UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

FUNCIONES FUERTEMENTE CONVEXAS DE ORDEN SUPERIOR

Autor: Br. Oscar Silva
Tutor: Dr. Ángel Padilla

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela para optar al título de Licenciado en Matemática

Caracas, Venezuela
Diciembre 2017

Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado "**Funciones Fuertemente Convexas de Orden Superior**", presentado por el **Br. Oscar Yohany Silva Colmenares**, titular de la Cédula de Identidad **16.283.767**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.

Angel Padilla

Ángel Padilla
Tutor

Ramón Bruzual

Ramón Bruzual
Jurado

Carlos Gonzalez

Carlos González
Jurado

Agradecimientos

Primeramente a Dios todopoderoso por colocar en mi camino a todas las personas que pudieron ayudarme en la culminación de esta gran meta.

A mi madre y abuela por todo su cariño y apoyo incondicional que me dieron desde el comienzo hasta la finalización de la licenciatura.

Al profesor Ángel Padilla por su invaluable amistad, por su ayuda para continuar y finalizar mis estudios.

A mi novia por todo su apoyo y amor. ¡Gracias mi bella!

A la Universidad Central de Venezuela por brindarme la oportunidad de realizar mis estudios.

Índice general

Resumen 1

Introducción 2

Capítulo 1. Preliminares 5

1. Funciones Convexas 5
2. Funciones Convexas Generalizadas 17

Capítulo 2. Interpolación Polinomial 23

1. Polinomio Interpolador de Lagrange 23
2. Método de Newton de Diferencias Divididas 26

Capítulo 3. Funciones Fuertemente Convexas de Orden Superior 33

1. Funciones Convexas de Orden Superior 33
2. Funciones fuertemente Jensen n-convexa 42
3. Conexión Con Convexidad Ceneralizada 45

Bibliografía 47

Resumen

T.Popoviciu introduce el concepto de función n-convexa, a través de las diferencias divididas de Newton.

P.S. Bullen demuestra que una función f definida en un intervalo a valores reales es n-convexa si y sólo si para cada $n+1$ puntos de I, el gráfico de f se alterna por arriba y por abajo del gráfico del único polinomio de grado n que pasa por esos puntos.

Las funciones 0-convexas son las funciones no negativas, las funciones 1-convexas son las funciones crecientes y las funciones 2-convexas son las funciones convexas.

Además, se tiene que las funciones fuertemente convexas de orden 2 con módulo c son las funciones fuertemente convexas con módulo c.

El objetivo principal de este Trabajo Especial de Grado consiste en utilizar la definición dada por Popoviciu para generalizar algunos resultados de las funciones convexas y las funciones fuertemente convexas.

Palabras Claves: Funciones convexas, funciones fuertemente convexas, funciones Jensen convexas, diferencias divididas de Newton, funciones $n-$convexas.

Introducción

La noción de convexidad se remonta a la época de Arquímedes (cerca de 250 A.C.) en conexión con la famosa estimación de π usando polígonos regulares inscritos y circunscritos en una circunferencia, notando que el perímetro de una figura covexa es menor que el perímetro de cualquier otra figura que lo rodea.

La teoría de convexidad o conjunto convexo tiene diversas aplicaciones en el estudio de las matemáticas, tanto a nivel teórico como práctico. Por ejemplo, en el análisis funcional, geometría convexa, análisis convexo, optimización, programación lineal, teoría de control, entre otras ramas.

Matemáticos como Jensen, Hadamard, Polyak, entre otros, introdujeron la definición analítica de una función convexa de la siguiente manera:

Dado $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada convexa cuando

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

para todo $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$.

Geométricamente la definición anterior asegura que una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa en el intervalo I, si el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ del gráfico de f, está por encima de la gráfica de la función f en el intervalo $[x, y]$.

A lo largo del tiempo surgieron algunos problemas matemáticos que han motivado a dar nuevos conceptos de convexidad en otros conjuntos, que generalizan la definición dada anteriormente; como por ejemplo la noción de función fuertemente convexa introducida en 1966 por el ruso Teodorovich Polyak [[**20**]]; quien las utilizó para demostrar la convergencia de un algoritmo de tipo gradiente para minimizar una función.

Las funciones fuertemente convexas juegan un papel importante en la teoría de la optimización y en el desarrollo de la matemática en la economía.

La definición dada por Polyak es la siguiente:

Dados $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función y c una constante positiva, se dice que f es fuertemente convexa con módulo c cuando

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2,$$

para todo $x, y \in I$ y $t \in [0,1]$.

T.Popoviciu introduce el concepto de función n-convexa, a través de las diferencias divididas de Newton, como sigue a continuación:

Dados $I \subset \mathbb{R}$, un intervalo, $n \in N$ y cualquier colección de puntos distintos $x_0, \ldots, x_n \in I$, se definen las diferencias divididas de Newton de orden $0, 1$ y n respectivamente, como

$$f[x_0] := f(x_0), \qquad \text{Orden } 0$$
$$f[x_0, x_1] := \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_2}, \qquad \text{Orden } 1$$
$$f[x_0, \ldots, x_n] := \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, \qquad \text{Orden } n.$$

Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada convexa de orden n (o n-convexa) si

$$f[x_0, \ldots, x_{n+1}] \geq 0,$$

para cualquier colección de puntos $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ en I.

Además, si c es una constante positiva, podemos decir que una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es *fuertemente convexa de orden n con módulo c (ó fuertemente n-convexa con módulo c)* cuando

$$f[x_0, \ldots, x_{n+1}] \geq c,$$

para cualquier colección de puntos $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ en I.

P.S. Bullen demuestra que una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es n-convexa si y sólo si para cada $n+1$ puntos de I, el gráfico de f se alterna por arriba y por abajo del gráfico del único polinomio de grado n que pasa por esos puntos, siendo esto reflejado en el Capítulo 2 mediante la formula de de diferencias divididas de Newton.

Utilizando la definición de diferencias divididas, se obtiene que si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces

(1)$f[x] \geq 0$ para todo $x \in I$ si y sólo si f es no negativa en I.

(2)$f[x, y] \geq 0$ para todo x, y puntos distintos de I si y sólo si f es creciente en I.

(3)$f[x, y, z] \geq 0$ para todo x, y, z puntos distintos de I si y sólo si f es convexa en I.

De acuerdo a lo anterior, las funciones 0-convexas son las funciones no negativas, las funciones 1-convexas son las funciones crecientes y las funciones 2-convexas son las funciones convexas.

Además, se tiene que las funciones fuertemente convexas de orden 2 con módulo c son las funciones fuertemente convexas con módulo c.

El objetivo principal de este Trabajo Especial de Grado consiste en utilizar la definición dada por Popoviciu para generalizar algunos resultados de las funciones convexas y las funciones fuertemente convexas.

En el Capítulo 1 se estudiarán algunas propiedades de la convexidad así como de las funciones fuertemente convexas con módulo c. También se darán algunas propiedades de las funciones Jensen convexas.

En el Capítulo 2 se estudiarán las diferencias divididas de Newton, el polinomio interpolador de Lagrange y aproximación por polinomio de Taylor, para poder establecer la conexión y propiedades que existen entre las funciones n-convexas de orden superior.

En el Capítulo 3 se darán algunas caracterizaciones que existen entre las funciones fuertemente n-convexas con módulo c y las funciones fuertemente Jensen n-convexas con módulo c. También se desarrollará el concepto de convexidad generalizada de orden superior en el conjunto $\mathcal{F}_{n,c}$, que se define como un conjunto de polinomios de grado n con coeficiente de mayor grado c.

Capítulo 1

Preliminares

En este Capítulo se darán agunas definiciones y algunos resultados refente a las funciones convexas, lo cual servirá de base en el desarrollo de este Trabajo Especial de Grado.

1. Funciones Convexas

Definición 1.1. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es una función *convexa* si satisface

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \tag{1.1}$$

para todo $x, y \in I$ y $t \in [0,1]$.

Si la desigualdad es en sentido contrario se dice que la función f es cóncava.

Gráficamente, es sencillo ver que f es convexa si y sólo si para todo $u, v \in I, u < v$, la gráfica de f en el intervalo $[u, v]$ está por debajo del segmento que une $(u, f(u))$ con $(v, f(v))$. Esto es,

$$f(x) \leq \frac{f(v) - f(u)}{v - u}(x - u) + f(u),$$

para todo $u, v \in I$, con $u < v$ y $x \in [u, v]$.

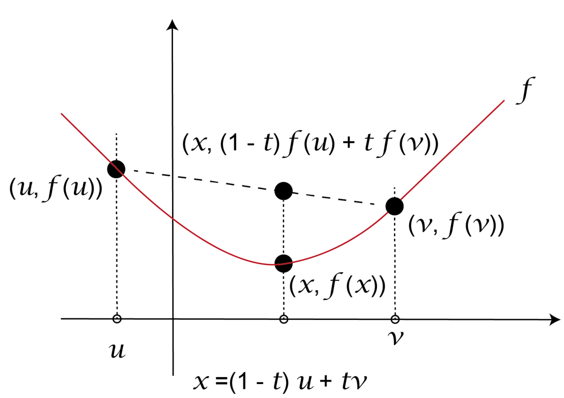

Figura 1.1.

Consecuentemente, las funciones convexas están acotadas en cualquier subintervalo compacto por funciones afines. Así, si una función es a la vez cóncava y convexa entonces es afín.

Proposición 1.2 (ver [**23**]). *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces f es acotada en $[a,b]$.*

Demostración.

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa.

Probemos primero que f es acotada superiormente.

Sean $M = \text{máx}\{f(a), f(b)\}$, y $z \in [a,b]$.

Existe $\lambda \in [0,1]$ tal que $z = \lambda a + (1-\lambda)b$.

Como f es convexa, se tiene que:

$$f(z) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \leq \lambda M + (1-\lambda)M = M,$$

luego f es acotada superiormente en $[a,b]$.

Por otro lado, f es acotada inferiormente, pues, si escribiendo un punto arbitrario del intervalo $[a,b]$, de la forma $(a+b)/2 + t$ para $t > 0$ seleccionado adecuadamente y notando que

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+t\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}-t\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2}+t\right) \end{aligned}$$

se reescribe

$$f\left(\frac{a+b}{2}+t\right) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}-t\right),$$

como f es acotada superiormente

$$-f\left(\frac{a+b}{2}-t\right) \geq -M,$$

entonces

$$f\left(\frac{a+b}{2}+t\right) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M = m$$

y por lo tanto f es acotada inferiormente.

$\square$

Observación 1.3. La hipótesis de que la función convexa esté definida en un intervalo cerrado y acotado es necesaria para que la función sea acotada.

Ejemplos 1.4. Las funciones $f : [0, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \tan(x)$ y $g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = e^x$, son convexas, sin embargo no son acotadas superiormente.

