Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ciencias

Escuela de Física

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

FORMULACIÓN CANÓNICA DE UN MODELO ALTERNATIVO DE GRAVEDAD MASIVA LINEALIZADA

Trabajo Especial de Grado presentado por
Gustavo Melgarejo
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**
Con la tutoría de: Prof. Pío J. Arias

Octubre-2017

Caracas-Venezuela

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

FORMULACIÓN CANÓNICA DE UN MODELO ALTERNATIVO DE GRAVEDAD MASIVA LINEALIZADA

Trabajo Especial de Grado presentado por
Gustavo Melgarejo
ante la Facultad de Ciencias de la
Ilustre Universidad Central de Venezuela
como requisito parcial para optar al título
de: **Licenciado en Física**
Con la tutoría de: Prof. Pío J. Arias

Octubre-2017

Caracas-Venezuela

UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA

VEREDICTO

Quienes suscriben, miembros del Jurado designado por el Consejo de la Escuela de Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, para examinar el Trabajo Especial de Grado presentado por Gustavo Adolfo Melgarejo Cedeño, Cédula de Identidad V-22926832, bajo el título "Formulación canónica de un modelo alternativo de gravedad masiva linealizada", a los fines de cumplir con el requisito legal para optar al grado de Licenciado en Física, dejan constancia de lo siguiente:

1. Leído como fue dicho trabajo por cada uno de los miembros del Jurado, éste fijó el día 6 de octubre de 2017, a las 9:00 am, para que el autor lo defendiera en forma pública, lo que éste hizo en la Sala de Seminarios Guillermo Ruggeri de la Escuela de Física, mediante un resumen oral de su contenido, luego de lo cual respondió satisfactoriamente a las preguntas que le fueron formuladas por el jurado; todo ello conforme a los artículos 20, 21, 22, 25, 26 y 28 de la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente.

2. Finalizada la defensa pública del trabajo, el jurado decidió declararlo aprobado por considerar que se ajusta a lo dispuesto y exigido en la Normativa de Trabajo Especial de Grado de la Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias de la UCV vigente en sus artículos 1, 5 y 6.

Se levanta la presente acta a los 6 días del mes de octubre de 2017, dejándose también constancia de que, conforme a la normativa jurídica vigente, actuó como coordinador del jurado el tutor del Trabajo Especial de Grado Prof Pío José Arias González.

Firma del jurado evaluador

Prof Ernesto Fuenmayor
UCV

Prof Pío José Arias
UCV

Profa. Joselen Marivi Peña
UCV

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
DIRECCIÓN
UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA

"You have no responsibility to live up to what other people think you ought to accomplish. I have no responsibility to be like they expect me to be. It is their mistake, not my failing."
Richard Phillips Feynman

Agradecimientos

En primera instancia, agradezco a mi madre por la formación que me dio, sin sus esfuerzos no hubiese podido iniciarme en el cumplimiento de ésta meta.

A la señora Migdalia Nieves y el Señor Jorge Briceño por apoyarme en los momentos que más necesite ayuda, y por ser como mi familia. Profundamente agradecido.

A todos los profesores que participaron en mi formación académica, entre los cuales estoy especialmente agradecido con los profesores Ernesto Contreras y Nelson Bolívar.

A mis amigos, por haberme acompañado durante toda ésta travesía, y servirme de apoyo y como consejeros en los momentos requeridos y que nombro sin ningún orden particular: Daniel Bachour, Hector Parra, Jorge Dasilva y Eymard Guevara.

A mi tutor, el profesor Pío Arias, por asesorarme en éste trabajo.

A todos, mis respetos.

Resumen

Se estudia la formulación canónica aplicada a la acción de Morand y Solodukhin en un espacio-tiempo plano, esta acción representa un modelo dual para una teoría de gravedad masiva linealizada, de allí el interés para estudiarla.

Se hace un estudio de las ecuaciones de movimiento del sistema para así determinar cuántos grados de libertad tiene la teoría y para hallar algunas propiedades sobre los campos que aparecen en ésta.

Esta es una teoría singular, y por lo tanto el espacio de fases contiene variables sin relevancia alguna, aplicando el método de Dirac se consigue determinar cuales son las variables físicas del sistema, además obtenemos un álgebra consistente en términos de los corchetes de Dirac, y mostramos que esta reproduce las ecuaciones de movimiento obtenidas a nivel Lagrangiano.

Palabras claves: Método de Dirac, Lagrangiano singular, formulación Hamiltoniana, cantidades de primera y de segunda clase.

Índice general

CONVENCIONES Y NOMENCLATURA

A lo largo de esta tesis se utiliza la convención de suma de Einstein, y se trabaja en unidades naturales.

Una igualdad en la subvariedad, inducida por las ligaduras, es indicada por el símbolo $\approx$. No se debe confundir con una aproximación.

En esta tesis se utiliza la notación usual para cuadrivectores, donde los índices griegos corren de 0 a 3 y los índices latinos corren de 1 a 3. Las componentes de un vector contravariante nosotros la denotaremos con superíndices

$$x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right),$$

y las componentes covariantes con subíndices

$$x_\mu = \left(x_0, x_1, x_2, x_3\right).$$

Los índices se suben o se bajan usando la métrica de Minkowski

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu, \qquad\qquad x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu,$$

donde la anterior está dada por

$$\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} := diag(-1, +1, +1, +1).$$

Las derivadas parciales con respecto a las coordenadas contravariantes son denotadas como

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} = \partial_\mu\varphi$$

y las derivadas con respecto al tiempo las denotamos con un punto

$$\partial_0\varphi = \dot{\varphi}.$$

Además, podemos ver que las componentes de A^μ se relacionan con las de A_μ de la siguiente manera

$$A^0 = -A_0 \qquad\qquad A^i = A_i$$

Capítulo 1

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la cinemática y realizar el análisis canónico del modelo de Morand y Solodukhin a primer orden, éste representa un modelo alternativo para gravedad masiva linealizada en (3+1) dimensiones[1], y constituye una generalización de los modelos autoduales masivos en dimensión (2+1). La formulación para la acción antes mencionada se realizará en un espacio-tiempo plano.

El trabajo está estructurado de la siguiente manera. En el capítulo 2 se empieza discutiendo lo que es un sistema singular, para ello partimos de las ecuaciones de movimiento obtenidas luego de hacer variaciones del funcional acción, que habitualmente se denota como $\mathcal{S}$; de las ecuaciones de movimiento se logra ver cuál es la condición para que un sistema sea o no singular. Luego, cuando se pasa de la formulación Lagrangiana a la Hamiltoniana notamos que aparecen relaciones entre las posiciones y los momentos, estas relaciones llamadas ligaduras primarias son de gran importancia, puesto que estas son las generadoras de las transformaciones de calibre, recordemos que una transformación de calibre es una transformación de las variables inducidas por un cambio arbitrario en el marco de referencia, las variables físicas son invariantes de calibre[2].

Luego, una vez estudiado lo referente a sistemas singulares, pasamos al estudio propiamente de la aplicación de la formulación canónica o método de Dirac a estos sistemas, el estudio se hará para sistemas de finitos grados de libertad, luego, nos dedicaremos al estudio de la aplicación del método de Dirac a sistemas singulares con infinitos grados de libertad, el estudio será breve, ya que la generalización de finitos a infinitos grados de libertad es casi directa, salvo algunos detalles importantes.

A manera de ejemplo, en el capítulo 3 estudiaremos el método de Dirac aplicado a la teoría de Proca, la aplicación es relativamente sencilla, pero sirve como un buen modelo ilustrativo. También haremos un breve estudio de un modelo autodual de spin 2 en (2+1) dimensiones[3, 4], que puede verse como un modelo para gravedad masiva linealizada en (2+1) dimensiones [1], el estudio de esta teoría también se hará en un espacio-tiempo plano, hallaremos los grados de libertad físicos de la teoría haciendo uso del método de la acción reducida, y obtendremos el álgebra en términos de los corchetes de Poisson.

En el capítulo 4 comenzaremos el estudio de la acción de Morand y Solodukhin partiendo por hallar las ecuaciones de movimiento del sistema, a partir de estas hallaremos cuántos grados de libertad tiene la teoría. Después aplicaremos el método de Dirac, hallaremos todas las ligaduras del sistema, con estas podemos determinar los grados de libertad del sistema para así comparar con lo obtenido a través de las ecuaciones de movimiento; veremos que las ligadura son de segunda clase y hallaremos la respectiva matriz de Dirac para así poder calcular los corchetes de Dirac, una vez calculados estos veremos que se obtienen nuevamente las ecuaciones de movimiento obtenidas al hacer variaciones de la acción y toda la información derivada de estas. Finalmente presentaremos algunas conclusiones.

Capítulo 2

Método de Dirac para sistemas con ligaduras

2.1. Sistemas con Lagrangianos singulares

Esta sección sirve como introducción a modelos singulares en el formalismo Lagrangiano [5, 6]. Introduciremos algunas nociones básicas tales como las ligaduras que surgen debido a la singularidad del Lagrangiano y la definición de los momentos canónicos.

Comenzaremos nuestra discusión de sistemas con ligaduras con el principio de mínima acción. Según este último, un sistema físico puede ser descrito por una función L que depende de las posiciones y velocidades

$$L = L(q(t), \dot{q}(t)) \tag{2.1.1}$$

Suponemos por simplicidad que la función Lagrangiana no exhibe dependencia explícita en el tiempo. Las abreviaturas $q(t)$ y $\dot{q}(t)$ representan el conjunto de todas la posiciones $q(t) = \{q_i(t)\}$ y velocidades $\dot{q}(t) = \{\dot{q}_i(t)\}$, respectivamente, con $i = 1, ..., N$. El movimiento del sistema procede de tal manera que la acción

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q(t), \dot{q}(t)), \tag{2.1.2}$$

sea estacionaria bajo variaciones infinitesimales $\delta q_i(t)$, suponiendo que los puntos extremos están fijos durante la variación, es decir, $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$, obtenemos así las ecuaciones de movimiento

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \tag{2.1.3}$$

Calculando explícitamente la derivada total con respecto al tiempo nos da

$$\ddot{q}_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \dot{q}_j \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \partial \dot{q}_i}. \tag{2.1.4}$$

En esta expresión reconocemos que las aceleraciones $\ddot{q}_i$ pueden ser únicamente expresadas en términos de las posiciones q_i y las velocidades $\dot{q}_i$ si y sólo si la matriz Hessiana

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}, \tag{2.1.5}$$

es invertible. En otras palabras su determinante no debe ser nulo

$$\det H_{ij} \neq 0. \tag{2.1.6}$$

Ya que estamos interesados en la formulación Hamiltoniana, tenemos que realizar una transformación de Legendre de las velocidades a los momentos. Estos últimos se definen como

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{2.1.7}$$

En caso de que el determinante de la matriz Hessiana sea nulo, el Lagrangiano (2.1.1) es singular y algunas de las aceleraciones no están determinadas por las velocidades y posiciones. Esto significa que tenemos variables que no son independientes unas de las otras. El Hessiano igual a cero equivale a la no invertibilidad de (2.1.7). Como una consecuencia, en un sistema singular no es posible mostrar las velocidades como funciones de los momentos y las posiciones. Se obtienen entonces R relaciones entre las posiciones y los momentos

$$\phi_r(p, q) = 0, \qquad r = 1, ..., R, \tag{2.1.8}$$

estas condiciones son llamadas ligaduras primarias. El punto interesante es que estas funciones son restricciones reales en el espacio de fases. Todas las ligaduras juntas definen una subvariedad Γ_P en el espacio de fases de dimensión $(2N - R)$, la cual contiene todas las variables físicas relevantes.

Existe una ambigüedad en la forma funcional de (2.1.8). Con $\phi_r = 0$ también podemos tener que $(\phi_r)^2 = 0$. Esto significa que la subvariedad puede estar sobredeterminada, existen muchas formas equivalentes de representar Γ_P. Para tener un conjunto minimal de ligaduras tenemos que imponer las llamadas condiciones de regularidad, las cuales exigen que la matriz Jacobiana

$$J = \frac{\partial(\phi_1, ..., \phi_R)}{\partial(\{q_i\}, \{p^i\})}, \tag{2.1.9}$$

tiene que ser de rango R en la superficie de ligaduras[6]. En lo que sigue asumimos que estos requerimientos se cumplen y que las ϕ_r son independientes entre sí.

2.2. Ecuaciones de movimiento con ligaduras primarias

Conociendo el concepto de Lagrangiano singular, trabajaremos las consecuencias para la transición a la formulación Hamiltoniana en este caso[2, 5, 6, 7].

La transición a la formulación Hamiltoniana de la mecánica está dada por la transformación de Legendre

$$H(p(t), q(t)) = \left[p^i(t)\dot{q}_i(t) - L(q(t), \dot{q}(t))\right]\Big|_{p^i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}. \tag{2.2.1}$$

Aunque no podamos despejar algunas de las velocidades en términos de las posiciones y los momentos, el Hamiltoniano sigue siendo independiente de las velocidades. Esto se puede ver como sigue:

$$\begin{aligned} dH &= \left[d(p^i\dot{q}_i) - dL\right]\Big|_{p^i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \\ &= \left[\dot{q}_i dp^i + p^i d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i\right]\Big|_{p^i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \\ &= \left[\dot{q}_i dp^i - \frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i\right]\Big|_{p^i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}, \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Reconocemos que los diferenciales de velocidad desaparecen completamente, solamente quedan los diferenciales de las posiciones y los momentos. Como consecuencia, el Hamiltoniano no depende de las velocidades. Usando (2.2.1), podemos escribir la acción como

$$\mathcal{S} = \int dt \left[p^i(t)\dot{q}_i(t) - H(p(t), q(t))\right]. \tag{2.2.3}$$

Puede verse que las ecuaciones de movimiento son equivalentes si tomamos como acción a (2.2.3). Recordemos que en el formalismo Lagrangiano se tienen en cuenta las ligaduras acoplándolas al Lagrangiano vía multiplicadores $\lambda^r(t)$

$$L(q(t), \dot{q}(t)) + \lambda^r(t)\phi_r(q(t), \dot{q}(t)). \tag{2.2.4}$$

Aquí los multiplicadores actúan como nuevas variables dinámicas. Esto también se puede hacer dentro del formalismo Hamiltoniano. Si realizamos la transformación de Legendre y acoplamos las ligaduras primarias (2.1.8), llegamos a la acción

$$\mathcal{S} = \int dt \left[p^i(t)\dot{q}_i(t) - H(p(t), q(t)) - \lambda^r(t)\phi_r(p(t), q(t))\right]. \tag{2.2.5}$$

Las ecuaciones de movimiento corresponden a puntos estacionarios de la acción. Así

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{S} &= \delta\int dt\left[p^i\dot{q}_i - H(p,q) - \lambda^r\phi_r(p,q)\right] \\
&= \int dt\left[\delta p^i\dot{q}_i + p^i\delta\dot{q}_i - \delta H - \delta\lambda^r\phi_r - \lambda^r\delta\phi_r\right] \\
&= \int dt\left[\delta p^i\dot{q}_i - \dot{p}^i\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p^i}\delta p^i - \delta\lambda^r\phi_r - \lambda^r\left(\frac{\partial\phi_r}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial\phi_r}{\partial p^i}\delta p^i\right)\right] \\
&= \int dt\left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p^i} - \lambda^r\frac{\partial\phi_r}{\partial p^i}\right)\delta p^i + \left(-\dot{p}^i - \frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda^r\frac{\partial\phi_r}{\partial q_i}\right)\delta q_i - \phi_r\delta\lambda^r\right] = 0.
\end{aligned}$$

Debido a que las variaciones de las posiciones δq_i, momentos δp^i y multiplicadores $\delta\lambda^r$ son consideradas como independientes unas de las otras, los tres integrandos tienen que ser cero separadamente

$$\begin{aligned}
\dot{p}^i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda^r\frac{\partial\phi_r}{\partial q_i}, && (2.2.6)\\
\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p^i} + \lambda^r\frac{\partial\phi_r}{\partial p^i}, && (2.2.7)\\
\phi_r &= 0. && (2.2.8)
\end{aligned}$$

Los primeros dos conjuntos de esas ecuaciones son las ecuaciones Hamiltonianas de movimiento y el tercer conjunto son sólo las ligaduras primarias.

