligned}
& C(x^\omega) \theta(x^\omega) \\
&= \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N \theta^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q^*(x^\omega, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&\quad - \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N q^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \theta^*(x^\omega, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.10)
\end{aligned}$$

y

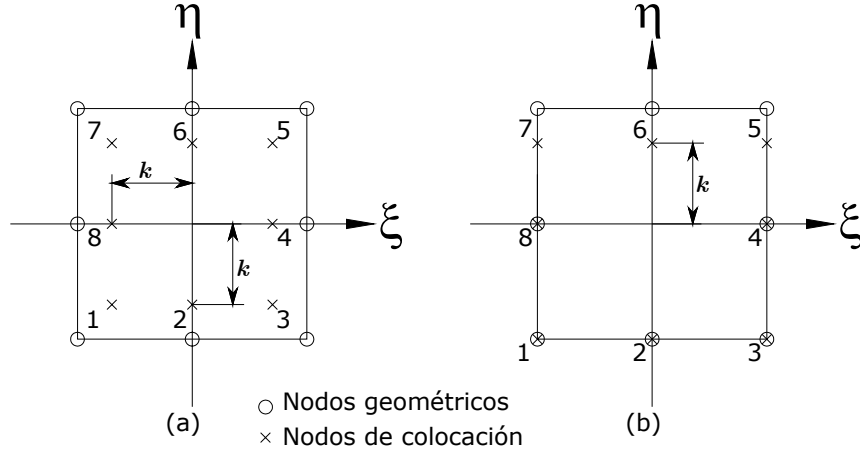


Figura 3.3: Elementos discontinuo y semidiscontinuo.

$$\begin{aligned}
& C_{ij}(x^\omega) u_i(x^\omega) \\
&= \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N t_j^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}(x^\omega, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&- \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N u_j^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}(x^\omega, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&+ \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N \theta^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_i(x^\omega, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&- \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N q^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q_i(x^\omega, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{3.11}
\end{aligned}$$

para las ecuaciones (3.1) y (3.3) para un punto $x^{+\omega}$ en el contorno Γ^+

$$\frac{1}{2}\theta(x^{+\omega}) + \frac{1}{2}\theta(x^{-\omega}) \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N \theta^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q^*(x^{+\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&- \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N q^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \theta^*(x^{+\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{3.13}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}u_i(x^{+\omega}) - \frac{1}{2}u_i(x^{-\omega}) \\
&= \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N t_j^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ij}(x^{+\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&\quad - \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N u_j^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ij}(x^{+\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N \theta^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{P}_i(x^{+\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&\quad - \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N q^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{Q}_i(x^{+\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{3.14}
\end{aligned}$$

para las ecuaciones (3.2) y (3.4) para un punto $x^{-\omega}$ en el contorno Γ^-

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}q(x^{-\omega}) + \frac{1}{2}q(x^{+\omega}) \\
&= \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N q^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \theta^{**}(x^{-\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N \theta^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q^{**}(x^{-\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \tag{3.15}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}t_i(x^{-\omega}) - \frac{1}{2}t_i(x^{+\omega}) \\
&= \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N n_j(x^{-\omega}) t_j^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 U_{ijk}(x^{-\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&\quad - \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N n_j(x^{-\omega}) u_j^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T_{ijk}(x^{-\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N n_j(x^{-\omega}) \theta^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{P}_{ij}(x^{-\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&\quad - \sum_{n=1}^{N_E} \sum_{\alpha=1}^N n_j(x^{-\omega}) q^{n\alpha} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{Q}_{ij}(x^{-\omega}, x(\xi, \eta)) \Psi^\alpha(\xi, \eta) J^n(\xi, \eta) d\xi d\eta \\
&\quad - \frac{E}{2(1-2\nu)} \alpha \theta(x^{-\omega}) n_i(x^{-\omega}) \tag{3.16}
\end{aligned}$$

donde N_E es el número total de elementos, N es el número de nodos por elemento y J^n es el jacobiano de la transformación del sistema de coordenada global al sistema de coordenadas local.

$$J^n(\xi, \eta) = \left| \frac{\partial x^n(\xi, \eta)}{\partial \xi} \times \frac{\partial x^n(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right| \quad (3.17)$$

3.7 Ensamble del Sistema de Ecuaciones

Las ecuaciones integrales de contorno al ser integradas sobre todos los nodos del contorno generan un sistema algebraico de ecuaciones que se puede expresar en forma matricial

$$\mathbf{H} \mathbf{u} = \mathbf{G} \mathbf{t} \quad (3.18)$$

El método utilizado en resolver casos de termoelasticidad no acoplada consiste en resolver primero el problema de potencial y luego el problema elástico asociado, sin embargo el campo térmico no depende del campo de esfuerzos. Ambos tipos de ecuaciones pueden ser acoplados en un solo sistema para resolverse simultáneamente. Con este esquema se requiere un menor recurso computacional para llevar a cabo la integración numérica, entonces se puede expresar el sistema como

$$[H^\alpha] \{u_\alpha\} = [G^\alpha] \{t_\alpha\} \quad (3.19)$$

donde

$$u_\alpha = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \theta \end{Bmatrix} \quad t_\alpha = \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ q \end{Bmatrix}$$

y

$$[H^\alpha] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{1\theta} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{2\theta} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{3\theta} \\ 0 & 0 & 0 & H_{\theta\theta} \end{bmatrix}, \quad [G^\alpha] = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{1\theta} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{2\theta} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{3\theta} \\ 0 & 0 & 0 & G_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

Los coeficientes G y H se obtienen al integrar las ecuaciones de elasticidad y de potencial (subíndices θ). Como los problemas a analizar son tridimensionales el tamaño de las matrices es $4N_T \times 4N_T$ donde N_T es el número total de nodos de la geometría discretizada y en consecuencia el tamaño de los vectores \mathbf{u} y \mathbf{t} es $4N_T$.

Al aplicar las condiciones de contorno el sistema de ecuaciones se reordena de forma tal que todas las incógnitas están del lado izquierdo de la igualdad y todos los valores conocidos del lado derecho, quedando un sistema

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.20)$$

donde la matriz \mathbf{A} contiene coeficientes de G^α y H^α . El sistema de ecuaciones puede resolverse utilizando métodos de eliminación Gaussiana y resolvedores iterativos. Como el método de eliminación gaussiana no depende de un criterio de convergencia, satisface los requerimientos de precisión en los resultados y es utilizado en este trabajo.

3.8 Tratamiento de las Integrales Singulares

La evaluación de los coeficientes de las matrices mencionadas anteriormente se realiza al tomar en las ecuaciones integrales los nodos de colocación e integrar sobre todos los elementos del modelo. Muchas de estas integrales son regulares y se pueden llevar a cabo con un proceso de integración de cuadratura de Gauss, que para una cierta función $f(\xi, \eta)$ en un espacio bidimensional es de la forma:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \simeq \sum_{i=1}^{g_1} \sum_{j=1}^{g_2} f(\xi_i, \eta_j) \omega_i \omega_j \quad (3.21)$$

donde ω_i y ω_j son los factores de peso, (ξ_i, η_i) son las coordenadas paramétricas y g_1 y g_2 son el número de puntos de Gauss en las direcciones ξ y η respectivamente. Sin embargo, dependiendo de la naturaleza y posición relativa del punto de colocación y el elemento sobre el que se lleva cabo la integración, existen cuatro tipos de integrales singulares:

- *Integrales singulares cercanas:* En este caso, el nodo de colocación no pertenece al elemento de integración, pero la proximidad introduce un error cuando la variación del integrando es acentuada.
- *Integrales singulares suaves:* Esto ocurre cuando el nodo de colocación pertenece al elemento de integración y la singularidad del núcleo es $O(1/r)$. Este es el caso de las funciones $\theta^*(x^n, x)$, $U_{ij}(x^n, x)$, $\overline{P}_i(x^n, x)$ y $\overline{Q}_i(x^n, x)$.
- *Integrales singulares fuertes:* Esto ocurre cuando el nodo de colocación pertenece al elemento y la singularidad es del orden $O(1/r^2)$. Este es el caso de las funciones $q^*(x^n, x)$, $\theta^{**}(x^-, x)$, $T_{ij}(x^n, x)$, $U_{kij}(x^-, x)$ y $\overline{P}_{ij}(x^-, x)$.
- *Integrales hipersingulares:* Esto ocurre cuando el nodo de colocación pertenece al elemento y la singularidad es del orden $O(1/r^3)$. Este es el caso de las funciones $q^{**}(x^-, x)$ y $T_{kij}(x^-, x)$.

3.9 Cálculo de Variables de Postproceso

3.9.1 Puntos Internos

Las derivadas de desplazamientos en puntos internos son calculadas a partir de la ecuación integral de contorno obtenida al derivar analíticamente la ecuación (3.3):

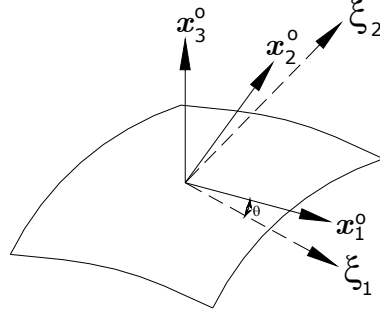


Figura 3.4: Sistema de coordenadas local (ξ_1, ξ_2) y sistema de coordenadas x_i^o .

$$\begin{aligned}
 u_{i,k}(x') + \int_{\Gamma} T_{ij,k}(x', x) u_j(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} \overline{P}_{i,k}(x', x) \theta(x) d\Gamma \\
 = \int_{\Gamma} U_{ij,k}(x', x) t_j(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} \overline{Q}_{i,k}(x', x) q(x) d\Gamma
 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Donde $T_{ij,k}(x', x)$, $U_{ij,k}(x', x)$, $\overline{P}_{i,k}(x', x)$ y $\overline{Q}_{i,k}(x', x)$ son las derivadas de los campos fundamentales. Las derivadas de temperatura, en forma análoga se obtienen al derivar la ecuación (3.1):

$$\theta_{,k}(X') = \int_{\Gamma} q_{,k}^*(X', x) \theta(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} \theta_{,k}^*(X', x) q(x) d\Gamma(x) \quad (3.23)$$

donde $q_{,k}^*(X', x)$ y $\theta_{,k}^*(X', x)$ son las derivadas de las soluciones fundamentales de la ecuación de temperatura.

Una vez que son conocidas las derivadas de desplazamiento, los esfuerzos y deformaciones pueden ser calculados utilizando las relaciones básicas de mecánica del medio continuo, ecuaciones (2.2) y (2.4).