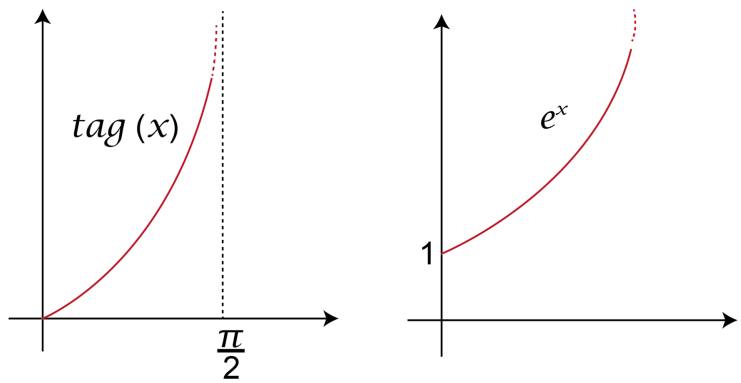

FIGURA 1.2.

Observación 1.5. También se puede notar que una función convexa definida en un intervalo cerrado y acotado no necesariamente es continua.

Ejemplos 1.6. Considerese la función $g : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in [-1, 1) \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Esta función es convexa, sin embargo es discontinua en $x = 1$.

Definición 1.7. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, se dice que una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es *Lipschitz* en I, si para todo $x, y \in I$ existe una constante K tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

La constante K se demomina constante de Lipschitzidad.

Definición 1.8. Sean $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, f es *absolutamente continua* en $[a,b]$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualquier colección $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^n$ de intervalos disjuntos de $[a,b]$ se tiene que si

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

A continuación se demostrará que toda función convexa $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es Lipschitz en cualquier intervalo $[a,b]$ contenido en I^0, donde I^0 denota el enterior de I.

Proposición 1.9 (ver [**23**])**.** *Sean $I \subset \mathbb{R}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Si f es convexa entonces f es Lipschitz en $[a,b]$, para todo $[a,b]$ contenido en I^0. Consecuentemente, f es continua en I^0 y absolutamente continua en $[a,b]$ para todo $[a,b] \subset I^0$.*

Demostración.
Sean $a,b \in \mathbb{R}$ tales que $[a,b] \subset I^0$ y $\gamma > 0$ tales que $a-\gamma$, $b+\gamma \in I$.
Considérese

$$m = \inf \{f(x) : x \in [a-\gamma, b+\gamma]\}$$

y

$$M = \sup \{f(x) : x \in [a-\gamma, b+\gamma]\}$$

.

Sean $x,y \in [a,b]$ tales que $x \neq y$.
Si se toma

$$z = y + \frac{\gamma}{|y-x|}(y-x), \tag{1.2}$$

como $y \in [a,b]$ se tiene que $z \in [a-\gamma, b+\gamma]$ y además

$$y = \frac{|y-x|}{\gamma + |y-x|} z + \frac{\gamma}{\gamma + |y-x|} x.$$

Sea $\lambda = \dfrac{|y-x|}{\gamma + |y-x|}$. Claramente $\lambda \in (0,1)$ y $1-\lambda = \dfrac{\gamma}{\gamma + |y-x|}$.
Como f es convexa, se obtiene que

$$\begin{aligned} f(y) = f(\lambda z + (1-\lambda)x) &\leq \lambda f(z) + (1-\lambda) f(x) \\ &= \lambda f(z) - \lambda f(x) + f(x) \\ &= \lambda(f(z) - f(x)) + f(x) \end{aligned}$$

entonces

$$f(y) - f(x) \leq \lambda(M-m) < \frac{|y-x|}{\gamma}(M-m) = K|y-x| \tag{1.3}$$

si en 1.2 cambiamos y por x y x por y, se obtendrá que

$$f(y) - f(x) \leq K|y-x| \tag{1.4}$$

de 1.3 y 1.4 se tiene que

$$|f(y) - f(x)| \leq K|y-x|.$$

Lo que implica que f es Lipschitz.

Sean $\varepsilon > 0$ y $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ una colección de intervalos disjuntos en $[a,b]$.

Definiendo $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2K}$, se obtiene que si $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$, entonces

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \leq \sum_{i=1}^n K|b_i - a_i| = K\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < K\delta = \frac{K\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

cumpliendose así que f es absolutamente continua.

□

Observación 1.10. En las condiciones de la Proposición 1.9 no se puede asegurar la continuidad en un extremo del intervalo, por ejemplo la función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(a) = 1$ y $f(t) = 0$ si $a < t < b$, es convexa en $[a,b]$, pero no es continua en a.

Por otro lado, la derivada de una función convexa puede ser estudiada en términos de derivada por la Izquierda y por la derecha como sigue:

Definición 1.11. Sean $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $x \in I$, las *derivadas laterales* de f en x se definen en caso de existir tal como sigue:

Derivada por la izquierda

$$f'_-(x) = \lim_{y \uparrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

y derivada por la derecha

$$f'_+(x) = \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

El siguiente Teorema establece que las derivadas laterales de una función convexa existen, son monótonas y crecientes en el interior de I.

Lema 1.12. *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa, entonces en cada $x \in I^0$ existen las derivadas laterales y las funciones f'_- y f'_+ son crecientes en I^0.*

Demostración.

Considerece los siguientes puntos $w < x < y < z$ en I^0 con P, Q, R y S los puntos correspondientes en la gráfica de f (ver Figura 1.3); es decir

$$P = (w, f(w)), \quad Q = (x, f(x)), \quad R = (y, f(y)) \quad \text{y} \quad S = (z, f(z)).$$

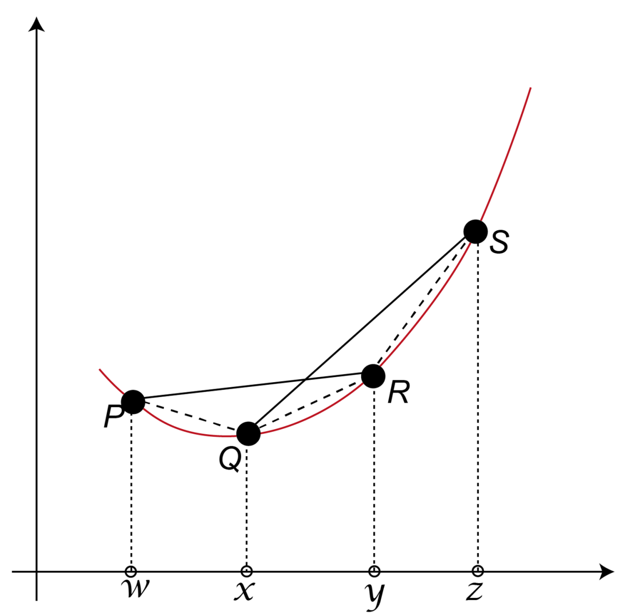

Figura 1.3. Relación entre las pendientes.

Se considera la siguiente notación para la pendiente de la recta que pasa por dos puntos, tal como sigue *pendiente*$(AB) = m(AB)$. Con esta notación se obtiene.

$$m(PQ) \leq m(PR) \leq m(QR) \leq m(QS) \leq m(RS). \tag{1.5}$$

Como $m(PR) \leq m(QR)$, entonces la $m(QR)$ aumenta cuando x tiende a y por la izquierda, y de manera similar la $m(RS)$ disminuye a medida que z tiende a y por la derecha.

De aquí es fácil obtener el resultado.

□

El siguiente teorma da una caracterización de las funciones convexas como representación de una integral. Afortunadamente, esta representación se pueden tomar en el sentido de Riemann o de Lebesgue.

Teorema 1.13 (ver [**23**])**.** *Una función $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y sólo se existe una función $g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ creciente y un punto $d \in (a, b)$ tal que para todo $x \in (a, b)$,*

$$f(x) - f(d) = \int_d^x g(t)dt. \tag{1.6}$$

Demostración.

Supóngase primero que f es convexa, y sean $d, x \in (a, b)$ con $d < x$. Por el Lema 1.12 la función f'_+ existe y es creciente. Sea $g = f'_+$. En virtud de la Proposición 1.9, f es absolutamente continua en $[d, x]$.

Por uno de los teoremas clásicos de la integral de Lebesgue (ver [**15**], p.225) se tiene que

$$f(x) - f(d) = \int_d^x f'_+(t)dt = \int_d^x g(t)dt.$$

Recíprocamente, supóngase que existe una función creciente $g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) - f(d) = \int_d^x g(t)dt, \qquad \text{para todo } x, d \in (a, b).$$

Sean $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tales que $\alpha + \beta = 1$.

Como g es creciente, para $x, y \in (a, b)$ con $x < y$, se tiene que si $\alpha x + \beta y < t < y$ entonces $g(\alpha x + \beta y) \leq g(t)$ y si $x < t < \alpha x + \beta y$ entonces $g(t) \leq g(\alpha x + \beta y)$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\alpha f(x)+\beta f(y)-f(\alpha x+\beta y) &= \alpha f(x)+\beta f(y)-(\alpha+\beta)f(\alpha x+\beta y)\\
&= \beta(f(y)-f(\alpha x+\beta y))-\alpha(f(\alpha x+\beta y)-f(x))\\
&= \beta\int_{\alpha x+\beta y}^{y} g(t)dt-\alpha\int_{x}^{\alpha x+\beta y} g(t)dt\\
&\geq \beta\int_{\alpha x+\beta y}^{y} g(\alpha x+\beta y)dt-\alpha\int_{x}^{\alpha x+\beta y} g(\alpha x+\beta y)dt\\
&= \beta g(\alpha x+\beta y)(y-(\alpha x+\beta y))-\alpha g(\alpha x+\beta y)(\alpha x+\beta-x)\\
&= g(\alpha x+\beta y)[\beta(y-(\alpha x+\beta y))-\alpha(\alpha x+\beta y-x)]\\
&= g(\alpha x+\beta y)[\alpha x+\beta y-(\alpha x+\beta y)]=0.
\end{aligned}$$

De donde, $f(\alpha x+\beta y)\leq \alpha f(x)+\beta f(y)$.

Luego, si $\alpha[0,1]$ se tiene que

$$f(\alpha x+(1-\alpha)y)\leq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y).$$

□

El Teorema anterior demuestra que para una función diferenciable, la convexidad emplica que la derivada es creciente. A continuación se presenta otra manera de ver la convexidad de una función.

Corolario 1.14 (ver [**23**]). *Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función diferenciable en (a,b). Entonces f es convexa si y sólo si $f^{'}$ es una función creciente.*

Demostración.

Supóngase $f^{'}$ una función creciente. Entonces, del Teorema fundamental del calcúlo se asegura que

$$f(x)-f(c)=\int_{c}^{x} f^{'}(t)dt. \tag{1.7}$$

para cualquier $x\in(a,b)$,.

En virtud del Teorema 1.13 se tiene que f es convexa.

Recíprocamente, si f es convexa, por el Lema 1.12, $f_{-}^{'}$ y $f_{+}^{'}$ son crecientes. Como f es diferenciable, se tiene que $f^{'}=f_{-}^{'}=f_{+}^{'}$. Por lo tanto $f^{'}$ es creciente.

□

Corolario 1.15 (ver [**23**]). *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con segunda derivada en (a,b). Si f es una función convexa en $[a,b]$ si y sólo si $f^{''} \geq 0$ en (a,b). Además si $f^{''} > 0$ en (a,b), entonces f es estrictamente convexa en el intervalo (a,b).*

Demostración.
En virtud del Corolario 1.14, f es convexa en (a,b) si sólo si $f^{'}$ es creciente.
Además se tiene que $f^{'}$ es creciente en (a,b) si y sólo si $f^{''} \geq 0$.

