



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE COMPUTACIÓN

# **Diferencias finitas compactas en mallas nodales y centro distribuidas aplicadas a la simulación de ondas acústicas**

**Tutor: Dr. Otilio Rojas Ulacio**

**Co-Tutora: Dra. Beatriz Otero Calviño**

Tesis Doctoral presentada ante el Postgrado en Ciencias de la  
Computación por el **M.Sc. Luis J. Córdova**

Caracas, Venezuela

Octubre, 2017



### VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del jurado designado por el Consejo de la Facultad de Ciencias y el Consejo de Estudios de Postgrado de la Universidad Central de Venezuela, para examinar la **Tesis Doctoral** presentada por: **Luis Joaquín Córdova Díaz**, Cédula de identidad N° **9.279.035**, bajo el título "**Diferencias finitas compactas en mallas nodales y centro distribuidas aplicadas a la simulación de ondas acústicas**", a fin de cumplir con el requisito legal para optar al grado académico de DOCTOR EN CIENCIAS, MENCIÓN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN, dejan constancia de lo siguiente:

1.- Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del jurado, se fijó el día 31 de Octubre de 2017 a las 10:00 AM, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la **Escuela de Computación de la UCV**, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado, todo ello conforme con lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

2.- Finalizada la defensa del trabajo, el jurado decidió aprobarlo, por considerar, sin hacerse solidario con la ideas expuestas por el autor, que se ajusta a lo dispuesto y exigido en el Reglamento de Estudios de Postgrado.

Para dar este veredicto, el jurado estimó que el trabajo examinado representa una contribución a la formulación y el análisis de métodos en diferencias finitas para la simulación de ondas acústicas bajo el modelo presión-velocidad. La formulación contempla dos métodos distintos de diferenciación espacial bajo un único esquema temporal poco usado en esta área. El análisis es un estudio novedoso y preliminar de la estabilidad y la complejidad operacional de ambos métodos.

En fe de lo cual se levanta la presente ACTA, a los 31 días del mes de Octubre del año 2017, conforme a lo dispuesto en el Reglamento de Estudios de Postgrado, actuó como Coordinador del jurado el **Dr. Otilio J. Rojas U.**

*[Handwritten signatures]*



El presente trabajo fue realizado bajo la dirección de los doctores **Otilio J. Rojas U. (UCV)** y **Beatriz Otero C. (Universidad Politécnica de Cataluña)**.



Dr. Jacques Laforge / C.I. 13.498.503  
Universidad de Oriente  
Jurado designado por el Consejo  
de la Facultad



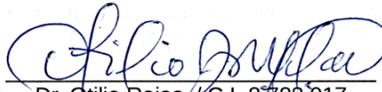
Dr. Luis M. Hernández / C.I. 6.766.769  
Universidad Central de Venezuela  
Jurado designado por el Consejo  
de la Facultad



Dr. Oswaldo Jiménez / C.I. 6.044.417  
Universidad Simon Bolivar  
Jurado designado por el Consejo  
de Estudios de Postgrado



Dr. Alberto Bellorin / C.I. 8.382.750  
Universidad Central de Venezuela  
Jurado designado por el Consejo  
de Estudios de Postgrado



Dr. Otilio Rojas / C.I. 87788.017  
Universidad Central de Venezuela  
Tutor(a)



POSTGRADO EN CIENCIAS  
DE LA COMPUTACION  
Universidad Central de Venezuela

OR 31-10-2017.

# Agradecimientos

A Dios por darme la fortaleza, la paciencia y la sabiduría para poder llevar a cabo mi tesis.

Al Dr. Otilio Rojas, por ser mi asesor académico y amigo. Muchas gracias por sus aportaciones técnicas y económicas durante la realización de mi tesis. *Muchas gracias Profesor!*

A la Dra. Beatriz Otero, por ser mi co-asesora académica. Muchas gracias por toda su ayuda e interés mostrado durante mi tesis.

Al Dr. Jacques Laforgue, por estar dispuesto a ayudarme y ofrecerme sus conocimientos.

A la Coordinación del Postgrado en Ciencias de la Computación, por toda la ayuda que me brindaron durante mis estudios en este Postgrado.

A los profesores del postgrado, por sus clases impartidas y los conocimientos ofrecidos para el desarrollo de mi tesis.

# Dedicatoria

*A la memoria de mi madre Ofelia Díaz. Siempre estarás en mi corazón!*

*A mi padre, Luis Córdova, por tenerlo y ser el principal estímulo en mis estudios.*

*A mis hermanos, a mis hijos y a mi bello nieto Isaac Josué.*

# Resumen

En este trabajo, se formulan, implementan y comparan dos esquemas en diferencias finitas compactas (DFC) para modelar la propagación de ondas acústicas bajo condiciones de borde tipo Dirichlet en mallas 2-D rectangulares. El más novedoso de estos esquemas utiliza los operadores DFC formulados por Aboulai y Castillo [1] en mallas centro distribuidas. Estos operadores resultan de factorizar los operadores en DF triparamétricos de gradiente y divergencia miméticos de cuarto orden de precisión, como el producto de sus homólogos de segundo orden y nuevos operadores auxiliares dependientes en los parámetros miméticos. En esta descomposición, los estenciles en DF resultantes son de menor tamaño que en el caso triparamétrico original y de allí se deriva su calificativo compacto. El segundo esquema utiliza los operadores en DFC sobre mallas nodales estudiados por Lele [38], y que requieren resolver un sistema lineal en banda para la diferenciación implícita en cada línea coordenada de la malla. En este caso, la precisión se limita a cuarto orden y los sistemas lineales resultan tridiagonales, cuya resolución vía el algoritmo de Thomas es de bajo costo computacional. La integración temporal es común a ambos esquemas y se formula a partir del método de Crank-Nicolson utilizando una implementación computacional eficiente basada en el algoritmo de Peaceman-Rachford de dirección implícita alternada. Se presenta un análisis formal de estabilidad basado en el método de Von Neumann y por tanto enfocado en la discretización en los puntos interiores de la malla. Igualmente, se analiza la complejidad algorítmica de estos esquemas en cuanto al número de operaciones aritméticas en mallas de igual resolución. Estos análisis muestran que ambos esquemas son incondicionalmente estables respecto al parámetro CFL y además presentan igual complejidad operacional. La fase de experimentación numérica considera problemas

de diferente complejidad y que demandan una resolución precisa de las condiciones de frontera. En problemas sencillos con solución exacta armónica, la precisión y tasas de convergencia del esquema centro distribuido son ligeramente superiores. Sin embargo, las mismas decaen en problemas severos de capa límite y resultan inferiores a las mostradas por el esquema nodal. Como referencia comparativa final, también se implementa un esquema con diferenciación mimética centro distribuida y basado en la integración temporal explícita de Leap-frog. Para este esquema, las contribuciones de este trabajo son una parametrización mimética óptima que induce un mayor límite de estabilidad CFL, además de ciertas comparaciones en precisión y convergencia respecto a los esquemas DFC mencionados.

# Índice general

<b>1. Introducción y objetivos</b>	<b>10</b>
<b>2. Modelo matemático y operadores miméticos</b>	<b>15</b>
2.1. Ecuación de onda acústica y sus aplicaciones . . . . .	15
2.2. Teorema de la divergencia discreto: Formulación mimética Castillo-Grone	16
2.3. Operadores miméticos gradiente y divergencia en mallas centro distri- buidas . . . . .	18
2.4. Método Leap-frog basado en operadores miméticos . . . . .	22
2.4.1. Caso unidimensional . . . . .	22
2.4.2. Caso bidimensional . . . . .	23
<b>3. Diferencias Finitas Compactas (DFC) de orden superior</b>	<b>25</b>
3.1. DFC implícitas en mallas nodales: Operadores unidimensionales . . . . .	25
3.2. DFC explícitas en mallas centro distribuidas: Operadores Aboulai-Castillo $R_G$ y $R_D$ . . . . .	31
3.3. Operadores de cuarto orden $G$ y $D$ cuasi negativo adjuntos . . . . .	34
<b>4. Métodos en DFC para la ecuación de onda acústica en dominios rec- tangulares</b>	<b>40</b>
4.1. Un esquema DFC nodal con integración temporal tipo Crank-Nicolson Peaceman-Rachford . . . . .	41
4.1.1. Formulación . . . . .	41
4.1.2. Detalles de la implementación ADI . . . . .	43

4.2. Un esquema DFC centro distribuido con integración temporal Crank-Nicolson Peaceman-Rachford . . . . .	44
4.3. Análisis de estabilidad de Von Neumann para el esquema DFC nodal . . . . .	46
4.4. Análisis de estabilidad de Von Neumann para el esquema DFC centro distribuido . . . . .	53
4.5. Comentarios acerca de la convergencia de los esquemas DFC . . . . .	56
<b>5. Complejidad algorítmica, experimentos numéricos y análisis de resultados</b>	<b>59</b>
5.1. Complejidad operacional del método DFC nodal . . . . .	59
5.2. Complejidad operacional del método DFC centro distribuido . . . . .	64
5.3. Experimento 1: Condiciones de borde homogéneas . . . . .	66
5.4. Experimento 2: Condiciones de borde heterogéneas . . . . .	71
<b>6. Conclusiones y recomendaciones</b>	<b>77</b>
<b>A. Estabilidad de métodos en diferencias finitas: Definiciones y teoremas básicos</b>	<b>81</b>
A.1. Transformada de Fourier en un dominio unidimensional . . . . .	81
A.1.1. Transformada de Fourier en un dominio multidimensional . . . . .	83
A.1.2. Convergencia, consistencia y estabilidad . . . . .	84
A.1.3. La ecuación de advección y el análisis de estabilidad de Von Neumann . . . . .	87
A.1.4. Estabilidad de esquemas en diferencias finitas para sistemas de EDP . . . . .	90
Bibliografía . . . . .	91

---

# Capítulo 1

## Introducción y objetivos

Las soluciones numéricas de la ecuación de onda acústica mediante la técnica de diferencias finitas han contribuido a diferentes aplicaciones físicas, pero posiblemente la modelación de ondas sísmicas de tipo compresional es el área que más ha promovido el desarrollo de estas técnicas. Los métodos pioneros en mallas nodales [3] y en mallas centro distribuidas [62], que incluyen discretizaciones en DF con segundo orden de precisión, han evolucionado a técnicas modernas de cuarto orden o superior en el segundo tipo de malla ([4], [17], [42]). En una malla centro distribuida, las representaciones discretas de las propiedades del material y de los campos escalares acústicos son definidas en mallas nodales individuales, y desplazadas por la mitad del paso de malla  $\frac{h}{2}$ , en una o más direcciones. Es decir, la densidad, el módulo de compresibilidad, la presión del medio, y las componentes del vector velocidad de partícula, coexisten en mallas separadas. El objetivo de esta distribución, es que cada variable dependiente quede localizada en el centro de aquellas de las que depende, y así la diferenciación numérica opere con paso  $\frac{h}{2}$ . Esta ventaja en precisión numérica de las mallas centro distribuidas sobre las nodales, ha sido también explotada por métodos desarrollados para medios elásticos o viscoelásticos ([25], [39], [47], [54], [63]). Los análisis de dispersión numérica para ondas de cuerpo, presentados en algunas de las citadas referencias, sirven como una justificación teórica al uso de estas mallas, sobre las que se aplican DF de al menos cuarto orden de precisión. Sin embargo, el uso de largos estenciles en DF para la discretización de alto orden de las condiciones de frontera puede dege-

nerar en inestabilidades numéricas forzando a la implementación de técnicas mixtas que reducen el orden de aproximación en la vecindad de las fronteras ([15], [21], [22], [25], [52]). De esta forma, surge la necesidad de utilizar técnicas que empleen DF de cuarto orden o superior consistentemente en todo el dominio de discretización, y que permitan una descripción estable y poco dispersiva de la dinámica ondulatoria, incluso en las fronteras físicas.

Tradicionalmente, los métodos en DF para problemas dependientes del tiempo se clasifican en explícitos o implícitos atendiendo a la discretización de las derivadas temporales. En el caso explícito, la solución aproximada en un punto de la malla puede ser calculada directamente en términos de los valores discretos de esta solución en instantes de tiempo anteriores, mientras que en un método implícito se requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales por cada iteración temporal. Algunos ejemplos clásicos para cada una de estas familias son el método Leap-frog y el método Crank-Nicolson, respectivamente. Las formulaciones y propiedades de estos métodos para el caso de la ecuación de advección pueden consultarse en [60].

Sin embargo, Kreiss introduce una nueva clase de DF que también podría clasificarse como implícita, en la cual resultan linealmente acoplados los valores discretos de una función y sus derivadas a partir de la discretización espacial ([27], [46]). En un estencil en DF implícito de tipo Kreiss, los valores de las derivadas espaciales en más de un punto de malla se expresan como la suma ponderada de varios valores discretos de la función, y sólo mediante la solución de un sistema lineal (generalmente en banda) se pueden calcular los primeros. El costo computacional de esta resolución simultánea es compensado por el hecho de que estos nuevos estenciles DF resultan más cortos que los de igual precisión obtenidos por DF espacialmente explícitas, y por esta razón el método de tipo Kreiss es llamado en DF compacto (DFC). Lele [38] propone mecanismos simples de construcción de DFC tanto en mallas nodales como en las centro distribuidas, empleando series de Taylor. Este autor también plantea fórmulas de interpolación y de filtrado, donde las últimas pueden ser de gran utilidad en estabilizar aplicaciones en DFC con alto orden. Posteriormente, Carpenter y colaboradores estudian las propiedades de estabilidad de formulaciones DFC en mallas nodales con

cuarto y sexto orden para la ecuación de advección, empleando la teoría de Gustafsson, Kreiss, y Sundstrom (G-K-S) ([6], [26]). En este estudio, se usa como punto de partida el sistema semidiscreto (las derivadas temporales permanecen continuas) y sus conclusiones son generalizables a diversos esquemas de integración temporal incluyendo el esquema Leap-frog (de dos etapas), y los métodos de Runge Kutta de tres o más etapas.

Los trabajos de Lele, Carpenter y coautores sirvieron de base al uso de las técnicas DFC espacialmente implícitas para la resolución numérica de diversos problemas físicos, progresivamente más complejos y generales. En el área de mecánica de fluidos, se pueden listar aplicaciones en dominios de dos y tres dimensiones espaciales, con incluso fronteras de geometría irregular, y que ameritan que las ecuaciones de Navier-Stokes y las ecuaciones de Euler para gases, sean formuladas en términos de coordenadas generalizadas ([19], [24], [36], [43], [64], [65]). En algunas de estas referencias, se sostiene que el aglutinamiento del mallado curvilíneo en zonas estrechas del dominio físico, demanda la incorporación de técnicas de filtrado para reducir la excitación de modos espurios<sup>1</sup> por el método numérico, evitando posibles inestabilidades. Sin embargo, otros autores argumentan que una discretización estable de condiciones de frontera empleando DFC de alto orden (orden 6 o superior) también requiere de estas técnicas de filtrado. Aplicaciones de las DFC implícitas con algunas de estas versatilidades numéricas pueden también encontrarse para las ecuaciones de Maxwell ([18], [56], [67]), Schrodinger [20], Korteweg-de Vries (KdV) [40] y Burgers [55]. Una característica común en todos estos trabajos, es el empleo de Runge Kutta de orden 3 ó 4 (RK3 o RK4) como técnica de integración temporal, con la consecuente restricción de estabilidad del tipo *CFL* (sigla que hace referencia a los famosos matemáticos R. Courant, K. Friedrichs y H. Lewy).

El uso de las DFC espaciales para la resolución numérica de la ecuación de onda acústica, e incluso para ecuaciones hiperbólicas un poco más generales, ha sido consistentemente acompañado de discretizaciones implícitas en tiempo, seguidas de una descomposición del sistema lineal resultante y acoplado en ambas direcciones, median-

---

<sup>1</sup>Modos que inducen inestabilidades numéricas

te el uso de la técnica de direcciones alternantes implícitas (ADI, por sus siglas en inglés). De esta manera, el esfuerzo computacional de cada iteración temporal se reduce a la resolución de múltiples sistemas en bandas, cada uno definido en una sola dirección espacial. Frente a los esquemas explícitos en tiempo, estos métodos basados en DFC y ADI ofrecen un rango de estabilidad  $CFL$  superior, favorecido aún más por el empleo de estenciles cortos en la discretización de las condiciones de frontera. Los primeros métodos DFC-ADI en medios 2-D rectangulares se deben a Lees [37], McKee [44], y Ciment y Leventhal [11], estos últimos pioneros en la aplicación de las fórmulas de Kreiss. La evolución de estos esquemas numéricos ha conducido a métodos incondicionalmente estables ([30], [31], [32], [34], [45]), y a métodos con límites  $CFL$  en el paso de integración temporal ([16], [35], [41]). El presente trabajo aprovecha los esquemas condicionalmente estables sugeridos por Strickwerda en su texto [60]. Estos emplean la discretización temporal de Crank-Nicolson factorizada eficientemente mediante ADI, y resulta una extensión al caso acústico del método original de Peaceman y Rachford diseñado para la ecuación de difusión. En la literatura reciente se cuenta con aplicaciones 2-D de esta familia de esquemas [13], y estudios de sus propiedades numéricas de estabilidad y dispersión [33]. Resulta importante puntualizar que los esquemas numéricos citados en este párrafo usan exclusivamente DFC nodales con segundo o cuarto orden de precisión. Además, su uso es relativamente bajo comparado con las múltiples aplicaciones de DFC a otras ecuaciones, tales como las listadas en el párrafo anterior.

Recientemente, Aboulai y Castillo en [1] presentan un enfoque explícito para la diferenciación compacta en una malla centro distribuida 1-D, el cual evita la solución de cualquier sistema lineal en el cálculo de las aproximaciones a la primera derivada. Como primer paso, estos autores descomponen el operador  $D_4$  de la divergencia mimética de cuarto orden de precisión como un producto del operador auxiliar  $R_4^D$  con el operador de segundo orden  $D_2$ ; es decir  $D_4 = R_4^D D_2$ . Las filas interiores de  $R_4^D$  poseen únicamente tres elementos no nulos, y así se reduce en uno el ancho de banda interior de  $D_4$ . La aplicación anidada de  $R_4^D D_2 V$  produce una aproximación  $v_x$  de cuarto orden en los centros de celdas  $x_{j+\frac{1}{2}}$ . De manera análoga, el operador  $R_4^G$

propuesto en [1] lleva a una aproximación  $u_x$  del gradiente en una malla con nodos  $x_j$ . A la fecha, las únicas aplicaciones de estos operadores DFC centro distribuidos son las publicadas por el autor de este trabajo y colaboradores en [12] y [13], enfocadas en la simulación de ondas acústicas.

Considerando lo expuesto anteriormente, el objetivo principal de este trabajo es formular e implementar métodos en diferencias finitas compactas (DFC) para la resolución de la ecuación de onda acústica usando los operadores implícitos reformulados por Lele en mallas nodales, y los operadores explícitos de Aboulai-Castillo en mallas centro distribuidas, ambos con cuarto orden de precisión. Este objetivo general conduce a la ejecución de los siguientes objetivos específicos:

1. Formular los métodos de resolución de la ecuación de onda acústica es dos dimensiones empleando los operadores DFC en mallas nodales y centro distribuidas acoplados a la integración implícita de Crank-Nicolson en tiempo.
2. Implementar los métodos formulados en (1) incorporando el algoritmo de Peaceman-Rachford de dirección implícita alternada para realizar la integración en tiempo.
3. Analizar la estabilidad y la complejidad operacional de los métodos DFC implementados en (2).
4. Formular e implementar un método tradicional de integración temporal Leap-frog, que use las formas tri-paramétricas de los operadores miméticos gradiente y divergencia con cuarto orden de precisión.
5. Encontrar la parametrización mimética óptima que le permita al resolvidor Leap-frog en (4) operar con un máximo rango de estabilidad.
6. Comparar la precisión, orden de convergencia y tiempo de simulación de los métodos numéricos implementados en (2) y (4).

# Capítulo 2

## Modelo matemático y operadores miméticos

En este capítulo se presentan brevemente algunos términos y conocimientos previos que facilitarán la comprensión del resto de los capítulos. El capítulo empieza definiendo el problema que se trabajará y describiendo las características de los operadores miméticos. A continuación, se deducen las expresiones matemáticas obtenidas al realizar la generalización de los operadores miméticos en mallas centro distribuidas. Por último, el capítulo finaliza describiendo el método numérico de Leap-frog basado en operadores miméticos aplicados a estas mallas.

### 2.1. Ecuación de onda acústica y sus aplicaciones

Las ondas acústicas son un tipo de ondas longitudinales que se propagan al provocar la compresión y descompresión adiabática<sup>1</sup> de las partículas del medio. Un ejemplo muy conocido de ondas acústicas son las ondas sonoras dadas por las vibraciones de las partículas de un líquido o un gas producidas por una fuente sonora. El sonido es un tipo de onda longitudinal donde las moléculas del medio vibran en la misma dirección de propagación de la perturbación, que en este caso es una alteración en la presión del fluido.

---

<sup>1</sup>Es el proceso que no permite el intercambio de calor

La ecuación general de ondas acústicas en 2-D está determinada por el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{v} + f \\ \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla u, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $u$  es la presión del fluido,  $\vec{v} = (v, w)$  es su velocidad,  $f$  es la fuente,  $\rho$  es la densidad y  $k$  es el módulo de compresión adiabática. Se supone el dominio espacial normalizado  $(x, y) \in \partial\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$  con una condición inicial  $u(x, y, t = 0) = u_0(x, y)$ .

Los valores de presión  $u$  o velocidad  $\vec{v}$  de las partículas que se encuentran en el borde del medio acústico, están sujetos a condiciones de frontera. La formulación de la ecuación de onda (2.1) permite imponer algunas condiciones de borde usuales de manera muy sencilla a través de condiciones tipo Dirichlet. Por ejemplo, el caso de fronteras o paredes rígidas se modela al considerar velocidad nula en los puntos de ese borde. Por otro lado, imponer un valor de cero sobre la presión a lo largo de una frontera, la convierte en una interfaz entre el material y el vacío, lo cual recibe el nombre de superficie libre, ampliamente usada en aplicaciones sísmicas para modelar el contacto de la tierra, o el agua, con el aire. Los métodos numéricos desarrollados en este trabajo se limitan a resolver el modelo ondulatorio (2.1) bajo condiciones de borde Dirichlet.

## 2.2. Teorema de la divergencia discreto: Formulación mimética Castillo-Grone

La discretización mimética de un problema de valor de frontera consiste en reemplazar los operadores continuos gradiente ( $\nabla$ ), divergencia ( $\nabla \cdot$ ), y rotacional ( $\nabla \times$ ) presentes en el modelo diferencial original, por aproximaciones  $G$ ,  $D$ , y/o  $C$ , respectivamente, que satisfagan versiones discretas de los teoremas integrales fundamentales de Gauss, Green, o Stokes. La formulación general de Castillo y Grone [7] parte de considerar, en un dominio  $\Omega$  con frontera continua  $\partial\Omega$ , los campos diferenciables esca-

lar  $u$  y vectorial  $v$ , para los cuales el teorema de la divergencia y la regla del producto permiten escribir la siguiente ecuación matemática:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v}u \, dV + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \vec{v} \, dV = \int_{\partial\Omega} u(\vec{v}\hat{n}) \, dS. \quad (2.2)$$

Para construir una versión discreta de (2.2), estos autores definen productos internos ponderados por matrices  $W_P$  y  $W_Q$ , denotados respectivamente por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_Q}$  y por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_P}$ , junto con aproximaciones para la divergencia ( $D \simeq \nabla \cdot$ ), el gradiente ( $G \approx \nabla$ ) y el operador de frontera  $B$ . Esta identidad discreta, análoga a la ley de conservación (2.2), presenta la siguiente forma:

$$\langle D\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_{W_Q} + \langle G\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{W_P} = \langle B\mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \quad (2.3)$$

El operador de frontera  $B$  permite la aproximación de la derivada normal en los bordes, mediante  $BG \approx \frac{\partial}{\partial \hat{n}}$  siendo  $\hat{n}$  el vector normal exterior. Los operadores lineales miméticos  $D$  y  $G$  requeridos para calcular las aproximaciones de la divergencia y el gradiente son matrices de diferenciación construidas de acuerdo a las evaluaciones vectoriales  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{u}$  de los campos continuos  $v$  y  $u$ , respectivamente, sobre la malla definida en  $\Omega$ . El modelo acústico (2.1) tratado en este trabajo carece de efectos rotacionales, y por lo tanto se omiten detalles adicionales de la discretización mimética del operador  $\nabla \times$ , pero un lector interesado en los mismos puede recurrir a las referencias [9] y [53] para documentarse. Además, en este trabajo tampoco se incorpora el operador de frontera  $B$  en los procesos de discretización compacta, sino que exclusivamente el trabajo se fundamenta en la aplicación de los operadores miméticos lineales  $D$  y  $G$  para obtener cuarto orden de precisión en los resultados. La principal razón de no incorporar el operador mimético  $B$  en este trabajo se debe a que, hasta la fecha, los resultados numéricos publicados que incluyen el uso de este operador ([10], [23], [57], [59]), limitan la precisión obtenida de los resultados al segundo orden.

## 2.3. Operadores miméticos gradiente y divergencia en mallas centro distribuidas

Los detalles algebraicos de las construcciones de los operadores miméticos de diferenciación e integración se encuentran en las referencias originales [7], [8] y [10]. En esta sección sólo se revisan los operadores  $D$  y  $G$  con segundo y cuarto orden de precisión que son los utilizados en la formulación de los operadores DFC de interés en este trabajo. Consideremos una partición de  $N$  celdas uniformes sobre el intervalo  $[0, 1]$  con nodos  $x_i = i * h$ ,  $0 \leq i \leq N$ , para  $h = \frac{1}{N}$ , y los centros de celda  $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i+x_{i+1}}{2}$ . Las evaluaciones de campos diferenciables  $v$  y  $u$  en esta malla permiten definir los vectores  $V$  y  $U$  de la siguiente manera:

$$V = (v(x_0), v(x_1), \dots, v(x_N))^T \in R^{N+1} \quad (2.4)$$

$$U = (u(x_0), u(x_{1/2}), \dots, u(x_{N-1/2}), u(x_N))^T \in R^{N+2}$$

Los operadores  $G$  y  $D$  son matrices de diferenciación compuestas por estenciles centro distribuidos de orden  $(N+1) \times (N+2)$  y  $N \times (N+1)$ , respectivamente. De esta forma,  $GU$  es un vector de aproximación para  $\frac{du}{dx}$  en todos los nodos de la malla incluyendo ambas fronteras, mientras que  $DV$  es el vector de aproximación para  $\frac{dv}{dx}$  en cada centro de celda. La figura 2.1 ilustra esta distribución espacial de las componentes de  $v$ ,  $u$ ,  $GU$  y  $DV$  en la malla mimética.