3.9.2 Puntos Sobre el Contorno

Las derivadas parciales de desplazamientos y temperatura en puntos sobre el contorno se obtienen a partir de las ecuaciones (3.22) y (3.23) respectivamente en forma similar que para puntos internos, llevando el punto del dominio al contorno. Sin embargo utilizando las ecuaciones integrales se presenta el problema de la hipersingularidad de los integrandos de la ecuación, para sobrellevar esta dificultad se calculan a partir de los desplazamientos, temperaturas y las tracciones en el contorno mediante derivación numérica. Considérese un sistema local de coordenadas x_i^o tal que el vector normal

unitario al elemento de contorno es x_3^o . Si u_i^o , ε_{ij}^o , σ_{ij}^o y t_i^o son los desplazamientos, deformaciones, esfuerzos y tracciones respectivamente en el sistema de coordenadas local y θ la temperatura, los componentes de esfuerzo pueden expresarse como:

$$\sigma_{3i}^o = t_i^o \quad \text{para } i = 1, 2, 3 \quad (3.24)$$

y de la Ley de Hooke para termoelasticidad,

$$\sigma_{ij} = 2\mu \left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \right] \quad (3.25)$$

haciendo

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^o &= t_3^o \\ \varepsilon_{33}^o &= \frac{1}{1-\nu} \left[\frac{1-2\nu}{2\mu} t_3^o - \nu (\varepsilon_{11}^o + \varepsilon_{22}^o) + (1+\nu) \alpha \theta^o \right] \end{aligned}$$

eliminando ε_{33}^o de la ecuación (3.25)

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^o &= \frac{1}{1-\nu} \{ \nu t_3^o + 2\mu [\varepsilon_{11}^o + \nu \varepsilon_{22}^o - (1+\nu) \alpha \theta^o] \} \\ \sigma_{22}^o &= \frac{1}{1-\nu} \{ \nu t_3^o + 2\mu [\varepsilon_{22}^o + \nu \varepsilon_{11}^o - (1+\nu) \alpha \theta^o] \} \\ \sigma_{12}^o &= 2\mu \varepsilon_{12}^o \end{aligned}$$

Las deformaciones ε_{ij}^o pueden calcularse a partir de la ecuación (2.4) aplicada en el sistema de coordenadas local. Debe destacarse que las derivadas de desplazamiento y temperatura están calculadas inicialmente en las direcciones intrínsecas sobre un elemento (ξ_1, ξ_2) y son transformadas al sistema local de coordenadas x_j^o . Finalmente las nueve componentes de derivadas de desplazamiento son calculadas aplicando derivación en cadena, las derivadas de desplazamiento en el sistema global están relacionadas a las derivadas respecto a las direcciones intrínsecas del elemento de contorno $\partial u_i / \partial \xi_j$ como sigue

$$\frac{\partial u_i^o}{\partial \xi_j} = \frac{\partial u_i^o}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} \quad (3.26)$$

donde $\partial x_k / \partial \xi_j$ es la matriz del Jacobiano de la transformación.

$$\frac{\partial u_i^o}{\partial \xi_j} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \Psi(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_j} u_i^{\circ, \alpha} \quad (3.27)$$

Se puede observar de la ecuación (3.26) una vez expandida produce un sistema de seis ecuaciones con nueve derivadas como incógnitas. Tres de estas incógnitas $u_{1,1}$, $u_{2,2}$ y $u_{3,3}$, pueden calcularse directamente del tensor de deformaciones ε_{11} , ε_{22} y ε_{33} respectivamente utilizando la ecuación (2.4). Esto deja el sistema con seis incógnitas, que pueden ser reducidas a tres si los valores de ε_{12} , ε_{13} y ε_{23} son sustituidos en la ecuación (2.4) y luego reemplazados en el sistema de ecuaciones. Finalmente, las tres restantes incógnitas son calculadas utilizando un grupo de tres ecuaciones tomadas del sistema generado por la ecuación (3.26). Debe notarse que una o más derivadas pueden ser cero simultáneamente dependiendo de la orientación del elemento y su forma, la selección de estas tres ecuaciones no puede ser arbitraria, siendo necesario hacer una selección especial en cada caso.

$$\varepsilon_{ij}^{\circ} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{\circ}}{\partial x_j^{\circ}} + \frac{\partial u_j^{\circ}}{\partial x_i^{\circ}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{\circ}}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_j^{\circ}} + \frac{\partial u_i^{\circ}}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_j^{\circ}} + \frac{\partial u_j^{\circ}}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i^{\circ}} + \frac{\partial u_j^{\circ}}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_i^{\circ}} \right)$$

En forma análoga, para las derivadas de temperatura en puntos del contorno, se lleva cabo una estrategia similar a la expuesta para las derivadas de desplazamiento

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \theta}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi_j} = \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial \Psi(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_j} \theta^{\circ, \alpha} \quad (3.29)$$

donde $\Psi(\xi_1, \xi_2)$ son las funciones de forma para los elementos de contorno.

Capítulo 4

Cálculo de Factores de Intensidad de Esfuerzo

Desde su introducción como parámetro fractomecánico los factores de intensidad de esfuerzo han ganado gran aceptación como una clave para determinar el comportamiento en la Mecánica de Fractura Lineal y Elástica. Se pueden aplicar algunas metodologías en la determinación de estos factores, por ejemplo, el criterio de apertura de desplazamientos (COD), que consiste en la extrapolación de desplazamientos en la vecindad del frente de grieta tanto en dos como tres dimensiones, pero con la desventaja que se requiere una discretización muy fina de la malla en la grieta. Otra técnica que resulta prominente son las integrales independientes de camino basadas en leyes de conservación. Una de las más conocidas es la integral J de Rice en la cual la densidad de energía de deformación y el trabajo realizado por las tracciones son integradas a lo largo de un contorno cerrado que encierra el vértice de grieta. Desde la introducción de la integral J muchos investigadores han tratado de especializarla para caracterizar singularidades debido a otro tipo de cargas, como efectos de inercia y gradientes de temperatura.

La implementación de la integral J mediante elementos de contorno fue presentada por Aliabadi [3] para elasticidad bidimensional y tridimensional. Una aplicación de la integral J en termoelasticidad bidimensional fue presentada por Prasad, Aliabadi y Rooke [40], [41], [42] y [43] incluyendo problemas de estado estacionario y dependientes del tiempo. Recientemente dell'Erba [18] presentó la formulación de la integral J con termoelasticidad utilizando el método de elementos de contorno. La integral esta compuesta de una integral de contorno más una integral de área y los factores de intensidad de esfuerzo se descomponen calculando campos termoelásticos simétricos y antisimétricos en una región definida alrededor del frente de grieta. La descomposición hace posible obtener los modos I, II y III para los factores de intensidad de esfuerzo fundamentado en que la integral se convierte en la suma de tres integrales (J^I , J^{II} y J^{III}) asociada con los tres modos.

La intensidad de los campos de esfuerzo y deformaciones en la vecindad de un frente tridimensional de grieta está dada por valores a trozos de J sobre ese frente. En grie-

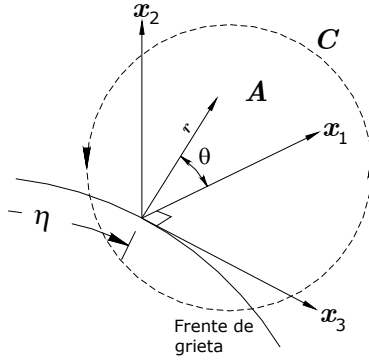


Figura 4.1: Área y contorno para la evaluación de la integral J en el frente de grieta.

tas tridimensionales, los campos bidimensionales en deformación plana son solamente aproximaciones asintóticas en el frente de grieta, por lo tanto una integral J de línea bidimensional puede ser usada muy cerca del vértice de fisura. En análisis mediante elementos finitos el cálculo de los campos cerca de esta zona es muy difícil, es por ello que Shih et. al. [46] proponen la metodología de una integral J de dominio (área/volumen) para el cálculo de energía relajada.

4.1 Método de Integrales de Contorno

La metodología de las integrales de contorno se basa en la aplicación de el teorema de la divergencia a la ecuación (2.18) la cual produce una integral remota de línea definida sobre un contorno en el plano normal principal en el punto η , figura (4.1), complementado por una integral definida sobre la superficie encerrada por el contorno.

$$\bar{J} = J_C + J_A$$

Una integral de este tipo es la propuesta por Kishimoto et al. como lo citan Prasad y dell'Erba [44], [18] para termoelasticidad.

$$\bar{J} = \int_{\Gamma} (W n_1 - t_i u_{i,1}) d\Gamma + \int_{\Omega} \alpha \sigma_{kk} \theta_{,1} d\Omega \quad (4.1)$$

La evaluación numérica de la parte correspondiente a J_A requiere la integración sobre elementos del vértice de la grieta presentando problemas de singularidad.

4.2 Integral de Energía de Dominio

Los métodos para integrales de dominio fueron desarrollados por Moran y Shih, Shih et al y Nikishkov y Atluri como los cita Cisilino [11], así en las integrales de contorno y las

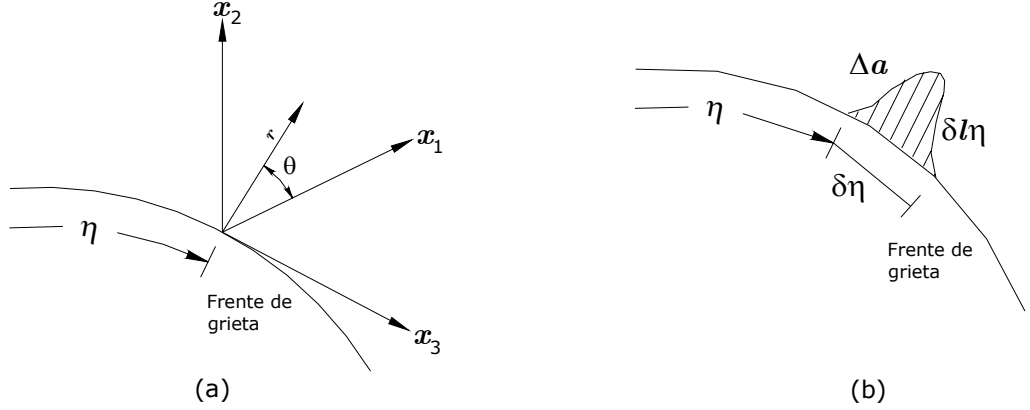


Figura 4.2: a) Frente de grieta, b) Extensión virtual del frente de grieta.

integrales de dominio se derivan al aplicar el teorema de la divergencia a la integral J de Rice, lo que produce una integral definida sobre un dominio finito encerrando cierta porción del frente de grieta. Esta metodología es equivalente a la técnica de avance virtual del frente de grieta y está mejor adaptada para su implementación numérica que las integrales de contorno. En esta sección se trata en detalle su desarrollo e implementación.

Dentro de la teoría de termoelasticidad no acoplada cuasi estática las deformaciones se pueden escribir como la suma de una parte elástica más una parte debido al campo de temperatura

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^\theta \quad (4.2)$$

la integral J de Rice se deriva del tensor de momentum de Eshelby como lo cita dell'Erba [18].

$$P_{ij} = W\delta_{kj} + \sigma_{ij}u_{i,k}^e \quad (4.3)$$

donde W es la densidad de energía de deformación y $u_{i,k}^e$ es el campo de derivadas de desplazamiento elástico. Una propiedad importante de este tensor es que su divergencia es cero

$$P_{ij,j} = 0 \quad (4.4)$$

por lo tanto la integración sobre un dominio finito será nula, quedando expresada la independencia de camino de la integral siguiente:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} (W \delta_{kj} + \sigma_{ij} u_{i,k}^e) d\Omega = 0 \quad (4.5)$$

donde Ω es el dominio de integración rodeado por un contorno cerrado C que excluye el vértice de grieta

Considérese un frente tridimensional de grieta con un vector tangente a lo largo del frente como se muestra en la figura (4.2a). En la posición η donde se evalúa la razón de energía relajada se define un sistema de coordenadas local tal que x_1 está en la dirección normal al frente, x_2 en la dirección normal a la fisura y x_3 en la dirección tangente al frente de grieta.

Denotemos por $\delta l(\eta)$ el avance local del frente de grieta en el punto η en la dirección normal al frente y contenido en el plano de la grieta, y sea $ds(\eta)$ la longitud elemental de arco a lo largo del frente como se muestra en la figura (4.2b). Tomando términos de primer orden en δl

$$-\delta\Pi = \bar{J} \Delta a = \int_{L_c} J(\eta) \delta l(\eta) ds \quad (4.6)$$

donde L_c denota el segmento de línea del frente de grieta en consideración y $\delta l(\eta)$ es un avance arbitrario del frente. Aquí $\delta\Pi$ es el descenso de la energía potencial y \bar{J} es por lo tanto la energía relajada por unidad de avance del frente de grieta, de esta forma el valor de $J(\eta)$ puede ser pesado a lo largo de un frente tridimensional. Debe notarse que a pesar que la ecuación (2.18) proviene de un análisis bidimensional se aplica al caso tridimensional, ya que en el límite cuando $r \rightarrow 0$, la condición de deformación plana prevalece y por lo tanto los campos tridimensionales aproximan un problema plano.