□

Ejemplos 1.16. Sea $f(x) = x^4, x \in (-1,1)$ se demostrará que $f^{''} \geq 0$ en (-1,1).

$$f^{'}(x) = (x^4)^{'} = 4x^3, x \in (-1,1)$$

y derivando nuevamente,

$$f^{''} = (4x^3)^{'} = 12x^2 \geq 0$$

para todo $x \in (-1,1)$. Como $f^{''}(x) \geq 0$, $x \in (-1,1)$ por el Corolario 1.15 se tiene que f es una función convexa en $(-1,1)$.

El recíproco del Corolario 1.15 es falso, es decir, el hecho de que f sea estrictamente convexa en (a,b) no implica que $f^{''} > 0$. En el Ejemplo 1.16 f es estrictamente convexa y no cumple que $f^{''} > 0$ ya que cuando $x = 0$ entonces $f^{''}(x) = 0$.

Definición 1.17. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice *midconvexa* (o convexa en el punto medio) si satisface la desigualdad

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \tag{1.8}$$

para todo $x, y \in I$. Si la desigualdad es estricta para $x \neq y, f$ es llamada estrictamente midconvexa.

Obsérvese que de acuerdo con la definición, toda función convexa es midconvexa. El recíproco no es cierto, sin embargo se verá que bajo ciertas condiciones, ambas definiciones son equivalentes.

Lema 1.18 (ver [**25**]). *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función midconvexa. Entonces*

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}(f(x_1) + \cdots + f(x_n)), \tag{1.9}$$

para todo entero positivo n y cualesquiera $x_i \in I, i = 1, \ldots, n$.

Demostración.

Si $n = 2$ la desigualdad (1.9) es la definición de función midconvexa.

Supóngase que la relación es cierta para $n = 2^m$ tal que $m \in \mathbb{N}$, se demostrará que también es cierta para $n = 2^{m+1}$. Sean

$$x^{'} = \frac{1}{2^m}\sum_{i=1}^{2^m} x_i, x^{''} = \frac{1}{2^m}\sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} x_i,$$

entonces

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) &= f\left(\frac{x_1+\cdots+x_{2^{m+1}}}{2^{m+1}}\right)\\
&= f\left(\frac{1}{2^{m+1}}\sum_{i=1}^{2^m} x_i + \frac{1}{2^{m+1}}\sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} x_i\right)\\
&= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^m}\sum_{i=1}^{2^m} x_i + \frac{1}{2^m}\sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} x_i\right)\right)\\
&= f\left(\frac{1}{2}(x^{'}+x^{''})\right) = f\left(\frac{x^{'}+x^{''}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Usando la midconvexidad de f y la hipótesis inductiva,

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) &= f\left(\frac{x^{'}+x^{''}}{2}\right) \leq \frac{f(x^{'})+f(x^{''})}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2^m}\sum_{i=1}^{2^m} x_i\right) + f\left(\frac{1}{2^m}\sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} x_i\right)\right)\\
&\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^m}\sum_{i=1}^{2^m} f(x_i) + \frac{1}{2^m}\sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} f(x_i)\right)\\
&= \frac{1}{2^{m+1}}\left(\sum_{i=1}^{2^m} f(x_i) + \sum_{i=2^m+1}^{2^{m+1}} f(x_i)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),
\end{aligned}$$

lo que implica que si $n = 2^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ se verifica

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

Ahora se verá el caso en que n no es de esta forma, es decir $n \in \mathbb{N}$ es arbitrario ($n > 2$).

Sean $m \in \mathbb{N}$ tal que $n < 2^m$ y

$$y = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Se tiene que

$$y = \frac{(x_1 + \cdots + x_n) + (2^m - n)y}{2^m} = \frac{1}{2^m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=n+1}^{2^m} y\right)$$

y por la primera parte de la demostración se obtiene que

$$\begin{aligned} f(y) &= f\left(\frac{1}{2^m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=n+1}^{2^m} y\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{2^m}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \sum_{i=n+1}^{2^m} f(y)\right) \\ &= \frac{1}{2^m}\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + (2^m - n)f(y)\right) \end{aligned}$$

es decir,

$$2^m f(y) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i) + (2^m - n)f(y),$$

de donde

$$nf(y) \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

y por consiguiente

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

□

Una vez expuesto este resultado se tiene las condiciones para demostrar el siguiente Teorema.

Lema 1.19. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función midconvexa, entonces*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \tag{1.10}$$

para todo $x, y \in I$ y $\lambda \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

Demostración.

Sea $\lambda \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda = k/n$, donde $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. De acuerdo con el Lema (1.18) se tiene que para todo $x, y \in I$, se verifica

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k}{n}x + \left(1 - \frac{k}{n}\right)y\right) &= f\left(\frac{kx + (n-k)y}{n}\right) \\ &\leq \frac{kf(x) + (n-k)f(y)}{n} \\ &= \frac{k}{n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{n}\right)f(y) \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

para todo $x, y \in I$ y $\lambda \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

$\square$

En el siguiente Teorema se establecerá que toda función midconvexa y continua es convexa.

Teorema 1.20. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función midconvexa y continua, entonces f es una función convexa.*

Demostración.

Sean $x, y \in I$, $\lambda \in [0,1]$ y $\{\lambda_n\}_{n \leq 1}$ una sucesión de números racionales pertenecientes al intervalo cerrado $[0,1]$ ($\lambda_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1], n \in \mathbb{N}$) que converge a λ.

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \lambda_n = \lambda.$$

Entonces, por el Lema 1.19 , se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$f(\lambda_n x + (1-\lambda_n)y) \leq \lambda_n f(x) + (1-\lambda_n)f(y).$$

Utilizando esto y el hecho de que f es una función continua se obtiene que

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\lim_{n \longrightarrow \infty} \lambda_n x + (1 - \lim_{n \longrightarrow \infty} \lambda_n)y) \\ &= \lim_{n \longrightarrow \infty} f(\lambda_n x + (1-\lambda_n)y) \\ &\leq \lim_{n \longrightarrow \infty} (\lambda_n f(x) + (1-\lambda_n)f(y)) \\ &= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y). \end{aligned}$$

Es decir

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

para todo $x, y \in I$ y $\lambda \in [0,1]$.

$\square$

2. Funciones Convexas Generalizadas

Una forma de generalizar el concepto de una función convexa, fue introducido por el estadounidense Edwin Beckenbach [ver [**2**]] en 1937, reemplazando el segmento por gráficas de funciones continuas pertenecientes a una familia $\mathcal{F}$ de funciones de dos parámetros. Las funciones convexas generalizadas son obtenidas de muchas de las propiedades conocidas para la función convexa clásica [ver [**2**][**3**][**17**][**23**]].

Su definición fue motivada al considerar la clase de funciones de una variable real definida de la siguiente manera:

Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones reales continuas definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se dice que $\mathcal{F}$ es una familia de dos parámetros si para los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in I \times \mathbb{R}$ con $x_1 \neq x_2$ existe exactamente una $\varphi \in \mathcal{F}$ tal que

$$\varphi(x_i) = y_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2.$$

La única función $\varphi \in \mathcal{F}$ definida por los puntos $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$ se denotará por $\varphi_{(x_1,y_1),(x_2,y_2)}$.

Definición 1.21. Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es *convexa con respecto a la familia* $\mathcal{F} = \{ax + b : \quad a, b \in \mathbb{R}\}$ ó $\mathcal{F}$-convexa si para todo $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ se tiene que

$$f(x) \leq \varphi_{(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))}(x) \quad \text{para todo } x \in [x_1, x_2] \text{ y } \varphi \in \mathcal{F}.$$

El siguiente Teorema mostrará que la definición de $\mathcal{F}$-convexidad coincide con la definición clásica de convexidad.

Teorema 1.22 (ver [**23**])**.** *Sea $\mathcal{F} = \{ax + b : \quad a, b \in \mathbb{R}\}$, una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es convexa si y sólo si f es $\mathcal{F}$-convexa.*

Demostración.

Fijando $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ y considerando $\varphi_{(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))}(x) \in \mathcal{F}$, se tiene que $\varphi(x) = ax + b$, donde los coeficientes son determinados únicamente por las condiciones

$\varphi(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2$. Por consiguiente, para cada $t \in [0, 1]$, se tiene

$$\begin{aligned}
\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) &= a(tx_1 + (1-t)x_2) + b \\
&= atx_1 + a(1-t)x_2 + b + bt - bt \\
&= t(ax_1 + b) + (1-t)(ax_2 + b) \\
&= t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2) \\
&= tf(x_1) + (1-t)f(x_2).
\end{aligned}$$

Si f es $\mathcal{F}$-convexa, entonces

$$\begin{aligned}
f(tx_1 + (1-t)x_2) &\leq \varphi_{(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))}(tx_1 + (1-t)x_2) \\
&= tf(x_1) + (1-t)f(x_2),
\end{aligned}$$

lo que significa que f es convexa.

Reciprocamente, si f es convexa, entonces

$$\begin{aligned}
f(tx_1 + (1-t)x_2) &\leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \\
&= \varphi_{(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))}(tx_1 + (1-t)x_2).
\end{aligned}$$

□

Definición 1.23. Sean $I \subset \mathbb{R}$ y $c > 0$, una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama *fuertemente convexa con módulo* c si

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2, \tag{1.11}$$

para todo $x, y \in I$ y $t \in [0, 1]$.

A continuación se dará una definición para un caso particular cuando $t = \frac{1}{2}$

Definición 1.24 (ver [**1**])**.** Sean $I \subset \mathbb{R}$ y $c > 0$, una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama *fuertemente Jensen convexa con módulo* c si

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} - \frac{c}{4}(x-y)^2,$$

para todo $x, y \in I$.

Seguidamente se dará una interpretación geométrica de las funciones fuertemente convexas con módulo c.