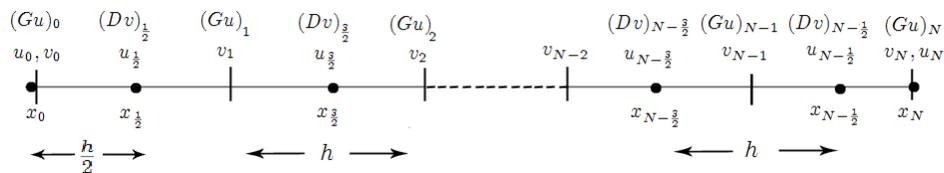


Figura 2.1: Malla centro distribuida unidimensional

Los operadores de segundo orden en precisión para el gradiente  $G_2$  y para la divergencia  $D_2$  corresponden a



$$G_4 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & g_{15} & g_{16} & 0 & \dots \\ \frac{16}{105} - \frac{128}{35} \alpha_G & -\frac{31}{24} + 9 \alpha_G & \frac{29}{24} - 12 \alpha_G & -\frac{3}{40} + \frac{54}{5} \alpha_G & \frac{1}{168} - \frac{36}{7} \alpha_G & \alpha_G & 0 & \dots \\ -\frac{128}{35} \beta_G & \frac{1}{24} + 9 \beta_G & -\frac{9}{8} - 12 \beta_G & \frac{9}{8} + \frac{54}{5} \beta_G & -\frac{1}{24} - \frac{36}{7} \beta_G & \beta_G & 0 & \dots \\ -\frac{16}{105} - \frac{128}{35} \gamma_G & \frac{3}{8} + 9 \gamma_G & -\frac{11}{24} - 12 \gamma_G & -\frac{27}{40} + \frac{54}{5} \gamma_G & \frac{51}{56} - \frac{36}{7} \gamma_G & \gamma_G & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

donde

$$\begin{aligned} g_{11} &= -\frac{124832}{42735} + \frac{16512}{1295} \alpha_G + \frac{18816}{2035} \beta_G + \frac{13696}{1295} \gamma_G; & g_{12} &= \frac{10789}{3256} - \frac{1161}{37} \alpha_G - \frac{9261}{407} \beta_G - \frac{963}{37} \gamma_G \\ g_{13} &= -\frac{421}{9768} + \frac{1548}{37} \alpha_G + \frac{12348}{407} \beta_G + \frac{1284}{37} \gamma_G; & g_{14} &= -\frac{12189}{16280} - \frac{6966}{185} \alpha_G - \frac{55566}{2035} \beta_G - \frac{5778}{185} \gamma_G \\ g_{15} &= \frac{11789}{22792} + \frac{4644}{259} \alpha_G + \frac{5292}{407} \beta_G + \frac{3852}{259} \gamma_G; & g_{16} &= -\frac{48}{407} - \frac{129}{37} \alpha_G - \frac{1029}{407} \beta_G - \frac{107}{37} \gamma_G, \end{aligned}$$

y

$$D_4 = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} & 0 & \dots \\ \frac{1}{24} - \alpha_D & -\frac{9}{8} + 5 \alpha_D & \frac{9}{8} - 10 \alpha_D & -\frac{1}{24} + 10 \alpha_D & -5 \alpha_D & \alpha_D & 0 & \dots \\ -\beta_D & \frac{1}{24} + 5 \beta_D & -\frac{9}{8} - 10 \beta_D & \frac{9}{8} + 10 \beta_D & -\frac{1}{24} - 5 \beta_D & \beta_D & 0 & \dots \\ -\frac{1}{24} - \gamma_D & \frac{5}{24} + 5 \gamma_D & -\frac{3}{8} - 10 \gamma_D & -\frac{17}{24} + 10 \gamma_D & \frac{11}{12} - 5 \gamma_D & \gamma_D & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

donde

$$d_{11} = -\frac{6851}{7788} + \frac{39}{59} \alpha_D + \frac{675}{649} \beta_D + \frac{551}{649} \gamma_D; \quad d_{12} = \frac{8153}{15576} - \frac{195}{59} \alpha_D - \frac{3375}{649} \beta_D - \frac{2755}{649} \gamma_D \quad (2.9)$$

$$d_{13} = \frac{3867}{5192} + \frac{390}{59} \alpha_D + \frac{6750}{649} \beta_D + \frac{5510}{649} \gamma_D; \quad d_{14} = -\frac{9005}{15576} - \frac{390}{59} \alpha_D - \frac{6750}{649} \beta_D - \frac{5510}{649} \gamma_D \quad (2.10)$$

$$d_{15} = \frac{3529}{15576} + \frac{195}{59} \alpha_D + \frac{3375}{649} \beta_D + \frac{2755}{649} \gamma_D; \quad d_{16} = -\frac{24}{649} - \frac{39}{59} \alpha_D - \frac{675}{649} \beta_D - \frac{551}{649} \gamma_D. \quad (2.11)$$

Los operadores  $G$  y  $D$  han sido recientemente aplicados para modelar varios fenómenos físicos, incluyendo la propagación de ondas. Solano y colaboradores en [58] y [59] proponen métodos miméticos de segundo orden para la propagación de ondas acústicas con aplicaciones sísmicas. Rojas y coautores en [48], [49], [51] y [52] emplean los

operadores miméticos de cuarto orden en la simulación de superficies libres y rupturas dinámicas en sólidos elásticos. Brent en [53] resuelve numéricamente las ecuaciones de Maxwell en presencia de las condiciones de frontera tipo Dirichlet también empleando estos operadores de cuarto orden. Córdova y colaboradores en [13] utilizan una nueva formulación compacta de [2] para  $G_4$  y  $D_4$  al resolver la ecuación de onda acústica bajo condiciones Dirichlet. Note la dependencia de estos operadores  $G_4$  y  $D_4$  en los parámetros  $\alpha_G$ ,  $\alpha_D$ ,  $\beta_G$ ,  $\beta_D$  y  $\gamma_G$ ,  $\gamma_D$ , de acuerdo a su estructura matricial dada por las ecuaciones (2.7) y (2.8). Es importante mencionar que ningún criterio de optimalidad ha guiado la selección de estos parámetros más que minimizar el ancho de banda de estos operadores, y con esto el costo computacional de su aplicación. En particular, los métodos en [48], [49], [51] y [52] eligen los siguientes valores:  $\alpha_G = \alpha_D = 0$ ,  $\beta_G = \beta_D = 0$ , y  $\gamma_G = \gamma_D = -\frac{1}{24}$  debido a que reducen la longitud de los estenciles laterales en los bloques  $4 \times 6$  de las esquinas superior e inferior en  $G_4$  y  $D_4$ . De esta forma, los operadores miméticos  $G_4$  y  $D_4$  con ancho de banda mínimos son:

$$G_4 = \begin{pmatrix} \frac{47888}{14245} & \frac{1790}{407} & -\frac{14545}{9768} & -\frac{8997}{16280} & -\frac{2335}{22792} & -\frac{25}{9768} & 0 \cdots \\ \frac{16}{105} & -\frac{31}{24} & \frac{29}{24} & -\frac{3}{40} & \frac{1}{168} & 0 & 0 \cdots \\ 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 \cdots \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$D_4 = \begin{pmatrix} -\frac{4751}{5192} & \frac{909}{1298} & \frac{6091}{15576} & -\frac{1165}{5192} & \frac{129}{2596} & -\frac{25}{15576} & 0 \cdots \\ \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 \cdots \\ 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 \cdots \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

## 2.4. Método Leap-frog basado en operadores miméticos

El método de integración temporal Leap-frog es posiblemente el más utilizado para la resolución de la ecuación de onda (en medios acústicos, elásticos o más complejos), donde la discretización espacial esta basada en DF. Este es el caso de todos los miméticos mencionados en la sección anterior ([49], [50], [52], [57], [59]), así como de otros esquemas que utilizan las DF tradicionales de Taylor ([4], [5], [15], [25], [39], [54], [62], [63]). En este trabajo se aplica el método de Leap-frog en combinación con los operadores espaciales  $G_4$  y  $D_4$  con dos objetivos principales. El primero es estudiar el efecto de los parámetros miméticos en las propiedades de estabilidad del método numérico. El segundo objetivo es emplear este método y sus resultados como referencia para los nuevos esquemas DFC desarrollados en este trabajo, cuya integración temporal esta basada en Crank-Nicolson y ADI.

### 2.4.1. Caso unidimensional

En esta subsección, se considera el siguiente modelo ondulatorio basado en (2.1), con términos de velocidad  $v$  y tensión  $u$  experimentadas por las partículas de una cuerda elástica de longitud 1:

$$\begin{cases} v_t = -\frac{\partial u}{\partial x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ u_t = -\frac{\partial v}{\partial x}, & 0 \leq t. \end{cases} \quad (2.14)$$

Por simplicidad, se asume que el sistema es libre de tracción en ambos extremos de la cuerda, es decir,  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ . El modelo puede ser considerado como la forma adimensional de un caso más general con densidad del material  $\rho$  y módulo de la resistencia  $\mu$ . Aquí, la velocidad de la onda  $c$  esta definida como  $c^2 = \frac{\mu}{\rho}$ .

En este caso unidimensional, se denotan por los vectores  $V \in \mathbb{R}^{n+1}$  y  $U \in \mathbb{R}^{n+2}$ , los valores discretos de los campos de velocidad  $v$  y tensión  $u$  respectivamente, en la malla mostrada en la figura 2.1. A continuación se usan los operadores de cuarto orden

$G_4$  y  $D_4$ , y la integración temporal Leap-frog para formular la versión simplificada a 1-D de los métodos usados por Rojas y colaboradores [49], [52] para la propagación de ondas elásticas. Este método Leap-frog que depende de los parámetros miméticos presenta la siguiente expresión:

$$V^{m+\frac{1}{2}} = V^{m-\frac{1}{2}} - \Delta t G_4(\alpha_G, \beta_G, \gamma_G) U^m, \quad U^{m+1} = U^m - \Delta t D_4(\alpha_D, \beta_D, \gamma_D) V^{m+\frac{1}{2}} \quad (2.15)$$

donde  $\Delta t$  representa el paso de tiempo y  $m$  es el índice de iteración temporal.

### 2.4.2. Caso bidimensional

La extensión del método de Leap-frog a un dominio bidimensional parte del siguiente modelo para la propagación de ondas acústicas:

$$\begin{cases} v_t = -\frac{\partial u}{\partial x}, \\ w_t = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad 0 \leq x, y \leq 1, \\ u_t = -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}, \quad 0 \leq t. \end{cases} \quad (2.16)$$

Análogamente que en el caso anterior, se combina la integración Leap-frog con la discretización espacial de cuarto orden de los operadores  $G_4$  y  $D_4$  para definir el método numérico. Considere los valores discretos de los campos  $u$ ,  $v$  y  $w$  ilustrados en la malla de la figura 2.2, que permiten definir las matrices  $U$ ,  $V$  y  $W$  de dimensiones  $(N+2) \times (N+2)$ ,  $(N+2) \times (N+1)$  y  $(N+1) \times (N+2)$ , respectivamente. Asumiendo condiciones de borde tipo Dirichlet para  $u$  y las cuales se almacenan en la primera y última fila y columna de la matriz  $U$ , el método numérico puede expresarse en términos algebraicos en la forma:

$$\begin{cases} V^{m+\frac{1}{2}} = V^{m-\frac{1}{2}} - \Delta t U^m G_4^T \\ W^{m+\frac{1}{2}} = W^{m-\frac{1}{2}} - \Delta t G_4 U^m \\ U^{m+1} = U^m - \Delta t \left( V^{m+\frac{1}{2}} D_4^T + D_4 W^{m+\frac{1}{2}} \right) \end{cases} \quad (2.17)$$

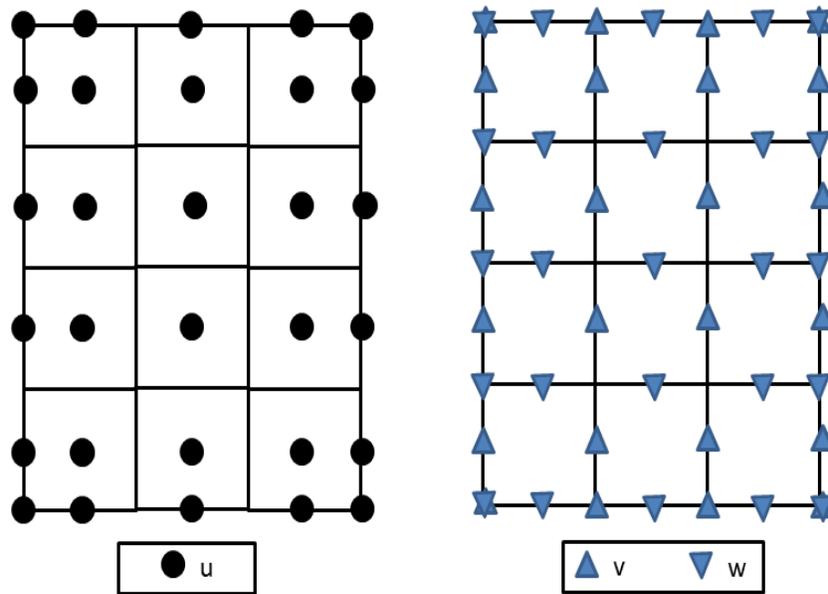


Figura 2.2: Discretización en diferencias finitas mimética de campos continuos sobre una malla encajada 2-D

# Capítulo 3

## Diferencias Finitas Compactas (DFC) de orden superior

En este capítulo se revisan dos familias de operadores de diferenciación finita compacta en mallas unidimensionales. La primera corresponde a los operadores implícitos tradicionales estudiados por Lele en [38], y nuestra revisión se limita al caso de mallas nodales y diferenciación con cuarto y sexto orden de precisión. La segunda familia se conforma de los operadores miméticos centro distribuidos presentados por Aboulai y Castillo con una precisión de cuarto orden. Ambas familias de DFC serán usadas en el próximo capítulo para la formulación de los métodos numéricos para la ecuación acústica 2-D (2.1), y los mismos conforman el tema principal de investigación de esta tesis.

### 3.1. DFC implícitas en mallas nodales: Operadores unidimensionales

Lele en [38] presenta un mecanismo de construcción para fórmulas de DFC basado en expansiones de Taylor, y que puede aplicarse en mallas 1-D ya sean nodales o centro distribuidas. La flexibilidad de esta construcción permite obtener estenciles centrados para la diferenciación en el interior de la malla, así como de estenciles laterales para

la aproximación de derivadas en las fronteras y nodos cercanos. Estos estenciles se agrupan en matrices de diferenciación para su aplicación y mejor estudio, pero la formulación en [38] permite fácilmente minimizar su ancho de banda, lo cual justifica el calificativo compacto de las DFC. A continuación, se presenta la construcción de una familia de operadores en DFC de cuarto y sexto orden en mallas nodales.

Consideremos una partición uniforme del intervalo  $[0,1]$  en  $N$  celdas de igual tamaño  $h$ , donde se denotan las evaluaciones de una función suave  $u(x)$  en los puntos de la malla  $x_i = ih$  como  $u_i$ , para  $i = 0, \dots, N$ , y  $Nh = 1$ . Una fórmula en DFC para aproximar la primera derivada de  $u(x)$  en esta malla, puede ser escrita de manera general como la siguiente combinación lineal

$$u'_i + \alpha(u'_{i+1} + u'_{i-1}) + \beta(u'_{i+2} + u'_{i-2}) = a \frac{(u_{i+1} - u_{i-1})}{2h} + b \frac{(u_{i+2} - u_{i-2})}{4h} + c \frac{(u_{i+3} - u_{i-3})}{6h}. \quad (3.1)$$

El orden de precisión de (3.1) depende de ciertas condiciones sobre los coeficientes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Las mismas surgen al sustituir las evaluaciones de la función  $u(x)$  y su derivada en esta fórmula mediante las expansiones de Taylor

$$\begin{aligned} u'_{i+1} + u'_{i-1} &= 2u'_i + h^2 u_i''' + \frac{h^4}{12} u_i^V + \frac{h^6}{360} u_i^{VII} + \dots \\ u'_{i+2} + u'_{i-2} &= 2u'_i + 4h^2 u_i''' + \frac{4h^4}{3} u_i^V + \frac{8h^6}{45} u_i^{VII} + \dots \\ u_{i+1} - u_{i-1} &= 2hu'_i + \frac{2h^3}{6} u_i''' + \frac{2h^5}{5!} u_i^V + \frac{2h^7}{7!} u_i^{VII} + \dots \\ u_{i+2} - u_{i-2} &= 4hu'_i + \frac{8h^3}{3} u_i''' + \frac{64h^5}{5!} u_i^V + \frac{2^8 h^7}{7!} u_i^{VII} + \dots \\ u_{i+3} - u_{i-3} &= 6hu'_i + 9h^3 u_i''' + \frac{486h^5}{5!} u_i^V + \frac{4374h^7}{7!} u_i^{VII} + \dots \end{aligned}$$

Posterior a la sustitución mencionada arriba, se agrupan los términos de acuerdo al orden de derivación, de donde resulta

$$(1 + 2\alpha + 2\beta)u'_i + (\alpha + 4\beta)h^2u'''_i + \left(\frac{\alpha}{12} + \frac{4}{3}\beta\right)h^4u^V_i + \left(\frac{\alpha}{360} + \frac{8\beta}{45}\right)h^6u^{VII}_i + \dots = \quad (3.2)$$

$$(a + b + c)u'_i + \left(\frac{a}{6} + \frac{2b}{3} + \frac{3c}{2}\right)h^2u'''_i + \left(\frac{a}{5!} + \frac{16}{5!}b + \frac{81}{5!}c\right)h^4u^V_i + \left(\frac{a}{7!} + \frac{2^6}{7!}b + \frac{3^6}{7!}c\right)h^6u^{VII}_i + \dots$$

Así, las fórmulas en DFC para  $u'(x)$  con segundo, cuarto y sexto orden, son obtenidas al imponer progresivamente las siguientes condiciones lineales sobre los coeficientes en (3.2). Esto es,

$$\begin{aligned} 1 + 2(\alpha + \beta) &= a + b + c & (3.3) \\ 6(\alpha + 4\beta) &= a + 4b + 9c \\ 5!(\alpha + 16\beta) &= 12(a + 16b + 81c). \end{aligned}$$

El sistema anterior de 3 ecuaciones lineales para los 5 coeficientes de (3.1) indica que este mecanismo conduce a familias multiparamétricas de DFC, y que pueden usarse criterios adicionales al orden de truncamiento al definir una fórmula específica. Tal como se discute en [38], minimizar el tamaño del estencil DFC implica una reducción del ancho de banda de los sistemas lineales asociados a la diferenciación vía (3.1). Sin embargo, criterios alternativos de selección de estos coeficientes pueden ser importantes en aplicaciones particulares.

Si se considera el caso particular  $\beta = 0$ , el sistema lineal derivado de (3.1) es tridiagonal por la izquierda. De igual forma, la escogencia de  $c = 0$  reduce este sistema a ser pentadiagonal por la derecha. Las dos primeras condiciones lineales en (3.3) para este caso  $\beta = c = 0$ , permiten determinar los coeficientes restantes

$$a = \frac{4 + 2\alpha}{3}, \quad b = \frac{4\alpha - 1}{3}, \quad (3.4)$$

y conducen a DFC centradas dependientes en el parámetro libre  $\alpha$ . El valor asignado

a este parámetro  $\alpha$  puede también seguir algún criterio de optimilidad. Por ejemplo, para  $\alpha = \frac{1}{4}$ , el método DFC dado por (3.1) viene a ser tridiagonal por la derecha pues  $b = 0$ , y su implementación computacional es de bajo costo. Esta fórmula DFC corresponde a

$$u'_{i-1} + 4u'_i + u'_{i+1} = \frac{3}{h} (u_{i+1} - u_{i-1}). \quad (3.5)$$

Alternativamente, en [38] se deriva el error de truncamiento local (etl) de la fórmula (3.1) bajo las condiciones (3.4), y resulta que

$$\text{etl} = \frac{4}{5!} (3\alpha - 1) h^4 u^{(v)}_{(x_i)} + O(h^6). \quad (3.6)$$

Como consecuencia la DFC centrada (3.5) tiene un etl de cuarto orden. Adicionalmente, note que el valor  $\alpha = \frac{1}{3}$  anula el término de cuarto orden en la expresión (3.6), lo cual permite deducir la siguiente fórmula DFC centrada a partir de (3.1) con sexto orden de precisión

$$u'_{i-1} + 3u'_i + u'_{i+1} = \frac{1}{12h} (-u_{i-2} - 28u_{i-1} + 28u_{i+1} + u_{i+2}). \quad (3.7)$$

En este último caso, la sustitución de  $\alpha = \frac{1}{3}$  en las condiciones lineales (3.4), conducen a los valores  $a = \frac{14}{9}$  y  $b = \frac{1}{9}$ . Esta terna de valores corresponden a la única solución de (3.3), bajo las condiciones de mínimo ancho de banda  $\alpha = \beta = 0$ , lo cual enfatiza la consistencia de la formulación (3.2). Los esquemas DFC centrados anteriores requieren de fórmulas semejantes, pero basadas en estenciles laterales, para permitir la aproximación de  $u'(x)$  en todos los nodos de malla, incluyendo las fronteras  $x_0$  y  $x_N$ . En particular, [38] estudia la relación lineal

$$u'_0 + \hat{\alpha}u'_1 = \frac{1}{h} (\hat{a}u_0 + \hat{b}u_1 + \hat{c}u_2 + \hat{d}u_3), \quad (3.8)$$

la cual permite construir fórmulas paramétricas con segundo y tercer orden de precisión, mediante un procedimiento basado en Taylor y similar al anterior. Sin embargo, en este trabajo sólo consideramos la única aproximación de cuarto orden que es posible

deducir partiendo de la formulación (3.8), y la cual corresponde a

$$u'_0 + 3u'_1 = \frac{-17u_0 + 9u_1 + 9u_2 - u_3}{6h}. \quad (3.9)$$

Note que la diferenciación numérica basada en (3.5) y (3.9) genera aproximaciones nodales a  $u'(x)$  que son consistentemente de cuarto orden en toda la malla. Para alcanzar una mayor precisión, se extiende la formulación (3.8) al añadir nuevas evaluaciones, tanto de la función como de su derivada, en nodos interiores de la malla. Tyler en [61] aplica esta idea y presenta fórmulas DFC con un orden de precisión incremental hasta doce, pero manteniendo una estructura izquierda tridiagonal y pentadiagonal. En este trabajo, nos limitamos al uso de la siguiente DFC lateral de sexto orden,

$$u'_0 + 5u'_1 = \frac{1}{h} \left( -\frac{197}{60}u_0 - \frac{5}{12}u_1 + 5u_2 - \frac{5}{3}u_3 + \frac{5}{12}u_4 - \frac{1}{20}u_5 \right) \quad (3.10)$$

Esta fórmula es presentada en la tabla 5, página 29, de la tesis de J. Tyler [61].

