UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Desigualdades de Simpson y Trapecio en Espacios L^p

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br.Gerlando Isaac Terrasi Diaz** para optar al título de Licenciado en Matemática.
Tutor: Dr. Nelson Merentes

Caracas, Venezuela
Junio, 2017

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Desigualdades de Simpson y Trapecio en espacios L^p**", presentado por el **Lic. Gerlando Isaac Terrasi Diaz**, titular de la Cédula de Identidad **21.104.050**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Dr. Nelson Merentes
Tutor

Dra. Mairene Colina
Jurado

Carlos G

MSc. Carlos González
Jurado

ÍNDICE GENERAL

Resumen **1**

Introducción **2**

1 Preliminares **5**

1.1 Continuidad y Diferenciabilidad 5

1.2 Integración 19

1.3 Integración Numérica 27

1.3.1 Regla del Trapecio 29

1.3.2 Regla de Simpson 33

1.4 Espacios L^p 38

1.5 Funciones de Variación Acotada 46

1.6 Funciones Absolutamente Continuas 50

2 Desigualdad de Simpson en espacios L^p **54**

2.1 Desigualdad de Simpson en términos de la p-norma 54

2.2 Aplicaciones a medias especiales 65

2.3 Generalizaciones 75

3 Desigualdad de Trapecio en espacios L^p 94

3.1 Una generalización para funciones que admiten derivadas de n-ésimo orden 96

3.2 Una generalización mediante integrales iteradas 100

3.3 Una generalización que involucra a la función Beta 103

3.4 Aplicaciones a Medias Especiales 106

Biliografía 110

RESUMEN

En este trabajo se empezará ofreciendo información preliminar sobre la Desigualdad de Simpson, Trapecio y sobre espacios L^p. De forma específica, sobre la Desigualdad de Simpson se ofrece una Desigualdad principal para funciones en espacios L^p, así como una generalización, se ofrecen también algunas generalizaciones de la Desigualdad de Trapecio para funciones cuyas derivadas están en L^p. Además se ofrecen aplicaciones de estos resultados a medias especiales.

Palabras clave: Desigualdades, Simpson, Trapecio, espacios L^p, medias

INTRODUCCIÓN

En la literatura matemática, es bien conocido que, para una función integrable $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, el método de Simpson (o Regla de Simpson), permite estimar la integral de f sobre $[a, b]$ mediante la siguiente expresión:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b).\right]$$

la cual es valida si f admite derivadas hasta el cuarto orden y $f^{(IV)}$ está acotada en $[a, b]$.

De manera análoga, el método del trapecio permite estimar la integral de f sobre $[a, b]$ mediante la expresión:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

siendo f una función que admite segunda derivada sobre el intervalo $[a, b]$ y la misma está acotada en $[a, b]$.

Por métodos de cuadratura se hace referencia a expresiones matemáticas que, permiten estimar la integral de f sobre el intervalo $[a, b]$, esto es, la siguiente expresión:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

cuyo valor está relacionado con la medida del área bajo la gráfica de f en el intervalo $[a, b]$. El cálculo de áreas ha tenido su origen desde tiempos remotos. En el siglo XXI a.C., los egipcios, para quienes la agricultura era la actividad más importante y que se desarrolló principalmente en la cuenca del rio Nilo a lo largo del periodo 3100-332 a.C., presentaban problemas con el mismo ya que sus riadas anegaban los terrenos de cultivo, los cuales borraban los límites de propiedad agrícolas, lo que daba lugar a peligrosos conflictos sociales, dando como solución al cálculo de superficies basado en la observación, registro, sistematización y generalización de las propiedades de las figuras geométricas planas [1].

Más tarde surgieron matemáticos como Eudoxo y Arquímedes, los cuales, mediante el Método de Exhausción (ideado por el primero de ellos), resolvieron el problema del área de figuras curvilíneas con figuras rectilíneas, dando solución al problema de hallar el área del círculo, uno de los más grandes problemas de la antiguedad. Este método también hizo posible el cálculo de áreas de otras figuras curvas como el conoide y el esferoide, asi como la longitudes de la parábola, la espiral, el cálculo de volúmenes como el elipsoide ,problemas resueltos por Arquímedes. Muchos de estos trabajos quedaron recopilados en la obra 'Los Elementos' de Euclides [9],[17].

Luego lo referente a la noción de área de figuras geométricas, esto quedó sin trabajarse por mucho tiempo, la razón de ello es, entre otras cosas, que el álgebra no fue desarrollada lo suficiente como para permitir un adecuado desarrollo de la geometría más allá las investigaciones de los matemáticos griegos. No fue sino hasta el siglo XVII cuando se desarrolló el cálculo de áreas tras la introducción del cálculo infinitesimal, hecha por Newton y Leibnitz y la introducción del Teorema Fundamental del Cálculo, el cual relacionaba el problema del área y el problema de hallar la tangente de una curva como problemas inversos, aconteciendo poco después el desarrollo del concepto de función [7].

A partir de entonces, se comenzaron a deducir distintas propiedades, resultados y formalizaciones del cálculo de áreas. Por ejemplo, en el año 1854 Bernhard Riemman formalizó por primera vez el concepto de la integral definida sobre un intevalo $[a, b]$ mediante la integral que actualmente lleva su nombre [58]. Más tarde fue generalizado este concepto por los matemáticos Henry Lebesgue y Thomas Joannes Stieltjes con las integrales que llevan su nombre [62].

En este punto de la historia, se fueron desarrollando nuevos resultados y conceptos en el ámbito de la Teoría de integración. Una de las cuestiones que surgieron, entre otras, era determinar la validez del Teorema Fundamental del Cálculo en el contexto de la integral de Lebesgue. En 1905 Henry Lebesgue determinó que dicho resultado también era válido para la integral de Lebesgue para una clase más amplia de funciones, la cual el matemático Giuseppe Vitali las llamó funciones absolutamente continuas [64].

El objetivo de este trabajo es presentar resultados relacionados al Método de Simpson y el Método del Trapecio para funciones absolutamente continuas y para funciones que admiten derivadas en L^p [45]. Para esto, serán tratadas algunas nociones básicas cálculo diferencial e integral, y los conceptos tales como: Funciones de variación acotada, funciones lipschitzianas, continuidad absoluta, espacios L^p, y algunas aplicaciones de estos resultados a medias especiales, la cual será distribuido en trés capítulos de la manera siguiente:

- En el Capítulo 1 se dan algunas nociones básicas del cálculo diferencial e integral, tópicos sobre funciones de variación acotada, espacios L^p y el método de Simpson.

- En el Capítulo 2 se expondrán los principales resultados sobre la Desigualdad de Simpson para funciones diferenciables en $[a, b]$ y cuya derivada es una función p-integrable en $[a, b]$. De forma concreta, serán desarrolladas las demostración del artículo [45]. De forma adicional, se darán a conocer algunas aplicaciones de estos resultados a la teoría de medias y se proporcionarán nuevas desigualdades que las involucran.

- En el Capítulo 3, se expondrán una recopilación de resultados sobre la Regla del trapecio para funciones diferenciables cuya derivada de primer orden es una función absolutamente continua en $[a, b]$.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En el presente capítulo se enunciarán algunas nociones básicas del cálculo, como la continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad en sentido de Riemann. Se dará una introducción a algunos métodos numéricos para hallar integrales definidas destacando la Regla de Simpson y la Regla del Trapecio, lo cuales juegan un papel central en este trabajo. Por uĺtimo, se hará una introducción de los espacios $L^p(\mu)$, deduciendo a su vez, algunas propiedades y resultados de estos espacios.

1.1 Continuidad y Diferenciabilidad

En esta sección se enuncian algunas propiedades sobre funciones continuas y diferenciables. Se empezará demostrando algunas desigualdades que son conocidas en los textos de cálculo. Sin embargo, realizadas las demostraciones de estas, podrán ser usadas para las demostraciones del resto de este trabajo.

Teorema 1. *(Desigualdad Triangular) Sean* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, *entonces:*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|. \tag{1.1}$$

Demostración:

Realizaremos la demostración mediante el principio de inducción sobre n. En efecto, notemos que, para $n = 2$ se obtiene

$$\begin{aligned}(x_1+x_2)^2 &= x_1^2+2x_1x_2+x_2^2\\ &\leq x_1^2+2|x_1x_2|+x_2^2\\ &= |x_1|^2+2|x_1||x_2|+|x_2|^2\\ &= (|x_1|+|x_2|)^2.\end{aligned}$$

en resumen

$$(x_1+x_2)^2 \leq (|x_1|+|x_2|)^2$$

extrayendo la raiz cuadrada a ambos miembros, ocurre que

$$|x_1+x_2| \leq |x_1|+|x_2|.$$

verificando (1.1) para $n = 2$.

Ahora bien, supongamos que, para cierto $N \in \mathbb{N}$, se safisface (1.1) para todo $x_1, x_2, \ldots, x_N \in \mathbb{R}$ y sea $x_{N+1} \in \mathbb{R}$ distinto a $x_1, x_2, \ldots, x_N$. En virtud del caso $n = 2$ y la hipótesis inductiva, se tiene que:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{N+1} x_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{N} x_k + x_{N+1}\right|\\ &\leq \left|\sum_{k=1}^{N} x_k\right| + |x_{N+1}|\\ &\leq \sum_{k=1}^{N} |x_k| + |x_{N+1}|\\ &= \sum_{k=1}^{N+1} |x_k|.\end{aligned}$$

Así, por el principio de inducción, se satisface (1.1) para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

$\blacksquare$

Corolario 1. *(Desigualdad Triangular Inversa) Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se satisface la siguiente desigualdad:*

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Demostración:

Por (1.1), se tiene que:

$$\begin{aligned} |x| &= |x - y + y| \\ &\leq |x - y| + |y| \end{aligned}$$

sustrayendo $|y|$ a ambos miembros

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

De forma análoga

$$|y| - |x| \leq |y - x|$$

multiplicando por -1 ambos lados de la desigualdad

$$-|x - y| \leq |x| - |y|$$

en resumen

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|$$

lo cual equivale a

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

■

A continuación se introducirá el concepto de continuidad:

Definición 1. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es continua en x_0 si, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ tal que, si $x \in A$ y $|x - x_0| < \delta$, entonces:*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

y se expresa de la siguiente manera

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Se dice que f es continua en $B \subset A$ si es continua en x para todo $x \in B$. Por último, se dice que f es continua si f es continua en A.

Ejemplo 1. *La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$ constante. En efecto, sean $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, y $\delta = 1$. Así, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - a| < \delta$, se tiene que:*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |k - k| \\ &= 0 \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Así f es continua.

Ejemplo 2. *La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, es continua, pues para $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, y $\delta = \varepsilon$, se tiene que, si $x \in \mathbb{R}$, con $|x - a| < \delta$, entonces:*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |x - a| \\ &< \delta \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego f es continua.

Ejemplo 3. *La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ es continua. En efecto, sean $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, y $\delta = \varepsilon$. Nótese que, por el corolario (1), si $x \in \mathbb{R}$, con $|x - a| < \delta$, se obtiene:*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= ||x| - |a|| \\ &\leq |x - a| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto indica que f es continua.

Ejemplo 4. *La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. En efecto, sean $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, y $\delta = \text{mín}\left\{\frac{\varepsilon}{2|a|+1}, 1\right\}$. Observemos que, para todo $x \in \mathbb{R}$ con $|x - a| < \delta$, se tiene lo siguiente:*

$$\begin{aligned} |x| &= |x - a + a| \\ &\leq |x - a| + |a| \qquad \textit{Por (1.1)} \\ &< \delta + |a| \\ &\leq 1 + |a|. \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |x^2 - a^2| \\ &= |(x - a)(x + a)| \\ &= |x - a||x + a| \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{2|a| + 1}\right)(|x| + |a|) \qquad \textit{Por (1.1)} \\ &< \left(\frac{\varepsilon}{2|a| + 1}\right)(2|a| + 1) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto f es continua.

Ejemplo 5. *La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, pues si, $a \in \mathbb{R} - \{0\}, \varepsilon > 0$, y $\delta = \text{mín}\left\{\frac{|a|}{2}, \frac{\varepsilon a^2}{2}\right\}$, entonces para $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $|x - a| < \delta$, se cumple que*

$$\begin{aligned} |a| &= |(a - x) + x| \\ &\leq |a - x| + |x| \qquad \textit{Por (1.1)} \\ &< \delta + |x| \\ &\leq \frac{|a|}{2} + |x|. \end{aligned}$$

de donde $\frac{|a|}{2} < |x|$. *De esta manera,*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| \\ &= \frac{|a-x|}{|x||a|} \\ &< \left(\frac{2}{|a|^2} \right) \left(\frac{\varepsilon a^2}{2} \right) \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Así, f es continua.

El siguiente resultado establece la continuidad de la composición de dos funciones

Teorema 2. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos, consideremos la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Suponga que $f(A) \subset B$ y sea $x_0 \in A$ tal que f es continua en x_0. Si $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que g es continua en $f(x_0)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en x_0.*

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$. Como g es continua en $f(x_0)$, existe $\delta_1 > 0$ tal que, si $y \in B$, con $|y - f(x_0)| < \delta_1$, entonces $|g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$.

Además, como f es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$, con $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - f(x_0)| < \delta_1$, tras lo cual $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$. En resumen, para $x \in A$, con $|x - x_0| < \delta$, entonces $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$, por lo tanto $g \circ f$ es continua en x_0.

■

El siguiente teorema recoge algunas propiedades básicas de las funciones continuas.

Teorema 3. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $a \in \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces:*

1. *$f + g$ es continua en a.*

2. *λf es continua en a.*

3. *$f - g$ es continua en a.*

4. $f \cdot g$ es continua en a.

5. Si $g(a) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es continua en a.

Demostración:

1. Sea $\varepsilon > 0$, como las funciones f, g son continuas en a, existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{siempre que } x \in A \text{ y } |x - a| < \delta_1$$

y

$$|g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{siempre que } x \in A \text{ y } |x - a| < \delta_2.$$

Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$, si $x \in A$ con $|x - a| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(a)| &= |(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \quad \text{Por (1.1)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

por lo tanto $f + g$ es continua en a.

■

2. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en a, existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in A$, con $|x - a| < \delta$, se tiene que:

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}.$$

En este caso,

$$\begin{aligned} |(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)| &= |\lambda f(x) - \lambda f(a)| \\ &= |\lambda(f(x) - f(a))| \\ &= |\lambda||f(x) - f(a)| \\ &< \left(\frac{|\lambda|}{|\lambda| + 1}\right)\varepsilon \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Por ende, λf es continua en a.

$\blacksquare$

3. Note que, como g es continua en a, $-g = (-1)g$ es continua en a (apartado 2) y, en virtud del apartado 1 del teorema presente, $f-g = f+(-1)g$ es continua en a.

$\blacksquare$

4. Como f, g son continuas en a, $f+g$ también es continua en a.

   Por otro lado, la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = x^2$ es continua en $\mathbb{R}$. Así, el Teorema (2) garantiza que las funciones f^2,g^2 y $(f+g)^2$ son continuas en a. Nuevamente, de los apartados anteriores, $\frac{1}{2}((f+g)^2 - f^2 - g^2)$ es continua en a, como
$$f \cdot g = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2]$$
   entonces $f \cdot g$ es continua en a.

$\blacksquare$

5. Observe que la función $h : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$. De esta manera, el Teorema (2) garantiza que la función $\frac{1}{g} = h \circ g$ es continua en a, ya que $g(a) \neq 0$, y como f es continua en a, $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ es continua en a.

$\blacksquare$

Por último, se dará introducción al siguiente resultado, el cual se enunciará sin demostración

Teorema 4. *(Teorema de los Valores Extremos)[5] Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f esta acotada y alcanza su máximo y mínimo en $[a,b]$.*

A continuación se introducirá la noción de diferenciación

Definición 2. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in I$. Se dice que f es diferenciable en x_0 si existe el límite*
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{1.2}$$

Al límite se le denomina derivada de f en x_0, denotado por $f'(x_0)$.

Si $A \subset I$ es un conjunto abierto, se dice que f es diferenciable en A si es diferenciable en todos los puntos de A.

Para más información sobre propiedades, resultados y generalizaciones de la definición de derivadas, se puede revisar [22].

Teorema 5. *[3, 4] Sean $A \subset I$ un conjunto abierto y $c \in A$. Si f es diferenciable en c, entonces f es continua en c.*

Demostración:

Como

$$f(x) = f(c) + \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)(x - c).$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c} f(x) &= \lim_{x\to c}\left[f(c) + \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)(x - c)\right] \\
&= \lim_{x\to c} f(c) + \lim_{x\to c}\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\lim_{x - c}(x - c) \\
&= f(c) + f'(c)\cdot 0 \\
&= f(c).
\end{aligned}$$

A continuación se mostrarán algunos resultados relacionados con las propiedades de derivadas, para más información sobre sus demostraciones, se remite al lector a [7],[15],[20] y [21].

Teorema 6. *[21],[15] Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables en $c \in (a, b)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces:*

1. *La suma $f + g$ es derivable en c y $(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$.*

2. *λf es derivable en c y $(\lambda f)'(c) = \lambda f'(c)$.*

3. *La diferencia $f - g$ es derivable en c y $(f - g)'(c) = f'(c) - g'(c)$.*

4. *El producto* $f \cdot g$ *es derivable en* c *y* $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$.

5. *Si* $g(c) \neq 0$, *entonces* f/g *es derivable en* c *y* $(f/g)'(c) = \frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{g^2(c)}$.

6. *Si* $g : [a,b] \longrightarrow [m,M]$ *es derivable en* c *y* $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es derivable en* $g(c)$, *entonces la composición* $f \circ g$ *es derivable en* c *y se satisface:*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Observación 1. *Al último enunciado del Teorema 6 se le conoce como la Regla de la Cadena y es uno de los resultados más importantes en la teoría de diferenciación. Una demostración completa de este resultado puede verse en [24].*

A continuación se dará introducción a algunos resultados que será de utilidad para el resto de este trabajo. Para sus demostraciones, se remite al lector a [15], [20] y [22].

Teorema 7. *[20],[15] Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *números reales, con* $a < b$, *y* $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función diferenciable sobre* (a,b), *entonces* f *es constante si, y solo si, para todo* $x \in (a,b)$, $f'(x) = 0$.

Teorema 8. *(Teorema de Rolle)[22] Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua en* $[a,b]$, *diferenciable en* (a,b) *y que satisface* $f(a) = f(b) = 0$, *entonces existe* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

Teorema 9. *(Teorema del Valor Medio)[15] Sean* $a, b \in \mathbb{R}$ *números reales, con* $a < b$, *y* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua sobre* $[a,b]$, *diferenciable sobre* (a,b). *Entonces existe* $c \in (a,b)$ *tal que:*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Teorema 10. *(Criterio de la Primera Derivada)[20] Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferenciable en* (a,b) *y* $c \in (a,b)$ *un punto crítico*

- *Si* $f'(x) > 0$ *en* (a,c) *y* $f'(c) < 0$ *en* (c,b), *entonces* $f(c)$ *es un mínimo local de* f *en* (a,b).

- *Si* $f'(x) < 0$ *en* (a, c) *y* $f'(c) > 0$ *en* (c, b)*, entonces* $f(c)$ *es un máximo local de* f *en* (a, b)*.*

- *Si* $f'(x)$ *tiene el mismo signo en ambos lados de* c*, entonces* f *no es un valor extremo de* f*.*

Teorema 11. *(Criterio de la Segunda Derivada)[20] Supóngase que* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función tal que* f',f'' *existen en todo punto del intervalo* (a, b) *y* $c \in (a, b)$ *satisface* $f'(c) = 0$*.*

- *Si* $f''(c) < 0$*, entonces* f *es un máximo local de* f *en* (a, b)*.*

- *Si* $f''(c) > 0$*, entonces* f *es un mínimo local de* f *en* (a, b)*.*

Definición 3. *[18] Sea* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función. Se dice que* f *satisface una condición de Lipschitz (o que es Lipschitz) en* I *si existe* $K > 0$ *tal que:*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

para todo $x, y \in I$*. También se dice que* f *es K-lipschitziana en [a,b].*

Para finalizar esta sección, se hará introducción de algunas desigualdades

Lema 1. *(Desigualdad de Young) Sean* a *y* b *números reales no negativos y* p*,* q *números reales mayores que uno tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, entonces:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.3}$$

Demostración:

Sean $t > 0$ y $0 < a < 1$. Entonces se tiene:

$$t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha).$$

En efecto, se define la función $h : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante la expresión:

$$h(t) = \alpha t + (1 - \alpha) - t^\alpha.$$

Haciendo $h'(t) = 0$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} h'(t) &= 0 \\ \alpha - \alpha t^{\alpha-1} &= 0 \\ -t^{\alpha-1} &= -1 \\ t &= 1. \end{aligned}$$

Nótese que h alcanza un mínimo absoluto en $t = 1$. En efecto, como $0 < \alpha < 1$, entonces:

- Para $0 < t < 1$, se tiene que $t^{\alpha-1} > 1$, de esta manera:

$$\begin{aligned} h'(t) &= \alpha(1 - t^{\alpha-1}) \\ &< 0. \end{aligned}$$

  Por lo que h es decreciente en $(0, 1)$.

- Para $t > 1$, se tiene que $t^{\alpha-1} < 1$, luego:

$$\begin{aligned} h'(t) &= \alpha(1 - t^{\alpha-1}) \\ &> 0. \end{aligned}$$

  Por lo que h es creciente en $(1, \infty)$.

Luego, por el Criterio de la primera derivada , h alcanza un mínimo en $t = 1$. Como h no tiene más puntos críticos, h alcanza un mínimo absoluto en $t = 1$. Esto, combinado con que $h(1) = 0$, demuestra que $h(t) \geq 0$ para todo $t > 0$. Es decir:

$$\begin{aligned} \alpha t + (1 - \alpha) - t^{\alpha} &\geq 0 \\ \alpha t + (1 - \alpha) &\geq t^{\alpha}. \end{aligned}$$

En particular, para $t = \frac{a^p}{b^q}$ y $\alpha = \frac{1}{p}$, la desigualdad anterior se tranforma en:

$$\frac{a}{b^{\frac{q}{p}}} \leq \frac{1}{p}\frac{a^p}{b^q} + \frac{1}{q}$$

o de forma equivalente

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

■

Teorema 12. *(Desigualdad De Hölder Discreta) Sean* $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ *números reales y* $p, q > 1$ *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Entonces se tiene:*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.4}$$

Demostración:

Para $k = 1, 2, \ldots, n, x_k = 0$ o $y_k = 0$, es inmediato, pues la desigualdad en cuestión se reduce a la identidad:

$$0 = 0.$$

Suponga que $x_{k_1} \neq 0$ y $y_{k_2} \neq 0$ para algunos k_1,k_2. Para $k = 1, 2, \ldots, n$, se definen $|u_k|$ y $|v_k|$ de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{x_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}}, \\ v_k &= \frac{y_k}{\left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}}. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Young a $|u_k|$ y $|v_k|$ y sumando sobre k, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |u_k||v_k| &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{|u_k|^p}{p} + \sum_{k=1}^{n} \frac{|v_k|^q}{q} \\
&= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p} + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{n} \frac{|y_k|^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} |y_i|^q} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} |u_k||v_k| &= \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{x_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}} \right| \cdot \left| \frac{y_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \right| \\
&= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k y_k|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}}.
\end{aligned}$$

Finalmente obtenemos:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k y_k|}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}} \leq 1.$$

Es decir:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

■

1.2 Integración

En esta sección se tratará la noción de integración. Se definirán algunos conceptos previos para la introducción de la integral definida, así como algunos resultados básicos

Definición 4. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $I = [a, b]$ y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ un subconjunto finito de I. Se dice que P es una partición de $[a, b]$ si $x_0 = a$, $x_n = b$ y se cumple que $x_k < x_{k+1}$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para $k = 1, \ldots, n$, una suma de Riemann de f correspondiente a P, denotada por $S(f, I, P)$ se define de la siguiente manera:*

$$S(f, I, P) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}).$$

La norma de P, denotada por $\|P\|$, se define por:

$$\|P\| = \max_{1 \leq k \leq n} \{x_k - x_{k-1}\}.$$

Definición 5. *Sean P, Q dos particiones de $[a, b]$. Se dice que P es un refinamiento de Q (o que P refina a Q) si $P \supseteq Q$.*

Proposición 1. *Sean P, Q particiones de $[a, b]$ tales que P refina a Q. Entonces* $\|P\| \leq \|Q\|$.