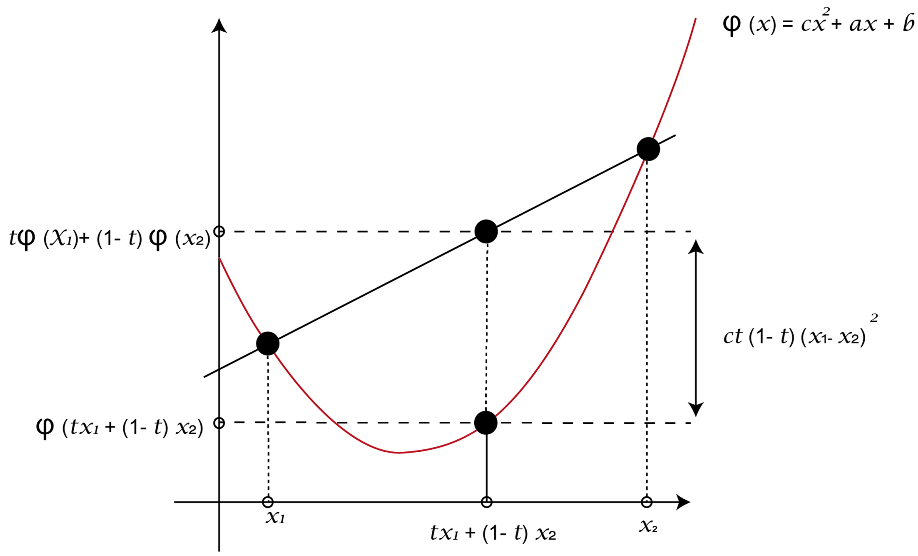

FIGURA 1.4. Interpretación geométrica de $ct(1-t)(x_1-x_2)^2$

Para $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrarios y $c > 0$ fijo, se considera la función

$$\varphi(x) = cx^2 + ax + b.$$

Sean $x_1, x_2 \in I$ tal que $x_1 < x_2$ y $t \in [0,1]$. En la Figura 1.4 se puede ver que la curva φ en el intervalo (x_1, x_2) está siempre por debajo de la recta $t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2)$, la cual une los puntos $(x_1, \varphi(x_1))$ y $(x_2, \varphi(x_2))$.

Además,

$$\begin{aligned}
t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2) - \varphi(tx_1 + (1-t)x_2) &= t(cx_1^2 + ax_1 + b) + (1-t)(cx_2^2 + ax_2 + b) \\
&\quad -c(tx_1 + (1-t)x_2)^2 - a(tx_1 + (1-t)x_2) - b \\
&= tcx_1^2 + tax_1 + tb + cx_2^2 + ax_2 + b - tcx_2^2 \\
&\quad -tax_2 - tb - ct^2x_1^2 - c(1-t)^2x_2^2 \\
&\quad -2ct(1-t)x_1x_2 - atx_1 - ax_2 + atx_2 \\
&= cx_1^2(t - t^2) - 2ct(1-t)x_1x_2 \\
&\quad +cx_2^2(1 - t - (1-t)^2) \\
&= ct(1-t)(x_1 - x_2)^2.
\end{aligned}$$

Ahora se dará una interpretación geométrica de las funciones fuertemente convexas con módulo c.

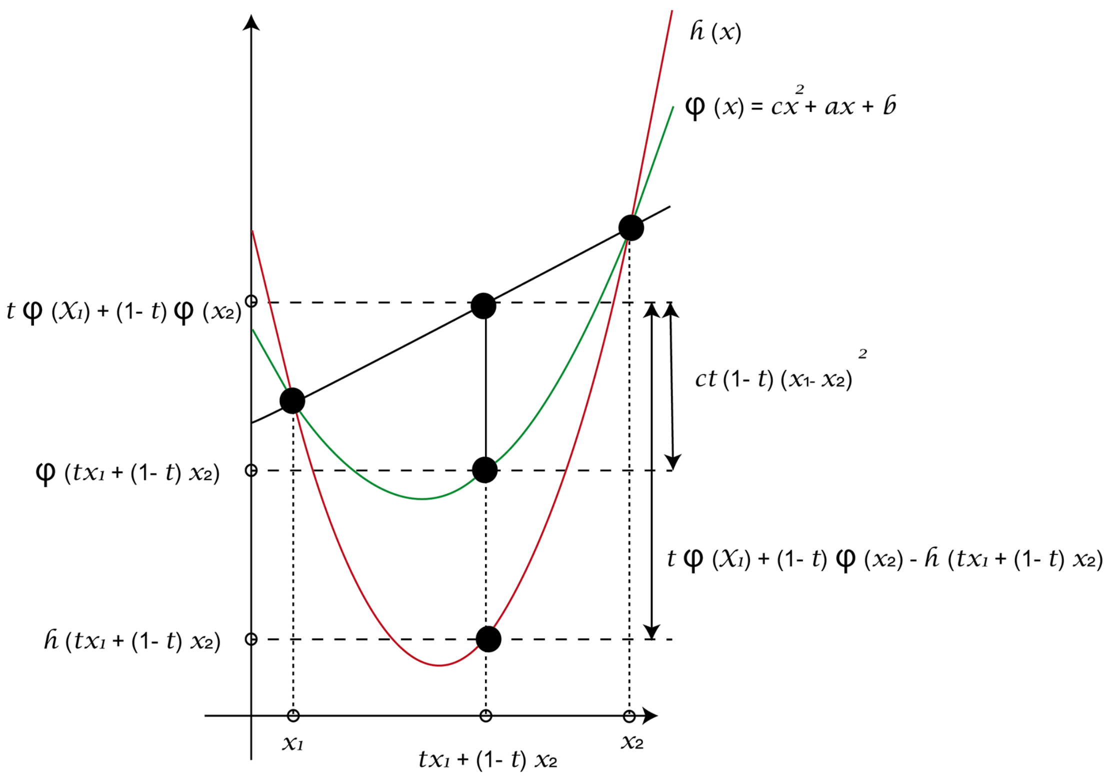

Figura 1.5. Interpretación geométrica de la convexidad fuerte

Sea $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función fuertemente convexa con módulo c. Se eligirán las constantes a y b tales que la función $\varphi(x) = cx^2 + ax + b$ satisfaga que $\varphi(x_1) = h(x_1)$ y $\varphi(x_2) = h(x_2)$.

Por la Definición (1.23) se obtiene que

$$\begin{aligned} th(x_1) + (1-t)h(x_2) - h(tx_1 + (1-t)x_2) &\geq ct(1-t)(x_1 - x_2)^2 \\ &= t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2) - \varphi(tx_1 + (1-t)x_2) \\ &= th(x_1) + (1-t)h(x_2) - \varphi(tx_1 + (1-t)x_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$h(tx_1 + (1-t)x_2) \leq \varphi(tx_1 + (1-t)x_2).$$

De donde,

$$h(x_0) \leq \varphi(x_0),$$

para todo $x_0 \in [x_1, x_2]$.

De lo realizado anteriormente y lo que se muestra en la Figura 1.5, se deduce que la gráfica de una función fuertemente convexa con módulo c está por debajo de la gráfica $\varphi(x) = cx^2 + ax + b$ en los puntos $x_1, x_2 \in I$, donde φ es el único polinomio que interpola a los puntos $(x_1, h(x_1))$ y $(x_2, h(x_2))$.

La interpretación geométrica anterior motiva a la siguiente definición.

Definición 1.25. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $c > 0$. Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada fuertemente convexa con modulo c, repecto a $\mathcal{F}_c = \{cx^2 + ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$ ó $\mathcal{F}_c$-convexa cuando para todo $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, se tiene que

$$f(x) \leq \varphi_{(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))}(x),$$

donde $\varphi \in \mathcal{F}_c$ es el único polinomio que interpola a los puntos $(x_1, h(x_1))$ y $(x_2, h(x_2))$.

El siguiente Teorema mostrará que la definición de $\mathcal{F}_c$-convexidad coincide con la definición de convexidad fuerte con módulo c.

Teorema 1.26 (ver [**13**]). *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y c un número positivo. Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es fuertemente convexa con módulo c, si y sólo si, f es $\mathcal{F}_c$-convexa.*

Demostración.

Sean $x_1, x_2 \in I$. Si $\varphi \in \mathcal{F}_c$, entonces $\varphi(x) = cx^2 + ax + b$, donde los coeficientes a, b son determinados únicamente por las condiciones $\varphi(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, 2$. Por consiguiente, para cada $t \in [0, 1]$, se tiene

$$\begin{aligned}
\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) &= c(tx_1 + (1-t))^2 + a(tx_1 + (1-t)x_2) + b \\
&= c(t^2x_1^2 + 2tx_1(1-t)x_2 + (1-t)^2x_2^2) \\
&\quad + atx_1 + a(1-t)x_2 + b \\
&= ct^2x_1^2 + 2ctx_1x_2 - 2ct^2x_1x_2 + cx_2^2 - 2ctx_2^2 \\
&\quad + ct^2x_2^2 + atx_1 + ax_2 - atx_2 + b + tb - tb \\
&= tcx_1^2 + atx_1 + tb + cx_2^2 + ax_2 + b - ctx_2^2 - atx_2 \\
&\quad - tb - ctx_1^2 + 2ctx_1x_2 - ctx_2^2 + ct^2x_1^2 - 2ct^2x_1x_2 + ct^2x_2^2 \\
&= t(cx_1^2 + ax_1 + b) + (1-t)(cx_2^2 + ax_2 + b) \\
&\quad - (ct(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) - ct^2(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)) \\
&= tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - ct(1-t)(x_1 - x_2)^2
\end{aligned}$$

Si f es $\mathcal{F}_c$-convexa, entonces

$$\begin{aligned} f(tx_1+(1-t)x_2) &\leq \varphi_{(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))}(tx_1+(1-t)x_2) \\ &= tf(x_1)+(1-t)f(x_2)-ct(1-t)(x_1-x_2)^2, \end{aligned}$$

reciprocamente, si f es fuertemente convexa con módulo c, entonces

$$\begin{aligned} f(tx_1+(1-t)x_2) &\leq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)-ct(1-t)(x_1-x_2)^2 \\ &= \varphi_{(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))}(tx_1+(1-t)x_2), \end{aligned}$$

lo que demuestra que f es $\mathcal{F}_c$-convexa.

□

Capítulo 2

Interpolación Polinomial

1. Polinomio Interpolador de Lagrange

El polinomio de Lagrange, llamado así en honor a Joseph-Louis de Lagrange, es el polinomio que interpola un conjunto de puntos dado. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ una partición de $[a,b]$, se desea conseguir un polinomio $P_n(x)$ de grado a lo sumo n, tal que $P_n(x_i) = f(x_i)$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$.

Escribiendo $P_n(x_i) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, el problema de interpolación es lo mismo que resolver el sistema lineal de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas

$$
\begin{aligned}
P_n(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\
P_n(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\
&\vdots \\
P_n(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Proposición 2.1. *Dados $n+1$ puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y $n+1$ ordenadas $y_0, y_1, \ldots, y_n$ existe un único polinomio de grado $\leq n$ que interpola a y_i en x_i, para $i = 0, 1, \ldots, n$.*

Demostración. [1]

Vamos a dar dos demostraciones.

La matriz de coeficientes del sistema (2.1) es

$$
\begin{pmatrix}
1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\
1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\
1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n
\end{pmatrix}
$$

llamada matriz de **Vandermonde.** Sea

$$V_n(x) = det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$V_n(x_n) = \text{ determinante de la matriz de Vandermonde}$$

Calculando $V_n(x)$ desarrollando el determinande por la última fila, obtenemos

$$V_n(x) = V_{n-1}(x_{n-1})x^n + P_{n-1}(x)$$

siendo $P_{n-1}(x)$ un polinomio de grado a lo sumo $n-1$. Resulta entonces que $V_n(x)$ es un polinomio de grado n con

$$V_n(x_0) = V_n(x_1) = \cdots = V_n(x_{n-1}) = 0.$$

De manera que

$$V_n(x) = V_{n-1}(x_{n-1})(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}),$$

es decir

$$V_n(x) = V_{n-1}(x_{n-1}) \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j)$$

Luego,

$$\begin{aligned} V_1(x_1) &= \underbrace{V_0(x_0)}_{\text{es igual a 1}} (x_1 - x_0) = (x_1 - x_0) \\ V_2(x_2) &= V_1(x_1)(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_0) \\ \vdots &= \vdots \\ V_n(x_n) &= \prod_{n \geq i \geq j \geq 0} (x_i - x_j). \end{aligned}$$

Entonces $V_n(x_n) > 0$ si, y sólo si $x_i \neq x_j$ y entonces existe un único polinomio de grado a lo sumo n que interpola a y_i, en cada x_i, para $i = 0, 1, \ldots, n$.