Consideremos que la fisura tiene un espesor h como se muestra en la figura (4.3a) y argumentamos que cuando $h \rightarrow 0$ se obtiene la configuración de grieta de interés. La superficie de la entalla está compuesta por las caras S_A y S_B , con normales en la dirección x_2 , y una cara cuya normal esta en el plano $x_1 - x_3$. Ahora, dejemos que la entalla con cara S_t con normal m_k en el plano $x_1 - x_3$ avance una distancia $\Delta a l_k$ en la dirección x_k , por ejemplo:

$$\Delta a l_k m_k = \delta l(\eta) \quad (4.7)$$

Mas aún restringimos a l_k moverse sobre S_t y que sea una función de x_1 y x_3 solamente; por lo tanto $l_2 = 0$ y se obtiene que

$$\bar{J} \Delta a = \Delta a \int_{S_t} (\sigma_{ij} u_{j,k} - W \delta_{ki}) l_k m_i dS \quad (4.8)$$

Cuando $\Delta a l_k$ corresponde a una traslación, l_k puede ser sacado del signo de la integral y se obtiene que $\bar{J} = J_k l_k$. Para desarrollar una integral de dominio (volumen), se

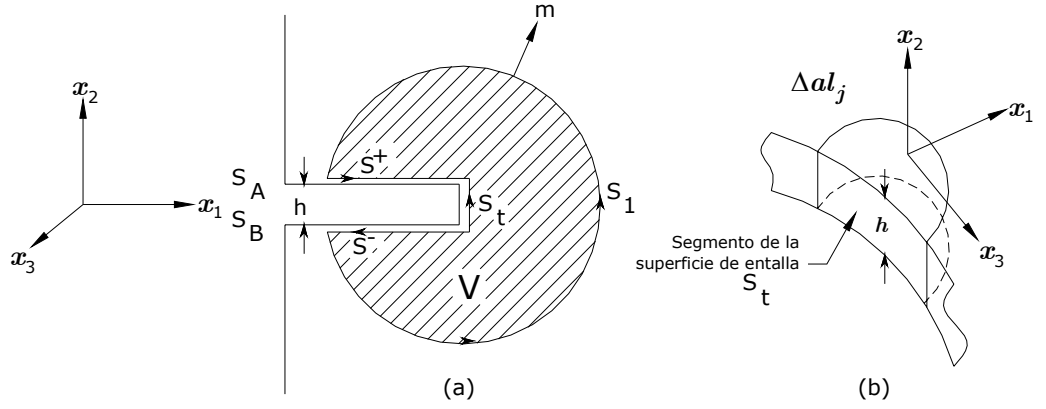


Figura 4.3: a) Dominio de integración encerrado por las superficies S_t , S^+ , S^- y S_1 . b) Esquema de la entalla de altura h .

considera un volumen encerrado por las superficies S_t , S^+ , S^- y S_1 como se muestra en la figura (4.3a). Seguidamente una función auxiliar q_k se define como

$$q_k = \begin{cases} l_k & \text{en } S_t \\ 0 & \text{en } S_1 \end{cases} \quad (4.9)$$

junto con el requerimiento de que q_k sea lo suficientemente suave en el volumen se puede reestructurar (4.8) en la forma de un integral sobre la superficie cerrada ($S = S_1 + S^+ + S^- - S_t$) y considerando las caras de la grieta libres de tracciones

$$\bar{J} = \int_S (\sigma_{ij} u_{j,k} - W \delta_{ki}) q_k m_i dS \quad (4.10)$$

Para llegar a esta expresión se considera que $m_1 = 0$, $m_3 = 0$ y $m_2 = \pm 1$ en las caras de la grieta. Se aplica el teorema de la divergencia a la integral de superficie cerrada (4.10), y utilizando la ecuación (4.2) y considerando que $h \rightarrow 0$ para la configuración real, se obtiene la integral de dominio

$$\bar{J} = \int_V \left\{ \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - W \delta_{ki} \right) \frac{\partial q_k}{\partial x_i} + \sigma_{nm} \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_k} q_k \right\} dV \quad (4.11)$$

Consistente con la independencia de camino de la integral J , la ecuación (4.11) es independiente del dominio de integración, por lo tanto cualquier volumen V puede ser considerado para el cálculo de \bar{J} , así se puede observar en la figura (4.8) al considerar cualquier dominio tubular rodeando el segmento del frente de grieta. La superficie S_t esta formada por la traslación del contorno Γ a lo largo del segmento L_c en el frente

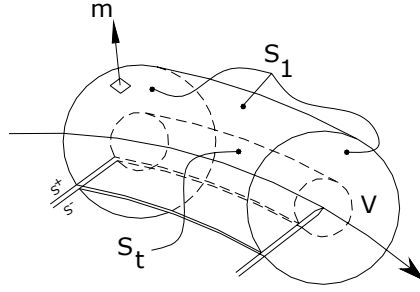


Figura 4.4: Dominio tubular encerrando un segmento en el frente de grieta.

de grieta, la superficie externa S_1 comprende la parte cilíndrica externa y los extremos laterales.

Como una aproximación la razón de energía relajada esta dada por

$$J(\eta) = \frac{\bar{J} \Delta a}{\Delta a \int_{L_c} l_k(\eta) m_k(\eta) d\eta} \quad (4.12)$$

donde el término en el denominador es el incremento del área de la grieta debido a un avance virtual del frente.

4.3 La Función q

La función auxiliar q_k introducida en el apartado anterior sirve para modelar el avance virtual del frente de grieta. A pesar que la función puede adoptar cualquier forma arbitraria el único requerimiento para la función es que sea lo suficientemente suave dentro del dominio V de integración, ya que la integral de energía de dominio requiere además su derivada.

Shih et al [46] demostraron que para la IED el valor de J es insensible a la forma asumida de la función. Sin embargo, se ha encontrado que la forma de la función es relevante en el cálculo de la integral M_I que se desarrolla más adelante para el desacople de los factores de intensidad de esfuerzo. Los tipos de función que se utilizan en es este trabajo son la función q_k con variación bicuadrática y optimizada.

4.3.1 Función q Bicuadrática

La función se define para variar en forma bi-cuadrática en las direcciones tangencial y nodal al frente de grieta. Considerando que la evaluación se lleva a cabo en el punto η que está en el medio de un segmento del frente L_c con r_o como el radio del camino de integración la función q se describe como:

$$q(x) = \left\| 1 - \left(\frac{x_3}{L_c/2} \right)^2 \right\| \left[1 - \left(\frac{r}{r_o} \right)^2 \right] \quad (4.13)$$

donde r es la distancia desde el frente de grieta en el plano $x_1 - x_3$ como se muestra en la figura (4.7).

4.3.2 Función q Optimizada

En un paper reciente Saliva et al. [47] proponen una forma optimizada de la función q que bajo ciertas consideraciones asegura la convergencia de la Integral de Energía de Dominio. La función propuesta es:

$$q(x) = \frac{w^p \|x\|^{-\beta}}{w^p \|x\|^{-\beta} + \sum_{i=1}^N w_j^{np} \|x - z_i\|^{-\beta}} \quad (4.14)$$

donde w^p , w^{np} y β son unos parámetros a escoger, y z_i son las posiciones de los N puntos con valor q preescrito nulo. Estos puntos son dados en este trabajo como aquellos nodos de celdas localizados en la superficie S_1 , la superficie externa del volumen de integración.

Utilizando los parámetros w^p , w^{np} y β es posible controlar que parte del dominio contribuye significativamente a la integral. En particular β está asociado con las suavidad de q . Valores grandes inducen gradientes aproximadamente nulos alrededor del frente de grieta, donde los valores no nulos de q están preescritos. En contraste, los campos presentan cambios abruptos fuera de estas regiones. Con w^p y w^{np} , la región con gradientes no nulos pueden ser trasladados cerca del frente de grieta o cerca del contorno del volumen de integración donde los valores nulos de q están preescritos. En la figura (4.5) se presenta la influencia de estos parámetros en función de r/r_o .

Es importante mencionar que Saliva et al [47] proponen especificar el valor de q independientemente de la malla, en este trabajo los valores de q son interpolados utilizando las funciones de forma de las celdas como se indica en la ecuación (4.23).

4.4 La Integral M_I

Entre los métodos disponibles para calcular los parámetros fractomecánicos, la integral de energía de dominio ha surgido como una buena herramienta para problemas de fractura elástica y termoelástica. El proceso de transformar una integral de contorno en una de dominio es ventajoso para propósitos numéricos debido a que se pueden obtener parámetros fractomecánicos precisos sin necesidad de resolver con gran precisión los campos singulares en la vecindad de la fisura.

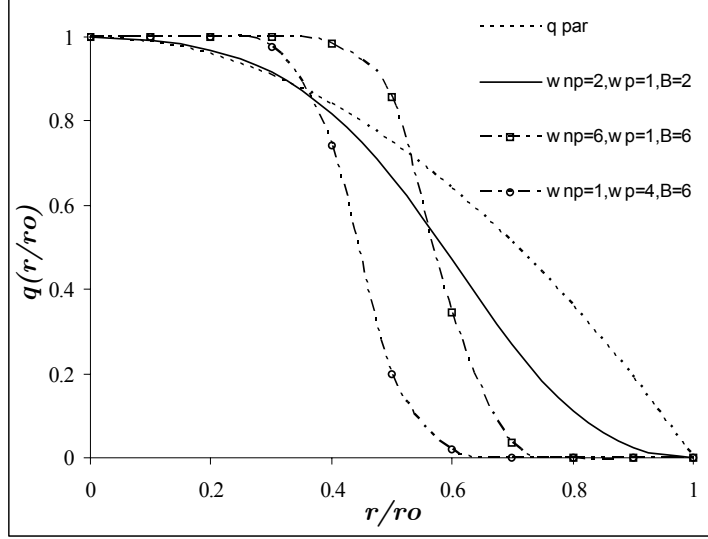


Figura 4.5: Formas de la función q bicuadrática y optimizada.

La integral M_I es una metodología para desacoplar los factores de intensidad de esfuerzo en modo mixto tridimensional. Consideremos dos estados en equilibrio denotados por los superíndices (1) y (2), la superposición de estos generan un nuevo estado (1+2) con $K_j^{(1+2)}$.

$$K_j^{(1+2)} = K_j^{(1)} + K_j^{(2)} \quad (4.15)$$

Los factores están relacionados a la integral J en condiciones de esfuerzo plano, como:

$$J = J_I + J_{II} + J_{III} = \frac{1}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (4.16)$$

la integral J para el estado superpuesto queda como:

$$\begin{aligned} J^{(1+2)} &= \frac{1}{E} \left[(K_I^{(1+2)})^2 + (K_{II}^{(1+2)})^2 \right] + \frac{(K_{III}^{(1+2)})^2}{2\mu} \\ &= J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E} [K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}] + \frac{K_{III}^{(1)} K_{III}^{(2)}}{\mu} \end{aligned} \quad (4.17)$$

y la integral M_I queda definida como:

$$M_I = J^{(1+2)} - J^{(1)} - J^{(2)} = \frac{2}{E} \left[K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right] + \frac{K_{III}^{(1)} K_{III}^{(2)}}{\mu} \quad (4.18)$$

A través de la ecuación (4.11) se determinan los valores de $J^{(1+2)}$, $J^{(1)}$ y $J^{(2)}$, donde el estado de equilibrio (1) se obtendrá del análisis por elementos de contorno y el estado (2) a través de las soluciones asintóticas conocidas para condiciones de deformación plana. Luego de obtener el valor de la integral M_I se calcula los factores de intensidad de esfuerzo considerando los siguientes tres casos para el estado (2):

$$\begin{aligned} K_I^{(2)} &= 1, K_{II}^{(2)} = 0, K_{III}^{(2)} = 0 \\ K_I^{(2)} &= 0, K_{II}^{(2)} = 1, K_{III}^{(2)} = 0 \\ K_I^{(2)} &= 0, K_{II}^{(2)} = 0, K_{III}^{(2)} = 1 \end{aligned}$$

entonces es posible obtener los factores de intensidad de esfuerzo por separado:

$$K_I^{(1)} = \frac{M_I^a E}{2} \quad K_{II}^{(1)} = \frac{M_I^b E}{2} \quad K_{III}^{(1)} = M_I^c \mu \quad (4.19)$$

La forma de la integral M_I en función de las variables de campo y los estados superpuestos es:

$$M_I = \int_V \left\{ \left(\sigma_{ij}^{(1)} u_{j,k}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} u_{j,k}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} \delta_{ki} \right) q_{k,i} + \sigma_{nn}^{(2)} \alpha \theta_{,k}^{(1)} q_k \right\} dV \quad (4.20)$$

debe tenerse en cuenta que el campo elástico (2) corresponde a las soluciones asintóticas para las cuales no existe un gradiente de temperatura, con lo cual se puede asumir que la integral M_I aún de esta forma contempla los efectos térmicos producidos por el estado (1).

