



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

UN MODELO DE DEMANDA PARA EL SERVICIO GOOGLE ADWORDS

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Carlos Rodríguez** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dra. Mairene Colina

Caracas, Venezuela
Mayo, 2018

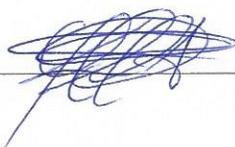
Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado **UN MODELO DE DEMANDA PARA EL SERVICIO GOOGLE ADWORDS™**, presentado por el **Br. Carlos Rodríguez**, titular de la Cédula de Identidad **V-18.249.637**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.



Dra. Mairene Colina
Tutor



Dr. José Benito Hernández
Jurado



MSc. Kenyer Aguiar
Jurado

RESUMEN

Google AdWords es un servicio de publicidad en internet desarrollado por Google donde los anunciantes pagan para mostrar “advertising copies”, lista de productos, servicios y contenido audiovisual dentro de la Google “Ad network”. Debido a las características del Google AdWords™, este servicio tiene un comportamiento similar al que caracteriza a la demanda de mercado. Por tal razón se consideran modelos matemáticos de previsión de demanda y ARIMA para predecir la cantidad de interacciones que podrían generarse entre los usuarios de la web y las “advertising copies” de los anunciantes.

El siguiente trabajo está dividido en dos partes. En la primera parte se define Google AdWord™, sus elementos, su funcionamiento y algunas de sus métricas. También en la primera parte se define demanda, previsión de demanda, métodos de previsión de demanda y ARIMA. En la segunda parte se define el modelo de serie de tiempo, se analizan las observaciones, se realiza la reconstrucción de estas y por último se realizan las predicciones.

Palabras Clave: Google Adwords, previsión de demanda, series de tiempo, ARIMA.

A mi familia y amigos.

Índice general

Introducción	II
1. Google AdWords™ y previsión de demanda	1
1.1. Google AdWords™	1
1.2. Elementos de Google AdWords	2
1.3. Anuncio de Google AdWords	2
1.4. Métricas de Google AdWords	4
1.5. Previsión de demanda	5
1.6. Métodos de previsión de demanda	6
2. Modelo de serie de tiempo, análisis, reconstrucción y predicciones	10
2.1. Modelo de serie de tiempo	10
2.2. Análisis de las variables impresiones y clics	12
2.3. Ajuste lineal de las observaciones	14
2.4. Eliminación y ajuste de componentes periódicas, alisado exponencial, medias móviles y ARIMA	16
2.5. Análisis de los errores	18
2.6. Reconstrucción	26
2.7. Predicción	30
2.8. Conclusión	41
2.9. Recomendaciones	42

Introducción

Cuando una empresa se plantea ampliar su ámbito de actuación, por ejemplo empezando a operar en un nuevo país o aumentando su cartera de productos y servicios, surgen muchas dudas relacionadas con la demanda existente en el nuevo mercado, las posibilidades de éxito o la forma de llegar al público objetivo. En estos casos, tradicionalmente se han llevado a cabo estudios de mercado y de demanda con el objetivo de conocer de antemano a lo que se va a exponer, valorar el riesgo a asumir y tomar decisiones respecto a cómo operar. Hoy en día centrándonos en las plataformas web como canal de captación de clientes, podemos hacer un estudio previo a la inmersión en un nuevo mercado para validar si realmente existe una demanda real, cuál es su volumen estimado y con qué rentabilidad se puede operar.

Google AdWords es un servicio de publicidad en internet desarrollado por Google donde los anunciantes pagan para mostrar “advertising copies”, lista de productos, servicios y contenido audiovisual dentro de la Google “Ad network” (Red de Google) a los usuarios web. El sistema de Google AdWords™ está basado en cookies y en “keywords” (palabras clave) determinadas por los anunciantes, Google utiliza estos elementos para ubicar las “advertising copies” en páginas donde los respectivos algoritmos asociados consideren que sean relevantes. Los anunciantes pagan cuando los usuarios interactúan con estas “advertising copies” durante su navegación por la web con un sistema denominado PPC (“Pay-Per-Click” pago por click o interacción).

Debido a las características del Google AdWords™, este servicio tiene un comportamiento similar al que caracteriza a la demanda de mercado. Por tal razón, no parece descabellado considerar modelos matemáticos

de previsión de demanda para predecir y medir el alcance, y la cantidad de interacciones que podrían generarse entre los usuarios de la Web y las “advertising copies” de los anunciantes. Google AdWords™ nos va a permitir conocer el volumen de búsquedas de un producto o servicio en un área geográfica determinada. De aquí deducimos que información nos sirve para estimar la demanda de un producto nuevo del que se desconozca el interés que está generando en el público objetivo, y así conocer la demanda de un producto o servicio que ya se comercializa pero, esta vez, en un nuevo mercado que desconocemos. Tomando en consideración lo mencionado anteriormente, se busca lograr, aplicando análisis de series temporales sobre este volumen de búsquedas e interacciones que se genera alrededor de cierto producto o servicio, predicciones que sirvan a estas empresas para tomar decisiones eficaces a la hora de sumergirse en un nuevo mercado y para evaluar el desempeño de los anuncios.

El siguiente trabajo está dividido en dos partes. En la primera parte se define Google AdWord™, sus elementos, su funcionamiento y algunas de su métricas. También en la primera parte se define demanda, previsión de demanda y los métodos de previsión de demanda. En la segunda parte se define el modelo de serie de tiempo, se analizan las observaciones, se realiza la reconstrucción de estas y por último se realizan las predicciones.

Capítulo 1

Google AdWords™ y previsión de demanda

1.1. Google AdWords™

El motor de búsqueda de **GOOGLE™** procesa cientos de millones de búsqueda por día. En teoría cada una de esas búsquedas representa un ser humano tratando de solventar una necesidad o satisfacer una inquietud encontrando la información correcta a través de la **WORLD WIDE WEB**. El funcionamiento de Google Adwords está intrínsecamente relacionado con este motor de búsqueda y para entender un poco este servicio a continuación se presentan algunas definiciones básicas.

Definición 1.1. La *Página de resultados de Google* es la página que le aparece al usuario en pantalla después de introducir una palabra o texto en el buscador y clicar el botón de búsqueda.

Definición 1.2. *Pago por clic*, o **PPC** (Pay-Per-Click en inglés), también conocido como *costo por clic* o **CPC** (Cost-Per-Click en inglés) es un modelo de publicidad en internet, en el que el anunciante paga sus anuncios a la web que los presenta mediante una tarifa basada en el número de clics que se hagan en el anuncio.

Definición 1.3. *Google AdWords* es un servicio de Google que le permite a los anunciantes comprar textos e hipervínculos en la **página de resultados de Google**.

Observación 1.4. Google AdWords se basa en el modelo **pago por clic**

1.2. Elementos de Google AdWords

El servicio de Google Adwords está conformado por un grupo de elementos siendo el principal las llamadas palabras claves.

Definición 1.5. La *frase o palabra clave* (**keyword** en inglés) es una palabra o texto que acciona el anuncio de Google AdWords para que sea exhibido en la **página de resultados de google**.

Estas palabras claves a su vez están asociadas u organizadas en función de una cuenta administrada por el anunciante. En dicha cuenta cada palabra tiene asociado un anuncio el cual está vinculado a una determinada campaña. Formalmente cada uno de los elementos antes mencionados se definen de la siguiente manera

Definición 1.6. La *cuenta de Adwords* es la interfaz de usuario donde se supervisa o administra todo lo relacionado a los anuncios que se activan en Google AdWords. Esta cuenta va asociada a una cuenta de Google.

Definición 1.7. Un *grupo de anuncios* contiene uno o más anuncios que se orientan a un conjunto compartido de palabras clave.

Definición 1.8. Una *campaña* es un conjunto de **grupo de anuncios** que se comparten en un presupuesto, una orientación geográfica y otros parámetros de configuración. A menudo, las campañas se usan para organizar las categorías de productos o servicios que ofrece el anunciante.

1.3. Anuncio de Google AdWords

La *Red de Google* se trata de todos los lugares donde pueden aparecer sus anuncios de AdWords, como los sitios de Google, los sitios web que están asociados con Google y otras ubicaciones, como las aplicaciones para celulares.

Observación 1.9. La Red de Google se divide en grupos para brindarle más control sobre los lugares donde le gustaría que apareciera su anuncio:

- La **Red de Búsqueda**: Páginas de resultados de la búsqueda de Google, otros sitios de Google como Maps y Shopping, y los sitios de búsqueda asociados con Google para mostrar anuncios.

- La **Red de Display**: Sitios de Google como YouTube, Blogger, Gmail y otros sitios parte del programa AdSense de Google que le paga a los dueños de sitios web para mostrar anuncios en ellos, además de miles de sitios web asociados en Internet.

Definición 1.10. Un *anuncio de texto* es un tipo de comunicación de marketing que utilizan los anunciantes para promocionar sus productos o servicios en la **Red de Google**. Un anuncio de texto en la **Red de Búsqueda** de Google es el anuncio en línea más simple que ofrece AdWords. Se compone de tres partes: un título, una URL visible y una descripción.

La siguiente figura es la plantilla estándar de un anuncio de texto de Google AdWords.



Figura 1.1: Plantilla estándar anuncio de texto

- En azul el título del anuncio.
- En verde el URL visible.
- En gris la descripción del anuncio.

Vuelos Baratos - baratos-vuelos.es

 www.baratos-vuelos.es/ ▼

Compara millones de vuelos baratos. El mejor buscador de vuelos baratos

Figura 1.2: Ejemplo anuncio de texto

Observación 1.11. Los anuncios asociados a las palabras clave analizadas durante este trabajo son **anuncios de texto**.

Los anuncios de texto que aparecen junto a los resultados de la **Red de Búsqueda** de Google son solo uno de los tipos de formatos de anuncio que el anunciante puede crear con AdWords. También puede promocionar sus productos y servicios con anuncios de video, anuncios con imágenes, anuncios en aplicaciones o anuncios de contenido digital, y mucho más.

Cada formato de anuncio tiene sus propias ventajas, ya sea la facilidad y el costo bajo de publicar anuncios de texto o las coloridas historias de los videos. El anunciante puede publicar diversos tipos de anuncios desde la misma cuenta de AdWords y, en algunos casos, desde la misma campaña.

El anunciante paga por el anuncio solamente cuando alguien lo cliquea y visita su página web. El monto que paga por cada visitante puede ser tan bajo como un centavo de dólar americano o hasta 80 dólares americanos. Esto depende de la calidad del anuncio, el sitio web y la competitividad del mercado definido por la frase o palabra introducida por el usuario.

El servicio Google AdWords permite al anunciante mostrar su anuncio en el mundo entero, así como limitar la exposición de este a un país, región, estado, hasta ciudad. También permite programar el horario de exposición del anuncio, desde 24 horas los 7 días de la semana o desactivarlo en ciertas horas.