A continuación, las fórmulas DFC anteriores se expresan en forma vectorial atendiendo al orden de precisión ofrecido. A diferencia de los esquemas tradicionales en DF donde la implementación y el análisis pueden hacerse separadamente para cada estencil, las formulaciones vectoriales de la DFC son esenciales para estos fines. Considere a  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{U}'$  como los vectores con las aproximaciones  $u_i$  y  $u'_i$ , respectivamente, en todos los nodos de malla. La forma vectorial que combina los estenciles DFC en los casos de cuarto y sexto orden, puede escribirse como

$$P_{44}\mathbf{U}' = Q_{44}\mathbf{U}, \quad P_{66}\mathbf{U}' = Q_{66}\mathbf{U}, \quad \text{donde } \mathbf{U}, \mathbf{U}' \in \mathbb{R}^N. \quad (3.11)$$

Las matrices  $P_{44}$  y  $Q_{44}$  pertenecen a  $\mathbb{R}^{N \times N}$ , y sus coeficientes son dados por los estenciles en (3.5) y (3.9). De igual manera,  $P_{66}, Q_{66} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , y sus entradas están definidas por las fórmulas (3.7) y (3.10). En algunas aplicaciones, es importante calcular las aproximaciones  $u'_i$  sólo en los puntos interiores de la malla, pero usando todos los valores  $u_i$ , esto es, incluyendo los valores en las fronteras. Este tipo de aplicaciones incluyen por ejemplo, la solución de BVP bajo condiciones de borde tipo Dirichlet,

y requieren de formulaciones DFC reducidas. Esta reducción consiste en combinar linealmente el estencil centrado y el lateral, de tal forma de eliminar los valores  $u'_0$  y  $u'_N$  en los sistemas (3.11). De esta manera, se obtiene un nuevo sistema DFC genérico  $\bar{P}\bar{U}' = \bar{Q}U$ , donde  $\bar{U}' \in \mathbb{R}^{N-2}$ ,  $\bar{P} \in \mathbb{R}^{(N-2) \times (N-2)}$ , y  $\bar{Q} \in \mathbb{R}^{(N-2) \times N}$ . Estas nuevas matrices quedan definidas para el caso de cuarto orden como,

$$\bar{P}_{44} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

$$\bar{Q}_{44} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -9 & 9 & 1 & 0 & \cdots & & \\ -3 & 0 & 3 & & & & \\ & -3 & 0 & 3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -3 & 0 & 3 & \\ & & & -1 & -9 & 9 & \end{bmatrix} \quad (3.13)$$



$G_4$  y  $D_4$ , dados por (2.7) y (2.8). En el caso de  $R_G$ , se buscan las componentes  $r_{ij}$  de su bloque superior izquierdo  $4 \times 6$  (y análogamente las del bloque inferior derecho  $4 \times 6$ ) que satisfagan la identidad  $R_G G_2 = G_4(\alpha_G, \beta_G, \gamma_G)$ . El producto  $R_G G_2$  resulta

$$R_G G_2 = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3}r_{11} & 3r_{11}-r_{12} & -\frac{1}{3}r_{11}+r_{12}-r_{13} & r_{13}-r_{14} & r_{14}-r_{15} & r_{15}-r_{16} & r_{16} & 0 & \dots \\ -\frac{8}{3}r_{21} & 3r_{21}-r_{22} & -\frac{1}{3}r_{21}+r_{22}-r_{23} & r_{23}-r_{24} & r_{24}-r_{25} & r_{25}-r_{26} & r_{26} & 0 & \dots \\ -\frac{8}{3}r_{31} & 3r_{31}-r_{32} & -\frac{1}{3}r_{31}+r_{32}-r_{33} & r_{33}-r_{34} & r_{34}-r_{35} & r_{35}-r_{36} & r_{36} & 0 & \dots \\ -\frac{8}{3}r_{41} & 3r_{41}-r_{42} & -\frac{1}{3}r_{41}+r_{42}-r_{43} & r_{43}-r_{44} & r_{44}-r_{45} & r_{45}-r_{46} & r_{46} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

La simple comparación con la expresión  $G_4(\alpha_G, \beta_G, \gamma_G)$  en (2.7) muestra que  $r_{16} = r_{26} = r_{36} = r_{46} = 0$ , lo que hace que estos cuatro estéciles laterales tengan un elemento menos que sus contra partes en el operador gradiente  $G_4$ . Las  $4 \times 5$  entradas  $r_{ij}$  restantes en estos estéciles se encuentran resolviendo las veinte ecuaciones lineales que surgen de igualar los bloques superior izquierdos de las matrices  $R_G G_2$  y  $G_4(\alpha_G, \beta_G, \gamma_G)$ . De este modo, al hacer uso de la herramienta de cálculo simbólico MAPLE, se obtiene la siguiente familia tri-paramétrica  $R_G(\alpha_G, \beta_G, \gamma_G)$ . Esto es,

$$R_G = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & 0 & \dots \\ -\frac{2}{35} + \frac{48}{35}\alpha_G & \frac{941}{840} - \frac{171}{35}\alpha_G & -\frac{29}{420} + \frac{233}{35}\alpha_G & \frac{1}{168} - \frac{29}{7}\alpha_G & \alpha_G & 0 & \dots \\ \frac{48}{35}\beta_G & -\frac{1}{24} - \frac{171}{35}\beta_G & \frac{13}{12} + \frac{233}{35}\beta_G & -\frac{1}{24} - \frac{29}{7}\beta_G & \beta_G & 0 & \dots \\ \frac{2}{35} + \frac{48}{35}\gamma_G & -\frac{57}{280} - \frac{171}{35}\gamma_G & \frac{33}{140} + \frac{233}{35}\gamma_G & \frac{51}{56} - \frac{29}{7}\gamma_G & \gamma_G & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{24} & \frac{13}{12} & -\frac{1}{24} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

donde

$$\begin{aligned} r_{11} &= -\frac{6192}{1295}\alpha_G - \frac{7056}{2035}\beta_G - \frac{5136}{1295}\gamma_G + \frac{15604}{14245}; & r_{12} &= \frac{22059}{1295}\alpha_G + \frac{25137}{2035}\beta_G + \frac{18297}{1295}\gamma_G - \frac{3119}{113960} \\ r_{13} &= -\frac{30057}{1295}\alpha_G - \frac{34251}{2035}\beta_G - \frac{24931}{1295}\gamma_G - \frac{19909}{56980}; & r_{14} &= \frac{3741}{259}\alpha_G + \frac{4263}{407}\beta_G + \frac{3103}{259}\gamma_G + \frac{9101}{22792} \\ r_{15} &= -\frac{129}{37}\alpha_G - \frac{1029}{407}\beta_G - \frac{107}{37}\gamma_G - \frac{48}{407}. \end{aligned}$$

Note que la opción para los parámetros del gradiente  $\alpha_G = \beta_G = 0$  y  $\gamma_G = -1/24$ , reduce el ancho de banda del segundo estencil lateral a 4, mientras que el tercer y el cuarto estencil se convierten en el estencil interior de longitud 3. En [1], los autores derivan este caso compacto de matriz  $R_G$  a partir de la matriz gradiente  $G_4$  de ancho de banda mínimo.

Un procedimiento análogo da lugar a una expresión general del operador  $R_D$  dependiente de los parámetros libres miméticos en  $D_4(\alpha_D, \beta_D, \gamma_D)$ . Por simplicidad, se usa nuevamente la notación  $r_{ij}$  para nombrar las entradas del bloque superior izquierdo  $4 \times 6$  de la matriz  $R_D$ . El producto  $R_D D_2$  resulta

$$R_D D_2 = \begin{pmatrix} -r_{11} & r_{11}-r_{12} & r_{12}-r_{13} & r_{13}-r_{14} & r_{14}-r_{15} & r_{15}-r_{16} & r_{16} & 0 & \cdots \\ -r_{21} & r_{21}-r_{22} & r_{22}-r_{23} & r_{23}-r_{24} & r_{24}-r_{25} & r_{25}-r_{26} & r_{26} & 0 & \cdots \\ -r_{31} & r_{31}-r_{32} & r_{32}-r_{33} & r_{33}-r_{34} & r_{34}-r_{35} & r_{35}-r_{36} & r_{36} & 0 & \cdots \\ -r_{41} & r_{41}-r_{42} & r_{42}-r_{43} & r_{43}-r_{44} & r_{44}-r_{45} & r_{45}-r_{46} & r_{46} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Las condiciones lineales sobre las componentes  $r_{ij}$  surgen al satisfacer la igualdad  $R_D D_2 = D_4(\alpha_D, \beta_D, \gamma_D)$  componente a componente, y su solución proporciona la forma paramétrica de  $R_D$ ,

$$R_D = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{24} + \alpha_D & \frac{13}{12} - 4\alpha_D & -\frac{1}{24} + 6\alpha_D & -4\alpha_D & \alpha_D & 0 & \cdots \\ \beta_D & -\frac{1}{24} - 4\beta_D & \frac{13}{12} + 6\beta_D & -\frac{1}{24} - 4\beta_D & \beta_D & 0 & \cdots \\ \frac{1}{24} + \gamma_D & -\frac{1}{6} - 4\gamma_D & \frac{5}{24} + 6\gamma_D & \frac{11}{12} - 4\gamma_D & \gamma_D & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{24} & \frac{13}{12} & -\frac{1}{24} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

donde

$$\begin{aligned}
r_{11} &= -\frac{39}{59}\alpha_D - \frac{675}{649}\beta_D - \frac{551}{649}\gamma_D + \frac{6851}{7788}; & r_{12} &= \frac{156}{59}\alpha_D + \frac{2700}{649}\beta_D + \frac{2204}{649}\gamma_D + \frac{5549}{15576} \\
r_{13} &= -\frac{234}{59}\alpha_D - \frac{4050}{649}\beta_D - \frac{3306}{649}\gamma_D - \frac{1513}{3894}; & r_{14} &= \frac{156}{59}\alpha_D + \frac{2700}{649}\beta_D + \frac{2204}{649}\gamma_D + \frac{2953}{15576} \\
r_{15} &= -\frac{39}{59}\alpha_D - \frac{675}{649}\beta_D - \frac{551}{649}\gamma_D - \frac{24}{649}.
\end{aligned}$$

Del mismo modo al caso del gradiente, escoger los parámetros  $\alpha_D = \beta_D = 0$  y  $\gamma_D = -1/24$  conduce al caso más compacto de matriz  $R_D$ , cuyos estenciles tienen un ancho de banda 3 con la excepción del primero que presenta cinco entradas no nulas (al igual que el último estencil en el bloque inferior derecho).

### 3.3. Operadores de cuarto orden $G$ y $D$ cuasi negativo adjuntos

En esta sección, se analiza el potencial de los operadores miméticos de cuarto orden gradiente  $G_4$  y divergencia  $D_4$  cuasi adjuntos en la estabilidad de la discretización tipo Leap-frog de la ecuación de onda 1-D descrita en la sección 2.4. Para establecer un contexto para esta parametrización especial de  $G_4$  y  $D_4$ , consideremos el caso donde la integral de superficie en la identidad de Gauss (2.2) se anule a consecuencia de que el campo  $u$  satisface condiciones Dirichlet homogéneas. De esta manera,

$$\langle \text{grad}(u), v \rangle = \langle u, -\text{div}(v) \rangle \quad (3.18)$$

donde se ha usado otra notación clásica para los operadores diferenciales continuos y el producto escalar. Si consideramos  $G$  y  $D$  como operadores genéricos en DF y  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  como vectores resultantes de una discretización de los campos continuos originales, la versión discreta de (3.18) es simplemente

$$\langle G\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, -D\mathbf{v} \rangle. \quad (3.19)$$

Este resultado implica que  $G = -D^T$ , lo cual muestra que uno de estos operadores

es el negativo adjunto del otro. Esta propiedad es ampliamente conocida y es satisfecha por los operadores continuos. En el caso discreto, los operadores en DF gradiente y divergencia desarrollados por Shashkov y co-autores, son negativo adjuntos por construcción, y las ventajas de esta propiedad para las soluciones numéricas de ciertos problemas se discuten en [28] y [29], por ejemplo. Sin embargo, la precisión de esta familia mimética se limita al segundo orden, lo que hace su aplicación a problemas de propagación de ondas muy sensibles a errores de dispersión numérica, en comparación a implementaciones en DF de orden superior.

Los operadores miméticos Castillo-Grone de cuarto orden  $G_4$  y  $D_4$  no satisfacen una relación recíproca de negativa adjunción. Esta limitación viene dada por las dimensiones originales de estos operadores matriciales (definidas por la malla centro distribuida de discretización, ecuación (2.5)), y por la presencia de estenciles laterales para la diferenciación en los bordes de la malla. En el caso particular de condiciones Dirichlet homogéneas para  $u$ , el producto  $G\mathbf{u}$  en (3.19) puede efectuarse en términos de la matriz  $\widetilde{G}_4$ , que resulta al omitir la primera y la última columna del operador mimético  $G_4$ , pues  $u = 0$  en los extremos del intervalo. Este operador reducido  $\widetilde{G}_4$  coincide en dimensión con  $-D^T$ , pero además las componentes interiores de ambas matrices (las entradas que no dependen de los parámetros miméticos) también coinciden. En estos términos, el operador  $\widetilde{G}_4$  podría aproximar al negativo adjunto de  $D_4$ , es decir  $\widetilde{G} \simeq -D^T$ , para una escogencia apropiada de los parámetros miméticos disponibles en ambas matrices. Al denotar por  $A$ , el bloque superior  $6 \times 5$  de la matriz suma  $\widetilde{G}_4 + D_4^T$ , se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} g_{12}+d_{11} & g_{13}+\frac{1}{24}-\alpha_D & g_{14}-\beta_D & g_{15}-\frac{1}{24}-\gamma_D & g_{16} \\ -\frac{31}{24}+9\alpha_G+d_{12} & \frac{1}{12}-12\alpha_G+5\alpha_D & -\frac{1}{30}+\frac{54}{5}\alpha_G+5\beta_D & \frac{3}{14}-\frac{36}{7}\alpha_G+5\gamma_D & \alpha_G \\ \frac{1}{24}+9\beta_G+d_{13} & -12\beta_G-10\alpha_D & \frac{54}{5}\beta_G-10\beta_D & -\frac{5}{12}-\frac{36}{7}\beta_G-10\gamma_D & \beta_G \\ \frac{3}{8}+9\gamma_G+d_{14} & -\frac{1}{2}-12\gamma_G+10\alpha_D & \frac{9}{20}+\frac{54}{5}\gamma_G+10\beta_D & \frac{17}{84}-\frac{36}{7}\gamma_G+10\gamma_D & \gamma_G+\frac{1}{24} \\ d_{15} & -5\alpha_D & -5\beta_D & -\frac{5}{24}-5\gamma_D & 0 \\ d_{16} & \alpha_D & \beta_D & \frac{1}{24}+\gamma_D & 0 \end{pmatrix}$$

No existe un conjunto solución para los parámetros miméticos en  $\widetilde{G}_4$  y  $D_4^T$  que per-

mita resolver las 28 ecuaciones lineales equivalentes a la ecuación matricial homogénea  $A = 0_{6 \times 5}$ . Por lo tanto, se encuentra una solución aproximada en términos de los mínimos cuadrados que corresponde con la siguiente sextupla

$$\begin{aligned} \alpha_G^* &= \frac{7390}{193337}, \quad \beta_G^* = -\frac{14929}{378943}, \quad \gamma_G^* = -\frac{1037}{1170675} \\ \alpha_D^* &= \frac{3270}{67819}, \quad \beta_D^* = -\frac{14374}{277101}, \quad \gamma_D^* = -\frac{1873}{80382}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

En resumen, este conjunto de parámetros miméticos permite que los operadores  $\tilde{G}_4$  y  $D_4$  sean cuasi negativo adjuntos. De igual manera, esta parametrización especial permite definir el caso cuasi negativo adjunto de los operadores Aboulai-Castillo  $R_G$  y  $R_D$ .

A continuación se retoma el método de Leap-frog para la ecuación de onda unidimensional presentado en la sección 2.4. Dadas las condiciones Dirichlet homogéneas para  $u$ , la matriz  $G_4$  es sustituida por la lateralmente reducida  $\tilde{G}_4$ , y este esquema se reescribe

$$U^{m+1} = U^m - \frac{\Delta t}{h} D_4 V^{m+1/2}, \quad V^{m+1/2} = V^{m-1/2} - \frac{\Delta t}{h} \tilde{G}_4 U^m, \quad (3.21)$$

donde  $m$  es el índice de iteración temporal, y los vectores bajo cálculo son  $U \in \mathbb{R}^N$  y  $V \in \mathbb{R}^{N+1}$ . Se considera ahora el nuevo vector discreto  $q^m = [V^{m-\frac{1}{2}}; U^m]$ , y se expresa este método numérico como un esquema iterativo convencional

$$q^{m+1} = H q^m \quad \text{donde} \quad H = \begin{bmatrix} I_{N+1} & -p\tilde{G} \\ -pD & I_N + p^2 D\tilde{G} \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Las matrices  $I_N$  e  $I_{N+1}$  corresponden a la matriz identidad de dimensión  $N$  y  $N+1$ , respectivamente, mientras que  $p = \frac{\Delta t}{h}$  es el parámetro de estabilidad  $CFL$  (el cual lleva los nombres de R. Courant, K. Friedrichs y H. Lewy, matemáticos ampliamente famosos). La estabilidad de este esquema Leap-frog ha sido estudiada ampliamente por técnicas teóricas y aproximadas, con el objetivo común de obtener los límites del número  $CFL$  que garanticen un incremento acotado de los errores de redondeo durante los cálculos. En el caso de simulaciones de larga duración, es decir, aplicaciones de

este tipo de esquemas por cien mil o más iteraciones, con un paso de tiempo fijo, las condiciones derivadas de la definición de estabilidad débil son las que realmente regulan el crecimiento del error. La estabilidad débil está garantizada siempre y cuando el radio espectral de la matriz de iteración del esquema no exceda 1. Aquí se denota la matriz de iteración como  $H(p, \alpha_G, \beta_G, \gamma_G, \alpha_D, \beta_D, \gamma_D)$ , lo que hace explícita su dependencia en  $p$  y en los parámetros miméticos.

Una propiedad muy interesante del conjunto de parámetros miméticos (3.20), es la ampliación del intervalo  $p$ , donde el radio espectral de la matriz discretización  $H$ , es decir,  $\rho(H)$ , satisface  $\rho(H) \leq 1$ . Por lo tanto, el rango de estabilidad *CFL* del esquema Leap-frog (3.22) es más amplio para estos parámetros especiales cuasi negativo adjuntos, en comparación con el mismo esquema basado en el conjunto paramétrico compacto. Aun cuando no se demuestra formalmente este hecho, un estudio empírico exhaustivo de  $\rho(H)$  en función de  $p$ , soporta esta afirmación. A modo de ilustración, la figura 3.1 presenta las curvas de  $\rho(H)$  (en líneas negras continuas) en referencia a tres séxtuplas de parámetros: el conjunto cuasi negativo adjunto ( $k = 1$ ), el conjunto compacto ( $k = 0$ ), y un conjunto inestable ( $k = -1$ ) correspondiente a

$$\alpha_G^U = -\frac{1}{24}, \beta_G^U = 0, \gamma_G^U = 0, \alpha_D^U = -\frac{1}{24}, \beta_D^U = 0, \gamma_D^U = 0, \quad (3.23)$$

con un rango de estabilidad vacío para  $p$ , es decir, el esquema Leap-frog es incondicionalmente inestable para este conjunto de parámetros. Los resultados de la figura 3.1, corresponden a una malla gruesa de  $N = 10$ , donde  $\rho(H)$  se mantiene igual a 1 hasta valores *CFL* máximos, de  $p_{\text{MAX}} = 0.901$  y  $p_{\text{MAX}} = 0.816$ , para los conjuntos de parámetros cuasi negativo adjunto y compacto, respectivamente (ver el recuadro en esta figura). Por lo tanto, el primero de estos conjuntos de parámetros permite tamaños de paso temporal 10% más grandes que el segundo, en simulaciones Leap-Frog. El denominado conjunto inestable induce inestabilidades de crecimiento exponencial en los experimentos numéricos, independientemente del valor de  $p$  usado al establecer el tamaño de paso temporal. En este estudio empírico, también se ilustran los valores  $\rho(H)$  para otras séxtuplas miméticas que resultan combinaciones lineales de estos con-

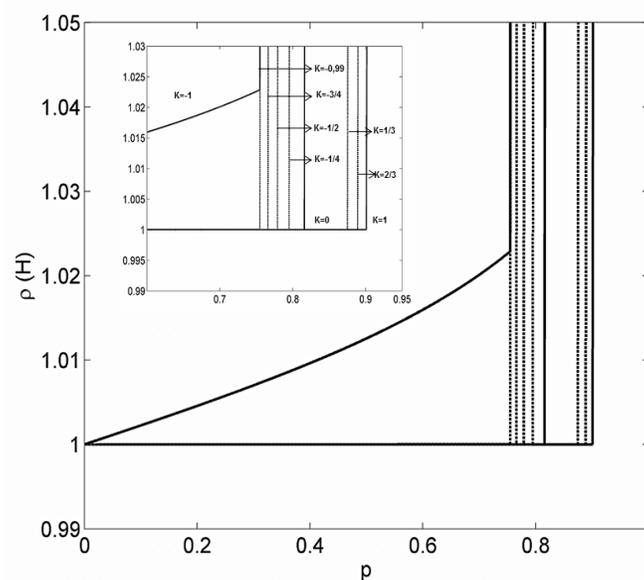


Figura 3.1: Radio espectral de la matriz de iteración  $H$  del método Leap-frog para diferentes conjuntos de parámetros miméticos.

juntos de parámetros de referencia. Por ejemplo, para valores positivos del coeficiente de ponderación  $0 \leq k \leq 1$  (líneas negras punteadas), el primer parámetro mimético  $\alpha_G$  viene dado por  $k\alpha_G^* + (1 - k)\alpha_G^C$  en estas combinaciones lineales, mientras que  $\alpha_G$  resulta igual a  $(1 + k)\alpha_G^C - k\alpha_G^U$ , en el caso de valores de  $k$  negativos, es decir,  $-1 \leq k \leq 0$  (líneas punteadas grises). Los mismos promedios se aplican también a los restantes parámetros miméticos. Como se puede ver en la figura 3.1,  $p_{\text{MAX}}$  decae con  $k$ , y este decrecimiento es drástico en el rango  $-1 \leq k \leq -0,99$ .

Entre las posibles preguntas abiertas respecto a la ventaja en estabilidad que ofrecen los parámetros miméticos cuasi negativo adjuntos respecto a la popular séxtupla compacta, aquí se analiza brevemente sólo su dependencia en el tamaño de la malla. La figura 3.2 muestra que el  $CFL$  umbral  $p_{\text{MAX}}$  del caso cuasi negativo adjunto cae rápidamente desde  $\sim 0.9$  hasta un valor límite de  $\sim 0.857$ , a medida que  $N$  aumenta. Por lo tanto, este conjunto de parámetros todavía permite una ampliación modesta del paso de tiempo cerca del  $\sim 5\%$  con respecto a la séxtupla compacta, cuyo  $p_{\text{MAX}}$  parece independiente del tamaño de la malla. En este caso compacto, la insensibilidad de  $p_{\text{MAX}}$  respecto a  $N$  podría explicarse por el hecho de que el segundo, tercer y cuarto

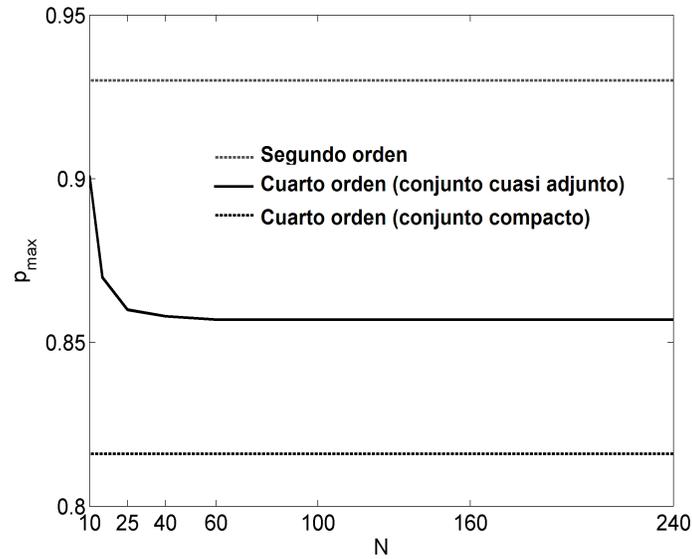


Figura 3.2: Radio espectral de la matriz de iteración del método Leap-frog ante la variación del número de celdas de malla  $N$ .

estencil lateral en ambos miméticos  $G_4$  y  $D_4$  en las ecuaciones (2.7) y (2.8), se reducen a las fórmulas de Taylor con cuarto orden de precisión, en los correspondientes puntos de malla. Estos seis estenciles DF de Taylor resultan únicos en estas localizaciones de malla. Como referencia, la figura 3.2 también muestra el comportamiento de  $p_{\text{MAX}}$  por el Leap-frog basado en los operadores miméticos de segundo orden  $G_2$  y  $D_2$ , cuyos estenciles coinciden con las fórmulas de Taylor. En este caso de segundo orden,  $p_{\text{MAX}} \sim 0.93$  y es constante ante variaciones de  $N$ , semejante al caso compacto con cuarto orden de precisión.

# Capítulo 4

## Métodos en DFC para la ecuación de onda acústica en dominios rectangulares

En este capítulo se presentan dos métodos en DFC para la resolución numérica del modelo ondulatorio de propagación acústica (2.1) en mallas rectangulares. El primero emplea una malla nodal para la discretización espacial y utiliza las fórmulas en DFC con cuarto orden revisadas en la sección (3.1). El segundo método aplica las versiones compactas de los operadores miméticos gradiente y divergencia con cuarto orden de precisión presentadas en la sección 2.3. En ambos métodos la integración temporal es de tipo Crank-Nicolson, pero resuelta alternando las direcciones coordenadas  $x$  e  $y$  (esquemas tipo ADI) siguiendo la descomposición de Peaceman-Rachford (PR). Este esquema ADI-PR ha sido aplicado ampliamente en la solución de la ecuación de difusión (ver por ejemplo [60], y sus referencias), pero su uso en problemas ondulatorios se reduce a muy pocos trabajos ([11], [16], [32], [33] [37], [44]). Cabe destacar que la formulación de estos métodos DFC fácilmente se adapta a operadores espaciales con sexto orden de precisión, pero desafortunadamente estos nuevos métodos resultan inestables en algunos de nuestros experimentos numéricos, tal como se comenta en el próximo capítulo.

## 4.1. Un esquema DFC nodal con integración temporal tipo Crank-Nicolson Peaceman-Rachford

### 4.1.1. Formulación

En este método, la diferenciación finita compacta del modelo (2.1) procede en la malla nodal  $(x_j, y_i)$  donde  $j, i = 0, \dots, N-1$ , y donde se asume un paso común  $h$  a lo largo de ambos ejes de coordenadas, para simplificar su presentación. Sobre esta malla las aproximaciones del campo de presión continua  $u$  corresponden a los coeficientes de la matriz  $U = [u_{j,i}]$ , y matrices semejantes  $V$  y  $W$  son definidas para almacenar las aproximaciones a las componentes del vector velocidad  $(v, w)$ , respectivamente. A continuación, se denotan por  $U_x$  y  $U_y$  las matrices cuyas componentes aproximan  $u_x$  y  $u_y$ , respectivamente, en todos los nodos de la malla. Estas aproximaciones se calculan utilizando los operadores en DFC  $P$  y  $Q$  referidos en la ecuación (3.11) y los productos matriciales

$$U_x P^T \simeq U Q^T \quad , \quad P U_y \simeq Q U.$$

Las aproximaciones para  $u_x$  se obtienen resolviendo un sistema lineal tridiagonal  $N \times N$  para cada fila de  $U_x$ , el cual incluye estimaciones para  $u_x$  en la frontera  $\partial\Omega$  de  $[0, 1] \times [0, 1]$ . De manera análoga se calcula cada una de las  $N$  columnas de  $U_y$ . La estructura tridiagonal de la matriz  $P$  de estos sistemas, favorece su factorización LU vía algoritmos estándar tipo Thomas, y permite que la posterior resolución de estos múltiples sistemas lineales resulte eficiente computacionalmente.