Definiendo los corchetes de Poisson entre dos funciones del espacio de fases $F(p,q)$ y $G(p,q)$ como

$$\{F,G\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p^i} - \frac{\partial G}{\partial q_i}\frac{\partial F}{\partial p^i}, \qquad (2.2.9)$$

podemos escribir las ecuaciones Hamiltonianas de movimiento (2.2.6), (2.2.7) como

$$\begin{aligned}
\dot{p}^i &= \left[\{p^i,H\} + \lambda^r\{p^i,\phi_r\}\right]\Big|_{\Gamma_P}, && (2.2.10)\\
\dot{q}_i &= \left[\{q_i,H\} + \lambda^r\{q_i,\phi_r\}\right]\Big|_{\Gamma_P}. && (2.2.11)
\end{aligned}$$

Para una función general del espacio de fases las ecuaciones de movimiento quedan

$$\begin{aligned}
\dot{F} &= \left[\frac{\partial F}{\partial p^i}\frac{dp^i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt}\right]\Big|_{\Gamma_P} \\
&= \left[\frac{\partial F}{\partial p^i}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} - \lambda^r\frac{\partial\phi_r}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial F}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H}{\partial p^i} + \lambda^r\frac{\partial\phi_r}{\partial p^i}\right)\right]\Big|_{\Gamma_P} \\
&= \left[\{F,H\} + \lambda^r\{F,\phi_r\}\right]\Big|_{\Gamma_P}. \qquad (2.2.12)
\end{aligned}$$

Luego, podemos reemplazar el Hamiltoniano canónico (2.2.1) por el Hamiltoniano efectivo

$$\tilde{H} = H + \lambda^r\phi_r, \qquad (2.2.13)$$

al cual llamaremos Hamiltoniano total, nuestra teoría no puede distinguir entre H y $\tilde{H}$.

$\tilde{H}$ no es más que el Hamiltoniano canónico con las ligaduras acopladas mediante multiplicadores de Lagrange. Usando este Hamiltoniano las ecuaciones de movimiento toman su forma ordinaria similar al caso en ausencia de ligaduras:

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \left[\{F, \tilde{H}\} - \{F, \lambda^r\}\phi_r\right]\Big|_{\Gamma_P} \\ &\approx \{F, \tilde{H}\}. \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Aquí hemos utilizado el hecho de que las ligaduras se anulan en la subvariedad física, esto es indicado por el símbolo $\approx$ que significa igualdad débil, que es una igualdad en la variedad inducida por las ligaduras. Consecuentemente, deberíamos escribir las ligaduras (2.1.8) como $\phi_r \approx 0$.

2.3. Condiciones de consistencia y ligaduras secundarias

Para obtener resultados razonables se tiene que exigir que el sistema no abandone la subvariedad física en ningún momento, por lo que se requiere que las ligaduras primarias se preserven en el tiempo, es decir, $\dot{\phi}_r \approx 0$ [2, 7]. Esto da lugar a las condiciones de consistencia

$$\dot{\phi}_r = \{\phi_r, H\} + \lambda^{r'}\{\phi_r, \phi_{r'}\} \approx 0. \tag{2.3.1}$$

La ecuación (2.3.1) puede implicar nuevas relaciones entre los momentos y las posiciones independientes de las ligaduras primarias, estas son llamadas ligaduras secundarias. Las ligaduras secundarias se diferencian de las primarias en que estas últimas son simplemente consecuencias de la ecuación (2.1.7) que define las variables de momentum, mientras que para las ligaduras secundarias se tiene que hacer uso de las ecuaciones de movimiento. Otras posibilidades son que la ecuación (2.3.1) no de información nueva, o que se logren despejar algunos de los $\lambda^{r'}$ en términos de los momentos y de las posiciones. Si resultan S ligaduras secundarias $\chi_s \approx 0$ con $s = R+1, ..., R+S$, debemos imponer nuevas condiciones de consistencia

$$\dot{\chi}_s = \{\chi_s, H\} + \lambda^r\{\chi_s, \phi_r\} \approx 0. \tag{2.3.2}$$

A continuación, debemos comprobar nuevamente si (2.3.2) implica nuevas ligaduras o si sólo se pueden despejar los multiplicadores, y así sucesivamente. Después de que el proceso haya terminado, nos quedamos con un número de ligaduras secundarias, las cuales estarán denotadas por

$$\phi_k(p, q) \approx 0, \qquad k = R+1, ..., R+S, ..., R+K. \tag{2.3.3}$$

Donde K es el número total de ligaduras secundarias, entonces podemos añadir estas a las R ligaduras primarias y resumimos el conjunto completo como

$$\phi_a \approx 0, \qquad a = 1, ..., R + K = T. \tag{2.3.4}$$

Todas estas ligaduras juntas forman nuestra subvariedad física en el espacio de fases, simplemente la llamaremos Γ.

2.4. Clasificación de cantidades de primera y segunda clase

Siguiendo a Dirac[8], es posible distinguir dos tipos de funciones del espacio de fases. Ahora definimos una función $F(p, q)$ como una cantidad de primera clase si

$$\{F, \phi_a\} \approx 0, \qquad a = 1, ..., T. \tag{2.4.1}$$

Una función del espacio de fases que no es de primera clase es llamada de segunda clase. Así, $F(p, q)$ se define como de segunda clase si $\{F, \phi_a\} \not\approx 0$ para por lo menos un a [7]. Todas nuestras ligaduras pueden ahora ser divididas en dos conjuntos, uno que consiste de todas las ligaduras de primera clase linealmente independientes,

$$\gamma_n \approx 0, \qquad n = 1, ..., I, \tag{2.4.2}$$

y el otro de las restantes $M = T - I$ ligaduras de segunda clase

$$\xi_\alpha \approx 0, \qquad \alpha = 1, ..., M. \tag{2.4.3}$$

Tengamos en cuenta que ambos γ_n y ξ_α pueden incluir tanto ligaduras secundarias como primarias.

Dirac[8] probó que las ligaduras de segunda clase darán lugar a una matriz no singular $M \times M$ de los corchetes de Poisson, la cual escribiremos como

$$\mathcal{C}_{\alpha\beta} = \{\xi_\alpha, \xi_\beta\}. \tag{2.4.4}$$

Al calcular $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$, está claro que no se deben usar las ecuaciones de ligaduras hasta después de haber calculado los corchetes de Poisson. Dirac enunció y probó un teorema que establece que el determinante de la matríz $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$ no es cero ni siquiera débilmente. De esta manera el número de ligaduras de segunda clase (y por lo tanto la dimensión de la matríz) debe ser par. Ya que $\mathcal{C}_{\alpha\beta}$ es no singular, existe $\mathcal{C}^{\alpha\beta}$ tal que

$$\mathcal{C}_{\alpha\beta}\mathcal{C}^{\beta\nu} = \delta_\alpha{}^\nu. \tag{2.4.5}$$

2.5. El corchete de Dirac

Con lo visto en subsección anterior, ahora procedemos a construir de cualquier variable dinámica A una nueva variable A' cuyos corchetes de Poisson con todas las ligaduras de segunda clase se hacen cero[7](en esta subsección haremos todos los calculos sobre las ligaduras de segunda clase). Definimos

$$A' = A - \{A, \xi_\alpha\}\ \mathcal{C}^{\alpha\beta}\ \xi_\beta\ , \tag{2.5.1}$$

y en efecto se observa que

$$\begin{aligned} \{A', \xi_\nu\} &\approx \{A, \xi_\nu\} - \{A, \xi_\alpha\}\ \mathcal{C}^{\alpha\beta}\ \mathcal{C}_{\beta\nu} \\ &= \{A, \xi_\nu\} - \{A, \xi_\nu\} = 0. \end{aligned}$$

Hay que tener en cuenta que $\{A', \gamma_n\}$ no es necesariamente débilmente igual a cero.

Ahora simplemente postulamos que los corchetes de Poisson de dos cantidades A y B deben ser reemplazados por los corchetes de Poisson de sus variables primadas,

$$\{A, B\}\ \rightarrow\ \{A', B'\}. \tag{2.5.2}$$

Hay que tener en cuenta que aunque $A' \approx A$, $B' \approx B$, el corchete de Poisson $\{A', B'\}$ no es débilmente igual a $\{A, B\}$. Si definimos el corchete de Dirac como

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \xi_\alpha\}\ \mathcal{C}^{\alpha\beta}\ \{\xi_\beta, B\}, \tag{2.5.3}$$

entonces vemos que

$$\{A, B\}^* \approx \{A', B'\} \approx \{A', B\} \approx \{A, B'\}. \tag{2.5.4}$$

Si todos los corchetes de Poisson son ahora reemplazados por los corchetes de Dirac, la ecuación (2.5.4) nos dice que hemos elegido efectivamente tratar sólo con ligaduras de primera clase. Podemos establecer todas las ligaduras de segunda clase fuertemente a cero porque el corchete de Dirac de cualquier cantidad con una ligadura de segunda clase es cero:

$$\{A, \xi_\nu\}^* = \{A, \xi_\nu\} - \{A, \xi_\alpha\}\ \mathcal{C}^{\alpha\beta}\ \mathcal{C}_{\beta\nu} = 0. \tag{2.5.5}$$

De la ecuación (2.5.4) y la definición (2.5.1) de la variable primada, podemos ver que $\{A, \{B, C\}^*\}^* \approx \{A', \{B', C'\}\}$, entonces la identidad de Jacobi

$$\{A, \{B, C\}^*\}^* + \{C, \{A, B\}^*\}^* + \{B, \{C, A\}^*\}^* \approx 0\ , \tag{2.5.6}$$

es satisfecha débilmente por el corchete de Dirac. Además usando la definición (2.5.3) se puede mostrar que (2.5.6) es realmente una ecuación fuerte.

El corchete de Dirac presenta varias identidades algebraicas:

(I) $\{A,B\}^* = -\{B,A\}^*$,

(II) $\{c_1A+c_2B,C\}^* = c_1\{A,C\}^* + c_2\{B,C\}^*$,

(III) $\{c,A\}^* = 0, \qquad c = \text{const.}$

(IV) $\{AB,C\}^* = A\{B,C\}^* + \{A,C\}^*B.$

Estas son esencialmente las mismas que las del corchete de Poisson. La única pero crucial diferencia es que el corchete de Dirac no obedece a las relaciones de conmutación fundamentales, esta circunstancia no es un defecto sino una necesidad para la consistencia de la teoría cuántica para sistemas con ligaduras[6].

2.6. Generadores de las transformaciones de calibre

Vamos a estudiar las propiedades de la ecuación de movimiento que sólo contiene ligaduras de primera clase. Sin ligaduras de segunda clase las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$\dot{F} \approx \{F,H\} + \lambda^n\{F,\gamma_n\}. \tag{2.6.1}$$

Los multiplicadores λ^n en la ecuación de movimiento anterior son completamente indeterminados. Por lo tanto, podemos contar con funciones arbitrarias dependientes del tiempo en la solución general. Por supuesto, esta arbitrariedad no puede tener algún significado físico y tiene que haber una transformación que media entre las diferentes evoluciones temporales de la función del espacio de fases F.

Consideremos dos funciones del espacio de fases F_λ y $F_{\lambda'}$ con dos diferentes multiplicadores de Lagrange λ y λ' evolucionando desde el mismo valor inicial F_0. Expandiendo esas funciones para tiempos pequeños

$$F(t) \simeq F(0) + \frac{dF}{dt}\Big|_{t=0} t + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{dt^2}\Big|_{t=0} t^2 + \ldots\,, \tag{2.6.2}$$

e insertando las ecuaciones de movimiento (2.6.1), se obtiene hasta el primer orden en el tiempo

$$F(t) \simeq F_0 + (\{F_0,H\} + \eta^n\{F_0,\gamma_n\})\, t \ldots\,. \tag{2.6.3}$$

La diferencia entre las dos funciones es

$$F_\lambda - F_{\lambda'} \simeq (\lambda^n - \lambda'^n)\, t\{F_0,\gamma_n\}. \tag{2.6.4}$$

Para una evolución infinitesimal de tiempo δt la diferencia esta dada por

$$\delta F = \epsilon^n\{F,\gamma_n\}, \tag{2.6.5}$$

que representa la transformación de calibre requerida. Por supuesto que podemos esperar que no solamente la suma de todas las ligaduras de primera clase generen una transfomación de calibre, sino que cada ligadura de primera clase haga esto por sí misma. Por lo tanto, podemos escribir

$$\delta_\epsilon F = \epsilon\{F, \gamma_n\}. \tag{2.6.6}$$

En un caso especial, donde las funciones del espacio de fases sean justo las variables canónicas, tenemos

$$p'^i = p^i - \epsilon \frac{\partial \gamma_n}{\partial q_i}, \tag{2.6.7}$$

$$q'_i = q_i + \epsilon \frac{\partial \gamma_n}{\partial p^i}. \tag{2.6.8}$$

Aquí reconocemos inmediatamente que las transformaciones infinitesimales de calibre se asocian con transformaciones canónicas infinitesimales con las ligaduras de primera clase siendo las generadoras de estas[6].