Esta metodología es aplicable a grieta rectas y circulares (radio de curvatura constante), sin embargo como cita Gosz et al [19] deben considerarse otros términos para casos de grietas con frente curvo con curvatura variable.

4.5 Implementación Numérica

La porción del dominio del modelo en la que se evalúa la integral de dominio es discretizada mediante elementos de volumen o celdas de 20 nodos, sobre los cuales las variables son aproximadas por el producto de las funciones de interpolación de la celdas y los valores nodales de σ_{ij} , $u_{i,j}$, ε_{ij} y $\theta_{,k}$. En la figura (4.6) se muestran dos tipos de celdas, las continuas y semidiscontinuas, las últimas se utilizan en las posiciones sobre la superficie de la grieta para evitar calcular las variables de los campos sobre los

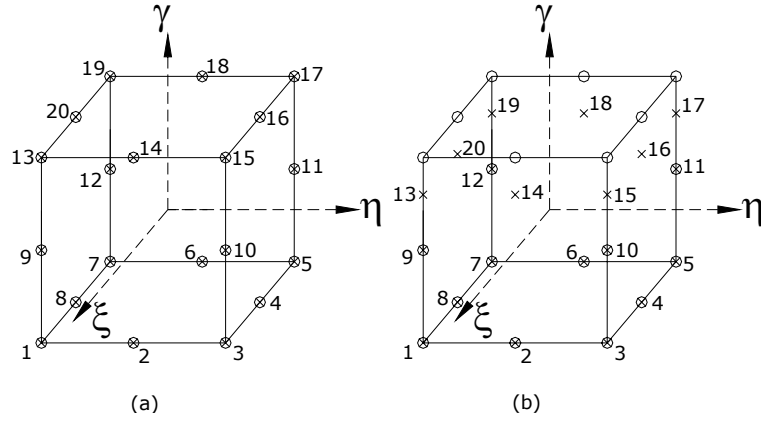


Figura 4.6: Tipos de celdas: a) continuas, b) semidiscontinuas.

elementos de la grieta y por consideraciones en la dirección de discontinuidad de los elementos de la grieta.

Las funciones de forma para las celdas continuas son:

$$\begin{aligned} \Phi^1 &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 - \gamma) (\xi - \eta - \gamma - 2) \\ \Phi^2 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta^2) (1 - \gamma) \\ \Phi^3 &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 - \gamma) (\xi + \eta - \gamma - 2) \\ \Phi^4 &= \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta) (1 - \gamma) \\ \Phi^5 &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 - \gamma) (-\xi + \eta - \gamma - 2) \\ \Phi^6 &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta^2) (1 - \gamma) \\ \Phi^7 &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 - \gamma) (-\xi - \eta - \gamma - 2) \\ \Phi^8 &= \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 - \eta) (1 - \gamma) \\ \Phi^9 &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 - \gamma^2) \\ \Phi^{10} &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 - \gamma^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{11} &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 - \gamma^2) \\
\Phi^{12} &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 - \gamma^2) \\
\Phi^{13} &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 - \eta) (1 + \gamma) (\xi - \eta + \gamma - 2) \\
\Phi^{14} &= \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 - \eta^2) (1 + \gamma) \\
\Phi^{15} &= \frac{1}{8} (1 + \xi) (1 + \eta) (1 + \gamma) (\xi + \eta + \gamma - 2) \\
\Phi^{16} &= \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta) (1 + \gamma) \\
\Phi^{17} &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 + \eta) (1 + \gamma) (-\xi + \eta + \gamma - 2) \\
\Phi^{18} &= \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta^2) (1 + \gamma) \\
\Phi^{19} &= \frac{1}{8} (1 - \xi) (1 - \eta) (1 + \gamma) (-\xi - \eta + \gamma - 2) \\
\Phi^{20} &= \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 - \eta) (1 + \gamma)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Para las celdas semidiscontinuas las funciones de forma son:

$$\begin{aligned}
\Phi^1 &= \frac{1}{4} \frac{(1+\xi)(1-\eta)(k-\gamma)}{(k+1)} (\xi - \eta - \gamma - 2) \\
\Phi^2 &= \frac{1}{2} \frac{(1+\xi)(1-\eta^2)(k-\gamma)}{(k+1)} \\
\Phi^3 &= \frac{1}{4} \frac{(1+\xi)(1+\eta)(k-\gamma)}{(k+1)} (\xi + \eta - \gamma - 2) \\
\Phi^4 &= \frac{1}{2} \frac{(1-\xi^2)(1+\eta)(k-\gamma)}{(k+1)} \\
\Phi^5 &= \frac{1}{4} \frac{(1-\xi)(1+\eta)(k-\gamma)}{(k+1)} (-\xi + \eta - \gamma - 2) \\
\Phi^6 &= \frac{1}{2} \frac{(1-\xi)(1-\eta^2)(k-\gamma)}{(k+1)} \\
\Phi^7 &= \frac{1}{4} \frac{(1-\xi)(1-\eta)(k-\gamma)}{(k+1)} (-\xi - \eta - \gamma - 2) \\
\Phi^8 &= \frac{1}{2} \frac{(1-\xi^2)(1-\eta)(k-\gamma)}{(k+1)} \\
\Phi^9 &= \frac{1}{4} \frac{(1+\xi)(1-\eta)(1+\gamma)(k-\gamma)}{k} \\
\Phi^{10} &= \frac{1}{4} \frac{(1+\xi)(1+\eta)(1+\gamma)(k-\gamma)}{k} \\
\Phi^{11} &= \frac{1}{4} \frac{(1-\xi)(1+\eta)(1+\gamma)(k-\gamma)}{k} \\
\Phi^{12} &= \frac{1}{4} \frac{(1-\xi)(1-\eta)(1+\gamma)(k-\gamma)}{k} \\
\Phi^{13} &= \frac{1}{4} \frac{(1+\xi)(1-\eta)(1+\gamma)}{k(k+1)} (k\xi - k\eta + \gamma - 2k) \\
\Phi^{14} &= \frac{1}{2} \frac{(1+\xi)(1-\eta^2)(1+\gamma)}{(k+1)} \\
\Phi^{15} &= \frac{1}{4} \frac{(1+\xi)(1+\eta)(1+\gamma)}{k(k+1)} (k\xi + k\eta + \gamma - 2k) \\
\Phi^{16} &= \frac{1}{2} \frac{(1-\xi^2)(1+\eta)(1+\gamma)}{(k+1)} \\
\Phi^{17} &= \frac{1}{4} \frac{(1-\xi)(1+\eta)(1+\gamma)}{k(k+1)} (-k\xi + k\eta + \gamma - 2k) \\
\Phi^{18} &= \frac{1}{2} \frac{(1-\xi)(1-\eta^2)(1+\gamma)}{(k+1)} \\
\Phi^{19} &= \frac{1}{4} \frac{(1-\xi)(1-\eta)(1+\gamma)}{k(k+1)} (-k\xi - k\eta + \gamma - 2k) \\
\Phi^{20} &= \frac{1}{2} \frac{(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\gamma)}{(k+1)}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

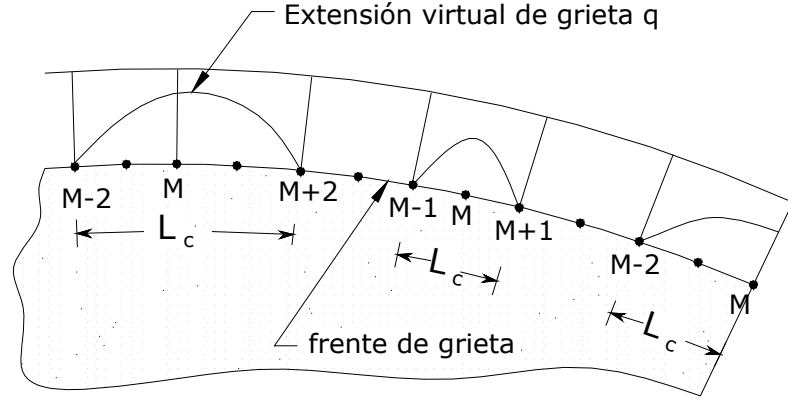


Figura 4.7: Extensión del frente de grieta en función del nodo de interés M.

donde k es un parámetro de discontinuidad que varía entre $0 < k \leq 1$.

La discretización del volumen forma una red alrededor del frente de grieta, donde los volúmenes de integración coinciden con los distintos anillos de celdas. Esto se ilustra en la figura (4.8), donde una de las caras del modelo ha sido removida para mostrar la grieta y los dominios de integración.

Como se observa en la figura (4.7), la extensión virtual de la grieta se adapta de acuerdo a la ubicación del nodo de interés M en el frente, si es un nodo medio o de superficie, se expande sobre un solo elemento, conectando los nodos $M-1$, M y $M+1$ y los nodos $M-2$ y M , respectivamente. Por otra parte si M es un nodo de esquina, se extiende sobre dos elementos conectando los nodos desde $M-2$ a $M+2$. La función auxiliar q debe ser lo suficientemente suave dentro del dominio V de integración.

La función q_i se especifica en todos los nodos de integración de las celdas. Consistente con la formulación isoparamétrica, los valores de q_i están dados por

$$q_i = \sum_{\alpha=1}^{20} \Phi^{\alpha}(\xi, \eta, \gamma) Q_i^{\alpha} \quad (4.23)$$

donde $\Phi^{\alpha}(\xi, \eta, \gamma)$ son las funciones de forma definidas sobre cada volumen y Q_i^{α} son los valores nodales para el nodo n -ésimo, de la definición de q_k (ver la ecuación (4.9)) $Q_i^{\alpha} = 0$ si el α -ésimo nodo está en S_1 . Si la propagación de la grieta se restringe a ser en la dirección normal al frente, Q_2^{α} y Q_3^{α} se desvanecen idénticamente.

Siguiendo manipulaciones estándar

$$q_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{20} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \Phi^{\alpha}}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} Q_i^{\alpha} \quad (4.24)$$

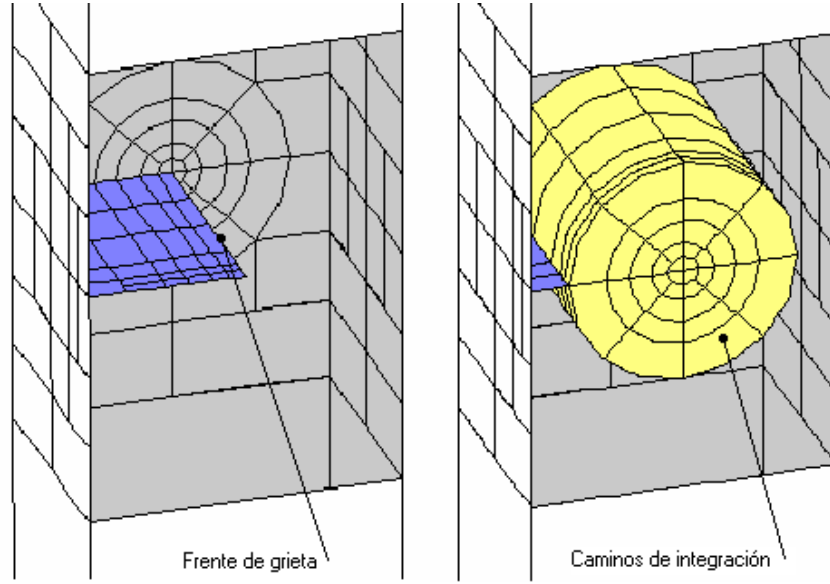


Figura 4.8: Discretización del contorno y dominios de integración para la evaluación de la integral J.

donde ξ_k , con $k = 1, 2, 3$ son las coordenadas locales en la celda isoparamétrica. El modelo de integración gaussiana utilizado es el siguiente:

$$J = \sum_{cel. Vol.} \sum_{p=1}^m \left\{ \left[\left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - W \delta_{ki} \right) \frac{\partial q_k}{\partial x_i} + \sigma_{nm} \alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_k} q_k \right] \det \left(\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} \right) \right\}_p w_p \quad (4.25)$$

donde m es el número de puntos de Gauss por celda, y w_p son los factores de peso. En forma análoga la integral de interacción M_I presenta el esquema siguiente:

$$M_I = \sum_{cel. Vol.} \sum_{p=1}^m \left\{ \left[\left(\sigma_{ij}^{(1)} u_{j,k}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} u_{j,k}^{(1)} - \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} \delta_{ki} \right) q_{k,i} + \sigma_{nm}^{(2)} \alpha \theta_{,k}^{(1)} q_k \right] \det \left(\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k} \right) \right\}_p w_p \quad (4.26)$$

Capítulo 5

Ejemplos y resultados

En esta sección se muestra la aplicación de la implementación de la integral J de dominio y la integral M_I para ejemplos de grietas internas y externas con frente recto y circular. Para cada caso se comparan los resultados con los obtenidos por otros autores mediante métodos numéricos como elementos finitos, contra soluciones exactas o experimentales si es que existen.