La disponibilidad de estimaciones de  $\nabla u$  en  $\partial\Omega$  permite la aproximación del vector de velocidad mediante la integración en tiempo de la ecuación (2.1) en la frontera. Sin embargo,  $\nabla \cdot \vec{v} = v_x + w_y$  debe ser aproximado solamente en los nodos interiores de la malla, porque  $u$  es dada por las condiciones de Dirichlet en  $\partial\Omega$ . Con este propósito se utilizan los operadores reducidos  $\bar{P}$  y  $\bar{Q}$  dados por las ecuaciones (3.12) y (3.13), con dimensiones  $(N-2) \times (N-2)$  y  $(N-2) \times N$ , respectivamente, para los casos de cuarto orden de precisión. En esta formulación, también se consideran  $\bar{V}$ , (con dimensiones  $(N-2) \times N$ ), y  $\bar{W}$ , (con dimensiones  $N \times (N-2)$ ), versiones reducidas de las matrices

originales  $V$  y  $W$ , respectivamente, donde se han eliminado las filas (de  $V$ ) y las columnas (de  $W$ ) correspondientes a los valores de fronteras. Las aproximaciones en DFC para  $v_x$  y  $w_y$  se consiguen mediante la resolución de  $(N - 2)$  sistemas lineales para calcular las filas de  $\bar{V}_x$ , y  $(N - 2)$  sistemas lineales adicionales para calcular las columnas de  $\bar{W}_y$ , dados por las ecuaciones matriciales siguientes

$$\bar{V}_x \bar{P}^T \simeq \bar{V} \bar{Q}^T \quad , \quad \bar{P} \bar{W}_y \simeq \bar{Q} \bar{W}.$$

A continuación se formula la discretización en DFC del modelo acústico (2.1) siguiendo la metodología descrita por Strickwerda en [60] para la ecuación de difusión 1-D. Al respecto, se introducen los operadores espaciales continuos

$$A_1 \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_x \\ -u_x \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_y \\ 0 \\ -u_y \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

con versiones discretas correspondientes

$$A_{1h} \begin{bmatrix} \bar{U} \\ V \\ W \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{V} \bar{Q}^T (\bar{P}^T)^{-1} \\ \dots\dots\dots \\ U Q^T (P^T)^{-1} \\ \dots\dots\dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A_{2h} \begin{bmatrix} \bar{U} \\ V \\ W \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{P}^{-1} \bar{Q} \bar{W} \\ \dots\dots\dots \\ 0 \\ \dots\dots\dots \\ P^{-1} Q U \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

Se procede ahora a la aplicación de la técnica Crank-Nicolson para la integración temporal de (2.1), posterior a la diferenciación espacial en términos de  $A_{1h}$  y  $A_{2h}$ . Este procedimiento conduce a

$$\left( I - \frac{\Delta t}{2} A_{1h} - \frac{\Delta t}{2} A_{2h} \right) \mathbf{U}_{\text{CN}}^{\mathbf{m}+1} = \left( I + \frac{\Delta t}{2} A_{1h} + \frac{\Delta t}{2} A_{2h} \right) \mathbf{U}_{\text{CN}}^{\mathbf{m}} \quad (4.3)$$

donde  $\Delta t$  es el paso del tiempo y  $\mathbf{U}_{\text{CN}}^{\mathbf{m}}$  representa la aproximación nodal compacta  $[\bar{U}, V, W]^T$  en el tiempo  $t = m\Delta t$ . La identidad discreta (4.3) puede ser reemplazada

por la siguiente factorización después de despreciar el término  $A_{1h}A_{2h}(\mathbf{U}_{\text{CN}}^{\mathbf{m}+1} - \mathbf{U}_{\text{CN}}^{\mathbf{m}})$  que es de orden  $O(\Delta t^2)$ :

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2}A_{1h}\right) \left(I - \frac{\Delta t}{2}A_{2h}\right) \mathbf{U}_{\text{CN}}^{\mathbf{m}+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2}A_{1h}\right) \left(I + \frac{\Delta t}{2}A_{2h}\right) \mathbf{U}_{\text{CN}}^{\mathbf{m}}. \quad (4.4)$$

La aplicación de la descomposición de Peaceman-Rachford (PR) a esta formulación conduce a un cómputo en dos etapas

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2}A_{1h}\right) \mathbf{U}_{\text{CN}}^* = \left(I + \frac{\Delta t}{2}A_{2h}\right) \mathbf{U}_{\text{CN}}^{\mathbf{m}} \quad (4.5)$$

$$\left(I - \frac{\Delta t}{2}A_{2h}\right) \mathbf{U}_{\text{CN}}^{\mathbf{m}+1} = \left(I + \frac{\Delta t}{2}A_{1h}\right) \mathbf{U}_{\text{CN}}^*, \quad (4.6)$$

cada una de las cuales alterna la aplicación de los operadores  $A_{1h}$  y  $A_{2h}$ , y en consecuencia la dirección de resolución del sistema lineal unidimensional (metodología ADI). La aproximación intermedia  $\mathbf{U}_{\text{CN}}^*$  sólo se utiliza como un término provisional en la formulación anterior (4.7), pero no se conserva al final de la implementación computacional como se explicará brevemente a continuación.

### 4.1.2. Detalles de la implementación ADI

El cálculo de  $[\bar{U}, V, W]^*$  por la primera etapa del algoritmo de ADI-PR involucra dos conjuntos de sistemas lineales para las filas de  $\bar{U}^*$  y  $V^*$

$$\begin{cases} \bar{U}^* \bar{P}^T + \frac{\Delta t}{2}V^* \bar{Q}^T = \bar{U}^{\mathbf{m}} \bar{P}^T - \frac{\Delta t}{2}(\bar{P}^{-1} \bar{Q} W^{\mathbf{m}} \bar{P}^T) \\ V^* P^T + \frac{\Delta t}{2}U^* Q^T = V^{\mathbf{m}} P^T. \end{cases} \quad (4.7)$$

Estas ecuaciones vectoriales pueden desacoplarse mediante la incorporación de una iteración de punto fijo que se inicia desde  $V_{(0)} = V^{\mathbf{m}}$ , y para  $k = 0, 1, 2, \dots$  resuelve los dos sistemas tridiagonales unidimensionales

$$\begin{cases} \bar{U}_{(k+1)}\bar{P}^T = a_i - \frac{\Delta t}{2}V_{(k)}\bar{Q}^T \\ V_{(k+1)}P^T = b_i - \frac{\Delta t}{2}U_{(k+1)}Q^T, \end{cases} \quad (4.8)$$

donde han sido omitidos los supraíndices para simplificar la notación, y los nuevos subíndices indican los pasos de la iteración interna de punto fijo. Los vectores  $a_i$  y  $b_i$  denotan términos conocidos correspondientes al nivel de tiempo  $t_m$ . En este trabajo, se utilizaron las diferencias en norma infinita  $\|\bar{U}_{(k+1)} - \bar{U}_{(k)}\| \leq Tol$  y  $\|V_{(k+1)} - V_{(k)}\| \leq Tol$  como criterios de parada para esta iteración interna. Para la implementación de la segunda etapa (ADI-PR), se procede de una forma desacoplada similar para obtener  $\bar{U}^{m+1}$  y  $W^{m+1}$ .

A nivel computacional, el cálculo del vector  $a_i$  dado en la primera ecuación de (4.7) no requiere de invertir la matriz  $\bar{P}$ , sino que dicho cálculo es reescrito convenientemente para usar una descomposición LU de esta matriz DFC, o el algoritmo de Thomas dada su estructura tridiagonal. De igual manera se procede con la matriz  $P$ , en la segunda etapa ADI-PR de este método DFC nodal

## 4.2. Un esquema DFC centro distribuido con integración temporal Crank-Nicolson Peaceman-Rachford

En este caso, la discretización de los campos acústicos continuos en (2.1) tiene lugar en la malla escalonada mostrada en la figura 2.2, y la diferenciación finita compacta resulta de aplicar los operadores de la sección 2.3. De nuevo, se considera una malla uniforme de paso  $h$  en ambas direcciones y un total de  $(N - 1) \times (N - 1)$  celdas cuadradas, con el propósito único de simplificar la siguiente formulación. Los valores discretos de  $u$  son localizados en los centros de celda, y en los puntos centrales de las aristas de frontera, además de un valor adicional en cada una de las esquinas de la malla (ver cuadro izquierdo de la figura 2.2). De esta manera, la componente del gradiente  $\frac{\partial u}{\partial x}$  puede ser aproximada por la aplicación del operador  $R_G^4(G_2)$  a lo largo de

las líneas de la malla  $u$  en la dirección  $x$ . Estas aproximaciones comparten los mismos sitios de malla con la componente de velocidad  $v$  (ver cuadro derecho en la figura 2.2). De manera análoga, las localizaciones de malla de la velocidad  $w$  también acojen a las aproximaciones para  $\frac{\partial u}{\partial y}$  calculadas por la aplicación del mismo operador a lo largo de las líneas de la malla para  $u$  en la dirección  $y$ . Nótese que la distribución de malla de las componentes de velocidad  $v$  y  $w$  es una consecuencia de su dependencia espacial respecto de  $\nabla u$  según la ecuación de onda (2.1). Al nivel de implementación, las matrices  $U$ ,  $V$ , y  $W$  que almacenan los valores discretos de presión y velocidades tienen dimensiones diferentes, correspondientes a  $(N + 1) \times (N + 1)$ ,  $(N + 1) \times N$ , y  $N \times (N + 1)$ , respectivamente. Este método también hace uso de la matriz reducida  $\bar{V}$  obtenida de  $V$  al eliminar la primera y la última fila de  $V$ , así como de la matriz reducida  $\bar{W}$  derivada de  $W$  omitiendo la primera y la última columna. La aproximación DFC centro distribuida para  $\nabla \cdot \vec{v}$  es calculada exclusivamente en los centros de celdas y está dada por la matriz  $\bar{V}(R_D^4 D_2)^T + (R_D^4 D_2)\bar{W}$  sobre la malla completa, donde el operador compuesto  $R_D^4 D_2$  presenta las dimensiones apropiadas. La formulación del esquema DFC centro distribuido procede de manera análoga al caso anterior de la discretización DFC nodal, y por esto sólo se comentan las diferencias principales a continuación. En primer lugar, los operadores de diferenciación espacial en (4.2) están sustituidos por

$$A_{1h} \begin{bmatrix} \bar{U} \\ V \\ W \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{V}(R_D D_2)^T \\ U(R_G G_2)^T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_{2h} \begin{bmatrix} \bar{U} \\ V \\ W \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_D D_2 \bar{W} \\ 0 \\ R_G G_2 U \end{bmatrix}.$$

A continuación, estos operadores se acoplan a la integración temporal de Crank-Nicolson del modelo acústico (2.1) seguida por la descomposición PR, dadas por las ecuaciones (4.3)-(4.6). Ahora bien, las ecuaciones individuales para las matrices intermedias de aproximaciones  $U^*$ ,  $V^*$  y  $W^*$  vienen a ser

$$\begin{cases} \bar{U}^* + \frac{\Delta t}{2}(\bar{V}^* D_2^T)R_D^T = \bar{U}^m - \frac{\Delta t}{2}R_D(D_2\bar{W}^m) \\ \bar{V}^* + \frac{\Delta t}{2}(\bar{U}^* G_2^T)R_G^T = V^m \\ \bar{W}^* = W^m - \frac{\Delta t}{2}R_G(G_2U^m). \end{cases} \quad (4.9)$$

Semejante al método nodal, la matriz  $W^*$  se determina explícitamente de la última ecuación, mientras que  $U^*$  y  $V^*$  están acopladas en el subsistema definido por las dos primeras ecuaciones. Con el fin de utilizar la diferenciación compacta unidimensional, este subsistema se resuelve mediante un método de punto fijo análogo a (4.8) con los términos vectoriales independientes apropiadas  $a_i$  y  $b_i$ . Posteriormente, la segunda etapa de esta descomposición PR permite calcular  $V^{m+1}$  en forma explícita, y son las matrices  $U^{m+1}$  y  $W^{m+1}$  que ahora están sujetas a un cálculo iterativo tipo punto fijo, al igual que sucede en el método nodal.

### 4.3. Análisis de estabilidad de Von Neumann para el esquema DFC nodal

En esta sección se desarrolla un análisis de estabilidad de Von Neumann para el método DFC nodal siguiendo el procedimiento presentado por Strickwerda en su texto [60], y revisado en el apéndice A. Este autor también presenta un breve análisis de este tipo para esquemas DF nodales tipo ADI en el caso bidimensional de la ecuación de difusión con coeficientes constantes. Su conclusión a partir de este análisis limitado sólo a los estenciles interiores de la malla, es la estabilidad incondicional respecto a  $h$  y  $\Delta t$ , de esta familia de métodos. Resulta viable extender el planteamiento de Strickwerda al caso de métodos nodales tipo ADI para la ecuación de onda siempre que ésta se formule como una EDP de segundo orden, en lugar del sistema presión-velocidad (2.1). Algunos trabajos recientes que siguen este enfoque son [33] y [66]. En este trabajo por el contrario, se desarrolla un análisis Von Neumann de estabilidad tipo vectorial, al partir de la formulación presión-velocidad (2.1) de la ecuación de onda. La conclusión del mismo es la estabilidad incondicional del método ADI-PR nodal de la sección 4.1.1

respecto al parámetro  $CFL$   $\lambda = \frac{\Delta t}{h}$ . Sin embargo, este método también contempla la implementación de condiciones de frontera tipo Dirichlet empleando estenciles DFC laterales, lo que impone restricciones en el  $CFL$  para garantizar la estabilidad. Este tipo de cotas no son analizadas en esta sección, sino que son exploradas numéricamente en el siguiente capítulo. Esta misma metodología de análisis de estabilidad, se ha aplicado al caso del método ADI-PR centro distribuido de la sección 4.2.

Considere una malla nodal uniforme  $(ih, jh)$  en la formulación del método ADI-PR de la sección 4.1.1. En el caso de los nodos interiores esta formulación puede reescribirse usando los siguientes operadores discretos  $p_x, p_y, q_x$  y  $q_y$

$$\begin{aligned} (p_x u_x)_{i,j} &= \frac{1}{3}(u_x)_{i,j-1} + \frac{4}{3}(u_x)_{i,j} + \frac{1}{3}(u_x)_{i,j+1} \\ (p_y u_y)_{i,j} &= \frac{1}{3}(u_y)_{i-1,j} + \frac{4}{3}(u_y)_{i,j} + \frac{1}{3}(u_y)_{i+1,j} \\ (q_x u)_{i,j} &= -\frac{1}{h}u_{i,j-1} + \frac{1}{h}u_{i,j+1} \\ (q_y u)_{i,j} &= -\frac{1}{h}u_{i-1,j} + \frac{1}{h}u_{i+1,j}. \end{aligned}$$

Note que estos operadores permiten la aplicación de la fórmula DFC centrada (3.5) al campo  $u$  en ambas direcciones coordenadas  $x$  y  $y$ , en la forma

$$p_x (u_x)_{ij} = q_x u_{ij}, \quad p_y (u_y)_{ij} = q_y u_{ij}, \quad (4.10)$$

y de igual manera se aplican a ambas componentes de la velocidad  $v$  y  $w$ . Estos cuatro operadores son evidentemente lineales, pero además la tupla  $p_x$  y  $p_y$  conmutan cuando son aplicados a un campo discreto  $f$  sobre una malla nodal. Es decir,

$$p_x (p_y f)_{ij} = p_y (p_x f)_{ij}.$$

En nuestro caso,  $f$  podría representar alguna de las soluciones físicas de interés, o alguna de sus derivadas espaciales, nodalmente discretizadas. La primera etapa del método ADI-PR nodal puede escribirse como las tres siguientes ecuaciones escalares

acopladas

$$\begin{aligned} u^* + \frac{\Delta t}{2} v_x^* &= u^m - \frac{\Delta t}{2} w_y \\ \frac{\Delta t}{2} u_x^* + v^* &= v^m \\ w^* &= w^m - \frac{\Delta t}{2} u_y \end{aligned}$$

donde se ha omitido la dependencia puntual de la malla por simplicidad. A continuación, estas ecuaciones son reescritas mediante la aplicación de los operadores  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $q_x$  y  $q_y$  definidos anteriormente, y de las relaciones DFC dadas por (4.10). Específicamente, se aplica la composición de los operadores  $p_x(p_y(\cdot))$  a la primera ecuación, mientras a la segunda y tercera ecuaciones se aplican individualmente, los operadores  $p_x(\cdot)$  y  $p_y(\cdot)$ , respectivamente. El objeto de estas transformaciones es reemplazar las nuevas evaluaciones  $p_x(u_x)$ ,  $p_y(u_y)$ ,  $p_x(v_x)$  y  $p_y(w_y)$ , por sus equivalentes evaluaciones en términos de los operadores  $q_x$  y  $q_y$ , a través de las relaciones DFC (4.10). Así que después de usar la conmutatividad de  $p_x$  y  $p_y$  a conveniencia, la primera etapa (4.11) se reescribe en la forma vectorial siguiente

$$\begin{bmatrix} p_x p_y & \frac{\Delta t}{2} p_y q_x & 0 \\ \frac{\Delta t}{2} q_x & p_x & 0 \\ 0 & 0 & p_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x p_y & 0 & -\frac{\Delta t}{2} p_x q_y \\ 0 & p_x & 0 \\ -\frac{\Delta t}{2} q_y & 0 & p_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}^m. \quad (4.11)$$

Esta misma secuencia de transformaciones en términos de los operadores  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $q_x$  y  $q_y$  permite reescribir la segunda etapa del esquema ADI-PR nodal (4.5) de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} p_x p_y & 0 & \frac{\Delta t}{2} p_x q_y \\ 0 & p_x & 0 \\ \frac{\Delta t}{2} q_y & 0 & p_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}^{m+1} = \begin{bmatrix} p_x p_y & -\frac{\Delta t}{2} p_y q_x & 0 \\ -\frac{\Delta t}{2} q_x & p_x & 0 \\ 0 & 0 & p_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Siguiendo el análisis de Von Neumann revisado en la sección del apéndice A.1.3, la matriz de amplificación  $G$  establece la siguiente relación entre las transformadas de

Fourier de las soluciones discretas en los tiempos  $m$  y  $m + 1$

$$\mathfrak{F}_{xy} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}^{m+1} = G \mathfrak{F}_{xy} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}^m \quad (4.13)$$

donde  $\mathfrak{F}_{xy}$  es la transformada de Fourier en dos dimensiones dada en la ecuación (A.12). Esto permite escribir

$$u_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{i(jh\xi_x + ih\xi_y)} [\mathfrak{F}_{xy}u](\xi_x, \xi_y) d\xi_x d\xi_y \quad (4.14)$$

para  $i^2 = -1$ . Las variables  $\xi_x$  y  $\xi_y$  son las correspondientes variables de frecuencia espacial asociadas a  $x$  y  $y$ , respectivamente. Procedemos ahora con el análisis estándar al sustituir cada una de las soluciones escalares del esquema por un modo discreto de Fourier. En el caso de  $u_{ij}^m$  se tiene que

$$u_{ij}^m = g_u^m e^{i(j\theta_x + i\theta_y)} \quad (4.15)$$

donde  $\theta_x = h\xi_x$  y  $\theta_y = h\xi_y$  corresponden con ángulos variando en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

La aplicación de los operadores  $p_x$  y  $p_y$  a este modo armónico resulta

$$\begin{aligned} p_x u_{ij}^m &= \frac{1}{3} g_u^m e^{i(j-1)\theta_x} e^{i\theta_y} + \frac{4}{3} g_u^m e^{i(j\theta_x + i\theta_y)} \\ &+ \frac{1}{3} g_u^m e^{i(j+1)\theta_x} e^{i\theta_y} \\ &= \left( \frac{1}{3} e^{-i\theta_x} + \frac{4}{3} + \frac{1}{3} e^{i\theta_x} \right) u_{ij}^m \\ &= \left( \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \cos(\theta_x) \right) u_{ij}^m \\ &= \pi_x u_{ij}^m, \end{aligned} \quad (4.16)$$

y análogamente

$$p_y u_{ij}^m = \left( \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \cos(\theta_y) \right) u_{ij}^m = \pi_y u_{ij}^m \quad (4.17)$$

quedando así definidos  $\pi_x$  y  $\pi_y$ . Alternativamente, al sustituir (4.15) en los operadores  $q_x$  y  $q_y$  se obtiene

$$q_x u_{ij}^m = \frac{(-e^{-i\theta_x} + e^{i\theta_x})}{h} u_{ij}^m \quad (4.18)$$

$$q_x = \frac{2}{h} i \operatorname{sen}(\theta_x) \quad (4.19)$$

$$q_y = \frac{2}{h} i \operatorname{sen}(\theta_y). \quad (4.20)$$

Para este caso de soluciones discretas armónicas, las ecuaciones (4.11) y (4.12) pueden escribirse en la forma

$$AU^* = BU^m \quad \text{y} \quad CU^{m+1} = DU^*, \quad (4.21)$$

en términos de las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} \pi_x \pi_y & \pi_y (i \lambda \operatorname{sen}(\theta_x)) & 0 \\ i \lambda \operatorname{sen}(\theta_x) & \pi_x & 0 \\ 0 & 0 & \pi_y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \pi_x \pi_y & 0 & \pi_x (-i \lambda \operatorname{sen}(\theta_y)) \\ 0 & \pi_x & 0 \\ -i \lambda \operatorname{sen}(\theta_y) & 0 & \pi_y \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \pi_x \pi_y & 0 & \pi_x (i \lambda \operatorname{sen}(\theta_y)) \\ 0 & \pi_x & 0 \\ i \lambda \operatorname{sen}(\theta_y) & 0 & \pi_y \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \pi_x \pi_y & \pi_y (-i \lambda \operatorname{sen}(\theta_x)) & 0 \\ -i \lambda \operatorname{sen}(\theta_x) & \pi_x & 0 \\ 0 & 0 & \pi_y \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, la matriz de amplificación  $G$  para este esquema, escrito como un método de un solo paso, viene dada por

$$G = C^{-1} D A^{-1} B. \quad (4.22)$$

Las inversas y productos matriciales requeridos en (4.22) se calculan mediante la herramienta de cálculo simbólico MAPLE, lo cual conduce a la siguiente expresión explícita para  $G$

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\pi_x^2 \pi_y^2}{\rho} + \frac{\pi_y^2}{\rho} (-\lambda^2 \text{sen}^2(\theta_x)) + \frac{(-\lambda^2 \text{sen}^2(\theta_y))}{\delta_y} & 2 \frac{\pi_x \pi_y^2}{\rho} (-\lambda \text{sen}(\theta_x)) & 2 \frac{\pi_x^2 \pi_y}{\rho} (-\lambda \text{sen}(\theta_y)) \\ 2 \frac{\pi_x}{\delta_x} (-\lambda \text{sen}(\theta_x)) & \frac{(-\lambda^2 \text{sen}^2(\theta_x))}{\delta_x} + \frac{\pi_x^2}{\delta_x} & 2 \frac{\pi_x}{\delta_x \pi_y} (-\lambda^2 \text{sen}(\theta_x) \text{sen}(\theta_y)) \\ 2 \frac{\pi_x^2 \pi_y}{\rho} (-\lambda \text{sen}(\theta_y)) & -2 \frac{\pi_x \pi_y}{\rho} (\lambda^2 \text{sen}(\theta_x) \text{sen}(\theta_y)) & \frac{\pi_x^2}{\rho} (-\lambda^2 \text{sen}^2(\theta_y)) \\ & & + \frac{\lambda^4 \text{sen}^2(\theta_x) \text{sen}^2(\theta_y)}{\rho} \\ & & + \frac{\rho}{\delta_y} \\ & & + \frac{\pi_y}{\delta_y} \end{bmatrix}$$

donde

$$\delta_x = \pi_x^2 + \lambda^2 \text{sen}^2(\theta_x), \quad \delta_y = \pi_y^2 + \lambda^2 \text{sen}^2(\theta_y), \quad y \quad \rho = \delta_x \delta_y. \quad (4.23)$$

Las condiciones sobre la estabilidad de este esquema pueden ahora establecerse sobre la norma y los autovalores de  $G$ , haciendo uso de la restricción (A.32) y el teorema A.3, respectivamente. Note que en el caso  $\lambda = 0$ , se tiene que  $\delta_x = \pi_x^2$ ,  $\delta_y = \pi_y^2$ , y  $\rho = \pi_x^2 \pi_y^2$ , de donde  $G$  equivale a la matriz identidad, y el esquema resulta trivialmente estable. Sin embargo, para  $\lambda > 0$  la estabilidad del esquema debe analizarse para los ángulos  $\theta_x = h\xi_x$  y  $\theta_y = h\xi_y$  variando en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . En este caso, un estudio analítico de la norma y/o el radio espectral de  $G$  resulta muy complejo, por lo que se depende de un estudio numérico de estos parámetros. Las figuras dadas a continuación, presentan  $\|G\|_\infty$  y  $\rho(G)$  para tres valores  $CFL$  representativos  $\lambda = 1, 5, 50$ . Por un lado, estos resultados muestran que  $\rho(G) = 1$  para los valores considerados de  $\lambda$ , y asumiendo igual comportamiento para cualquier  $CFL$ , se concluye que el esquema en cuestión es incondicionalmente estable. Por otro lado, el máximo valor para la norma infinita de  $G$  en el rango de variación de  $\theta_x$  y  $\theta_y$  crece con  $\lambda$ , pero lo importante para la estabilidad es el comportamiento de  $\|G^m\|_\infty$  a medida que  $m \rightarrow \infty$  y  $h$  permanece constante. La figura 4.4 ilustra los máximos valores de  $\|G^m\|_\infty$  para los casos de  $m = 1, 2, 4, 8, \dots, 4096$ , es decir, las primeras 12 potencias de 2, considerando los 3 valores  $CFL$  de referencia anteriores. Estos resultados permiten intuir que la norma infinita de  $G^m$  permanece acotada para  $m \rightarrow \infty$ , aún en el caso de  $\lambda = 50$ , y de igual manera para valores de  $\lambda$  aún mayores.