2.7. Generalización del método de Dirac a teoría de campos

Hasta ahora solamente hemos estudiado como aplicar el método de Dirac a sistemas singulares con finitos grados de libertad, en este capítulo vamos a extender el método a teorías de campos[6, 9]. En teoría de campos estamos tratando con un número infinito de grados de libertad, por lo tanto la teoría desarrollada anteriormente no es aplicable sin ninguna modificación. La generalización ingenua es sencilla, las fórmulas que obtenemos son muy similares al caso de la mecánica de partículas y las reglas para pasar a un número infinito de grados de libertad son bastante evidentes. Sin embargo, debido a este proceso limitante surgen algunas peculiaridades sutiles.

Ahora el Lagrangiano es un funcional de los campos y sus derivadas con respecto al tiempo, es decir, un mapa que va desde un espacio de funciones a los números reales. Lo podemos denotar como

$$L(t) = L\left[\varphi_\mu(\boldsymbol{x}, t); \dot{\varphi}_\mu(\boldsymbol{x}, t)\right], \qquad \mu = 1, ..., N. \tag{2.7.1}$$

En lo que sigue consideraremos a teorías de campo locales en las cuales es posible escribir el Lagrangiano como una integral de volumen sobre la función de densidad $\mathcal{L}$[9]

$$L = \int d^3x \; \mathcal{L}\left(\varphi_\mu(\boldsymbol{x}, t); \nabla\varphi_\mu(\boldsymbol{x}, t); \dot{\varphi}_\mu(\boldsymbol{x}, t)\right). \tag{2.7.2}$$

La densidad Lagrangiana es una función dependiente de los campos y de sus derivadas tanto espaciales como temporales. Tenemos que enfatizar que en esta sección el indice μ solamente cuenta el número de campos, y no tiene el significado de un índice cuadrivectorial. Por lo tanto, no hace ninguna declaración acerca de las propiedades de transformación de los campos.

El funcional acción es entonces la integral sobre la densidad lagrangiana

$$\mathcal{S} = \int d^4x \; \mathcal{L}\left(\varphi_\mu(\boldsymbol{x},t); \nabla\varphi_\mu(\boldsymbol{x},t); \dot{\varphi}_\mu(\boldsymbol{x},t)\right). \tag{2.7.3}$$

Los momentos canónicos son ahora

$$\pi^\mu = \frac{\delta L}{\delta\dot{\varphi}_\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_\mu}. \tag{2.7.4}$$

Como en el caso Lagrangiano, el Hamiltoniano es un funcional que depende de los campos y de sus momentos conjugados

$$H(t) = H\left[\varphi_\mu(\boldsymbol{x},t); \pi^\mu(\boldsymbol{x},t)\right], \qquad \mu = 1, ..., N. \tag{2.7.5}$$

Este puede ser obtenido del Lagrangiano mediante la transformación de Legendre

$$H = \int d^3x \; \left(\pi^\mu\dot{\varphi}_\mu - \mathcal{L}\right)\Big|_{\pi^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_\mu}} = \int d^3x \; \mathcal{H}\left(\pi^\mu; \varphi_\mu; \nabla\pi^\mu; \nabla\varphi_\mu\right), \tag{2.7.6}$$

donde podemos interpretar la densidad Hamiltoniana como $\mathcal{H} = \left(\pi^\mu\dot{\varphi}_\mu - \mathcal{L}\right)\Big|_{\pi^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}_\mu}}$.

El corchete de Poisson de dos funcionales $F\left[\varphi_\mu, \pi^\mu\right]$ y $G\left[\varphi_\mu, \pi^\mu\right]$ está definido como

$$\left\{F\left(\boldsymbol{x}\right), G\left(\boldsymbol{y}\right)\right\} = \int d^3z \left(\frac{\delta F\left(\boldsymbol{x}\right)}{\delta\varphi_\mu\left(\boldsymbol{z}\right)}\frac{\delta G\left(\boldsymbol{y}\right)}{\delta\pi^\mu\left(\boldsymbol{z}\right)} - \frac{\delta G\left(\boldsymbol{y}\right)}{\delta\varphi_\mu\left(\boldsymbol{z}\right)}\frac{\delta F\left(\boldsymbol{x}\right)}{\delta\pi^\mu\left(\boldsymbol{z}\right)}\right). \tag{2.7.7}$$

Está sobreentendido que tanto el corchete de Poisson como el de Dirac son calculados a tiempos iguales, por lo que podemos obviar la dependencia temporal en los funcionales y campos por brevedad. Sin embargo, tenemos que mantener en mente que la dependencia con respecto al tiempo continúa presente. La notación $F\left(\boldsymbol{x}\right)$ significa que los campos, que son en algún modo las variables para los funcionales, dependen de $\boldsymbol{x}$.

Definimos los corchetes canónicos de Poisson como[7]

$$\left\{\varphi_\mu\left(\boldsymbol{x}\right), \pi^\nu\left(\boldsymbol{y}\right)\right\} = \delta_\mu{}^\nu\delta^3\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\right). \tag{2.7.8}$$

Usando (2.7.8), vemos que H genera la evolución temporal de las variables canónicas mediante las derivadas funcionales

$$\dot{\varphi}_\mu\left(\boldsymbol{x}\right) = \left\{\varphi_\mu\left(\boldsymbol{x}\right), H\left(\boldsymbol{y}\right)\right\} = \frac{\delta H}{\delta\dot{\pi}^\mu}, \tag{2.7.9}$$

$$\dot{\pi}^{\mu}(\boldsymbol{x}) = \{\pi^{\mu}(\boldsymbol{x}), H(\boldsymbol{y})\} = -\frac{\delta H}{\delta \dot{\varphi}_{\mu}}. \tag{2.7.10}$$

Así que las ecuaciones de movimiento pueden ser escritas como

$$\begin{aligned} \dot{F}[\varphi_{\mu}, \pi^{\mu}] &= \int d^3x \left(\frac{\delta F}{\delta \varphi_{\mu}} \dot{\varphi}_{\mu} + \frac{\delta F}{\delta \pi^{\mu}} \dot{\pi}^{\mu} \right) = \int d^3x \left(\frac{\delta F}{\delta \varphi_{\mu}} \frac{\delta H}{\delta \pi^{\mu}} - \frac{\delta H}{\delta \varphi_{\mu}} \frac{\delta F}{\delta \pi^{\mu}} \right) \\ &= \{F, H\}. \end{aligned}$$

A partir de ahora tomemos en cuenta las ligaduras. De nuevo tenemos que enfrentar el hecho de que las ligaduras ya no son relaciones algebraicas. En la transición a la teoría de campos las ligaduras se convierten en funcionales de los campos, de sus momentos canónicos conjugados y, adicionalmente, de los campos multiplicadores

$$\Phi(t) = \Phi[\phi_{\mu}, \pi^{\mu}, \lambda^{r}] = \int d^3x \ \lambda^{r}(\boldsymbol{x}, t) \, \phi_{r}(\boldsymbol{x}, t). \tag{2.7.11}$$

Las ligaduras con las cuales estamos tratando son ahora funciones de densidad. Esas densidades de ligaduras están acopladas al Hamiltoniano canónico vía los campos multiplicadores

$$H_P = H + \Phi[\phi_{\mu}, \pi^{\mu}, \lambda^{r}] = H + \int d^3x \ \lambda^{r}(\boldsymbol{x}, t) \, \phi_{r}(\boldsymbol{x}, t). \tag{2.7.12}$$

Las ecuaciones (2.7.9) y (2.7.10) con las densidades de ligaduras acopladas pueden ser obtenidas de la acción primaria

$$\mathcal{S} = \int d^4x \left(\pi^{\mu} \dot{\varphi}_{\mu} - \mathcal{H} - \lambda^{r} \phi_{r} \right). \tag{2.7.13}$$

Los resultados de las variaciones son

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_{\mu} = \frac{\delta H}{\delta \pi^{\mu}} + \frac{\delta \Phi[\phi_{\mu}, \pi^{\mu}, \lambda^{r}]}{\delta \pi^{\mu}} &= \{\varphi_{\mu}, H\} + \{\varphi_{\mu}, \Phi[\phi_{\mu}, \pi^{\mu}, \lambda^{r}]\} \\ &= \{\varphi_{\mu}, H\} + \int d^3y \ \lambda^{r}(\boldsymbol{y}, t) \{\varphi_{\mu}(\boldsymbol{x}), \phi_{r}(\boldsymbol{y})\}, \\ \dot{\pi}^{\mu} = -\frac{\delta H}{\delta \varphi_{\mu}} - \frac{\delta \Phi[\phi_{\mu}, \pi^{\mu}, \lambda^{r}]}{\delta \varphi_{\mu}} &= \{\pi^{\mu}, H\} + \{\pi^{\mu}, \Phi[\phi_{\mu}, \pi^{\mu}, \lambda^{r}]\} \\ &= \{\pi^{\mu}, H\} + \int d^3y \ \lambda^{r}(\boldsymbol{y}, t) \{\pi^{\mu}(\boldsymbol{x}), \phi_{r}(\boldsymbol{y})\}, \end{aligned}$$

para un funcional general $F[\varphi_{\mu}, \pi^{\mu}]$ del espacio de fases

$$\dot{F} = \{F(\boldsymbol{x}), H(\boldsymbol{y})\} + \int d^3y \ \lambda^{r}(\boldsymbol{y}, t) \{F(\boldsymbol{x}), \phi_{r}(\boldsymbol{y})\}. \tag{2.7.14}$$

El método de Dirac para identificar ligaduras secundarias, así como la clasificación a primera y segunda clase no cambiará durante la transición a la teoría de campos, de modo que las fórmulas resultantes son bastante similares. Por lo tanto, no anotaremos todos los resultados de forma explícita.

La discusión anterior sirve de guía para las reglas de transición a la teoría de campos:

(I) Las variables del espacio de fases y los multiplicadores de Lagrange pasan a ser campos dependientes de las coordenadas.

(II) Una función de las variables del espacio de fases pasa a ser un funcional de los campos y de sus momentos conjugados: $F(q_i, p^i) \to F[\varphi_\mu, \pi^\mu]$.

(III) Siempre que hay una suma sobre las variables canónicas o los multiplicadores, tiene que haber una integral de volumen tridimensional sobre la suma de los campos.

Con estas reglas de transición podemos ver inmediatamente cómo quedan las expresiones en la teoría de campos para las transformaciones generadas por las ligaduras de primera clase

$$\delta_\epsilon F = \{F, \Phi[\phi_\mu, \pi^\mu, \epsilon]\} = \int d^3y \; \epsilon(\boldsymbol{y}) \{F(\boldsymbol{x}), \phi(\boldsymbol{y})\} \,, \tag{2.7.15}$$

y la de los corchetes de Dirac entre dos funcionales

$$\{F(\boldsymbol{x}), G(\boldsymbol{y})\}^* = \{F(\boldsymbol{x}), G(\boldsymbol{y})\} - \int\int d^3x' d^3y' \{F(\boldsymbol{x}), \xi_s(\boldsymbol{x'})\} C^{ss'}(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}) \{\xi_{s'}(\boldsymbol{y'}), G(\boldsymbol{y})\}.$$

Vemos que el segundo término no es más que una multiplicación matricial para variables discretas y continuas. La matriz $\mathcal{C}^{ss'}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ es la inversa de

$$\mathcal{C}_{ss'}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \{\xi_s(\boldsymbol{x}), \xi_{s'}(\boldsymbol{y})\}, \tag{2.7.16}$$

donde la inversa esta definida por la relación integral

$$\int d^3z \; \mathcal{C}^{sk}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \mathcal{C}_{ks'}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) = \delta^s{}_{s'} \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \,. \tag{2.7.17}$$

Con lo anterior hemos terminado la generalización del método de Dirac a teorías con infinitos grados de libertad.

Capítulo 3

Ejemplos de aplicación del método de Dirac

En este capítulo aplicaremos el método de Dirac a la teoría de Proca, y además, estudiaremos la teoría autodual de espín 2 en (2+1) dimensiones[3, 4], donde hallaremos los corchetes de Dirac usando el método de la acción reducida.

3.1. Teoría de Proca

Acción de Proca:

$$\mathcal{S} = -\int d^4x \left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu\right] \tag{3.1.1}$$

Donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.
Separación en espacio-tiempo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}(F_{0\nu}F^{0\nu} + F_{i\nu}F^{i\nu}) - \frac{1}{2}m^2(A_0A^0 + A_iA^i) \\
&= -\frac{1}{4}(F_{00}F^{00} + F_{0i}F^{0i} + F_{i0}F^{i0} + F_{ij}F^{ij}) - \frac{1}{2}m^2(A_0A^0 + A_iA^i) \\
&= \frac{1}{4}(2F_{0i}F_{0i} - F_{ij}F_{ij} + 2m^2A_0A_0 - 2m^2A_iA_i)
\end{aligned}$$

Hallemos los momentos generalizados:

$$\begin{aligned}
\pi^i(\boldsymbol{x}) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 A_i(\boldsymbol{x}))} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_i(\boldsymbol{x}))} = F_{0i}(\boldsymbol{x}) = -E^i(\boldsymbol{x}) \\
&\Rightarrow\ \pi^i = \partial_0 A_i - \partial_i A_0\ \Rightarrow \boxed{\partial_0 A_i = \pi^i + \partial_i A_0} \\
\pi^0(\boldsymbol{x}) &= \frac{\delta L}{\delta(\partial_0 A_0(\boldsymbol{x}))} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0(\boldsymbol{x}))} = 0
\end{aligned}$$

De lo anterior vemos que $\pi^0 = 0$ es una ligadura primaria, ahora la vamos a escribir como $\phi_1 = \pi^0 \approx 0$.
Escribamos el Hamiltoniano:

$$H = \int d^3x \ \mathcal{H} \ , \text{con } \mathcal{H} = (\pi^0\partial_0 A_0 + \pi^i\partial_0 A_i - \mathcal{L}) = \pi^i\partial_0 A_i - \mathcal{L}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \pi^i(\pi^i + \partial_i A_0) - \frac{1}{2}\pi^i\pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} - \frac{1}{2}m^2 A_0 A_0 + \frac{1}{2}m^2 A_i A_i \\
&= \frac{1}{2}\pi^i\pi^i + \pi^i\partial_i A_0 + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} - \frac{1}{2}m^2 A_0 A_0 + \frac{1}{2}m^2 A_i A_i \\
&= \frac{1}{4}(2\pi^i\pi^i + 4\pi^i\partial_i A_0 + F_{ij}F_{ij} - 2m^2 A_0 A_0 + 2m^2 A_i A_i).
\end{aligned}$$

Entonces:

$$H = \frac{1}{4}\int d^3x(2\pi^i\pi^i + 4\pi^i\partial_i A_0 + F_{ij}F_{ij} - 2m^2 A_0 A_0 + 2m^2 A_i A_i). \tag{3.1.2}$$