Demostración:

Se realizará esta demostración mediante el Principio de Inducción sobre $Card\{Q-P\}$.

Sea $c \in [a, b] - P$, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, supongamos que $Q = P \cup \{c\}$ y $j \in \mathbb{N}$, con $1 \leq j \leq n$ tal que $x_{j-1} \leq c < x_j$. Luego, como

$$x_j - c \leq x_j - x_{j-1}$$

$$c - x_{j-1} \leq x_j - x_{j-1}.$$

entonces

$$\max\{c - x_{j-1}, x_j - c\} \leq x_j - x_{j-1}$$

por consiguiente,

$$\begin{aligned} \|P\| &= \max_{1\le k\le n}\{x_k - x_{k-1}\} \\ &\ge \max_{1\le k\le n, k\ne j}\{x_k - x_{k-1}, \max\{c - x_{j-1}, x_j - c\}\} \quad (1.5)\\ &= \|Q\|. \quad (1.6)\end{aligned}$$

Ahora bien, supóngase que $Q - P = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ donde $y_0, y_1, \ldots, y_m \in [a, b] - P$ y además

$$\|Q\| \le \|P\|.$$

Luego, sea $y_{m+1} \in [a, b] - Q$. Combinando (1.5) y la hipótesis inductiva, se obtiene

$$\begin{aligned} \|Q \cup \{y_{m+1}\}\| &\le \|Q\| \\ &\le \|P\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|Q\| \le \|P\|$ para toda partición Q que refina a P.

$\blacksquare$

Ahora se definirá la noción de integral definida:

Definición 6. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de [a,b] y $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para $k = 1, \ldots, n$. Se dice que f es integrable sobre $[a, b]$ si el siguiente límite*

$$\lim_{\|P\|\longrightarrow 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

existe.

En otras palabras, f es integrable Riemann si, para algún $A \in \mathbb{R}$ ocurre que, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para cualquier partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ que satisfaga $\|P\| < \delta$ y $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ para $k = 1, \ldots, n$, entonces

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) - A\right| < \varepsilon.$$

Al número A se le conoce como Integral de Riemann de f de a hasta b y se denota por $\int_a^b f(x)\,dx$.

Observación 2. *Se puede demostrar que el número A de la definición anterior es único.*

Ejemplo 6. *Consideremos la función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. Ahora calculemos la integral de esta función entre a y b, para ello, sea $\varepsilon > 0$, $\delta = \frac{\varepsilon}{b-a}$, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$ y para $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$, luego*

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(x_{k+1} - x_k) - \frac{b^2 - a^2}{2}\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1} c_k(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{k+1}^2 - x_k^2}{2}\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\left(c_k - \frac{x_{k+1} + x_k}{2}\right)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\left|c_k - \frac{x_{k+1} + x_k}{2}\right| \qquad \textit{Por (1.1)} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)^2 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Luego f es integrable y adémas $\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

Ejemplo 7. *Consideremos la función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x)$. Luego,si $\varepsilon > 0$, y $\delta = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, por el Teorema (9), se obtiene*

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=0}^{n-1}\cos(c_k)(x_{k+1}-x_k)-\sin(b)+\sin(a)\right| \\
&=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\cos(c_k)(x_{k+1}-x_k)-\sum_{k=0}^{n-1}(\sin(x_{k+1})-\sin(x_k))\right| \\
&=\left|\sum_{k=0}^{n-1}(\cos(c_k)-\cos(d_k))(x_{k+1}-x_k)\right| && \textit{Por el Teorema (11)} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}2\left|\sin\left(\frac{c_k+d_k}{2}\right)\right|\sin\left(\frac{c_k-d_k}{2}\right)\Bigg|(x_{k+1}-x_k) \\
&\leq 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|c_k-d_k|}{2}(x_{k+1}-x_k) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{(b-a)}(x_{k+1}-x_k) \\
&=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

A continuación se enunciarán algunas propiedades sobre integrales definidas, cuya demostración puede hallarse en [3],[5],[6],[18],[22].

Teorema 13. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables sobre $[a, b]$, entonces:*

1. *$\lambda f + g$ es integrable y además:*

$$\int_a^b [\lambda f(x) + g(x)]\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

2. *(Positividad) Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.*

3. *(Monotonía) Si f, g satisfacen que, para todo $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.*

4. *(Aditividad de la integral sobre intervalos) Si $c \in (a, b)$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Observación 3. *Por convención, se considera*

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

y para $a > b$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

El siguiente resultado es conocido en en la literatura matemática como el Teorema Fundamental del Cálculo. A continuación se establecerán dos versiones del mismo:

Teorema 14. *(Teorema Fundamental del Cálculo, primera versión)[20] Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua.La función $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

es diferenciable y además

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).$$

Demostración:

Sean $x_0 \in [a, b]$ y $\varepsilon > 0$.Como f es continua, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in [a, b]$ que satisfaga $|x - x_0| < \delta$, se tiene:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Si definimos $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

y $|x - x_0| < \delta$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt}{x - x_0} - f(x_0)\right| \\
&= \left|\frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt - f(x_0)\right| \\
&= |f(c) - f(x_0)| \qquad \text{para algún } c \text{ entre } x \text{ y } x_0 \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Demostrando así que F es derivable y además

$$\frac{dF}{dx}(x_0) = f(x_0).$$

$\blacksquare$

Teorema 15. *(Teorema Fundamental del Cálculo, segunda versión)[20] Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y F una primitiva de f en $[a, b]$ tal que $F(a^+) = F(a)$ y $F(b^-) = F(b)$. Entonces*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Demostración:

Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición en $[a, b]$. Como F es una función diferenciable en (a, b) y continua en a y b se tiene que F es continua en $[a, b]$. De aquí obtenemos que f es continua en $[x_{k-1}, x_k]$ y diferenciable en (x_{k-1}, x_k) para $k = 1, 2, \ldots, n$. Por el Teorema (9), existe $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tal que

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(c_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Observemos que

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^{n} F'(c_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Ahora bien, sean $\varepsilon > 0$, y $\delta > 0$ tales que, si $P_1 = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ es una partición de $[a, b]$ con $\|P_1\| < \delta$ y $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [a, b]$ tales que, para $k = 1, 2, \ldots, n$, y $t_k \in (x_{k-1}, x_k)$, entonces

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(y_k - y_{k_1}) - \int_a^b f(t)\,dt \right| < \varepsilon.$$

En particular, si $t_k = d_k$ de tal forma que d_k satisfaga (1.7) para $k = 1, 2, \ldots, n$ respecto a la partición P_1, entonces

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(d_k)(y_k - y_{k_1}) - \int_a^b f(t)\, dt\right| < \varepsilon$$

por (1.7), se cumple que

$$\left|F(b) - F(a) - \int_a^b f(t)\, dt\right| < \varepsilon,$$

para todo $\varepsilon > 0$, por lo tanto

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a).$$

■

A continuación se enunciará una versión de la Desigualdad Triangular para integrales.

Teorema 16. *(Desigualdad Triangular para Integrales) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces*

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{1.8}$$

Demostración:

Sean $P = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$ y $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ tales que $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$. En virtud de la desigualdad (1.1), se obtiene lo siguiente

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} f(c_k)(x_{k+1} - x_k)\right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |f(c_k)|(x_{k+1} - x_k).$$

Considerando el límite cuando $\|P\| \to 0$, se obtiene

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

■

Por último, el siguiente resultado se enunciará sin demostración. Para mas información sobre la misma, véase [26].

Teorema 17. *[26] Sean $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y $f : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua con $g([a, b]) \subseteq [c, d]$. Entonces $f \circ g$ es integrable.*

De este resultado se desprenden los corolarios presentados a continuación:

Corolario 2. *[26] Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, entonces $|f|$ y f^2 son integrables en $[a, b]$*

De la integrabilidad de la función identidad, se tiene lo siguiente:

Corolario 3. *[26] Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces f es integrable.*

Por último, como $f \cdot g = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right]$, del Corolario 2 y la linealidad de la integral, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 4. *[26] Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables, entonces $f \cdot g$ es integrable.*

Por último, se mostrará un resultado que da la expresión de la integral de un producto de funciones mediante el uso de primitivas.

Teorema 18. *([3],[21] y [26]) Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables con primitivas F, G respectivamente, entonces:*

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(x)g(x)\,dx.$$

Demostración:

Como F, G son funciones diferenciables, $F \cdot G$ es diferenciable y así

$$(F \cdot G)'(x) = f(x)G(x) + F(x)g(x).$$

Integrando ambos miembros y usando el Teorema (15), se tiene que

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b f(x)G(x)\,dx + \int_a^b F(x)g(x)\,dx$$

lo cual equivale a

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(x)g(x)\,dx.$$

$\blacksquare$

1.3 Integración Numérica

En ocasiones, el cálculo de una primitiva puede llegar a ser muy engorroso o incluso, imposible al momento de hallar la integral de una función. En muchas aplicaciones, es posible que la esté expresada de forma tabulada. Por esta razón, para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$, resulta necesario hallar aproximaciones numéricas del área limitada por la curva, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Existen varios métodos para aproximar integrales, sin embargo, en este trabajo nos centramos en dos de ellos, La Regla del Trapecio y La Regla de Simpson (para más información sobre otros métodos de integración numérica, véase [16],[25] y [27]). La Regla de Simpson debe su nombre al matemático ingles Thomas Simpson (1710-1761), sin embargo, cabe destacar que el método de Simpson no es de su autoría, sino de Johannes Kepler (1571-1630), quien desarrolló dicha regla mediante " El Método del Barril", más tarde formalizada por Simpson, tras la introducción del cálculo infinitesimal hecha por Newton y Leibnitz, en su articulo *Mathematical Dissertation on a Variety of Physical and Analytical Subjects* publicada en 1743. Para mayor información sobre aspectos biográficos de Thomas Simpson y aspectos históricos de la desigualdad de Simpson y temas relacionados, véase [2],[38],[39].

Definición 7. *Una fórmula de cuadratura es una función $Q : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que permite aproximar la integral*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

para una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable dada, y es de la forma

$$Q(f) = \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k)$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ *son números reales dispuestos de manera creciente, y* $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}$ *elegidos de manera conveniente.*

A los números x_k *se les denomina nodos.*

Definición 8. *[39] Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función integrable. Diremos que una fórmula de cuadratura* Q *es de tipo interpolatorio (denotada también por f.c.t.i.) si dicha fórmula aproxima a* f *mediante un polinomio* P *de grado* m *en los puntos* $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots, (x_n, f(x_n))$*, donde* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *son los nodos de la fórmula* Q*.*

Observación 4. *Se puede demostrar que los pesos de una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio* Q *vienen dados, para* $k = 0, 1, \ldots, n$ *por la expresión*

$$w_k = \int_a^b \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{(x - x_j)}{x_k - x_j}\, dx.$$

Al conjunto de polinomios $\{L_k\}_{k=1}^n$ *donde* $L_k(x) = \prod_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{(x - x_j)}{x_k - x_j}$ *se les denomina base de Lagrange.*

Definición 9. *Denotaremos el error de una fórmula de cuadratura* Q *a la siguiente expresión:*

$$E_Q(f) = \left| \int_a^b f(x)\, dx - Q(f) \right|.$$

Diremos que la fórmula de cuadratura Q *tiene orden* $m \in \mathbb{N}$ *si satisface lo siguiente:*

$$\begin{aligned} E_Q(p) &= 0 \qquad \text{para todo polinomio } p \text{ de grado menor o igual a } m \text{ y} \\ E_Q(q) &\neq 0 \qquad \text{para algún polinomio } q \text{ de grado } m. \end{aligned}$$

Observación 5. *Como el conjunto* $\{x^n\}_{n=0}^m$ *forma una base vectorial para el espacio de los polinomios de grado menor o igual a* m*, para verificar que una fórmula de cuadratura es de orden* m*, basta comprobar lo siguiente*

1. $E_Q(x^n) = 0 \quad$ *para* $0 \leq n \leq m$ *y*

2. $E_Q(x^{m+1}) \neq 0.$

De las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio, existe una clase especial que es de interés en este trabajo.

Definición 10. *Sean $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y Q una fórmula de cuadratura de tipo interpolatorio con nodos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Se dice que Q es una Fórmula de Newton-Cotes si los nodos x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ son equidistantes, esto es, pueden expresarse de la siguiente manera*

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}.$$

Se dice que Q es una fórmula de Newton-Cotes cerrada si admite como nodos los puntos extremos a, b del intervalo $[a, b]$. En caso contrario, se dice que Q es una fórmula de Newton-Cotes abierta.

En algunos casos, la longitud de intervalo $[a, b]$ es grande, por ende resulta necesario particionar $[a, b]$ en pequeños subintervalos y aplicar la fórmula de cuadratura en cada subintervalo. Esto promueve la siguiente definición:

Definición 11. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Una fórmula de cuadratura compuesta Q se obtiene de una fórmula de cuadratura R aplicada a cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y sumando cada una de las estimaciones. Esto es*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} Q(f, [x_{k-1}, x_k]).$$

En lo que sigue para los propósitos de este trabajo, se estudiarán las fórmulas de cuadratura de Trapecio y Simpson.

1.3.1 Regla del Trapecio

Definición 12. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, se denomina la Regla del Trapecio a la Fórmula de cuadratura siguiente*

$$T(f, a, b) = \frac{b-a}{2}[f(b) + f(a)].$$

Observación 6. *La idea que antecede a la Regla del Trapecio consiste en aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante un polinomio de primer grado en x que interpola a f en $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. De esta manera, T es una regla de cuadratura cerrada de nodos a, b. Si P_1 es dicho polinomio, entonces P_1 admite la siguiente expresión*

$$P_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

integrando desde a hasta b, haciendo uso de las propiedades de la integral (ver 13) y el Teorema (15), se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b P_1(x)\,dx &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\int_a^b (x - a)\,dx + \int_a^b f(a)\,dx \\
&= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\frac{(b - a)^2}{2} + f(a)(b - a) \\
&= (b - a)\left[\frac{f(b) - f(a)}{2} + f(a)\right] \\
&= (b - a)\left(\frac{f(b) + f(a)}{2}\right).
\end{aligned}$$

La cual es la fórmula T descrita previamente.

El siguiente teorema es un resultado básico de la literatura matemática y proporciona una estimación del error generado por la fórmula del Trapecio para funciones que admiten segunda derivada acotada en $[a, b]$.

Teorema 19. *[21] Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $a, b \in I$ con $a < b$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es dos veces diferenciable en I, con segunda derivada acotada en $[a, b]$. Si $M > 0$ es una cota superior de $|f''(x)|$, para $x \in [a, b]$, entonces el error $E_T(f)$, generado por la Regla del Trapecio al aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$, satisface*

$$|E_T(f)| \leq \frac{(b - a)^3}{12}M.$$

Demostración:

Notemos que, para cada $x \in [a, b]$, la función $E_T : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$E_T(x) = \int_a^b f(t)\,dt - \frac{x - a}{2}[f(x) + f(a)].$$

Es, por construcción, dos veces diferenciable, así también lo es E_T y además

$$\begin{aligned} E_T'(x) &= f(x) - \frac{f(x)+f(a)}{2} - f'(x)(x-a) \\ &= \frac{f(x)-f(a)-f'(x)(x-a)}{2}. \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} E_T''(x) &= \frac{f'(x)-f''(x)(x-a)-f'(x)}{2} \\ &= -\frac{f''(x)(x-a)}{2}. \end{aligned}$$

Considerando el valor absoluto en la segunda derivada de E_T, y como $E_T'(a) = 0$ y que M es cota superior de $|f''(x)|$, $x \in [a,b]$, se pueden aplicar la Desigualdad Triangular para Integrales (1.8) y el Teorema (13), apartado 3 y obtener

$$\begin{aligned} |E_T'(x)| &= |E_T'(x) - E_T'(a)| \\ &= \left| \int_a^b E_T''(t)\, dt \right| \\ &\leq \int_a^x |E_T''(t)|\, dt \\ &\leq \int_a^x \frac{M(t-a)}{2}\, dt \\ &= \frac{M(x-a)^2}{4}. \end{aligned}$$

Integrando nuevamente, considerando que $E_T(a) = 0$ y aplicando la Desigualdad Triangular para Integrales (1.8) y el Teorema (13), apartado 3, se tiene

$$\begin{aligned} |E_T(x)| &= |E_T(x) - E_T(a)| \\ &= \left| \int_a^x E'(t)\, dt \right| \\ &\leq \int_a^x |E_T'(t)|\, dt \\ &\leq \int_a^x \frac{M(t-a)^2}{4}\, dt \end{aligned}$$

$$= \frac{(b-a)^3}{12} M.$$

Obteniendo la desigualdad deseada.

■

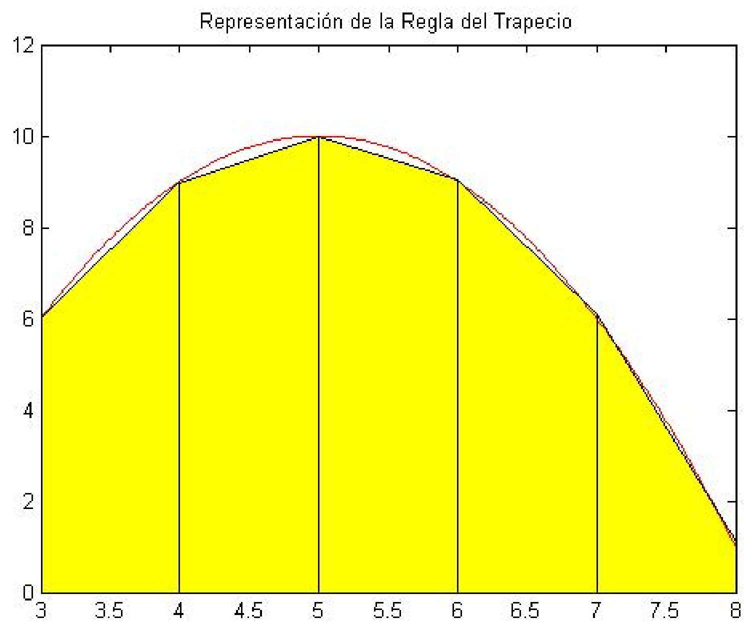

Figura 1.1: Representación de la Regla del Trapecio

En el año 2004, N. Ujevic demostró el siguiente resultado, la cual supone otra versión de la Regla del Trapecio simple antes descrita [90].

Teorema 20. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto dado y $a, b \in I$ tales que $a < b$. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que*

$$\gamma \leq f'(t) \leq \Gamma \qquad \textit{para todo } x \in [a, b] \textit{ y } \gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$$

entonces

$$\left|\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))-\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{\Gamma-\gamma}{8}(b-a)^2$$

Para más información sobre otros métodos de aproximación de integrales, véase [43].

1.3.2 Regla de Simpson

En la Regla del Trapecio se utilizaron trapecios (esto es, el área bajo la curva de segmentos de recta) para aproximar el área bajo la curva de f. Si en lugar de eso, se usan segmentos parabólicos, se obtiene la siguiente regla de integración numérica.

Definición 13. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. La Regla de Simpson simple se define por la siguiente expresión:*

$$\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]. \tag{1.9}$$

Esta regla está basada en la idea de aproximar la función f definida por un polinomio de segundo grado, esto es, un polinomio de la forma $p(x) = cx^2 + dx + e$ definido sobre $[a, b]$. Para ilustrar esto, se considerarán $[a, b] = [-h, h]$, con $h > 0$ y tres puntos $P_0(-h, y_0), P_1(0, y_1)$ y $P_2(h, y_2)$ de la gráfica de p. Observemos que

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^{h} p(x)\,dx &= \int_{-h}^{h}(cx^2+dx+e)\,dx \\
&= \left[c\frac{x^3}{3}+d\frac{x^2}{2}+ex\right]\Bigg|_{x=-h}^{x=h} \\
&= \left[c\frac{h^3}{3}+d\frac{h^2}{2}+eh\right]-\left[-c\frac{h^3}{3}+d\frac{h^2}{2}-eh\right] \\
&= \frac{2ch^3}{3}+2eh \\
&= \frac{h}{3}[2ch^2+6e].
\end{aligned}$$

Por otro lado, como los puntos P_0,P_1 y P_2 están sobre la gráfica de p, satisfacen la ecuación de la misma. De esta manera se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_0 &= ch^2 - dh + e \\ y_1 &= e \\ y_2 &= ch^2 + dh + e. \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} y_0 + 4y_1 + y_2 &= (2ch^2 + 2e) + 4e \\ &= 2ch^2 + 6e. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2] = \int_{-h}^{h} p(x)\,dx.$$

Ahora bien, considerando $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $q : [\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función polinómica cuadrática cuya gráfica pasa por los puntos $P_0(\frac{a-b}{2}, f(a))$, $P_1(0, f\left(\frac{a+b}{2}\right))$ y $P_2(\frac{b-a}{2}, f(b))$, entonces

$$\int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} q(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Luego, si se define $p : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$p(x) = q\left(x - \frac{a+b}{2}\right).$$

se cumple que

$$\begin{aligned} p(a) &= f(a) \\ p(b) &= f(b) \\ p\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}\int_a^b p(x)\,dx &= \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} p\left(t+\frac{a+b}{2}\right)dt \\ &= \int_{\frac{a-b}{2}}^{\frac{b-a}{2}} q(t)\,dt \\ &= \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right].\end{aligned}$$

Es decir, la expresión derecha en (1.9) representa el área bajo la curva de una fun- ción polinómica de segundo grado que pasa por los puntos $P_0(a, f(a))$, $P_1(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right))$ y $P_2(b, f(b))$.

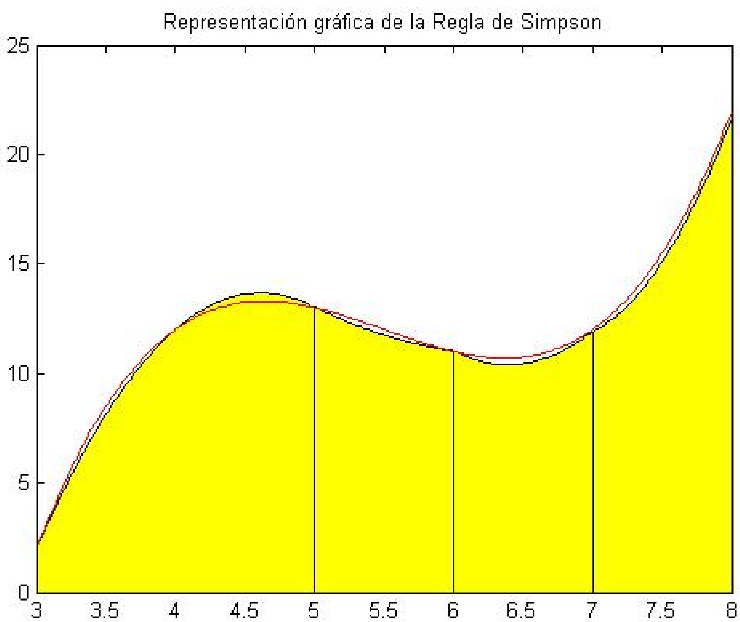

Figura 1.2: Representación de la Regla de Simpson

En lo que sigue se enunciarán resultados que tienen que ver con estimaciones de la Regla de Simpson para todo tipo de funciones. Se empezará con la versión clásica de la Desigualdad de Simpson.