$\square$

Demostración. [2]

Construyamos un polinomio $l_i(x)$ de grado $\leq n$ tal que

$$l_i(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

con $0 \leq j \leq n$. Luego,

$$l_i(x) = c(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)$$

y c debe ser tal que $l_i(x_i) = 1$, es decir,

$$c = \frac{1}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}.$$

En consecuencia,

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}(x - x_j)}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)}$$

Considerando ahora

$$P(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) \tag{2.2}$$

Luego, $P(x_i) = y_i l_i(x_i) = y_i$, para $i = 0, 1, \ldots, n$ y además se tiene que $grad(P(x)) \leq n$, ya que $grad(l_i(x)) \leq n$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.

Para probar la unicidad consideremos otro polinomio $q(x)$, tal que $q(x_i) = y_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$. Pongamos que la diferencia de los polinomios vienen dada por $r(x) = q(x) - P(x)$, entonces $r(x_i) = 0$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ y $grad(r(x)) \leq n$. Necesariamente $r(x) = 0$ y por tanto $q(x) = P(x)$.

□

La fórmula (2.2) se llama el **polinomio interpolador de Lagrange** y los polinomios $l_i(x)$ se les conoce como **polinomios de Lagrange.**

Veamos la forma de los polinomios de Lagrange de grados $0, 1$ y 2.

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= y_0 \\
P_1(x) &= y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \\
P_2(x) &= y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}
\end{aligned}
$$

Claramente,

$$
\begin{aligned}
P_0(x_0) &= y_0 = f(x_0) \\
P_1(x_0) &= y_0 = f(x_0), P_1(x_1) = y_1 = f(x_1) \\
P_2(x_0) &= y_0 = f(x_0), P_2(x_1) = y_1 = f(x_1), P_2(x_2) = y_2 = f(x_2)
\end{aligned}
$$

Ahora, veamos un ejemplo que ilustra lo demostrado anteriormente.

Ejemplos 2.2. El polinomio de grado ≤ 2 que pasa por los puntos $(0,1),(-1,3),(2,1)$ es

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= 1\frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)}+3\frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)}+1\frac{(x-0)(x+1)}{(2-0)(2+1)} \\
&= \frac{-1}{2}(x^2-x-2)+(x^2-2x)+\frac{1}{6}(x^2+x) \\
&= \frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x+1
\end{aligned}
$$

2. Método de Newton de Diferencias Divididas

Hay otras formas más apropiadas que la de Lagrange, para el polinomio de interpolación. La desventaja de la fórmula de Lagrange es que no se puede pasar de un polinomio de menor grado a otro de mayor grado utilizando la información que ya se tiene. Es decir, si le agregamos un nuevo punto al conjunto $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, debemos calcular todo nuevamente. Sea $P_{n-1}(x)$ el polinomio de interpolación en $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ y P_n el polinomio de interpolación en $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$. Quisiéramos tener una relación así:

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + c(x)$$

en dode $c(x)$ representa una corrección. En general $c(x)$ es un polinomio de grado n, ya que los polinomios interpolantes de Lagrange $P_{n-1}(x)$ y $P_n(x)$ son de grado $n-1$ y n, repectivamente. Sabiendo que

$$c(x_i) = P_n(x_i) - P_{n-1}(x_i) = 0, \text{ para } i = 0, 1, \dots, n-1$$

se tiene que $c(x) = a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$.

Siendo $P_n(x_n) = f(x_n)$, entonces

$$f(x_n) = P_{n-1}(x_n) + a_n \prod_{j=0}^{n-1}(x_n - x_j)$$

de donde,

$$a_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(x_n - x_j)}$$

y a_n se llama la **diferencia dividida de orden** n y se escribe

$$a_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

por tanto

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

realizando una sustitución regresiva de los polinomios $P_{n-1}(x), P_{n-2}(x), \dots, P_0(x)$, se llega a

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \tag{2.3}$$

El Polinomio (2.3) se le conoce como la forma de newton de diferencias divididas para el polinomio de interpolación.

Proposición 2.3. *Sean $I \subset \mathbb{R}$, $x_0, x_1, \dots, x_n \in I$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, entonces*

(1) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_n}]$, *siendo* $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ *una permutación de* $(0, 1, \dots, n)$.

(2) $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \dfrac{f[x_1, x_2, \dots, x_n] - f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$.

Demostración. (1) Sean

$$\psi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n),$$

y

$$\psi_n'(x_i) = (x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n).$$

Sea P_n el polinomio interpolador de f en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Como

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod_{j\neq i}(x - x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)} f(x_i),$$

se tiene

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\psi_n(x)}{\psi_n'(x_i)} \frac{f(x_i)}{(x - x_i)}.$$

Luego si $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$ es una permutación de $(0, 1, \ldots, n)$, entonces

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\psi_n'(x_i)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_{i_j})}{\psi_n'(x_{i_j})} = f[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}].$$

(2) La demostración se hará vía inducción matemática.

Para $n = 1$ es cierto, pues

$$f[x_0, x_1] = \sum_{i=0}^{1} \frac{f(x_i)}{\psi_n'(x_i)} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Supongamos ahora, que es cierta para n puntos. Por lo realizado en la demostración de (1), se tiene que

$$f[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}$$

y

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}] = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_{n-1})}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{f[x_1,x_2,\ldots,x_n]-f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0} &= \frac{1}{x_n-x_0}\left\{-\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_{n-1})}+\right.\\
&\quad \sum_{i=1}^{n-1}\frac{f(x_i)\left(\frac{1}{x_i-x_n}-\frac{1}{x_i-x_0}\right)}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_{n-1})}\\
&\quad \left.\frac{f(x_0)}{(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})}\right\}\\
&= \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_n)}+\\
&\quad \sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}+\\
&\quad \frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)\cdots(x_n-x_{n-1})}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\prod_{j\neq i}(x_i-x_j)}=f[x_0,x_1,\ldots,x_n]
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\frac{f[x_1,x_2,\ldots,x_n]-f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$$

□

Lema 2.4. *Para cada punto distinto $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ el operador $\cdot[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ es lineal.*

Demostración.

Sea $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, mostremos que para cada punto distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$(f+\lambda g)[x_0,x_1,\ldots,x_n]=f[x_0,x_1,\ldots,x_n]+\lambda g[x_0,x_1,\ldots,x_n]$$

tenemos que

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\psi'(x_i)}$$

con $\psi_n(x_i)=(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)$, así:

$$
\begin{aligned}
(f+\lambda g)[x_0,x_1,\ldots,x_n] &= \sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)+\lambda g(x_i)}{\psi_n'(x_i)}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\psi_n'(x_i)}+\lambda\sum_{i=0}^{n}\frac{g(x_i)}{\psi_n'}\\
&= f[x_0,x_1,\ldots,x_n]+\lambda g[x_0,x_1,\ldots,x_n]
\end{aligned}
$$

□

Para poder extender las propiedades de las diferencias divididas de newtón es necesario estudiar el metodo de aproximación por polinomios de Taylor, el cual establece que si $(a,b)\subset\mathbb{R}$ y $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función que admite derivada de orden n en el punto $x_0\in(a,b)$, entonces se puede definir el polinomio de Taylor de orden n alrededor del punto x_0 como

$$P(x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Además si f es derivable hasta el orden $n+1$ y se quiere conocer el error cometido, esto está dado por

$$P(x)-f(x)=R(x)=-\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad \xi_x\in(x,x_0)\subset(a,b)$$

Proposición 2.5. *Sean $x_0,x_1,\ldots,x_n$, $n+1$ números reales distintos y f una función a valores reales $n+1$ veces continuamente diferenciable en el intervalo $I_t=int(t,x_0,x_1,\ldots,x_n)$ siendo t un número real arbitrario. Entonces existe ξ en I_t tal que*

$$f(t)-P_n(t)=\frac{(t-x_0)\cdots(t-x_n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

siendo $P_n(x)$ el polinomio de interpolación de f en x_i, $i=0,1,\ldots,n$

Demostración.

Si $t=x_i$ para algún $i=0,1,\ldots,n$ el resultado es trivial. Supongamos $t\neq x_i\quad\forall i$. Pongamos

$$
\begin{aligned}
E(z) &= f(z)-P_n(z)\\
G(z) &= E(z)-\frac{\psi(z)}{\psi(t)}E(t)\qquad \forall z\in I_t
\end{aligned}
$$

con $\psi(z)=(z-x_0)\cdots(z-x_n)$.

$G(z)$ es $n+1$ veces continuamente diferenciable en I_t, además

$$\begin{aligned} G(x_i) &= E(x_i) - \frac{\psi(x_i)}{\psi(t)}E(t) = 0 \qquad i = 0, 1, \ldots, n \\ G(t) &= E(t) - \frac{\psi(t)}{\psi(t)}E(t) \end{aligned}$$

Entonces G tiene $n+2$ ceros distintos en I_t. Usando el Lema de Rolle generalizado, $\exists \xi \in I_t$ tal que $G^{(n+1)}(\xi) = 0$. Puesto que $E^{(n+11)}(t) = f^{(n+1)}(t)$ y $\psi^{(n+1)}(t) = (n+1)!$ se tiene

$$G^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{(n+1)!}{\psi(t)}E(t) = 0$$

por lo tanto

$$E(t) = \frac{\psi(t)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

□

Lema 2.6 (Rolle Generalizado)**.** *Sea $f \in C[a,b]$, n veces continuamente diferenciable en (a,b). Si f se anula en $n+1$ puntos distintos $x_0, \ldots, x_n$ de $[a,b]$, entonces existe un número $\xi \in (a,b)$ tal que $f^{(n)}(\xi) = 0$.*

Proposición 2.7. *Sea $I \subset \mathbb{R}$. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y P el polinomio de grado a lo sumo n que interpola a f en un conjunto de $n+1$ puntos distintos, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in I$. Si $t \in I$ y t es distinto a x_i con $i = 0, 1, \ldots, n$, entonces*

$$f(t) - P(t) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t]\prod_{j=0}^{n}(t - x_j)$$

Demostración.

Sea q el polinomio de grado a lo sumo $n+1$ que interpola f en los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n, t$. Sabemos que q se obtiene de P añadiendole un término, esto es

$$q(x) = P(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t]\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$$

como $q(t) = f(t)$, obtenemos de una vez, haciendo $x = t$,

$$f(t) = P(t) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, t]\prod_{j=0}^{n}(t - x_j)$$

□

Proposición 2.8. *Sea $I \subset \mathbb{R}$, supongamos que $f \in C^{(n)}(I)$, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son números distintos en I, siendo*

$$I = \left[\, \text{mín}\{x_i : i = 0, \ldots, n\}; \text{máx}\{x_i : i = 0, \ldots, n\}\right]$$

Entonces existe un número ξ en I tal que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n,] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Demostración.