Luego, el Hamiltoniano con las ligaduras acopladas es

$$\tilde{H} = \frac{1}{4}\int d^3x \left(2\pi^i\pi^i + 4\pi^i\partial_i A_0 + F_{ij}F_{ij} - 2m^2 A_0 A_0 + 2m^2 A_i A_i + \lambda \ \pi^0\right). \tag{3.1.3}$$

Definimos que:

$$\{\pi^\mu(\boldsymbol{x}), \pi^\nu(\boldsymbol{y})\} = 0 \ , \ \{A_\mu(\boldsymbol{x}), A_\nu(\boldsymbol{y})\} = 0 \ , \ \{A_\nu(\boldsymbol{x}), \pi^\mu(\boldsymbol{y})\} = \delta^\mu_\nu \ \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}).$$

Ahora pasemos a preservar la ligadura ϕ_1 en el tiempo:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_1 &= \dot{\pi}^0 = \{\pi^0(\boldsymbol{x}), \tilde{H}(\boldsymbol{y})\} \\
&= -\int d^3y \ \pi^i(\boldsymbol{y})\partial_i^{(y)}\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \int d^3y \ m^2 A_0(\boldsymbol{y})\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \\
&= \partial_i\pi^i(\boldsymbol{x}) + m^2 A_0(\boldsymbol{x}) = 0. \qquad (3.1.4)
\end{aligned}$$

De lo anterior obtenemos una ligadura secundaria

$$\boxed{\phi_2 = \partial_i\pi^i + m^2 A_0 \approx 0} \ . \tag{3.1.5}$$

Preservemos la ligadura secundaria en el tiempo:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_2 &= \{\partial_i\pi^i(\boldsymbol{x}) - m^2 A_0(\boldsymbol{x}), \tilde{H}(\boldsymbol{y})\} \\
&= -\frac{1}{2}\int d^3y \ F_{jk}(\boldsymbol{y})\partial_i^{(x)}(\delta^i_j\partial_j^{(y)} - \delta^i_k\partial_k^{(y)})\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - \int d^3y \ m^2 A_j(\boldsymbol{y})\delta^i{}_j\partial_i^{(x)}\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \\
&\quad + \int d^3y \ \lambda(\boldsymbol{y})\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \\
&= -\frac{1}{2}\int d^3y \left(\delta^i_k F_{jk}(\boldsymbol{y})\partial_i^{(x)}\partial_j^{(y)}\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - \delta^i{}_j F_{jk}(\boldsymbol{x})\partial_i^{(x)}\partial_k^{(y)}\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\right) + m^2\partial_i^{(x)}A_i(\boldsymbol{x}) + \lambda(\boldsymbol{x}) \\
&= -\frac{1}{2}\int d^3y \left(-F_{ji}(\boldsymbol{y})\partial_i^{(x)}\partial_j^{(x)}\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + F_{ik}(\boldsymbol{y})\partial_i^{(x)}\partial_k^{(x)}\delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\right) + m^2\partial_i^{(x)}A_i(\boldsymbol{x}) + \lambda(\boldsymbol{x}) \\
&= m^2\partial_i A_i(\boldsymbol{x}) + \lambda(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad (3.1.6)
\end{aligned}$$

De lo anterior logramos despejar el multiplicador, obteniendo $\lambda = -m^2\partial_i A_i$, finalizando así el proceso de la preservación de las ligaduras. Ahora, veamos de que tipo son las ligaduras:

$$\{\phi_1(\boldsymbol{x}), \phi_2(\boldsymbol{y})\} = \{\pi^0(\boldsymbol{x}), \partial_i^{(y)}\pi^i(\boldsymbol{y}) + m^2 A_0(\boldsymbol{y})\} = -m^2\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}),$$

las ligaduras son de segunda clase.

Luego, la matriz de Dirac nos da :

$$\mathcal{C}_{ss'}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -m^2\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ m^2\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1.7}$$

La inversa de la matríz de Dirac nos queda :

$$\mathcal{C}^{ss'}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{m^2} \\ & \\ \frac{-\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{m^2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1.8}$$

Calculemos los corchetes de Dirac, estos son de la siguiente forma :

$$\{A(\boldsymbol{x}), B(\boldsymbol{y})\}^* = \{A(\boldsymbol{x}), B(\boldsymbol{y})\} - \int d^3x'd^3y'\{A(\boldsymbol{x}), \chi_s(\boldsymbol{x'})\}\mathcal{C}^{ss'}\{\chi_{s'}(\boldsymbol{y'}), B(\boldsymbol{y})\}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\{A_\mu(\boldsymbol{x}), \pi^\nu(\boldsymbol{y})\}^* &= \delta^\nu{}_\mu\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \int d^3x'd^3y'\{A_\mu(\boldsymbol{x}), \phi_1(\boldsymbol{x'})\}\mathcal{C}^{12}\{\phi_2(\boldsymbol{y'}), \pi^\nu(\boldsymbol{y})\} + \\
&\quad - \int d^3x'd^3y'\{A_\mu(\boldsymbol{x}), \phi_2(\boldsymbol{x'})\}\mathcal{C}^{21}\{\phi_1(\boldsymbol{y'}), \pi^\nu(\boldsymbol{y})\} \\
&= \delta^\nu{}_\mu\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) + \\
&\quad - \int d^3x'd^3y'\delta^0{}_\mu\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x'})\left(\frac{\delta^3(\boldsymbol{x'}-\boldsymbol{y'})}{m^2}\right)(m^2\delta^\nu{}_0\delta^3(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y'})) \\
&= \delta^\nu{}_\mu\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - \delta^0{}_\mu\delta^\nu{}_0\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&= (\delta^\nu{}_\mu - \delta^0{}_\mu\delta^\nu{}_0)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

$$\{A_\mu(\boldsymbol{x}), A_\nu(\boldsymbol{y})\}^* = \frac{1}{m^2}\left(\delta^0{}_\mu\delta^i{}_\nu + \delta^0{}_\nu\delta^i{}_\mu\right)\partial_i\left(\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right), \qquad \{\pi^\mu(\boldsymbol{x}), \pi^\nu(\boldsymbol{y})\}^* = 0.$$

Como todas las ligaduras son de segunda clase, podemos igualar estas fuertemente a cero, por lo que la teoría quedaría descrita por el álgrebra de corchetes de Dirac obtenida anteriormente y por el siguiente Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{4}\int d^3x(2\pi^i\pi^i + 4\pi^i\partial_i A_0 + F_{ij}F_{ij} + 2m^2A_0A_0 + 2m^2A_iA_i). \tag{3.1.10}$$

3.2. Acción autodual de spin 2 en (2+1) dimensiones

En esta sección estudiaremos la acción autodual de espín 2 en (2+1) dimensiones[3, 4] haciendo uso del método de la acción reducida, buscamos llegar al álgebra de Poisson, que en este caso sería equivalente al álgebra en términos de los corchetes de Dirac que hubiésemos obtenido aplicando la formulación canónica. El estudio de esta teoría será importante puesto que esta guarda varias similitudes con la teoría alternativa para gravedad masiva linealizada en (3+1) dimensiones que estudiaremos más adelante.

Acción autodual:

$$S = \frac{m}{2}\int d^3x(\varepsilon^{\mu\nu\lambda}h_{\mu}{}^{\alpha}\partial_{\nu}h_{\lambda\alpha} - m(h_{\mu\nu}h^{\nu\mu} - h_{\mu}{}^{\mu}h_{\nu}{}^{\nu})) \tag{3.2.1}$$

Haciendo variaciones de la acción obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\partial_{\nu}h_{\lambda}{}^{\rho} + m\left(\eta^{\mu\rho}h - h^{\rho\mu}\right) = 0 \tag{3.2.2}$$

Separemos en espacio-tiempo los términos de la acción:

Para el primer término de la acción tenemos:

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda}h_{\mu}{}^{\alpha}\partial_{\nu}h_{\lambda\alpha} = -2\varepsilon_{ij}h_{00}\partial_i h_{j0} + 2\varepsilon_{ij}h_{0k}\partial_i h_{jk} - \varepsilon_{ij}h_{j0}\partial_0 h_{i0} + \varepsilon_{ij}h_{jk}\partial_0 h_{ik} \tag{3.2.3}$$

Hemos definido $\varepsilon^{0ij} = \varepsilon^{ij} = \varepsilon_{ij}$.
Para el segundo término tenemos:

$$h_{\mu\nu}h^{\nu\mu} - h_{\mu}{}^{\mu}h_{\nu}{}^{\nu} = 2h_{00}h_{ii} - 2h_{0i}h_{i0} + h_{ij}h_{ji} - h_{ii}h_{jj} \tag{3.2.4}$$

La acción nos queda :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = {} & \frac{m}{2}\int d^3x\,(-2h_{00}(\varepsilon_{ij}\partial_i h_{j0} + mh_{ii}) + 2h_{0k}(\varepsilon_{ij}\partial_i h_{jk} + mh_{k0}) + \\ & -\varepsilon_{ij}h_{j0}\partial_0 h_{i0} + \varepsilon_{ij}h_{jk}\partial_0 h_{ik} + +m\left(h_{ii}h_{jj} - h_{ij}h_{ji}\right)) \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Redefinamos los siguientes términos:

$$h_{00} = n \qquad\qquad h_{0i} = N_i$$
$$h_{i0} = M_i \qquad\qquad h_{ij} = H_{ij} + \varepsilon_{ij}V$$

Sustituyendo en los términos de $\mathcal{S}$ obtenemos:

$$\boxed{-2h_{00}(\varepsilon_{ij}\partial_i h_{j0} + mh_{ii}) = -2n(\varepsilon_{ij}\partial_i M_j + mH_{ii})}$$

$$\boxed{2h_{0k}(\varepsilon_{ij}\partial_i h_{jk} + mh_{k0}) = 2N_k(\varepsilon_{ij}\partial_i H_{jk} - \partial_k V + mM_k)}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ij}h_{j0}\partial_0 h_{i0} = \varepsilon_{ij}M_j\partial_0 M_i}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ij}h_{jk}\partial_0 h_{ik} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ik}H_{kj}\partial_0 H_{ij} + \frac{1}{2}\varepsilon_{jk}H_{ki}\partial_0 H_{ij} - 2\delta_{ij}V\partial_0 H_{ij}}$$

$$\boxed{m(h_{ii}h_{jj} - h_{ij}h_{ji}) = m(H_{ii}H_{jj} - H_{ij}H_{ij} + 2VV)}$$

Entonces la acción queda reescrita de la siguente manera :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} \;=\; & \frac{m}{2}\int d^3x(-2n(\varepsilon_{ij}\partial_i M_j + mH_{ii}) + 2N_k(\varepsilon_{ij}\partial_i H_{jk} - \partial_k V + mM_k) + \\
& +m(H_{ii}H_{jj} - H_{ij}H_{ij}) + +2\partial_0 H_{ij}(\frac{1}{4}(\varepsilon_{ik}H_{kj} + \varepsilon_{jk}H_{ki}) - \delta_{ij}V) + \\
& -\varepsilon_{ij}M_j\partial_0 M_i + 2mVV)
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Hagamos las siguientes sustituciones :

$$\boxed{N_i = \varepsilon_{ij}\partial_j N^T + \partial_i N^L}$$

$$\boxed{M_i = \varepsilon_{ij}\partial_j M^T + \partial_i M^L}$$

$$\boxed{H_{ij} = \varepsilon_{ik}\partial_k\varepsilon_{jl}\partial_l H^T + \partial_i\partial_j H^L + (\varepsilon_{ik}\partial_k\partial_j + \varepsilon_{jk}\partial_k\partial_i)H^{TL}}$$

Vemos que H_{ij} se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
H_{ij} &= (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{kj})\partial_k\partial_l H^T + \partial_i\partial_j H^L + (\varepsilon_{ik}\partial_k\partial_j + \varepsilon_{jk}\partial_k\partial_i)H^{TL} \\
&= \delta_{ij}\Delta H^T - \partial_i\partial_j H^T + \partial_i\partial_j H^L + (\varepsilon_{ik}\partial_k\partial_j + \varepsilon_{jk}\partial_k\partial_i)H^{TL} \\
&= \delta_{ij}\Delta H^T + \partial_i\partial_j(H^L - H^T) + (\varepsilon_{ik}\partial_k\partial_j + \varepsilon_{jk}\partial_k\partial_i)H^{TL}
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Veamos como quedan los términos de la acción cuando sustituimos N_i, M_i y H_{ij} en ella:

$$\begin{aligned}
2n(\varepsilon_{ij}\partial_i M_j + mH_{ii}) &= 2n(\varepsilon_{ij}\partial_i(\varepsilon_{jk}\partial_k M^T + \partial_j M^L) + m\Delta H^T + m\Delta H^L) \\
&= 2n(-\Delta M^T + m\Delta H^T + m\Delta H^L)
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Donde $\Delta = \partial_k\partial_k$.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}\partial_i H_{jk} - \partial_k V + mM_k &= \varepsilon_{ij}\partial_i(\delta_{jk}\Delta H^T + \partial_j\partial_k(H^L - H^T) + (\varepsilon_{jl}\partial_l\partial_k + \varepsilon_{kl}\partial_l\partial_j)H^{TL}) + \\
&\quad -\partial_k V + m\varepsilon_{kj}\partial_j M^T + m\partial_k M^L \\
&= \varepsilon_{ik}\partial_i\Delta H^T + (-\delta_{il}\partial_i\partial_l\partial_k + (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})\partial_i\partial_l\partial_j)H^{TL} + \\
&\quad -\partial_k V + m\varepsilon_{kj}\partial_j M^T + m\partial_k M^L \\
&= \varepsilon_{ik}\partial_i\Delta H^T - \partial_k\Delta H^{TL} - \partial_k V + m\varepsilon_{kj}\partial_j M^T + m\partial_k M^L
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{ik}H_{kj} &= \varepsilon_{ik}(\delta_{kj}\Delta H^T + \partial_k\partial_j(H^L - H^T) + (\varepsilon_{kl}\partial_l\partial_j + \varepsilon_{jl}\partial_l\partial_k)H^{TL}) \\
&= \varepsilon_{ij}\Delta H^T + \varepsilon_{ik}\partial_k\partial_j(H^L - H^T) + (-\delta_{il}\partial_l\partial_j + (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{kj})\partial_l\partial_k)H^{TL} \\
&= \varepsilon_{ij}\Delta H^T + \varepsilon_{ik}\partial_k\partial_j(H^L - H^T) + (-\partial_i\partial_j + \delta_{ij}\Delta - \partial_i\partial_j)H^{TL} \\
&= \varepsilon_{ij}\Delta H^T + \varepsilon_{ik}\partial_k\partial_j(H^L - H^T) + \delta_{ij}\Delta H^{TL} - 2\partial_i\partial_j H^{TL} \qquad (3.2.10)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{ij}H_{ij} &= \left(\delta_{ij}\Delta H^T + \partial_i\partial_j H^L - \partial_i\partial_j H^T + (\varepsilon_{ik}\partial_k\partial_j + \varepsilon_{jk}\partial_k\partial_i)\, H^{TL}\right)\left(\delta_{ij}\Delta H^T + \partial_i\partial_j H^L + \right.\\
&\quad \left. -\partial_i\partial_j H^T + (\varepsilon_{il}\partial_l\partial_j + \varepsilon_{jl}\partial_l\partial_i)\, H^{TL}\right) \\
&= \Delta H^L\Delta H^L + \Delta H^T\Delta H^T + 2\Delta H^{TL}\Delta H^{TL} + \text{términos de borde} \qquad (3.2.11)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{ii}H_{jj} &= (\Delta H^T + \Delta H^L)(\Delta H^T + \Delta H^L) \\
&= \Delta H^T\Delta H^T + \Delta H^L\Delta H^L + 2\Delta H^T\Delta H^L \qquad (3.2.12)
\end{aligned}
$$