Teorema 21. *(Desigualdad de Simpson)[21] Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que admite* *cuarta derivada acotada en* (a,b). *Entonces:*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880}\|f^{(IV)}\|_\infty$$

donde $\|f\|_\infty = \sup_{a\leq x\leq b}\{|f(x)|\}$.

Demostración:

Se define $\varphi : [0, \frac{b-a}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi(t) = \frac{t}{3}\left[f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\right] - \int_{\frac{a+b}{2}-t}^{\frac{a+b}{2}+t} f(x)\,dx.$$

Derivando tres veces, se obtiene

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \frac{1}{3}\left[f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\right]+\frac{t}{3}\left[-f'\left(\frac{a+b}{2}-t\right)+\right.\\
&\quad \left.+f'\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\right]-\left[f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)+f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right]\\
\varphi''(t) &= \frac{1}{3}\left[-f'\left(\frac{a+b}{2}-t\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\right]+\frac{1}{3}\left[-f'\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right.\\
&\quad \left.+f'\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\right]-\left[f'\left(\frac{a+b}{2}+t\right)-f'\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right]\\
&\quad +\frac{t}{3}\left[f''\left(\frac{a+b}{2}-t\right)+f''\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\right]\\
\varphi'''(t) &= \frac{1}{3}\left[f''\left(\frac{a+b}{2}-t\right)+f''\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\right]+\frac{1}{3}\left[f''\left(\frac{a+b}{2}-t\right)+f''\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\right]\\
&\quad -\left[f''\left(\frac{a+b}{2}-t\right)+f''\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\right]+\frac{1}{3}\left[f''\left(\frac{a+b}{2}-t\right)+f''\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\right]+\\
&\quad +\frac{t}{3}\left[-f'''\left(\frac{a+b}{2}-t\right)+f'''\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\right].
\end{aligned}$$

De esto se tiene que

$$\varphi'''(t) = \frac{t}{3}\left[-f'''\left(\frac{a+b}{2}-t\right)+f'''\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\right].$$

Por hipótesis, $f^{(IV)}(t)$ existe en (a,b), luego f''' es continua en $[a,b]$, y derivable en (a,b). Por el Teorema (9), existe $c\in(a,b)$ que depende de t, tal que

$$f'''\left(\frac{a+b}{2}+t\right)-f'''\left(\frac{a+b}{2}-t\right)=2tf^{(IV)}(c)$$

por ende, para todo $t \in [0, \frac{b-a}{2}]$

$$|\varphi'''(t)| \leq \frac{2t^2}{3}\|f^{(IV)}\|_\infty.$$

Integrando ambos miembros de 0 a x, $0 \leq x \leq \frac{b-a}{2}$ y mediante el Teorema (15), la propiedad de monotonía de la integral de Riemann y la desigualdad triangular para integrales, se obtiene:

$$\begin{aligned} |\varphi''(x)| &\leq \int_0^x |\varphi'''(t)|\, dt \\ &\leq \int_0^x \frac{2t^2}{3}\|f^{(IV)}\|_\infty \\ &= \frac{2}{9}x^3\|f^{(IV)}\|_\infty. \end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} |\varphi'(x)| &\leq \frac{x^4}{18}\|f^{(IV)}\|_\infty \\ |\varphi(x)| &\leq \frac{x^5}{90}\|f^{(IV)}\|_\infty. \end{aligned}$$

En particular, si $x = \frac{b-a}{2}$, entonces

$$\left|\varphi\left(\frac{b-a}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880}\|f^{(IV)}\|_\infty.$$

Por lo tanto

$$\left|\frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880}\|f^{(IV)}\|_\infty.$$

■

En los últimos años, varios matemáticos han propuesto nuevas estimaciones en la Desigualdad de Simpson para otras clases de funciones. Ta es el caso de S. S. Dragomir, donde demostró lo siguiente:

Teorema 22. *[41] Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función L-lipchitziana sobre $[a, b]$. Entonces se tiene la siguiente desigualdad:*

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx - \frac{b-a}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right| \leq \frac{5}{36}L(b-a)^2.$$

También, S.S. Dragomir, junto a R.P. Agarwal y P. Cerone demostraron un nuevo resultado sobre la Desigualdad de Simpson para funciónes de variación acotada en $[a, b]$ [70].

Teorema 23. *[70] Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de variación acotada sobre $[a, b]$. Entonces se tiene la siguiente desigualdad:*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\right| \leq \frac{b-a}{3}\bigvee_a^b(f).$$

donde $\bigvee_a^b$ denota la variación total de f sobre $[a, b]$. La constante $\frac{1}{3}$ en la desigualdad anterior es la mejor posible.

1.4 Espacios L^p

En esta sección se tratarán algunas propiedades, resultados y desigualdades relacionadas con los espacios L^p. Se empezará esta sección con algunos tópicos sobre Análisis Funcional y Teoría de la Medida que serán de utilidad para la comprensión del contenido de este Trabajo de Grado. Para los objetivos de este material, se considerarán espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, para mayor información, se remite al lector a [31],[32],[34],[35].

Definición 14. *Sea V un espacio vectorial real, junto a las operaciones suma y producto por un escalar $+ : V \times V \longrightarrow V$, $\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$. Una norma en V es una función $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:*

i) $\|\vec{x}\| \geq 0$ *para todo* $\vec{x} \in V$.

ii) $\|\vec{x}\| = 0$ *si, y solo si* $\vec{x} = \vec{0}$.

iii) *Si* $\vec{x} \in V$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, *entonces* $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|$.

iv) *Sean* $\vec{x}, \vec{y} \in V$, *entonces* $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

El par $(V, \|\cdot\|)$, donde V es un espacio vectorial real y $\|\cdot\|$ es una norma sobre V, se denomina espacio normado.

Proposición 2. *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado, la aplicación* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

define una métrica en X*.*

Definición 15. *Un espacio de Banach es un espacio normado* $(X, \|\cdot\|)$ *tal que* X *es un espacio métrico completo respecto a la métrica*

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

Observación 7. *A la métrica* d *descrita en la definición previa se le conoce como la métrica inducida por la norma* $\|\cdot\|$*.*

Definición 16. *Sea* V *un espacio vectorial real. Un producto interno sobre* V *es una función* $<\cdot,\cdot>: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *que satisface:*

i) $<\vec{x}, \vec{x}> \geq 0$ *para todo* $\vec{x} \in V$*.*

ii) $<\vec{x}, \vec{x}> = 0$ *si, y solo si* $\vec{x} = \vec{0}$*.*

iii) $<\vec{x}, \vec{y}> = <\vec{y}, \vec{x}>$ *para todo* $\vec{x}, \vec{y} \in V$*.*

iv) Si $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$*, entonces* $<\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}> = <\vec{x}, \vec{z}> + <\vec{y}, \vec{z}>$*.*

v) Si $\lambda \in \mathbb{R}$*, entonces para todo* $\vec{x}, \vec{y} \in V$*,* $<\vec{\lambda x}, \vec{y}> = \lambda <\vec{x}, \vec{y}>$

Al par $(V, <\cdot,\cdot>)$*, se le denomina espacio con producto interno.*

Proposición 3. *Sea* $(X, <\cdot,\cdot>)$ *un espacio con producto interno. La aplicación* $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\|x\| = \sqrt{<x, x>}$$

define una norma en X*.*

Observación 8. *A la norma descrita en la proposición anterior se le conoce como la norma inducida por el producto interno* $<\cdot,\cdot>$*.*

Definición 17. *Sea X un conjunto. Una σ-álgebra $\mathcal{A}$ sobre X es una familia de subconjuntos de X que satisface lo siguiente:*

i) $\varnothing \in \mathcal{A}$.

ii) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$.

iii) Si $\{A_n\}_{n\geq 1}$ es una subfamilia numerable de $\mathcal{A}$, entonces $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Al par $(X, \mathcal{A})$ se le denomina espacio medible y a los elementos de $\mathcal{A}$ se le denotan conjuntos medibles.

Definición 18. *Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, una medida sobre $(X, \mathcal{A})$ es una función $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$, (donde $[0, +\infty]$ denota el conjunto de los números reales positivos extendido) que verifica lo siguiente:*

i) $\mu(\varnothing) = 0$.

ii) Si $\{A_n\}_{n\geq 1}$ es una subfamilia numerable de $\mathcal{A}$ disjunta dos a dos, entonces $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

A la terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se le denomina espacio de medida.

Definición 19. *Sean $(X, \mathcal{A})$ y $(Y, \mathcal{B})$ dos espacios medibles. Una función se dice medible si, para todo conjunto medible C de $(Y, \mathcal{B})$, $f^{-1}(C)$ es medible en $(X, \mathcal{A})$.*

Definición 20. *Sean $p, q \in \mathbb{R}$, con $p, q \geq 1$. Se dice que p y q son conjugados si se satisface la siguiente expresión:*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Definición 21. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $p \in [1, \infty)$. Se define el espacio $\mathcal{L}^p(\mu)$ de la manera siguiente:*

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

y además, se define:

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} : \textit{ Existe } M > 0 \textit{ tal que } |f| \leq M \ \ c.s..\}$$

Se puede demostrar que estas operaciones están bien definidas y que, bajo la suma y producto por un escalar usuales, $\mathcal{L}^p(\mu)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Teorema 24. *(Desigualdad de Hölder para Integrales)[32] Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f \in L^p$ y $g \in L^q$. Entonces $f \cdot g \in L^1(\mu)$ y se satisface lo siguiente:*

$$\int_X |fg| \, d\mu \leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demostración:

Denotemos por $A = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$, $B = \left(\int_X |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}$. Se considerarán tres casos:

i. Si $A = 0$ o $B = 0$, en ambos casos $f \cdot g = 0$ y la desigualdad es inmediata, pues se reduce a la identidad

$$0 = 0.$$

ii. Si $A = \infty$ o $B = \infty$, resulta que $\int_X |f \cdot g| \, d\mu \geq \infty$.

iii. Suponga que A y B son finitos no nulos y sean $f_1 = \frac{f}{A}$, $g_1 = \frac{g}{B}$. Aplicando la desigualdad de Young, se obtiene, para cada $x \in X$:

$$|f_1(x)||g_1(x)| \leq \frac{(|f_1(x)|)^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q}.$$

Ahora bien, dado que, por construcción, $|f_1|^p, |g_1|^q$ son integrables, esta última desigualdad muestra que $|f_1||g_1|$ es integrable y por ende $|f \cdot g| = AB|f_1 \cdot g_1|$ es integrable. Esto es, $|f \cdot g| \in L^1(\mu)$. Además, por monotonía de la integral y por construcción de f_1 y g_1, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_X |f_1 \cdot g_1|\, d\mu &\leq \frac{1}{p}\left(\int_X |f_1|^p\, d\mu\right) + \frac{1}{q}\int_X |g_1|^q\, d\mu \\
&= \frac{1}{p}\left(\frac{\int_X |f|^p\, d\mu}{A^p}\right) + \frac{1}{q}\left(\frac{\int_X |g|^q\, d\mu}{B^q}\right) \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\int_X |fg|\, d\mu \leq AB$$

esto es

$$\int_X |fg|\, d\mu \leq \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |g|^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

■

Teorema 25. *(Desigualdad de Minkowski)[32] Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $p, q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones integrables tales que $f, g \in L^p$, entonces:*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Demostración:

Si f, g son tal que $\|f + g\|_p = 0$, la desigualdad es inmediata. Se considerarán tres casos:

i. Si $p = 1$, se puede aplicar la desigualdad triangular junto con las propiedades de monotonía y linealidad de la integral para obtener:

$$\begin{aligned}
\int_X |f + g|\, d\mu &\leq \int_X (|f| + |g|)\, d\mu \\
&= \int_X |f|\, d\mu + \int_X |g|\, d\mu \\
&= \|f\|_p + \|g\|_p.
\end{aligned}$$

ii. Si $p = \infty$ entonces para $M, N > 0$ tales que $\mu(|f|^{-1}(M, \infty)) = \mu(|g|^{-1}(N, \infty)) = 0$ se tiene que, para $x \in X$ tal que $|(f+g)(x)| > M + N$, por la desigualdad triangular, se satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned} M + N &= |f(x) + g(x)| \\ &= |f(x)| + |g(x)|. \end{aligned}$$

luego $|f(x)| > M$ o $|g(x)| > N$. Por consiguiente,

$$|f + g|^{-1}(M + N, \infty) \subset |f|^{-1}(M, \infty) \cup |g|^{-1}(N, \infty)$$

usando las propiedades de monotonía y sub-aditividad de μ, se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mu(|f + g|^{-1}(M + N, \infty)) \\ &\leq \mu(|f|^{-1}(M, \infty)) + \mu(|g|^{-1}(N, \infty)) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Así $\mu(|f + g|^{-1}(M + N, \infty)) = 0$, lo cual demuestra que

$$\begin{aligned} &\{M > 0 : \mu(|f|^{-1}(M, \infty)) = 0\} \,+\, \{N > 0 : \mu(|g|^{-1}(N, \infty)) = 0\} \\ &\subset \{H > 0 : \mu(|f + g|^{-1}(H, \infty)) = 0\}. \end{aligned}$$

Finalmente, de esto se desprende que

$$\begin{aligned} &\text{ínf}(\{H > 0 : \mu(|f + g|^{-1}(H, \infty)) = 0\}) \leq \\ &\text{ínf}(\{M > 0 : \mu(|f|^{-1}(M, \infty)) = 0\}) + \text{ínf}(\{N > 0 : \mu(|g|^{-1}(N, \infty)) = 0\}) \end{aligned}$$

esto es

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

$\blacksquare$

iii. Si $1 < p < \infty$, por hipótesis $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, de donde $q = \frac{p}{p-1}$. Por otra parte, si $f, g \in \mathcal{L}^p$, $f + g \in \mathcal{L}^p$. Nótese que:

$$\begin{aligned}
\int_X (f+g)^p \, d\mu &= \int_X (|f+g|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \, d\mu \\
&= \int_X (|f+g|^{p-1})^q \, d\mu.
\end{aligned}$$

Por ende, $(f+g)^{p-1} \in \mathcal{L}^q(\mu)$ ya que $f+g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Además:

$$\begin{aligned}
\|(f+g)^{p-1}\|_q &= \left(\int_X (f+g)^{q(p-1)} \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_X (f+g)^p \, d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \|f+g\|_p^{p-1}.
\end{aligned}$$

Aplicando la Desigualdad de Hölder, se obtiene

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &\leq \int_X |f||f+g|^{p-1} \, d\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1} \, d\mu \\
&\leq \|f\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \|(f+g)^{p-1}\|_q \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|(f+g)^{p-1}\|_q \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{p-1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

$\blacksquare$

La siguiente proposición enuncia las relaciones entre los espacios $L^p(\mu)$:

Proposición 4. *[12] Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida tal que $0 < \mu(X) < \infty$ y sean $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $1 \leq p < q \leq \infty$, entonces $L^q(\mu) \subset L^p(\mu)$ y además*

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q.$$

para $f \in L^q(\mu)$.

Demostración:

Supóngamos que $q = \infty$ y sea $p \in [1, \infty)$ y $f \in L^{\infty}(\mu)$. Notemos que $|f|^p = |f|^p \mathbf{1}_{\{|f| > \|f\|_\infty\}} + |f|^p \mathbf{1}_{\{|f| \leq \|f\|_\infty\}}$.

Por otro lado, por hipótesis $\mu(|f| > \|f\|_\infty) = 0$, por consiguiente

$$\begin{aligned} \int_X |f|^p \, d\mu &= \int_{\{|f| > \|f\|_\infty\}} |f|^p \, d\mu + \int_{\{|f| \leq \|f\|_\infty\}} |f|^p \, d\mu \\ &\leq 0 + \|f\|_\infty^p \mu(X) \\ &= \|f\|_\infty^p \mu(X). \end{aligned} \tag{1.10}$$

El cual, por hipótesis, es finito, así $f \in L^p(\mu)$. Elevando a la $\frac{1}{p}$ obtenemos

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty (\mu(X))^{\frac{1}{p}}.$$

Ahora bien, si $q < \infty$ y $f \in L^q$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_X |f^p|^{\frac{q}{p}} \, d\mu &= \int_X (|f|^p)^{\frac{q}{p}} \, d\mu \\ &= \int_X |f|^q \, d\mu. \end{aligned}$$

El cual es finito, por ende $f^p \in L^{\frac{q}{p}}$. Denotando por $\mathbf{1}$ la función constantemente igual a 1, se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_X |\mathbf{1}|^{\frac{q}{q-p}} \, d\mu &= \int_X \mathbf{1} \, d\mu \\ &= \mu(X). \end{aligned}$$

el cual, por hipótesis, es finito. Así, aplicando la Desigualdad de Holder a los exponentes conjugados $p_1 = \frac{q}{p}$ y $p_2 = \frac{q}{q-p}$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_X |f|^p \mathbf{1} \, d\mu &\leq \| |f|^p \|_q \|\mathbf{1}\|_{\frac{q}{q-p}} \\ &= \left(\int_X |f|^q \, d\mu \right)^{\frac{p}{q}} \cdot (\mu(X))^{\frac{q-p}{q}} \\ &= \|f\|_q^p \cdot (\mu(X))^{1 - \frac{p}{q}} \end{aligned}$$

que son finitos, esto indica que $f \in L^p$. Finalmente, de esta última desigualdad se obtiene

$$\|f\|_p = \|f\|_q(\mu(X))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

■

Existe un enunciado más general válido para cualquier espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, el cual puede verse en [12].

Proposición 5. *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finito, $p \in (1, \infty)$ y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcion tal que $f \in L^\infty(\mu)$ entonces:*

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

Demostración:

Sea $(p_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales en $[1, \infty]$ que tiende a ∞. Como $f \in L^\infty(\mu)$ y $\mu(X) < \infty$ la proposición 4 garantiza que $f \in L^{p_n}$ para cada $n \geq 1$ y además, en particular

$$\|f\|_{p_n} \leq \mu(X)^{\frac{1}{p_n}}\|f\|_\infty$$

considerando el límite cuando $n \to \infty$, se obtiene:

$$\lim_{p_n\to\infty} \|f\|_{p_n} \leq \|f\|_\infty.$$

Por otro lado, sea $\varepsilon > 0$, entonces para algún $\delta > 0$, se obtiene

$$\mu\{x : |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\} \geq \delta.$$

Así

$$\int_X |f|^{p_n} d\mu \geq \delta(\|f\|_\infty - \varepsilon)^{p_n}$$

luego

$$\lim_{p_n\to\infty} \|f\|_{p_n} \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$$

finalmente, como ε es arbitrario, se tiene que $\lim\limits_{p_n\to\infty} \|f\|_{p_n} \geq \|f\|_\infty$. De esta manera, se demuestra que $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

■

1.5 Funciones de Variación Acotada

Definición 22. *Sean $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$, la variación de f respecto a la P en $[a, b]$ viene dada por:*

$$V(f, P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|.$$

El número

$$\sup\{V(f, P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}$$

se le denomina la variación total de f en $[a, b]$ y se denota por $V(f, [a, b])$ o $\bigvee_a^b f$. Se dice que f es de variación acotada en $[a, b]$ si $\bigvee\limits_a^b f < \infty$.

Al conjunto de las funciones de variación acotada sobre $[a, b]$ se le denota por $BV[a, b]$. En la siguiente proposición se recogen algunas propiedades básicas de las funciones de variación acotada, cuyas demostraciónes pueden verse en [28]

Proposición 6. *[28] Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones de variación acotada, entonces*

a) $f + g$ es de variación acotada y además

$$\bigvee_a^b (f + g) \leq \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g.$$

b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\bigvee_a^b \lambda f = |\lambda| \bigvee_a^b f.$$

c) Si $x, y \in [a, b]$, con $x \leq y$, se satisface lo siguiente

$$|f(x) - f(y)| \leq \bigvee_a^b f.$$

d) Toda función de variación acotada es acotada y además

$$\sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\} \leq |f(a)| + \bigvee_a^b f.$$

e) *Si P, Q son dos particiones de $[a,b]$ tales que $P \subset Q$, entonces $V(f,P) \leq V(f,Q)$.*

f) *Sea $c \in (a,b)$, entonces f es de variación acotada sobre $[a,c]$ y $[c,b]$ y además*

$$\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f.$$

Proposición 7. *Toda función monótona creciente es de variación acotada.*

Demostración:

En efecto, si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a,b]$, entonces para $k = 1, 2, \ldots, n$, $f(x_k) - f(x_{k-1})$ es no negativo. De esta manera:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| &= \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &= f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Lo cual demuestra que f es de variación acotada y además $\bigvee_a^b f = f(b) - f(a)$.

Teorema 26. *(Teorema de Jordan)[28] Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, entonces $f \in BV[a,b]$ si, y solo si, f se puede expresar como diferencia de dos funciones monótonas crecientes.*

Demostración:

Supongamos que f es una función de variación acotada y sea $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$h(x) = \bigvee_a^x f$$

notemos que, para $x, y \in [a,b]$ tales que $x < y$, por la aditividad y positividad de la variación, se tiene que

$$\begin{aligned} h(y) - h(x) &= \bigvee_a^y f - \bigvee_a^x f \\ &= \left(\bigvee_a^x f + \bigvee_x^y f \right) - \bigvee_a^x f. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \bigvee_x^y f \\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

De esta manera, h es monótona creciente. Por otro lado, se define $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = h(x) - f(x).$$

Luego $f = h - g$. Además, para $x, y \in [a,b]$ tales que $x < y$, se satisface

$$
\begin{aligned}
g(y) - g(x) &= \left(\bigvee_a^y f - f(y)\right) - \left(\bigvee_a^x f - f(x)\right) \\
&= \bigvee_x^y f - (f(y) - f(x)) \\
&\geq 0 \qquad\qquad \text{Por (6), apartado c.}
\end{aligned}
$$

De esta manera, g es monótona creciente en $[a,b]$. Así, f se puede reescribir como diferencia de dos funciones monótonas crecientes en $[a,b]$.

Como toda función monótona creciente es, en particular, de variación acotada, las partes $a)$ y $b)$ de la proposicion anterior, con $\lambda = -1$, muestran que la diferencia de funciones monótonas crecientes es de variación acotada en $[a,b]$.

■

Observación 9. *La función h definida en el teorema precedente es conocida en la literatura matemática sobre funciones de variacón acotada como función variación de f y se le denota por V_f. Lo que hace interesante el estudio de esta función es que muchas de las propiedades de f como función las suele heredar la función V_f.*

Observación 10. *Si f es de variación acotada y h_1, h_2 son funciones crecientes tales que $f = h_1 - h_2$, entonces se dice que h_1, h_2 son una descomposición de Jordan de f.*

A continuación, se enunciará un resultado que permite ofrecer una representación explícita de $\bigvee_a^b f$ para ciertas clases de funciones f:

Teorema 27. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), entonces f es de variación acotada sobre $[a,b]$ y además:*

$$\bigvee_{a}^{b} f = \int_a^b |f'(x)|\, dx$$

Para mayor información sobre funciones de variación acotada, se remite a [22]

1.6 Funciones Absolutamente Continuas

La teoría de las funciones absolutamente continuas inició tras los trabajos del matemático Henri Lebesgue sobre la integral que lleva su nombre, el cual, tras considerar que la integral de Lebesgue supone una generalización de la integral de Riemann y de la existencia del Teorema Fundamental del Cálculo, el cual relaciona la diferenciación y la integración como operaciones inversas, surgió la cuestión sobre hasta que punto es posible generalizar este resultado en el contexto de la integral de Lebesgue. Lebesgue descubrió que este resultado es válido para una clase de funciones bien definida, la cual Giusseppe Vitali más tarde las denominó las funciones absolutamente continuas [60], [64].

Por esta razón, en esta sección se procederá con definiciones, propiedades y principales resultados sobre las funciones absolutamente continuas.