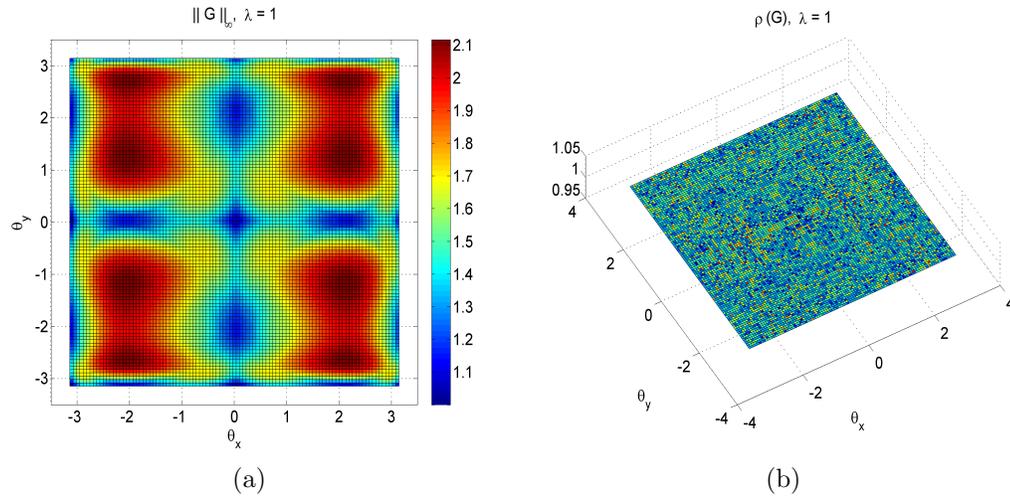


Figura 4.1: Norma infinita y radio espectral de la matriz  $G$  con  $\lambda = 1$ , caso DFC nodal.

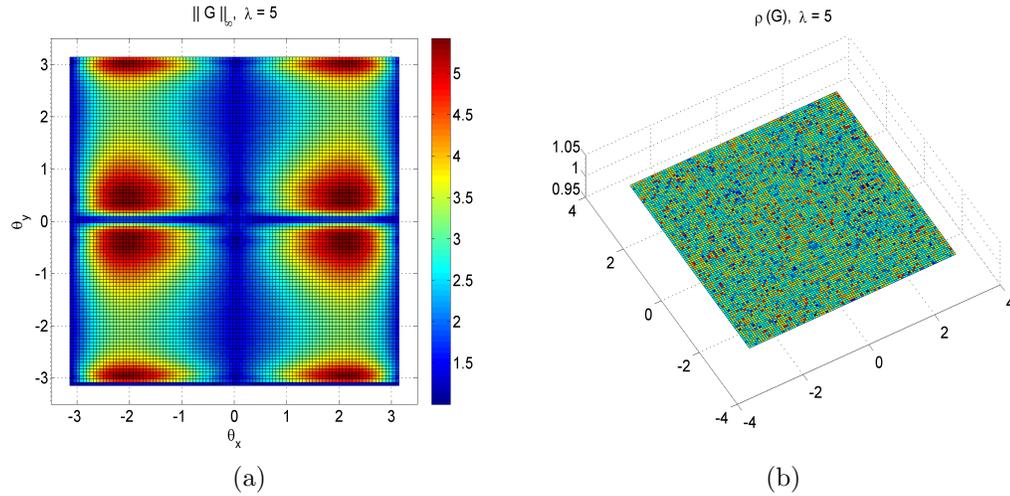


Figura 4.2: Norma infinita y radio espectral de la matriz  $G$  con  $\lambda = 5$ , caso DFC nodal.

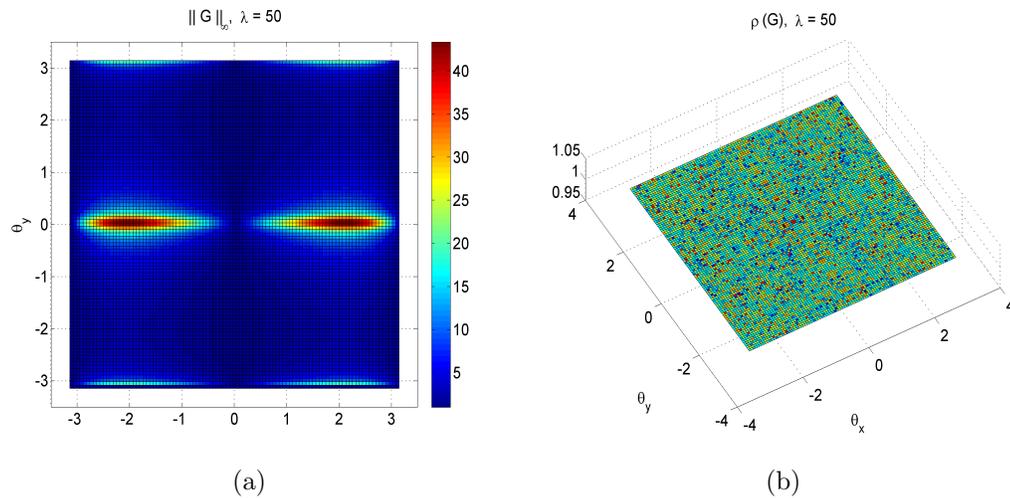


Figura 4.3: Norma infinita y radio espectral de la matriz  $G$  con  $\lambda = 50$ , caso DFC nodal.

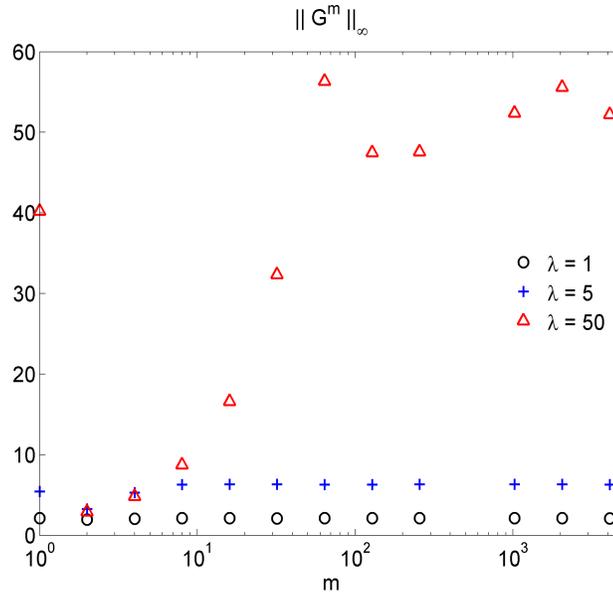


Figura 4.4: Norma infinita de  $G^m$  para el método nodal en los casos  $\lambda = 1, 5, 50$ .

#### 4.4. Análisis de estabilidad de Von Neumann para el esquema DFC centro distribuido

Como se ha mencionado anteriormente, este análisis considera exclusivamente los estenciles DF aplicados en los puntos interiores de la malla. Para el esquema centro distribuido ADI-PR presentado en la sección 4.2, estos estenciles corresponden a la fórmula centrada de cuarto orden dada a continuación. Se asume un paso constante de malla  $h$  en ambas direcciones y se introducen los siguientes operadores discretos  $d_x$  y  $d_y$

$$d_x u_{ij}^m = \left( \frac{1}{24} u_{i,j-\frac{3}{2}}^m - \frac{9}{8} u_{i,j-\frac{1}{2}}^m + \frac{9}{8} u_{i,j+\frac{1}{2}}^m - \frac{1}{24} u_{i,j+\frac{3}{2}}^m \right) \frac{1}{h} \quad (4.24)$$

$$d_y u_{ij}^m = \left( \frac{1}{24} u_{i-\frac{3}{2},j}^m - \frac{9}{8} u_{i-\frac{1}{2},j}^m + \frac{9}{8} u_{i+\frac{1}{2},j}^m - \frac{1}{24} u_{i+\frac{3}{2},j}^m \right) \frac{1}{h}. \quad (4.25)$$

Los operadores  $d_x$  y  $d_y$  permiten simplificar la formulación de las etapas de este esquema.

Siguiendo el análisis de Von Neumann, la matriz de amplificación  $G$  establece la siguiente relación de las soluciones discretas en los instantes de tiempos  $m$  y  $m + 1$  en

el espacio de Fourier

$$\mathfrak{S}_{xy} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{ij}^{m+1} = G \mathfrak{S}_{xy} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{ij}^m \quad (4.26)$$

donde  $\mathfrak{S}_{xy}$  es la transformada discreta de Fourier en dos dimensiones dada por la ecuación (A.12). La expresión de  $G$  se obtiene al sustituir  $u_{ij}$  por un modo discreto del tipo

$$u_{ij}^m = g^m e^{i(j\theta_x + i\theta_y)}, \quad -\pi \leq \theta_x, \theta_y \leq \pi \quad (4.27)$$

siendo  $\theta_x = h\xi_x$  para  $\xi_x$  la frecuencia espacial asociada a la variable  $x$ , y con similar definición para  $\theta_y = h\xi_y$ . Además,  $i^2 = -1$ . De igual manera, las soluciones discretas para  $v$  y  $w$  deben ser reemplazadas por correspondientes modos discretos. La sustitución de (4.27) en el operador en DF (4.24) conduce a

$$\begin{aligned} d_x u_{ij}^m &= \left[ \frac{1}{24} u_{i-\frac{3}{2}}^m - \frac{9}{8} u_{i-\frac{1}{2}}^m + \frac{9}{8} u_{i+\frac{1}{2}}^m - \frac{1}{24} u_{i+\frac{3}{2}}^m \right] \\ &= \left[ \frac{1}{24} e^{-\frac{3}{2}i\theta_x} - \frac{9}{8} e^{-\frac{1}{2}i\theta_x} + \frac{9}{8} e^{\frac{1}{2}i\theta_x} - \frac{1}{24} e^{\frac{3}{2}i\theta_x} \right] u_{ij}^m \\ &= \left[ \frac{9}{4} \sin\left(\frac{\theta_x}{2}\right) - \frac{1}{12} \sin\left(\frac{3}{2}\theta_x\right) \right] u_{ij}^m \\ &= \left[ \frac{9}{4} \text{sen} \frac{\theta_x}{2} - \frac{1}{4} \text{sen} \frac{\theta_x}{2} + \frac{1}{3} \text{sen}^3 \frac{\theta_x}{2} \right] u_{ij}^m \\ &= \left[ 2 \text{sen} \frac{\theta_x}{2} + \frac{1}{3} \text{sen}^3 \frac{\theta_x}{2} \right] u_{ij}^m = \frac{1}{3} \text{sen} \frac{\theta_x}{2} \left( \text{sen}^2 \frac{\theta_x}{2} + 6 \right) u_{ij}^m. \quad (4.28) \end{aligned}$$

Un resultado semejante se obtiene para  $d_y u_{ij}$ . Estos resultados simplificados para  $d_x u_{ij}$  y  $d_y u_{ij}$  acorde a (4.28) serán sustituidos en las dos etapas del esquema ADI-PR centro distribuido. Sin embargo, previamente se reescribe la primera etapa del esquema en términos de estos operadores en DF, en la forma  $A\bar{U} = BU^m$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\Delta t}{2} d_x & 0 \\ \frac{\Delta t}{2} d_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\Delta t}{2} d_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\Delta t}{2} d_y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^m \\ v^m \\ w^m \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

De manera análoga, la segunda etapa de este esquema se puede expresar como  $CU^{m+1} = D\bar{U}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\Delta t}{2}d_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\Delta t}{2}d_y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}^{m+1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta t}{2}d_x & 0 \\ -\frac{\Delta t}{2}d_x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

De este modo, el método puede escribirse como un esquema de un solo paso  $U^{m+1} = GU^m$ , para la matriz de amplificación

$$G = C^{-1}DA^{-1}B. \quad (4.31)$$

Conviene expresar  $G$  en términos de las variables angulares  $\theta_x$  y  $\theta_y$ . Para esto, la simplificación resultante (4.28) se introduce en las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , y  $D$  a través de las nuevas variables

$$\delta_x = \frac{\Delta t}{h} \operatorname{sen} \left( \frac{\theta_x}{2} \right) \left[ 1 + \frac{1}{6} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\theta_x}{2} \right) \right] \quad (4.32)$$

$$\delta_y = \frac{\Delta t}{h} \operatorname{sen} \left( \frac{\theta_y}{2} \right) \left[ 1 + \frac{1}{6} \operatorname{sen}^2 \left( \frac{\theta_y}{2} \right) \right] \quad (4.33)$$

$$(4.34)$$

siendo  $\lambda = \frac{\Delta t}{h}$  el parámetro  $CFL$ . A la vez, esta sustitución revela que  $A^{-1} = \frac{D}{(1+\delta_x^2)}$  y  $C^{-1} = \frac{B}{(1+\delta_y^2)}$ , por lo que

$$G = \frac{BDDDB}{\rho}, \quad (4.35)$$

para  $\rho = (1 + \delta_x^2)(1 + \delta_y^2)$ . Finalmente, la forma general de la matriz de amplificación viene dada por

$$G = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} 1 - \delta_x^2 - \delta_y^2 & -2i\delta_x & -i\delta_y(2 - \delta_x^2) \\ -2i\delta_x & 1 - \delta_x^2 & -2\delta_x\delta_y \\ -i\delta_y(2 - \delta_x^2) & -2\delta_x\delta_y & 1 + \delta_x^2\delta_y^2 - \delta_y^2 \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Semejante al caso del método nodal, las condiciones sobre la estabilidad de este

esquema centro distribuido pueden ahora establecerse sobre la norma y los autovalores de  $G$ , haciendo uso de (A.32) y el teorema A.3, respectivamente. Note que en el caso  $\lambda = 0$ , se tiene que  $\delta_x = \delta_y = 0$  y entonces  $G$  se reduce a la matriz identidad, y el esquema resulta estable. Sin embargo, para  $\lambda > 0$  se tiene que  $|\delta_x| \leq \frac{7}{6}$ , por lo que la estabilidad del esquema debe estudiarse en el intervalo bidimensional

$$-\frac{7}{6} \leq \delta_x, \delta_y \leq \frac{7}{6}. \quad (4.37)$$

No es trivial acotar la norma y/o el radio espectral de  $G$  en el rango (4.37) en forma analítica, y aún los resultados dados por una herramienta de cálculo simbólico como MAPLE no son sencillos de interpretar. Así que se ha optado por una exploración numérica y las figuras dadas a continuación presentan  $\|G\|_\infty$  y  $\rho(G)$  para los tres valores  $CFL$  representativos  $\lambda = 1, 5, 50$ , tomados en el caso nodal. Note que  $\rho(G) \leq 1$  para estos valores de  $\lambda$ , e igual cota para el radio espectral fue observada para múltiples valores del  $CFL$  no ilustrados, lo que lleva a concluir que el esquema en cuestión es incondicionalmente estable. De igual manera se tiene que  $\|G\|_\infty \leq 1,6 \dots$  en los 3 casos considerados de  $\lambda$ , y a continuación se estudia empíricamente si la norma de  $G^m$  permanece acotada a medida que  $m \rightarrow \infty$ . La figura 4.8 ilustra los máximos valores de  $\|G^m\|_\infty$  para los casos de  $m = 1, 2, 4, 8, \dots, 4096$ , al considerar estos 3 valores de referencia para el  $CFL$ . El hecho que  $\|G^m\|_\infty$  decrece monótonamente para valores grandes de  $m$  por encima de 100, permite intuir la estabilidad incondicional de este esquema ante valores arbitrarios de  $\lambda$ .

## 4.5. Comentarios acerca de la convergencia de los esquemas DFC

Al revisar la formulación de ambos esquemas DFC, tanto nodal en la sección 4.1.1 como centro distribuido en la sección 4.2, no es difícil concluir que el error local de truncamiento es orden  $O(h^4, \Delta t^2)$  en ambos casos. De esta manera, estos esquemas son consistentes con la ecuación de ondas (2.1) de acuerdo la definición A.2. Por otro lado,

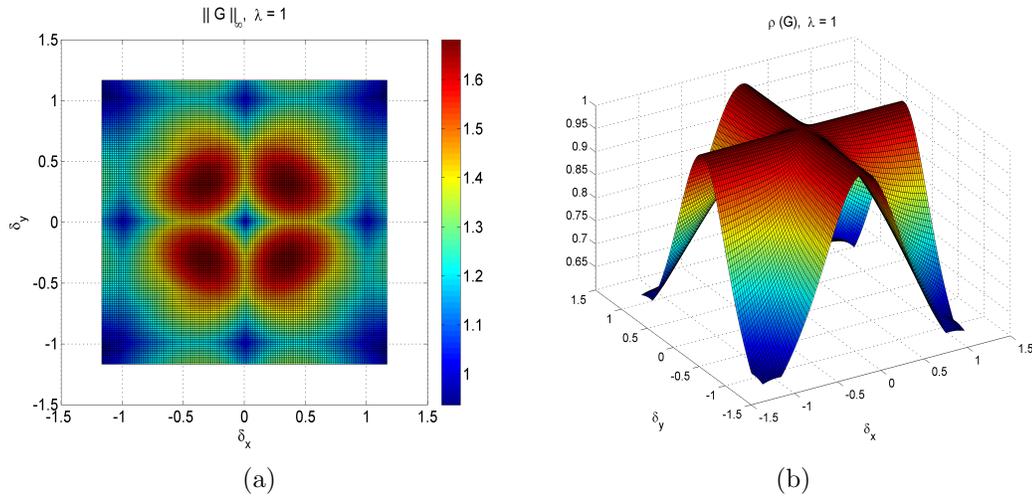


Figura 4.5: Norma infinita y radio espectral de la matriz  $G$  con  $\lambda = 1$ , caso DFC centro distribuido.

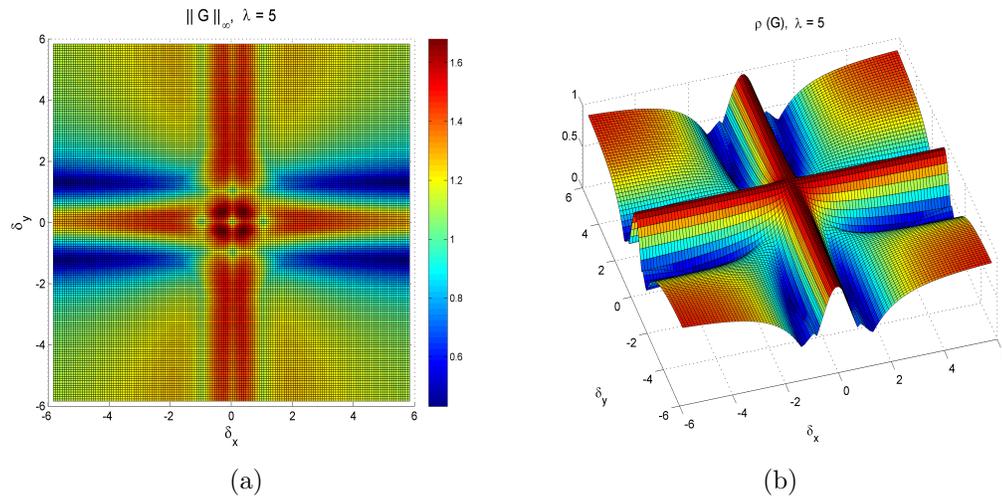


Figura 4.6: Norma infinita y radio espectral de la matriz  $G$  con  $\lambda = 5$ , caso DFC centro distribuido.

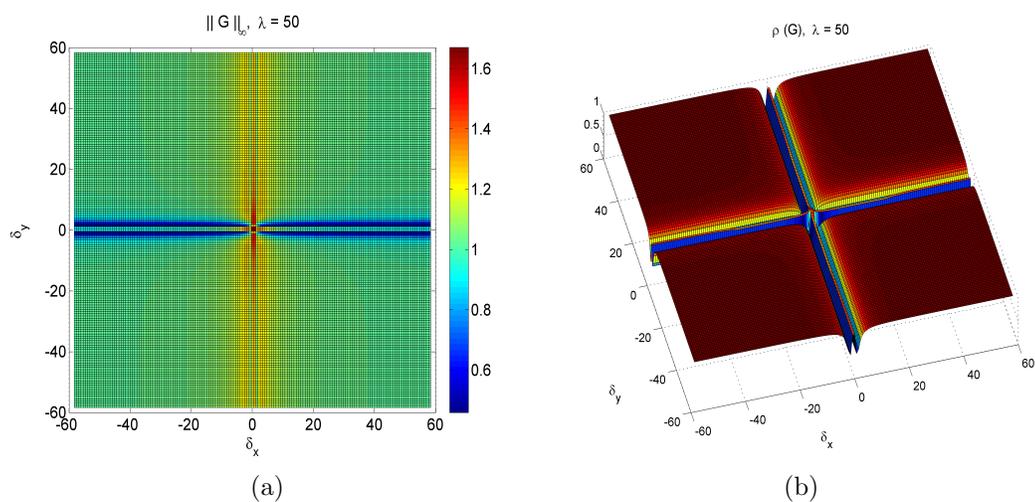


Figura 4.7: Norma infinita y radio espectral de la matriz  $G$  con  $\lambda = 50$ , caso DFC centro distribuido.

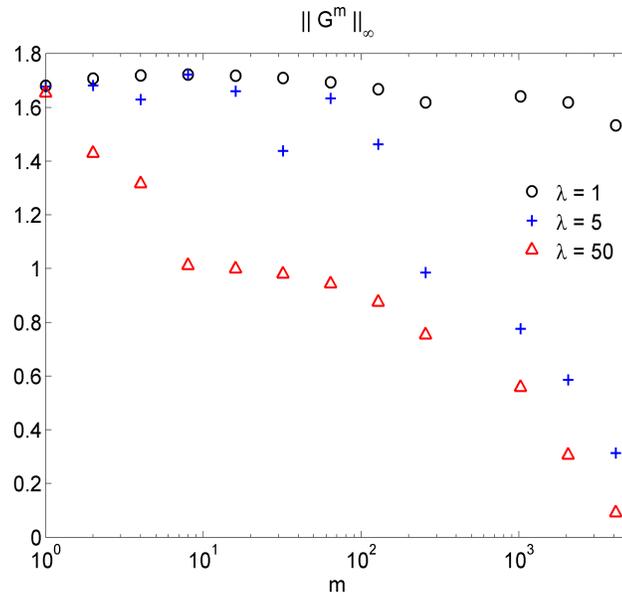


Figura 4.8: Norma infinita de  $G^m$  para el método centro distribuido en los casos  $\lambda = 1, 5, 50$ .

las secciones anteriores han sido dedicadas a justificar la estabilidad tipo Von Neumann de estos métodos DFC, y de acuerdo al teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer A.1, se concluye su convergencia ante el refinamiento de malla.

# Capítulo 5

## Complejidad algorítmica, experimentos numéricos y análisis de resultados

En este capítulo se presentan los resultados numéricos de los métodos en DFC formulados en el capítulo 4. Los casos de estudio corresponden a dos problemas de propagación acústica en medios rectangulares sujetos a condiciones de borde tipo Dirichlet con soluciones exactas conocidas. El análisis de resultados se centra en la precisión y convergencia experimental alcanzados por ambos métodos, y además incluye una comparación de los tiempos de cómputo. Adicionalmente, se presenta un estudio de la complejidad algorítmica de estos métodos DFC a nivel de cálculo, de gran utilidad para estos análisis y para futuras optimizaciones de código y/o implementaciones paralelas.

### 5.1. Complejidad operacional del método DFC nodal

El esquema DFC nodal se compone de las dos etapas ADI-PR iterativas descritas en la sección 4.1.1, cuyo objetivo es calcular  $[\bar{U}, V, W]^{m+1}$  a partir de las soluciones

discretas previas en el instante de cálculo  $t = m\Delta t$ . A continuación se reescriben estas etapas ADI al agrupar los términos conocidos en  $t = m\Delta t$ . En el caso de la primera etapa, los términos en el lado derecho de (4.7) permiten definir las matrices

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \bar{\mathbf{U}}^m \bar{\mathbf{P}}^T - \frac{\Delta t}{2} (\bar{\mathbf{P}}^{-1} \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{W}^m \bar{\mathbf{P}}^T) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{V}^m \mathbf{P}^T\end{aligned}$$

por lo que (4.8) es equivalente a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}^* & \mathbf{V}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}^T & \frac{\Delta t}{2} \bar{\mathbf{Q}}^T \\ \frac{\Delta t}{2} \bar{\mathbf{Q}}^T & \mathbf{P}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Las filas de las matrices intermedias se calculan iterativamente, aplicando en cada paso el algoritmo de Thomas que explota la tridiagonalidad de  $\mathbf{P}$  y  $\bar{\mathbf{P}}$

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{k+1}^* \bar{\mathbf{P}}^T = \mathbf{A} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{V}_k^* \bar{\mathbf{Q}}^T \\ \mathbf{V}_{k+1}^* \mathbf{P}^T = \mathbf{B} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{U}_{k+1}^* \bar{\mathbf{Q}}^T \end{cases}, \quad \mathbf{V}_0^* = \mathbf{V}^m \quad (5.2)$$

hasta que ( $\|\mathbf{U}_{k+1}^* - \mathbf{U}_k^*\| < \varepsilon$ ) y ( $\|\mathbf{V}_{k+1}^* - \mathbf{V}_k^*\| < \varepsilon$ ). Note que esta última ecuación matricial agrupa las ecuaciones (4.8), escrita para cada fila. De manera similar se escribe la segunda etapa ADI-PR que permite calcular  $\mathbf{U}^{m+1}$  y  $\mathbf{W}^{m+1}$  iterativamente columna a columna, mientras que  $\mathbf{V}^{m+1}$  se calcula de forma explícita

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{P}} \mathbf{U}_{k+1}^{m+1} &= \mathbf{C} - \frac{\Delta t}{2} \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{W}_k^{m+1} \\ \mathbf{P}^T \mathbf{W}_{k+1}^{m+1} &= \mathbf{D} - \frac{\Delta t}{2} \bar{\mathbf{Q}}^T \mathbf{U}_{k+1}^{m+1} \end{cases}, \quad \mathbf{W}_0^{m+1} = \mathbf{W}^m \quad (5.3)$$

con

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \bar{\mathbf{P}} \mathbf{U}^* - \frac{\Delta t}{2} (\bar{\mathbf{P}} \mathbf{V}^* \bar{\mathbf{Q}}^T (\bar{\mathbf{P}}^T)^{-1}) \\ \mathbf{D} &= \mathbf{P} \mathbf{W}^*.\end{aligned}$$

Este método nodal se implementa en términos de los siguientes dos pseudo-códigos, donde el algoritmo 1 es el principal y responsable del cálculo explícito de  $\mathbf{W}^*$  y  $\mathbf{V}^{m+1}$ , así como de las matrices  $A$  y  $C$ . Las etapas ADI son entonces implementadas por el algoritmo 2. Estos dos algoritmos requieren de los siguientes parámetros y constantes:

- $N$ : Número de nodos en cada dirección espacial del dominio  $[0, 1] \times [0, 1]$ .
- $cfl$ : Parámetro de estabilidad para ajustar el paso de tiempo. El máximo valor de  $cfl$  es 0,915 en el caso del método nodal, y se reduce a 0,815 para el método DFC centro distribuido.
- $\varepsilon$ : Tolerancia exigida para la convergencia de los ciclos ADI. El valor numérico de  $\varepsilon$  es  $10^{-6}$ .
- $k_{max}$ : Máximo número de iteraciones de cada ciclo ADI. El valor de  $k_{max}$  es 6.