Para todos los ejemplos las propiedades mecánicas del material son: módulo de Young $E = 1000 \text{ MPa}$, módulo de Poisson $\nu = 0.3$, coeficiente de expansión térmica $\alpha = 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ y conductividad térmica $\lambda = 1 \text{ W}/^\circ\text{Cm}$, en ningún caso se considera la influencia de la temperatura en la variación de estos parámetros.

5.1 Probeta con Grieta Lateral en Condición de Deformación Plana

Para poder validar el algoritmo propuesto se ensaya un modelo con características bidimensionales. Consideremos un panel con una grieta lateral como se muestra en la figura (5.1a) sometido únicamente a cargas térmicas, los desplazamientos normales de las caras laterales fueron restringidos para simular una condición de deformación plana. En el extremo $x = 0$ se prescribe una temperatura $\theta = -100^\circ\text{C}$ que varía linealmente como se muestra en la figura (5.1a) hasta el extremo $x = W$ donde $\theta = 100^\circ\text{C}$. La longitud de la grieta es $a = 10 \text{ mm}$, el ancho de la placa $W = 2a$, la longitud $L = W$ y el espesor de la placa $t = a/10$.

La discretización del modelo se presenta en la figura (5.2). Se utilizaron dos mallas, clasificadas como: malla fina y extrafina, la primera está compuesta por 242 elementos (18 en la superficie de la grieta) y 899 nodos y la segunda compuesta de 374 elementos de contorno (18 sobre la grieta) y 1319 nodos. Para el cálculo de J se construyeron siete anillos de celdas con radios que varían entre 5% y 75% de la longitud de la grieta compuestos por 60 celdas y 526 nodos para malla fina y 116 celdas con 958 nodos para la malla extrafina.

En condiciones de deformación plana los factores de intensidad de esfuerzo se pueden

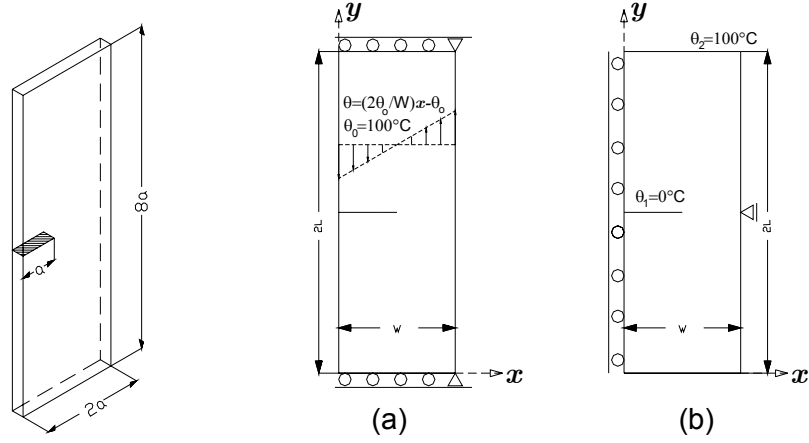


Figura 5.1: Placa con grieta lateral, geometría y carga.

	r/a							Prom.	Ref.
	0.050	0.090	0.150	0.225	0.338	0.500	0.750		
Superficie	0.534	0.527	0.525	0.525	0.526	0.528	0.529	0.528	0.504
$\Delta\%$	5.72	4.43	4.11	4.08	4.29	4.60	4.78	4.57	-
Interior	0.538	0.529	0.527	0.526	0.528	0.530	0.532	0.530	0.504
$\Delta\%$	6.35	4.77	4.40	4.35	4.56	4.93	5.41	4.97	-

Tabla 5.1: Valores de K_I^* probeta fina.

calcular a través de la relación: $K_I = [JE/(1 - \nu^2)]^{1/2}$ que se presentan normalizados como $K_I^* = K_I/\sigma_\theta\sqrt{\pi a}$, donde $\sigma_\theta = \alpha E\theta_0/(1 - \nu)$ es el esfuerzo en el extremo $x = W$ debido al campo de temperatura y las restricciones. Los resultados están reportados para el frente de grieta en puntos localizados en la superficie y en el plano medio. Los resultados reportados por Moran, Shih y Nakamura [46] reportan un error del 4% respecto a los reportados por Wilson y Yu para deformación plana utilizando elementos finitos en una probeta bidimensional. Mediante la integral J de dominio con el MEC el error es menor al 5% para probeta fina y menor al 2% para la probeta extrafina, ver tablas 5.1 y 5.2. La diferencia entre los valores calculados y los de la referencia están reportados como $\Delta\%$. El error entre caminos de integración, excepto para el primer anillo, es menor al 1.0 % y los resultados demuestran similitud entre nodos en la superficie y el nodo en el plano medio de la probeta. Para este ejemplo se utilizó la variación parabólica de la función q_k .

	r/a							Prom.	Ref.
	0.050	0.090	0.150	0.225	0.338	0.500	0.750		
Superficie	0.482	0.497	0.501	0.501	0.502	0.502	0.502	0.499*	0.504
$\Delta\%$	-4.49	-1.31	-0.52	-0.41	-0.33	-0.22	0.88	-0.32*	-
Interior	0.489	0.500	0.502	0.502	0.503	0.503	0.503	0.501*	0.504
$\Delta\%$	-3.01	-0.78	-0.23	-0.21	-0.18	-0.06	-0.06	-0.05*	-

Tabla 5.2: Valores de K_I^* probeta extra fina, (*) implica que el promedio fue calculado sin considerar el valor del primer camino de integración.

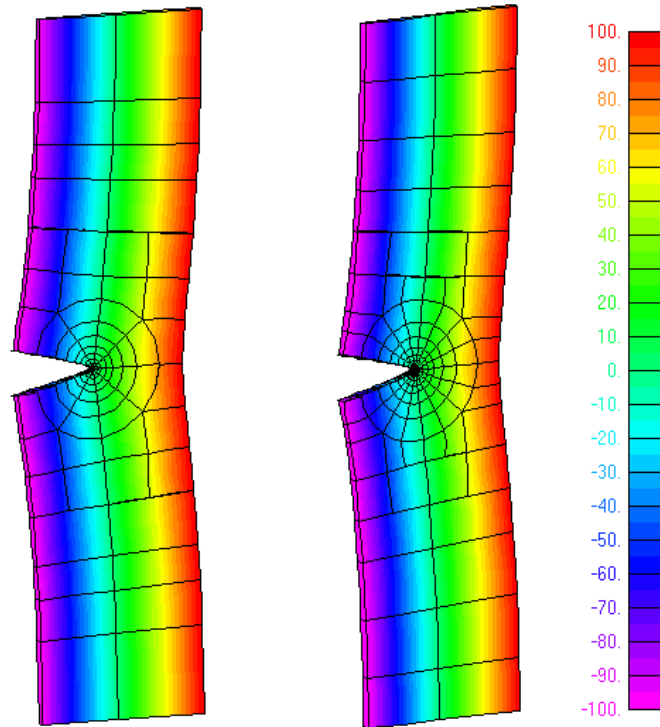


Figura 5.2: Distribución de temperatura y deformación exagerada de la probeta con grieta lateral, malla fina y extra fina.

	r/a							Prom.	Ref.
	0.050	0.090	0.150	0.225	0.338	0.500	0.750		
Superficie	0.497	0.489	0.487	0.486	0.486	0.486	0.496	0.490	0.495
$\Delta\%$	1.36	-0.14	-0.59	-0.74	-0.75	-0.77	1.18	-0.06	-
Interior	0.497	0.489	0.487	0.486	0.486	0.486	0.496	0.490	0.495
$\Delta\%$	1.36	-0.14	-0.59	-0.74	-0.75	-0.77	1.18	-0.06	-

Tabla 5.3: Valores de K_I^* probeta con grieta central en deformación plana.

5.2 Probeta con Grieta Interna en Condición de Deformación Plana

Las relaciones geométricas consideradas en este caso son: longitud de la grieta $a = 10 \text{ mm}$, ancho de la placa $W = 2a$, longitud $L = W/2$ y espesor de la placa $t = a/10$. Sobre las superficies de la grieta en $0 \leq x \leq W/2$ e $y = L$ la temperatura prescrita es $\theta_1 = 0^\circ\text{C}$, en las superficies en $x = W$ e $y = \pm L$ la temperatura prescrita es $\theta_2 = 100^\circ\text{C}$ como se observa en la figura (5.1b), todas las demás superficies se consideran aisladas, se prescriben condiciones de desplazamiento apropiadas por simetría en $x = 0$, de esta manera solo se discretiza una mitad del modelo como se muestra en la figura (5.3), el número de nodos y elementos para la malla fina es la misma que en el ejemplo anterior.

Los resultados para el factor de intensidad de esfuerzo están normalizados como $K_I^* = K_I/\alpha E (\theta_2 - \theta_1) \sqrt{W}$. En la tabla 5.3 se presenta el valor de K_I^* comparado con la solución calculada por Sumi y Katayama utilizando el método de variable compleja y reportado por Murakami et al [18] para un problema bidimensional en deformación plana. Para este ejemplo se utilizó la variación parabólica de la función q_k .

5.3 Probeta Gruesa con Grieta Lateral

Éste ejemplo corresponde a una probeta con las mismas características térmicas que en el ejemplo 1. La grieta está contenida en una probeta gruesa como se muestra en la figura (5.4a), por condición de simetría geométrica en $y = t/2$ los desplazamientos normales a este plano son restringidos. El propósito es poder observar el comportamiento de la integral J en grietas que tocan una superficie libre y también identificar el comportamiento de los factores de intensidad de esfuerzo a lo largo del frente de grieta.

La longitud de la grieta es $a = 10 \text{ mm}$, el ancho de la placa es $W = 2a$, la longitud $L = 3W$ y el espesor de la placa es $t = 15 \text{ mm}$. El modelo discretizado figura (5.7a) esta compuesto por 292 elementos de contorno y 1351 nodos. Para el cálculo de J se construyeron 4 anillos de celdas con radios que varían entre un 20% y 75 % de la longitud de la grieta, compuestos por 408 celdas y 2302 nodos de celdas.

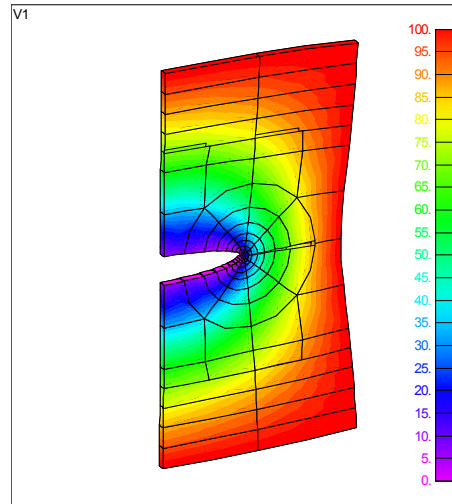


Figura 5.3: Malla fina probeta con grieta central.