1.4. Métricas de Google AdWords

La **cuenta de Adwords** tiene como una de sus muchas funciones ir recolectando información medible sobre el rendimiento de cada una de las campañas, grupos de anuncios y palabras claves. Toda esa información está almacenada en las siguientes variables.

Definición 1.12. Una *impresión* se refiere a la frecuencia con la que se muestra un anuncio. Una impresión se cuenta cada vez que el anuncio aparece en una **página de resultados** de la búsqueda o en otro sitio de la **Red de Google**.

Definición 1.13. Un *clic* representa un usuario haciendo clic a un anuncio y trasladándolo al sitio web asociado al anuncio.

Observación 1.14. Google no cuenta múltiples clics desde una misma computadora en el mismo día.

Definición 1.15. El *porcentaje de clics* (**CTR** en inglés o **Click-to-Rate**) es el porcentaje que indica la frecuencia con la que los usuarios que ven cierto anuncio acaban haciendo clic en él. El **CTR** se puede usar para medir el rendimiento de las palabras claves y los anuncios.

Definición 1.16. El *costo* es la cantidad que se le cobra al anunciante por el total de **clics** que producen sus anuncios.

Definición 1.17. El *promedio de costo por clic* (**Avg.CPC** o **Average Cost-Per-Click** en inglés) es la división del **costo** entre el número de **clics**.

Definición 1.18. La *Posición promedio* (**Avg.Pos** o **Average Position** en inglés) describe la clasificación habitual de su anuncio en comparación con otros anuncios. Esta clasificación determina el orden de aparición de los anuncios en la página.

Observación 1.19. La posición "1" es la más alta y no existe una posición "inferior". Una **posición promedio** de 1 a 8, generalmente, aparece en la primera página de resultados de la búsqueda, una **posición promedio** de 9 a 18, generalmente, aparece en la segunda página, y así sucesivamente. Las posiciones promedio puede ser un número racional. Por ejemplo, una posición promedio de "1,7" significa que el anuncio suele aparecer en las posiciones 1 o 2.

Las variables definidas anteriormente son las variables principales generadas por los anuncios de Google AdWords pero no son las únicas, existen variables más específicas, muchas de ellas construidas a partir de las definidas anteriormente. Para este trabajo solo utilizaremos **impresiones** y **clics**.

1.5. Previsión de demanda

La *demand* ha sido definida como la solicitud para adquirir algo, es decir, la demanda es la cantidad total de un bien o servicio que la gente desea adquirir. Por otra parte la *previsión de la demanda* algunas veces llamada pronóstico de ventas (forecast de ventas) es el conjunto de actividades

destinadas a proporcionar estimaciones cuantitativas o cualitativas de las ventas futuras de la empresa para que puedan ser utilizadas en la toma de decisiones y en la planificación de la compañía.

Si bien la **previsión de demanda** es un concepto basado en la venta de bienes y servicio, para este trabajo se le dará un enfoque en el ámbito de la demanda que genera el usuario de internet al introducir una palabra o frase en el motor de búsqueda de Google.

1.6. Métodos de previsión de demanda

Debido a su naturaleza, la demanda puede ser expresada mediante una serie de tiempo. Generalmente a esas series de tiempo asociadas a demanda se le aplican directamente los siguientes métodos para obtener predicciones.

El primero de estos métodos que definimos son las *medias móviles* que es una técnica de previsión que utiliza un conjunto de observaciones en modo de puntos para crear series de promedios. Así las medias móviles son una lista de números en la cual cada uno es el promedio de un subconjunto de los datos originales. Formalmente se define a la *media móvil* de la siguiente forma:

Definición 1.20. Sea un conjunto de observaciones $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ con $n \in \mathbb{N}$. La *media móvil* \bar{x}_{mm} de las últimas n observaciones es:

$$\begin{aligned}\bar{x}_{mm} &= \frac{x_m + x_{m-1} + \dots + x_{m-(n-1)}}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} x_{m-i}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Esta serie de promedios aritméticos ofrece una impresión general de los datos en el tiempo. Regularmente se utiliza si existe poca o ninguna tendencia en los datos, aunque no es extraño su uso en datos con tendencia. Dentro de los métodos clásicos para la predicción también se utiliza el método llamado *media móvil ponderado* y el método de *alisado exponencial*.

Definición 1.21. Sea un conjunto de observaciones $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ con $m \in \mathbb{N}$. La *media móvil ponderada* \bar{x}_{mmp} de las últimas n observaciones viene dada por:

$$\bar{x}_{mmp} = \frac{x_m \cdot n + x_{m-1} \cdot (n-1) + \dots + x_{m-(n-1)} \cdot 1}{\frac{n^2+n}{2}}. \quad (1.2)$$

En un promedio móvil ponderado de las últimas n observaciones la última observación tiene un peso n , la penúltima observación tiene un peso $n-1$ y así hasta llegar a la primera de las n a la que se le asocia un peso de 1. El método de promedio móvil ponderado refleja fluctuaciones con mayor exactitud asignando mayor peso a los datos más recientes, lo que significa que los datos más viejos son por lo general menos importantes.

Definición 1.22. Sea $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un conjunto de n observaciones, se conoce como estimación por *alisado exponencial* en el tiempo t a la ecuación,

$$a_t = a_{t-1} + \alpha(x_{t-1} - a_{t-1}) \quad \text{con} \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1.3)$$

Observación 1.23. El valor de α determina la cantidad de alisado y se le conoce como el coeficiente de alisado.

Este es un método de ponderación que responde más fuertemente a cambios recientes en la demanda asignando una constante de alisamiento que es más fuerte para los datos más recientes; este método es útil si los cambios recientes en los datos son el resultado del cambio real (e.g., patrón de temporada) y no solo fluctuaciones aleatorias.

En este trabajo antes de aplicar algunos de los métodos de previsión mencionados anteriormente, se realizó un procedimiento más exhaustivo donde se extrajeron las componentes de corte periódico y de tendencia que se observaron en las series.

Observación 1.24. Estos métodos de previsión de demanda también son conocidos como filtros.

Aparte de los métodos simples de previsión definidos anteriormente, en este trabajo también se usó el modelo dinámico ARIMA para el análisis y predicción de las series de tiempo, el cual es la acción combinada de un proceso autoregresivo con un proceso de media móvil y un proceso integrado, los cuales definimos a continuación:

Definición 1.25. La serie $\{x_t\}$ es un proceso *autoregresivo*, abreviado como AR(p), si

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + w_t. \quad (1.4)$$

Donde $\{w_t\}$ es ruido blanco. $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p \in \mathbb{R}$ son los parámetros del modelo con $\phi_p \neq 0$.

Observación 1.26. Este modelo es una regresión de $\{x_t\}$ mediante sus terminos anteriores, de ahí el uso del termino "autoregresivo".

Definición 1.27. La serie $\{x_t\}$ es un proceso *promedio movil* de orden q , abreviado como MA(q), si es una combinación lineal de $\{w_t\}$ con los q anteriores ruidos blancos gaussianos, y se define como,

$$x_t = w_t + \theta_1 w_{t-1} + \theta_2 w_{t-2} + \dots + \theta_q w_{t-q}. \quad (1.5)$$

Donde $\{w_t\}$ es un ruido blanco gaussiano con media 0 y varianza σ_w^2 . Además $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q \in \mathbb{R}$ son los parámetros con $\theta_q \neq 0$.

Una clase de modelos bastante útil es obtenida cuando los términos de un proceso AR y un proceso MA se combinan para actuar de forma conjunta en una sola expresión.

Definición 1.28. Una serie de tiempo $\{x_t\}$ es un proceso *autoregresivo de promedio móvil* (ARMA) de orden (p, q) , denotado como ARMA(p, q), cuando

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \dots + \phi_p x_{t-p} + w_t + \theta_1 w_{t-1} + \dots + \theta_q w_{t-q}. \quad (1.6)$$

Donde $\{w_t\}$ con $t \in \mathbb{Z}$ son ruidos blancos gaussianos y θ_i, ϕ_j con $i, j \in \mathbb{N}$ son parámetros tales que $(\theta_q \neq 0), (\phi_p \neq 0)$.

Observación 1.29. El modelo AR(p) es un caso especial de un ARMA(p, q) para $q = 0$ y el modelo MA(q) es un caso especial de un ARMA(p, q) para $p = 0$.

Definición 1.30. Una serie de tiempo $\{x_t\}$ es un proceso *integrado* de orden d , denotado como $I(d)$, si la d -ésima diferencia de $\{x_t\}$ es ruido blanco gaussiano $\{w_t\}$. Es decir,

$$x_t - x_{t-d} = w_t. \quad (1.7)$$

Una clase de modelo que extiende el proceso $ARMA(p, q)$ es el proceso *autorregresivo integrado de media móvil*, denotado por $ARIMA(p, d, q)$.

Definición 1.31. Una serie de tiempo $\{x_t\}$ sigue un proceso $ARIMA(p, d, q)$ si la d -ésima diferencia de $\{x_t\}$ es un proceso $ARMA(p, q)$.

Finalmente, ya habiendo abarcado el contexto y herramientas con los cuales desarrollaremos nuestro análisis, es pertinente resaltar que los datos utilizados para realizar nuestro análisis fueron generados por las **palabras claves** asociadas a una campaña de Google Adword. Nos enfocaremos en las estadísticas de **impresiones** y **clics** como habíamos mencionado anteriormente, ya qué, por su naturaleza se hace intuitivo el análisis de estas desde el enfoque de **demanda de mercado**.

El análisis sobre **impresiones** nos permitirá estudiar los datos históricos sobre el comportamiento del anuncio en la **página de resultados de Google** y predecir el número de **impresiones** en los próximo 30 días, de esta manera el anunciante podría tener una idea de si la **palabra clave** escogida otorga resultados buenos, regulares o malos.

Por otro lado, el análisis sobre **clics** aparte de permitirnos estudiar los datos históricos sobre la cantidad de personas que se ven atraídas por los anuncios, también nos permitirá mediante la predicción de la cantidad de **clics** en los próximo 30 días, una planificación del presupuesto necesario para cumplir la meta deseada.

Capítulo 2

Modelo de serie de tiempo, análisis, reconstrucción y predicciones

En este capítulo describiremos explícitamente los procedimientos utilizados para el análisis de los datos y la generación de las predicciones. Cabe destacar que estos datos son datos reales de una **campana** de Google Adwords, de la cual se utilizaron tres **palabras claves**, que designaremos por: **palabra 1**, **palabra 2** y **palabra 3**. Para **palabra 1** y **palabra 3** se analizarán las **impresiones** generadas por estas, para **palabra 2** se analizará los **clics**.