A nivel algorítmico se emplea la siguiente notación:

- $\bar{\mathbf{X}}$ : es la matriz reducida a partir de la matriz  $\mathbf{X}$  de acuerdo a las formulaciones de los métodos DFC en las secciones (3) y (4.2).
- $:$  denota todos los elementos de una matriz en la dirección indicada.
- $\bar{\cdot}$  denota los elementos 2, 3, ... hasta  $(N-1)$  de una matriz en la dirección indicada.

La complejidad operacional es función de la densidad de la malla  $N$ , siendo  $N$  el tamaño de los vectores y matrices DFC involucrados ( $N-2 \approx N$ , para  $N$  grande). El número total de iteraciones temporales  $N_{iter} = \frac{T_{sim} * (N-1)}{cfl}$ , donde  $T_{sim}$  es el tiempo total de simulación.

Para realizar el análisis de complejidad, y obtener el tiempo de cálculo requerido, se consideran las siguientes operaciones matriciales:

- Suma y resta de matrices densas  $T_+$  con complejidad  $O(N^2)$ .
- Multiplicación de matriz densa por un escalar  $T_\lambda$  con complejidad  $O(N^2)$ .
- Multiplicación de dos matrices dispersas (en banda)  $T_{SS}$  con complejidad  $O(N)$ .

---

**Algoritmo 1** DFC Nodal
 

---

**Entrada:**  $\mathbf{U}_o \in \mathbb{R}^{N \times N}, \Delta t > 0$ 
**Salida:**  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 

```

1: Procedimiento NODAL( $\mathbf{U}_o, \mathbf{N}, \text{cfl}, \text{Tsim}$ )
2:    $\Delta t \leftarrow \frac{\text{cfl}}{N-1}$ 
3:    $\mathbf{U}^0 \leftarrow \mathbf{U}_o$  ▷ Inicialización
4:    $\mathbf{V}^0 \leftarrow 0$ 
5:    $\mathbf{W}^0 \leftarrow 0$ 
6:    $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{Q}}) \leftarrow \text{OPERADORES-DFC-NODAL}(N)$ 
7:   Para  $m \in 0 \dots \frac{\text{Tsim}}{\Delta t}$  hacer
8:      $\mathbf{A} \leftarrow \bar{\mathbf{P}} \setminus (\mathbf{Q}(\mathbf{W}^m(:, \bar{\cdot})\mathbf{P}^T))$  ▷ Cálculo de  $A$ 
9:      $\mathbf{W}^*(\bar{\cdot}, \bar{\cdot}) \leftarrow \mathbf{W}^m(\bar{\cdot}, \bar{\cdot}) - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}\mathbf{U}^m(\bar{\cdot}, \bar{\cdot})$ 
10:     $(\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{V}})^* \leftarrow \text{ADI-FILAS}(\mathbf{U}^m, \mathbf{V}^m, \mathbf{A})$ 
11:     $\mathbf{C} \leftarrow (\bar{\mathbf{P}}\mathbf{V}^*(\bar{\cdot}, \bar{\cdot})\bar{\mathbf{Q}}^T) \setminus \bar{\mathbf{P}}^T$  ▷ Cálculo de  $C$ 
12:     $\mathbf{V}^{m+1}(\bar{\cdot}, \bar{\cdot}) \leftarrow \mathbf{V}^*(\bar{\cdot}, \bar{\cdot}) - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{U}^*(\bar{\cdot}, \bar{\cdot})\bar{\mathbf{Q}}^T/\bar{\mathbf{P}}^T$ 
13:     $(\bar{\mathbf{U}}^{m+1}, \bar{\mathbf{W}}^{m+1}) \leftarrow \text{ADI-COLUMNAS}(\mathbf{U}^*, \mathbf{W}^*, \mathbf{C})$ 
14:     $t \leftarrow t + \Delta t$ 
15:  fin Para
16:  Devuelve  $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ 
17: fin Procedimiento

```

---

- Multiplicación de una matriz dispersa por una matriz densa  $T_{\times S}$  con complejidad  $O(N^2)$ .
- Solución de  $N$  sistemas de ecuaciones tridiagonales usando el algoritmo de Thomas ( $T_{SEL}$ ) con complejidad  $O(N^2)$ .
- Cálculo de la norma Frobenius de una matriz densa ( $T_N$ ) con complejidad  $O(N^2)$ .

Adicionalmente, se denota al número total de iteraciones en una simulación de  $Tsim$  unidades de tiempo como  $I_{\Delta t} = \frac{Tsim * (N-1)}{cfl}$ .

La tabla 5.1 muestra la cantidad de operaciones requeridas por el método DFC nodal. El coste operacional viene determinado por los ciclos del cálculo ADI, de orden polinomial y cuyo término principal sería  $T_{NODAL} \approx 32 * I_{\Delta t} * k_{MAX} * N^2 \approx O(N^3)$ .

---

**Algoritmo 2** ADI-etapas
 

---

**Entrada:**  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(N-2) \times (N-2)}$ ,  $k > 0$ ,  $\varepsilon > 0$

**Salida:**  $\mathbf{U}^* \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{V}^* \in \mathbb{R}^{N \times N}$

- 1: **Procedimiento** ADI-FILAS( $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{A}$ )
  - 2:    $\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{U}(\bar{:, \bar{}}) \bar{\mathbf{P}}^T - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A}(1 \dots N - 2, :)$
  - 3:    $\mathbf{B} \leftarrow \mathbf{V}(\bar{:, \bar{}}) \mathbf{P}^T$
  - 4:    $\mathbf{U}_k \leftarrow \mathbf{U}(\bar{:, \bar{}})$
  - 5:    $\mathbf{V}_k \leftarrow \mathbf{V}(\bar{:, \bar{}})$
  - 6:   **Repetir** ▷ Aplicación del algoritmo de Thomas
  - 7:     $\mathbf{U}_{k+1} \leftarrow \mathbf{A} - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{V}_k \bar{\mathbf{Q}}^T) / \bar{\mathbf{P}}^T$
  - 8:     $\mathbf{V}_{k+1} \leftarrow \mathbf{B} - \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{U}_{k+1} \mathbf{Q}^T) / \mathbf{P}^T$
  - 9:     $test \leftarrow \|\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k\| + \|\mathbf{V}_{k+1} - \mathbf{V}_k\|$
  - 10:    $\mathbf{U}_k \leftarrow \mathbf{U}_{k+1}$
  - 11:    $\mathbf{V}_k \leftarrow \mathbf{V}_{k+1}$
  - 12:    $k \leftarrow k + 1$
  - 13:   **hasta que**  $((test \leq \varepsilon) \parallel (k \geq k_{max}))$  ▷ Criterio de Parada
  - 14:   **Devuelve**  $\mathbf{U}^* \leftarrow \mathbf{U}_k$ ,  $\mathbf{V}^* \leftarrow \mathbf{V}_k$
  - 15: **fin Procedimiento**
  - Entrada:**  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(N-2) \times (N-2)}$ ,  $k > 0$ ,  $\varepsilon > 0$
  - Salida:**  $\mathbf{U}^{m+1} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{W}^{m+1} \in \mathbb{R}^{N \times N}$
  - 16: **Procedimiento** ADI-COLUMNAS( $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{C}$ )
  - 17:    $\mathbf{C} \leftarrow \bar{\mathbf{P}} \mathbf{U}(\bar{:, \bar{}}) - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}(:, 1 \dots N - 2)$
  - 18:    $\mathbf{D} \leftarrow \bar{\mathbf{P}} \mathbf{W}(:, \bar{:})$
  - 19:    $\mathbf{U}_k \leftarrow \mathbf{U}(\bar{:, \bar{}})$
  - 20:    $\mathbf{W}_k \leftarrow \mathbf{W}(:, \bar{:})$
  - 21:   **Repetir** ▷ Aplicación del algoritmo de Thomas
  - 22:     $\mathbf{U}_{k+1} \leftarrow \bar{\mathbf{P}} \setminus (\mathbf{C} - \frac{\Delta t}{2} \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{W}_k)$
  - 23:     $\mathbf{W}_{k+1} \leftarrow \mathbf{P} \setminus (\mathbf{D} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{Q} \mathbf{U}_{k+1})$
  - 24:     $test \leftarrow \|\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k\| + \|\mathbf{W}_{k+1} - \mathbf{W}_k\|$
  - 25:     $\mathbf{U}_k \leftarrow \mathbf{U}_{k+1}$
  - 26:     $\mathbf{W}_k \leftarrow \mathbf{W}_{k+1}$
  - 27:     $k \leftarrow k + 1$
  - 28:    **hasta que**  $((test \leq \varepsilon) \parallel (k \geq k_{max}))$  ▷ Criterio de Parada
  - 29:    **Devuelve**  $\mathbf{U}^{m+1} \leftarrow \mathbf{U}_k$ ,  $\mathbf{W}^{m+1} \leftarrow \mathbf{W}_k$
  - 30: **fin Procedimiento**
-

Cuadro 5.1: Cantidad total de operaciones requeridas por el método DFC nodal.

Sección	Máximo iteraciones	$T_{=}$	$T_{+}$	$T_{\lambda}$	$T_{SS}$	$T_{\times S}$	$T_{SEL}$	$T_N$
Inicialización	1	5						
Cálculo de $A$	$I_{\Delta t}$	1				2	1	
Cálculo de $W^*$	$I_{\Delta t}$	1	1	1		1	1	
ADI inicialización	$I_{\Delta t}$	4	1	1		2		
ADI-filas	$I_{\Delta t} * k_{MAX}$	4	4	2		2	2	2
Cálculo de $C$	$I_{\Delta t}$	1				2	1	
Cálculo de $V^{m+1}$	$I_{\Delta t}$	1	1	1		1	1	
ADI inicialización	$I_{\Delta t}$	4	1	1		2		
ADI-columnas	$I_{\Delta t} * k_{MAX}$	4	4	2		2	2	2

## 5.2. Complejidad operacional del método DFC centro distribuido

El análisis de complejidad de este esquema usa las mismas definiciones y notaciones de coste operacional del método anterior, así como sus parámetros y constantes. Los algoritmos asociados a la implementación de este método centro distribuido corresponden con los algoritmos 3 y 4.

---

### Algoritmo 3 DFC centro distribuido

---

**Entrada:**  $\mathbf{U}_o \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ ,  $\Delta t > 0$

**Salida:**  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times N}$ ,  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times (N+1)}$

```

1: Procedimiento CENTRO DISTRIBUIDO( $\mathbf{U}_o, \mathbf{N}, \text{cfl}, \text{Tsim}$ )
2:    $\Delta t \leftarrow \frac{\text{cfl}}{N-1}$ 
3:    $\mathbf{U}^0 \leftarrow \mathbf{U}_o$  ▷ Inicialización
4:    $\mathbf{V}^0 \leftarrow \mathbf{0}$ 
5:    $\mathbf{W}^0 \leftarrow \mathbf{0}$ 
6:    $(\mathbf{D}_4, \mathbf{G}_4) \leftarrow \text{OPERADORES-DFC-CENTRO}(N)$ 
7:   Para  $m \in 0 \dots \frac{\text{Tsim}}{\Delta t}$  hacer
8:      $\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{D}_4 * \mathbf{W}^m(:, \cdot)$  ▷ Cálculo de  $A$ 
9:      $\mathbf{W}^*(\cdot, \cdot) \leftarrow \mathbf{W}^m(\cdot, \cdot) - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{G}_4 \mathbf{U}^m(\cdot, \cdot)$ 
10:     $(\bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{V}})^* \leftarrow \text{ADI-FILAS}(\mathbf{U}^m, \mathbf{V}^m, \mathbf{A})$ 
11:     $\mathbf{C} \leftarrow \mathbf{V}^*(\cdot, \cdot) \mathbf{D}_4^T$  ▷ Cálculo de  $C$ 
12:     $\mathbf{V}^{m+1}(\cdot, \cdot) \leftarrow \mathbf{V}^*(\cdot, \cdot) - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{U}^*(\cdot, \cdot) \mathbf{G}_4^T$ 
13:     $(\bar{\mathbf{U}}^{m+1}, \bar{\mathbf{W}}^{m+1}) \leftarrow \text{ADI-COLUMNAS}(\mathbf{U}^*, \mathbf{W}^*, \mathbf{C})$ 
14:     $t \leftarrow t + \Delta t$ 
15:  fin Para
16:  Devuelve  $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ 
17: fin Procedimiento

```

---

---

**Algoritmo 4** ADI-etapas
 

---

**Entrada:**  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times N}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ ,  $\mathbf{H}_D \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N}$ ,  $\mathbf{H}_G \in \mathbb{R}^{N \times (N+1)}$ ,  $k > 0, \varepsilon > 0$

**Salida:**  $\mathbf{U}^* \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ ,  $\mathbf{V}^* \in \mathbb{R}^{(N+1) \times N}$

- 1: **Procedimiento** ADI-FILAS( $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{A}$ )
  - 2:    $\mathbf{A} \leftarrow \mathbf{U}(\bar{:, \bar{:}}) - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{A}(1 \dots N - 2, :)$
  - 3:    $\mathbf{B} \leftarrow \mathbf{V}(\bar{:, :})$
  - 4:    $\mathbf{U}_k \leftarrow \mathbf{U}(\bar{:, \bar{:}})$
  - 5:    $\mathbf{V}_k \leftarrow \mathbf{V}(\bar{:, :})$
  - 6:   **Repetir** ▷ Aplicación del algoritmo de Thomas
  - 7:    $\mathbf{U}_{k+1} \leftarrow \mathbf{A} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{V}_k \mathbf{H}_D^T$
  - 8:    $\mathbf{V}_{k+1} \leftarrow \mathbf{B} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{U}_{k+1} \mathbf{H}_G^T$
  - 9:    $test \leftarrow \|\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k\| + \|\mathbf{V}_{k+1} - \mathbf{V}_k\|$
  - 10:    $\mathbf{U}_k \leftarrow \mathbf{U}_{k+1}$
  - 11:    $\mathbf{V}_k \leftarrow \mathbf{V}_{k+1}$
  - 12:    $k \leftarrow k + 1$
  - 13:   **hasta que**  $((test \leq \varepsilon) \parallel (k \geq k_{max}))$  ▷ Criterio de Parada
  - 14:   **Devuelve**  $\mathbf{U}^* \leftarrow \mathbf{U}_k, \mathbf{V}^* \leftarrow \mathbf{V}_k$
  - 15: **fin Procedimiento**
  - Entrada:**  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ ,  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times (N+1)}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ ,  $k > 0, \varepsilon > 0$
  - Salida:**  $\mathbf{U}^{m+1} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ ,  $\mathbf{W}^{m+1} \in \mathbb{R}^{N \times (N+1)}$
  - 16: **Procedimiento** ADI-COLUMNAS( $\mathbf{U}, \mathbf{W}, \mathbf{C}$ )
  - 17:    $\mathbf{C} \leftarrow \bar{\mathbf{P}} \mathbf{U}(\bar{:, \bar{:}}) - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{C}(:, 1 \dots N - 2)$
  - 18:    $\mathbf{D} \leftarrow \bar{\mathbf{P}} \mathbf{W}(:, \bar{:})$
  - 19:    $\mathbf{U}_k \leftarrow \mathbf{U}(\bar{:, \bar{:}})$
  - 20:    $\mathbf{W}_k \leftarrow \mathbf{W}(:, \bar{:})$
  - 21:   **Repetir** ▷ Aplicación del algoritmo de Thomas
  - 22:    $\mathbf{U}_{k+1} \leftarrow \mathbf{C} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H}_D \mathbf{W}_k$
  - 23:    $\mathbf{W}_{k+1} \leftarrow \mathbf{D} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{H}_G \mathbf{U}_k$
  - 24:    $test \leftarrow \|\mathbf{U}_{k+1} - \mathbf{U}_k\| + \|\mathbf{W}_{k+1} - \mathbf{W}_k\|$
  - 25:    $\mathbf{U}_k \leftarrow \mathbf{U}_{k+1}$
  - 26:    $\mathbf{W}_k \leftarrow \mathbf{W}_{k+1}$
  - 27:    $k \leftarrow k + 1$
  - 28:   **hasta que**  $((test \leq \varepsilon) \parallel (k \geq k_{max}))$  ▷ Criterio de Parada
  - 29:   **Devuelve**  $\mathbf{U}^{m+1} \leftarrow \mathbf{U}_k, \mathbf{W}^{m+1} \leftarrow \mathbf{W}_k$
  - 30: **fin Procedimiento**
-

La tabla 5.2 muestra la cantidad de operaciones requeridas por el método DFC centro distribuido. Igual que en el caso nodal, el coste operacional viene determinado por los cálculos de los dos ciclos ADI, de orden polinomial y cuyo término principal sería  $T_{CENTRO} \approx 28 * I_{\Delta t} * k_{MAX} * N^2 \approx O(N^3)$ . De esta manera, el número total de operaciones en este método es menor al requerido por el método nodal. Sin embargo, debido a que los SEL a resolver por el método nodal son tridiagonales y consumen  $O(N^2)$  operaciones en cada ciclo ADI, la complejidad de ambos métodos es la misma.

Cuadro 5.2: Cantidad total de operaciones requeridas por el método DFC centro distribuido.

Sección	Máximo iteraciones	$T_{=}$	$T_{+}$	$T_{\lambda}$	$T_{SS}$	$T_{\times S}$	$T_{SEL}$	$T_N$
Inicialización	1	5			2			
Cálculo de $A$	$I_{\Delta t}$	1				1		
Cálculo de $W^*$	$I_{\Delta t}$	1	1	1		1		
ADI inicialización	$I_{\Delta t}$	4	1	1				
ADI-filas	$I_{\Delta t} * k_{MAX}$	4	4	2		2		2
Cálculo de $C$	$I_{\Delta t}$	1				1		
Cálculo de $V^{m+1}$	$I_{\Delta t}$	1	1	1		1		
ADI inicialización	$I_{\Delta t}$	1	1	1				
ADI-columnas	$I_{\Delta t} * k_{MAX}$	4	4	2		2		2

### 5.3. Experimento 1: Condiciones de borde homogéneas

El modelo acústico (2.1), bajo las condiciones de borde homogéneas tipo Dirichlet, admite la siguiente solución analítica

$$u(x, y, t) = \text{sen} \left( \frac{2\pi x}{\Lambda} \right) \text{sen} \left( \frac{2\pi y}{\Lambda} \right) \cos \left( \frac{2\pi t}{T} \right). \quad (5.4)$$

Esta solución es armónica en espacio y tiempo. Siendo la velocidad de onda  $c = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$ , esta debe satisfacer la relación de dispersión  $c = \frac{\Lambda}{T}$ , donde  $\Lambda$  y  $T$  representan los

períodos espaciales y temporales de la solución exacta  $u$ , respectivamente. A continuación se plantea una familia de pruebas numéricas con igual número de celdas  $N$  en cada dirección coordenada de la malla, por lo que la resolución espacial está dada por el número de nodos que discretizan la longitud de onda  $\Lambda$ , esto es  $N\Lambda$ . Las mallas computacionales con  $N\Lambda < 4$  tienen una resolución pobre dado que el muestreo está cerca del límite teórico de Nyquist ( $N\Lambda = 2$ ). Tal simulación para un esquema basado en DF de cuarto orden de precisión puede ser calificada como una prueba fuerte dado lo gruesa de la malla. Por otro lado, aquellas mallas donde  $4 \leq N\Lambda \leq 8$  pueden ser llamadas “moderadamente resueltas”, mientras que cuando  $N\Lambda \geq 10$  la malla es densa en relación a la longitud de onda bajo propagación. Naturalmente, la precisión de la simulación debe aumentar a medida que la malla se refine, y pase de ser gruesa a muy densa. Estos criterios sobre la resolución de la malla son ampliamente aceptados en la simulación de ondas sísmicas ([14], [17], [25], [63]). Note que para un mismo número de celdas  $N$ , la malla del método DFC centro distribuido tiene 1 nodo adicional, lo cual es despreciable al cuantificar la resolución para  $N$  grande. Para brindar una referencia a la precisión y tiempo de cómputo de los esquemas DFC, para este experimento también se presentan los resultados del método centro distribuido con integración Leap-frog formulado en la sección 2.4.2, bajo la parametrización mimética dada en (3.20).

Específicamente, en este experimento se tomó  $\Lambda = \frac{1}{4}$  y se realizaron nueve simulaciones con cada uno de los tres esquemas numéricos mencionados, usando mallas con el mismo número de celdas  $N = 8, 16, 32, 48, 64, 96, 128, 192, 256$ . De esta manera, la resolución de la malla mejora progresivamente con  $N\Lambda = 2, 4, 8, 12, 16, \dots$ . El paso de tiempo  $\Delta t$  se toma de acuerdo a la cota de estabilidad de Courant-Friedrichs-Lewy  $cfl^{max}$ , donde  $\Delta t = cfl^{max}(h/c)$  y se considera  $c$  constante en todas estas pruebas. Este límite  $cfl^{max}$  varía para cada método numérico y mediante una experimentación exhaustiva se han obtenido los valores indicados en la tabla 5.3. En este análisis ex-

ploratorio, se usa como referencia para los esquemas centro distribuidos la condición de Von Neumann conocida para el modelado de la propagación de ondas elásticas en dominios 2-D homogéneos y no acotados  $h^{-1}c^P \Delta t \leq (\sqrt{2} \sum_{k=1}^n |C_k|)^{-1} \sim 0,606$  (véase, por ejemplo, [14], [54]). Aquí,  $C_k$  denota los coeficientes del estencil para la diferenciación centrada en espacio, con una precisión  $O(h^{2n})$ , donde  $c^P$  denota la velocidad de la onda compresional. Estos coeficientes corresponden al estencil interior encajado de las matrices  $G_4$  y  $D_4$ .

Las figuras 5.1a y 5.1b muestran los errores absolutos en norma de Frobenius de las soluciones numéricas calculadas por cada esquema, cuando el tiempo de simulación varía de  $Tsim = 5T$  a  $Tsim = 20T$ , respectivamente. Estos experimentos permiten evaluar el comportamiento de la precisión de la solución y la convergencia heurística cuando los esquemas numéricos ejecutan simulaciones por centenas de iteraciones ( $\sim 500$ ) y pocos miles de iteraciones ( $\sim 2,000$ ). Una comparación cualitativa de estas figuras indica que los errores de ambos esquemas DFC son más dispersos en mallas muy densas ( $N \geq 48$ ), y de menor magnitud que los producidos por el esquema basado en Leap-frog. Solamente en mallas con resolución pobre o moderada ( $N < 48$ ), la precisión lograda por estos tres esquemas es comparable, con cierta ganancia mostrada por ambos métodos centro distribuidos. Por ejemplo, los errores dados por estos métodos son cerca del 30 % de los observados en las soluciones DFC nodales cuando  $N = 16$ . Esta ventaja en precisión es una consecuencia de la diferenciación encajada que reduce a la mitad el espaciado de la malla en comparación con una fórmula DF nodal. Solamente el esquema mimético en DFC mantiene esta superioridad en precisión sobre las mallas de alta resolución debido a su rápida convergencia. En las simulaciones sobre mallas más finas ( $N = 256$ ), este esquema proporciona errores que son sólo el 5 % y el 2 % de las discrepancias observadas en las soluciones similares del DFC nodal en ambas pruebas.

Se ha realizado un ajuste por mínimos cuadrados lineales de los datos de error

representados en las figuras 5.1a y 5.1b en escala logarítmica, para estimar las tasas de convergencia experimentales de cada esquema ante refinamiento de la malla. Estos resultados se listan en la tabla 5.3. Ambos esquemas compactos muestran una convergencia alrededor del cuarto orden en comparación con el esquema Leap-frog que solamente muestra una precisión de segundo orden. Estos resultados indican que la magnitud de los errores de discretización en tiempo derivados de la integración de Crank-Nicolson y la descomposición ADI-PR, no superan los errores causados por la diferenciación espacial basada en operadores DFC de cuarto orden. Por otro lado, la técnica Leap-frog no es capaz de preservar la precisión de la discretización centro distribuida en espacio.

Cuadro 5.3: Límites  $CFL$  de estabilidad, rango del total de iteraciones, y tasas de convergencia estimadas en las simulaciones numéricas.