Por lo que nos queda:

$$
H_{ii}H_{jj} - H_{ij}H_{ij} = 2(\Delta H^T\Delta H^L - \Delta H^{TL}\Delta H^{TL}) \qquad (3.2.13)
$$

Continuando,

$$
\frac{1}{4}\partial_0 H_{ij}(\varepsilon_{ik}H_{kj} + \varepsilon_{jk}H_{ki}) = \partial_0\Delta H^T\Delta H^{TL} - \partial_0\Delta H^L\Delta H^{TL} + \text{t.b} \qquad (3.2.14)
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}M_j\partial_0 M_i &= (-\partial_i M^T + \varepsilon_{ij}\partial_j M^L)(\varepsilon_{ik}\partial_0\partial_k M^T + \partial_0\partial_i M^L) \\
&= \Delta M^T\partial_0 M^L - \Delta M^L\partial_0 M^T \qquad (3.2.15)
\end{aligned}
$$

El último término que falta nos queda:

$$
\begin{aligned}
N_k(\varepsilon_{ij}\partial_i H_{jk} - \partial_k V + mM_k) &= (\varepsilon_{kl}\partial_l N^T + \partial_k N^L)(\varepsilon_{ik}\partial_i\Delta H^T - \partial_k\Delta H^{TL} - \partial_k V + \\
&\quad + m\varepsilon_{kj}\partial_j M^T + m\partial_k M^L) \\
&= \Delta N^T(\Delta H^T - mM^T) + \Delta N^L(\Delta H^{TL} + V - mM^L)
\end{aligned}
$$

Sustituyamos esos terminos en la acción y veamos como queda:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} &= \frac{m}{2}\int d^3x(-2n(-\Delta M^T + m\Delta H^T + m\Delta H^L) + 2\Delta N^T(\Delta H^T - mM^T) + \\
&\quad + \Delta N^L(\Delta H^{TL} + V - mM^L) + 2m\Delta H^T\Delta H^L - 2m\Delta H^{TL}\Delta H^{TL} + \\
&\quad + 2\partial_0\Delta H^T\Delta H^{TL} - 2\partial_0\Delta H^L\Delta H^{TL} - \partial_0\Delta H^T V - \partial_0\Delta H^L V + \\
&\quad - \Delta M^T\partial_0 M^L + \Delta M^L\partial_0 M^T + 2mVV) \qquad (3.2.16)
\end{aligned}
$$

Haciendo variaciones de la acción obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
-\Delta M^T + m\Delta H^T + m\Delta H^L &= 0\\
\Delta\Delta H^T - m\Delta M^T &= 0\\
\Delta\Delta H^{TL} + \Delta V - m\Delta M^L &= 0\\
\Delta n - m\Delta N^T - \partial_0\Delta M^L &= 0\\
m\Delta N^L - \partial_0\Delta M^T &= 0\\
m\Delta n - \Delta\Delta N^T - m\Delta\Delta H^L + \partial_0\Delta\Delta H^{TL} - \partial_0\Delta V &= 0\\
m\Delta n - m\Delta\Delta H^T - \partial_0\Delta\Delta H^{TL} - \partial_0\Delta V &= 0\\
\Delta\Delta N^L - 2m\Delta\Delta H^{TL} + \partial_0\Delta\Delta H^T - \partial_0\Delta\Delta H^L &= 0\\
\Delta N^L - \partial_0\Delta H^T - \partial_0\Delta H^L + 2mV &= 0
\end{aligned}$$

Ahora podemos despejar algunas de las variables:

$$\begin{aligned}
\Delta M^T &= \frac{\Delta\Delta H^T}{m}\\
\Delta N^T &= \frac{\Delta\Delta H^T}{m}\\
\Delta H^L &= \frac{\Delta\Delta H^T}{m^2} - \Delta H^T\\
\Delta M^L &= \frac{\Delta\Delta H^{TL}}{m}\\
\Delta N^L &= \frac{\Delta\Delta H^{TL}}{m}\\
V &= 0
\end{aligned}$$

Haciendo uso de las ecuaciones obtenidas al hacer variaciones de la acción y de las variables despejadas anteriormente obtenemos que:

$$\mathcal{S} = \int d^3x(\Delta\Delta H^T\Delta H^T - m^2\Delta H^T\Delta H^T - m^2\Delta H^{TL}\Delta H^{TL} + 2\partial_0\Delta H^T\Delta H^{TL})$$

Además, podemos ver que como $\Delta M^T = \Delta N^T$ y $\Delta M^L = \Delta N^L$, entonces, $M_i = N_i$.

Notemos que esta teoría la podemos identificar con una teoría masiva con un grado de libertad, definiendo las variables $Q = \sqrt{2}\Delta H^T$ y $P = \sqrt{2}mH^{TL}$, entonces la acción nos queda

$$\mathcal{S}_{red} = \int d^3x \left[P\dot{Q} - \frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}Q\left(\Delta - m^2\right)Q\right]. \qquad (3.2.17)$$

Los corchetes fundamentales entre Q y P los definimos como :

$$
\begin{aligned}
\{Q(\boldsymbol{x}), Q(\boldsymbol{y})\} &= 0 \\
\{P(\boldsymbol{x}), P(\boldsymbol{y})\} &= 0 \\
\{Q(\boldsymbol{x}), P(\boldsymbol{y})\} &= \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

Reescribamos h_{i0} y h_{ij} en términos de Q y P :

$$h_{i0} = \frac{\sqrt{2}}{2m}\left(\varepsilon_{ij}\partial_j Q + \frac{1}{m}\partial_i P\right)$$

$$h_{ij} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\delta_{ij} + \frac{1}{m^2}\partial_i\partial_j + 2\frac{\partial_i\partial_j}{(-\Delta)}\right)Q - \frac{\sqrt{2}}{2m}\left(\varepsilon_{ik}\frac{\partial_k\partial_j}{(-\Delta)} + \varepsilon_{jk}\frac{\partial_k\partial_i}{(-\Delta)}\right)P$$

De la ecuación de movimiento (3.3.2) obtenemos que $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ y ${h_\mu}^\mu = 0$, de esto logramos ver nuevamente que $h_{i0} = h_{0i}$ y que $h_{00} = h_{ii}$, entonces :

$$h_{00} = \frac{\sqrt{2}}{2m^2}\Delta Q$$

Hallemos el álgebra de Poisson entre los campos :

$$
\begin{aligned}
\{h_{00}, h_{00}\} &= 0 \\
\{h_{00}, h_{0k}\} &= \frac{\Delta}{2m^4}\partial_k\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
\{h_{00}, h_{kl}\} &= \frac{1}{2m}\left(\varepsilon_{nk}p^{(m)}_{nl} + \varepsilon_{nl}p^{(m)}_{nk}\right)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
\{h_{0i}, h_{0k}\} &= -\frac{1}{2m^3}\Delta\varepsilon_{ik}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
\{h_{01}, h_{kl}\} &= -\frac{1}{2m^2}\left(p^{(m)}_{ik}\partial_l + p^{(m)}_{il}\partial_k - p^{(m)}_{kl}\partial_i\right)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
\{h_{ij}, h_{kl}\} &= \frac{1}{2m}\left(\varepsilon_{ik}p^{(m)}_{jl} + \varepsilon_{jl}p^{(m)}_{ik}\right)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

Donde, $p^{(m)}_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial_i\partial_j}{m^2}$, es el proyector transversal en la capa $\Delta = m^2$, y $\Delta = \partial_k\partial_k$. Los corchetes obtenidos anteriormente son equivalentes a los corchetes de Dirac que se obtendrían aplicando la formulación canónica, hecho que está sustentado por un teorema[10] que garantiza la igualdad entre los corchetes de Dirac y los de Poisson calculados con las variables reducidas.

Capítulo 4

Método de Dirac para la acción de Morand y Solodukhin

4.1. Estudio de la cinemática de la acción de Morand y Soludokhin en un espacio-tiempo plano

En esta sección estudiaremos las ecuaciones de movimiento derivadas de la acción de Morand y Solodukhin[1] para hallar el número de grados de libertad de la teoría. Esta acción es una generalización a (3+1) dimensiones de la acción autodual (3.2.1) estudiada en la sección anterior, pero en este caso tenemos dos campos independientes $h_{\mu\nu}$ y $B_{\alpha\beta,\sigma}$, esto es necesario para cuando queremos generalizar la teoría autodual a altas dimensiones. En realidad, sólo en tres dimensiones, el campo B tiene dos índices y se puede identificar con el tensor $h_{\mu\nu}$ de modo que en este caso tenemos una teoría autodual[1].

Acción de Morand y Solodukhin:

$$\mathcal{S}\left[h,B\right]=\int d^4x\left[-\frac{m_1}{2}(h_{\mu\nu}h^{\nu\mu}-h_{\mu}{}^{\mu}h_{\nu}{}^{\nu})-\frac{m_2}{2}\left(B_{\alpha\beta,\sigma}B^{\alpha\beta,\sigma}-2B^{\alpha}{}_{\beta,\alpha}B^{\sigma\beta}{}_{,\sigma}\right)+B_{\alpha\beta,}{}^{\mu}\partial_{\rho}h_{\mu\sigma}\varepsilon^{\sigma\rho\alpha\beta}\right],$$

$$B_{\alpha\beta,\mu}=-B_{\beta\alpha,\mu}.$$

Hagamos variaciones de la acción:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S} &= \int d^4x\ \left[-\frac{m_1}{2}\left(\delta h_{\mu\nu}h^{\nu\mu}+h_{\mu\nu}\delta h^{\nu\mu}-\eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\delta h_{\alpha\beta}-\eta^{\mu\nu}\delta h_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}\right)-\frac{m_2}{2}\left(\delta B_{\alpha\beta,\sigma}B^{\alpha\beta,\sigma}+\right.\right.\\ &\quad \left.\left.+B_{\alpha\beta,\sigma}\delta B^{\alpha\beta,\sigma}-2\delta B^{\alpha}{}_{\beta,\alpha}B^{\sigma\beta}{}_{,\sigma}-2B^{\alpha}{}_{\beta,\alpha}\delta B^{\sigma\beta}{}_{,\sigma}\right)+\delta B_{\alpha\beta,}{}^{\mu}\partial_{\rho}h_{\mu\sigma}\varepsilon^{\sigma\rho\alpha\beta}+B_{\alpha\beta,}{}^{\mu}\partial_{\rho}\delta h_{\mu\sigma}\varepsilon^{\sigma\rho\alpha\beta}\right]\\ &= \int d^4x\ \left[\left(-m_1\left(h^{\nu\mu}-\eta^{\mu\nu}h\right)-\varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta}\partial_{\rho}B_{\alpha\beta,}{}^{\mu}\right)\delta h_{\mu\nu}+\left(-m_2\left(B^{\alpha\beta,\sigma}-\eta^{\alpha\sigma}B^{\gamma\beta}{}_{,\gamma}+\eta^{\beta\sigma}B^{\gamma\alpha}{}_{,\gamma}\right)+\right.\right.\\ &\quad \left.\left.+\partial_{\rho}h^{\sigma}{}_{\nu}\varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta}\right)\delta B_{\alpha\beta,\sigma}\right].\end{aligned}$$

Entonces nos queda que:

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta h_{\mu\nu}} = 0 \;\rightarrow\; m_1\left(h^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu} h\right) + \varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta}\partial_\rho B_{\alpha\beta,}{}^{\mu} = 0, \tag{4.1.1}$$

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta B_{\alpha\beta,\sigma}} = 0 \;\rightarrow\; m_2\left(B^{\alpha\beta,\sigma} - \eta^{\alpha\sigma} B^{\gamma\beta}{}_{,\gamma} + \eta^{\beta\sigma} B^{\gamma\alpha}{}_{,\gamma}\right) - \varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta}\partial_\rho h^{\sigma}{}_{\nu} = 0. \tag{4.1.2}$$

Las ecuaciones anteriores son similares a la ecuación (3.2.2) obtenida para la acción autodual, y demuestran cierta dualidad entre los campos $h_{\mu\nu}$ y $B_{\alpha\beta,\sigma}$[1].

Tomemos ∂_ν de (4.1.1).

$$\boxed{m_1\left(\partial_\nu h^{\nu\mu} - \partial^\mu h\right) = 0}\,, \tag{4.1.3}$$

$$\rightarrow\; \eta^{\mu\alpha}\partial_\nu h^{\nu}{}_{\alpha} = \partial^\mu h,\; \boxed{\partial_\nu h^{\nu}{}_{\beta} = \partial_\beta h}\,.$$

Luego $\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\theta} \times$ (4.1.2) nos queda :

$$m_2\left(\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\theta} B^{\alpha\beta,\sigma} - \eta^{\alpha\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\theta} B^{\gamma\beta}{}_{,\gamma} + \eta^{\beta\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\theta} B^{\gamma\alpha}{}_{,\gamma}\right) - \varepsilon_{\alpha\beta\sigma\theta}\varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta}\partial_\rho h^{\sigma}{}_{\nu} = 0,$$

$$m_2\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\theta} B^{\alpha\beta,\sigma} - \left(-2\delta^{\nu\rho}_{\sigma\theta}\right)\partial_\rho h\sigma_\nu = 0 \;\rightarrow\; m_2\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\theta} B^{\alpha\beta,\sigma} + 2\left(\delta^{\nu}_{\sigma}\delta^{\rho}_{\theta} - \delta^{\nu}_{\theta}\delta^{\rho}_{\sigma}\right)\partial_\rho h^{\sigma}{}_{\nu} = 0,$$

$$\boxed{m_2\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\theta} B^{\alpha\beta,\sigma} + 2\left(\partial_\theta h - \partial_\sigma h^{\sigma}{}_{\theta}\right) = 0}\,. \tag{4.1.4}$$

Usando (4.1.3) obtenemos que :

$$\boxed{\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\theta} B^{\alpha\beta,\sigma} = 0}\,. \tag{4.1.5}$$

Tomemos la traza de (4.1.1) :

$$m_1\left(h - 4h\right) + \varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta}\partial_\rho B_{\alpha\beta,\nu} = 0,$$

Usando (4.1.5) nos queda que : $\boxed{h = 0}$.