Todo el análisis de datos, reconstrucción de datos y generación de predicciones fueron realizados usando el lenguaje de programación estadístico R.

2.1. Modelo de serie de tiempo

El modelo de serie de tiempo utilizado en este trabajo es de tipo aditivo y se basó en la suposición de que el comportamiento de la variable de observación correspondiente a cada palabra se describe como la consecuencia de cinco componentes.

1. **Componente lineal:** La evolución paulatina y a largo plazo del nivel medio de la serie, descrita por un modelo lineal. Para este trabajo este

período no excede en el mayor de los casos los 16 meses.

2. **Componente de periodicidad:** En este estudio el componente estacionario está conformado por la acción en conjunto de las siguientes componentes:
 - a) **Componente periódica de corte trimestral:** Es la periodicidad asociada a los trimestres del año calendario o la variaciones asociadas a los trimestres del año calendario.
 - b) **Componente periódica de corte diaria:** Es la periodicidad correspondiente a cada día de la semana o la variación correspondiente a cada día de la semana.
3. **Serie desestacionalizada:** Esta componente es el resultado de eliminar la componente periódica de corte trimestral y la componente periódica de corte diario de la serie de tiempo.
4. **Componente Aleatoria:** Esta componente no responde a ningún patrón de comportamiento, sino que es el resultado de factores fortuitos o aleatorios que inciden de forma aislada en la serie de tiempo.

Considerando lo anterior, podemos definir de forma explícita al modelo de la serie de tiempo utilizada en este trabajo como:

$$x_t = m_t + y_t + s_t + \epsilon_t. \quad (2.1)$$

Donde m_t es la componente lineal, y_t la componente de periodicidad, s_t es la serie desestacionalizada y ϵ_t la componente aleatoria. Además como consideramos que y_t está conformada por dos componentes periódicas, una de corte trimestral y otra de corte diario, y bajo la suposición de aditividad de la serie, la ecuación anterior se puede reescribir de la siguiente manera.

$$x_t = m_t + pt_t + pd_t + s_t + \epsilon_t. \quad (2.2)$$

Donde pt_t es la componente periódica de corte trimestral, pd_t es la componente periódica de corte diario.

2.2. Análisis de las variables impresiones y clics

Como se mencionó previamente, se analizó las impresiones de las denominadas **palabra 1** y **palabra 3**, y los clics de la **palabra 2**. En el caso de la **palabra 1** se tiene un conjunto de observaciones el cual está comprendido entre el primero de mayo del 2016 hasta el 31 de mayo del 2017.

Se puede observar en la figura (2.1) una tendencia de crecimiento de las impresiones de **palabra 1**, hasta el 10 de diciembre del 2016 donde alcanza el valor máximo en todo el período de observación con un valor de 572 impresiones. A partir de el día siguiente, con unos ligeros incrementos, comienza a decrecer hasta mayo del 2017 donde la tendencia tiene un comportamiento bastante similar al mismo periodo correspondiente al año anterior.

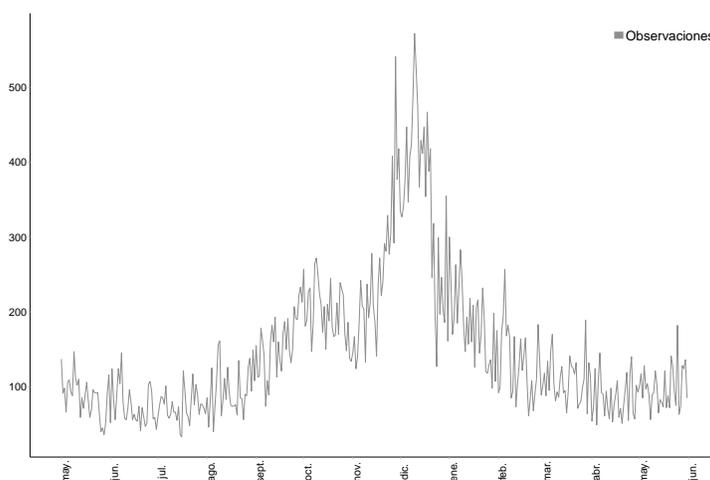


Figura 2.1: Impresiones palabra 1

Respecto al período de observaciones de la **palabra 2** este coincide con el de la **palabra 1**, iniciando el primero de mayo del 2016 y finalizando el 31 de mayo del 2017. Se puede observar en la figura (2.2) una tendencia de crecimiento hasta el 18 de diciembre del 2016 donde alcanza el valor máximo en todo el período de observación con un valor de 69 clics. A partir de el día siguiente, comienza a decrecer hasta mayo del 2017 donde

la tendencia tiene un comportamiento bastante similar al mismo período correspondiente al año anterior.

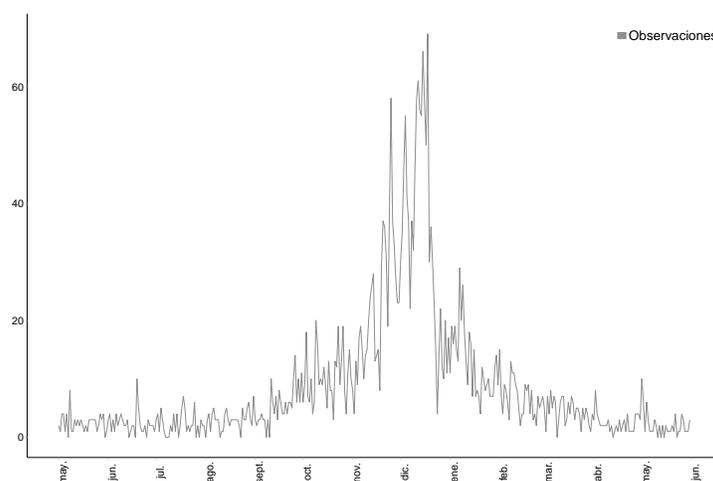


Figura 2.2: Clics palabra 2

Finalmente para la **palabra 3** se trabajó con un conjunto de observaciones las cuales fueron registradas entre el primero de mayo del 2016 hasta el 20 de septiembre del 2017. Se puede observar en la figura (2.3) una tendencia de crecimiento de las impresiones de esta palabra hasta el 18 de diciembre del 2016 donde alcanza el valor máximo en todo el período de observación con un valor de 289 Impresiones, a partir del día siguiente, con unos ligeros incrementos, comienza a decrecer hasta alcanzar un valor de 34 impresiones el 5 de febrero del 2017, al día siguiente empieza una leve tendencia de crecimiento que se estabiliza entre ligeros incrementos y decrecimientos hasta el 20 de septiembre. A diferencia de las observaciones de las dos palabras anteriores, en las impresiones de la **palabra 3** no se observa en mayo del 2017 un comportamiento similar al mismo período correspondiente al año anterior.

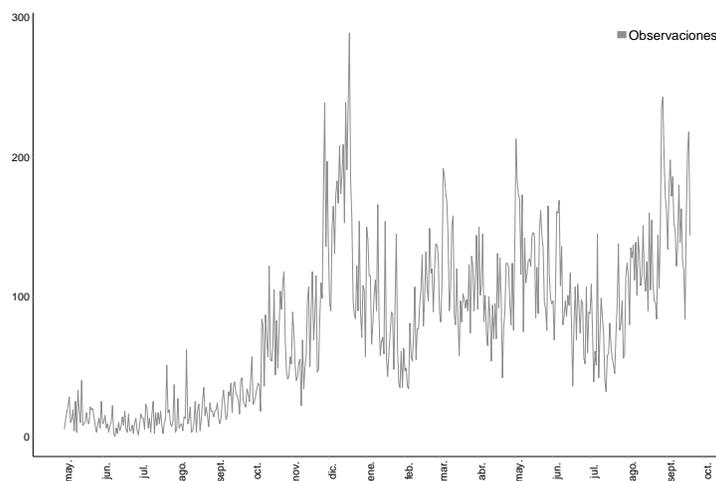


Figura 2.3: Impresiones palabra 3

Vale la pena resaltar que a pesar de que se está trabajando con la variable impresiones para dos palabras claves diferentes, ambas tienen la particularidad de que las impresiones tienden a la alza en el periodo mayo-diciembre, con un particular crecimiento entre los meses octubre-diciembre. Más aún, para la variable clics de la **palabra 2** se observa un comportamiento similar.

2.3. Ajuste lineal de las observaciones

Luego de haber descrito el modelo de serie de tiempo usado en este trabajo y haber generado la visualización de nuestras observaciones, correspondería ajustar cada una de ellas a un modelo de regresión lineal para modelar las tendencias de las observaciones.

Para las impresiones de la **palabra 1** se ajustaron linealmente 2 parábolas como muestra la figura (2.4).

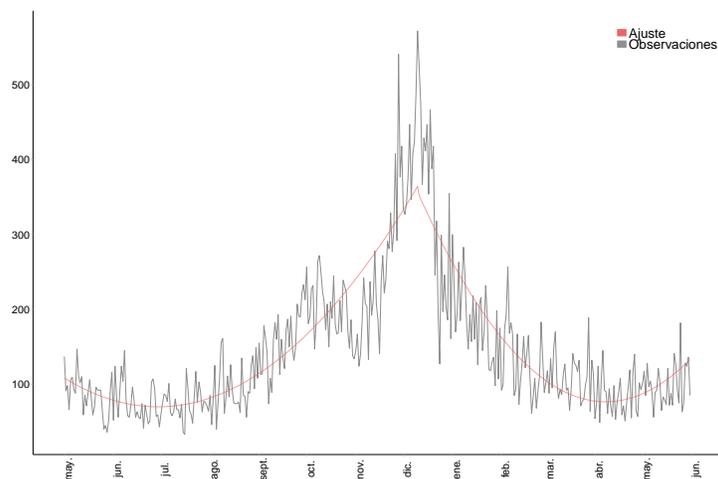


Figura 2.4: Ajuste lineal para la palabra 1

Para los clics de la **palabra 2** se ajustaron linealmente 2 parábolas como muestra la figura (2.5).

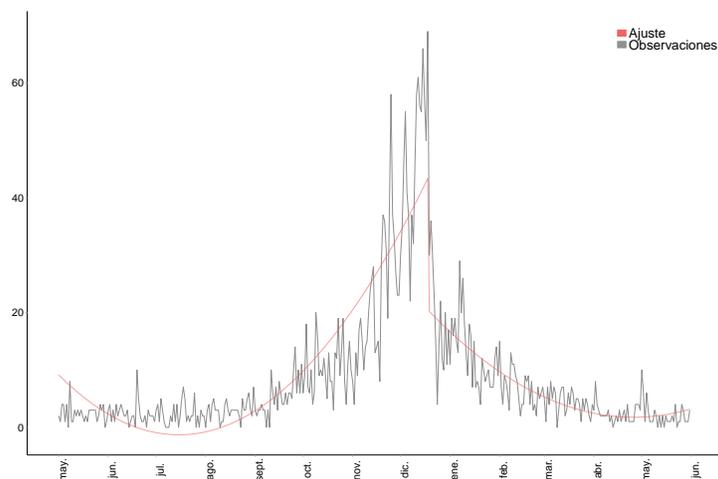


Figura 2.5: Ajuste lineal para la palabra 2

Para los impresiones de la **palabra 3** se consideró un modelo lineal de 5 parábolas para un buen ajuste de los datos históricos. Además, debido a que esta serie tiene un comportamiento en el 2017 que no es similar al del

año anterior, se le ajustó una recta a la cola de las observaciones.