Esquema	$cfl^{max}$	Tasas de converg. ( $Tsim = 5T$ )	Tasas de converg. ( $Tsim = 20T$ )
DFC nodal	0.915	4.04	3.80
DFC centro distribuido	0.815	4.71	4.40
Leap-frog centro distrib.	0.450	1.97	1.95

La figura 5.2 muestra la tasa porcentual de los tiempos de cálculo de ambas simulaciones DFC. Esto es, los tiempos observados en el método nodal divididos por sus correspondientes (para igual  $N$ ) registrados en el método centro distribuido, y luego escalados a 100 %. Omitiendo el registro anómalo para la malla con más grosor ( $N = 8$ ), se observa que el primer esquema requiere de tiempos de ejecución entre cuatro y cinco veces mayores a los tiempos de cálculo invertidos por el segundo esquema. Aun cuando las simulaciones del esquema DFC nodal utilizan su mayor límite  $cfl^{max}$ , y por lo tanto requieren un menor número de iteraciones para alcanzar el mismo tiempo de simulación  $Tsim$ , la solución de los sistemas lineales tridiagonales anidados amerita de tiempos de ejecución mayores. Estos resultados son consistentes con los análisis presentados en las secciones anteriores, pues ambos esquemas presentan la misma complejidad algorítmica  $O(N^3)$ . Así, el cociente de sus tiempos de ejecución

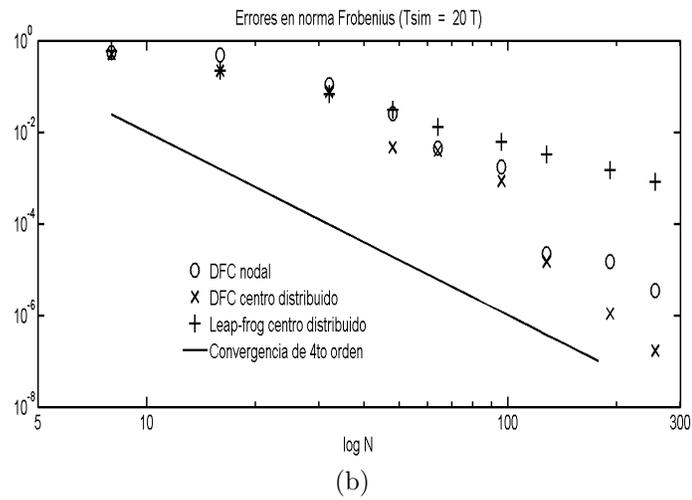
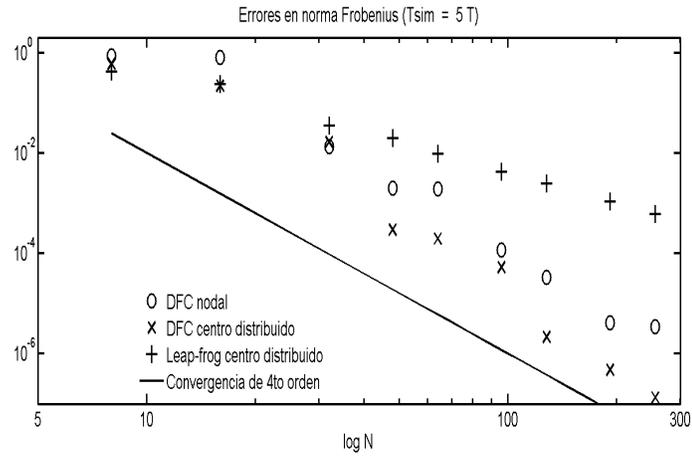


Figura 5.1: Comparación de los errores absolutos en norma de Frobenius de las soluciones numéricas calculadas por cada esquema cuando el tiempo de simulación es: (a)  $T_{sim} = 5T$ , (b)  $T_{sim} = 20T$ .

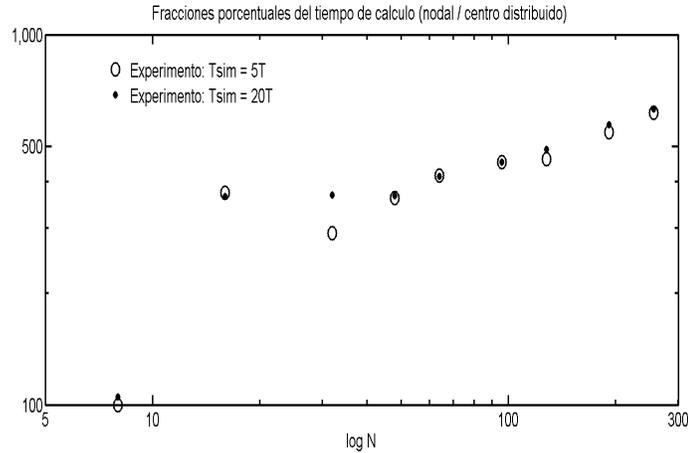


Figura 5.2: Cociente de los tiempos de cómputo de las simulaciones DFC nodales divididas por los tiempos de ejecución correspondientes de las simulaciones DFC centro distribuidas, cuando  $Tsim$  varía de  $5T$  a  $20T$ .

debe tender a una constante a medida que  $N$  crece.

Finalmente, los tiempos de ejecución del esquema Leap-frog centro distribuido no superan el 5% de los tiempos de cálculo registrados por su homólogo DFC, en ambas pruebas  $Tsim = 5T$  a  $Tsim = 20T$ , cuando la malla es al menos moderadamente fina ( $N \geq 32$ ).

## 5.4. Experimento 2: Condiciones de borde heterogéneas

En este segundo experimento numérico, las condiciones iniciales y de borde del modelo acústico (2.1) son tomadas de tal manera que su solución única corresponde a

$$u(x, y, t) = \left[ C(x^k - (1-x)^k + y^k - (1-y)^k) + \sin\left(\frac{2\pi x}{\Lambda}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{\Lambda}\right) \right] \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right). \quad (5.5)$$

En este caso, resultan heterogéneas tanto la EDP en (2.1), esto es  $f \neq 0$ , como las condiciones de contorno tipo Dirichlet. Note que la solución continua  $u$  es armónica en el tiempo, igual que en el experimento 1. Sin embargo,  $u$  presenta una componente

polinomial en espacio que puede conducir a problemas de capa límite de acuerdo a los valores considerados para los parametros  $C$  y  $k$ . Estas dificultades opcionales, tanto a nivel de implementación como de resolución numérica, hacen de este experimento 2 un problema más complejo e interesante que el anterior.

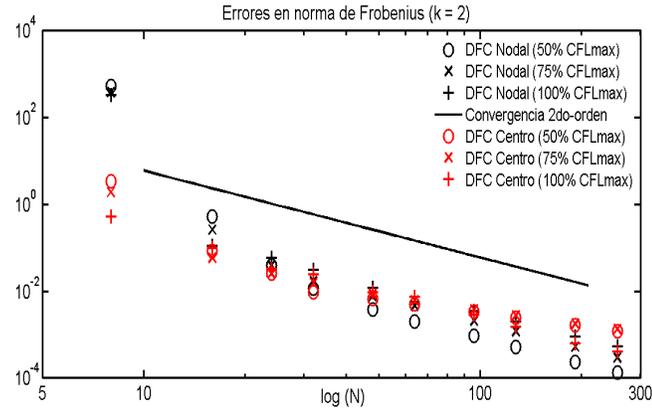
Para permitir una comparación inmediata con los resultados del experimento 1, en estas nuevas simulaciones se mantiene el valor del parámetro  $\Lambda = \frac{1}{4}$ , y se efectúan nueve ejecuciones de cada esquema numérico DFC para  $N = 8, 16, 32, 48, 64, 96, 128, 192, 256$ . Sin embargo, la escasa precisión del método DFC nodal en el caso de  $N = 8$  conduce a ejecutar una simulación de cada esquema para  $N = 24$ . Por simplicidad, sobre estas mallas se planteó una primera etapa de experimentación exhaustiva al asignar a  $k$  cada uno de los enteros  $2, 3, \dots, 10$ , y tomar  $C = k$ . Estas pruebas confirmaron los valores  $cfl^{max}$  dados en la tabla 5.3 como límites para la estabilidad empírica de ambos métodos DFC. Como primer objetivo en estas nuevas simulaciones, se plantea estudiar detalladamente la dependencia de la precisión y la convergencia experimental en el paso de tiempo  $\Delta t$ . Así se usan tres valores de referencia para el  $CFL$ , que corresponden al 50%, 75%, y 100% del límite  $cfl^{max}$  inherente a cada método DFC. Esto se traduce en que para un mismo mallado dado por el número de celdas  $N$ , se efectúan tres simulaciones del mismo esquema al variar el  $\Delta t$  en estas tres proporciones del  $cfl^{max}$ . Adicionalmente, la rigidez del problema de capa límite es la principal fuente de dificultad a evaluar en este experimento. En estas nuevas simulaciones, el parámetro  $k$  toma los valores  $2, 4, y 8$ , que resultan representativos del comportamiento de ambos esquemas en este problema. Para simplificar la parametrización se considera nuevamente  $C = k$ .

Las figuras 5.3 presentan los errores absolutos en norma de Frobenius de las soluciones numéricas calculadas por ambos esquemas DFC ante la variación de  $k$  y  $cfl$  mencionada anteriormente. Como primer comentario comparativo, se consideran las simulaciones de ambos métodos efectuadas al límite del  $cfl^{max}$ , para los 3 casos del

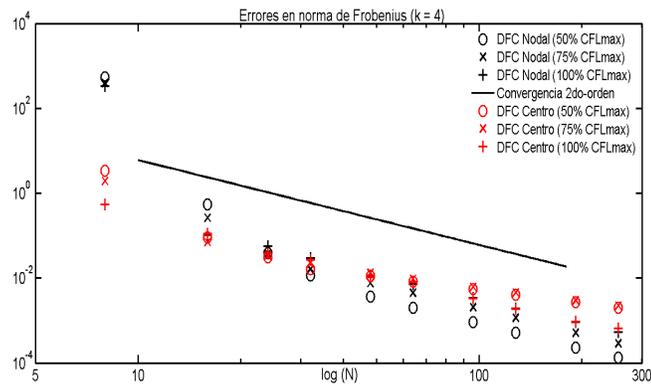
parámetro  $k = 2, 4, 8$ . La precisión de estos esquemas es muy semejante para los experimentos dados por  $k = 2$  y  $k = 4$ , pero cuando la dificultad de problema aumenta para  $k = 8$ , el método DFC nodal resulta más preciso en mallas con gran resolución ( $N \geq 64$ ). Un segundo punto de comparación es la dependencia de la precisión de estos métodos en la reducción del  $cfl$ , y con esto el refinamiento de la malla temporal. Para un mismo valor de  $k$ , la magnitud de los errores del esquema DFC nodal decae con el  $cfl$  siendo más notoria en mallas finas ( $N \geq 48$ ). Por otro lado, los errores del esquema DFC centro distribuido para las simulaciones a 50 % y 75 % del límite  $cfl^{max}$  son prácticamente iguales para cada caso de  $k$ . En mallas muy densas ( $N \geq 128$ ), la precisión de este método mejora si el paso de tiempo se toma de acuerdo a la opción  $cfl^{max}$ . Estas evidencias experimentales conducen a concluir que el esquema DFC centro distribuido presenta un incremento del error global al aumentar el número de iteraciones temporales con la disminución del  $CFL$ , mientras que el error global del esquema DFC nodal decae junto al error local de truncamiento temporal al reducir el paso de tiempo  $\Delta t$ .

Semejante al experimento 1, se han estimado las tasas de convergencia experimentales de cada esquema ante refinamiento de la malla mediante ajustes por mínimos cuadrados lineales a los datos de error representados en las figuras 5.3. Estos resultados se presentan en las tablas 5.4, 5.5, y 5.6. En forma general, las tasas de convergencia de cada método tienen una fuerte dependencia del  $CFL$  empleado en la simulación, y son menos sensibles al valor de  $k$  que define el problema. El método DFC nodal exhibe una convergencia prácticamente cuadrática que mejora al reducir la fracción del  $cfl^{max}$  que determina el paso temporal, hasta acercarse a un tercer orden para el caso de las simulaciones a 50 % de este límite. Por otro lado, las tasas de convergencia del esquema DFC centro distribuido son cercanas al segundo orden cuando se ajusta el paso de tiempo de acuerdo al límite  $cfl^{max}$ , y caen de superlineal a lineal al refinar la malla temporal. La convergencia del esquema DFC centro distribuido es afectada

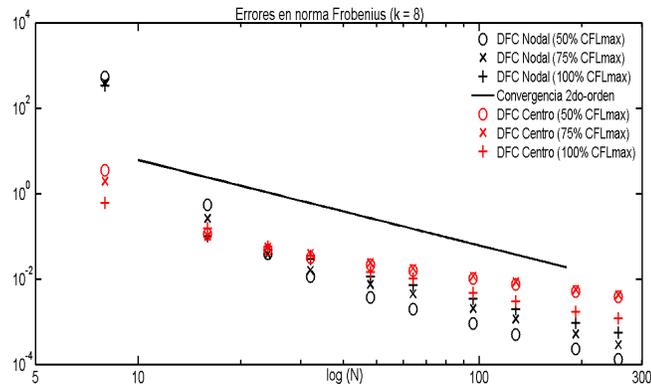
por la complejidad del problema al aumentar  $k$ .



(a)



(b)



(c)

Figura 5.3: Comparación de los errores absolutos en norma de Frobenius de las soluciones numéricas calculadas por cada esquema cuando el tiempo de simulación es  $T_{sim} = \frac{5}{\sqrt{2}}T$  con: (a)  $k=2$ , (b)  $k=4$ , (c)  $k=8$

Finalmente, se comparan los tiempos de cálculo de ambos esquemas al resolver el

Cuadro 5.4: Parámetro  $CFL$  empleado en las simulaciones junto al número de iteraciones observadas y tasas de convergencia estimadas en el experimento  $k = 2$

Esquema	$cfl$	Tasas de converg.
DFC nodal	0.46	2.703
	0.68	2.248
	0.91	1.952
DFC centro distribuido	0.41	1.382
	0.61	1.315
	0.81	1.951

Cuadro 5.5: Parámetro  $CFL$  empleado en las simulaciones junto al número de iteraciones observadas y tasas de convergencia estimadas en el experimento  $k = 4$

Esquema	$cfl$	Tasas de converg.
DFC nodal	0.46	2.712
	0.68	2.250
	0.91	1.933
DFC centro distribuido	0.41	1.257
	0.61	1.206
	0.81	1.830

Cuadro 5.6: Parámetro  $CFL$  empleado en las simulaciones junto al número de iteraciones observadas y tasas de convergencia estimadas en el experimento  $k = 8$

Esquema	$cfl$	Tasas de converg.
DFC nodal	0.46	2.717
	0.68	2.251
	0.91	1.915
DFC centro distribuido	0.41	1.146
	0.61	1.124
	0.81	1.729

mismo problema definido por el parámetro  $k$ , y cuando estas simulaciones son efectuadas al límite  $cfl^{max}$  respectivo. Este enfoque exclusivo en los resultados obtenidos para el máximo  $CFL$  se justifica en el hecho que la precisión lograda por ambos esquemas es muy semejante para cada valor de  $k$  considerado, siendo el tiempo de ejecución el siguiente parámetro comparativo de importancia. La figura 5.4 muestra las tasas porcentuales al dividir el tiempo de ejecución de cada simulación del nodal entre el

tiempo respectivo observado en el esquema centro distribuido. Note que estas tasas son ligeramente sensibles al valor de  $k$  sólo en mallas poco densas ( $N \leq 48$ ), y en este rango el esquema nodal llega a requerir hasta 3 veces el tiempo de ejecución del metodo centro distribuido. Sin embargo, a medida que la malla es refinada estas tasas decaen y en los casos de alta resolución,  $N = 192$  y  $N = 256$ , el esquema nodal solo requiere de casi la mitad del tiempo de cálculo de su contraparte centro distribuido. Aunque este resultado no es posible explicarlo a la luz del análisis de complejidad de las secciones anteriores, puede deberse al hecho que el esquema nodal solo efectúa 90% de las iteraciones efectuadas por el centro distribuido para cada  $N$ , dada sus diferencias en el límite  $cfl^{max}$ .

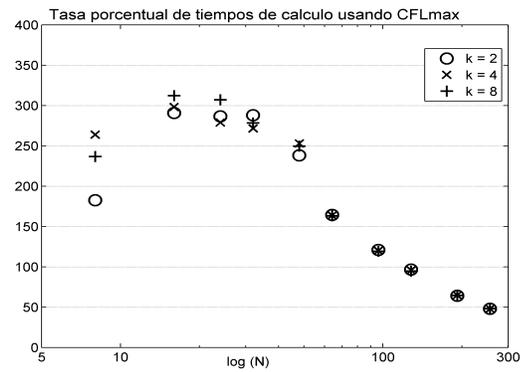


Figura 5.4: Tiempos de cómputo de las simulaciones nodales en relación con los tiempos de ejecución correspondientes a las pruebas en DFC centro distribuidas al variar  $k$  y  $T_{sim} = \frac{5}{\sqrt{2}}T$

# Capítulo 6

## Conclusiones y recomendaciones

En este trabajo de investigación, se emplearon dos familias de diferencias finitas compactas (DFC) para discretizar la formulación en velocidad y presión de la ecuación de ondas acústicas con un cuarto orden de precisión en mallas 2-D rectangulares. La primera familia aplica un proceso de diferenciación compacta implícita en una malla nodal que amerita la resolución de un sistema lineal tridiagonal en cada línea coordinada. Alternativamente, la segunda familia se basa en un proceso explícito de diferenciación en mallas centro distribuidas y que equivale al producto de una matriz en banda por un vector. Para la discretización temporal, ambos esquemas DFC comparten la formulación de Crank-Nicolson en combinación con la técnica de factorización del algoritmo de Peaceman-Rachford (PR). Así, la actualización de los campos discretos procede en dos etapas, alternando la dirección de coordenadas de la diferenciación en DFC, y que son conocidas como iteraciones ADI.

Desde un punto de vista formal, la estabilidad y la complejidad operacional de los esquemas DFC nodal y centro distribuido fueron analizadas en este trabajo. El análisis de estabilidad corresponde a la aplicación del método de Von Neumann al caso vectorial de la ecuación de onda en términos de velocidad y presión, por lo que el factor de amplificación resulta en una matriz  $G$  para cada método. Dada la complejidad del estudio analítico del espectro de  $G$ , se optó por un estudio empírico de

sus autovalores. Así se muestra que el radio espectral de  $G$  permanece acotado por 1 para ambos esquemas, independientemente del valor del parámetro CFL. Aunque este análisis es válido únicamente en medios infinitos, y en consecuencia es de poca utilidad práctica, representa una contribución teórica a esta área, pues no se ha encontrado un análisis semejante en la literatura. En cuanto a la complejidad algorítmica, el orden de operaciones aritméticas en una malla uniforme con  $N$  celdas en cada dirección es  $O(N^3)$ , y este resultado es común a ambos esquemas DFC. El método nodal requiere de la resolución de sistemas tridiagonales por cada paso de diferenciación, lo cual es efectuado por el algoritmo de Thomas en  $O(N)$  de operaciones y que coincide con el costo de cálculo del producto matriz-vector del método alternativo.

A nivel experimental estos esquemas DFC fueron aplicados a dos problemas de propagación acústica bajo condiciones de frontera tipo Dirichlet y con solución exacta conocida. En el primer experimento, la solución analítica es armónica en espacio y tiempo con período espacial  $\Lambda$ , y se consideraron solamente mallas uniformes con paso  $h$  fijo. Una experimentación exhaustiva indicó que el esquema DFC nodal admite un mayor límite de estabilidad Courant-Friedrichs-Lewy  $cfl^{max} \sim 0,91$ , en comparación con el resultante para el DFC centro distribuido  $cfl^{max} \sim 0,81$ . En un conjunto particular de pruebas numéricas donde cada esquema ajusta el paso de tiempo de acuerdo al  $cfl^{max}$  correspondiente, el esquema centro distribuido resultó más preciso en mallas con alta resolución en el rango  $N\Lambda \geq 12$ . Un ajuste con mínimos cuadrados de los datos de error revela que la tasa de convergencia de ambos esquemas DFC es aproximadamente igual a 4. Adicionalmente, el método centro distribuido requirió solamente entre un  $\frac{1}{5}$  y  $\frac{1}{4}$  del tiempo de ejecución necesario para las simulaciones nodales, hecho que también se observó en mallas con resolución a partir de  $N\Lambda \geq 4$ .

En el segundo experimento numérico, la solución continua al problema asociado incorpora un término polinomial de grado  $k$ , que conlleva a dificultades de tipo capa límite en las fronteras de la malla. Tres valores representativos son escogidos para este

parámetro  $k$ , específicamente  $k = 2, 4$  y  $8$ . En primer lugar, los resultados confirman los valores límite  $cfl^{max}$  reportados en el experimento anterior. En simulaciones efectuadas al  $cfl^{max}$  correspondiente, la precisión de ambos esquemas DFC es semejante en los casos de  $k = 2$  y  $k = 4$ , pero al considerar la opción  $k = 8$  los errores del centro distribuido son superiores en mallas muy refinadas. El incremento de la resolución temporal, al considerar fracciones del 50 % y 75 % del  $cfl^{max}$  para ajustar el paso de tiempo, induce un ligero deterioro de la precisión del esquema centro distribuido en mallas muy densas. Al contrario, los errores del método nodal decaen con el paso temporal, y son pocos sensibles al incremento del parámetro  $k$ . En cuanto a la convergencia experimental, el esquema centro distribuido alcanza tasas entre lineales y casi cuadráticas, siendo siempre inferiores a las logradas por el método nodal que se ubican en el rango aproximado  $[2, 3]$ . Finalmente, los tiempos de cómputo de las simulaciones DFC nodales son entre dos y tres veces mayores a las requeridas por el método alternativo en mallas poco densas y de mayor utilidad práctica. Sin embargo, el refinamiento de la malla espacio-temporal reduce esta diferencia al punto que las ejecuciones centro distribuidas requieren casi el doble de tiempo en mallas muy finas. La opción de un límite  $cfl^{max}$  superior por parte del DFC nodal en simulaciones con un alto número de iteraciones temporales, parece explicar su mayor rapidez en mallas con densidad extrema.

Como referencia comparativa también se implementa en este trabajo el método de integración temporal de Leap-frog con segundo orden de precisión. La diferenciación espacial se basa en una parametrización óptima de las DF miméticas con cuarto orden, que amplía el rango CFL de estabilidad para la propagación de ondas acústicas. En el caso del primer experimento numérico, este esquema exhibe una precisión comparable a los métodos DFC sólo en mallas con resolución moderada  $NA \leq 12$ , dada su limitante convergencia experimental de segundo orden. En este esquema, la diferenciación espacial es explícita y procede como un producto matriz-vector al igual que el esquema

DFC centro distribuido, por lo que estos resultados inducen a concluir acerca de la ventaja en precisión y estabilidad de la integración de Crank-Nicolson desacoplada mediante la técnica ADI-PR.

A manera de recomendaciones, para la continuación de este trabajo de investigación se consideran los siguientes puntos:

- Reformular los esquemas DFC presentados en los casos de condiciones de borde tipo Newmann y/o condiciones absorbentes de amplia aplicación en la propagación de ondas acústicas.
- Plantear un análisis de estabilidad para ambos métodos DFC que considere la discretización de las condiciones de frontera.
- Extender las formulaciones DFC ADI-PR actuales a dominios tridimensionales (3D) en problemas con condiciones de frontera tipo Dirichlet.

# Apéndice A

## Estabilidad de métodos en diferencias finitas: Definiciones y teoremas básicos

En este apéndice se presentan las definiciones y teoremas que fundamentan el análisis de estabilidad de Fourier, o también conocido de Von Neumann, aplicados a esquemas en diferencias finitas para EDP dependientes del tiempo. Esta revisión se complementa con las definiciones de consistencia y convergencia también usadas al analizar este tipo de métodos. La fuente bibliográfica original es el texto [60].

### A.1. Transformada de Fourier en un dominio unidimensional

El análisis de Fourier se aplica a funciones de variable real, o funciones de variable discreta y definidas en el conjunto de los nodos de malla  $h\mathbb{Z} = \{hm : m \in \mathbb{Z}\}$ . Para una función  $u(x)$  definida en todo  $\mathbb{R}$ , la Transformada de Fourier  $\hat{u}(w)$  está definida

por

$$\hat{u}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} u(x) dx. \quad (\text{A.1})$$

donde se denota por  $i$  la unidad imaginaria de los números complejos ( $i^2 = -1$ ). La transformada de Fourier de  $u$  es una función en la variable real  $w$ , y está definida unívocamente dada  $u$ . Así esta función  $\hat{u}$  resulta una representación alternativa de la función  $u$ . La transformada inversa de Fourier viene dada por

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \hat{u}(w) dw, \quad (\text{A.2})$$

y permite volver a obtener la función original  $u$  a partir de  $\hat{u}$ . La fórmula inversa de Fourier expresa la función  $u$  como una superposición de ondas dadas por  $e^{iwx}$ , y cuyas amplitudes  $\hat{u}(w)$  pueden ser diferentes. De manera análoga, si  $v$  es una función definida para todos los números enteros  $m \in \mathbb{Z}$ , su transformada de Fourier discreta viene dada por

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\xi} v_m \quad (\text{A.3})$$

para  $\xi \in [-\pi, \pi]$ , con  $\hat{v}(-\pi) = \hat{v}(\pi)$ . La transformada inversa viene dada por

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{im\xi} \hat{v}(\xi) d\xi. \quad (\text{A.4})$$

El análisis de Fourier en todo  $\mathbb{Z}$  es esencialmente el mismo estudio de representaciones en series de Fourier en un intervalo. Considere una malla con espaciamiento  $h$  entre los nodos, sobre los cuales son dados los valores  $v_m$ . Después de hacer un cambio de variable en (A.3), también se puede definir la transformada mediante

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} e^{-imh\xi} v_m h \quad (\text{A.5})$$

para  $\xi \in [-\pi/h, \pi/h]$ , y su fórmula inversa en la forma

$$v_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} \hat{v}(\xi) d\xi. \quad (\text{A.6})$$

Una consecuencia importante de las definiciones anteriores es que la norma  $L^2$  de  $u$

$$\| u \|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} | u(x) |^2 dx} \quad (\text{A.7})$$

resulta equivalente a la norma  $L^2$  de  $\hat{u}(w)$ , es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} | u(x) |^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} | \hat{u}(w) |^2 dw. \quad (\text{A.8})$$

Adicionalmente, las transformadas discretas directa e inversa, también satisfacen una relación de igualdad de la norma  $L^2$  de  $v$  y la norma  $L^2$  de  $\hat{v}$ . Esto es

$$\| \hat{v} \|_h^2 = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} | \hat{v}(\xi) |^2 d\xi = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} | v_m |^2 h = \| v \|_h^2. \quad (\text{A.9})$$

Las relaciones (A.8) y (A.9) son llamadas relaciones de Parseval.