Definición 23. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es absolutamente continua sobre $[a,b]$ si, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$es una familia finita de subintervalos abiertos de $[a,b]$ disjuntos dos a dos, tales que*

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Al conjunto de las funciones absolutamente continuas se denota por $AC[a,b]$.

Observación 11. *Para el caso $n = 1$, toda función absolutamente continua es uniformemente continua (y por ende, es continua).*

Se puede demostrar que bajo las operaciones usuales de suma de funciones y producto por un escalar, $AC[a, b]$ forma un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y además, $AC[a, b]$ es cerrado bajo el producto de funciones.

Teorema 28. *Si $f \in AC[a, b]$, entonces f es de variación acotada en $[a, b]$.*

Demostración:

Sea $\delta > 0$ tal que, para una familia finita de subintervalos abiertos $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ de $[a, b]$, que satisfaga $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, entonces:

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < 1.$$

Por otro lado, sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$, N un entero positivo tal que $\frac{b-a}{N} < \delta$ y P_N la partición equidistante de $[a, b]$ con N subintervalos. Luego, si $Q = P \cup P_N$, entonces

$$V(f, P) \leq V(f, Q).$$

Además, si $Q = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ y, para cada $k = 1, 2, \ldots, N$, $I_k = [a + (k-1)\frac{b-a}{N}, a + k\frac{b-a}{N}]$, entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} |f(y_{k+1}) - f(y_k)| &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{\{k:(y_k, y_{k+1}) \subset I_k\}} |f(y_{k+1}) - f(y_k)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} 1. \\
&= N
\end{aligned}$$

Este resultado, junto con (1.6), demuestra que f es de variación acotada en $[a, b]$.

■

Corolario 5. *Toda función absolutamente continua en $[a, b]$ posee derivada en casi todo punto.*

Teorema 29. *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función Lipschitziana, entonces* $f \in AC[a,b]$.

Demostración:

Sean $\varepsilon > 0$ y $M > 0$ tales que, para $x, y \in [a,b]$, con $x \leq y$, se tiene que

$$|f(y) - f(x)| \leq M(y - x)$$

Luego, para $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ ocurre que, si $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{n}$ es una familia finita de subintervalos de $[a,b]$, tales que $\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| &\leq \sum_{k=1}^{n} M(b_k - a_k) \\ &= M\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) \\ &< M\delta \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

■

A continuación se dará uno de los principales resultados de esta sección.

Teorema 30. *[25] Sea* $g \in L^1[a,b]$, *entonces la función* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

es una función absolutamente continua en $[a,b]$.

Demostración:

Dado que, en particular, g es una función acotada en $[a,b]$, se puede considerar $M > 0$

tal que $|g(t)| \leq M$ para cada $t \in [a,b]$. Luego, si $x, y \in [a,b]$ tales que $x \leq y$, se tiene que

$$\begin{aligned} |f(y)-f(x)| &= \left| \int_a^y g(t)\,dt - \int_a^x g(t)\,dt \right| \\ &= \left| \int_x^y g(t)\,dt \right| \\ &\leq \int_x^y |g(t)|\,dt \\ &\leq \int_x^y M\,dt \\ &= M(y-x). \end{aligned}$$

Esto demuestra que f es lipschitziana en $[a,b]$ y, por ende, absolutamente continua en $[a,b]$.

■

Teorema 31. *[37] Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función absolutamente continua en $[a,b]$, entonces*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Demostración:

Dado que, en particular, f es de variación acotada en $[a,b]$, entonces $f = f_1 - f_2$, donde $f_1, f_2 \in AC[a,b]$ y son funciones monótonas crecientes. Sean $g_1(x) = \int_a^x f_1'(t)\,dt$ y $g_2(x) = \int_a^x f_2'(t)\,dt$ para $x \in [a,b]$. Luego g_1, g_2 son absolutamente continuas en $[a,b]$, diferenciable en $[a,b]$ c.s. y además $g_j' = f_j'$ casi siempre en $[a,b]$ para $j = 1, 2$. Sea $h_1 = f_1 - g_1$ y $h_2 = f_2 - g_2$ luego $h_j' = 0$ casi siempre en $[a,b]$ para $j = 1, 2$. Por proposición, h_j es constante en $[a,b]$ y así

$$\begin{aligned} \int_a^x f'(t)\,dt &= \int_a^x f_1'(t)\,dt - \int_a^x f_2'(t)\,dt \\ &= g_1(x) - g_2(x) \\ &= f_1(x) + c_1 - f_2(x) - c_2 \\ &= f(x) + c \end{aligned}$$

donde $c = c_1 - c_2$. En particular, para $x = a$, $c = -f(a)$ y así

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Por último se enunciará el siguiente resultado, cuya demostración puede verse en [33],[37]:

Teorema 32. *Sean* $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones absolutamente continuas tales que* $f' = g'$ *en c.t.p, luego* f *y* g *difieren en una constante.*

Para más resultados sobre funciones absolutamente continuas, así como aspectos históricos, se remite al lector a [25],[28],[33],[62],[63],[64]

CAPÍTULO 2

DESIGUALDAD DE SIMPSON EN ESPACIOS L^P

En este capítulo se trabajará con la Desigualdad de Simpson, la Fórmula de la cuadratura de Simpson para funciones diferenciables cuya primera derivada es p-integrable, se mostrarán algunas medias conocidas y las aplicaciones de los resultados expuestos en este capítulo para proporcionar desigualdades que involucran a las mismas. Por último, se mostrarán otras generalizaciones de la Desigualdad de Simpson en espacios L^p.

2.1 Desigualdad de Simpson en términos de la p-norma

En este capítulo se proporcionarán nuevas cotas para la Desigualdad de Simpson. Como se ha explicado en el Capítulo 1, sección 1.3, se tiene que si una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ admite derivadas hasta el cuarto orden en el intervalo $[a,b]$ y cuya cuarta derivada esta acotada, satisface:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880}\|f^{(IV)}\|_\infty.$$

Sin embargo, en muchas aplicaciones, la función f no necesariamente admite cuarta derivada en (a,b), o, en el caso de su existencia, $f^{(IV)}$ no necesariamente se encuentra acotada en el mismo. Por esta razón, en los últimos años, varios autores han proporcionado versiones de la Desigualdad de Simpson para clases más amplias de funciones.

Por ejemplo, en el año 2000, S. S. Dragomir demostró en [41] el siguiente resultado:

Teorema 33. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función L-lipschitziana, entonces:*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\right| \leq \frac{5}{36}L(b-a)^2.$$

En el año 1999, S. S. Dragomir, P. Cerone y R. P. Agarwal, demostraron en [23] el siguiente resultado:

Teorema 34. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de variación acotada sobre $[a,b]$, entonces:*

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\right| \leq \frac{b-a}{3}\bigvee_a^b f.$$

Además, en el año 2002, N. Ujevic demostró en [14] el siguiente resultado para la fórmula de cuadratura de Simpson compuesta:

Teorema 35. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que existen números reales $\gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\gamma \leq f'(t) \leq \Gamma \qquad\qquad \textit{para todo } t \in [a,b].$$

Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a,b]$.Entonces se satisface la desigualdad:

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6N}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1})\right]\right| \leq \frac{5(\Gamma-\gamma)}{72N}(b-a)^2.$$

A continuación se darán los principales resultados sobre la Desigualdad de Simpson para funciones diferenciables tales que $f' \in L^p[a,b]$, con $p \in [1,\infty]$. A lo largo de este capítulo se utilizará la siguiente notación:

i) $\mathfrak{R}_S(f, P, I)$ denota el resto de la Regla de Simpson compuesta para f correspondiente a la partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ del intervalo I. Es decir, la siguiente expresión:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k - x_{k-1}}{6}\left[f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) + f(x_{k-1})\right]$$

ii) $\mathfrak{R}_S(f, [a, b])$ denota el resto de la Regla de Simpson simple para f en el intervalo $[a, b]$. Es decir, la siguiente expresión:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

En lo que sigue, se introducirá un lema que será de utilidad para los resultados principales de este capítulo:

Lema 2. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que admite derivadas hasta orden n, con $n \leq 4$, entonces:*

- *Para f diferenciable $(n = 1)$,*

$$\mathfrak{R}_S(f, [a, b]) = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{5a+b}{6}\right) f'(x)\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{5b+a}{6}\right) f'(x)\,dx. \tag{2.1}$$

- *Si $n = 2$,*

$$\mathfrak{R}_S(f, [a, b]) = \frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\left(x - \frac{2a+b}{3}\right) f''(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)\left(x - \frac{2b+a}{3}\right) f''(x)\,dx \tag{2.2}$$

- *Si $n = 3$,*

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_S(f, [a, b]) = &-\frac{1}{6}\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^2\left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'''(x)\,dx \\ &-\frac{1}{6}\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^2\left(x - \frac{a+b}{2}\right) f'''(x)\,dx\end{aligned} \tag{2.3}$$

- *Si* $n = 4$,

$$\mathfrak{R}_S(f,[a,b]) = \frac{1}{24}\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^3\left(x - \frac{a+2b}{3}\right) f^{(IV)}(x)\,dx$$
$$+\frac{1}{24}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (x-b)^3\left(x - \frac{2a+b}{3}\right) f^{(IV)}(x)\,dx \qquad (2.4)$$

Demostración:

Consideremos los siguientes casos:

- Para $n = 1$, mediante integración por partes, se tiene lo siguiente

$$\int_a^b s(x)f'(x)\,dx$$
$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} s(x)f'(x)\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b s(x)f'(x)\,dx$$
$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{5a+b}{6}\right) f'(x)\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+5b}{6}\right) f'(x)\,dx$$
$$= \left(x - \frac{5a+b}{6}\right) f(x)\bigg|_a^{\frac{a+b}{2}} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx + \left(x - \frac{a+5b}{6}\right) f(x)\bigg|_{\frac{a+b}{2}}^b$$
$$= \left[\frac{a+b}{2} - \frac{5a+b}{6}\right] f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(a - \frac{5a+b}{6}\right) f(a) + \left(b - \frac{5b+a}{6}\right) f(b)$$
$$- \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a+5b}{6}\right) f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^b f(x)\,dx$$
$$= f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\frac{a+5b-(5a+b)}{6}\right] - af(a) + bf(b) + \left(\frac{5a+b}{6}\right) f(a)$$
$$- \left(\frac{a+5b}{6}\right) f(b) - \int_a^b f(x)\,dx$$
$$= 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{3}\right) \frac{-6af(a)+6bf(b)+5af(a)+bf(a)-af(b)}{6}$$
$$- \frac{5bf(b)}{6} - \int_a^b f(x)\,dx$$
$$= 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{3}\right) + \frac{-af(a)+bf(b)+bf(a)-af(b)}{6} - \int_a^b f(x)\,dx$$
$$= 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{3}\right) + \frac{f(a)(b-a)+f(b)(b-a)}{6} - \int_a^b f(x)\,dx$$
$$= \frac{b-a}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \int_a^b f(x)\,dx.$$

esto es:

$$\mathfrak{R}_S(f,[a,b]) = \frac{b-a}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \int_a^b f(x)\,dx.$$

- Para $n=2$, mediante integración por partes, se tiene

$$\frac{1}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\left(x-\frac{2a+b}{3}\right) f''(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)\left(x-\frac{2b+a}{3}\right) f''(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{b-a}{6}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(2x - \frac{5a+b}{3}\right) f'(x)\,dx - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{a-b}{2}\right)\left(\frac{a-b}{6}\right) f'\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(2x - \frac{5b+a}{3}\right) f'(x)\,dx\right]$$

$$= -\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{5a+b}{6}\right) f'(x)\,dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{5b+a}{6}\right) f'(x)\,dx.$$

Ahora bien, en particular, f es diferenciable, por ende se puede aplicar (2.1) al resultado anterior y se obtiene (2.2).

- Para $n=3$, mediante integración por partes, se tiene lo siguiente

$$-\frac{1}{6}\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^2\left(x-\frac{a+b}{2}\right) f'''(x)\,dx - \frac{1}{6}\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^2\left(x-\frac{a+b}{2}\right) f'''(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{6}\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x^2-2ax+a^2)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) f'''(x)\,dx$$

$$-\frac{1}{6}\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x^2-2bx+b^2)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) f'''(x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{6}\left[(x^2-2ax+a^2)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) f''(x)\Big|_a^{\frac{a+b}{2}} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} 2(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) f''(x)\,dx\right.$$

$$-\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^2 f''(x)\,dx + (x-b)^2\left(x-\frac{a+b}{2}\right) f''(x)\Big|_{\frac{a+b}{2}}^b$$

$$\left. -\int_{\frac{a+b}{2}}^b 2(x-b)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) f''(x)\,dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^2 f''(x)\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{6}\left[-\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)(3x-2a-b)f''(x)\,dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)(3x-2b-a)\,dx\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)f''(x)\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)\left(x-\frac{2b+a}{3}\right)f''(x)\,dx\right].$$

Ahora bien, en particular, f admite segunda derivada en $[a,b]$ y es absolutamente continua en $[a,b]$, de esta manera, f satisface (2.2). Combinando esta identidad con la última expresión, se obtiene (2.3).

- Para $n = 4$, se tiene que:

$$\frac{1}{24}\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^3\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)f^{(IV)}(x)\,dx + \frac{1}{24}\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^3\left(x-\frac{b+2a}{3}\right)f^{(IV)}(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{24}\left[(x-a)^3\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)f'''(x)\Big|_a^{\frac{a+b}{2}} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} 3(x-a)^2\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)f'''(x)\,dx\right.$$
$$\left.- \int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^3 f'''(x)\,dx\right]$$
$$+ \frac{1}{24}\left[(x-b)^3\left(x-\frac{b+2a}{3}\right)f'''(x)\Big|_{\frac{a+b}{2}}^b - \int_{\frac{a+b}{2}}^b 3(x-b)^2\left(x-\frac{b+2a}{3}\right)f'''(x)\,dx\right.$$
$$\left.- \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^3 f'''(x)\,dx\right]$$
$$= \frac{1}{24}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^3\left(\frac{a-b}{6}\right)f'''\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2(4x-2a-2b)f'''(x)\,dx\right]$$
$$+ \frac{1}{24}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^3\left(\frac{b-a}{6}\right)f'''\left(\frac{a+b}{2}\right) - \int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^2(4x-2a-2b)f'''(x)\,dx\right]$$
$$= -\frac{1}{6}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f'''(x)(x-a)^2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx - \frac{1}{6}\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'''(x)\,dx.$$

Ahora bien, en particular, f es una función que admite tercera derivada en (a,b) y f''' es absolutamente continua en $[a,b]$. Por ende, se puede combinar (2.3) con la última expresión, y obtener:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{R}_S(f,[a,b]) = &-\frac{1}{6}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f'''(x)(x-a)^2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\,dx \\
&-\frac{1}{6}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (x-b)^2\left(x-\frac{a+b}{2}\right) f'''(x)\,dx. \\
&= \frac{1}{24}\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^3\left(x-\frac{a+2b}{3}\right) f^{(IV)}(x)\,dx \\
&+\frac{1}{24}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (x-b)^3\left(x-\frac{b+2a}{3}\right) f^{(IV)}(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

■

El siguiente resultado puede verse en [45].

Teorema 36. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), cuya derivada pertenece a $L^p[a,b]$. Entonces se satisface la siguiente desigualdad:*

$$
|\mathfrak{R}_S(f,[a,b])| \leq \frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}} (b-a)^{1+\frac{1}{q}}\|f'\|_p. \tag{2.5}
$$

donde $p, q \in [1,+\infty)$ son tales que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Demostración:

Sea $s : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$
s(x) = \begin{cases} x - \frac{5a+b}{6} & \text{si } x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \\ x - \frac{a+5b}{6} & \text{si } x \in \left[\frac{a+b}{2}, b\right]. \end{cases}
$$

Así, por (2.1) del lema (2), se tiene lo siguiente

$$
\int_a^b s(x)f'(x)\,dx = \frac{b-a}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \int_a^b f(x)\,dx. \tag{2.6}
$$

Por otro lado, usando las desigualdades triangular (1.1) y Hölder para integrales (24), se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\left|\int_a^b s(x)f'(x)\,dx\right| &\leq \|s\|_q\|f'\|_p \\
&= \left(\int_a^b |s(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \|f'\|_p.
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

Ahora bien:

$$\begin{aligned}
\int_a^b |s(x)|^q \, dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left| x - \frac{5a+b}{6} \right|^q dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left| x - \frac{a+5b}{6} \right|^q dx \\
&= \int_a^{\frac{5a+b}{6}} \left(\frac{5a+b}{6} - x \right)^q dx + \int_{\frac{5a+b}{6}}^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{5a+b}{6} \right)^q dx + \\
&\quad + \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+5b}{6}} \left(\frac{a+5b}{6} - x \right)^q dx + \int_{\frac{a+5b}{6}}^b \left(x - \frac{a+5b}{6} \right)^q dx \\
&= \frac{1}{q+1} \left[-\left(\frac{5a+b}{6} - x \right)^{q+1} \Big|_a^{\frac{5a+b}{6}} + \left(x - \frac{5a+b}{6} \right)^{q+1} \Big|_{\frac{5a+b}{6}}^{\frac{a+b}{2}} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{a+5b}{6} - x \right)^{q+1} \Big|_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+5b}{6}} + \left(x - \frac{a+5b}{6} \right)^{q+1} \Big|_{\frac{a+5b}{6}}^b \right] \\
&= \frac{1}{q+1} \left[\left(\frac{5a+b}{6} - a \right)^{q+1} + \left(\frac{a+b}{2} - \frac{5a+b}{6} \right)^{q+1} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{a+5b}{6} - \frac{a+b}{2} \right)^{q+1} + \left(b - \frac{a+5b}{6} \right)^{q+1} \right] \\
&= \frac{(2^{q+1}+1)(b-a)^{q+1}}{3(q+1)6^q}.
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\left[\int_a^b |s(x)|^q \, dx \right]^{\frac{1}{q}} &= \left[\frac{(2^{q+1}+1)(b-a)^{q+1}}{3(q+1)6^q} \right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{6} \left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} (b-a)^{\frac{q+1}{q}} \qquad (2.8) \\
&= \frac{1}{6} \left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} (b-a)^{1+\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Sustituyendo (2.6) y (2.8) en (2.7), se tiene demostrado el Teorema (36).

■

De este teorema, se desprenden dos corolarios que se mostrarán a continuación:

Corolario 6. *[45] Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), tal que $f' \in L^p[a, b]$. Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición* *de $[a,b]$, entonces el error $\mathfrak{R}_S(f,P,[a,b])$ que se obtiene al aplicar la Regla de Simpson compuesta, satisface lo siguiente:*

$$|\mathfrak{R}_S(f,P,[a,b])| \leq \frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}} \|f'\|_p \left(\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)^{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demostración:

Para $i=0,1,\ldots,n-1$, $[x_i,x_{i+1}] \subset [a,b]$. Como f es una función continua en $[x_i,x_{i+1}]$, derivable en (x_i,x_{i+1}), y satisface $f' \in L^p[x_i,x_{i+1}]$, se obtiene, en virtud del Teorema (36)

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \frac{x_{i+1}-x_i}{3}\left[\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} + 2f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right]\right| \\
&\leq \frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}} (x_{i+1}-x_i)^{1+\frac{1}{q}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Sumando en ambos lados de la desigualdad anterior sobre $i=0,\ldots,n-1$, y en virtud de la desigualdad (1.1) y el Teorema (36), se obtiene:

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{R}_S(f,P,[a,b])| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \frac{x_{i+1}-x_i}{3}\left[\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} + 2f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right]\right]\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \frac{x_{i+1}-x_i}{3}\left[\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} + 2f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right]\right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}} (x_{i+1}-x_i)^{1+\frac{1}{q}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}} \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)^{1+\frac{1}{q}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Usando la Desigualdad Discreta de Hölder (1.4), se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)^{1+\frac{1}{q}}\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f'(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left((x_{i+1}-x_i)^{1+\frac{1}{q}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f'(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)^{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f'(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)^{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{a}^{b}|f'(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)^{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\|f'\|_p.
\end{aligned}
$$

■

En el caso en que P sea una partición equidistante, se obtiene el siguiente resultado:

Corolario 7. *[45] Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b), tal que $f' \in L^p[a, b]$. Si $n \in \mathbb{N}$ y P_n una partición equidistante de $[a, b]$, con n subintervalos, entonces el error del método de Simpson, $\mathfrak{R}_S(f, P_n, [a, b])$, satisface lo siguiente:*

$$
|\mathfrak{R}_S(f, P_n, [a, b])| \leq \frac{1}{6n}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}}(b-a)^{1+\frac{1}{q}}\|f'\|_p.
$$

Demostración:

Dado que, por hipótesis, f es continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b) y $f' \in L^p[a, b]$, entonces f satisface las condiciones del corolario 6 y como P es una partición equidistante, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
|\mathfrak{R}_S(f, P_n, [a, b])| &\leq \frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)^{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\|f'\|_p\\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\|f'\|_p
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\left(\frac{(b-a)^{q+1}}{n^q}\right)^{\frac{1}{q}}\|f'\|_p \\
&= \frac{1}{6n}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}}(b-a)^{1+\frac{1}{q}}\|f'\|_p.
\end{aligned}
$$

■

Observación 12. *La estimación anterior dada para la Fórmula de Simpson se satisface aún en el caso particular en el que f admite cuarta derivada y la misma está acotada en $[a,b]$. Esto es, el resultado anterior es una generalización de la conocida Desigualdad de Simpson (21). Como ejemplo puede considerarse la función $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por*

$$
f(x) = x^r
$$

donde $r\in(3,4)$. Se puede apreciar que f admite derivadas continuas hasta el tercer orden en $(0,1)$. f admite cuarta derivada en $(0,1)$, la cual viene dada por:

$$
f^{(IV)}(x) = \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{x^{4-s}}
$$

Sin embargo, $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(IV)}(x)=\infty$ por lo que $f^{(IV)}$ no está acotada en $(0,1)$. En cambio, f' es acotada en $(0,1)$, por lo que $f'\in L^p[0,1]$ y además

$$
\begin{aligned}
\|f'\|_p &= \left(\int_0^1 |rx^{r-1}|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^1 r^p x^{(r-1)p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{r}{((r-1)p+1)^{\frac{1}{p}}}.
\end{aligned}
$$

es decir, $\|f'\|_p = \frac{r}{((r-1)p+1)^{\frac{1}{p}}}$.

El resto para la Fórmula de Simpson, de acuerdo al Corolario (7) y empleando la partición equidistante $P=\{0,\frac{1}{n},\ldots,\frac{n-1}{n},1\}$, satisface lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
|\mathfrak{R}_S(f,P,[0,1])| &\le \frac{1}{6n}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\frac{r}{(p(r-1)+1)^{\frac{1}{p}}} \\
&= \frac{1}{6n}\left[\frac{2^{\frac{2p-1}{p-1}}+1}{3(\frac{2p-1}{p-1})}\right]^{\frac{p-1}{p}}\frac{r}{(p(r-1)+1)^{\frac{1}{p}}}
\end{aligned}
$$

Observación 13. *Si f es continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b), f es de variación acotada en $[a,b]$ y además*

$$\bigvee_a^b f = \|f'\|_1$$

y también se puede apreciar que

$$\lim_{q\to\infty} \frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}} (b-a)^{1+\frac{1}{q}}\|f'\|_p = \frac{b-a}{3}\|f'\|_1$$

de esta manera, se obtiene la desigualdad dada en (34).

De forma análoga, si $q \to 1$, $p \to \infty$ y así se obtiene la desigualdad (33).

2.2 Aplicaciones a medias especiales

En esta sección se definirán algunas medias usadas en muchas aplicaciones, así como la aplicabilidad de los resultados previos a fín de proporcionar algunas desigualdades que involucran a las mismas. A continuación se introducirá la definición de media, salvo que se especifique lo contrario, en lo sucesivo se considerarán $a, b \in \mathbb{R}$.