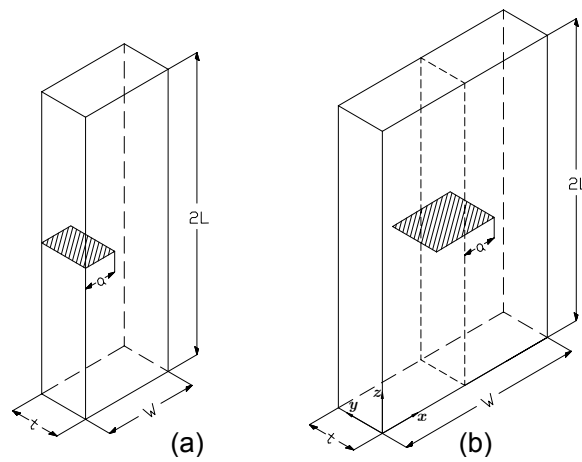


Figura 5.4: Esquema probeta gruesa, (a) grieta sobre un borde libre, (b) grieta interna.

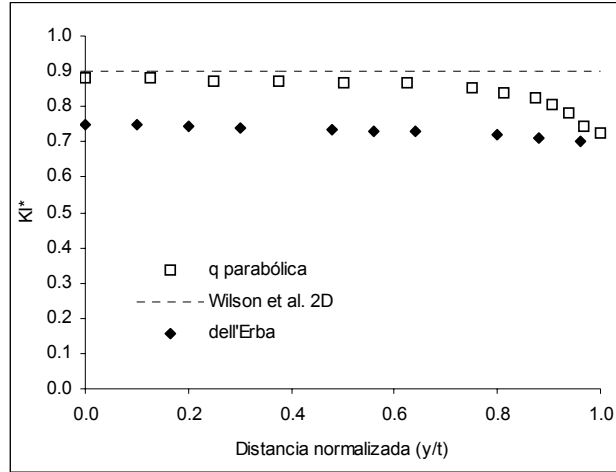


Figura 5.5: Valores de K_I^* a lo largo del frente de grieta.

Los valores normalizados $K_I^* = K_I/\alpha E\theta_o\sqrt{W}$ promediados se presentan en la gráfica (5.5) donde el origen de coordenadas y/t coincide con el plano medio de la probeta y se observa que en esta posición el valor de K_I^* se aproxima a la solución en deformación plana, mientras que en el extremo donde la grieta toca la superficie de la probeta el valor de K_I^* tiende a disminuir debido a que la singularidad de los campos en esta posición es distinta a $(1/\sqrt{r})$. De la gráfica puede observarse que los valores de K_I^* presentan una mejor aproximación que los obtenidos por dell'Erba [18] mediante la formulación por desplazamiento de puntos sobre la grieta (COD) utilizando elementos con funciones de interpolación especiales. Es importante destacar que con la integral de dominio se puede calcular J en el nodo sobre el frente de grieta que toca el extremo libre de la probeta.

5.4 Probeta con Grieta Interna con una Superficie Libre

Este ejemplo corresponde a una probeta con las mismas características de carga que en el ejemplo 2, la grieta es interna y por condiciones de simetría como se presenta en la figura (5.4b) solo una cuarta parte del cuerpo es modelada.

En este caso se analiza el cálculo de los factores de intensidad de esfuerzo mediante la integral M_I comparando las aproximaciones parabólica y optimizada de la función q_k . Se puede observar que utilizando la función optimizada se obtiene un mejor resultado en el punto que toca la superficie libre la probeta, donde los campos tiene una variación mas fuerte que $(1/\sqrt{r})$, sin embargo muchos autores hacen referencia a que en esta posición se requiere una mayor discretización del modelo para poder obtener resultados

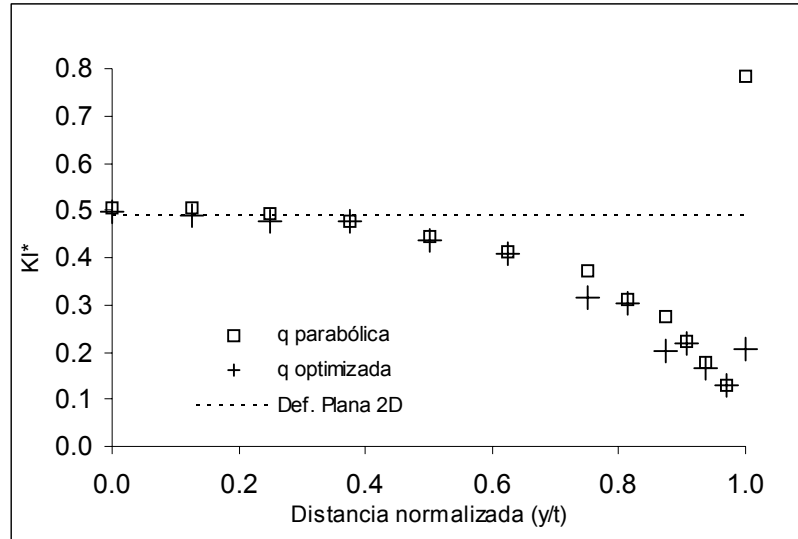


Figura 5.6: Valores de K_I^* a lo largo del frente de grieta calculados con la función q bicuadrática y optimizada.

adecuados. El modelo discretizado tiene el mismo número de elementos que el problema anterior, ver figura (5.7b). En la gráfica (5.6) se puede observar que la diferencia de K_I^* calculado con la aproximación parabólica y optimizada (parámetros: $\beta = 6.0$, $w^p = 6.0$ y $w^{np} = 1.0$) a lo largo del frente no presenta gran variación hasta acercarse al borde libre, donde la aproximación optimizada reporta mejores resultados.

Para poder analizar el comportamiento de la integral J con ambas aproximaciones debemos considerar que para el caso termoelástico J está dado como el aporte de una parte elástica y otra térmica:

$$J = J_e + J_t$$

donde la parte elástica esta multiplicada por la derivada $q_{k,i}$ y la parte térmica por la función q_k (revisar la ecuación 4.11) En la figura (4.5) se observa la forma q_k y podemos intuir que la derivada de la función optimizada es siempre nula en los extremos, por lo tanto el aporte de J_e es nulo en esos puntos, en oposición a la función bicuadrática que se anula únicamente en el extremo donde $q = 1$. Por otra parte J_t se adapta a la forma de q en ambos casos y depende del dominio de integración.

Es importante destacar que para el desacople de los factores de intensidad de esfuerzo se está utilizando como estado elástico auxiliar las soluciones asintóticas para deformación plana en una zona donde ocurre un estado de esfuerzos plano (extremo libre de la probeta), por lo tanto la capacidad de cálculo con la aproximación parabólica es menos precisa que la aproximación optimizada, podemos observar que la repuesta de la parte térmica permanece invariable a pesar de la función q_k utilizada, lo cual lleva a

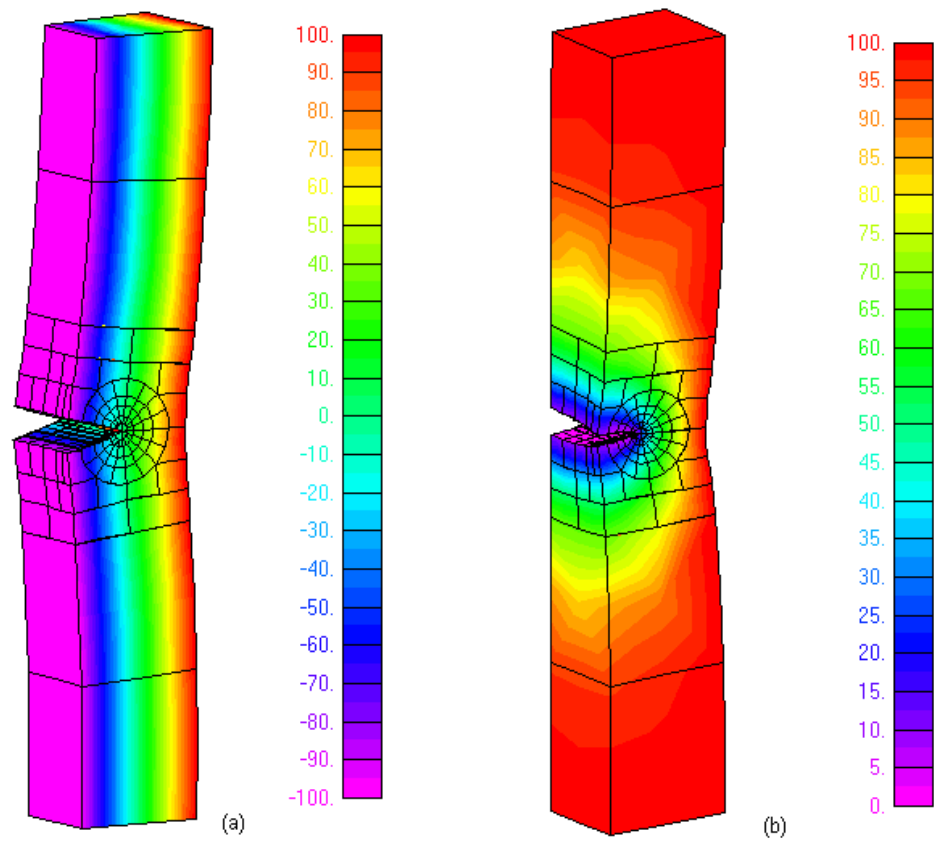


Figura 5.7: Probeta gruesa (a) con grieta lateral , (b) con grieta central.

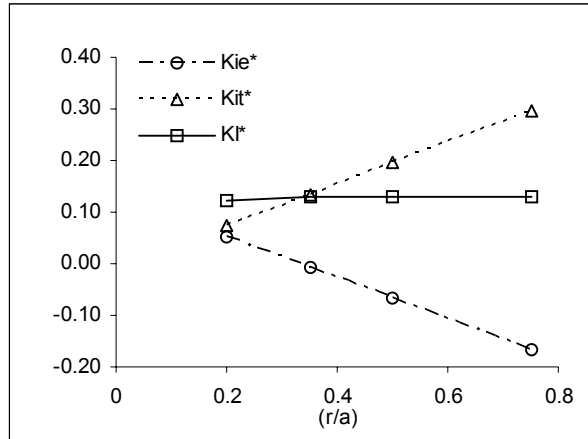


Figura 5.8: Valores de K_I^* en la ubicación $y/t = 0.96875$ para los 4 caminos de integración (r/a) mediante la función q bicuadrática.

confirmar que el efecto de la suavidad de la función pondera sobre todo la parte elástica, la cual modifica con mayor relevancia los resultados.

En las gráficas (5.8) y (5.9) se muestran los valores de K_I obtenidos para el penúltimo nodo sobre el frente de grieta utilizando las aproximaciones bicuadrática y optimizada separados en aporte elástico y térmico, para ambos casos el valor de K_I es muy parecido con un error menor al 3%. Una observación importante es que la función bicuadrática presenta un mejor comportamiento para volúmenes definidos cerca del frente de grieta y no está afectada por el número de celdas que se considere en la dirección tangente al frente de grieta. Esto puede observarse al comparar los resultados para el camino de integración $r/a = 0.20$ en las tablas 5.4 y 5.5, donde para la función optimizada los valores de K_I^* presentan un comportamiento oscilatorio para las distintas posiciones sobre el frente de grieta.

5.5 Cuerpo Cilíndrico con Grieta Circular Interna

La geometría utilizada consiste en una barra de sección circular con una grieta interna de forma circular sometida a cargas térmicas y mecánicas como se observa en la figura (5.10). El radio y altura de la barra se denotan como R y h respectivamente. La grieta circular (penny-shaped) tiene radio $r = 10 \text{ mm}$ localizada en eje de la barra, las razones geométricas son las siguientes: $R/a = 10$ y $h/R = 6$. Para todos los casos la malla está compuesta por 1434 nodos y 224 elementos de contorno, sobre la grieta se colocaron 152 elementos, para el cálculo de J se construyeron 4 caminos de integración compuestos por 4352 nodos y 832 celdas.

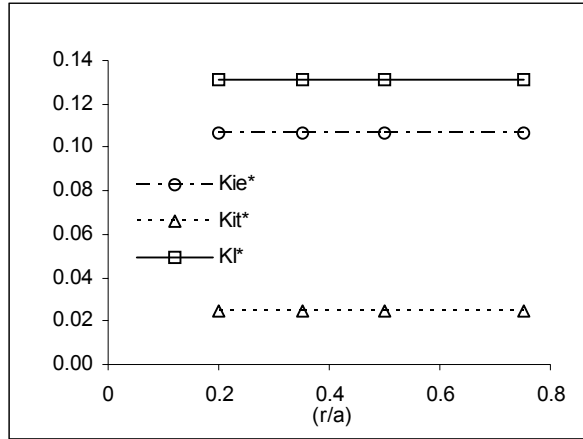


Figura 5.9: Valores de K_I^* en la ubicación $y/t = 0.96875$ para los 4 caminos de integración (r/a) mediante la función q optimizada.