### A.1.1. Transformada de Fourier en un dominio multidimensional

La transformada de Fourier en varias dimensiones viene dada por la fórmula

$$\hat{u}(w) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-iw \cdot x} u(x) dx, \quad (\text{A.10})$$

donde  $x$  y  $w$  son variables en  $\mathbb{R}^N$ , y el producto  $w \cdot x$  corresponde al producto interno usual de  $\mathbb{R}^N$ . La transformada inversa está dada por

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{iw \cdot x} \hat{u}(w) dw. \quad (\text{A.11})$$

Las transformadas discretas son igualmente válidas y corresponden a extensiones del caso 1-D. Las mismas corresponden a

$$\hat{v}(\xi) = \frac{h^N}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} e^{-ihm \cdot \xi} v_m \quad (\text{A.12})$$

para  $\xi \in [-\pi/h, \pi/h]^N$ , y a la fórmula inversa

$$v_m = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{[-\pi/h, \pi/h]^N} e^{ihm \cdot \xi} \hat{v}(\xi) d\xi. \quad (\text{A.13})$$

La relación de Parseval también es válida para dimensiones superiores, así como otras técnicas clásicas que se utilizan para problemas unidimensionales.

### A.1.2. Convergencia, consistencia y estabilidad

Considere una EDP de la forma  $Pu = f$  que conforma un problema de valores iniciales, y un esquema en diferencias finitas  $P_{\Delta t, h}v = f$ , con pasos de malla espacial  $h$  y temporal  $\Delta t$ . La propiedad fundamental que debe satisfacer este esquema a fin de ser útil, es que sus soluciones aproximen a la solución de la EDP correspondiente, y estas aproximaciones mejoren a medida que los pasos  $h$  y  $\Delta t$  tienden a cero. A tal esquema se le llama convergente.

**Definición A.1.** *Un esquema en diferencias finitas de un paso aproximando una EDP es convergente, si para toda solución  $u = u(t, x)$  de la EDP y soluciones  $v_m^n$  del esquema, tales que  $v_m^0$  converge a  $u_0(x)$  cuando  $mh$  converge a  $x$ , se tiene que  $v_m^n$  converge a  $u(t, x)$  para  $(n\Delta t, mh) \rightarrow (t, x)$  cuando  $h$  y  $\Delta t$  tienden a 0.*

Una prueba directa de convergencia es usualmente compleja, y en su lugar se analizan las propiedades de consistencia y estabilidad del esquema numérico.

**Definición A.2.** *Dados una EDP y un esquema en diferencias finitas, se dice que el*

esquema es consistente con la EDP si para toda función suave  $\phi = \phi(t, x)$  se tiene que

$$P\phi - P_{\Delta t, h}\phi \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad h, \Delta t \rightarrow 0 \quad (\text{A.14})$$

donde la convergencia es puntual en cada punto de red.

La condición de suavidad sobre  $\phi(t, x)$  se refiere a la suficiente diferenciabilidad de esta función en el contexto de la EDP y el esquema en diferencias bajo estudio.

Para introducir el concepto de estabilidad es importante notar que para un esquema convergente,  $v_m^n \rightarrow u(t, x)$  ante refinamiento de malla, y la solución discreta  $v_m^n$  permanece acotada siempre que la solución exacta también lo sea. Esta es la esencia fundamental de estabilidad, y para muchos esquemas esta condición se traduce en restricciones sobre los pasos  $h$  y  $\Delta t$ . La región de estabilidad de un esquema en diferencias finitas contiene una sucesión de pasos  $(\Delta t_v, h_v)$ , que converge hacia el origen cuando  $v$  tiende al infinito, y para los cuales el esquema es estable (es decir,  $v_m^n$  permanece acotada).

**Definición A.3.** Un esquema  $P_{\Delta t, h}v_m^n = 0$  para una EDP de primer orden es estable si y sólo si existen un entero  $J$  y números positivos  $h_0$  y  $k_0$  tales que, para cualquier intervalo de tiempo  $T$ , existe una constante positiva  $C_T$  tal que

$$h \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} |v_m^n|^2 \leq C_T h \sum_{j=0}^J \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} |v_m^j|^2, \quad (\text{A.15})$$

para  $0 \leq n\Delta t \leq T$ ,  $0 < h \leq h_0$  y  $0 < \Delta t \leq k_0$ .

La desigualdad anterior puede escribirse en términos de la norma  $L^2$

$$\|w\|_h = \sqrt{h \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} |w_m|^2} \quad (\text{A.16})$$

para una función  $w$  en la red discreta. En muchos de los problemas que involucran

una EDP, la norma  $L^2$  es una medición de una cantidad física significativa, tal como la energía del sistema. Con esta notación la desigualdad (A.15) se puede escribir como

$$\|v^n\|_h \leq \sqrt{C_T \sum_{j=0}^J \|v^j\|_h^2} \quad (\text{A.17})$$

que es equivalente a

$$\|v^n\|_h \leq C_T^* \sum_{j=0}^J \|v^j\|_h. \quad (\text{A.18})$$

Para alguna constante  $C_T^*$ . Las desigualdades (A.15) y (A.18) expresan la idea de que la norma de la solución en cualquier tiempo  $t$ , con  $0 < t < T$ , está limitada, y con esto la cantidad global de crecimiento de  $v^n$ . El crecimiento es a lo sumo un múltiplo constante de la suma de las normas de la solución en los primeros  $J + 1$  pasos ( $J = 0$ , para esquemas de un paso). Para esquemas multipaso ( $J > 0$ ) se debe considerar la solución en los primeros  $J + 1$  pasos temporales, o incorporar un procedimiento de inicialización para aproximarlos.

La importancia de los conceptos de consistencia y estabilidad se ve en el teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer, que es el teorema fundamental en la teoría de los esquemas en diferencias finitas para problemas de valor inicial.

**Teorema A.1** (Teorema de Equivalencia de Lax-Richtmyer). *Un esquema en diferencias finitas consistente con una EDP para la cual el problema de valor inicial está bien planteado, es convergente si y sólo si es estable.*

### A.1.3. La ecuación de advección y el análisis de estabilidad de Von Neumann

El prototipo más estudiado de las ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas es la ecuación de onda de primer orden, también llamada de advección

$$u_t + au_x = 0, \quad (\text{A.19})$$

la cual modela la propagación unidireccional en un medio 1-D con velocidad  $a(x)$ . Para facilitar la presentación del análisis de Von Neumann se asume que el medio corresponde a toda la recta real, y que  $a$  es constante. Si la condición inicial en el tiempo  $t = 0$  es denotada como  $u_0(x)$ , por simple inspección se puede verificar que la solución de este problema de valor inicial (A.19) es

$$u(t, x) = u_0(x - at). \quad (\text{A.20})$$

Efectivamente,  $u(t, x)$  es la traslación de  $u_0(x)$  a través de la recta  $x - at = \text{constante}$ , donde esta constante es cualquier número real. Para este problema, uno de los métodos en DF más simples corresponde al esquema adelantado en tiempo y atrasado en espacio

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\Delta t} + a \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0, \quad (\text{A.21})$$

que puede reescribirse como

$$v_m^{n+1} = (1 - a\lambda)v_m^n + a\lambda v_{m-1}^n, \quad (\text{A.22})$$

donde  $\lambda = \Delta t/h$ . Usando la fórmula de inversión (A.6) para  $v^n$

$$v_m^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} \widehat{v}^n(\xi) d\xi \quad (\text{A.23})$$

y también para  $v_{m-1}^n$  en (A.22), se obtiene

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} [(1 - a\lambda) + a\lambda e^{-ih\xi}] \widehat{v}^n(\xi) d\xi. \quad (\text{A.24})$$

Al comparar esta expresión con la fórmula de inversión de Fourier para  $v^{n+1}$

$$v_m^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{imh\xi} \widehat{v}^{n+1}(\xi) d\xi \quad (\text{A.25})$$

y usando la unicidad de la transformada de Fourier, se requiere que el integrando de (A.24) sea el mismo que en la fórmula de inversión. De esta manera, se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{v}^{n+1}(\xi) &= [(1 - a\lambda) + a\lambda e^{-ih\xi}] \widehat{v}^n(\xi) \\ &= g(h\xi) \widehat{v}^n(\xi), \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

donde

$$g(h\xi) = (1 - a\lambda) + a\lambda e^{-ih\xi} \quad (\text{A.27})$$

es conocido como el factor de amplificación.

La expresión (A.26) muestra que el avance de la solución en un paso de tiempo equivale a multiplicar la transformada de Fourier de la solución, por el factor de amplificación  $g(h\xi)$ . La aplicación inductiva de esta relación, hasta considerar la condición inicial representa el siguiente resultado importante

$$\widehat{v}^n(\xi) = g(h\xi)^n \widehat{v}^0(\xi). \quad (\text{A.28})$$

Para hacer aún más evidente la restricción de estabilidad sobre  $g(h\xi)$  se usa la relación

de Parseval y las ecuaciones (A.9) y (A.28), obteniéndose

$$h \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} |v_m^n|^2 = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\widehat{v}^n(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\pi/h}^{\pi/h} |g(h\xi)|^{2n} |\widehat{v}^0(\xi)|^2 d\xi.$$

De este modo, la desigualdad (A.15) en el caso  $J = 0$  amerita que  $|g(h\xi)|^{2n}$  sea debidamente acotada. La magnitud  $|g(h\xi)|$ , donde  $\theta = h\xi$ , se reescribe como

$$\begin{aligned} |g(\theta)|^2 &= (1 - a\lambda + a\lambda \cos(\theta))^2 + a^2\lambda^2 \sin^2(\theta) \\ &= 1 - 4a\lambda(1 - a\lambda) \sin^2\left(\frac{1}{2}\theta\right). \end{aligned}$$

Se observa que esta última expresión para  $|g(\theta)|$  está acotada por 1, siempre que  $0 \leq a\lambda \leq 1$ .

La condición general de estabilidad para los esquemas de un paso con coeficientes constantes se presenta en el siguiente teorema. En el ejemplo dado anteriormente, el factor de amplificación  $g$  es una función de  $\theta = h\xi$ , pero  $g$  podría también depender de  $h$  y  $\Delta t$ , en otros esquemas. Estos casos más generales podrían corresponder a métodos DF multipasos y/o aquellos aplicados a EDP de segundo orden en tiempo. Así este teorema permite que la magnitud del factor de amplificación exceda de 1 por una cantidad muy pequeña.

**Teorema A.2.** *Un esquema en diferencias finitas de un paso con coeficientes constantes es estable, si y sólo si existe una constante  $K$  (independientemente de  $\theta$ ,  $\Delta t$  y  $h$ ) y números positivos  $k_0$  y  $h_0$  tales que*

$$|g(\theta, \Delta t, h)| \leq 1 + Kh \tag{A.29}$$

para todo  $\theta$  con  $\Delta t \in (0, k_0]$  y  $h \in (0, h_0]$ . En el caso de que  $g(\theta, \Delta t, h)$  sea indepen-

diente de  $\Delta t$  y  $h$ , la condición de estabilidad (A.29) puede ser reemplazada por

$$|g(\theta)| \leq 1. \quad (\text{A.30})$$

Este teorema muestra que la estabilidad de un esquema en diferencias finitas para EDP que satisface las hipótesis impuestas, depende sólo del factor de amplificación  $g(h\xi)$ . Esta observación se debe a Von Neumann, y por esto lleva su nombre este tipo de análisis.

#### A.1.4. Estabilidad de esquemas en diferencias finitas para sistemas de EDP

La siguiente ecuación corresponde al caso multidimensional de la ecuación de advección 1-D (A.19)

$$u_t + Au_x = 0, \quad (\text{A.31})$$

donde  $u$  es un vector de funciones en  $\mathbb{R}^d$  y  $A$  es una matriz cuadrada  $d \times d$ . Para que el sistema (A.31) sea hiperbólico, la matriz  $A$  debe ser diagonalizable con autovalores reales.

En los casos de sistemas de EDP, el análisis de estabilidad de Von Neumann para esquemas en DF de un solo paso conduce a una matriz de amplificación  $G$ . Esta matriz resulta al hacer la sustitución de  $G^n e^{im\theta}$  por  $v_m^n$ . La condición de estabilidad es que para cada  $T > 0$ , existe una constante  $C_T$  tal que

$$\|G^n\| \leq C_T, \quad (\text{A.32})$$

donde  $0 \leq n\Delta t \leq T$ , para  $n \rightarrow \infty$ . Una gran simplificación al analizar (A.32) para sistemas hiperbólicos, se produce cuando el esquema tiene a  $G$  como una función polinomial o racional de la matriz  $A$ . Entonces, la misma matriz que diagonaliza a

$A$  en (A.31), también diagonaliza a  $G$ , y la estabilidad del esquema vectorial puede estudiarse al analizar la estabilidad de las ecuaciones escalares

$$w_t + a_i w_x = 0, \tag{A.33}$$

donde los  $a_i$  son los autovalores de  $A$ . El nuevo vector de funciones  $w$  es linealmente dependiente de  $u$  a través de la matriz de diagonalización.

Una condición fuerte para la estabilidad de (A.31), la establece el siguiente teorema a través del radio espectral de la matriz de amplificación  $\rho(G)$ .

**Teorema A.3.** *Para toda matriz cuadrada  $G$  se tiene que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|G^n\| = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \rho(G) < 1.$$

# Bibliografía

- [1] M. ABOUALI AND J. E. CASTILLO, *High-order compact castillo-grone's mimetic operators*, Research Report CSRCR02, Computational Science Research Center, San Diego State University, (2012).
- [2] ———, *Solving poisson equation with robin boundary condition on a curvilinear mesh using high order mimetic discretization methods*, Mathematics and computer in simulation, (2014).
- [3] R. M. ALFORD, K. L. KELLY, AND D. M. BOORE, *Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation*, Geophysics, 39 (1974), pp. 834–842.
- [4] L. D. BARTOLO, C. DORS, AND W. J. MANSUR, *A new family of finite-difference schemes to solve the heterogeneous acoustic wave equation*, Geophysics, 77 (2012), pp. T187–T199.
- [5] J. CARCIONE, I. FINETTI, AND D. GEI, *Seismic modeling study of the earth's deep crust*, Geophysics, 68 (2003), pp. 656–664.
- [6] M. H. CARPENTER, D. GOTTLIEB, AND S. ABARBANEL, *Stable and accurate boundary treatments for compact, high-order finite-difference scheme*, Applied Numerical Mathematics: Special issue, 12 (1993), pp. 55–87.

- [7] J. E. CASTILLO AND R. D. GRONE, *A matrix analysis approach to higher-order approximations for divergence and gradients satisfying a global conservation law*, SIAM Journal Matrix Analysis Applications, 25 (2003), pp. 128–142.
- [8] J. E. CASTILLO, J. M. HYMAN, M. SHASHKOV, AND S. STEINBERG, *Fourth- and sixth-order conservative finite difference approximations of the divergence and gradient*, Applied Numerical Mathematics: Transactions of IMACS, 37 (2001), pp. 171–187.
- [9] J. E. CASTILLO AND G. F. MIRANDA, *Mimetic discretization methods*, CRC Press, (2013).
- [10] J. E. CASTILLO AND M. YASUDA, *Linear systems arising for second-order mimetic divergence and gradient discretizations*, Journal of Mathematical Modelling and Algorithms, 4 (2005), pp. 67–82.
- [11] M. CIMENT AND S. H. LEVENTHAL, *Higher order compact implicit schemes for the wave equation*, Mathematics of Computation, 29 (1975), pp. 985–994.
- [12] L. CÓRDOVA, O. ROJAS, B. OTERO, AND J. E. CASTILLO, *A comparative study of two compact finite difference methods: standard vs. mimetic*, in XII Congreso Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas: CIMENICS'2014, Isla de Margarita, Venezuela, (2014), pp. 1–6.
- [13] ———, *Compact finite difference modeling of 2-D acoustic wave propagation*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 295 (2016), pp. 83–91.
- [14] M. A. DABLAIN, *The application of high-order differencing to the scalar wave equation*, Geophysics, 51 (1986), pp. 54–66.
- [15] J. DE LA PUENTE, M. FERRER, M. HANZICH, J. E. CASTILLO, AND J. M. CELA, *Mimetic seismic wave modeling including topography on deformed staggered grids*, Geophysics, 79 (2014), pp. T125–T141.

- [16] D. DENG AND C. ZHANG, *Application of a fourth-order compact ADI method to solve a two-dimensional linear hyperbolic equation*, International Journal of Computer Mathematics, 90 (2013), pp. 273–291.
- [17] J. T. ETGEN. AND M. J. O’BRIEN, *Computational methods for large-scale 3D acoustic finite-difference modeling tutorial*, Geophysics, 72 (2007).
- [18] D. V. GAITONDE, J. S. SHANG, AND J. L. YOUNG, *Practical aspects of higher-order numerical schemes for wave propagation phenomena*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 45 (1999), pp. 1849–1869.
- [19] L. GAMET, F. DUCROS, F. NICLOUD, AND T. POINSOT, *Compact finite difference schemes on non-uniform meshes, application to direct numerical simulations of compressible flows*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 29 (1999), pp. 159–191.
- [20] Z. GAO AND S. XIE, *Fourth-order alternating direction implicit compact finite difference schemes for two-dimensional schrödinger equations*, Applied Numerical Mathematics, 61 (2011), pp. 593–614.
- [21] J. R. S. GARCIA, *3D finite-difference time-domain modeling of acoustic wave propagation based on domain decomposition*, master’s thesis, UMR Geosciences Azur, CNRS-IRD-UNSA-OCA, Villefranche-sur-mer, France, (2009).
- [22] C. GELIS, D. LEPAROUX, J. VIRIEUX, A. BITRI, S. OPERTO, AND G. GRANDJEAN, *Numerical modeling of surface waves over shallow cavities*, Journal of Environmental and Engineering Geophysics, 10 (2005), pp. 111–121.
- [23] A. GÓMEZ-POLANCO, J. M. GUEVARA-JORDAN, AND B. MOLINA, *A mimetic iterative scheme for solving biharmonic equations*, Mathematical and Computer Modelling, 57 (2013), pp. 2132–2139.

- [24] R. E. GORDNIER AND M. R. VISBAL, *Compact difference scheme applied to simulation of low-sweep delta wing flow*, AIAA Journal, 43 (2005), pp. 1744–1752.
- [25] R. W. GRAVES, *Simulating seismic wave propagation in 3D elastic media using staggered-grid finite differences*, Bulletin of the Seismological Society of America, 86 (1996), pp. 1091–1106.
- [26] B. GUSTAFSSON, K. HEINZ-OTTO, AND A. SUNDSTRÖM, *Stability theory of difference approximation for mixed initial boundary value problems*, Bulletin of the Seismological Society of America, 91 (1972), pp. 617–623.
- [27] R. S. HIRSH, *Higher order accurate difference solutions of fluid mechanics problems by a compact differencing technique*, Journal of Computational Physics, 19 (1975), pp. 90–109.
- [28] J. M. HYMAN AND M. SHASHKOV, *Adjoint operators for the natural discretizations of the divergence, gradient and curl on logically rectangular grids*, Applied Numerical Mathematics, 25 (1997), pp. 413–442.
- [29] ———, *Approximation of boundary conditions for mimetic finite-difference methods*, Computers & Mathematics with Applications, 36 (1998), pp. 79–99.
- [30] S. R. IYENGAR AND R. MITTAL, *High order difference schemes for the wave equation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 12 (1978), pp. 1623–1628.
- [31] M. JAIN, R. AHUJA, AND S. BHATTACHARYYA, *Difference schemes for second order hyperbolic equations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 10 (1976), pp. 960–964.
- [32] L. JIANMING AND T. KEMING, *A new unconditionally stable ADI compact scheme for the two-space-dimensional linear hyperbolic equation*, International Journal of Computer Mathematics, 87 (2010), pp. 2259–2267.

- [33] Q. JINGGANG, *The new alternating direction implicit difference methods for the wave equations*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 230 (2009), pp. 213–223.
- [34] S. KARAA, *Unconditionally stable ADI scheme of higher-order for linear hyperbolic equations*, International Journal of Computer Mathematics, 87 (2010), pp. 3030–3038.
- [35] S. KIM AND H. LIM, *High-order schemes for acoustic waveform simulation*, Applied Numerical Mathematics, 57 (2007), pp. 402–414.
- [36] E. KOUTSAVDIS, G. BLAISDELL, AND A. LYRINTZIS, *Compact schemes with spatial filtering in computational aeroacoustics*, AIAA Journal, 38 (2000), pp. 713–715.
- [37] M. LEES, *Alternating direction methods for hyperbolic differential equations*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 10 (1962), pp. 610–616.
- [38] S. K. LELE, *Compact finite difference schemes with spectral-like resolution*, Journal of Computational Physics, 103 (1992), pp. 16–42.
- [39] A. LEVANDER, *Fourth-order finite-difference  $p$ -sv seismograms*, Geophysics, 53 (1988), pp. 1425–1436.
- [40] J. LI AND M. R. VISBAL, *High-order compact schemes for nonlinear dispersive waves*, Journal of Scientific Computing, 26 (2006), pp. 1–23.
- [41] W. LIAO, *On the dispersion, stability and accuracy of a compact higher-order finite difference scheme for 3D acoustic wave equation*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 270 (2014), pp. 571–583.
- [42] Y. LIU AND M. K. SEN, *An implicit staggered-grid finite-difference method for seismic modelling*, Geophysics, (2009), pp. 459–474.

- [43] S.-C. LO, G. BLAISDELL, AND A. LYRINTZIS, *High-order shock capturing schemes for turbulence calculations*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 62 (2010), pp. 473–498.
- [44] S. MCKEE, *High accuracy ADI methods for hyperbolic equations with variable coefficients*, IMA Journal of Applied Mathematics, 11 (1973), pp. 105–109.
- [45] R. MOHANTY AND M. JAIN, *An unconditionally stable alternating direction implicit scheme for the two space dimensional linear hyperbolic equation*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 17 (2001), pp. 684–688.
- [46] S. A. ORSZAG AND M. ISRAELI, *Numerical simulation of viscous incompressible flows*, Annual Review of Fluid Mechanics, 6 (1974), pp. 281–318.
- [47] D. RODRIGUES, *Large scale modelling of seismic wave propagation*, PhD thesis, Centrale Paris’ Ecole, Paris, France, (1993).
- [48] O. ROJAS, *Modelling of rupture propagation under different friction laws using high-order mimetic operators*, PhD thesis, Claremont Graduate University joint to San Diego State University, California, USA, (2009).
- [49] O. ROJAS, S. M. DAY, J. E. CASTILLO, AND L. A. DALGUER, *Modelling of rupture propagation using high-order mimetic finite differences*, Geophysical Journal International, 172 (2008), pp. 631–650.
- [50] O. ROJAS, E. DUNHAM, S. M. DAY, L. A. DALGUER, AND J. E. CASTILLO, *Finite difference modelling of rupture propagation with strong velocity-weakening friction*, Geophysical Journal International, 179 (2009), pp. 1831–1858.
- [51] O. ROJAS, R. MELLORS, AND J. E. CASTILLO, *Finite difference modeling of the  $p$ - $sv$  wave equation with mimetic methods*, in SEG Technical Program Expanded Abstracts, SEG/EAB, Proceedings Society of Exploration Geophysics, (2003), pp. 2293–2294.

- [52] O. ROJAS, B. OTERO, J. E. CASTILLO, AND S. M. DAY, *Low dispersive modeling of rayleigh waves on partly staggered grids*, Computational Geosciences, 18 (2014), pp. 29–43.
- [53] J. B. RUNYAN, *A novel higher order finite difference time domain method based on the Castillo-Grone mimetic curl operator with applications concerning the time-dependent Maxwell equations*, PhD thesis, San Diego State University, San Diego, USA, (2011).
- [54] E. H. SAENGER AND T. BOHLEN, *Finite-difference modeling of viscoelastic and anisotropic wave propagation using the rotated staggered grid*, Geophysics, 69 (2004), pp. 583–591.
- [55] M. SARI AND G. GÜRARSLAN, *A sixth-order compact finite difference scheme to the numerical solutions of burgers equation*, Applied Mathematics and Computation, 208 (2009), pp. 475–483.
- [56] J. SHANG, *High-order compact-difference schemes for time-dependent Maxwell equations*, Journal of Computational Physics, 153 (1999), pp. 312–333.
- [57] F. SOLANO-FEO, J. M. GUEVARA-JORDAN, O. ROJAS, B. OTERO, AND R. RODRÍGUEZ, *Second-order mimetic discretization of the seismic wave equation in heterogeneous media*, VIII Pan-American workshop: Applied and computational mathematics, (2014).
- [58] —, *A new finite difference mimetic scheme for acoustic reflection modeling*, in AAPG-SEG International Conference and Exhibition Meeting Abstracts, AAPG-SEG, (2016), pp. 312–312.
- [59] —, *A new mimetic scheme for the acoustic wave equation*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 295 (2016), pp. 2–12.

- [60] J. C. STRIKWERDA, *Finite difference schemes and partial differential equations*, SIAM, (2004).
- [61] J. TYLER, *Analysis and implementation of high-order compact finite difference schemes*, PhD thesis, Department of Mathematics Brigham Young University, Provo-Utah, USA, (2007).
- [62] J. VIRIEUX, *Sh wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method*, *Geophysics*, 49 (1984), pp. 1933–1957.
- [63] —, *P-sv wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method*, *Geophysics*, 51 (1986), pp. 889–901.
- [64] M. R. VISBAL AND D. V. GAITONDE, *High-order accurate methods for unsteady vortical flows on curvilinear meshes*, in 36th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno,NV,U.S.A, (1998), Aerospace Sciences Meetings.
- [65] —, *Very high-order spatially implicit schemes for computational acoustics on curvilinear meshes*, *Journal of Computational Acoustics*, 9 (2001), pp. 1259–1286.
- [66] M. V. WALSTIJN AND K. KOWALCZYK, *On the numerical solution of the 2D wave equation with compact FDTD schemes*, in 11th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx'08), Espoo, Finland, (2008), pp. 205–212.
- [67] A. YEFET AND E. TURKEL, *Fourth order compact implicit method for the Maxwell equations with discontinuous coefficients*, *Applied Numerical Mathematics*, 33 (2000), pp. 125–134.