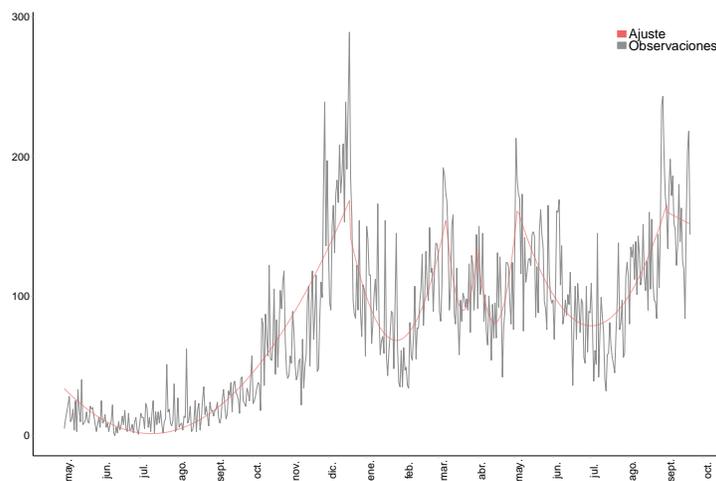


Figura 2.6: Ajuste lineal para la palabra 3

En cada uno de los casos anteriores una vez identificadas las ecuaciones de las parábolas y rectas ajustadas se procede a eliminar las mismas obteniendo así una nueva serie como se muestra a continuación.

$$x_t = m_t + pt_t + pd_t + s_t + \epsilon_t,$$

$$u_t = x_t - m_t = pt_t + pd_t + s_t + \epsilon_t. \tag{2.3}$$

2.4. Eliminación y ajuste de componentes periódicas, alisado exponencial, medias móviles y ARIMA

Ya asociado un modelo de regresión lineal a cada conjunto de observaciones, el paso siguiente es eliminar de forma precisa los componentes de corte trimestral y corte diario observados en cada una de las muestras de la siguiente forma:

$$z_t = u_t - pt_t = pd_t + s_t + \epsilon_t,$$

$$w_t = z_t - pd_t = s_t + \epsilon_t. \tag{2.4}$$

Así en la ecuación (2.4) s_t es la serie desestacionalizada o sin tendencias. Además las gráficas de los componentes de corte trimestral y corte diario son las siguientes.

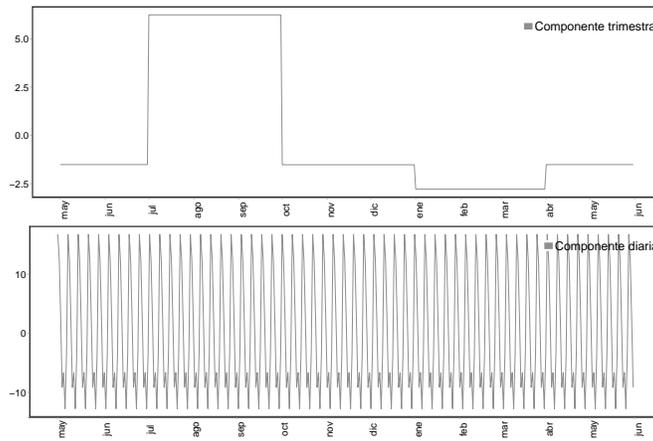


Figura 2.7: Componente de periodicidad trimestral y diaria - palabra 1

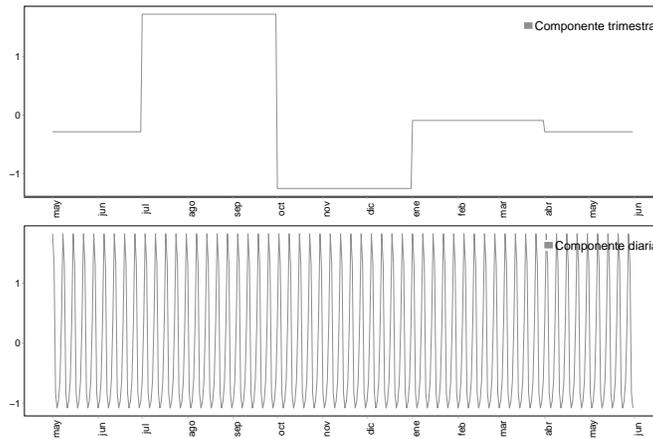


Figura 2.8: Componente de periodicidad trimestral y diaria - palabra 2

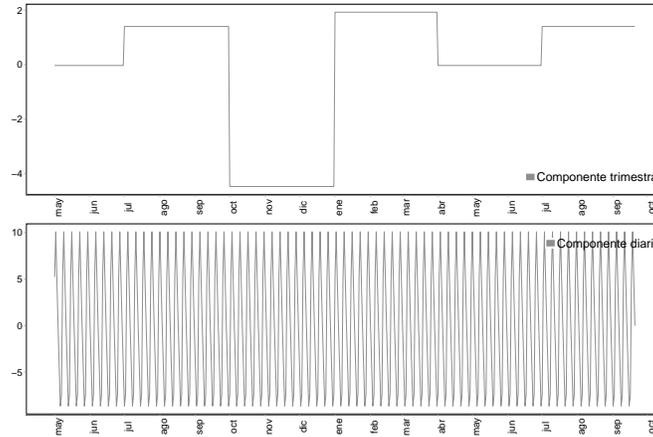


Figura 2.9: Componente de periodicidad trimestral y diaria - palabra 3

A la componente desestacionalizada le aplicaremos los métodos de previsión de demanda: alisado exponencial y medias móviles, mencionados en el capítulo 1 sección 1.6. A estas nuevas series resultantes las denotaremos por ae_t para alisado exponencial y mm_t para medias móviles. Sustituyendo en la ecuación anterior y desarrollando obtenemos que:

$$w_t = ae_t + \epsilon_t,$$

$$Eae_t = w_t - ae_t = \epsilon_t \tag{2.5}$$

y

$$w_t = z_t - pd_t = mm_t + \epsilon_t,$$

$$Emm_t = w_t - mm_t = \epsilon_t. \tag{2.6}$$

Donde Eae_t y Emm_t denotan a los errores resultantes de realizar cada método: Eae_t para alisado exponencial y Emm_t para media móvil.

2.5. Análisis de los errores

En cada uno de los casos de estudio se consideró $n = 3$ para el ajuste del modelo de media móvil y para la selección del alfa del modelo de alisado

exponencial se utilizó la función *HoltWinters* del paquete "forecast" de R que calcula el alfa que minimiza el error de la predicción.

Para la **palabra 1**, $\alpha = 0,4352823$ es el alfa que minimiza el error. Donde las gráficas de Eae_t y Emm_t son la siguientes:

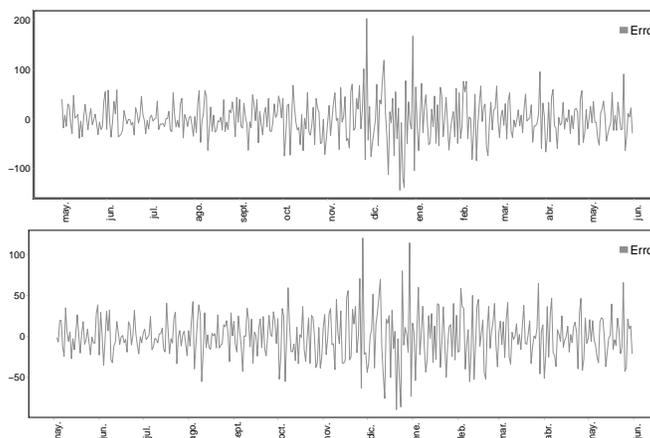


Figura 2.10: Arriba alisado exponencial, abajo medias móviles - palabra 1

En ambas gráficas podemos apreciar que la serie de los residuos, que se obtiene al aplicar ambos modelos, en apariencia se muestran sin ningún tipo de patrón subyacente.

Por otro lado, se utilizó *decompose* del paquete "time series" de R para descomponer la serie de impresiones en componentes de tendencia y periodicidad, para luego aplicarle al componente desestacionalizado un ARIMA de orden (3,0,0) el cual tiene el siguiente error asociado.

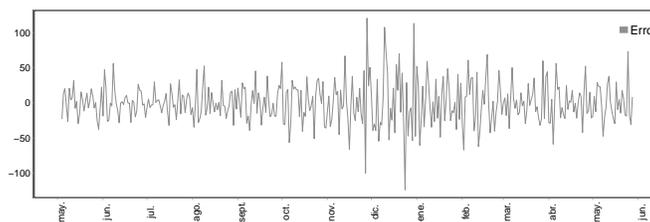


Figura 2.11: Residuos de ARIMA - palabra 1

La serie de los residuos del ARIMA que podemos ver en la figura (2.11) se muestra con un comportamiento al que no se le percibe algún tipo de patrón subyacente.

En la figuras (2.12) y (2.13) podemos observar los histogramas y Q-Q plots correspondientes a Eae_t y Emm_t de la **palabra 1** donde se ve reflejado un comportamiento considerablemente similar al gaussiano, exceptuando por uno que otro valor a nivel de las colas. En el histograma y Q-Q plot correspondiente a los residuos del ARIMA (ver figura (2.14)), se observa un comportamiento bastante similar al mencionado en los casos anteriores.