Definición 24. *Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Una media de n variables es una función $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface la siguiente propiedad: Para $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in S$, se tiene:*

$$\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \leq f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

A continuación, se darán ejemplos de algunas medias conocidas por su aplicación en otras ciencias:

1. La Media Aritmética de $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ es el número $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definido por:

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

esto es, la media aritmética de una muestra $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es la suma de los datos de la muestra dividida entre la cantidad de datos que posee la misma. Esta media tiene aplicaciones en varias ramas, especialmente en las Matemáticas Financieras y la Estadística.

La media aritmética posee varias propiedades: Si $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ son vectores en $\mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$ y σ es una permutación de los valores $1, 2, \ldots, n$, entonces:

- $A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = A(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$.

- $A(\lambda\vec{a}) = \lambda A(\vec{a})$.

- $A(\vec{a} + \vec{b}) = A(\vec{a}) + A(\vec{b})$.

- $\min\limits_{1\leq k\leq n} a_k \leq A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq \max\limits_{1\leq k\leq n} a_k$. Además, la igualdad es válida, si, y solo si, para todo $j = 1, 2, \ldots, n$, $a_j = c$, con $c \in \mathbb{R}$.

- Si $m, n \in \mathbb{R}$, con $n > m$, y $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces para $A = A(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, se tiene que $A = \overline{A}(\overbrace{A, A, \ldots, A}^{m \text{ veces}}, a_{m+1}, \ldots, a_n)$ donde $\overline{A}$ denota la media aritmética de los valores $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

- $A(a_1 - A, a_2 - A, \ldots, a_n - A) = 0$, esto es, la suma de las desviaciones respecto a la media siempre es igual a cero (por ende, no es posible proporcionar una dispersión de los valores respecto a esta media por medio de esta suma).

2. La media geométrica de $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$ es el número $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ definido por:

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}.$$

Algunas propiedades de la media geométrica son las siguientes:

- El logaritmo natural de la media geométrica de $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es la media aritmética de los logaritmos correspondientes de los datos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Esto es

$$\ln\left(G(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right) = A(\ln(a_1), \ln(a_2), \ldots, \ln(a_n)).$$

- La Media Geométrica se puede aproximar por la media aritmética mediante la siguiente sucesión [46]:

$$x_0 = a, x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} \qquad (n \geq 1)$$

  esta sucesión fue ampliamente utilizada por los babilonios, converge a $\sqrt{ab}$ y provee un algoritmo útil, para el cálculo, mediante los ordenadores actuales, de la raiz cuadrada de un número. Ya que su razón de convergencia es cuadrática, esta expresión se puede generalizar a dos dimensiones como sigue

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad , \quad y_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_n}} \qquad \text{para } n \geq 0 \tag{2.9}$$

  donde $y_n = \frac{a}{x_n}$ converge $\sqrt{a} = \sqrt{x_0 y_0}$. De esta manera, la media geométrica puede ser aproximada mediante un algoritmo iterativo por las medias aritmética y armónica (la cual se definirá a continuación). Este método es actualmente conocido como el Método de Herón [46],[47].

- La media geométrica de $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es menor o igual que la media aritmética correspondiente.

- La media geométrica de $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ donde cada componente es positiva, está comprendida entre el mínimo y el máximo de las componentes del vector $\vec{a}$, es decir:

$$\min_{1 \leq k \leq n} \{a_k\} \quad \leq \quad \sqrt{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \max_{1 \leq k \leq n} \{a_k\}.$$

3. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos no nulos. La Media Armónica de un vector $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (0, \infty)^n$ viene dada por la siguiente expresión

$$H(\vec{a}) = \frac{n}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}.$$

La media armónica posee aplicaciones en la transmisión de sistemas con redes, para mayor información sobre esto, se remite al lector a [50]. También, la media armónica desempeña un importante papel en las ciencias de la Computación, la Electrónica, Hidrología, Genética de poblaciones, entre otras.

Algunas propiedades de esta media vienen dadas por:

- La inversa de la media armónica de un vector $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es igual a la media aritmética de las inversas de cada una de las componentes del vector $\vec{a}$. Esto es:

$$H^{-1}(\vec{a}) = A(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \ldots, a_n^{-1}).$$

- Se tiene la siguiente relación

$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot A(b_1, b_2, \ldots, b_n) = G^n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

donde, para $j = 1, 2, \ldots, n$, $b_j = \dfrac{\displaystyle\prod_{k=1, k\neq j}^{n} a_k}{n}$. En particular, para $n = 2$, se tiene que

$$H(a_1, a_2) \cdot A(a_1, a_2) = G^2(a_1, a_2).$$

- Para cualesquiera números reales positivos no nulos x, y, se satisface lo siguiente:

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Es decir, la media aritmética y armónica son, respectivamente, cotas superiores e inferiores de la media geométrica.

- Empleando el método de Herón descrito previamente, se tiene que, para números reales positivos x, y, se tiene lo siguiente

$$\lim_{n\to\infty} H(x_m, y_m) = G(x, y).$$

donde x_n, y_n están definidas por (2.9).

A continuación, considerando $0 < a < b$, se definen las siguientes medias:

1. La Media Logarítmica de a y b es el número $L(a, b)$ definido por:

$$L(a, b) = \frac{a-b}{\ln(a) - \ln(b)}.$$

La media logarítmica posee aplicaciones en el cálculo de una temperatura media entre dos puntos con temperaturas distintas en un proceso de transferencia de fluidos, así como en otras ramas tales como la Economía, la Física y la Meteorología [48]. Entre las propiedades de la media logarítmica podemos enunciar:

- L es una función simétrica, es decir:

$$L(a, b) = L(b, a).$$

- L es homogénea de grado 1, es decir si $\lambda > 0$, entonces:

$$L(\lambda a, \lambda b) = \lambda L(a, b).$$

- L posee una fórmula integral, la cual viene dada por:

$$L(a, b) = \int_0^1 a^t b^{1-t}\, dt.$$

- La media logarítmica separa la media aritmética y geométrica. Esto es,

$$\sqrt{ab} \le \frac{a-b}{\ln(a) - \ln(b)} \le \frac{a+b}{2}.$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$, con $0 < a < b$.

- Se tiene la siguiente identidad

$$\frac{L(a^2, b^2)}{L(a,b)} = A(a,b).$$

Para una generalización de la media logarítmica en n variables e identidades relacionadas a esta media, se pueden ver [48],[49].

2. La Media Idéntrica de $a, b \in \mathbb{R}$ es el número $I(a,b)$ definido por:

$$I(a,b) = \frac{1}{e}\left(\frac{b^b}{a^a}\right)^{\frac{1}{b-a}}.$$

Entre las propiedades de la media idéntrica se pueden listar:

- Para $a, b \in \mathbb{R}$, con $a, b > 0$, se tiene que

$$I(a,b) = I(b,a).$$

- Se satisface la siguiente identidad [52],[53]

$$I(e^t, e^{-t}) = e^{\frac{t}{tanh(t)}-1}.$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

- El logaritmo natural de la media idéntrica de a y b, $a < b$ es el cociente incremental de la función $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x\ln(x) - x$, esto es:

$$\ln(I(a,b)) = \frac{a\ln(a) - b\ln(b)}{a-b} - 1.$$

con esto, $I(a,b)$ se puede expresar de la forma integral como sigue:

$$I(a,b) = \exp\left(\int_0^1 \ln(bt + (1-t)a)\,dt\right).$$

- La media idéntrica se relaciona con las medias aritmética y geométrica como sigue [53]

$$I^2(a,b) = \exp\left(\int_0^1 \ln((1-u^2)A^2(a,b) + u^2(G^2(a,b)))\,du\right).$$

- Se satisface la siguiente desigualdad: Para $a \neq b$, entonces

$$L > \sqrt{IG}.$$

- Se cumple la siguiente desigualdad [54]:

$$L(a,b) \leq I(a,b) \leq A(a,b).$$

  siendo A,L las medias aritmética y logarítmica, respectivamente.

Para mayor información sobre medias logarítmica e idéntrica, se remite al lector a [52],[53],[54],[55],[56].

3. La Media p-Logarítmica de números reales positivos a, b viene dada por la siguiente expresión:

$$S_p(a,b) = \left[\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)} \right]^{\frac{1}{p}} \qquad\qquad p \neq -1, 0.$$

esta familia de medias constituye un caso especial de las medias de Stolarsky [55] y poseen aplicaciones en multiples ramas tales como la biología, las matemáticas financieras, las ciencias políticas, la estadística, etc. Algunas propiedades de estas medias son:

- La media p-logarítmica es monótona creciente en p, esto es, para $p, q \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$, con $p < q$, se tiene que

$$S_p(a,b) \leq S_q(a,b).$$

- $\lim_{p \to 0} S_p(a,b) = I(a,b)$.
- $\lim_{p \to -1} S_p(a,b) = L(a,b)$.
- $\lim_{p \to 1} S_p(a,b) = A(a,b)$.
- $S_{-2}(a,b) = G(a,b)$.
- $\lim_{p \to \infty} S_p(a,b) = \max\{a, b\}$.

- $\lim\limits_{p \to -\infty} S_p(a,b) = \min\{a,b\}$.

La media p-logarítmica (y con ella, las medias idéntrica, logarítmica por las segunda y tercera propiedades enunciadas previamente), se pueden generalizar a n variables mediante el Teorema del Valor Medio para diferencias divididas [57] para la función potencia $f(x) = x^p$, $p \neq 0, -1$, mediante la siguiente expresión:

$$S_p(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \left(n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(x_k)^p}{\prod_{j=0, j\neq k}(x_k - x_j)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

En lo que sigue, se aplicará el Teorema (36) a fin de proporcionar algunas desigualdades para las medias introducidas anteriormente. Nuevamente, se considerarán a, b números reales positivos con $a < b$.

1. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = x^s$, $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0, 1$. Entonces:

a) $$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^s\,dx \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^{s+1} - a^{s+1}}{s+1}\right] \\ &= (S_s(a,b))^s. \end{aligned}$$

b) $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^s = (A(a,b))^s$.

c) $\dfrac{f(a)+f(b)}{2} = \dfrac{a^s + b^s}{2} = A(a^s, b^s)$.

Luego, en virtud del Teorema (36), se cumple que:

$$\begin{aligned} \left| (S_s(a,b))^s - \frac{1}{3}\left[A(a^s,b^s) + 2(A(a,b))^s\right] \right| &\leq \frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}} (b-a)^{\frac{1}{q}} \|sx^{s-1}\|_p \\ &= \frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}} (b-a)^{\frac{1}{q}} |s| \|x^{s-1}\|_p. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\|x^{s-1}\|_p &= \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |x^{s-1}|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b x^{p(s-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left(\frac{1}{b-a}\left[\frac{b^{p(s-1)+1}-a^{p(s-1)+1}}{(p(s-1)+1)(b-a)}\right]\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left[\left(\frac{1}{b-a}\left[\frac{b^{p(s-1)+1}-a^{p(s-1)+1}}{(p(s-1)+1)(b-a)}\right]\right)^{\frac{1}{p(s-1)}}\right]^{s-1}\\
&= (S_{p(s-1)}(a,b))^{s-1}.
\end{aligned}$$

luego,

$$\left|(S_s(a,b))^s - \frac{1}{3}\left[A(a^s,b^s)+2(A(a,b))^s\right]\right| \tag{2.10}$$

$$\leq \frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}}(b-a)^{\frac{1}{q}}|s|(S_{p(s-1)}(a,b))^{s-1}. \tag{2.11}$$

2. Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ $(0<a<b)$, $f(x)=\frac{1}{x}$, entonces:

a) $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \frac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a} = (L(a,b))^{-1}.$

b) $\displaystyle f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (A(a,b))^{-1}.$

c) $\displaystyle\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} = (H(a,b))^{-1}.$

d) $$\begin{aligned} \|f'\|_p &= \left\| -\frac{1}{x^2} \right\|_p \\ &= \left(\int_a^b x^{-2p}\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{b^{-2p+1} - a^{-2p+1}}{-2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (b-a)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{b^{-2p+1} - a^{-2p+1}}{(-2p+1)(b-a)} \right)^{\frac{1}{-2p}} \right]^{-2} \\ &= (b-a)^{\frac{1}{p}} (S_{-2p}(a,b))^{-2}. \end{aligned}$$

Así, por el Teorema (36)

$$\left| L^{-1}(a,b) - \frac{1}{3}[H^{-1}(a,b) + 2A^{-1}(a,b)] \right| \leq \frac{1}{6} \left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} (b-a)(S_{-2p}(a,b))^{-2}.$$

Multiplicando ambos lados por $(3AHL)(a,b)$, se tiene

$$|3(AH)(a,b) - (AL)(a,b) + 2(HL)(a,b)| \leq \frac{(AHL)(a,b)}{2} \left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)} \right]^{\frac{1}{q}} (b-a)(S_{-2p}(a,b))^{-2}.$$

3. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(0 < a < b)$, dada por $f(x) = \ln(x)$, asi

a) $$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \ln(x)\, dx \\ &= \frac{b(\ln(b)-1) - a(\ln(a)-1)}{b-a} \\ &= \frac{b\ln(b) - a\ln(a)}{b-a} - 1 \\ &= \frac{\ln(b^b) - \ln(a^a)}{b-a} + \ln\left(\frac{1}{e}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{e} \left(\frac{b^b}{a^a} \right)^{\frac{1}{b-a}} \right) \\ &= \ln(I(a,b)). \end{aligned}$$

b) $$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) = \ln(A(a,b)).$$

c) $$\begin{aligned} \frac{f(a)+f(b)}{2} &= \frac{\ln(a)+\ln(b)}{2} \\ &= \ln(\sqrt{ab}) \\ &= \ln(G(a,b)). \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} \|f'\|_p = \left\|\frac{1}{x}\right\|_p &= \left(\int_a^b \frac{1}{x^p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{b^{1-p}-a^{1-p}}{1-p}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (b-a)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{b^{1-p}-a^{1-p}}{(b-a)(1-p)}\right)\right]^{-1} \\ &= (b-a)^{\frac{1}{p}}(S_{-p}(a,b))^{-1}. \end{aligned}$$

Por ende, aplicando el Teorema (36) y utilizando las propiedades del logaritmo, se tiene que

$$\left|\ln\left(\frac{I}{G^{\frac{1}{3}}}A^{\frac{2}{3}}\right)\right| \leq \frac{b-a}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}}(S_{-p}(a,b))^{-1}.$$

Para más información sobre resultados, generalizaciones y aplicaciones sobre medias, se pueden ver [27],[66],[67],[68],[69].

2.3 Generalizaciones

En esta sección se expondrá una generalización la desigualdad (2.1). Sin embargo es importante enunciar algunos conceptos preliminares sobre funciones que son de interés. La teoría expuesta a continuación puede verse en [71].

Definición 25. *Sea $z \in \mathbb{C}$, con $\mathbb{R}(z) > 0$ y sea A el conjunto $A = \{w \in \mathbb{C} : \mathbb{R}(w) > 0\}$. Se define la función Gamma $\Gamma : A \longrightarrow \mathbb{C}$ por la siguiente expresión*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt. \tag{2.12}$$

Se puede demostrar, por el Criterio M de Weiertrass, que la integral dada en la definición 2.12 es absolutamente convergente, de modo que Γ es una función bien definida en A.

El siguiente resultado recoge algunas propiedades de la función Gamma.

Proposición 8. *Sea $z \in \mathbb{C}$, con $\mathbb{R}(z) > 0$. Así, se tiene:*

a) $\Gamma(1) = 1$.

b) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

c) *Si $z \in \mathbb{N}$, entonces $\Gamma(z+1) = z!$. Esto es, Γ es una extensión de la función factorial.*

e) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

g) *(Fórmula de reflexión) Para $z \in \mathbb{C}$, se tiene lo siguiente*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Observación 14. *Se puede extender la función Γ al conjunto $\mathbb{C} - \mathbb{Z}^-$.*

Definición 26. *[73] Sean $z, w \in \mathbb{C}$, con $\mathbb{R}(z), \mathbb{R}(w) > 0$.La función Beta es una función $B : A \times A \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por:*

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\, dt.$$

Algunas propiedades básicas de la función Beta se pueden enunciar:

Proposición 9. *Sean $z, w \in \mathbb{C}$, con $\mathbb{R}(z)$, $\mathbb{R}(w) > 0$, entonces*

a) *(Simetría)* $B(z,w) = B(w,z)$.

b) *Relación con la función Gamma:* $B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$.

c) *Se satisface la siguiente identidad:*

$$B(z,w) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sen(\theta))^{2z-1}(\cos(\theta))^{2w-1}\, d\theta.$$

Para más información, se remite a [74].

A continuación, se enunciarán algunas definiciones y propiedades de las funciones hipergeométricas. La teoría siguiente puede encontrarse en [75].

Definición 27. *Sea* $U = \{(a,b,c,z) \in \mathbb{C}^4 : c \neq 0, -1, -2, \ldots y|z| < 1\}$*.La función hipergeométrica de Gauss de variable* z *y parámetros* a, b, c *es la función* $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *dada por*

$$F(a,b,c,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}$$

donde $(a)_k$ *se denomina símbolo de Pochammer y está definido por*

$$(a)_k = \prod_{i=0}^{k-1} (a+i) = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}.$$

Las función hipergeométrica de Gauss posee las siguientes propiedades [77]:

Proposición 10. *Sea* $(a,b,c,z) \in U$*, entonces se satisface lo siguiente:*

a) $F(a,b,c,z) = F(b,a,c,z)$.

b) $cF(a,b-1,c,z) + (a-b)F(a,b,c+1,z) = cF(a-1,b,c,z)$.

f) *Para* $a,b,c,z \in \mathbb{C}$ *tales que* $\mathbb{R}(c) > \mathbb{R}(b) > 0$*, con* $|z| < 1$ *y* $|\arg(1-z)| < \pi$*, se obtiene lo siguiente:*

$$F(a,b,c,z) = \frac{1}{B(b,c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\, dt \tag{2.13}$$

donde B *es la función Beta.*

Con estos fundamentos, se puede enunciar el siguiente teorema, el cual puede verse en [76].

Teorema 37. *[76] Sea* $n \in \{2,3,4\}$*,* $p, q \in [1,\infty]$ *números reales conjugados,* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función que admite derivadas hasta orden* n*,* $n \leq 4$*, tal que* $f^{(n-1)} \in AC[a,b]$ *y* $f^{(n)} \in L^p[a,b]$*. Entonces se satisface la siguiente desigualdad:*

$$|\mathfrak{R}_S(f,[a,b])| \leq K(n,p)(b-a)^{n+\frac{1}{q}} \|f^{(n)}\|_p \tag{2.14}$$

donde
$$\mathfrak{R}_S(f,[a,b]) = \frac{b-a}{3}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

y además

i) *Si* $1 < p < \infty$, *entonces*

$$K(n,p) = \begin{cases} \frac{1}{36\cdot 3^{\frac{1}{q}}}\left(2^{q+1}B(q+1,q+1) + \frac{1}{q+1}F\left(-q,q+1,q+2,-\frac{1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{q}} & si\, n{=}2. \\ \frac{1}{48}B(2q+1,q+1)^{\frac{1}{q}} & si\, n{=}3. \\ \frac{1}{288}\left(\frac{1}{3q+1}F\left(-q,3q+1,3q+2,\frac{3}{4}\right)\right)^{\frac{1}{q}} & si\, n{=}4. \end{cases}$$

ii) *Si* $p = 1$, *entonces*

$$K(n,1) = \begin{cases} \frac{1}{24} & si\, n{=}2. \\ \frac{1}{324} & si\, n{=}3. \\ \frac{1}{1152} & si\, n{=}4. \end{cases}$$

iii) *Si* $p = \infty$ *entonces*

$$K(n,\infty) = \begin{cases} \frac{1}{81} & si\, n{=}2. \\ \frac{1}{576} & si\, n{=}3. \\ \frac{1}{2880} & si\, n{=}4. \end{cases}$$

Demostración:

Se realizará esta demostración subdividiéndola en casos según n.

1. Si $n = 2$, consideremos la función $s_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$s_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-a)\left(x - \frac{2a+b}{3}\right) & \text{si } a \leq x < \frac{a+b}{2}. \\ \frac{1}{2}(x-b)\left(x - \frac{2b+a}{3}\right) & \text{si } \frac{a+b}{2} \leq x < b. \end{cases}$$

Nótese que, aplicando la Desigualdad de Hölder (24), la identidad (2.2) y la Desigualdad triangular para integrales (1.8) , se obtiene:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}_S(f,[a,b])| &= \left| \int_a^b s_2(x) f''(x)\, dx \right| \\ &= \int_a^b |s_2(x)||f''(x)|\, dx \\ &\leq \|s_2\|_q \|f''\|_p. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Consideremos tres subcasos:

1a) Si $1 < p < \infty$, entonces $1 < q < \infty$ y así

$$\begin{aligned} \|s_2\|_q^q = &\int_a^b |s_2|^q\, dx \\ = &\int_a^{\frac{2a+b}{3}} \left(\frac{1}{2}(x-a)\left(\frac{2a+b}{3} - x \right) \right)^q dx \\ + &\int_{\frac{2a+b}{3}}^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{1}{2}(x-a)\left(x - \frac{2a+b}{3} \right) \right)^q dx \\ + &\int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{2b+a}{3}} \left(\frac{1}{2}(b-x)\left(\frac{2b+a}{3} - x \right) \right)^q dx \\ + &\int_{\frac{2b+a}{3}}^{b} \left(\frac{1}{2}(b-x)\left(x - \frac{2b+a}{3} \right) \right)^q dx. \end{aligned}$$

Realizando los cambios de variables $x = \frac{b-a}{3}\, t + a, x = \frac{b-a}{6} t + \frac{2a+b}{3}, x = \frac{2b+a}{3} - \frac{b-a}{6} t$ y $x = \frac{b-a}{3} t + \frac{2b+a}{3}$ respectivamente, en la primera, segunda, tercera y cuarta integral, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2^q}\left(\frac{b-a}{3}\right)^{2q+1}\int_0^1 t^q(1-t)^q\,dt+\frac{1}{2^q}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{2q+1}\int_0^1 (t+2)^q t^q\,dt\\
&-\frac{1}{2^q}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{2q+1}\int_1^0 (t+2)^q t^q\,dt+\frac{1}{2^q}\left(\frac{b-a}{3}\right)^{2q+1}\int_0^1 (1-t)^q t^q\,dt\\
&=\frac{1}{2^q}\left[2\left(\frac{b-a}{3}\right)^{2q+1}\int_0^1 t^q(1-t)^q\,dt+2\left(\frac{b-a}{6}\right)^{2q+1}\int_0^1 t^q(2+t)^q\,dt\right]\\
&=\frac{2}{2^q}\left[\left(\frac{b-a}{3}\right)^{2q+1}B(q+1,q+1)+2^q\left(\frac{b-a}{6}\right)^{2q+1}\frac{q+1}{q+1}\int_0^1 t^q\left(1+\frac{t}{2}\right)^q\,dt\right]\\
&=\frac{2}{2^q}\left[\left(\frac{b-a}{3}\right)^{2q+1}B(q+1,q+1)+\frac{2^q}{q+1}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{2q+1}F\left(-q,q+1,q+2,-\frac{1}{2}\right)\right]\\
&=\frac{2}{2^q}\left(\frac{b-a}{6}\right)^{2q+1}\left[2^{2q+1}B(q+1,q+1)+\frac{2^q}{q+1}F\left(-q,q+1,q+2,-\frac{1}{2}\right)\right]\\
&=(b-a)^{2q+1}\frac{2}{6\cdot 6^{2q}}\left[2^{q+1}B(q+1,q+1)+\frac{1}{q+1}F\left(-q,q+1,q+2,-\frac{1}{2}\right)\right]\\
&=(b-a)^{2q+1}\frac{1}{3\cdot 36^q}\left[2^{q+1}B(q+1,q+1)+\frac{1}{q+1}F\left(-q,q+1,q+2,-\frac{1}{2}\right)\right].
\end{aligned}
$$