Sea $P(x)$ el polinomio de interpolación de f en $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Por la proposición anterior

$$f(x_n) - P(x_n) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j) \tag{2.4}$$

Por la Proposición 2.5 del error de interpolación, existe ξ en (a, b) tal que

$$f(x_n) - P(x_n) = \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j) \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \tag{2.5}$$

Comparando las ecuaciones (2.4) y (2.5) se obtiene el resultado. □

Lema 2.9. *Sean $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1$ un polinomio de grado n y $x_0, \ldots, x_k$, $k+1$ puntos distintos, entonces*

$$P[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \begin{cases} a_n & \textit{si } k = n \\ 0 & \textit{si } k > n \end{cases}$$

Demostración.

Por el teorema anterior

$$P[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{P^{(k)}(\xi)}{k!} \text{ con } \text{mín}\{x_0, \ldots, x_k\} \leq \xi \leq \text{máx}\{x_0, \ldots, x_k\}$$

Como $P^{(n)}(x) = a_n n!$ y $P^{(k)}(x) = 0$ si $k > n$, se tiene

$$P[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{a_n n!}{n!}$$

$$P[x_0, x_1, \ldots, x_k] = 0 \text{ si } k > n$$

. □

Capítulo 3

Funciones Fuertemente Convexas de Orden Superior

1. Funciones Convexas de Orden Superior

La noción de funciones *n-convexas* fue establecida en términos de diferencias divididas por T. Popoviciu (1934) (ver [**21**]), presentando el concepto de función convexa de orden superior en una escala determinada por la no negatividad de una forma que involucra Diferencias Divididas de Newton o, su contraparte, como ciertos determinantes de Vandermonde.

Supongamos que f es una función definida sobre $[a, b]$, y que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ es una partición del intervalo, entonces exite un único polinomio determinado $P(x)$ de grado a lo sumo n que coincide con f en cada x_i, con $i = 0, 1, \ldots, n$. Usando el método de Newton de Diferencias Divididas, obtenemos el conocido polinomio interpolador de Lagrange en la forma

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$\begin{aligned}
a_0 &= f(x_0) = f[x_0] \\
a_1 &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1] \\
a_2 &= \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2] \\
&\vdots \\
a_n &= \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} = f[x_0, \ldots, x_n]
\end{aligned}$$

donde a_n se conoce como la diferencia dividida de orden n.

Antes de definir a las funciones convexas de orden superior notemos lo siguiente:

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 < x_1$ dos elementos cualesquiera en $[a, b]$, si $f[x_1, x_0] \geq 0$ quiere decir, que

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0$$

como $x_1 - x_0 > 0$, entoces debe ocurrir que $f(x_1) - f(x_0) \geq 0$, o equivalentemente, $f(x_0) \leq f(x_1)$. Lo que implica que $f[x_1, x_0] \geq 0$ para todo $x_0 < x_1$ en $[a, b]$, si y sólo si f es creciente en $[a, b]$.

ahora, sean $x_0 < x_1 < x_2$ tres elementos cualesquieras en $[a, b]$, si $f[x_2, x_1, x_0] \geq 0$, quiere decir que

$$\frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} \geq 0$$

Luego de varias operaciones algebraicas, tenemos que si $f[x_2, x_1, x_0] \geq 0$, entonces

$$\frac{(x_2 - x_1)f(x_0) + (x_0 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_0)f(x_2)}{(x_2 - x_1) + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_0)} \geq 0. \tag{3.1}$$

En resumen de cuentas, de la desigualdad anterior llegamos a

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

si definimos por $P = (x_0, f(x_0)), Q = (x_1, f(x_1))$ y $R = (x_2, f(x_2))$ entonces

$$m(PQ) \leq m(PR) \leq m(QR)$$

y como los puntos $x_0 < x_1 < x_2$ son electos de forma arbitraria se tiene que toda función f que cumple con (3.1) es una función convexa. Es decir, $f[x_0, x_1, x_2] \geq 0$ si y sólo si f es convexa.

Con estas observaciones, se dará conocer la siguiente definición.

Definición 3.1 ([**12**]). Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *n-convexa* si para cualquier elección de puntos $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$ en $[ab]$ se tiene que $f[x_0, \ldots, x_{n+1}] \geq 0$.

De la defición anterior es claro que, las funciones 0-convexas son las funciones crecientes y las funciones 1-convexas son las funciones convexas.

Se sabe que el gráfico de una función f, 1-convexa, para $x_1, x_2 \in [a, b]$ se encuentra debajo del segmento de recta (gráfico del polinomio de grado 1), que se forma al unir $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$.

Es natural preguntarse si una función n-convexa tiene una interpretaón geométrica. La repuesta a esta pregunta es afirmativa; pues f es n-convexa si y sólo si para cualquier elección de puntos $a \leq x_0 \leq \ldots \leq x_{n+1} \leq b$, el gráfico de f se encuentra alternadamente por encima y por debajo del gráfico, del único polinomio interpolador de Lagrange de grado a lo sumo n, pasando a través de los puntos $(x_i, f(x_i))$.

Ahora veamos una forma equivalente de definir las funciones convexas de orden superior, a través del determinante de Vandermonde, el cual se definió en el Capítulo 2.

Para $n = 1$, se tiene que

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) \\ 1 & f(x_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix}}.$$

Si suponemos que $f[x_1, x_0] \geq 0$, se tendrá que

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) \\ 1 & f(x_1) \end{vmatrix}}{V_1(x_1)} \geq 0.$$

Dado que $V_1(x_1) > 0$, se obtiene que

$$\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) \\ 1 & f(x_1) \end{vmatrix} \geq 0. \tag{3.2}$$

Lo que implica que f cumple con la desigualdad (3.2) si y sólo si f es 0-convexa.

Para $n = 2$, se tiene que

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} = \frac{(x_2 - x_1)f(x_0) + (x_0 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_0)f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) \\ 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) \\ 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix}}{V_2(x_2)}. \end{aligned}$$

Si se supone que $f[x_2, x_1, x_0] \geq 0$, se tendrá que

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) \\ 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix}}{V_2(x_2)} \geq 0.$$

De manera que,

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) \\ 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geq 0, \tag{3.3}$$

ya que $V_2(x_2) > 0$.

Por lo tanto f cumple con la desigualdad (3.3) si y sólo si f es 1-convexa.

De igual manera, para n arbitrario, se tiene que

$$\begin{aligned} f[x_{n+1}, \ldots, x_0] &= \frac{f[x_{n+1}, \ldots, x_1] - f[x_n, \ldots, x_0]}{x_{n+1} - x_0} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n & f(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n & f(x_{n+1}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n & x_0^{n+1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n & x_2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix}} \\ &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n & f(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n & f(x_{n+1}) \end{vmatrix}}{V_{n+1}(x_{n+1})} \end{aligned}$$

Si se supone que $f[x_{n+1},\ldots,x_0]\geq 0$, se tendrá que

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n & f(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n & f(x_{n+1}) \end{vmatrix}}{V_{n+1}(x_{n+1})}\geq 0,$$

dado que $V_{n+1}(x_{n+1})\geq 0$.

Lo anterior motiva a la siguiente definición.

Definición 3.2. Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$. f es *n-convexa* cuando para cualquier colección de puntos $x_0<x_1<\cdots<x_{n+1}$ en $[a,b]$ se tiene que

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n & f(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n & f(x_{n+1}) \end{vmatrix}\geq 0.$$

Según la Definición 3.1 se mostró el concepto de función n-convexa por medio de la no negatividad de una forma que involucra las Diferencias Divididas de Newton. Por otra parte, si $I\subset\mathbb{R}$ es un intervalo y $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ una función, c una constante positiva, sería natural preguntarse que representaría

$$f[x_0,\ldots,x_{n+1}]\geq c, \tag{3.4}$$

con $n\in\mathbb{N}$ y $x_0,\ldots,x_{n+1}\in I$.

En particular, si $n=1$, note que la condición 3.4 es equivalente a

$$\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\geq c,$$

ó

$$f(x_1)\leq\frac{x_2-x_1}{x_2-x_0}f(x_0)+\frac{x_1-x_0}{x_2-x_0}f(x_2)-c(x_2-x_1)(x_1-x_0),\qquad x_0<x_1<x_2.$$

así, colocando $t = \dfrac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0}$ y en consecuencia $1-t = \dfrac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}$ entonces $x_1 = tx_0 + (1-t)x_2$ obtenemos

$$f(tx_0 + (1-t)x_2) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_2) - ct(1-t)(x_2 - x_0)^2,$$

para todo $x_0, x_2 \in I$ y $t \in (0,1)$, es decir que f es fuertemente convexa con modulo c.

Esto motiva a la siguiente definición

Definición 3.3. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, c una constante positiva y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *fuertemente n-convexa con modulo c* cuando para cualquier elección de puntos $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$ en I se tiene que $f[x_0, \ldots, x_{n+1}] \geq c$.

En el siguiente teorema se dará una relación entre funciones fuertemente n-convexas con modulo c y las funciones n-convexas, lo cual desempeña un papel importante en el desarrollo de este capítulo.

Para $n = 1$, tal resultado se puede encontrar en [[**9**], Prop. 1.1.2].

Teorema 3.4. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $n \in \mathbb{N}$ y $c > 0$. una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es fuertemente n-convexa con modulo c si y solo si la función $g(x) = f(x) - cx^{n+1}$ con $x \in I$, es n-convexa.*

Demostración.

Sea $h(x) = cx^{n+1}$ para $x \in I$.

Supóngase que f es fuertemente n-convexa con modulo c y que $g(x) = f(x) - h(x)$.

Por el Lema 2.4 y el Lema 2.9 sigue que

$$g[x_0, \ldots, x_{n+1}] = (f - h)[x_0, \ldots, x_{n+1}] = f[x_0, \ldots, x_{n+1}] - h[x_0, \ldots, x_{n+1}] \geq c - c = 0,$$

de esta forma g es n-convexa.

Por otra parte, si g es n-convexa por el Lema 2.4 sigue que

$$f[x_0, \ldots, x_{n+1}] = (g + h)[x_0, \ldots, x_{n+1}] = g[x_0, \ldots, x_{n+1}] + h[x_0, \ldots, x_{n+1}] \geq 0 + c = c.$$

lo que implica que f es fuertemente n-convexa con modulo c.

$\square$

A continuación se darán una serie de resultados que describen a las funciones n-convexas, los cuales servirán como conexión para clasificar las funciones fuertemente n-convexas con modulo c.

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua definida en un intervalo I, f es n-convexa con $n > 1$ si y sólo si f es de clase C^1 en I y la derivada $f^{'}$ es $(n-1)$-convexa (ver [[**12**], teorema 15.8.1 y 15.8.2]). Además f es de clase C^{n-1} en I y para cada $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq n-1$ la derivada $f^{(r)}$ es $(n-r)$-convexa. (ver [[**12**], Teorema 15.8.3])

Proposición 3.5 (ver [**12**]). *Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función definida en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$, f es n-convexa con $n > 1$, si y solo si f es de clase C^{n-1} en I y la $(n-1)$-esima derivada $f^{(n-1)}$ es convexa*

Demostración.