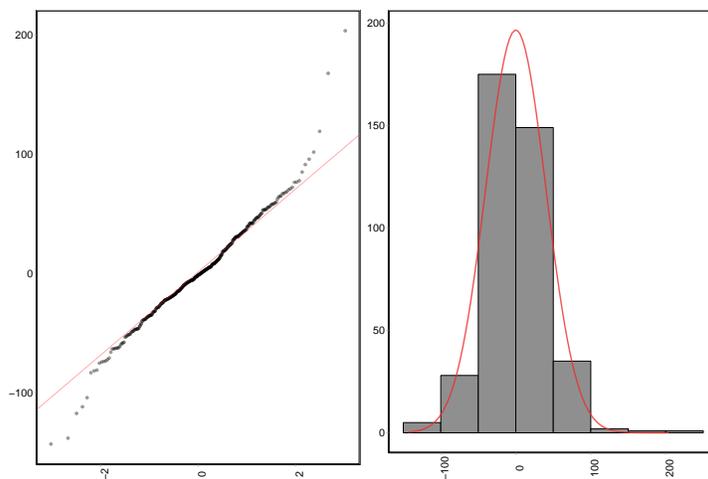


Figura 2.12: Con alisado exponencial

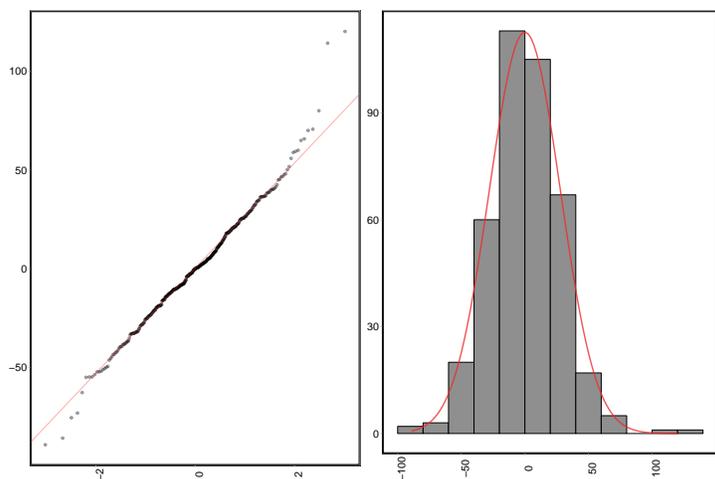


Figura 2.13: Con medias móviles

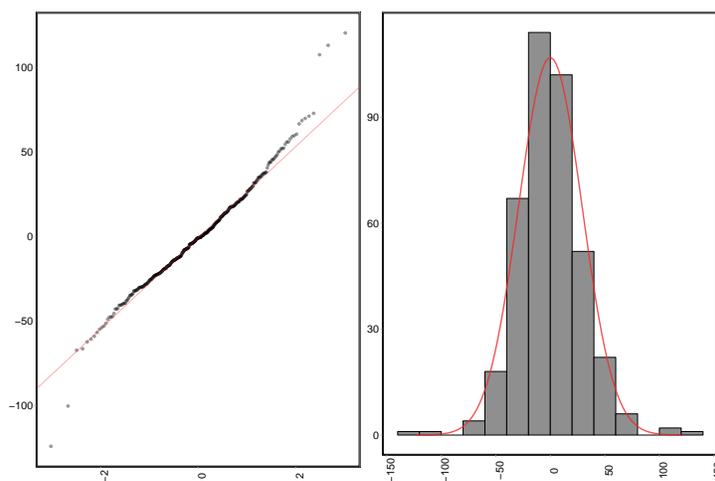


Figura 2.14: Con ARIMA

Observación 2.1. Para las **palabra 2** y **palabra 3** las funciones de autocorrelación indicaban cierto comportamiento estacionario adicional a los que ya habíamos precisado, indicando la existencia de un proceso SARIMA vinculado a la serie. En este trabajo no se tomó en cuenta tales procesos pero no se descarta su utilidad para trabajos futuros.

Para la **palabra 2**, $\alpha = 0,2885803$ es el alfa que minimiza el error. Donde las gráficas de Eae_t y Emm_t son la siguientes:

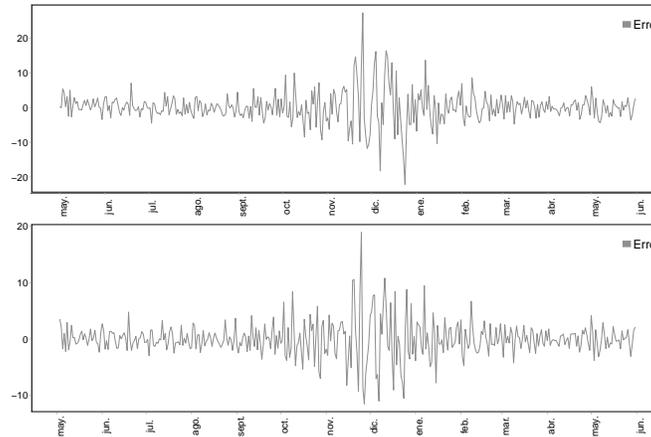


Figura 2.15: Arriba alisado exponencial, abajo medias móviles - palabra 2

En la figura (2.15) podemos apreciar la serie de los residuos que se obtiene al aplicar ambos modelos a los clics de la **palabra 2**, en apariencia se muestran sin ningún tipo de patrón subyacente.

En la figuras (2.16) y (2.17) podemos observar los histogramas y Q-Q plots correspondientes a Eae_t y Emm_t de la **palabra 2**, donde se ve reflejado un comportamiento considerablemente similar al gaussiano aunque esta vez el comportamiento de las colas es mas abrupto que en la **palabra 1**.

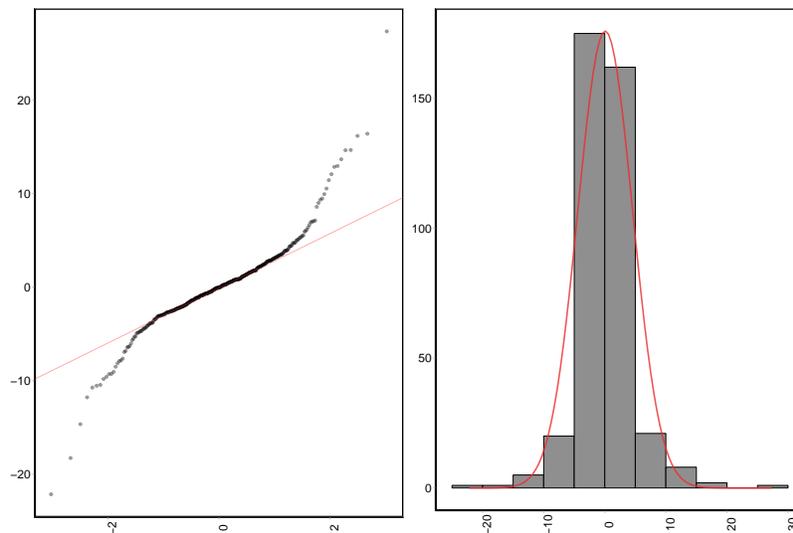


Figura 2.16: Con alisado exponencial

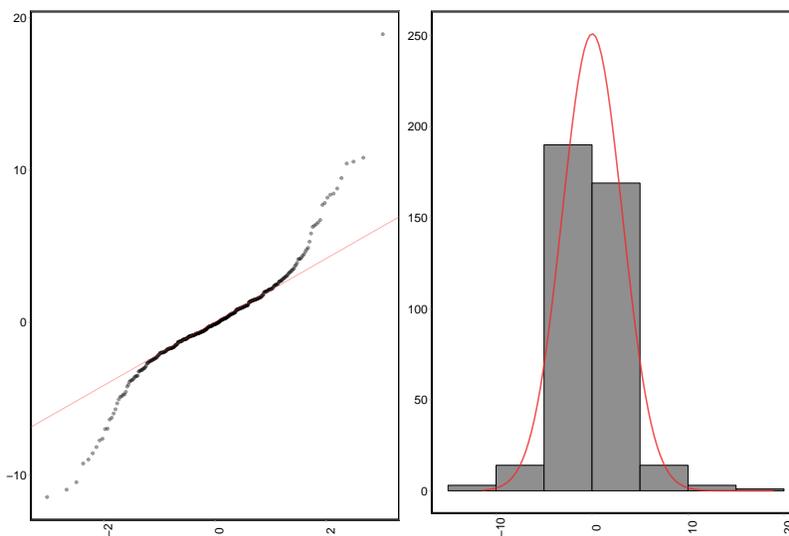


Figura 2.17: Con medias móviles

Para la **palabra 3**, $\alpha = 0,1942147$ es el alfa minimiza el error. En las figuras siguiente podemos observar las gráficas de Eae_t y Emm_t .

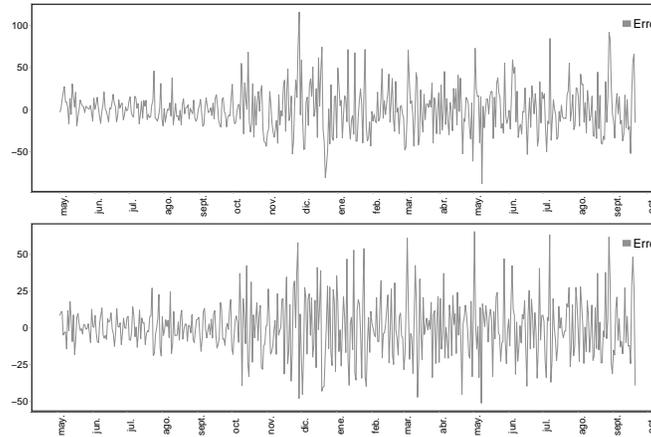


Figura 2.18: Arriba alisado exponencial, abajo medias móviles - palabra 3

En la figura (2.18) podemos apreciar como las gráficas asociadas a los residuos E_{aet} y E_{mmt} , asociados a la **palabra 3**, aparentan no tener ningún tipo de patrón subyacente.

En la figuras (2.19) y (2.20) podemos observar los histogramas y Q-Q plots correspondientes a E_{aet} y E_{mmt} de la **palabra 3**, donde se ve reflejado un comportamiento considerablemente similar al gaussiano exceptuando por unos pocos valores, sobre todo en la cola derecha de la distribución.