En resumen

$$\int_a^b |s_2(x)|^q\,dx=K(2,p)^q(b-a)^{2q+1}.$$

Sustituyendo en la desigualdad (2.15), se obtiene:

$$
\begin{aligned}
|\mathfrak{R}_S(f,[a,b])| &\le \|s_2\|_q\|f''\|_p\\
&= \left(\int_a^b |s_2(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\|f''\|_p\\
&= K(2,p)(b-a)^{2+\frac{1}{q}}\|f''\|_p.
\end{aligned}
$$

1b) Si $p = \infty$, entonces $q = 1$. De esta manera, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\|s_2\|_1 &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left| \frac{1}{2}(x-a)\left(x - \frac{2a+b}{3}\right) \right| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \left| \frac{1}{2}(x-b)\left(x - \frac{2b+a}{3}\right) \right| dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_a^{\frac{2a+b}{3}} (x-a)\left(\frac{2a+b}{3} - x\right) dx + \int_{\frac{2a+b}{3}}^{\frac{a+b}{2}} (x-a)\left(x - \frac{2a+b}{3}\right) dx \right. \\
&\left. + \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{2b+a}{3}} (b-x)\left(\frac{2b+a}{3} - x\right) dx + \int_{\frac{2b+a}{3}}^{b} \frac{1}{2}(b-x)\left(x - \frac{2b+a}{3} dx\right) \right] \\
&= \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{5a+b}{12}x^2 - \frac{2a^2+ab}{6}x \right]\Bigg|_a^{\frac{2a+b}{3}} + \left[\frac{x^3}{6} - \frac{5a+b}{12}x^2 + \frac{2a^2+ab}{6}x \right]\Bigg|_{\frac{2a+b}{3}}^{\frac{a+b}{2}} \\
&+ \left[\frac{x^3}{6} - \frac{5b+a}{12}x^2 + \frac{2b^2+ab}{6}x \right]\Bigg|_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{2b+a}{3}} + \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{5b+a}{12}x^2 - \frac{2b^2+ab}{6}x \right]\Bigg|_{\frac{2b+a}{3}}^{b}. \\
&= \left[-\frac{1}{6}\left(\frac{2a+b}{3}\right)^3 + \frac{5a+b}{12}\left(\frac{2a+b}{3}\right)^2 - \left(\frac{2a^2+ab}{6}\right)\left(\frac{2a+b}{3}\right) \right. \\
&\left. + \frac{a^3}{3} - \frac{5a+b}{12}a^2 + \left(\frac{2a^2+ab}{6}\right)a \right] \\
&+ \left[\frac{1}{6}\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 - \left(\frac{5a+b}{12}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{2a^2+ab}{6}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{2a+b}{3}\right)^3 \right. \\
&\left. + \left(\frac{5a+b}{12}\right)\left(\frac{2a+b}{3}\right)^2 - \left(\frac{2a^2+ab}{6}\right)\left(\frac{2a+b}{3}\right) \right]
\end{aligned}
$$

$$+\left[\frac{1}{6}\left(\frac{2b+a}{3}\right)^3-\frac{5b+a}{12}\left(\frac{2b+a}{3}\right)^2+\left(\frac{2b^2+ab}{6}\right)\left(\frac{2b+a}{3}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{a+b}{2}\right)^3\right.$$
$$\left.+\frac{5b+a}{12}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{2b^2+ab}{6}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$
$$+\left[-\frac{b^3}{6}+\left(\frac{5b+a}{12}\right)b^2-\left(\frac{2b^2+ab}{6}\right)b+\frac{1}{6}\left(\frac{2b+a}{3}\right)^3-\left(\frac{5b+a}{12}\right)\left(\frac{2b+a}{3}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2b^2+ab}{6}\right)\left(\frac{2b+a}{3}\right)\right]$$
$$=\left[-\frac{8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3}{162}+\frac{20a^3+24a^2b+9ab^2+b^3}{108}-\frac{4a^3+4a^2b+ab^2}{18}\right.$$
$$\left.+\frac{a^3+a^2b}{12}\right]$$
$$+\left[-\frac{5a^3+11a^2b+7ab^2+b^3}{48}+\frac{2a^3+3a^2b+ab^2}{12}-\frac{8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3}{162}\right.$$
$$\left.+\frac{20a^3+24a^2b+9ab^2+b^3}{108}-\frac{4a^3+4a^2b+ab^2}{18}\right]$$
$$+\left[\frac{8b^3+12b^2a+6ba^2+a^3}{162}-\frac{20b^3+24b^2a+9ba^2+a^3}{108}+\frac{4b^3+4b^2a+ba^2}{18}\right.$$
$$\left.+\frac{5b^3+11b^2a+7ba^2+a^3}{48}-\frac{2b^3+3b^2a+ba^2}{12}\right]$$
$$+\left[-\frac{b^3+ab^2}{12}+\frac{8b^3+12b^2a+6ba^2+a^3}{162}-\frac{20b^3+24b^2a+9ba^2+a^3}{108}\right.$$
$$\left.+\frac{4b^3+4b^2a+ba^2}{18}\right]$$
$$=\frac{7b^3+6b^2a-6a^2b-7a^3}{81}+\frac{19a^3+15a^2b-15ab^2-19b^3}{54}+\frac{4b^3+3b^2a-3ba^2}{9}$$
$$-\frac{4a^3}{9}+\frac{a^3+ba^2-b^2a-b^3}{6}$$
$$=\frac{1}{324}\left[28b^3+24b^2a-24a^2b-28a^3+114a^3+90a^2b-90ab^2-114b^3+114b^3\right.$$
$$\left.+108b^2a-108ba^2-144a^3-54b^3-54b^2a+54a^2b+54a^3\right]$$
$$=\frac{-4a^3+12a^2b-12ab^2+4b^3}{324}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-a^3+3a^2b-3ab^2+b^3}{81}\\
&= \frac{(b-a)^3}{81}\\
&= K(2,\infty)(b-a)^3.
\end{aligned}
$$

En resumen:

$$\int_a^b |s_2(t)|\,dt = K(2,\infty)(b-a)^3.$$

Sustituyendo esta expresión en (2.15), se obtiene

$$|\mathfrak{R}_S(f,[a,b])| \leq K(2,\infty)(b-a)^3\|f''\|_\infty. \tag{2.16}$$

1c) Si $p=1$,entonces $q=\infty$ y de esta manera:

$$
\begin{aligned}
\|s_2\|_q &= \sup_{a\leq x\leq b} |s_2(x)|\\
&= \text{máx}\left\{ \sup_{a\leq x\leq \frac{2a+b}{3}} \left\{\frac{1}{2}(x-a)(\frac{2a+b}{3}-x)\right\}, \sup_{\frac{2a+b}{3}\leq x\leq \frac{a+b}{2}} \left\{\frac{1}{2}(x-a)(x-\frac{2a+b}{3}),\right.\right.\\
&\left.\left. \sup_{\frac{a+b}{2}\leq x\leq \frac{2b+a}{3}} \left\{\frac{1}{2}(b-x)\left(\frac{2b+a}{3}-x\right)\right\}, \sup_{\frac{2b+a}{3}\leq x\leq b} \left\{\frac{1}{2}(b-x)\left(x-\frac{2b+a}{3}\right)\right\}\right\}\\
&= \frac{(b-a)^2}{24}\\
&= K(2,1)(b-a)^2.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en (2.15), se tiene la desigualdad (37) para el caso $p=1$.

$$|\mathfrak{R}_S(f,[a,b])| \leq K(2,1)(b-a)^2\|f''\|_1. \tag{2.17}$$

Por último, de (2.15), (2.16) y (2.17), se obtiene la desigualdad (37) para el caso $n=2$.

2. Si $n=3$, consideremos la función $s_3 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$s_3(x) = \begin{cases} -\frac{1}{6}(x-a)^2\left(x-\frac{a+b}{2}\right) & \text{si} \quad a\leq x<\frac{a+b}{2}.\\ -\frac{1}{6}(x-b)^2\left(x-\frac{a+b}{2}\right) & \text{si} \quad \frac{a+b}{2}\leq x<b. \end{cases} \tag{2.18}$$

Notemos que, por (2.3) y la Desigualdad de Hölder (24), se tiene que

$$|\mathfrak{R}_S(f,[a,b])| = \left| \int_a^b s_3(x) f'''(x)\,dx \right| \leq \|s_3\|_q \|f'''\|_p. \tag{2.19}$$

donde $p, q \in [1,\infty]$ son números conjugados, con la convención de que $\frac{1}{0} = \infty$ y $\frac{1}{\infty} = 0$. Consideremos tres subcasos:

2a) Si $1 < p < \infty$, entonces $q \in (1,\infty)$ y así

$$\begin{aligned}\|s_3\|_q^q = \int_a^b |s_3(t)|^q\,dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(-\frac{1}{6}\right)(x-a)^{2q}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^q dx \\ + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(-\frac{1}{6}\right)(x-b)^{2q}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^q dx.\end{aligned}$$

Ahora bien, mediante el cambio de variables $x = \left(\frac{b-a}{2}\right)t + a$ en la primera integral y simplificando, se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(-\frac{1}{6}\right)^q (x-a)^{2q}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^q dx &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{3q+1} \frac{1}{6^q}\int_0^1 t^{2q}(1-t)^q\,dt \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{3q+1} \frac{1}{6^q} B(2q+1, q+1).\end{aligned}$$

De manera análoga, mediante el cambio de variables $x = \left(\frac{b-a}{2}\right)t + b$ en la segunda integral y simplificando, se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(-\frac{1}{6}\right)^q (x-b)^{2q}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^q dx &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{3q+1} \frac{1}{6^q}\int_0^1 t^{2q}(1-t)^q\,dt \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{3q+1} \frac{1}{6^q} B(2q+1, q+1).\end{aligned}$$

De esta manera

$$\begin{aligned}\int_a^b |s_3(x)|^q\,dx &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{3q+1} \frac{2}{6^q} B(2q+1, q+1) \\ &= \frac{(b-a)^{3q+1}}{2^{3q}\cdot 6^q} B(2q+1, q+1).\end{aligned}$$

luego

$$
\begin{aligned}
\|f'''\|_p \|s_3\|_q &= \|f'''\|_p \left(\int_a^b |s_3(t)|^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{48} (B(2q+1, q+1))^{\frac{1}{q}} (b-a)^{3+\frac{1}{q}} \|f'''\|_p \\
&= K(3,p)(b-a)^{3+\frac{1}{q}} \|f'''\|_p.
\end{aligned}
$$

La cual es la desigualdad (37) para el caso $n = 3$, $p \in (1, \infty)$.

2b) Si $p = \infty$, entonces $q = 1$ y así

$$
\begin{aligned}
\|s_3\|_1 &= \int_a^b |s_3(x)| \, dx \\
&= \int_a^{\frac{a+b}{2}} -\frac{1}{6}(x-a)^2 \left(x - \frac{a+b}{2} \right) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{6}(x-b)^2 \left(x - \frac{a+b}{2} \right) dx \\
&= \int_a^{\frac{a+b}{2}} -\frac{1}{6}(x^2 + 2ax + a^2) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) dx \\
&+ \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{6}(x^2 + 2bx + b^2) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) dx \\
&= -\frac{1}{6} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[x^3 - 2ax^2 + a^2 x - \left(\frac{a+b}{2} \right) x^2 + ax(a+b) - a^2 \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] dx \\
&+ \frac{1}{6} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left[x^3 - 2bx^2 + b^2 x - \left(\frac{a+b}{2} \right) x^2 + bx(a+b) - b^2 \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] dx \\
&- \frac{1}{6} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2a}{3} x^3 + \frac{a^2 x^2}{2} - \left(\frac{a+b}{6} \right) x^3 + a \left(\frac{a+b}{2} \right) x^2 - a^2 \left(\frac{a+b}{2} \right) \right] \Bigg|_a^{\frac{a+b}{2}} \\
&+ \frac{1}{6} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2b}{3} x^3 + \frac{b^2 x^2}{2} - \left(\frac{a+b}{6} \right) x^3 + b \left(\frac{a+b}{2} \right) x^2 - b^2 \left(\frac{a+b}{2} \right) x \right] \Bigg|_{\frac{a+b}{2}}^b \\
&= -\frac{1}{6} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{a+b}{2} \right)^4 - \frac{2a}{3} \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 + \frac{a^2}{2} \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - \left(\frac{a+b}{6} \right) \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 \right. \\
&+ a \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 - a^2 \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - \frac{a^4}{4} + \frac{2a^4}{3} - \frac{a^4}{2} + \left(\frac{a+b}{6} \right) a^3 - a^3 \left(\frac{a+b}{2} \right) \\
&\left. + a^3 \left(\frac{a+b}{2} \right) \right]
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{6}\left[\frac{b^4}{4}-\frac{2b^4}{3}+\frac{b^4}{2}-\left(\frac{a+b}{6}\right)b^3+b^3\left(\frac{a+b}{2}\right)-b^3\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{a+b}{2}\right)^4\right.$$
$$+\frac{2b}{3}\left(\frac{a+b}{2}\right)^3-\frac{b^2}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+b}{6}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)^3-b\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$$
$$\left.+b^2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$
$$=-\frac{1}{6}\left[-\frac{1}{12}\left(\frac{a+b}{2}\right)^4+\frac{a}{3}\left(\frac{a+b}{2}\right)^3-\frac{a}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\frac{1}{12}a^4+a^3\left(\frac{a+b}{6}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{6}\left[\frac{1}{12}b^4-\left(\frac{a+b}{6}\right)b^3+\frac{1}{12}\left(\frac{a+b}{2}\right)^4-\frac{b}{3}\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+\frac{b^2}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]$$
$$=-\frac{1}{12}\left(\frac{a+b}{2}\right)^4+\left(\frac{a^2+b^2}{12}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a^3+b^3}{36}\right)(a+b)+\frac{a^4+b^4}{72}$$
$$=-\frac{1}{12}\left(\frac{a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4}{16}+\frac{a^4+2a^3b+2a^2b^2+2ab^3+b^4}{48}\right.$$
$$\left.-\frac{a^4+ba^3+b^3a+b^4}{36}+\frac{a^4+b^4}{72}\right)$$
$$=\frac{1}{576}\left[(-3a^4-12a^3b-18a^2b^2-12ab^3-3b^4)+(12a^4+24a^3b+24a^2b^2\right.$$
$$\left.+24ab^3+12b^4)-16a^4-16ba^3-16b^3a-16b^4+8a^4+8b^4\right]$$
$$=\frac{1}{576}\left(b^4-4ab^3+6a^2b^2-4ab^3+b^4\right)$$
$$=\frac{(b-a)^4}{576}$$
$$=K(3,\infty)(b-a)^{3+\frac{1}{q}}.$$

Combinando este resultado con (2.19), se obtiene la desigualdad (37) para el caso $n=3$,$p=\infty$.

2c) Si $p = 1$, entonces $q = \infty$ y así

$$\begin{aligned}
\|s_3\|_\infty &= \sup_{a\le x\le b}\{|s_3(x)|\}\\
&= \text{máx}\left\{\sup_{a\le x\le \frac{a+b}{2}}\{|s_3(x)|\},\ \sup_{\frac{a+b}{2}\le x\le b}\{|s_3(x)|\}\right\}\\
&= \frac{1}{6}\left\{\sup_{a\le x\le b}\{(x-a)^2\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\},\ \sup_{\frac{a+b}{2}\le x\le b}\left\{(x-b)^2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right\}\right\}\\
&= \frac{1}{6}\frac{(b-a)^3}{54}\\
&= \frac{(b-a)^3}{324}\\
&= K(3,1)(b-a)^3.
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.19), se obtiene (37) para el caso $n = 3, p = 1$. De esta manera, se tiene demostrado (37) para el caso $n = 3$.

3. Si $n = 4$, Consideremos la función $s_4 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$s_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}(x-a)^3\left(x-\frac{a+2b}{3}\right) & \text{si } a \le x < \frac{a+b}{2}.\\ \frac{1}{24}(x-b)^2\left(x-\frac{2a+b}{3}\right) & \text{si } \frac{a+b}{2} \le x < b.\end{cases}$$

Nótemos que, mediante la identidad (2.4), la desigualdad (1.1) y la Desigualdad de Hölder (24), se tiene que:

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{R}_S(f,[a,b])| &= \left|\int_a^b s_4(x)f^{(IV)}(x)\,dx\right| \\
&\le \int_a^b |s_4(x)||f^{(IV)}(x)|\,dx\\
&\le \|s_4\|_q\|f^{(IV)}\|_p.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

donde $p, q \in [1, \infty]$ son números conjugados. Consideremos tres subcasos.

3a) Si $1 < p < \infty$, entonces $1 < q < \infty$ y así:

$$\begin{aligned}
\|s_4\|_q^q &= \int_a^b |s_4(x)|^q \, dx \\
&= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \frac{1}{24^q}(x-a)^{3q} \left(\frac{a+2b}{3} - x\right)^q dx \\
&+ \int_{\frac{a+b}{2}}^b \frac{1}{24^q}(b-x)^{3q} \left(x - \frac{2a+b}{3}\right)^q dx
\end{aligned}$$

Para la primera integral, se tiene, mediante el cambio de variable $x = a + \left(\frac{b-a}{2}\right) t$, se obtiene

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{24^q} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^{3q} \left(\frac{a+2b}{3} - x\right)^q dx \\
&= \frac{1}{24^q} \int_0^1 \left(\frac{b-a}{2}\right)^{4q+1} \left(\frac{4}{3} - t\right)^q t^{3q} \, dt \\
&= \frac{1}{24^q} \int_0^1 \left(\frac{b-a}{2}\right)^{4q+1} \left(\frac{4}{3}\right)^q \left(1 - \frac{3}{4}t\right)^q t^{3q} \, dt \\
&= \frac{(b-a)^{4q+1}}{2 \cdot 288^q (3q+1)} \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{4}t\right)^q t^{3q} \, dt \\
&= \frac{(b-a)^{4q+1}}{2 \cdot 288^q (3q+1)} F\left(-q, 3q+1, 3q+2, \frac{3}{4}\right).
\end{aligned}$$

De forma análoga, mediante el cambio de variable $x = b - \frac{b-a}{2}t$ en la segunda integral, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{24^q} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (b-x)^{3q} \left(x - \frac{2a+b}{3}\right)^q dx &= \frac{1}{24^q} \int_0^1 (\frac{b-a}{2})^{4q+1} t^{3q} \left(\frac{4}{3} - t\right)^q dt \\
&= \frac{(b-a)^{4q+1}}{288^q \cdot 2} \int_0^1 t^{3q} \left(1 - \frac{3}{4}t\right)^q dt \\
&= \frac{(b-a)^{4q+1}(3q+1)}{2 \cdot 288^q (3q+1)} \int_0^1 t^{3q} \left(1 - \frac{3}{4}t\right)^q dt \\
&= \frac{(b-a)^{4q+1}}{2 \cdot 288^q (3q+1)} F\left(-q, 3q+1, 3q+2, \frac{3}{4}\right).
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\|s_4\|_q^q &= \int_a^b |s_4(x)|^q\,dx \\
&= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |s_4(x)|^q\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |s_4(x)|^q\,dx \\
&= \frac{(b-a)^{4q+1}}{288^q(3q+1)} F\left(-q, 3q+1, 3q+2, \frac{3}{4}\right).
\end{aligned}$$

de donde

$$\|s_4\|_q = \frac{(b-a)^{4+\frac{1}{q}}}{288}\left(\frac{1}{3q+1}F\left(-q, 3q+1, 3q+2, \frac{3}{4}\right)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Finalmente, sustituyendo esta expresión en (2.20), se obtiene

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{R}(f,[a,b])| &\leq \|s_4\|_q \|f^{(IV)}\|_p \\
&= \frac{(b-a)^{4+\frac{1}{q}}}{288}\left(\frac{1}{3q+1}F\left(-q, 3q+1, 3q+2, \frac{3}{4}\right)\right)^{\frac{1}{q}} \|f^{(IV)}\|_p \\
&= K(4,p)(b-a)^{4+\frac{1}{q}}\|f^{(IV)}\|_p.
\end{aligned}$$

3b) Si $p = 1$ entonces $q = \infty$ y de esta manera

$$\begin{aligned}
\|s_4\|_q &= \|s_4\|_\infty \\
&= \sup_{a\leq x\leq b}\{|s_4(x)|\} \\
&= \text{máx}\{\sup_{a\leq x\leq \frac{a+b}{2}}\{-s_4(x)\}, \sup_{\frac{a+b}{2}\leq x\leq b}\{-s_4(x)\}\} \\
&= \frac{(b-a)^4}{1152}.
\end{aligned}$$

Luego, en (2.20), se obtiene

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{R}_S(f,[a,b])| &= \left|\int_a^b s_4(x) f^{(IV)}(x)\,dx\right| \\
&\leq \int_a^b |s_4(x)||f^{(IV)}(x)|\,dx \\
&\leq \|s_4\|_q \|f^{(IV)}\|_p \\
&= K(4,1)(b-a)^4\|f^{(IV)}\|_1.
\end{aligned}$$

3c) Si $p=\infty$, entonces $q=1$ y se tiene lo siguiente

$$\int_a^b |s_4(x)|\,dx = -\frac{1}{24}\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)^3\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)\,dx$$

$$-\frac{1}{24}\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x-b)^3\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)\,dx$$

$$=-\frac{1}{24}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x^3-3ax^2+3a^2x-a^3)\left(x-\frac{a+2b}{3}\right)\,dx\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{a+b}{2}}^b (x^3-3bx^2+3b^2x-b^3)\left(x-\frac{2a+b}{3}\right)\,dx\right]$$

$$=-\frac{1}{24}\left[\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left[x^4-3ax^3+3a^2x^2-a^3x-x^3\left(\frac{a+2b}{3}\right)\right.\right.$$

$$\left.+ax^2(a+2b)-a^2x(a+2b)+\frac{a^3}{3}(a+2b)\right]\,dx$$

$$+\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left[x^4-3bx^3+3b^2x^2-b^3x-\frac{x^3}{3}(2a+b)+bx^2(2a+b)-b^2x(2a+b)\right.$$

$$\left.\left.+\frac{b^3}{3}(2a+b)\right]\,dx\right]$$

$$=-\frac{1}{24}\left[\frac{x^5}{5}-\frac{3}{4}ax^4+a^2x^3-\frac{a^3x^2}{2}-\frac{x^4}{12}(a+2b)+\frac{ax^3}{3}(a+2b)-\frac{a^2x^2}{2}\right.$$

$$\left.+\frac{a^3}{3}(a+2b)x\right]\Bigg|_a^{\frac{a+b}{2}}-\frac{1}{24}\left[\frac{x^5}{5}-\frac{3}{4}bx^4+b^2x^3-\frac{b^3x^2}{2}-\frac{x^4}{12}(2a+b)\right.$$

$$\left.+\frac{bx^3}{3}(2a+b)-\frac{b^2x^2}{2}+\frac{b^3}{3}(2a+b)x\right]\Bigg|_{\frac{a+b}{2}}^b$$

$$=-\frac{1}{24}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{a+b}{2}\right)^5-\frac{3a}{4}\left(\frac{a+b}{2}\right)^4+a^2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3-\frac{a^3}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right.$$

$$-\frac{1}{12}\left(\frac{a+b}{2}\right)^4(a+2b)+\frac{a}{3}\left(\frac{a+b}{2}\right)^3(a+2b)-\frac{a^2}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(a+2b)$$

$$+\frac{a^3}{3}(a+2b)\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{a^5}{5}+\frac{3}{4}a^5-a^5+\frac{a^5}{2}+\frac{a^4}{12}(a+2b)-\frac{a^4}{3}(a+2b)$$

$$+\frac{a^4}{2}(a+2b)-\frac{a^4}{3}(a+2b)+\frac{b^5}{5}-\frac{3}{4}b^5+b^5-\frac{b^5}{2}-\frac{b^4}{12}(2a+b)$$

$$+\frac{b^4}{3}(2a+b)-\frac{b^4}{2}(2a+b)+\frac{b^4}{3}(2a+b)-\frac{1}{5}\left(\frac{a+b}{2}\right)^5+\frac{3b}{4}\left(\frac{a+b}{2}\right)^4$$

$$-b^2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+\frac{b^3}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{12}\left(\frac{a+b}{2}\right)^4(2a+b)-\frac{b}{3}\left(\frac{a+b}{2}\right)^3(2a+b)+\frac{b^2}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(2a+b)\\
&\left.-\frac{b^3}{3}(2a+b)\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\\
&=-\frac{1}{24}\left[\frac{b^5-a^5}{20}+\frac{1}{12}(b^5-a^5+2ab^4-2ba^4)+2\left(\frac{a+b}{2}\right)^4(b-a)\right.\\
&+\frac{4}{3}(a^2-b^2)\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2[b^3-a^3+b^2a-a^2b]\\
&\left.+\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{a^3}{3}(a+2b)-\frac{b^3}{3}(2a+b)\right)\right].
\end{aligned}
$$

Mediante el desarrollo y simplificación de términos, esta última expresión se reduce a lo siguiente:

$$
-\frac{1}{720}(b^5-a^5+5ab^4-5ba^4)-\frac{1}{576}(a^5+3ba^4+2b^2a^3-2b^3a^2-3ab^4-b^5)
$$

la cual, simplificando, se obtiene

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{720}(b^5-a^5+5ab^4-5ba^4)-\frac{1}{576}(a^5+3ba^4+2b^2a^3-2b^3a^2-3ab^4-b^5)\\
&=\frac{1}{2880}[4b^5-4a^5+20ab^4-20ba^4+5a^5+15ba^4+10b^2a^3-10b^3a^2-15ab^4\\
&-5b^5]\\
&=-\frac{1}{2880}[-b^5+5ab^4-10a^2b^3+10a^3b^2-5a^4b+a^5]\\
&=\frac{(b-a)^5}{2880}\\
&=K(4,\infty)(b-a)^{4+\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo esta expresión en la desigualdad (2.20), se obtiene la desigualdad (37) para el caso $n=4$.