Entonces con (4.1.3) obtenemos que : $\boxed{\partial_\nu h^{\nu\mu} = 0}$.

Tomando $\varepsilon_{\gamma\sigma\nu\mu} \times$ (4.1.1) resulta :

$$m_1\varepsilon_{\gamma\sigma\nu\mu} h^{\mu\nu} + \varepsilon_{\gamma\sigma\nu\mu}\varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta}\partial_\rho B_{\alpha\beta,}{}^{\mu} = 0,$$

$$m_1\varepsilon_{\gamma\sigma\nu\mu} h^{\mu\nu} - \delta^{\rho\alpha\beta}_{\gamma\sigma\mu}\partial_\rho B_{\alpha\beta,}{}^{\mu} = 0,$$

$$m_1\varepsilon_{\gamma\sigma\nu\mu} h^{\mu\nu} - \left(\delta^{\rho}_{\gamma}\delta^{\alpha}_{\sigma}\delta^{\beta}_{\mu} + \delta^{\beta}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\sigma}\delta^{\alpha}_{\mu} + \delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\beta}_{\sigma}\delta^{\rho}_{\mu} - \delta^{\beta}_{\gamma}\delta^{\alpha}_{\sigma}\delta^{\rho}_{\mu} - \delta^{\rho}_{\gamma}\delta^{\beta}_{\sigma}\delta^{\alpha}_{\mu} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\rho}_{\sigma}\delta^{\beta}_{\mu}\right)\partial_\rho B_{\alpha\beta,}{}^{\mu} = 0,$$

$$m_1\varepsilon_{\gamma\sigma\nu\mu} h^{\mu\nu} - \left(\partial_\gamma B_{\sigma\mu,}{}^{\mu} + \partial_\sigma B_{\mu\gamma,}{}^{\mu} + \partial_\mu B_{\gamma\sigma,}{}^{\mu} - \partial_\mu B_{\sigma\gamma,}{}^{\mu} - \partial_\gamma B_{\mu\sigma,}{}^{\mu} - \partial_\sigma B_{\gamma\mu,}{}^{\mu}\right) = 0,$$

$$\boxed{m_1\varepsilon_{\gamma\sigma\nu\mu} h^{\mu\nu} - 2\left(\partial_\gamma B_{\sigma\mu,}{}^{\mu} + \partial_\sigma B_{\mu\gamma,}{}^{\mu} + \partial_\mu B_{\gamma\sigma,}{}^{\mu}\right) = 0}\,.$$

Y si tomamos ∂_σ de (4.1.2) nos queda:

$$m_2\left(\partial_\sigma B^{\alpha\beta,\sigma} - \partial^\alpha B^{\gamma\beta}{}_{,\gamma} + \partial^\beta B^{\gamma\alpha}{}_{,\gamma}\right) - \varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta}\partial_\sigma\partial_\rho h^\sigma{}_\nu = 0,$$
$$m_2\left(\partial_\sigma B^{\alpha\beta,\sigma} - \partial^\alpha B^{\gamma\beta}{}_{,\gamma} + \partial^\beta B^{\gamma\alpha}{}_{,\gamma}\right) = 0,$$
$$\rightarrow \boxed{m_2\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\left(\partial_\sigma B_{\mu\nu,}{}^\sigma - \partial_\mu B_{\gamma\nu,}{}^\gamma + \partial_\nu B_{\gamma\mu,}{}^\gamma\right) = 0}\,. \tag{4.1.6}$$

De lo anterior se encuentra entonces: $\boxed{\varepsilon_{\gamma\sigma\nu\mu}h^{\mu\nu} = 0} \Rightarrow \boxed{h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}}$.

Calculemos ahora $\eta_{\alpha\sigma} \times$ (4.1.2) :

$$m_2\left(B^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} - 4B^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} + B^{\alpha\beta}{}_{,\alpha}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{B^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} = 0}\,,$$

sustituyendo esto en (4.1.6) obtenemos: $\boxed{\partial_\sigma B^{\mu\nu,\sigma} = 0}$.

Tomemos ahora ∂_α en (4.1.2): $m_2\left(\partial_\alpha B^{\alpha\beta,\sigma} - \partial^\sigma B^{\gamma\beta}{}_{,\gamma} + \eta^{\beta\sigma}\partial_\alpha B^{\gamma\alpha}{}_{,\gamma}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\partial_\alpha B^{\alpha\beta,\sigma} = 0}$.

Entonces, tememos que: $\boxed{h = 0}$, $\boxed{\partial_\nu h^{\nu\mu} = 0}$, $\boxed{h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}}$, $\boxed{B^{\gamma\beta}{}_{,\gamma} = 0}$, $\boxed{\partial_\sigma B^{\alpha\beta,\sigma} = 0}$, $\boxed{\partial_\alpha B^{\alpha\beta,\sigma} = 0}$,

Vemos que $h_{\mu\nu}$ es un tensor simétrico, transverso y sin trasa. Este tensor tiene 5 componentes independientes, el cual es el número de grados de libertad de una partícula con espín 2. El tensor $B_{\mu\nu,\alpha}$ en principio tiene 24 componentes, pero las condiciones sobre el hacen que sólo tengamos 5 componentes independientes[1].

Ahora veamos como nos quedan las ecuaciones (4.1.1) y (4.1.2):

$$m_1 h^{\mu\nu} + \varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta}\partial_\rho B_{\alpha\beta,}{}^\mu = 0, \tag{4.1.7}$$

$$m_2 B^{\alpha\beta,\sigma} - \varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta}\partial_\rho h^\sigma{}_\nu = 0. \tag{4.1.8}$$

De las ecuaciones (4.1.7) y (4.1.8) podemos hallar como expresar $h_{\mu\nu}$ en términos de $B_{\alpha\beta,\sigma}$ y viceversa :

$$\boxed{h_{\mu\nu} = -\frac{1}{m_1}\varepsilon_\mu{}^{\rho\alpha\beta}\partial_\rho B_{\alpha\beta,\nu}}\,, \tag{4.1.9}$$

$$\boxed{B_{\alpha\beta,\sigma} = \frac{1}{m_2}\varepsilon^\nu{}_{\rho\alpha\beta}\partial^\rho h_{\sigma\nu}}\,. \tag{4.1.10}$$

Sustituyamos (4.1.9) en (4.1.8) y veamos que nos queda :

$$
\begin{aligned}
& B^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} + \frac{1}{m_1 m_2}\varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta}\varepsilon_{\sigma\theta\lambda\gamma}\partial_\rho\partial^\theta B^{\lambda\gamma}{}_{,\nu} = 0 \ \Rightarrow \ B^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} - \frac{1}{m_1 m_2}\delta^{\nu\rho\alpha\beta}_{\sigma\theta\lambda\gamma}\partial_\rho\partial^\theta B^{\lambda\gamma}{}_{,\nu} = 0 \\
& \Rightarrow \ B^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} - \frac{1}{m_1 m_2}\Big(\delta^\nu_\sigma\delta^\rho_\theta\delta^\alpha_\lambda\delta^\beta_\gamma - \delta^\nu_\sigma\delta^\rho_\theta\delta^\beta_\lambda\delta^\alpha_\gamma + \delta^\nu_\sigma\delta^\beta_\theta\delta^\rho_\lambda\delta^\alpha_\gamma - \delta^\nu_\sigma\delta^\beta_\theta\delta^\alpha_\lambda\delta^\rho_\gamma + \delta^\nu_\sigma\delta^\alpha_\theta\delta^\beta_\lambda\delta^\rho_\gamma - \delta^\nu_\sigma\delta^\alpha_\theta\delta^\rho_\lambda\delta^\beta_\gamma + \\
& -\delta^\beta_\sigma\delta^\nu_\theta\delta^\rho_\lambda\delta^\alpha_\gamma + \delta^\beta_\sigma\delta^\nu_\theta\delta^\alpha_\lambda\delta^\rho_\gamma - \delta^\beta_\sigma\delta^\alpha_\theta\delta^\nu_\lambda\delta^\rho_\gamma + \delta^\beta_\sigma\delta^\alpha_\theta\delta^\rho_\lambda\delta^\nu_\gamma - \delta^\beta_\sigma\delta^\rho_\theta\delta^\alpha_\lambda\delta^\nu_\gamma + \delta^\beta_\sigma\delta^\rho_\theta\delta^\nu_\lambda\delta^\alpha_\gamma + \delta^\alpha_\sigma\delta^\beta_\theta\delta^\nu_\lambda\delta^\rho_\gamma - \delta^\alpha_\sigma\delta^\beta_\theta\delta^\rho_\lambda\delta^\nu_\gamma + \\
& +\delta^\alpha_\sigma\delta^\rho_\theta\delta^\beta_\lambda\delta^\nu_\gamma - \delta^\alpha_\sigma\delta^\rho_\theta\delta^\nu_\lambda\delta^\beta_\gamma + \delta^\alpha_\sigma\delta^\nu_\theta\delta^\rho_\lambda\delta^\beta_\gamma - \delta^\alpha_\sigma\delta^\nu_\theta\delta^\beta_\lambda\delta^\rho_\gamma - \delta^\rho_\sigma\delta^\alpha_\theta\delta^\beta_\lambda\delta^\nu_\gamma + \delta^\rho_\sigma\delta^\alpha_\theta\delta^\nu_\lambda\delta^\beta_\gamma - \delta^\rho_\sigma\delta^\nu_\theta\delta^\alpha_\lambda\delta^\beta_\gamma + \delta^\rho_\sigma\delta^\nu_\theta\delta^\beta_\lambda\delta^\alpha_\gamma + \\
& -\delta^\rho_\sigma\delta^\beta_\theta\delta^\nu_\lambda\delta^\alpha_\gamma + \delta^\rho_\sigma\delta^\beta_\theta\delta^\alpha_\lambda\delta^\nu_\gamma\Big)\,\partial_\rho\partial^\theta B^{\lambda\gamma}{}_{,\nu} = 0 \\
& \Rightarrow \ \boxed{B^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} - \frac{2}{m_1 m_2}\partial^\mu\partial_\mu B^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} = 0}\ . \qquad (4.1.11)
\end{aligned}
$$

Sustituyamos (4.1.10) en (4.1.7) :

$$
\begin{aligned}
& h^{\mu\nu} + \frac{1}{m_1 m_2}\varepsilon^{\mu\rho\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\theta\alpha\beta}\partial_\rho\partial^\theta h^{\nu\gamma} = 0 \\
& \Rightarrow \ h^{\mu\nu} - \frac{2}{m_1 m_2}\delta^{\mu\rho}_{\gamma\theta}\partial_\rho\partial^\theta h^{\nu\gamma} = 0 \\
& \Rightarrow \ h^{\mu\nu} - \frac{2}{m_1 m_2}\left(\delta^\mu_\gamma\delta^\rho_\theta - \delta^\rho_\gamma\delta^\mu_\theta\right)\partial_\rho\partial^\theta h^{\nu\gamma} = 0 \\
& \Rightarrow \ h^{\mu\nu} - \frac{2}{m_1 m_2}\partial^\theta\partial_\theta h^{\nu\mu} + \frac{2}{m_1 m_2}\partial_\rho\partial^\mu h^{\nu\rho} = 0 \\
& \Rightarrow \ \boxed{h^{\mu\nu} - \frac{2}{m_1 m_2}\partial^\theta\partial_\theta h^{\mu\nu} = 0}\ . \qquad (4.1.12)
\end{aligned}
$$

Quedándonos así :

$$
\left(\partial^\theta\partial_\theta - m^2\right)B^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} = 0, \qquad \left(\partial^\theta\partial_\theta - m^2\right)h_{\mu\nu} = 0.
$$

Donde $m^2 = \frac{m_1 m_2}{2}$.

Entonces obtenemos dos ecuaciones tipo Klein-Gordon para los campos $h_{\mu\nu}$ y $B_{\alpha\beta,\sigma}$.

4.2. Formulación canónica de la acción de Morand y Solodukhin

En esta sección haremos la formulación canónica de la acción estudiada en la parte anterior.

Comencemos por hacer la separación en espacio-tiempo de los términos de la acción de Morand y Solodukhin:

$$
h_{\mu\nu}h^{\nu\mu} - h^\mu{}_\mu h^\nu{}_\nu = 2h_{ii}h_{00} + h_{ij}h_{ji} - 2h_{0i}h_{i0} - h_{ii}h_{jj}\ , \qquad (4.2.1)
$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\sigma\rho\alpha\beta}B_{\alpha\beta,}{}^{\mu}\partial_\rho h_{\mu\sigma} &= \varepsilon^{ijk}\left(-B_{jk,0}\partial_i h_{00}+B_{jk,l}\partial_i h_{l0}+B_{jk,0}\partial_0 h_{0i}-B_{jk,l}\partial_0 h_{li}+\right.\\ &\quad \left.-2B_{0k,0}\partial_j h_{0i}+2B_{0k,l}\partial_j h_{li}\right), \end{aligned}\tag{4.2.2}$$

$$\begin{aligned}B_{\alpha\beta,\sigma}B^{\alpha\beta,\sigma}-2B^{\alpha}{}_{\beta,\alpha}B^{\sigma\beta}{}_{,\sigma} &= -2B_{0i,j}B_{0i,j}-B_{ij,0}B_{ij,0}+B_{ij,k}B_{ij,k}+4B_{0i,0}B_{ji,j}+\\ &\quad +2B_{0i,i}B_{0j,j}-2B_{ik,i}B_{jk,j}.\end{aligned}\tag{4.2.3}$$

Hemos definido $\varepsilon^{0ijk}=\varepsilon^{ijk}=\varepsilon_{ijk}$.