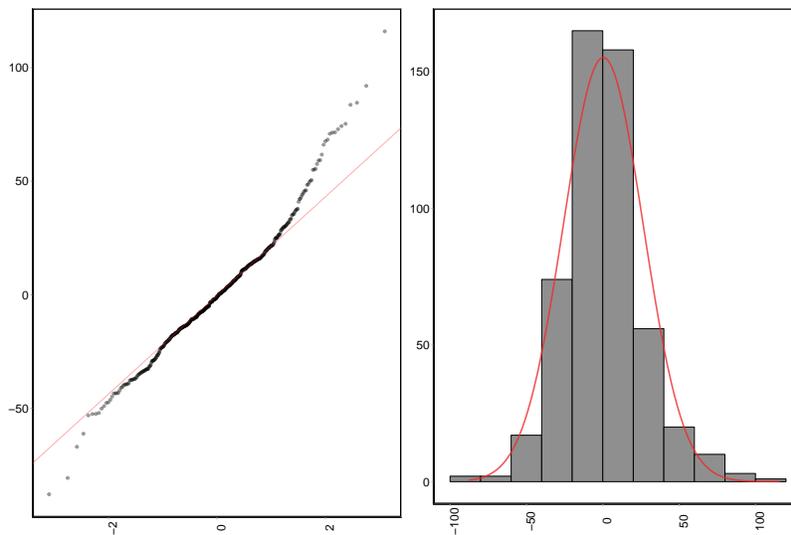


Figura 2.19: Con alisado exponencial

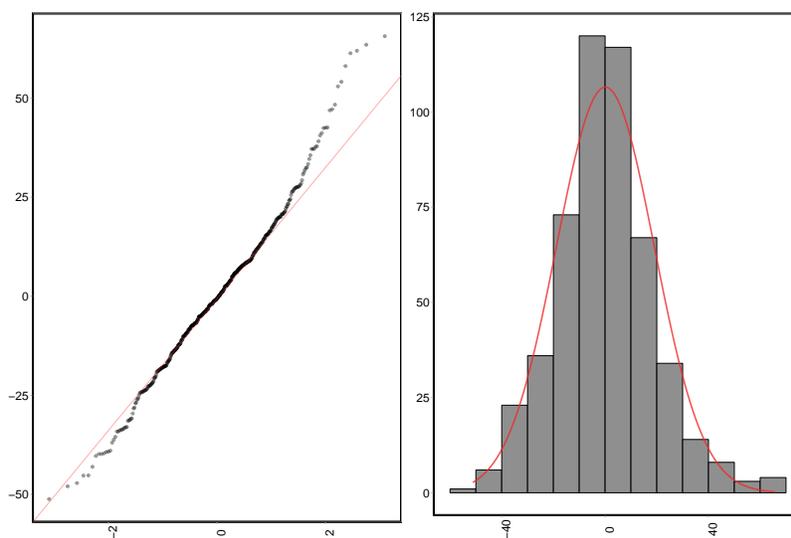


Figura 2.20: Con medias móviles

2.6. Reconstrucción

Por último, ya habiendo analizado los errores, reconstruimos nuestro modelo. Para esta reconstrucción se procede a sumar a los residuos, los componentes de periodicidad pt_t , pd_t , la tendencia m_t y el componente s_t es agregado según el caso, recordemos que procedimos a ajustar dos modelos uno por alisado exponencial ae_t y otro por media móvil mm_t . A continuación en las figura (2.21) y (2.22) podemos observar las reconstrucciones para las impresiones de la **palabra 1**.

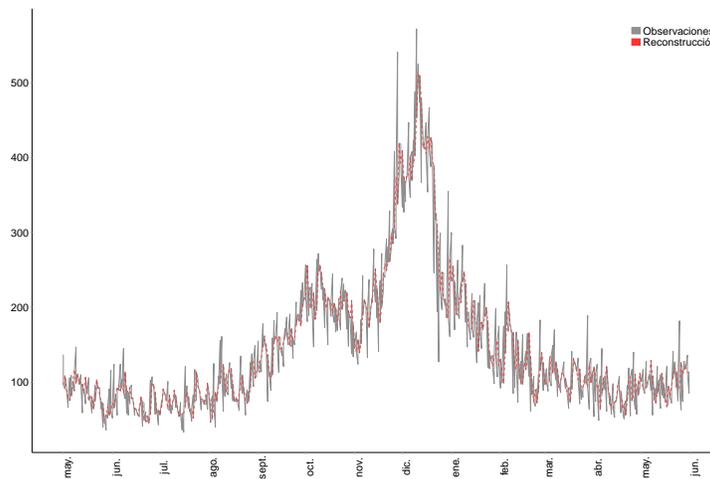


Figura 2.21: Reconstrucción con alisado exponencial

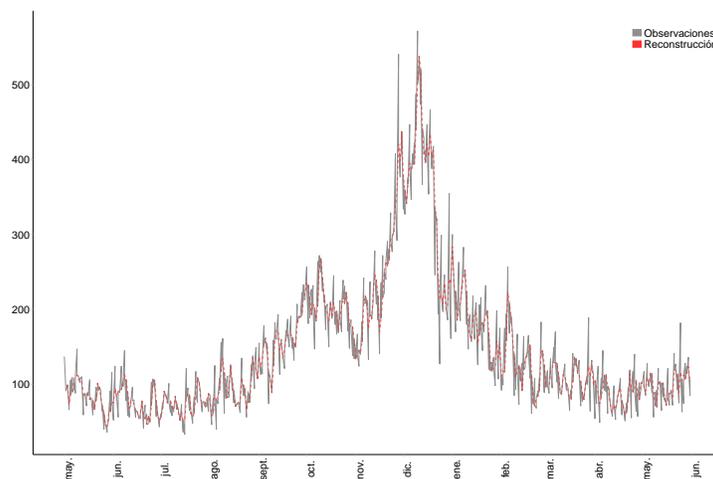


Figura 2.22: Reconstrucción con medias móviles

Para la reconstrucción con ARIMA se utilizó la acción en conjunto de los componentes obtenidos al aplicar *decompose* a la serie de impresiones y la estimación al aplicar la función *predict* a los residuos del ARIMA.

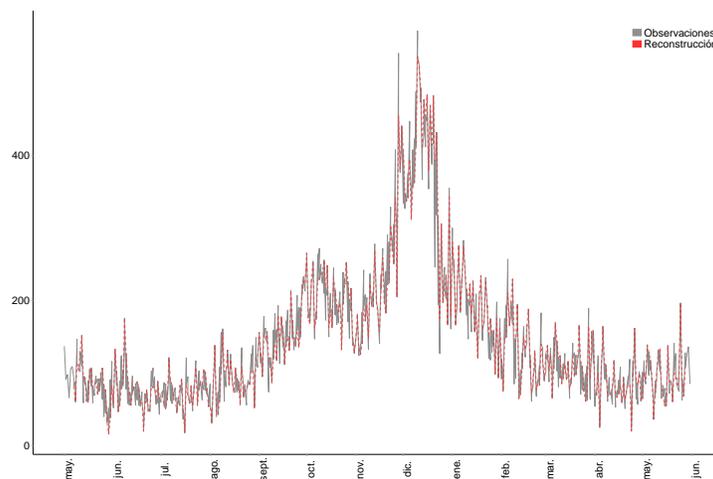


Figura 2.23: Reconstrucción con ARIMA

Para la reconstrucción de los clics de la **palabra 2** se realizó un procedimiento análogo al realizado con las impresiones de la **palabra 1**. En las figuras (2.24), (2.25) podemos observar dichas reconstrucciones.

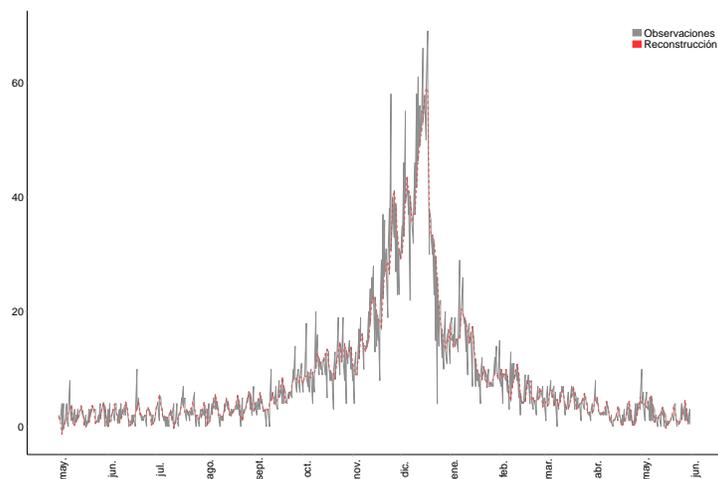


Figura 2.24: Reconstrucción con alisado exponencial

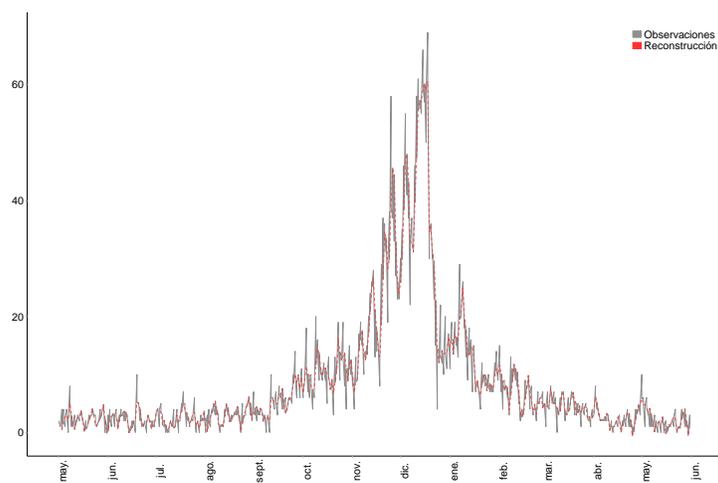


Figura 2.25: Reconstrucción con medias móviles

Análogamente a el procedimiento realizado con las impresiones **palabra 1** y los clics de la **palabra 2**, se realizó la reconstrucción de las impresiones de la **palabra 3**.

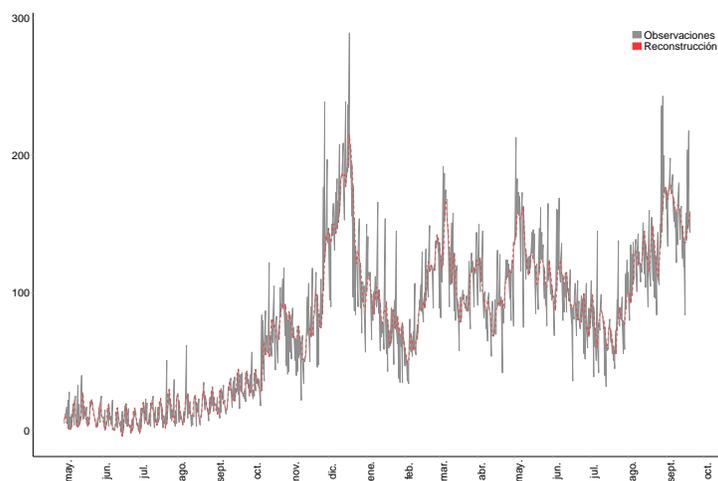


Figura 2.26: Reconstrucción con alisado exponencial

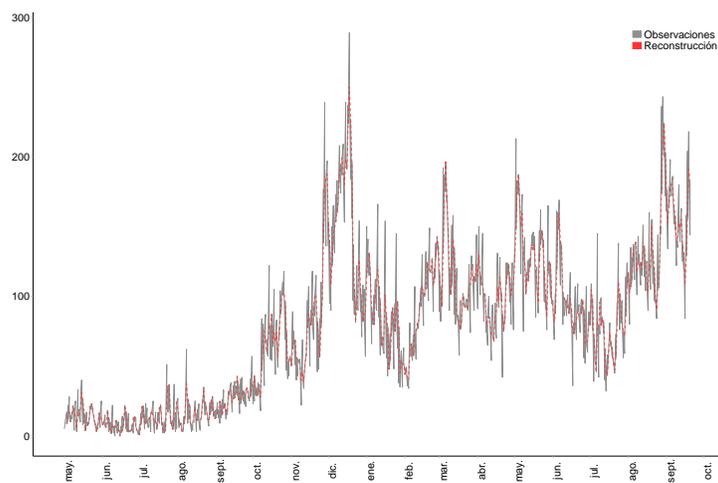


Figura 2.27: Reconstrucción con medias móviles

Como se puede apreciar en cada uno de los gráficos todos los ajustes podrían ser considerados como buenos modelos.