Posición	r/a				prom.
	0.20	0.35	0.50	0.75	
0.00000	0.481	0.505	0.511	0.517	0.504
0.12500	0.487	0.506	0.511	0.517	0.505
0.25000	0.478	0.492	0.496	0.499	0.491
0.37500	0.476	0.479	0.480	0.480	0.479
0.50000	0.439	0.446	0.448	0.449	0.445
0.62500	0.409	0.412	0.412	0.413	0.411
0.75000	0.365	0.371	0.372	0.373	0.371
0.81247	0.309	0.311	0.311	0.312	0.311
0.87500	0.271	0.276	0.277	0.277	0.275
0.90627	0.223	0.224	0.224	0.224	0.224
0.93750	0.175	0.179	0.180	0.181	0.179
0.96875	0.123	0.128	0.129	0.131	0.128
1.00000	0.313	0.569	0.858	1.389	0.782

Tabla 5.4: Valores normalizados K_I^* utilizando la variación bicuadrática.

Posición	r/a				prom.*
	0.20	0.35	0.50	0.75	
0.00000	0.473	0.493	0.507	0.511	0.504
0.12500	0.490	0.487	0.488	0.488	0.487
0.25000	0.430	0.492	0.495	0.495	0.494
0.37500	0.474	0.477	0.477	0.477	0.477
0.50000	0.394	0.447	0.449	0.449	0.448
0.62500	0.407	0.410	0.410	0.410	0.410
0.75000	0.295	0.324	0.325	0.325	0.325
0.81247	0.302	0.303	0.303	0.303	0.303
0.87500	0.200	0.204	0.204	0.204	0.204
0.90627	0.217	0.217	0.217	0.217	0.217
0.93750	0.164	0.165	0.165	0.165	0.165
0.96875	0.131	0.131	0.131	0.131	0.131
1.00000	0.199	0.209	0.210	0.210	0.210

Tabla 5.5: Valores normalizados K_I^* utilizando la función q optimizada (* los valores promedio no consideran el valor del primer camino de integración $r/a = 0.20$).

5.5.1 Caso 1

Para todos los ensayos la temperatura en la superficie de la grieta fue prescrita $\theta = -100$ °C y todas las demás superficies de la probeta con temperatura $\theta = 0$ °C. La grieta fue rotada respecto al eje y formando un ángulo de 0° , 30° y 45° respecto al plano $x - y$ para cada ensayo..

Los valores de $K_I^* = K_I / (E\alpha\theta\sqrt{a/\pi} / (1 - \nu) 0.9418)$ [17] calculados presentan un comportamiento axisimétrico gráfica (5.11), $K_{II} = 0$ y $K_{III} = 0$ para todas las inclinaciones de la grieta, lo cual confirma que en el modelo las dimensiones de la grieta son muy pequeñas respecto al tamaño de la probeta y la inclinación no genera otro modo de sollicitación.

5.5.2 Caso 2

En este ensayo las condiciones térmicas son iguales a las del caso 1, la probeta además está sometida a un esfuerzo de tracción $\sigma = 1000$ MPa en los extremos $z = 0$ y $z = h$; la grieta tiene una inclinación de 45° grados respecto al plano $x - y$ alrededor del eje y .

Los valores de K_I^* , K_{II}^* y K_{III}^* normalizados como K_i/F , donde $F = \frac{E}{1-\nu}\alpha\theta\sqrt{a/\pi}$, se presentan en la gráfica (5.12). Se puede observar que el valor de K_I^* es constante a lo largo de todo el frente, mientras que el comportamiento de K_{II}^* y K_{III}^* es senoidal y presentan un desfase de 90° , esto es razonable porque en la posición donde ocurre un modo II de sollicitación de la grieta no existe el modo III y viceversa, para este caso la se utilizó la variación bicuadrática de la función q .

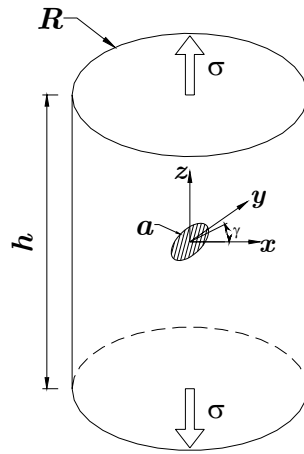


Figura 5.10: Grieta circular en una barra cilíndrica.

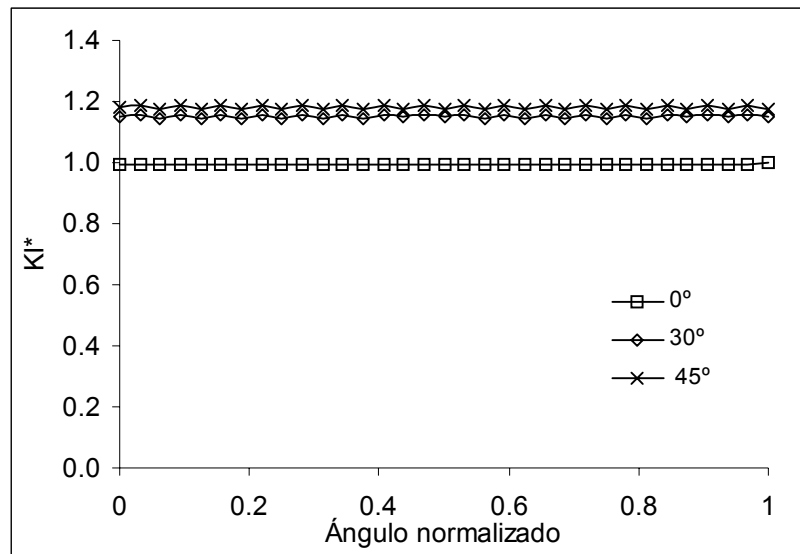


Figura 5.11: Variación de K_I^* a lo largo del frente de grieta ($\beta/2\pi$)

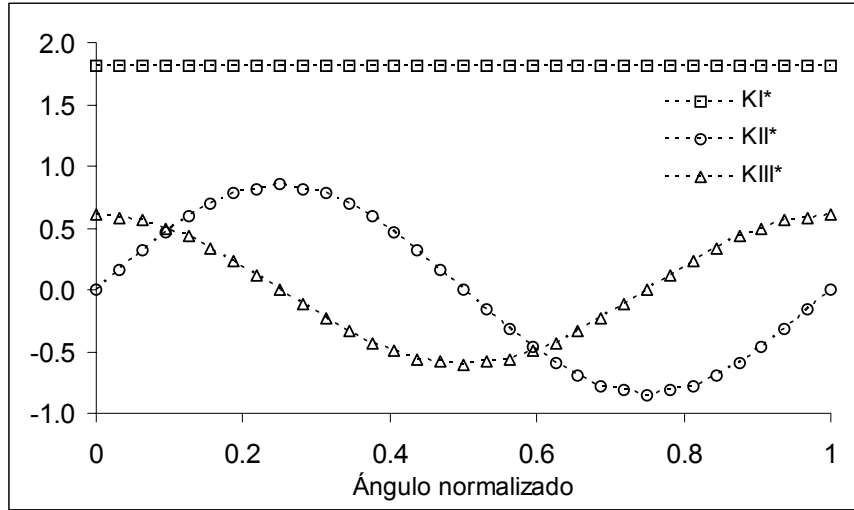


Figura 5.12: Factores de intensidad de esfuerzo en modo I, II y III normalizados para la grieta circular interna inclinada a 45° .

5.6 Probeta con Grieta Semicircular

El esquema de esta probeta se muestra en la figura (5.13). La geometría corresponde a una grieta semicircular con una inclinación de la grieta respecto al plano $x - y$ de 0° y 45° para cada caso. Las relaciones geométricas $a/W = 0.5$, $L/W = 2$ y $T/W = 2$, la grieta está aislada y un gradiente de temperatura dirigido en la dirección del eje y con temperaturas preescritas $\theta_1 = -100^\circ C$ en $y = 0$ y $\theta_2 = 100^\circ C$ en $y = T$, todas las demás superficies están aisladas y el desplazamiento normal en la dirección z fue restringido en $z = 0$ y $z = 2L$. En la figura (5.15) se presentan las mallas para la grieta plana e inclinada donde los modelos están compuestos de 260 elementos de contorno (76 sobre la grieta) y 1249 nodos, para el cálculo de J se construyeron tres caminos de integración con radios que varían entre un 20% y un 75 % del tamaño de la grieta compuestos por 416 celdas y 2374 nodos de celdas. Los valores de K normalizados como K_i/F , donde $F = \frac{E}{1-\nu} \alpha \theta_2 2\sqrt{a/\pi}$, se presentan en la figura (5.14). Para la grieta con inclinación de 0° solo existe el modo I de sollicitación variando de acuerdo al estado de esfuerzos generado por temperatura, sin embargo en la grieta con inclinación de 45° se producen modos de sollicitación I, II y III, donde K_{II}^* tiene una variación lineal. En este ejemplo solo se utilizó la variación bicuadrática de la función q .

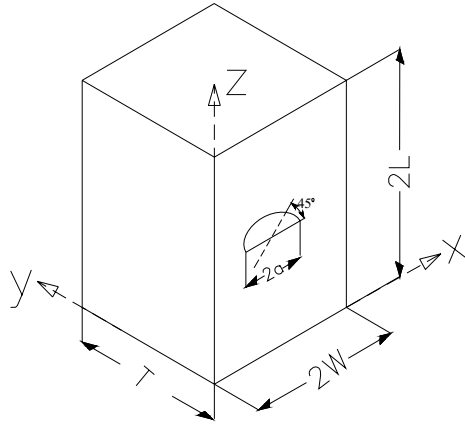


Figura 5.13: Grieta semicircular en una barra con grieta inclina a 0° y 45° .

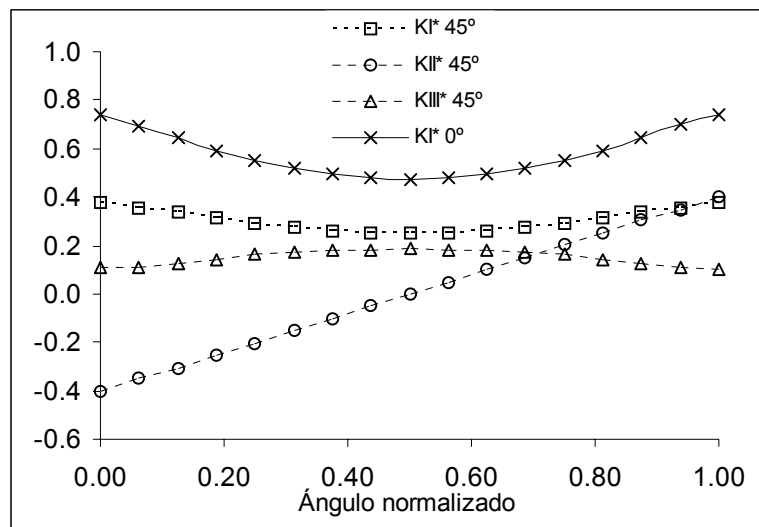


Figura 5.14: Factores de intensidad de esfuerzo en modo I, II y III normalizados para la grieta semicircular inclinada a 0° y 45° a lo largo del frente de grieta (β/π).