($\Longrightarrow$) Supongamos que f es n-convexa, luego $f \in C^1$ en I y la f' es $(n-1)$-convexa, aplicando esto $(n-1)$-veces tenemos:

$$\begin{aligned}
f^{(1)} \in C^2 \text{en } I \quad & \text{y} \quad f^{(2)} \text{es } (n-2)\text{-convexa} \\
f^{(2)} \in C^3 \text{en } I \quad & \text{y} \quad f^{(3)} \text{es } (n-3)\text{-convexa} \\
& \vdots \\
f^{(n-2)} \in C^{n-1} \text{en } I \quad & \text{y} \quad f^{(n-1)} \text{es } n-(n-1)\text{-convexa} = 1\text{-convexa} = \text{convexa.}
\end{aligned}$$

es decir $f \in C^{n-1}$ y $f^{(n-1)}$ es convexa.

($\Longleftarrow$) Tenemos que $f \in C^{'}$ y es $(n-1)$-convexa, entonces f es n-convexa.

$\square$

Lema 3.6. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $c > 0$ y $n > 1$, una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es fuertemente n-convexa con modulo c si y solo si f es de clase C^{n-1} en I y la $(n-1)$-esima derivada $f^{(n-1)}$ es fuertemente convexa con modulo $\frac{c}{2}(n+1)!$*

Demostración.

($\Longrightarrow$) Asumimos que f es fuertemente n-convexa con modulo c. Por el Teorema 3.4, f la podemos representar de la forma $f(x) = g(x) + cx^{n+1}$, $x \in I$, donde g es una función n-convexa. así por la Proposición 3.5, g es de clase c^{n-1} en I, además $g^{(n-1)}$ es convexa, es decir,

$$f^{(n-1)}(x) = g^{(n-1)}(x) + \tfrac{c}{2}(n+1)!x^2, \qquad x \in I$$

de manera que esta representación nos dice que $f^{(n-1)}$ es fuertemente convexa con modulo $\frac{c}{2}(n+1)!$

($\Longleftarrow$) asumamos que $f^{(n-1)}$ es fuertemente convexa con modulo $\frac{c}{2}(n+1)!$, así por el Teorema 3.4, $f^{(n-1)}$ es de la forma $f^{(n-1)}(x) = g(x) + \frac{c}{2}(n+1)!x^2$, $x \in I$, con g una función convexa de ambos lados integrable $n-1$ veces, obtenemos:

$$f(x) = G(x) + cx^{n+1}, \qquad x \in I,$$

donde G es una función n-convexa por el Proposición 3.5. Así, f es fuertemente n-convexa con modulo c.

□

Proposición 3.7 (ver [**12**]). *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^n en I. Entonces f es n-convexa si y solo si $f^{(n)}$ es creciente en I*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos que $f \in C^n$ y que es n-convexa, si tomamos $r = n-1$, tenemos que $f^{(n-1)}$ es $(n-(n-1))$-convexa = convexa, luego por el Corolario 1.14, $(f^{(n-1)})' = f^n$ es creciente en I

($\Longleftarrow$) Supongamos que $f^{(n)}$ es creciente en I, luego por el Corolario 1.14 $f^{(n-1)}$ es convexa, aplicando el Proposición 3.5 tenemos que f es n-convexa.

□

En el proximo teorema se mostrara que f es fuertemente n-convexa si y solo si la n-esima derivada es fuertemente creciente en algún sentido.

Teorema 3.8. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^n en I. entonces f es fuertemente n-convexa con modulo c si y solo si $f^{(n)}$ satisface la condición*

$$(f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y))(x-y) \geq c(n+1)!(x-y)^2, \qquad x, y \in I \tag{3.5}$$

Demostración.

($\Longrightarrow$) Por el Teorema 3.4, f es de la forma $f(x) = g(x) + cx^{n+1}$, $x \in I$, con g n-convexa, luego, por hipotesis

$$f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x) + c(n+1)!x, \qquad x \in I.$$

por el Proposición 3.7, $g^{(n)}$ es creciente, tenemos:

$$(g^{(n)}(x) - g^{(n)}(y))(x-y) \geq 0, \qquad x, y \in I.$$

así, para todo $x, y \in I$,

$$\begin{aligned}(f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y))(x-y) &= (g^{(n)}(x) - g^{(n)}(y))(x-y) + c(n+1)!(x-y)^2 \\ &\geq c(n+1)!(x-y)^2.\end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) asumimos (3.5) y definamos $g(x) = f(x) - cx^{(n+1)}$, $x \in I$, entonces

$$(g^{(n)}(x) - g^{(n)}(y))(x-y) = (f^{(n)}(x) - f^{(n)}(y))(x-y) - c(n+1)!(x-y)^2 \geq 0,$$

de manera que g es creciente y por el Proposición 3.7, g es n-conexa, nuevamente por el Teorema 3.4, la representación de f nos dice que es fuertemente n-convexa con modulo c.

□

Proposición 3.9 (ver [**12**]). *si f es una función de clase C^{n+1} en $I \subset \mathbb{R}$, entonces f es n-convexa si y solo si $f^{(n+1)}$ es no-negativa en I.*

Demostración.

($\Longrightarrow$) Supongamos que f es n-convexa, por el Proposición 3.5 $f^{(n-1)}$ es convexa, así por el Corolario 1.15 tenemos que $\left(f^{(n-1)}\right)'' = f^{(n+1)}$ es no negativa en I

($\Longleftarrow$) Supongamos que $f^{(n+1)}$ es no-negativa en I, entonces por el Corolario 1.15 $f^{(n-1)}$ es convexa, nuevamente por el Proposición 3.5, f es n-convexa.

□

Proposición 3.10. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $C^{(n+1)}$ en I. Entonces f es fuertemente n-convexa con modulo c si y solo sí:*

$$f^{(n+1)} \geq c(n+1)!, \qquad x \in I$$

Demostración.

($\Longrightarrow$) definamos $f(x) = g(x) + cx^{n+1}$, con g n-convexa y $x \in I$, tenemos

$$f^{(n+1)}(x) = g^{(n+1)}(x) + c(n+1)!, \qquad x \in I,$$

por el Proposición 3.9, $g^{(n+1)}$ es no negativa, Así

$$f^{(n+1)}(x) = g^{(n+1)}(x) + c(n+1)! \geq c(n+1)!, \qquad x \in I,$$

($\Longleftarrow$) definamos $g(x) = f(x) - cx^{n+1}$, $x \in I$. Entonces:

$$g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - c(n+1)! \geq 0, \qquad x \in I,$$

de manera que por el Proposición 3.9, g es n-convexa y por el Teorema 3.4, tenemos que esa representación nos dice que f es fuertemente n-convexa con modulo c.

$\square$

2. Funciones fuertemente Jensen n-convexa

En esta sección se extenderá la definición para funciones fuertemente Jensen n-convexa.

sea $\triangle_h^n$ el operador diferencial del n-esimo orden con incremento $h > 0$, definido por lo siguiente:

$$\triangle_h^0 f(x) = f(x),$$
$$\triangle_h^n f(x) = \triangle_h^{n-1} f(x+h) - \triangle_h^{n-1} f(x), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Definición 3.11. Sean $I \subset \mathbb{R}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, se dice que f *es n-convexa en el sentido de Jensen ó Jensen n-convexa* sí

$$\triangle_h^{n+1} f(x) \geq 0$$

Para todo $x \in I$ y $h > 0$ tal que $x + (n+1)h \in I$. (ver[[**12**],[**23**],[**4**]-[**6**]]).

De manera análoga se define una función fuertemente n-convexa con modulo $c > 0$ en el sentido de Jensen ó fuertemente Jensen n-convexa modulo c sí

$$\triangle_h^{n+1} f(x) \geq c(n+1)!h^{n+1} \tag{3.6}$$

para todo $x \in I$ y $h > 0$ tal que $x + (n+1)h \in I$.

Nota, para $n = 1$ la condición (3.6) se reduce a

$$\triangle_h^2 f(x) \geq 2ch^2,$$

ó

$$f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \geq 2ch^2,$$

siendo $u = x$ y $v = x + 2h$, obteniendo

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{f(u)+f(v)}{2} - \frac{c}{4}(u-v)^2, \qquad u, v \in I,$$

de esta manera f es fuertemente Jensen convexa con módulo c.

Lema 3.12. *Sean $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $x_0, x_1, \ldots, x_n \in I$ una colección de puntos que satisfacen $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \ldots, n$ para algún $h > 0$, entonces*

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{\triangle_h^n f(x_0)}{(n)!h^n}.$$

Demostración.

Se hará la demostración vía inductiva.

Para $n = 0$ es cierto pues

$$f[x_0] = \frac{\triangle_h^0 f(x_0)}{(0)!h^0} = f(x_0)$$

$n = 1$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\triangle_h^0 f(x_1) - \triangle_h^0 f(x_0)}{h} = \frac{\triangle_h^1 f(x_0)}{h}$$

Supóngase que la igualdad es cierta para $n \leq r$. Veamos que la igualdad es cierta para $n = r + 1$.

Por la hipótesis inductiva se tiene que

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, \ldots, x_{r+1}] &= \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}] - f[x_0, x_1, \ldots, x_r]}{x_{r+1} - x_0} \\ &= \frac{\frac{\triangle_h^r f(x_1)}{r!h^r} - \frac{\triangle_h^r f(x_0)}{r!h^r}}{(r+1)h} \\ &= \frac{\triangle_h^r f(x_0 + h) - \triangle_h^r f(x_0)}{(r+1)!h^{r+1}} = \frac{\triangle_h^{r+1} f(x_0)}{(r+1)!h^{r+1}}. \end{aligned}$$

□

Lema 3.13. *Sean $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función n-convexa con módulo c, entonces f es fuertemente Jensen n-convexa con módulo c*

Demostración.

Como f es fuertemente n-convexa con módulo c, se tiene que $f[x_0, \ldots, x_{n+1}] \geq c$ para todo $x_0 < \cdots < x_{n+1}$ en I.

Luego si $x_i = x_0 + ih$ con $i = 0, 1, \ldots, n$ y $h > 0$, del Lema anterior sigue que

$$\triangle_h^{n+1} f(x_0) = f[x_0, \ldots, x_{n+1}](n+1)!h^{n+1} \geq c(n+1)!h^{n+1},$$

lo que significa que f es fuertemente Jense n-convexa módulo c.

□

Lema 3.14 (ver [**12**]). *Para $n \in \mathbb{N}$ y $h > 0$, el operador $\triangle_h^n$ es lineal.*

Demostración.