2.7. Predicción

La finalidad de este trabajo, como se ha mencionado a lo largo del mismo, es construir predicciones sobre el número de impresiones y clics generados por las 3 palabras estudiadas a lo largo de este trabajo. A continuación describiremos este proceso de predicción y los resultados obtenidos.

Para predecir las impresiones generadas por la **palabra 1** en el mes de junio del 2017, se utilizó la acción en conjunto del componente de tendencia en su lapso del mes de junio del 2016 (debido al comportamiento similar que muestran las observaciones respecto al año anterior), los componentes tanto de corte trimestral como de corte diario en su lapso del mes de junio del 2016 y el alisado exponencial (o las medias móviles) sobre la serie desestacionalizada en su lapso del mes de junio del 2016.

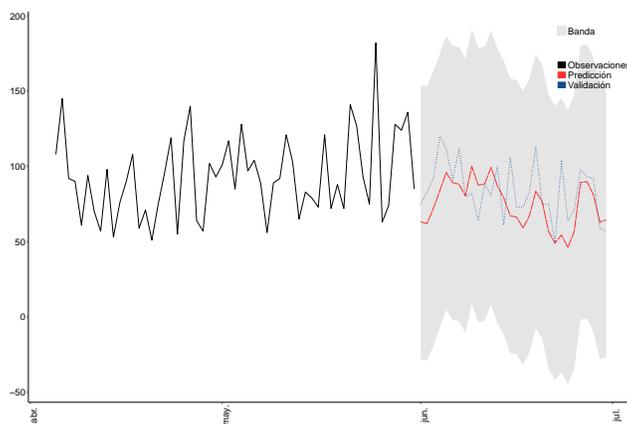


Figura 2.28: Predicción con alisado exponencial

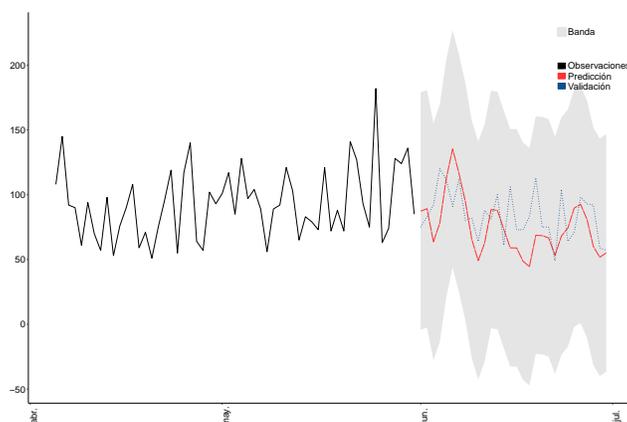


Figura 2.29: Predicción con medias móviles

Para la predicción con ARIMA, a los componentes de tendencia y estacionario obtenidos previamente mediante la función *decompose* se les precisó el período que abarca el mes de junio del año 2016. A la vez, se utilizó la función *predict* del paquete "forecast" para predecir 30 valores para el modelo AR(3). La acción en conjunta de las componentes mencionadas anteriormente dieron como resultado la predicción que se observa en la figura (2.30).

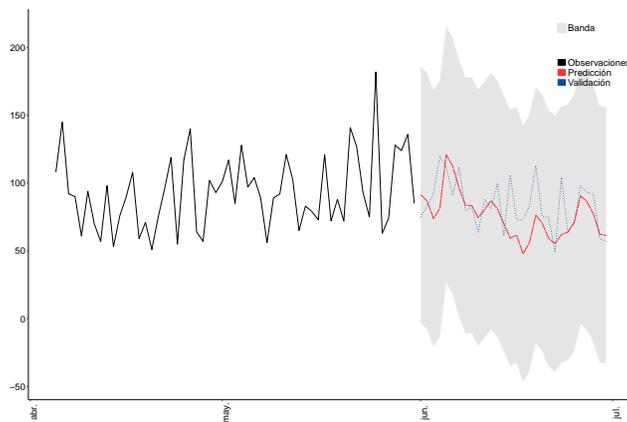


Figura 2.30: Predicción con ARIMA

En las tres gráficas anteriores podemos observar como las tres predicciones buscan simular el comportamiento de las impresiones de la **palabra**

1. La predicción con alisado exponencial se caracteriza por apreciarse en su gráfica menor dispersión en comparación con la predicción con medias móviles que tiende a tener saltos mas bruscos, lo que puede implicar un mayor reconocimiento a los cambios drasticos. La predicción con ARIMA tiene un comportamiento con una dispersión similar a la predicción con alisado exponencial pero con mejor reconocimiento de los patrones.

Finalmente a modo de comparación realizamos el ajuste de demanda por modelo de medias móviles aplicado directamente al conjunto de observaciones tal y como suele hacerse de manera estándar, este procedimiento se realizó para las impresiones de la **palabra 1**. Como se puede apreciar en la figura (2.28) a medida que el valor de t aumenta su comportamiento termina siendo el de un valor constante que puede ser utilizado como referencia pero éste claramente no imita el comportamiento de los valores reales.

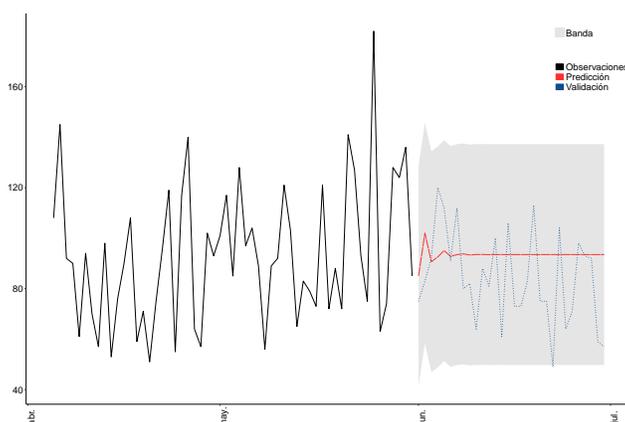


Figura 2.31: Predicción medias móviles directa

La tabla siguiente permite comparar valores reales y predicciones. Estos valores están dispuestos de la siguiente manera, en la primera columna están los verdaderos valores para las impresiones registradas en la cuenta AdWords para la **palabra 1**, en las columnas dos y tres se encuentran las predicciones obtenidas al aplicar el método de alisado exponencial y medias móviles respectivamente y finalmente en la columna cuatro están dispuestas las predicciones obtenidas mediante el modelo ARIMA.

Impresiones	Predicción Alisado Exponencial	Predicción Medias Móviles	Arima
75	72.40029	87.30615	91.45762
83	65.40102	89.22238	86.84098
92	84.22845	63.65485	73.89066
120	92.38594	78.15387	81.19008
112	96.19882	112.35108	120.84070
91	88.30162	135.36473	112.58030
112	93.31462	116.35024	96.41968
80	85.92333	94.48591	83.63712
82	113.67255	65.40213	83.41902
64	91.61882	49.16794	74.49493
88	85.83093	62.66696	80.36841
81	92.65066	88.53084	86.98604
100	78.61641	87.87782	80.96250
61	75.81088	73.19666	70.21705
106	65.31018	58.99900	59.31265
73	63.44538	58.91523	61.68535
73	56.87900	48.68103	47.83091
83	65.49575	44.51339	55.98219
113	80.45004	68.71059	76.35113
75	73.18592	68.39091	70.46553
75	48.95724	66.70975	59.19705
49	47.25205	53.17876	55.39016
104	55.14234	68.09498	62.03402
64	45.37918	74.19412	63.82948
71	56.97876	89.69315	70.87939
98	97.12275	92.55702	90.50859
93	97.11919	80.90401	86.30962
92	86.13160	59.88951	77.04163
59	61.86941	51.77249	62.24924
57	63.11532	55.10269	61.32631

Tabla 2.1: Tabla de comparación para las impresiones de **palabra 1**

En la tabla podemos observar como las tres predicciones se acercan al valor de las de las impresiones. Por su parte la predicción mediante alisado exponencial tiene la mayor cantidad de valores que están por debajo a los valores reales de las impresiones para un total de 20, mientras que con medias móviles 19 valores se mantuvieron por debajo y en el caso ARIMA 18 valores de predicción se mantuvieron por debajo. Si bien es cierto las predicciones por medias móviles terminan reconociendo mejor los saltos, tal y como se puede apreciar en las filas 4 y 5 (sombreadas en azul), luego se mantiene por encima generando el valor extremo de 135 impresiones como predicción lo que termina resultando en una sobreestimación que es costosa a la hora de hacer el calculo del error. Finalmente el error cuadrático medio de la predicción de alisado exponencial es de 376.1014, el de medias móviles es de 533.6132 y el de ARIMA es de 367.1253, estos valores permiten considerar a la predicción con ARIMA como la mejor predicción de las tres.

Para predecir los clics generados por la **palabra 2** se utilizó un procedimiento análogo a la predicción de la **palabra 1**.

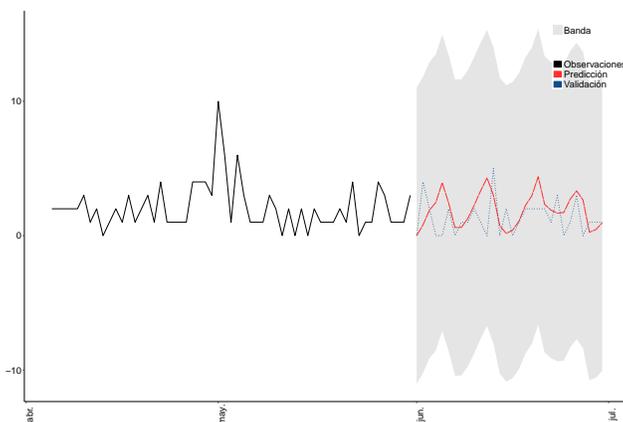


Figura 2.32: Predicción con alisado exponencial

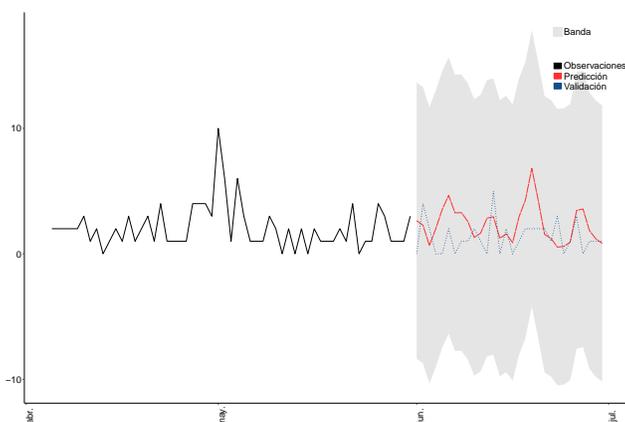


Figura 2.33: Predicción con medias móviles

En las dos gráficas anteriores se puede observar como ambas predicciones se acercan a imitar a los clics de la **palabra 2**, particularmente en la predicción de alisado exponencial se observa un patrón de recurrencia, mientras que la predicción medias móviles se caracteriza por presentar mayores incrementos en algunos de sus valores.