Entonces la acción nos queda:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = \int d^4x \Big[& h_{00}\left(-m_1 h_{ii}+\varepsilon^{ijk}\partial_i B_{jk,0}\right)-h_{l0}\left(-m_1 h_{0l}+\varepsilon^{ijk}\partial_i B_{jk,l}\right)+B_{0i,0}\left(-2m_2 B_{ji,j}+\right.\\ & \left.+2\varepsilon^{ijk}\partial_j h_{0k}\right)+B_{0i,j}\left(m_2 B_{0i,j}-m_2\delta_{ij}B_{0k,k}-2\varepsilon^{ikl}\partial_k h_{jl}\right)-\frac{m_1}{2}\left(h_{ij}h_{ji}-h_{ii}h_{jj}\right)+\\ & -\frac{m_2}{2}\left(B_{ij,k}B_{ijk}-B_{ij,0}B_{ij,0}-2B_{ik,i}B_{jk,j}\right)+\varepsilon^{ijk}B_{ij,0}\partial_0 h_{0k}-\varepsilon^{ijk}B_{ij,l}\partial_0 h_{lk}\Big].\end{aligned}\tag{4.2.4}$$

Definamos lo siguiente: $B_{0i,0}\equiv A_i$, $B_{0i,j}\equiv A_{ij}$, $B_{ij,0}\equiv\varepsilon_{ijk}W_k$, $B_{ij,l}\equiv\varepsilon_{ijk}W_{kl}$, $W_k=\frac{1}{2}\varepsilon_{kij}B_{ij,0}$, $W_{kl}=\frac{1}{2}\varepsilon_{kij}B_{ij,l}$

Veamos como quedan los términos de la acción cuando de introducen las definiciones anteriores:

$$\varepsilon^{ijk}\partial_i B_{jk,0}=\varepsilon^{ijk}\partial_i\left(\varepsilon_{jkl}W_l\right)=\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{ljk}\partial_i W_j=2\delta^i{}_l\partial_i W_l=2\partial_i W_i\ ,$$

$$\boxed{\varepsilon^{ijk}\partial_i B_{jk,0}=2\partial_i W_i}\ ,\tag{4.2.5}$$

$$\varepsilon^{ijk}\partial_i B_{jk,l}=\varepsilon^{ijk}\partial_i\left(\varepsilon_{jkn}W_{nl}\right)=\varepsilon^{ijk}\varepsilon_{jkn}\partial_i W_{nl}=2\partial_i W_{il}\ ,$$

$$\boxed{\varepsilon^{ijk}\partial_i B_{jk,l}=2\partial_i W_{il}}\ ,\tag{4.2.6}$$

$$B_{ij,k}B_{ij,k}=\left(\varepsilon_{ijn}W_{nk}\right)\left(\varepsilon_{jkm}W_{mk}\right)=2W_{nk}W_{nk}\ ,$$

$$\boxed{B_{ij,k}B_{ij,k}=2W_{ij}W_{ij}}\ ,\tag{4.2.7}$$

$$\begin{aligned}&B_{ik,i}B_{jk,j}=\left(\varepsilon_{ikn}W_{ni}\right)\left(\varepsilon_{jkm}W_{mj}\right)=\varepsilon_{ikn}\varepsilon_{jkm}W_{ni}W_{mj}=\left(\delta^i{}_j\delta^n{}_m-\delta^n{}_j\delta^i{}_m\right)W_{ni}W_{mj}\\ &=W_{ni}W_{ni}-W_{ni}W_{in}=W_{ni}\left(W_{ni}-W_{in}\right)\ ,\end{aligned}$$

$$\boxed{B_{ik,i}B_{jk,j} = W_{ni}\left(W_{ni} - W_{in}\right)} \ , \tag{4.2.8}$$

$$B_{ij,0}B_{ij,0} = \left(\varepsilon_{ijk}W_k\right)\left(\varepsilon_{ijl}W_l\right) = 2W_kW_k \ ,$$

$$\boxed{B_{ij,0}B_{ij,0} = 2W_kW_k} \ , \tag{4.2.9}$$

$$\varepsilon^{ijk}B_{ij,0}\partial_0 h_{0k} = \varepsilon^{ijk}\left(\varepsilon_{ijl}W_l\right)\partial_0 h_{0k} = 2W_k\partial_0 h_{0k} \ ,$$

$$\boxed{\varepsilon^{ijk}B_{ij,0}\partial_0 h_{0k} = 2W_k\partial_0 h_{0k}} \ , \tag{4.2.10}$$

$$\varepsilon^{ijk}B_{ij,l}\partial_0 h_{lk} = \varepsilon^{ijk}\left(\varepsilon_{ijn}W_{nl}\right)\partial_0 h_{lk} = 2W_{kl}\partial_0 h_{lk} \ ,$$

$$\boxed{\varepsilon^{ijk}B_{ij,l}\partial_0 h_{lk} = 2W_{kl}\partial_0 h_{lk}} \ . \tag{4.2.11}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = \int d^4x \, [& h_{00}\left(-m_1 h_{ii} + 2\partial_i W_i\right) - h_{l0}\left(-m_1 h_{0l} + 2\partial_i Wil\right) + 2A_i\varepsilon_{ijk}\left(-m_2 W_{jk} + \partial_j h_{0k}\right) + \\ & + A_{ij}\left(-m_2\delta_{ij}A_{kk} + m_2 A_{ij} - 2\varepsilon_{ikl}\partial_k h_{jl}\right) - \frac{m_1}{2}\left(h_{ij}h_{ji} - h_{ii}h_{jj}\right) - m_2\left(W_{ij}W_{ij} - W_iW_i\right) + \\ & + 2W_i\partial_0 h_{0i} - 2W_{ji}\partial_0 h_{ij}] \, .\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

De la acción podemos ver que los únicos términos dinámicos son $\partial_0 h_{0i}$ y $\partial_0 h_{ij}$. W_i y W_{ji} aparecen acompañando a los términos dinámicos por lo que podemos pensar que estan relacionados con los momentos canónicos, entonces, hagamos las siguientes definiciones: $\pi^{ij} = -2W_{ji}$, $\pi^i = 2W_i$, $\{h_{0i}, \pi^j\} = \delta_i{}^j\delta^3\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\right)$, $\{h_{ij}, \pi^{kl}\} = \delta_i{}^k\delta_j{}^l\delta^3\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\right)$. Además, vemos que h_{00}, h_{l0} y A_i son multiplicadores.

Sustituyendo las definiciones que se hicieron para los momentos, la acción nos queda:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = \int d^4x \, \big[& h_{00}\left(-m_1 h_{ii} + \partial_i\pi^i\right) + h_{i0}\left(m_1 h_{0i} + \partial_j\pi^{ij}\right) + A_i\varepsilon_{ijk}\left(\left(\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j}\right) - m_2\pi^{jk}\right) + \\ & + A_{ij}\left(-m_2\delta_{ij}A_{kk} + m_2 A_{ij} - 2\varepsilon_{ikl}\partial_k h_{jl}\right) - \frac{m_1}{2}\left(h_{ij}h_{ji} - h_{ii}h_{jj}\right) - \frac{m_2}{4}\left(\pi^{ij}\pi^{ji} - \pi^i\pi^i\right) + \\ & \pi^i\partial_0 h_{0i} + \pi^{ij}\partial_0 h_{ij}\big] \, .\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

A_{ij} no tiene dinámica y está asociado a un vínculo que permite que lo podamos despejar.

Hallemos A_{ij} en términos de los campos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta L}{\delta A_{ij}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{ij}} = 0 \;\rightarrow\; \frac{\partial}{\partial A_{ij}}\left(-m_2\delta_{pq}A_{pq}A_{kk} + m_2A_{pq}A_{pq} - 2\varepsilon_{pkl}A_{pq}\partial_k h_{ql}\right) = 0 \\
&\rightarrow\; \frac{\partial}{\partial A_{ij}}\left(-m_2\delta_{pq}A_{pq}\left(A_{ln}\delta_{lk}\delta_{nk}\right)\right) + 2m_2A_{ij} - 2\varepsilon_{ikl}\partial_k h_{jl} = 0 \\
&\rightarrow\; -m_2\delta_{ij}A_{kk} - m_2\delta_{ij}A_{kk} + 2m_2A_{ij} - 2\varepsilon_{ikl}\partial_k h_{jl} = 0 \\
&\rightarrow\; -2m_2\delta_{ij}A_{kk} + 2m_2A_{ij} - 2\varepsilon_{ikl}\partial_k h_{jl} = 0 \\
&\rightarrow\; -m_2\delta_{ij}A_{kk} + m_2A_{ij} - \varepsilon_{ikl}\partial_k h_{jl} = 0. \qquad (4.2.14)
\end{aligned}
$$

Multipliquemos lo anterior por δ_{ij}:

$$
\begin{aligned}
&-3m_2A_{kk} + m_2A_{kk} - \varepsilon_{ikl}\partial_k h_{il} = 0 \;\rightarrow\; -2m_2A_{kk} - \varepsilon_{ijk}\partial_j h_{ik} = 0 \\
&\rightarrow\; -2m_2A_{kk} + \varepsilon_{ijk}\partial_i h_{jk} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{A_{kk} = \frac{1}{2m_2}\varepsilon_{ijk}\partial_i h_{jk}}\,.
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
m_2A_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\varepsilon_{lmn}\partial_l h_{mn} - \varepsilon_{ikl}\partial_k h_{jl} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{A_{ij} = \frac{1}{2m_2}\left(\delta_{ij}\varepsilon_{lmn}\partial_l h_{mn} + 2\varepsilon_{ikl}\partial_k h_{jl}\right)}\,.
$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
& A_{ij}\left(-m_2\delta_{ij}A_{kk} + m_2A_{ij} - 2\varepsilon_{ikl}\partial_k h_{jl}\right) = A_{ij}\left(-m_2\delta_{ij}A_{kk} + m_2A_{ij} - \left(2m_2A_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_{lmn}\partial_l h_{mn}\right)\right) \\
= \;& A_{ij}\left(-m_2\delta_{ij}A_{kk} + m_2A_{ij} - 2m_2A_{ij} + 2m_2\delta_{ij}A_{kk}\right) \\
= \;& A_{ij}\underbrace{\left(-m_2A_{ij} + m_2\delta_{ij}A_{kk}\right)}_{-\varepsilon_{ikl}\partial_k h_{jl}} \\
= \;& -A_{ij}\varepsilon_{ikl}\partial_k h_{jl} \\
= \;& -\frac{1}{2m_2}\left(\delta_{ij}\varepsilon_{l'mn}\partial_{l'} h_{mn} + 2\varepsilon_{ik'l'}\partial_{k'} h_{jl'}\right)\varepsilon_{ikl}\partial_k h_{jl} \\
= \;& -\frac{1}{2m_2}\delta_{ij}\varepsilon_{pmn}\varepsilon_{ikl}\partial_p h_{mn}\partial_k h_{jl} - \frac{1}{2m_2}\left(2\varepsilon_{imn}\varepsilon_{ikl}\partial_m h_{jn}\partial_k h_{jl}\right) \\
= \;& \frac{1}{2m_2}\delta_{ij}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{ijk}\partial_l h_{mn}\partial_i h_{jk} - \frac{1}{2m_2}\left(\partial_k h_{jl}\partial_k h_{jl}\right)\left(\partial_k h_{jl}\partial_l h_{jk}\right). \qquad (4.2.15)
\end{aligned}
$$

Por lo que nos queda:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} = \int d^4x \Big[& h_{00}\left(-m_1h_{ii} + \partial_i\pi^i\right) + h_{i0}\left(m_1h_{0i} + \partial_j\pi^{ij}\right) + A_i\varepsilon_{ijk}\left(\partial_j h_{0k} - \partial_k h_{0j} - m_2\pi^{jk}\right) + \\
&+ \frac{1}{2m_2}\delta_{ij}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{ijk}\partial_l h_{mn}\partial_i h_{jk} - \frac{1}{2m_2}\left(\partial_k h_{jl}\partial_k h_{jl}\right)\left(\partial_k h_{jl}\partial_l h_{jk}\right) - \frac{m_1}{2}\left(h_{ij}h_{ji} - h_{ii}h_{jj}\right) + \\
&- \frac{m_2}{4}\left(\pi^{ij}\pi^{ji} - \pi^i\pi^i\right) + \pi^i\partial_0 h_{0i} + \pi^{ij}\partial_0 h_{ij}\Big]. \qquad (4.2.16)
\end{aligned}
$$

Ahora podemos obtener el Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left[\frac{m_1}{2}(h_{ij}h_{ji} - h_{ii}h_{jj}) + \frac{m_2}{4}\left(\pi^{ij}\pi^{ji} - \pi^i\pi^i\right) - \frac{1}{2m_2}\delta_{ij}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{ijk}\partial_l h_{mn}\partial_i h_{jk} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2m_2}(\partial_k h_{jl}\partial_k h_{jl})(\partial_k h_{jl}\partial_l h_{jk}) + h_{00}\varphi + h_{i0}\varphi^i + A_i\psi^i \right]. \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

Con: $\varphi = m_1 h_{ii} - \partial_i\pi^i$; $\varphi^i = -(m_1 h_{0i} + \partial_j\pi^{ij})$; $\psi^i = \varepsilon_{ijk}\left(m_2\pi^{jk} - 2\partial_j h_{0k}\right)$, estos son los vínculos.