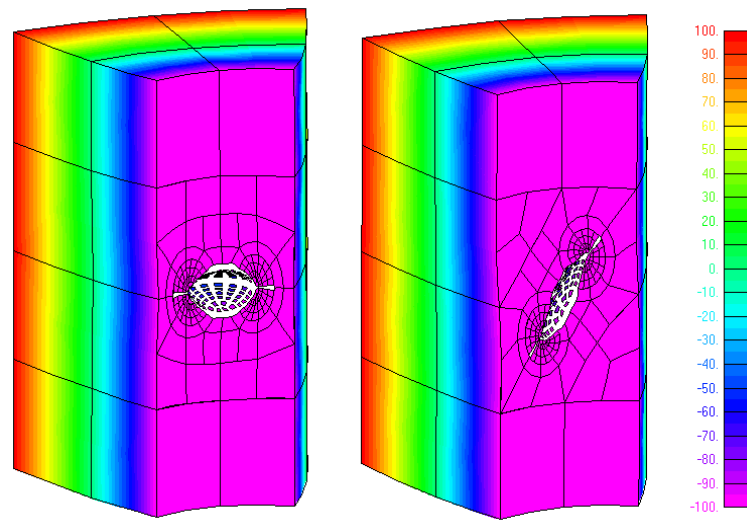


Figura 5.15: Deformadas de las probetas con grieta semicircular inclinada a 0° y 45° .

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se ha realizado la implementación de la integral J de dominio mediante el método de elementos de contorno considerando cargas de origen térmico. La eficiencia que ofrece el MEC en el cálculo de variables en puntos internos hace posible que la implementación de la integral de energía de dominio se realice en una etapa de post-proceso, inclusive puede ser aplicada en modelos para los cuales ya son conocidos los resultados en el contorno. La precisión de la metodología esta relacionada con la ventaja que tiene el MEC en el cálculo variables en puntos dentro del dominio (derivadas de desplazamiento y temperatura).

También se presentó la implementación de la integral M_I para el cálculo de los factores de intensidad de esfuerzo correspondiente a una etapa de postproceso. Es importante destacar que la formulación de la integral M_I ha sido desarrollada e implementada considerando el efecto del gradiente de temperatura en problemas tridimensionales termoelásticos partiendo de la formulación elástica. La integral M_I se basa en la independencia de camino de la integral J y la consideración de dos estados elásticos que permiten el desacople de los factores de intensidad de esfuerzo de forma eficiente y precisa. El procedimiento seguido demuestra ser eficiente y numéricamente viable al seleccionar la solución auxiliar analítica correspondiente a deformación plana. Los campos auxiliares asintóticos para problemas de deformación plana han sido implementados para descomponer los factores de intensidad de esfuerzo en grietas en modo mixto, los resultados han demostrado ser concordantes con los de las referencias obtenidos por otros métodos numéricos.

Se ha colocado especial énfasis en la selección de la función auxiliar q_k presente en la formulación de la integral de dominio. Dos aproximaciones han sido consideradas: una variación bicuadrática y una optimizada recientemente propuesta en un paper por Saliva et al. [47]. La función q_k constituye un parámetro importante en la operación de la metodología propuesta. Los resultados obtenidos demuestran que la función q_k optimizada opera marcadamente mejor para puntos localizados en la intersección del frente de grieta con una superficie libre, obteniéndose mejores resultados para K que respecto a la variación bicuadrática.

La función q_k bicuadrática se comporta mejor para volúmenes de integración definidos

cerca del frente de grieta, y no se ve afectada por el número de celdas utilizadas para el volumen de integración en la dirección tangente al frente de grieta.

Se realizó un análisis enfocado en que la integral J de dominio con termoelasticidad depende en parte de $q_{k,i}$ la derivada de la función auxiliar y otra de q_k . El aporte de la parte elástica se complementa con el aporte del gradiente de temperatura y el valor de J se mantiene constante para cualquier camino de integración seleccionado. A pesar que los parámetros de la función auxiliar q_k han sido originalmente aplicados en estudios de fractura elástica se demuestra que su adaptación con termoelasticidad resultada adecuada.

Bibliografía

- [1] Aliabadi, M.H. , dell'Erba, D. , Prasad, N.V. , *Thermomechanical Fatigue and Fracture, Thermomechanical crack growth using boundary elements*, Wit Pres, UK, 2002.
- [2] Aliabadi, M.H., *An enhanced boundary element method for determining fracture parameters*, in: Proceedings of Fourth International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics, San Antonio, Texas, Penderidge Press, Swansea, UK, 27-39, 1987.
- [3] Aliabadi, M.H., Rooke, D.P., *Numerical Fracture Mechanics*, Computational Mechanics publications, Southampton, UK; Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.
- [4] Beer, G., *Programming the Boundary Element Method, an introduction for Engineers*, Wiley, 2001.
- [5] Blandford, G.E., Ingraffea, A.R. y Liggett, J.A., *Two-dimensional stress intensity factor computation using boundary element method*, International Journal for Numerical Methods in engineering, 17, 387-404, 1981.
- [6] Brebbia C.A. and Dominguez J., *Boundary Elements: An Introductory Course*, Computational Mechanics Publications, Southampton and McGraw-Hill Company, London, 1992
- [7] Brebbia, C.A. ,Telles, J.C.F. and Wrobel, L.C., *Boundary Element Techniques*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [8] Broek D., *Elementary engineering fracture mechanics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1986
- [9] Cisilino, A.P. , Aliabadi, M.H., *Three dimensional boundary element analysis of fatigue crack growth in linear and non-linear fracture problems*, Eng. Fracture Mechanics, 63, 713-733, 1999.
- [10] Cisilino, A.P. , Aliabadi, M.H., Otegui, J.L. , *Energy domain integral applied to solve center and double edge crack problems en three-dimensions*, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 29, 181-194, 1998.

- [11] Ciscilino A.P., *Linear and Nonlinear Crack Growth using Boundary Elements*, PhD Thesis, Southampton, UK, 2000.
- [12] Crouch, S.L., *Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method*, International Journal for Numerical Methods in engineering, 10, 301-342, 1976.
- [13] Cruse, T.A. and Rizzo, F.J. , *A direct formulation and numerical solution of the general transient elasto-dynamic problem. I*, J. Math. Anal. Appl., 22, 244-259, 1968.
- [14] Cruse, T.A., *Boundary-integral equation in fracture mechanics ana-lysis* , in: Proceedings of Aplied Mechanics Conference, Troy, New York, 1975.
- [15] Cruse, T.A., *Numerical evaluation of elastic stress intensity factors by the boundary integral equation method*, in The surface Crack: Physical Problems and Computational Solutions, Edited by J.L.Swedlow, 153-170, American Society of Mechanical Engineers, New York, 1972.
- [16] Cruse, T.A., Meyers, G.J., *Three-dimensional fracture mechanics analysis*, ASCE J. Struc. Divn., 103, 309-320, 1977.
- [17] Das, B.R., *Thermal Stresses in a long Cylinder Containing a Penny-Shaped Crack*, Int. J. Engng. Sci., 6, 497-516, 1968.
- [18] Dell'Erba, D., *Thermoelastic Fracture Mechanics using Boundary Elements*, PhD Thesis, Southampton, UK, 2002.
- [19] Gosz, M., Dolbow, J. y Moran, B., *Domain integral formulation for stress intensity factor computatioin along curved three-dimensional interface cracks*, Int. J. solid Structures, 35, 1753-1783, 1998.
- [20] Guggiani, M. y Gigante, A., *A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the boundary element method*, ASME Journal of Applied Mechanics, 57, 906-915,1990.
- [21] Habib, I. S. , *Engineering Analysis Methods*, Lexington Books, Lexington, New York, 1975.
- [22] Hartranft, R.J., y Shi, G.C., *Stress singularity for crack whith an arbitrarily curved front*. Journal of Engineering Fracture Mechanics, 9, 705-718, 1977.
- [23] Jaswon, M.A., *Integral equation methods in potential theory I*, Proc. Roy. Soc., A275, 23-32, 1963.
- [24] Jaswon, M. and Ponter, A.R., *An integral equation in potential theory I*, Proc. Roy. Soc., A275, 23-32, 1963.

- [25] Jia, Z.H., Shipy, D.J., Rizzo, F.J., *Three-dimensional crack analysis using singular boundary elements*, Int. J. Numer. Methods Eng.,28, 2257-2273, 1989.
- [26] Kupradze, V.D., *Potential Methods in the Theory of Elasticity*, Daniel Davey&Co., New York, 1965.
- [27] Love, A.E.H., *A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, New York, 1944.
- [28] Lachat, J.C., y Watson, J.O., *Effective numerical treatment of boundary integral equations: A formulation for three-dimensional elastostatic*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10, 991-1005, 1976.
- [29] Martinez, M., *Identificación de defectos en componentes estructurales mediante técnicas numéricas*, Jornadas de Investigación, Facultad de ingeniería, U.C.V., Caracas, Venezuela, 2002.
- [30] Martínez, M., Aliabadi, M.H., *Fracture Mechanics of bone using the dual Boundary element method*, Simulation Modelling in Bioengineering, Editors: M. Cerrolaza, D. Jugo, C.A. Brebia, 175-185, 1996.
- [31] Mi, Y. and Aliabadi, H., *Three-Dimensional crack growth simulation using BEM*, Computers & Structures, 52, 871-878, 1993.
- [32] Mi, Y. and Aliabadi, H., *Dual Boundary Element Method for three dimensional fracture mechanics analysis*, Eng. Analysis whit Boundary Elements, 10, 161-17, 1992.
- [33] Moran, B. and Shih, C.F., *Crack Tip and Associated Domain Integrals from Momentum and Energy Balance*, Eng. Fracture Mechanics, 27, 615-642, 1987.
- [34] Muskhelishvili, N.I., *Some Basics problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, leyden, 1953.
- [35] Nowacki, M., *Thermoelasticity*, Wroclawska Drukarnia Naukowa, Polonia, 1962.
- [36] Portela, A., Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P., *Dual Boundary element incremental analysis of crack propagation*, Computers & Structures, 46, 237-247, 1993
- [37] Portela, A., Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P., *The dual boundary element method: efective implementation for crack problemas*, Int. J. Num. Meth. Engng., 33, 1269-1287, 1992.
- [38] Portela, A., Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P., *Dual boundary element incremental analysis of crack propagation*, in Advances in BEM for Fracture Mechanics, Edited by M.H. Aliabadi and C.A. Brebbia, Computational Mechanics Publications and Elsevier Applied Science Publications, 1992.

- [39] Portela, A., *Dual Boundary Formulation Analysis of Crack Growth*, PhD thesis, Southampton, UK, 1993.
- [40] Prasad, N.N.V., Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P. *The dual boundary element method for thermoelastic crack problems*, Int. Journal of Fracture, 66, 255-272, 1994.
- [41] Prasad, N.N.V., Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P. *The dual boundary element method for transient thermoelastic crack problems*, Int. J. Solids & Structures. 33, 2695-2718, 1996.
- [42] Prasad, N.N.V., Aliabadi, M.H. *Thermo-mechanical fatigue crack growth*, Int. J. Fatigue, 18, 349-361, 1996.
- [43] Prasad, N.N.V., Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P. *Incremental crack growth in thermoelastic problems*, Int. J. frac., 66, R45-R50, 1994.
- [44] Prasad, N.N.V., *Thermomechanical Crack Growth: Boundary Element Analysis*, PhD Thesis, Southampton, UK, 1995.
- [45] Rizzo, F.J., *An integral equation approach to boundary problems of classical elastostatics*, Quaterly of Applied Mathematics, 25, 83-96, 1967.
- [46] Shih, C.F., Moran, B. and Nakamura, T., *Energy release rate along a three-dimensional crack front in a thermally stressed body*, Int. J. of Fracture, 30, 79-102, 1986.
- [47] Saliva, R., Vénere, M.J., Padra, C., Taroco, E. y Feijoo, R.A., *Shape sensitivity analysis and energy release rate of planar cracks embedded in three-dimensional bodies*, Computer Methods in Applied Mechanics and engineering, 188, 649-664, 2000.
- [48] Snider, M.D. y Cruse, T.A., *Boundary integral equations analysis of cracked anisotropic plates*, International Journal of Fracture, 11, 315-328, 1946.
- [49] Sih, C.H. *On the singular character of thermal stress near a crack tip*, Journal of Applied Mechanics, 29, 587-589, 1962.
- [50] Symm, G.T., *Integral equation methods in potential theory II*, Proc. Roy. Soc., A275, 33-46, 1963.
- [51] Timoshenko S.P. and Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, 3ra Edición, MacGraw-Hill, New York, 1985.
- [52] de Vedia, L., *Mecánica de Fractura*, Proyecto Multinacional de Meta-lúrgia OEA-CNEA, Buenos Aires, 1976.