La siguiente tabla es para comprar valores reales y predicciones para los clics de la **palabra 2**, los cuales están dispuestos en la primera columna, llamada Clics, contra las predicciones obtenidas al aplicar el método de alisado exponencial y el de medias móviles los cuales se encuentran en las columnas dos y tres respectivamente.

Clics	Predicción Alisado Exponencial	Predicción Media Móvil
0	0.0000000	2.6408808
4	0.8041714	2.2736575
2	1.8978418	0.6697353
0	2.4749355	2.0064936
0	3.9448665	3.5326126
2	2.4387398	4.6534652
0	0.6040435	3.2670136
1	0.6169838	3.2817480
1	1.2834449	2.5811913
2	2.2646059	1.3106025
1	3.3388188	1.6473608
0	4.2966693	2.8401465
5	3.0033989	2.9609991
0	0.7429723	1.2412142
2	0.1644593	1.5892819
0	0.4101490	0.8887252
1	1.0919648	2.9514697
2	2.2417980	4.2882280
2	2.9648659	6.8143470
2	4.3903696	4.2685330
2	2.3326506	1.5487480
1	1.8983479	1.2301491
3	1.6694709	0.5295924
0	1.7250904	0.5923369
1	2.7180155	0.9290952
3	3.3294559	3.4552142
0	2.6554835	3.5760669
1	0.2584770	1.8562819
1	0.4485394	1.1995662
1	0.9524284	0.8275593

Tabla 2.2: Tabla de comparación para los clics de la **palabra 2**

En la tabla (2.2) podemos apreciar como tanto la media móvil como el alisado exponencial suelen sobreestimar en algunos casos pero también se aprecia como la media móvil hace, en general, sobreestimaciones con un margen de error mas grande que el alisado exponencial, un ejemplo de esto se puede apreciar en las filas 17, 18 y 19 (sombreadas en azul). Para la **palabra 2** el error cuadrático medio de alisado es de 2.96091 mientras que el de media móvil es de 4.238326.

Para la predicción de las impresiones de la **palabra 3** durante el período que va desde el 21 de septiembre del 2017 a el 10 de octubre del 2017, se utilizó la tendencia predecida por la recta que se le ajustó a la cola de las impresiones de la **palabra 3** actuando en conjunto con los componentes de corte trimestral y corte diario correspondiente al mismo período del año 2016, y el alisado exponencial (o las medias móviles) sobre la serie desestacionalizada correspondiente al mismo período del año 2016.

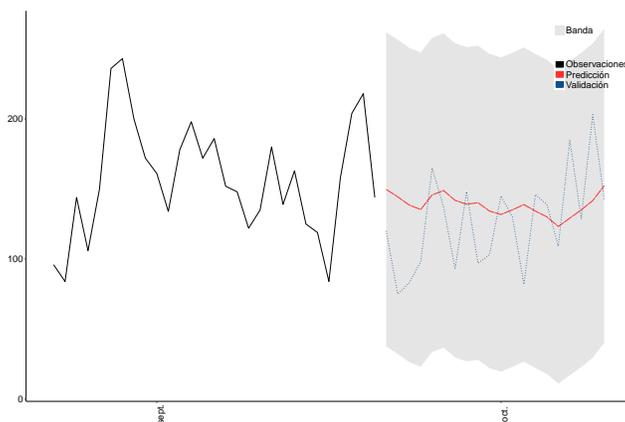


Figura 2.34: Predicción con alisado exponencial

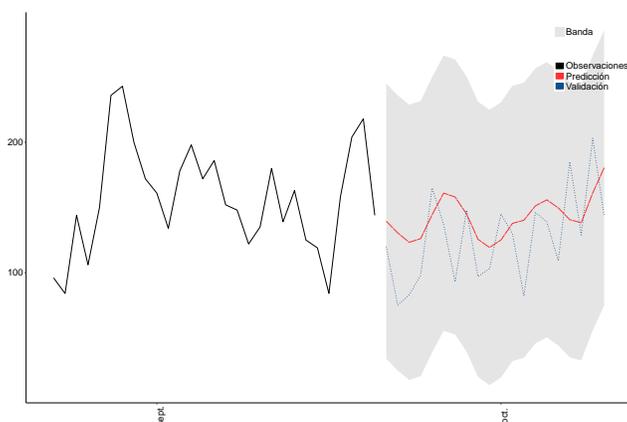


Figura 2.35: Predicción con medias móviles

En las gráficas anteriores se observa un comportamiento suave por parte del alisado exponencial y en contraste la predicción de medias móviles presenta incrementos y decrecimientos de mayor varianza.

La tabla siguiente es para comparar valores reales y predicciones para las impresiones de la **palabra 3** los cuales están dispuestos en la primera columna, llamada Impresiones, contra las predicciones obtenidas al aplicar el modelo de alisado exponencial y el de media móvil los cuales se encuentran en las columnas dos y tres respectivamente.

Impresiones	Predicción Alisado Exponencial	Predicción Media Móvil
120	149.6684	139.4857
75	144.4420	130.4527
83	138.5563	123.2857
98	135.3471	126.1138
165	145.7487	144.4538
137	148.9348	161.0018
93	141.8660	158.0502
148	139.1506	145.0767
97	140.1949	125.5759
103	134.2692	119.3182
145	131.7871	125.0556
130	135.1400	137.7691
82	138.9116	140.2262
146	134.2391	151.2275
139	130.1353	155.8736
109	123.2457	149.6590
185	129.1911	140.6439
129	135.0915	138.2905
203	141.7280	161.1156
143	152.3326	180.4820

Tabla 2.3: Tabla de comparación para las impresiones de la **palabra 3**

En la tabla (2.3) podemos observar como las dos predicciones se acercan al valor de las de las impresiones de la **palabra 3**. Nuevamente la predicción con medias móviles alcanza el valor máximo de las predicciones con 180.48 impresiones y el valor mínimo con 119.31 impresiones. El error cuadrático medio de la predicción de alisado exponencial es de 1336.656 y el de medias móviles de 1160.79, en esta oportunidad el error de medias móviles es menor que el del alisado. En las filas 8, 9 y 10 (sombreadas de azul) podemos observar como la predicción de medias móviles reconoce mejor los saltos en los valores de las impresiones en comparación con la predicción de alisado

exponencial, el mismo comportamiento mencionado en las impresiones de la **palabra 1**.

2.8. Conclusión

El modelo de serie de tiempo descrito y utilizado en el proceso de reconstrucción de nuestras observaciones se puede asumir como acertado, ya que en todas las gráficas se observa una conducta mimética entre las observación y su reconstrucción mediante el modelo. Esto, se puede evidenciar de forma concreta en el comportamiento muy similar al gaussiano que presentaron los errores en sus histogramas de densidad y gráficas Q-Q plot, garantizando que la implementación de los modelos de demanda logran predecir efectivamente el comportamiento de las observaciones obtenidas en las impresiones y clics de las palabras correspondientes.

El método de alisado exponencial mostró un comportamiento con una dispersión moderada entre sus valores en las tres predicciones realizadas. Por otro lado, las medias móviles mostraron un comportamiento con mayor dispersión, dando a entender una mayor sensibilidad hacia los cambios abruptos de las observaciones, en comparación con el método de alisado. El método de medias móviles, sirve para asumir un margen más amplio entre el máximo y el mínimo sobre la cantidad de impresiones y clics, el método de alisado concibe un escenario de menor varianza en sus predicciones.

De la misma manera, el proceso ARIMA arrojó resultados efectivos y de menor error que los métodos de demanda mencionados anteriormente, de esta forma, se logró implementar un proceso general sobre series de tiempo a nuestro particular estudio sobre la demanda y así aumentar la cantidad de modelos que podemos destinar a la predicción de nuestros datos. A diferencia del método de alisado y método de media móvil que son scripts desarrollados independientemente en R, ARIMA cuenta con un proceso ya debidamente estructurado en las librerías de R.

Es importante resaltar que el método de medias móviles clásico utilizado comúnmente en el área de previsión de demanda no imita el comportamiento de los valores reales con la fidelidad de nuestros métodos, aunque de igual forma utilizar este método puede servir de guía.

Debido a la dinámica de Google AdWords toda información que tengan los anunciantes a la mano los ayuda a aprovechar en lo mas posible este servicio. La aplicación de estos resultados puede ser una herramienta muy útil para los anunciantes de Google AdWords a la hora de evaluar si la palabra vinculada tendrá un desempeño esperado los próximos días o si es necesario evaluar el uso de otra palabra que logre el alcance esperado y a la hora de planificar presupuestos eficientes del costo de los clics de las próximas semanas, y así evitar palabras que sean muy costosas para las campañas o que su gasto sea muy por debajo de lo esperado, lo que demostraría un pobre rendimiento de la palabra usada.

2.9. Recomendaciones

- Considerar procesos SARIMA debido a los varios tipos de componentes estacionarios que se presentan en las observaciones.
- Este trabajo se realizó con períodos de observaciones de 12 meses para las impresiones de la **palabra 1** y los clics de la **palabra 2**, y un período de observaciones de 16 meses para las impresiones de la **palabra 3**. Se recomienda considerar periodos de observaciones de mayor tamaño para sustentar los procesos con mas información.

Bibliografía

- [1] Google. 2018. <http://support.google.com/adwords>.
- [2] Hernández, José y Colina, Mairene: *Series de Tiempo*. 2017.
- [3] Jacobson, Howie: *Google AdWords for DUMMIES*. Wiley, 2009.
- [4] Metcalfe, Andrew V y Cowpertwait, Paul SP: *Introductory time series with R*. 2009.
- [5] Najm, Sarkis: *Pronóstico de la demanda*. 2018. <http://es.slideshare.net/SarkisNajm/pronstico-de-la-demanda-50174701>.
- [6] Stoffer, David S y Shumway, Robert H: *Time Series Analysis and Its Applications. With R Examples*, 2000.