En resumen, la desigualdad (37) se satisface para $n=2,3,4$. Esto concluye la demostración.

■

Observación 15. *Se puede definir $K(1,p)$ como sigue:*

$$K(1,p) = \begin{cases} \frac{1}{6}\left[\frac{2^{q+1}+1}{3(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}} & si\, 1 < p < \infty \\ \frac{1}{3} & si\, p = 1 \\ \frac{5}{36} & si\, p = \infty. \end{cases}$$

De esta manera, el Teorema (37) generaliza los resultados expuestos en [41],[43] y el Teorema (36).

Observación 16. *Si $n = 4$ y $p = \infty$, el Teorema (37) generaliza la clásica Desigualdad de Simpson.*

Observación 17. *En [42] se puede ver otra generalización de la Desigualdad de tipo Simpson para funciones f tales que $f^{(n)}$ es de variación acotada sobre $[a,b]$.*

Corolario 8. *[76] Sean $n \in \{2,3,4\}$, $p, q \in [1,\infty]$ números conjugados. Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $f^{(n-1)} \in AC[a,b]$ con $f^{(n)} \in L^p[a,b]$ y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ una partición de $[a,b]$. Entonces el residuo $\mathfrak{R}_S(f,P,[a,b])$ de la fórmula de Simpson satisface lo siguiente:*

$$|\mathfrak{R}_S(f,P,[a,b])| \leq K(n,p)\|f^{(n)}\|_p \left(\sum_{k=0}^{m-1} {h_k}^{nq+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$

donde $K(n,p)$ está definida como en (37) y $h_k = x_{k+1} - x_k$.

Demostración:

Por hipótesis, f es una función n veces diferenciable tal que $f^{(n-1)}$ es absolutamente continua sobre $[a,b]$ y $f^{(n)} \in L^p[a,b]$. Por ende, para cada $k = 0,1,\ldots,m-1$, f satisface estas premisas en $[x_k, x_{k+1}]$. Luego, por el Teorema (37), se tiene lo siguiente

$$\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - \frac{x_{k+1}-x_k}{6}\left[f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1})\right]\right| \leq K(n,p)\|f^{(n)}\|_p {h_k}^{n+\frac{1}{q}}.$$

Sumando estas desigualdades sobre $k = 0,1,\ldots,m-1$ y junto a la desigualdad triangular (1.1), la desigualdad de Hölder (1.4) y la propiedad de aditividad de la integral sobre intervalos (13, apartado *iv*)), se obtiene:

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x_{k+1}-x_k}{6} \left[f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right] \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=0}^{m-1} \left[\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - \frac{x_{k+1}-x_k}{6} \left[f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right] \right] \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - \frac{x_{k+1}-x_k}{6} \left[f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1}) \right] \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-1} K(n,p) \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f^{(n)}(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}} {h_k}^{n+\frac{1}{q}} \\
&\leq K(n,p)\|f^{(n)}\|_p \left(\sum_{k=0}^{m-1} {h_k}^{nq+1} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

■

Ahora bien, para el caso particular en que P es una partición equidistante, $h_k = \frac{b-a}{m}$ y usando el hecho de que $p, q \in [1, \infty)$ son conjugados, se obtiene lo siguiente:

Corolario 9. *[76] Sea $n \in \{2,3,4\}$, $p, q \in [1,\infty)$ números conjugados. Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que $f^{(n-1)} \in AC[a,b]$ con $f^{(n)} \in L^p[a,b]$ y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ una partición equidistante de $[a,b]$. Entonces el residuo $\mathfrak{R}_S(f, P, [a,b])$ de la fórmula de Simpson satisface lo siguiente:*

$$
|\mathfrak{R}_S(f, P, [a,b])| \leq K(n,p)\|f^{(n)}\|_p \frac{(b-a)^{n+\frac{1}{q}}}{m^n}
$$

donde $K(n,p)$ está definida como en (37).

CAPÍTULO 3

DESIGUALDAD DE TRAPECIO EN ESPACIOS L^P

En este capítulo se tratará sobre resultados y generalizaciones de la Desigualdad de Trapecio para funciones absolutamente continuas. Como es bien sabido, para una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que admite derivadas de segundo orden en (a, b) y $M > 0$ una cota superior de f, el error estimado de la Desigualdad del Trapecio (19) viene dado por:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - (b-a) \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right) \right| \leq \frac{(b-a)^3 M}{12}. \tag{3.1}$$

Sin embargo, en los últimos años, varios autores han proporcionado cotas de la Desigualdad del Trapecio para una clase más amplia de funciones, a continuación se mostrarán algunos ejemplos:

En el año 2004, N. Ujevic demostró el siguiente resultado, la cual supone otra versión de la Regla del Trapecio simple antes descrita [90].

Teorema 38. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto dado y $a, b \in I$ tales que $a < b$. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que*

$$\gamma \leq f'(t) \leq \Gamma \qquad \textit{para todo } x \in [a, b] \textit{ y } \gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$$

entonces

$$\left|\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))-\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\frac{\Gamma-\gamma}{8}(b-a)^2.$$

También, en 1999, S. S. Dragomir demostró el siguiente resultado, el cual puede encontrarse en [86].

Teorema 39. *Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función L-lipchitziana en $[a,b]$, entonces para cada $x\in[a,b]$, se tiene la siguiente desigualdad*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-[(x-a)f(a)+(b-x)f(b)]\right|\leq\left[\frac{1}{4}(b-a)^2+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]L.$$

La constante $\frac{1}{4}$ es la mejor posible. En particular considerando $x=\frac{a+b}{2}$, se obtiene la siguiente estimación de la Desigualdad del Trapecio

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-(b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\right|\leq\frac{1}{4}L(b-a)^2. \tag{3.2}$$

Por último, en el año 1999, S. S. Dragomir demostró el siguiente resultado [89]:

Teorema 40. *Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función de variación acotada en $[a,b]$, entonces tenemos la desigualdad*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-(b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\right|\leq\frac{1}{2}(b-a)\bigvee_a^b f. \tag{3.3}$$

La constante $\frac{1}{2}$ es la mejor posible.

Cabe destacar que se puede hallar una generalización de este resultado en [87] debida a S.S. Dragomir, P. Cerone y C.E.M. Pearce.

A lo largo de este capítulo se utilizará la siguiente notación:

i)$\mathfrak{R}_T(f,[a,b])$ denota el resto de la Regla del Trapecio simple, esto es, la siguiente expresión:

$$\mathfrak{R}_T(f,[a,b])=\int_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

ii)$\Re_T(f,P,I)$ denota el resto de la Regla de Simpson compuesta de f correspondiente a la partición $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ del intervalo $[a,b]$. Es decir, la siguiente expresión:

$$\Re_T(f,P,I)=\int_a^b f(x)\,dx-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\,[f(x_{i-1})+f(x_i)]$$

3.1 Una generalización para funciones que admiten derivadas de n-ésimo orden

El siguiente resultado puede encontrarse en [82].

Lema 3. *[82] Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función tal que $f^{(n-1)}\in AC[a,b]$. Luego para todo $x\in[a,b]$, se tiene que:*

$$\int_a^b f(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}\left[(x-a)^{k+1}f^{(k)}(a)+(-1)^k(b-x)^{k+1}f^{(k)}(b)\right]+\frac{1}{n!}\int_a^b (x-t)^n\,f^{(n)}(t)\,dt \tag{3.4}$$

Teorema 41. *[82] Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función tal que $f^{(n-1)}$ es absolutamente continua sobre $[a,b]$, entonces*

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}\left[(x-a)^{k+1}f^{(k)}(a)+(-1)^k(b-x)^{k+1}f^{(k)}(b)\right]\right|$$
$$\leq\begin{cases}\frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{(n+1)!}\left[(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}\right] & si\,f^{(n)}\in L^\infty[a,b]\\ \frac{\|f^{(n)}\|_p}{n!}\left[\frac{(x-a)^{nq+1}+(b-x)^{nq+1}}{nq+1}\right]^{\frac{1}{q}} & si\,f^{(n)}\in L^p[a,b]\\ \frac{\|f^{(n)}\|_1}{n!}\left[\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]^n & \end{cases} \tag{3.5}$$

Demostración:

Utilizando el lema (3) y las desigualdades triangulares para integrales y sumas finitas, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}[(x-a)^{k+1}f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)]\right| &= \frac{1}{n!}\left|\int_a^b (x-t)^n f^{(n)}(t)\,dt\right| \\
&\leq \frac{1}{n!}\int_a^b |x-t|^n |f^{(n)}(t)|\,dt \\
&= \frac{1}{n!}\|(x-t)^n f^{(n)}\|_1.
\end{aligned}$$

Aplicando la Desigualdad de Hölder (24), se obtiene que

$$\|(x-t)^n f^{(n)}(x)\|_1 \leq \|(x-t)^n\|_q \|f^{(n)}\|_p.$$

de esta manera

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}[(x-a)^{k+1}f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)]\right| \leq \frac{1}{n!}\|(x-t)^n\|_q \|f^{(n)}\|_p \tag{3.6}$$

Consideremos tres casos

1. Caso $p=\infty$: Se tiene que $q=1$ y así, de la desigualdad (3.6), se establece que:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(t)\,dt - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}[(x-a)^{k+1}f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)]\right| \\
&\leq \frac{1}{n!}\|(x-t)^n\|_1 \|f^{(n)}\|_\infty \\
&= \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!}\int_a^b |x-t|^n\,dt \\
&= \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!}\left(\int_a^x (x-t)^n\,dt + \int_x^b (t-x)^n\,dt\right) \\
&= \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!}\left(\frac{(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}}{n+1}\right) \\
&= \|f^{(n)}\|_\infty \left[\frac{(x-a)^{n+1}+(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right].
\end{aligned}$$

2. Caso $1<p<\infty$: Entonces $1<q<\infty$ y así, de la desigualdad (3.6) se establece

que

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(t)\,dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}[(x-a)^{k+1}f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)]\right|\\
&\leq \frac{1}{n!}\|(x-t)^n\|_q\|f^{(n)}\|_p\\
&=\frac{\|f^{(n)}\|_p}{n!}\left(\int_a^b(|x-t|^n)^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&=\frac{\|f^{(n)}\|_p}{n!}\left(\int_a^x((x-t)^n)^q\,dt+\int_x^b((t-x)^n)^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\\
&=\frac{\|f^{(n)}\|_p}{n!}\left[\frac{(x-a)^{nq+1}+(b-x)^{nq+1}}{nq+1}\right].
\end{aligned}
$$

3. Caso $p=1$: Se tiene que $q=\infty$ y así

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(t)\,dt-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)!}[(x-a)^{k+1}f^{(k)}(a)+(-1)^k f^{(k)}(b)]\right|\\
&\leq \frac{1}{n!}\|(x-t)^n\|_\infty\|f^{(n)}\|_1\\
&=\frac{\|f^{(n)}\|_1}{n!}\sup_{x\in[a,b]}\{|x-t|^n\}\\
&=\frac{\|f^{(n)}\|_1}{n!}\max\{(x-a)^n,(b-x)^n\}\\
&=\frac{\|f^{(n)}\|_1}{n!}(\max\{x-a,b-x\})^n\\
&=\frac{\|f^{(n)}\|_1}{n!}\left[\frac{b-a}{2}+\left|x-\frac{a+b}{2}\right|\right]^n.
\end{aligned}
$$

De los casos anteriores se tiene que la desigualdad (3.6) se satisface.

■

Observación 18. *Si se considera en particular $n=1, x=a, x=b$ se tienen, respectivamente, cotas para las fórmulas del rectángulo derecho e izquierdo.*

Si consideramos $n=1$,$x=\frac{a+b}{2}$ en la desigualdad 3.5, se obtiene la siguiente versión de la Desigualdad del Trapecio, la cual se establecerá a continuación como un corolario:

Corolario 10. *[82] Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función absolutamente continua en $[a, b]$ tal que $f' \in L^p[a, b]$ y q el número conjugado de p. Entonces*

$$|\mathfrak{R}_T(f, [a, b])| \leq \begin{cases} \frac{\|f'\|_\infty}{4}(b-a)^2 & si\, f' \in L^\infty[a, b]. \\ \frac{\|f'\|_p}{2(q+1)^{\frac{1}{q}}}(b-a)^{1+\frac{1}{q}} & si\, f' \in L^p[a, b]. \\ \frac{\|f'\|_1}{2}(b-a). \end{cases} \tag{3.7}$$

Observación 19. *Esta desigualdad generaliza las desigualdades (3.2) y (3.3) para funciones absolutamente continuas.*

De este resultado, se desprenden los siguientes corolarios

Corolario 11. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función absolutamente continua en $[a, b]$ tal que $f' \in L^p[a, b]$ y q el número conjugado de p. Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$, entonces:*

$$|\mathfrak{R}_T(f, P, [a, b])| \leq \begin{cases} \frac{\|f'\|_\infty}{4}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})^2 & si\, f' \in L^\infty[a, b]. \\ \frac{\|f'\|_p}{2(q+1)^{\frac{1}{q}}}\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})^{q+1}\right)^{\frac{1}{q}} & si\, f' \in L^p[a, b]. \\ \frac{\|f'\|_1}{2}\|P\|. \end{cases}$$

En particular, si P es una partición equidistante, esto es, para $k = 1, 2, \ldots, n$, $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$, se obtiene el siguiente corolario

Corolario 12. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función absolutamente continua en $[a, b]$ tal que $f' \in L^p[a, b]$ y q el número conjugado de p. Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición equidistante de $[a, b]$, entonces:*

$$|\mathfrak{R}_T(f, P, [a, b])| \leq \begin{cases} \frac{\|f'\|_\infty}{4n}(b-a)^2 & si\, f' \in L^\infty[a, b]. \\ \frac{\|f'\|_p}{2n(q+1)^{\frac{1}{q}}}(b-a)^{1+\frac{1}{q}} & si\, f' \in L^p[a, b]. \\ \frac{\|f'\|_1}{2n}(b-a). \end{cases} \tag{3.8}$$

Se puede ver otra generalización de la Regla del trapecio en [80].

3.2 Una generalización mediante integrales iteradas

En lo que sigue, la teoría expuesta en esta sección puede hallarse en [84]. A continuación se establecerá un lema que nos será de utilidad.

Lema 4. *[84] Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función absolutamente continua en $[a,b]$, entonces se satisface la siguiente identidad:*

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = \frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b [f'(x)-f'(y)](x-y)\,dxdy$$

Teorema 42. *[84] Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que f' es absolutamente continua sobre $[a,b]$ y $f'' \in L^p[a,b]$, con $p \in [1,\infty)$. Entonces:*

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right| &\leq \frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b K_p(x,y)|x-y|^{2-\frac{1}{p}}\,dxdy \\ &\leq \frac{p^2(b-a)^{2-\frac{1}{p}}}{(3p-1)(4p-1)}\|f''\|_p. \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde

$$K_p(x,y) = \left(\int_x^y |f''(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

la primera desigualdad es óptima.

Demostración:

Por el lema 4 obtenemos

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right| &= \frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b [f'(x)-f'(y)]|x-y|^{2-\frac{1}{p}}\,dxdy \\ &= \frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b \left(\int_y^x f''(u)\,du\right)|x-y|^{2-\frac{1}{p}}\,dxdy \end{aligned}$$

Ahora bien, aplicando la Desigualdad de Hölder (24), tenemos que, para todo $x,y \in [a,b]$

$$\begin{aligned} \left|\int_y^x f''(u)\,du\right| &\leq \left(\int_y^x |f''(u)|^p\,du\right)^{\frac{1}{p}}\left|\int_y^x 1\,du\right|^{\frac{1}{q}} \\ &= |x-y|^{\frac{1}{q}}K_p(x,y) \end{aligned}$$

De esta manera, mediante la desigualdad triangular para integrales (1.8), se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right| &\leq \frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\left|\int_y^x f''(u)\,du\right||x-y|\,dxdy\\
&\leq \frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b K_p(x,y)|x-y|^{1+\frac{1}{q}}\,dxdy\\
&= \frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b K_p(x,y)|x-y|^{2-\frac{1}{p}}\,dxdy\\
&\leq \frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b\left(\int_a^b|f''(u)|^p\,du\right)^{\frac{1}{p}}|x-y|^{2-\frac{1}{p}}\,dxdy\\
&= \frac{\|f''\|_p}{2(b-a)^2}\cdot\frac{2p^2(b-a)^{4-\frac{1}{p}}}{(3p-1)(4p-1)}\\
&= \frac{p^2(b-a)^{2-\frac{1}{p}}}{(3p-1)(4p-1)}\|f''\|_p.
\end{aligned}$$

Para demostrar que la primera desigualdad es óptima, consideremos la función $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\frac{x^2}{2}$. Entonces

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|=\frac{(b-a)^2}{12}$$

y además

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b K_p(x,y)|x-y|^{2-\frac{1}{p}}\,dxdy &= \frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b|x-y|^{\frac{1}{p}}|x-y|^{2-\frac{1}{p}}\,dxdy\\
&= \frac{1}{2(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b|x-y|^2\,dxdy\\
&= \frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}$$

■

Observación 20. *De la desigualdad del Teorema (3.9) se deduce lo siguiente*

$$|\mathfrak{R}_T(f,[a,b])|\leq\frac{p^2(b-a)^{3-\frac{1}{p}}}{(3p-1)(4p-1)}\|f''\|_p.$$

De este resultado se desprenden dos corolarios.

Corolario 13. *[84] Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que f' es absolutamente continua en $[a,b]$ y $f'' \in L^p[a,b]$ con $p \in [1,\infty)$, y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$. Se tiene la siguiente estimación:*

$$\begin{aligned} |\mathfrak{R}_T(f,P,[a,b])| &\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x_k - x_{k-1})^2} \int_{x_{k-1}}^{x_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k} K_p(x,y)|x-y|^{2-\frac{1}{p}}\, dxdy \\ &= \frac{p^2}{(3p-1)(4p-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})^{\frac{3p-1}{p-1}}\right)^{1-\frac{1}{p}} \|f''\|_p \end{aligned}$$

donde

$$K_p(x,y) = \left(\int_x^y |f''(t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

El caso en el cual P es una partición equidistante es de interés:

Corolario 14. *[84] Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que f' es absolutamente continua en $[a,b]$ y $f'' \in L^p[a,b]$ con $p \in [1,\infty)$, y sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición equidistante de $[a,b]$. Entonces*

$$|\mathfrak{R}_T(f,P,[a,b])| \leq \frac{p^2(b-a)^{3-\frac{1}{p}}}{n^2(3p-1)(4p-1)}\|f''\|_p.$$

Observación 21. *Dado $\varepsilon > 0$, el mínimo n_ε deseado a fín de obtener una cota menor que ε del error en esta Regla Trapezoidal viene dado por:*

$$n_\varepsilon = \left[p\sqrt{\frac{(b-a)^{3-\frac{1}{p}}}{\varepsilon(3p-1)(4p-1)}\|f''\|_p} \right] + 1$$

donde $[\cdot]$ denota la función máximo entero.

Otra generalización de la Desigualdad del Trapecio para funciones absolutamente continuas puede hallarse en [81].

3.3 Una generalización que involucra a la función Beta

Por último, se mostrará un resultado funciones que admiten segundas derivadas en L^p y la cual involucra a la función Beta, el cual puede encontrarse en [88].

Teorema 43. *[88] Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que admite derivadas de segundo orden y tal que $f'' \in L^p[a,b]$, $p \geq 1$. Entonces:*

$$|\mathfrak{R}_T(f,[a,b])| \leq \frac{1}{2}\|f''\|_p (B(q+1,q+1))^{\frac{1}{q}}(b-a)^{2+\frac{1}{q}} \tag{3.10}$$

siendo $p, q \geq 1$ conjugados y B es la función Beta.

Demostración:

Mediante la integración por partes se establece que

$$\begin{aligned}
\int_a^b (x-a)(b-x)f''(x)\,dx &= [(x-a)(b-x)f'(x)]|_a^b - \int_a^b [(a+b)-2x]f'(x)\,dx \\
&= \int_a^b [2x-(a+b)]f'(x)\,dx \\
&= [2x-(a+b)]f(x)|_a^b - 2\int_a^b f(x)\,dx \\
&= (b-a)(f(a)+f(b)) - 2\int_a^b f(x)\,dx
\end{aligned}$$

para lo cual se obtiene la identidad

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)f''(x)\,dx$$

y de aquí se deduce la desigualdad

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - (b-a)\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)|f''(x)|\,dx \tag{3.11}$$

Ahora bien, aplicando la Desigualdad de Hölder (24) y el cambio de variables $x = bt + (1-t)a$, con $t \in [0,1]$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)|f''(x)|\,dx &\leq \frac{1}{2}\left(\int_a^b (x-a)^q(b-x)^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\|f''\|_p \\
&= \frac{1}{2}\left((b-a)^{2q+1}\int_0^1 t^q(1-t)^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\|f''\|_p \\
&= \frac{1}{2}(b-a)^{2+\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t^q(1-t)^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\|f''\|_p \\
&= \frac{1}{2}(B(q+1,q+1))^{\frac{1}{q}}(b-a)^{2+\frac{1}{q}}\|f''\|_p.
\end{aligned}
$$

Demostrando así la desigualdad (3.10).