Sea $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ y λ, mostremos que para cada conjunto de puntos en I tales que $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \ldots, n$ con algún $h > 0$, se tiene que

$$\triangle_h^n (f + \lambda g)(x_0) = \triangle_h^n f(x_0) + \lambda \triangle_h^n g(x_0)$$

Por el Lema 3.12 y 2.4 se tiene que

$$\frac{\triangle_h^n (f + \lambda g)(x_0)}{(n)! h^n} = (f + \lambda g)[x_0, \ldots, x_n] = f[x_0, \ldots, x_n] + \lambda g[x_0, \ldots, x_n],$$

luego

$$\begin{aligned} \triangle_h^n (f + \lambda g)(x_0) &= n! h^n f[x_0, \ldots, x_n] + \lambda n! h^n g[x_0, \ldots, x_n] \\ &= \triangle_h^n f(x_0) + \lambda \triangle_h^n g(x_0). \end{aligned}$$

□

Lema 3.15. *Dado $n \in \mathbb{N}$, sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^n$ entonces $\triangle_h^n f = n! h^n$ con $h > 0$.*

Demostración.

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ una colección de puntos en I tales que $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \ldots, n$.

Por el Lema 3.12 se tiene que

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{\triangle_h^n f(x_0)}{n! h^n},$$

luego por el Lema 2.9

$$1 = f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{\triangle_h^n f(x_0)}{n! h^n},$$

así

$$\triangle_h^n f(x_0) = n! h^n$$

□

Teorema 3.16. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto, $n \in \mathbb{N}$ y $c > 0$. Una $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es fuertemente Jensen n-convexa con módulo c si y solo si la funcion $g(x) = f(x) - cx^{n+1}$, $x \in I$ es Jensen n-convexa.*

Demostración.

($\Longrightarrow$) Sea $P(x) = cx^{n+1}$ para $x \in I$.

Supóngase que f es fuertemente Jensen n-convexa con módulo c y que $g(x) = f(x) - P(x)$.

Sean $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ una colección de puntos en I tales que $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \ldots, n+1$, usado que f es fuertemente Jensen n-convexa, por el Lema 3.14 y 3.15, se tiene que

$$\triangle_h^{n+1} g(x_0) = \triangle_h^{n+1} f(x_0) - \triangle_h^{n+1} P(x_0) \geq c(n+1)!h^{n+1} - c(n+1)!h^{n+1} = 0,$$

con lo cual se muestra que g es Jensen n-convexa.

($\Longleftarrow$) Por la Jensen n-convexidad de g, se sigue que

$$\triangle_h^{n+1} f(x_0) = \triangle_h^{n+1} g(x_0) + \triangle_h^{n+1} P(x_0) \geq c(n+1)!h^{n+1},$$

demostrando que f es fuertemente Jensen n-convexa con módulo c.

□

Se sabe que las funciones Jensen n-convexa no necesitan ser continuas (y por lo tanto no necesita ser n-convexa). Sin embargo, para funciones continuas, el concepto de n-convexidad y Jensen n-convexidad es equivalente. Tambien hay muchos teoremas con condiciones relativamente debiles para funciones Jensen n-convexa que son continuas ([ver [**12**], capitulo 15],[[**23**],[**4**],[**6**]] alli se ecuentran las referencias alrespecto).

3. Conexión Con Convexidad Ceneralizada

La convexidad de una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, significa que para 2 puntos distinto en la gráfica de f, el segmento que une estos puntos se encuentra por encima de la parte correspondiente de la gráfica. En 1937 Beckenbach (ver [**2**]) generalizo este concepto reemplazando el segmento por gráficas de funciones continuas perteneciente a una familia de funciones $\mathcal{F}$ de dos-parámetros. luego, Tornheim (ver[**26**]) extiende esta idea tomando n-parámetros de familias. De manera que obtiene la generalización de funciones convexa, teniendo muchas propiedades conocidas para funciones clásicas convexa (n-convexa) (ver [**2**].[**3**], [**26**],[**23**],[**17**]). En esta sección se quiere mostrar que fuertemente n-convexa es equivalente a la generalización de convexidad con respecto a cierta familia de n-parametros.

Sea $n \geq 2$, Una familia $\mathcal{F}$ de funciones continuas definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es llamado familia de n-parámetros si para algunos n puntos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in I \times \mathbb{R}$ con $x_1 < \cdots < x_n$, entonces existe exactamente una $\varphi \in \mathcal{F}$ tal que

$$\varphi(x_i) = y_i, \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n$$

La unica función $\varphi \in \mathcal{F}$ determinada por los puntos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ la denota por $\varphi_{(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)}$. Una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es convexa con respecto a la familia $\mathcal{F}$ de n-parámetros ó $\mathcal{F}$-convexa, si para algunos $x_1 < \cdots < x_n$ en I.

$$f(x) \leq \varphi_{(x_1,f(x_1)),\ldots,(x_n,f(x_n))}(x), \qquad x \in [x_{n-1}, x_n],$$

es bien conocido que si,

$$\mathcal{F}_n = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 : a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\},$$

es decir, $\mathcal{F}_n$ es el conjunto de los polinomios de grado n, entonces $\mathcal{F}_n$ es una familia de $(n+1)$-parámetro y la generalización de convexidad con respecto a $\mathcal{F}_n$ coincide con n-convexidad (ver [**23**],[**26**],[**18**]). De manera similar se puede caracterizar la fuertemente n-convexidad.

Sea $c > 0$ un número fijo y

$$\mathcal{F}_{n,c} = \{cx^{n+1} + a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 : a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

claramente, $\mathcal{F}_{n,c}$ es también una familia de $(n+1)$-parámetro y considerando el próximo teorema.

Teorema 3.17. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. f es fuertemente n-convexa con módulo c si y sólo si f es $\mathcal{F}_{n,c}$-convexa.*

Demostración.

Sean $x_1, \ldots, x_{n+1}$ puntos arbitrarios en I y φ el único polinomio en $\mathcal{F}_{n,c}$ determinado por $\varphi(x_i) = f(x_i),$ para $i = 1, \ldots, n+1$.

Sea ψ el polinomio definido por

$$\psi(x) = \varphi(x) - cx^{n+1}, \text{ para } x \in I.$$

Claramente ψ pertenece a $\mathcal{F}_n$ y es el único polinomio determinado por

$$\psi(x_i) = f(x_i) - cx_i^{n+1}, \text{ para } i = 1, \cdots, n+1.$$

Luego, si $x \in [x_i, x_{i+1}]$ entonces $f(x) \leq \varphi(x)$ si y sólo si $f(x) - cx^{n+1} \leq \psi(x)$.

De manera que f es $\mathcal{F}_{n,c}$-convexa si y sólo si $f(x) - cx^{n+1}$ es $\mathcal{F}_n$-convexa.

Debido a que $\mathcal{F}_n$-convexidad es equivalente a la n-convexidad, se obtine del Teorema 3.4 que $\mathcal{F}_{n,c}$-convexidad es equivalente a la fuertemente n-convexidad con módulo c.

$\square$

Bibliografía

[1] A. Azócar, J. Giménez, K. Nikodem, J.L. Sánchez, On strongly midconvex functions, Opuscula Math. (in press). página(s): 18

[2] E.F. Beckenbach, Generalized convex functions, Bulll. Amer. Math. Soc. 43 (1937) 363-371. página(s): 17, 45

[3] M. Bessenyei, Zs. Páles, Hadamard-type inequalities for generalized convex functions, Math. Inequal. Appl. 6(3) (2003) 379-392. página(s): 17, 45

[4] Z. Ciesielski, Some properties of convex functions of higher order, Ann. Polon. Math. 7 (1959) 1-7. página(s): 42, 45

[5] R. Ger, Convex function of higher order in Euclidean spaces, Ann. Polon. Math. 25 (1972) 293-302. página(s):

[6] R. Ger, n-convex functions in linear spaces, Aequationes Math. 10 (1974) 172-176. página(s): 42, 45

[7] R. Ger, K. Nikodem, Strongly convex functions of higher order, Nonlinear Analysis, Elsevier Math. 74 (2011) 661-665.

[8] A. Gilányi, Zs. Páles, On convex functions of higher order, Math. Inequal. Appl. 11 (2008) 271-282 página(s):

[9] J.-B Hiriart-Urruty, C Lemaréchal, Fundamentals of Convex Analysis, Springer-Verlang, Berlin, Heidelberg, 2001. página(s): 38

[10] E.Hopf, Über die Zusammenhänge zwischen gewissen höheren Differenzenquotienten reeller Funktionen einer reellen Variablen und deren Differenzierbarkeitseigenschaften, Friedrich-Wilhelms-Universität, Berlin, 1926 página(s):

[11] J.L. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalites entre les valeur moyennes. página(s):

[12] M. Kuczma, An introduction to the Theory of Functional Equations and inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's inequality, PWN-Uniwersytet Slaski, Warszawa, Kraków, Katowice, 1985, second ed., Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2009. página(s): 34, 39, 40, 41, 42, 44, 45

[13] N. Merentes, K. Nikodem, Remarks on strongly convex functions, Aequationes Math. 80 (2010), no. 1-2, 193-199. página(s): 21

[14] N Merentes, K. Nikodem, Some remarks on strongly convex functions, Aequationes Math. (in press). página(s):

[15] I.P. Natanson, Theory of Functions of a Real Variable, Frederick UNGAR Publishing Co. vol. I, New York, 1961. página(s): 11

[16] K. Nikodem, Zs. Páles, Characterizations of inner product spaces by strongly convex functions, Banach J. Math. Anal. (in press). página(s):

[17] K. Nikodem, Zs. Páles, Generalized convexity and separation theorems, J. Convex Anal. 14(2) (2007) 239-247. página(s): 17, 45

[18] A. Pinkus, D. Wulbert, Extending n-convex functions, Studia Math. 171 (2) (2005) 125-152. página(s): 46

[19] E.S. Polovinkin, Strongly convex analysis, Sb. Math. 187 (2) (1996) 103-130. página(s):

[20] B.T. Polyak, Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions, Sov. Math. Dokl. 7 (1966) 72-75. página(s): 2

[21] T.Popoviciu, Sur quelques proprietés des fonctions d'une variable reele convexes d'ordre superieur. Math. Cluj 8, 1-85 (1934). página(s): 33

[22] T. Popoviciu, Les Fonctions Convexes, Hermann et Cie, Paris, 1944. página(s):

[23] A.W. Roberts, D.E. Varberg, Convex Functions, Academic Press, New York, London, 1973. página(s): 6, 8, 11, 12, 13, 17, 42, 45, 46

[24] G. Rode, Eine abstracte Version des Satzes yon Hahn-Banach, Arch. Math. 31 (1938), 474-481. página(s):

[25] L.Rodríguez, Funciones Midconvexas y La Ecuación Funcional de Jensen, Universidad Central de Venezuela, Caracas, 1997. página(s): 13

[26] L. Tornheim, On n-parameter families of functions and associated convex functions, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950) 457-467. página(s): 45, 46

[27] Sz. Wasowicz, Some properties of generalized higher-order convexity, Publ. Math. Debrecen 68 (1-2) (2006) 171-182. página(s):

[28] Sz. Wasowicz, Support-type properties of convex functions of higher order and Hadamard-type inequalities,k J. Math. Anal. Appl. 332 (2) (2007) 1229-1241. página(s):