■

Corolario 15. *[88] Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función que admite derivadas de segundo orden tal que $f''\in L^p[a,b]$, $p\geq 1$. Si $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ es una partición de $[a,b]$, entonces*

$$
|\Re_T(f,P,I)| \leq \frac{1}{2}(B(q+1,q+1))^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)^{2q+1}\right)^{\frac{1}{q}}\|f''\|_p. \tag{3.12}
$$

Demostración:

Aplicando la desigualdad (3.10) a cada subintervalo $[x_{k-1},x_k]$, con $k=1,2,\ldots,n$, la Desigualdad Triangular (1.1) y la Desigualdad Discreta de Hölder (1.4), se tiene:

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)+f(x_{k+1})](x_{k+1}-x_k)\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n}\left[\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt - \left(\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right)(x_{k+1}-x_k)\right]\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt - \left(\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right)(x_{k+1}-x_k)\right|
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{1}{2}(B(q+1,q+1))^{\frac{1}{q}} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})^{2+\frac{1}{q}} \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{1}{2}(B(q+1,q+1))^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1})^{2+\frac{1}{q}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\left(\left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \right) \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{1}{2}(B(q+1,q+1))^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})^{2q+1} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f''(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{1}{2}(B(q+1,q+1))^{\frac{1}{q}} \|f''\|_p \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})^{2q+1} \right)^{\frac{1}{q}}$$

■

Corolario 16. *[88] Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que admite derivadas de segundo orden tal que $f'' \in L^p[a,b]$, $p \geq 1$. Si $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ es una partición equidistante de $[a,b]$, entonces*

$$|\mathfrak{R}_T(f, P, [a,b])| \leq \frac{1}{2n^2}(B(q+1,q+1))^{\frac{1}{q}}(b-a)^{2+\frac{1}{q}} \|f''\|_p.$$

Demostración:

Dado que P es una partición equidistante, $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.Aplicando la desigualdad dada en el corolario (15), se tiene que

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) + f(x_{k+1})](x_{k+1} - x_k) \right|$$
$$\leq \frac{1}{2}(B(q+1,q+1))^{\frac{1}{q}} \|f''\|_p \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})^{2q+1} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{1}{2}(B(q+1,q+1))^{\frac{1}{q}}\|f''\|_p \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\right)^{2q+1}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \frac{1}{2}(B(q+1,q+1))^{\frac{1}{q}}\|f''\|_p \left(n\frac{(b-a)^{2q+1}}{n^{2q+1}}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \frac{1}{2}(B(q+1,q+1))^{\frac{1}{q}}\|f''\|_p \left(\frac{(b-a)^{2q+1}}{n^{2q}}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$= \frac{1}{2n^2}(B(q+1,q+1))^{\frac{1}{q}}\|f''\|_p(b-a)^{2+\frac{1}{q}}.$$

■

Observación 22. *Dado $\varepsilon > 0$, el mínimo n_ε deseado a fín de obtener un error menor que ε en esta Regla del Trapecio viene dada por:*

$$n_\varepsilon = \left[\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}(B(q+1,q+1))^{\frac{1}{q}}(b-a)^{2+\frac{1}{q}}\|f''\|_p}\right] + 1$$

donde $[\cdot]$ denota la función máximo entero.

Observación 23. *Se conjetura que se satisface la siguiente desigualdad:*

$$\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}(B(q+1,q+1))^{\frac{1}{q}}(b-a)^{2+\frac{1}{q}}\|f''\|_p} < p\sqrt{\frac{(b-a)^{3-\frac{1}{p}}}{\varepsilon(3p-1)(4p-1)}\|f''\|_p}$$

para $1 \leq p < \infty$. De esta manera, la estimación del error en la Desigualdad del Trapecio dada en el Teorema (3.10) es mejor que la correspondiente en el Teorema (3.9).

3.4 Aplicaciones a Medias Especiales

Los resultados de este capítulo se pueden utilizar a fín de obtener algunas desigualdades que involucran a las medias mencionadas en el capítulo anterior. A continuación se mostrarán algunas de ellas. En todos los casos siguientes, se considerarán $a, b \in \mathbb{R}$ con $0 < a < b$ y $p, q \in (1, \infty)$ números conjugados:

1. Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, con $f(x)=x^s$, $s\in\mathbb{R}$, $s\neq 0,1$. Entonces:

a) $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^s\,dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^{s+1}-a^{s+1}}{s+1}\right] = (S_s(a,b))^s.$$

b) $$\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{a^s+b^s}{2} = A(a^s,b^s).$$

c) Considerando $p>1$, tenemos que

$$\|f''\|_p = |s||s-1|\|x^{s-2}\|_p = |s||s-1|\left(\int_a^b x^{ps-2p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= |s||s-1|\left[\frac{b^{ps-2p+1}-a^{ps-2p+1}}{ps-2p+1}\right]^{\frac{1}{p}} = |s||s-1|(b-a)^{\frac{1}{p}}\left[\frac{b^{ps-2p+1}-a^{ps-2p+1}}{(b-a)(ps-2p+1)}\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$= |s||s-1|(b-a)^{\frac{1}{p}}S_{p(s-2)}^{s-2}(a,b).$$

En virtud del Teorema (3.9), se tiene:

$$|A(a^s,b^s)-S_p^s(a,b)| \leq \frac{|s||s-1|p^2(b-a)^2}{(3p-1)(4p-1)}S_{p(s-2)}^{s-2}(a,b)$$

Además, de acuerdo al Teorema (3.10), se tiene

$$|A(a^s,b^s)-S_p^s(a,b)| \leq \frac{|s||s-1|(b-a)^2}{2}(B(q+1,q+1))^{\frac{1}{q}}S_{p(s-2)}^{s-2}(a,b)$$

2. Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ $(0<a<b)$, $f(x)=\frac{1}{x}$, entonces:

a) $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \frac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a} = (L(a,b))^{-1}.$$

b) $$\frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2} = (H(a,b))^{-1}.$$

c) $\|f''\|_p = \left\| \dfrac{2}{x^3} \right\|_p$

$$= 2 \left(\int_a^b x^{-3p}\, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= 2 \left(\frac{b^{-3p+1} - a^{-3p+1}}{-3p+1} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= 2(b-a)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{b^{-3p+1} - a^{-3p+1}}{(-3p+1)(b-a)} \right)^{\frac{1}{-3p}} \right]^{-3}$$

$$= 2(b-a)^{\frac{1}{p}} (S_{-3p}(a,b))^{-3}.$$

Así, por el Teorema (3.9), obtenemos:

$$\left| \frac{1}{H(a,b)} - \frac{1}{L(a,b)} \right| \leq \frac{2p^2(b-a)^2}{(3p-1)(4p-1)} (S_{-3p}(a,b))^{-3}.$$

y de acuerdo al Teorema (3.10), obtenemos:

$$\left| \frac{1}{H(a,b)} - \frac{1}{L(a,b)} \right| \leq (b-a)^2 (B(q+1, q+1))^{\frac{1}{q}} (S_{-3p}(a,b))^{-3}.$$

3. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(0 < a < b)$, dada por $f(x) = \ln(x)$, así

a)
$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx &= \frac{1}{b-a} \int_a^b \ln(x)\, dx \\
&= \frac{b(\ln(b) - 1) - a(\ln(a) - 1)}{b-a} \\
&= \frac{b\ln(b) - a\ln(a)}{b-a} - 1 \\
&= \frac{\ln(b^b) - \ln(a^a)}{b-a} + \ln\left(\frac{1}{e}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{e} \left(\frac{b^b}{a^a} \right)^{\frac{1}{b-a}} \right) \\
&= \ln(I(a,b)).
\end{aligned}$$

$$\text{b)}\quad \begin{aligned} \frac{f(a)+f(b)}{2} &= \frac{\ln(a)+\ln(b)}{2} \\ &= \ln(\sqrt{ab}) \\ &= \ln(G(a,b)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)}\quad \|f''\|_p = \left\| -\frac{1}{x^2} \right\|_p &= \left(\int_a^b \frac{1}{x^{2p}}\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\frac{b^{1-2p}-a^{1-2p}}{1-2p} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= (b-a)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\frac{b^{1-2p}-a^{1-2p}}{(b-a)(1-2p)} \right)^{-\frac{1}{2p}} \right]^{-2} \\ &= (b-a)^{\frac{1}{p}} (S_{-2p}(a,b))^{-2}. \end{aligned}$$

Aplicando los Teoremas (3.9) y (3.10) se obtienen, respectivamente, las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned} |\ln(I(a,b)) - \ln(G(a,b))| &\leq \frac{p^2(b-a)^2}{(3p-1)(4p-1)}(S_{-2p}(a,b))^{-2} \\ |\ln(I(a,b)) - \ln(G(a,b))| &\leq \frac{1}{2}(b-a)^2(B(q+1,q+1))^{\frac{1}{q}}(S_{-2p}(a,b))^{-2}. \end{aligned}$$

BIBLIOGRAFÍA

[1] M. G. UREÑA,*Los dos máximos sistemas del mundo: Las matemáticas del viejo y el nuevo mundo*,Primera edición, Quito, Ecuador: Ediciones ABYA-YALA,(2004).

[2] F. M. CLARKE, *Thomas Simpson and his times*. New York, 1929.

[3] JULIÁ D., BRUNO y M. M. GUILLEUMAS, *Análisis matemático de una variable.* Primera edición, Universitat de Barcelona, España,(2008).

[4] B. T., GEORGE y M. D. FINNEY, *Cálculo: Una variable.* Undécima edición, México: Editorial Adison Wesley Longman, 1998.

[5] G. J., FERNÁNDEZ; A. GARCÍA,P. MARTÍN[et. al], *Fundamentos de las matemáticas: Teoría y problemas.* Primera edición, Madrid: Editorial Delta Publicaciones, 2006.

[6] S. L. SALAS; E. HILLE y G. J. ETGEN, *Calculus: una y varias variables.* Cuarta edición, Barcelona, España: Editorial Reverte, 2007.

[7] A. ENGLER,D. MULLER, S. VRANCKEN y M. HECKLEIN, *El Cálculo diferencial.* Primera edición, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina, ediciones UNL, 1973.

[8] H. Méndez, *Cálculo diferencial.* 3ra reimpresión, primera edición, San Jose, Costa Rica: Editorial EUNED, 2003.

[9] A. Ruiz y H. Barrantes, *Elementos de cálculo diferencial: Historia y ejercicios resueltos.* Primera edición, Ciudad Universitaria, Universidad de Costa Rica: Editorial Universidad de Costa Rica, 1997.

[10] B. Kolman y D.R. Hill, *Álgebra lineal*, Octava edición, México: Editorial Pearson Educación, 2006. José Manuel Casteleiro,Rafael Paniagua

[11] J.M. Casteleiro y R.P. Gómez , *Cálculo Integral*, Octava edición, Pozuelo de Alarcón, Madrid, España: Editorial ESIC, 2006.

[12] M.A. Penadés; B.R. Sala y A.V. Meló, *Fundamentos matemáticos I*, Dpto. de matemática aplicada, Valencia, España: Editorial UPV, 2006.

[13] J. Cerda, *Análisis Real*, Universitat de Barcelona, Barcelona, Espa$'n$a: Col-lecció UB, 1996.

[14] S.S Dragomir,R.P. Agarwal y P. Cerone, *Inequalities of Ostrowski Grüss-type and applications*, Applicationes Mathematicae, Vol 29,4 (2002), pp 465-479.

[15] E.B. Jarauta, *Análisis Matemático de Una Variable: Fundamentos y Aplicaciones*, Universitat Politécnica de Catalunya, Barcelona, España: Ediciones UPC, 2000.

[16] H. Barrantes, *Cálculo Integral en una variable*,1ra edición, Universidad Estatal a Distancia, San Jose, Costa Rica: Editorial EUNED, 1997.

[17] P.T. Moratalla, *De la noción de área a su definición*, 1ra edición, Universidad de Castilla-La Mancha, Castilla-La Mancha, España: Colección Ciencia y Técnica, 1993.

[18] E.L. Escardo, *Principios de Análisis Matemático*, Barcelona, España: Editorial Reverté S.A., 1991.

[19] Franco N. Manuel; Gonzalez M. Francisco y Molina L. Roque, *Lecciones de cálculo infinitesimal I* [pp. 164], cuarta edición, Secretariado de publicaciones, Universidad de Murcia, Murcia, España, 1994.

[20] E.J. Purcell; D. Varberg y S.E. Rigdon, *Cálculo*, octava edición, Edo. de México, México: Editorial Pearson Educación, 2001.

[21] Spivak Michael, *Cálculus: Cálculo infinitesimal*, segunda edición, Barcelona, España: Editorial Reverté S.A., 1992.

[22] Apostol Tom, *Análisis Matemático*, segunda edición, Barcelona, España: Editorial Reverté S.A., 1976.

[23] S.S. Dragomir, R.P. Agarwal y P. Cerone, *On Simpson's inequality and applications*,Tamkang Journal of Mathematics,Vol: 30 (1999),pp. 53-58.

[24] H. M. Protter y C. B. Morrey, *A First Course in Real Analysis*, segunda edición, Undergraduate Text in Mathemactics: Editorial Springer, 1991.

[25] H.L. Royden y P.M. Fitzpatrick, *Real Analysis*, cuarta edición, New York, United States: Editorial Pearson Education, Inc.(Publicado como Prentice Hall),2010.

[26] Carracedo M. Celso y Alix Sanz A. Miguel, *Análisis de una variable real*, Barcelona, España: Editorial Reverté, 1992.

[27] M.K. Vamanamurthy y M. Vuorinen, *Inequalities for means.* Journal of Mathematics Analysis and Applications. Vol:183 (1992).

[28] J. Appell, J. Banas y N. Merentes *Bounded variation and around.* Mathematics Subject Classification 2010: Editorial Walter De Gruyter, (2013).

[29] A.R. Camacho(2009) *El Cálculo diferencial.* Primera edición, Universidad Nacional del Litoral, Madrid, México, ediciones Diaz de Santos.

[30] Apostol Tom y Francisco Vélez Cantarell(2009) *Calculus I.* Primera edición. Vol:1, Barcelona, España, Editorial Reverté.

[31] C. Betz (1992) *Introducción a la Teoría de la Medida e Integración*, Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias.U.C.V.

[32] Ileana Iribarren, *Introducción a la Teoría de la Medida*, Universidad Central de Venezuela, Facultad de Ciencias, U.C.V.(2006)

[33] Robert G. Bartle *A Modern Theory of Integration.* Volumen 32, American Mathematical of Society, Editorial Board (2001)

[34] R. L. Wheeden y A. Zygmund *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis*,Madison Avenue, New York, United States: Editorial Marcel Dekker,(1977).

[35] Ralph Henstock, *Lectures on the Theory of Integration*, primera edición, Box 128, Farrell Road, Singapore Data: World Cientifics Publishing, 1988.

[36] J. Pecaric y S. Varosanec, *A note on Simpson's inequality for functions of bounded variation*, Tamkang Journal of Mathematics. Vol:31, Nº 3, Autumn (2000).

[37] H.B.Norman y S.A. Joseph, *Real Analysis*, New York, United States; Editorial Dovers Publications Inc. 1991.

[38] A. Hald, *A History of Probability and Statistics and their applications before 1750*,Hoboken, New Jersey, United States of America: Editorial A John Wiley and Sons, Inc. 2003.

[39] R. Kress, *Numérical Análysis*, New York, editorial Springer- Verlag, 1998.

[40] D.J. Phillips y R.Phillip, *Methods of numerical integration*,segunda edición, Mineola, New York: editorial Dovers Publications, Inc. 1984.

[41] S.S. Dragomir, *On Simpson's quadrature fórmula for lipschitzian mappings and applications*, Soochow Journal of Mathematics. Vol:25 (April 2000), pp 175-180.

[42] J. PECARIC y S VAROSANEC, *A note on Simpson's inequality for functions of bounded variation*, Tamkang Journal of Mathematics. Vol:31, N^o 3, Autumn (2000).

[43] S.S.DRAGOMIR, R.P. AGARWAL y P. CERONE, *On Simpson's inequality and applications*, Mathematics Subject Classifications, April 1999.

[44] NENAD UJEVIC, *Two sharp inequalities of Simpson type and applications*, Georgian Mathematical Journal. Vol:11 (2004), N^o 1, pp 187-194.

[45] S.S. DRAGOMIR, *On Simpson Quadrature Fórmula for differenciable mappings whose derivatives belong in L^p spaces and applications*, Mathematics Subject Classifications, Diciembre (1998).

[46] B.C. CARLSON, *Algorithms Involving Arithmetic and Geometric Means*,The American Mathematical Monthly. Vol:78, Nro 5 (Mayo 1971), pp 496-595.

[47] D.S. MITRINOVIC, P.S. BULLEN y P.M. VASIC, *Means and their inequalities*, D.Reidel Publishing Company,1998.

[48] A. O. PITTENGER, *The logarithmic mean in n variables*, The American Mathematical Monthly. Vol:92, N^o 2 (Febrero, 1985),pp 99-104.

[49] E. NEWMAN, *A weigthed logarithmic mean*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. Vol:188, Issue 3 (Diciembre 1994),pp 885-900.

[55] E NEWMAN, *Stolarsky mean of several variables*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. Vol:6 (2005), Issue 2, Art:30.

[50] M.O. HASNA y M.S. ALOUINI, *Harmonic Mean and end-to-end perfomance of transmission systems with relays*, IEEE Transactions on Communications. Vol:52, Issue 1, (Enero 2004), pp 130-135.

[51] E.T. ANGUS, *Introduction to functional analysis*, primera edición,New york, United States of América. Editorial John Wiley and Sons Inc, 1958.

[52] V. Gerdt, W. Koepf, W.M. Seiler y E.V. Vorozhtsov, *Computer Algebra in Scientific Computing: 17th International workshop*,Aatchen, Germany (September 14-18, 2015): Editorial Springer- Verlag.(serie: Lecture notes in Computer Science)

[53] Omran Kouba , *New bounds of the identric mean of two arguments*,Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. Vol:9 (2008). Issue 3. Art: 71, pp 6.

[54] Zhieng Hang Yang, *New sharp bounds for logarithmic mean and identric mean*, Journal of Inequalities and Applications (2013) 2013:116.

[55] J. Sandor, *On the identric and logarithmic means*, Aequationes mathematicae. Vol:40 (1990). Issue 2-3, pp 261-270 2013:116.

[56] Kendall C. Richards y Hilari C. Tiedeman, *A note on weigthed identric and logarithmic mean*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics. Vol:7 (2006). Issue 5. Art:157, pp 261-270.

[57] E.A. Volkov, *Numerical methods*, primera edición, Moscow, Russia: Editorial Mir Publishers 1986.

[58] F.A. Medvedev, *Scenes from a the History of Real Functions*,Basel Suiza: Editorial Springer, 1991 (Serie Science Network Historical Studies).

[59] N. Bourbaki, *Éléments dh́istorie des mathématiques*,Basel Suiza: Editorial Elsevier Masson, 1984.

[60] N.L. Carothers *Real analysis* The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge, UK: Editorial Cambridge University Press 2000.

[61] E. Confalonieri *AN ESSAY ON TH MATHEMATICAL METHODS OF THEORY OF GENERAL RELATIVITY* The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge, UK: Editorial Cambridge University Press 2000.

[62] W.F. PFEFFER *Derivation and Integration* The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge, UK: Editorial Cambridge University Press (Cambridge Tracts in Mathematics) 2001.

[63] V.I. BOGACHEV *Measure Theory* Volume I, Berlín, Heidelberg: Editorial Springer Verlag, 2007.

[64] N. BOURBAKI *Integration I: Chapters 1-6* Berlín, Heidelberg: Editorial Springer, Treatise of Éléments de mathématique, 2004.

[65] J.J. BENEDETTO y W. CZAJA, *Integration and Modern Analysis* First editión, Boston, Massachussets USA: Editorial Springer Verlag,(Birkhäuser Advanced Text Basler Lehrbücher), 2004.

[66] S. SIMIC, *An Extension of Stolarsky Means to the Multivariable Case*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. (2009).Article ID 432857, 14 pp.

[67] M. RAÏSSOULI y J. SÁNDOR, *On a method of construction of new means with applications*, Journal of Inequalities and Applications. (2013).

[68] T. ANDO, *On the Arithmetic-Geometric-Harmonic-Mean Inequalities for Positive Definite Matrices*, Linear algebra and its Applications, 1983, Vol. 52, pp. 31-37.

[69] E NEWMAN y J. SANDOR, *On certain means of two arguments and their extensions*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2003, Vol. 2003, No 16, pp. 981-993.

[70] S.S. DRAGOMIR,R.P. AGARWAL y P. CERONE, *On Simpson's quadrature formula for mappings of bounded variation and applications*,Journal of Inequalities applications, Vol 5 N°6 (2000),pp. 533-579.

[71] E.T. COPSON, *An introduction of a theory of functions of a complex variable*, Oxford University Press, 1935.

[72] S.T. Krantz,*Handbook of Complex Variables*, Springer Science and Business Media, 1999.

[73] M. Abramovitz, I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*,New York, Dovers Publications,1964.

[74] W.H. Press,S.A. Teukolsky,textscW.T. Vetterling,textscB.P. Flannery *Numerical Recipes: The art of Scientific Computing*, 3ra edición, New York, Cambridge University Press, 2007.

[75] J.A. Castillo Pérez,C. Jiménez Ruiz,*Algunas representaciones simples de la función hipergeométrica generalizada* ${}_2R_1(a, b, c, t, x)$,Ingeniería y ciencia, Vol: 2 No. 4, septiembre 2006, pp. 75-94.

[76] J. Pecaric,S. Varosanec,*Simpson's formula for functions whose derivatives belong to* L^p *spaces*, Applied Mathematics Letters Vol: 14, 2001,pp. 131-135.

[77] A. Erderlyi, W.Magnus,textscF.G. Tricomi,*Higher transcendental functions*, Bateman Manuscript Project, Mc Graw Hill Book Company,Vol. 1, 1953.

[78] I. Fedotov, S.S. Dragomir, *An inequality of ostrowski type and applications for Simpson's rule and special means*, RGMIA Research Report Collection, Vol. 2, N° 1, 1999.

[79] N. Ujevic, *Inequalities of Ostrowski-Gruss type and applications*,Applicationes Mathematicae 29,4 (2002),pp. 465-479.

[80] M. Niezgoda, *A new inequality of Ostrowski-Gruss type and applications to some numerical quadrature rules*, Computers and Mathematics with applications 58 (2009),pp. 589-596.

[81] B.G. Pach Patte,*On Chebyshev-Gruss type inequalities via Pecaric's Extensión of the Montgomery identity*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Vol: 7, N° 1, Art 11, 2006.

[82] P. Cerone,S.S.Dragomir,J. Roumeliotis y J.Sunde,*A new generalization of the trapezoid fórmula for n-time differentiable mappings and applications* DEMONSTRATIO MATHEMATICA-POLITECHNIKA WARSZAWSKA 33,4 (2000),pp. 719-736.

[83] D.S. Mitrinovic, J.E. Pecaric y A.M. Fink,*Classical and new inequalities in analysis*, Kluwer Academic Publishers, 1993.

[84] S.S.Dragomir,S. Mabizela,*Some error estimates in the trapezoidal quadrature rule*,Tamsui Oxford Journal of mathematical Sciences, 16, 2 (2000), pp. 259-272.

[85] Agarwal R.P. y S.S. Dragomir, *An application of Hayashi's inequality for differentiable functions*, Computers & Mathematics with applications, 32,6 (1996), pp. 95-99.

[86] S.S. Dragomir, *On the trapezoid quadrature fórmula for lipchitzian mappings and applications*,Tamkang Journal of mathematics 30, (1999), pp.133-138.

[87] S.S. Dragomir,P. Cerone y C.E.M. Pearce,*Generalizations of the trapezoid inequality for mappings of bounded variation and applications*, Turkish J. of Math 24,2 (2000),pp. 147-163.

[88] S.S. Dragomir, P.Cerone y A. Sofo, *Some Remarks On The Trapezoid Rule in Numerical Integration*, Department of Computer and Mathematical Sciences, Victoria University of Technology, Melbourne, Australia: 1999.

[89] S.S. Dragomir,*On the trapezoid formula for mappings of bounded variation and applications* (1999) (submitted).

[90] N. Ujevic, *A generalization of Ostrowski?s inequality and applications in numerical integration*, Applied Mathematics Letters, Vol:17, N°2,(2004).