Hallemos los corchetes de Poisson entre los vínculos:

$$\begin{aligned} \{\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{y})\} &= \{m_1\delta_{ij}h_{ij}(\boldsymbol{x}) - \delta_{ij}\partial_i\pi^j(\boldsymbol{x}), m_1\delta_{kl}h_{kl}(\boldsymbol{y}) - \delta_{kl}\partial_k\pi^l(\boldsymbol{y})\} \\ &= -\delta_{ij}\delta_{kl}m_1\left(\{h_{ij}(\boldsymbol{x}), \partial_k\pi^l(\boldsymbol{y})\} + \{\partial_i\pi^j(\boldsymbol{x}), h_{kl}(\boldsymbol{y})\}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\varphi(\boldsymbol{x}), \varphi^i(\boldsymbol{y})\} &= \{m_1 h_{kk}(\boldsymbol{x}) - \partial_k\pi^k(\boldsymbol{x}), -\left(m_1 h_{0i}(\boldsymbol{y}) + \partial_j\pi^{ij}(\boldsymbol{y})\right)\} \\ &= \{m_1 h_{kk}(\boldsymbol{x}), -\partial_j\pi^{ij}(\boldsymbol{y})\} + \{-\partial_k\pi^k(\boldsymbol{x}), -m_1 h_{0i}(\boldsymbol{y})\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\varphi(\boldsymbol{x}), \psi^i(\boldsymbol{y})\} &= \{m_1 h_{ll}(\boldsymbol{x}), \varepsilon_{ijk}m_2\pi^{jk}(\boldsymbol{y})\} + \{-\partial_l\pi^l(\boldsymbol{x}), -2\varepsilon_{ijk}\partial_j h_{0k}(\boldsymbol{y})\} \\ &= \delta_l^m\varepsilon_{ijk}m_1m_2\{h_{lm}(\boldsymbol{x}), \pi^{jk}(\boldsymbol{y})\} + 2\varepsilon_{ijk}\{\partial_l\pi^l(\boldsymbol{x}), \partial_j h_{0k}(\boldsymbol{y})\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\{\varphi^i(\boldsymbol{x}), \varphi^j(\boldsymbol{y})\} = 0 \quad \{\varphi^i(\boldsymbol{x}), \psi^k(\boldsymbol{y})\} = 0 \quad \{\psi^i(\boldsymbol{x}), \psi^k(\boldsymbol{y})\} = 0$$

Ahora veamos como es el álgebra con la parte del Hamiltoniano sin los vínculos:

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \int d^3x \left[\frac{m_1}{2}(h_{ij}h_{ji} - h_{ii}h_{jj}) + \frac{m_2}{4}\left(\pi^{ij}\pi^{ji} - \pi^i\pi^i\right) - \frac{1}{2m_2}\delta_{ij}\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{ijk}\partial_l h_{mn}\partial_i h_{jk} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2m_2}(\partial_k h_{jl}\partial_k h_{jl})(\partial_k h_{jl}\partial_l h_{jk}) \right]. \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

Calculemos lo siguiente:

$$\{\pi^i(\boldsymbol{x}), \underline{H}(\boldsymbol{y})\} = 0,$$

$$\{\pi^{ij}(\boldsymbol{x}), \underline{H}(\boldsymbol{y})\} = m_1 h_{kk}\delta_{ij} - m_1 h_{ji} - \frac{1}{m_2}\varepsilon_{ijn}\varepsilon_{l'm'n'}\partial_{l'}\partial_n h_{m'n'} + \frac{2}{m_2}\varepsilon_{knj}\varepsilon_{kl'm'}\partial_{l'}\partial_n h_{im'},$$

$$\{h_{0i}(\boldsymbol{x}), \underline{H}(\boldsymbol{y})\} = -\frac{m_2}{2}\pi^i,$$
$$\{h_{ij}(\boldsymbol{x}), \underline{H}(\boldsymbol{y})\} = \frac{m_2}{2}\pi^{ji}.$$

Lo anterior será usado para agilizar las cuentas.

Pasemos a preservar las ligaduras en el tiempo:

$$\dot{\varphi} = \{\varphi(\boldsymbol{x}), H(\boldsymbol{y})\} = \{\varphi(\boldsymbol{x}), \underline{H}(\boldsymbol{y})\} = -\partial_i\{\pi^i(\boldsymbol{x}), \underline{H}(\boldsymbol{y})\} + m_1\delta_{ij}\{h_{ij}(\boldsymbol{x}), \underline{H}(\boldsymbol{y})\} = \frac{m_1 m_2}{2}\pi^{ii},$$

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}^i &= -m_1\{h_{0i}(\boldsymbol{x}), \underline{H}(\boldsymbol{y})\} - \partial_j\{\pi^{ij}(\boldsymbol{x}), \underline{H}(\boldsymbol{y})\} \\ &= \frac{m_1 m_2}{2}\pi^i + m_1\left(\partial_j h_{ji} - \partial_i h_{kk}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\psi}^i &= \varepsilon_{ijk} m_2\{\pi^{jk}(\boldsymbol{x}), \underline{H}(\boldsymbol{y})\} - 2\varepsilon_{ijk}\partial_j\{h_{0k}(\boldsymbol{x}), \underline{H}(\boldsymbol{y})\} \\ &= \varepsilon_{ijk}\left(2\partial_j\partial_l h_{lk} + m_2\left(m_1 h_{jk} + \partial_j\pi^k\right)\right).\end{aligned}$$

Aparecen los vínculos:

$$m_1\chi = \frac{m_1 m_2}{2}\pi^{ii}, \qquad m_1\chi^i = \frac{m_1 m_2}{2}\pi^i + m_1\partial_j h_{ji} - m_1\partial_i h_{jj},$$

$$m_1\xi^i = \varepsilon_{ijk}\left(2\partial_j\partial_l h_{lk} + m_1 m_2 h_{jk} + m_2\partial_j\pi^k\right).$$

Vemos que:

$$\partial_j\pi^k = \frac{2}{m_2}\partial_j\chi^k + \frac{2}{m_2}\partial_j\partial_k h_{ll} - \frac{2}{m_2}\partial_j\partial_l h_{lk}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}m_1\xi^i &= \varepsilon_{ijk}\left(2\partial_j\partial_l h_{lk} + m_1 m_2 h_{jk} + 2\partial_j\chi^k + 2\partial_j\partial_k h_{ll} - 2\partial_j\partial_l h_{lk}\right) \\ &= m_1 m_2\varepsilon_{ijk}h_{jk} + 2\varepsilon_{ijk}\partial_j\chi^k.\end{aligned}$$

Luego, tomamos que:

$$\boxed{\chi = \frac{m_2}{2}\pi^{ii}}, \qquad \boxed{\chi^i = \frac{m_2}{2}\pi^i + \partial_j h_{ji} - \partial_i h_{jj}}, \qquad \boxed{\xi^i = m_2\varepsilon_{ijk}h_{jk}}.$$

Preservemos en el tiempo las nuevas ligaduras obtenidas:

Para $\chi(\boldsymbol{x})$ tenemos:

$$\begin{aligned}\{\chi(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{y})\} &= \left\{\frac{m_2}{2}\pi^{ii}(\boldsymbol{x}), m_1 h_{jj}(\boldsymbol{y}) - \partial_j\pi^j(\boldsymbol{y})\right\} \\ &= -\frac{3}{2}m_1 m_2\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\end{aligned}$$

$$\{\chi(\boldsymbol{x}),\varphi^j(\boldsymbol{y})\}=0\ ;\ \{\chi(\boldsymbol{x}),\psi^j(\boldsymbol{y})\}=0,$$

$$\begin{aligned}
\dot{\chi} &= \{\chi(\boldsymbol{x}),H(\boldsymbol{y})\}=\{\chi(\boldsymbol{x}),\underline{H}(\boldsymbol{y})+\int d^3y\ h_{00}(\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{y}))\} \\
&= \frac{m_2}{2}\left(2m_1h_{kk}+2\frac{1}{m_2}\varepsilon_{kni}\varepsilon_{kl'm'}\partial_{l'}\partial_n h_{im'}\right)-\frac{3}{2}m_1m_2h_{00}=0 \\
&\Rightarrow \boxed{h_{00}=\frac{2}{3}h_{kk}+\frac{2}{3}\frac{1}{m_1m_2}\varepsilon_{kni}\varepsilon_{kl'm'}\partial_{l'}\partial_n h_{im'}}\ .
\end{aligned}$$

De lo anterior logramos despejar el multiplicador h_{00}.

Para $\chi^i(\boldsymbol{x})$ tenemos:

$$\{\chi^i(\boldsymbol{x}),\varphi(\boldsymbol{y})\}=0,$$

$$\begin{aligned}
\{\chi^i(\boldsymbol{x}),\varphi^j(\boldsymbol{y})\} &= -\frac{m_1m_2}{2}\{\pi^i(\boldsymbol{x}),h_{0j}(\boldsymbol{y})\}-\partial_k^{(x)}\partial_l^{(y)}\{h_{ki}(\boldsymbol{x}),\pi^{jl}(\boldsymbol{y})\}+\delta_{kr}\partial_i^{(x)}\partial_l^{(y)}\{h_{kr}(\boldsymbol{x}),\pi^{jl}(\boldsymbol{y})\} \\
&= \frac{m_1m_2}{2}\delta_{ij}\delta^3\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right),
\end{aligned}$$

$$\{\chi^i(\boldsymbol{x}),\psi^j(\boldsymbol{y})\}=0,$$

$$\begin{aligned}
\dot{\chi^i} &= \{\chi^i(\boldsymbol{x}),H(\boldsymbol{y})\}=\{\chi^i(\boldsymbol{x}),\underline{H}(\boldsymbol{y})+\int d^3y\ h_{j0}(\boldsymbol{y})\varphi^j(\boldsymbol{y})\} \\
&= \frac{m_2}{2}\partial_j\pi^{ij}-\frac{m_2}{2}\partial_i\pi^{kk}+\frac{m_1m_2}{2}h_{i0}=0 \\
&\Rightarrow \boxed{h_{i0}=\frac{1}{m_1}\left(\partial_i\pi^{kk}-\partial_j\pi^{ij}\right)}\ .
\end{aligned}$$

De la preservación de $\chi^i(\boldsymbol{x})$ logramos despejar el multiplicador h_{i0}.

Para $\xi^i(\boldsymbol{x})$ tenemos:

$$\{\xi^i(\boldsymbol{x}),\varphi(\boldsymbol{y})\}=0,$$

$$\begin{aligned}
\{\xi^i(\boldsymbol{x}),\varphi^j(\boldsymbol{y})\} &= -m_2\varepsilon_{ikl}\partial_r^{(y)}\{h_{kl}(\boldsymbol{x}),\pi^{jr}(\boldsymbol{y})\} \\
&= m_2\varepsilon_{ijk}\partial_k\left(\delta^3\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\xi^i(\boldsymbol{x}),\psi^j(\boldsymbol{y})\} &= \left(m_2\right)^2\varepsilon_{ikl}\varepsilon_{jpq}\{h_{kl}(\boldsymbol{x}),\pi^{pq}(\boldsymbol{y})\} \\
&= 2\left(m_2\right)^2\delta_{ij}\delta^3\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}^i &= \{\xi^i(\boldsymbol{x}), H(\boldsymbol{y})\} = \{\xi^i(\boldsymbol{x}), \underline{H}(\boldsymbol{y}) + \int d^3y\ h_{j0}(\boldsymbol{y})\varphi^j(\boldsymbol{y}) + \int d^3y\ A_j(\boldsymbol{y})\psi^j(\boldsymbol{y})\} \\
&= \frac{(m_2)^2}{2}\varepsilon_{ijk}\pi^{kj} + m_2\varepsilon_{ijk}\partial_k h_{j0} + 2\,(m_2)^2\,A_i = 0 \\
&\Rightarrow \boxed{A_i = \varepsilon_{ijk}\left(\frac{1}{4}\pi^{jk} - \frac{1}{2m_2}\partial_k h_{j0}\right)}\,.
\end{aligned}$$

De esta última preservación logramos despejar el multiplicador A_i.

Podemos notar que el conjunto de todas las ligaduras es de segunda clase. Ahora que sabemos de que tipo son todas las ligaduras podemos contar el número de grados de libertad de la siguiente manera[2]

$$\begin{aligned}
2\times\begin{pmatrix}\text{Número de grados}\\ \text{de libertad físicos}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\text{Número total de}\\ \text{variables canónicas}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Número de ligaduras}\\ \text{originales de segunda clase}\end{pmatrix} + \\
&\quad -2\times\begin{pmatrix}\text{Número de ligaduras}\\ \text{de primera clase}\end{pmatrix}. \qquad (4.2.19)
\end{aligned}$$

En nuestro caso las variables canónicas son h_{0i}, h_{ij}, π^i y π^{ij}, lo cual nos da un número de 24 variables canónicas, no tenemos ligaduras de primera clase, y el número total de ligaduras de segunda clase es 14. Entonces, uasando la ecuación (4.2.19) obtenemos 5 grados de libertad físicos.

Ahora, utilicemos los multiplicadores para reproducir algunos de los resultados obtenidos en la sección 4.1:

Utilizando h_{00} vemos:

$$\begin{aligned}
h_{00} &= \frac{2}{3}h_{kk} + \frac{2}{3}\frac{1}{m_1m_2}\varepsilon_{kni}\varepsilon_{kl'm'}\partial_{l'}\partial_n h_{im'} \\
&= \frac{2}{3}h_{kk} + \frac{2}{3}\frac{1}{m_1m_2}\partial_n\left(\partial_n h_{ii} - \partial_i h_{in}\right) \\
&= \frac{2}{3}h_{kk} + \frac{2}{3}\frac{1}{m_1m_2}\left(\frac{m_2}{2}\partial_n\pi^n - \partial_n\chi^n\right) \\
&= h_{kk} - \frac{2}{3}\frac{1}{m_1m_2}\partial_n\chi^n - \frac{1}{3m_1}\varphi.
\end{aligned}$$

Igualando las ligaduras fuertemente a cero nos queda:

$$h_{00} = h_{kk} \quad\Rightarrow\quad \boxed{h^\mu{}_\mu = 0}\,.$$

Utilizando h_{i0} vemos:

$$\begin{aligned} h_{i0} &= \frac{1}{m_1}\left(\partial_i\pi^{kk} - \partial_j\pi^{ij}\right) \\ &= \frac{1}{m_1}\left(\frac{2}{m_2}\partial_i\chi + m_1 h_{0i} + \varphi^i\right) \\ &\Rightarrow\ h_{i0} = h_{0i}. \end{aligned}$$

Igualando ξ^i fuertemente a cero obtenemos:

$$\varepsilon_{ijk}h_{jk} = 0 \quad \Rightarrow \quad h_{jk} = h_{kj}.$$

Entonces,

$$\boxed{h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}}\ .$$

Utilizando A_i vemos:

$$\begin{aligned} A_i &= \varepsilon_{ijk}\left(\frac{1}{4}\pi^{jk} - \frac{1}{2m_2}\partial_k h_{j0}\right) \\ &= \frac{1}{4m_2}\psi^i + \frac{1}{2m_2}\varepsilon_{ijk}\partial_j h_{0k} + \frac{1}{2m_2}\varepsilon_{ijk}\partial_j h_{0k} \\ &\Rightarrow \boxed{A_i = \frac{1}{m_2}\varepsilon_{ijk}\partial_j h_{0k}}\ . \end{aligned}$$

Luego, sabemos que: $\pi^{ij} = -\varepsilon_{jkl}B_{kl,i}$; $\pi^i = \varepsilon_{ijk}B_{jk,0}$, usemos esto para obtener propiedades sobre $B_{\alpha\beta,\sigma}$.

De las ligaduras obtenemos:

$$\pi^{ii} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ijk}B_{ij,k} = 0. \tag{4.2.20}$$

Ahora utilicemos A_{ij}:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}A_{ij} &= \frac{1}{m_2}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{irl}\partial_r h_{jl} \\ &= \frac{1}{m_2}\left(\partial_j h_{jk} - \partial_k h_{jj}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\pi^k \\ &\Rightarrow\ \varepsilon_{ijk}B_{0i,j} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B_{ij,0}. \end{aligned}$$

Entonces, lo anterior junto con (7.1.1) nos da:

$$\boxed{\varepsilon_{\alpha\beta\sigma\theta}B^{\alpha\beta,\sigma} = 0}\ .$$

Luego,

$$A_{ii} = B_{0i,i} = 0.$$

Además, de la ligadura ψ^i se obtiene :

$$\begin{aligned} B_{ji,j} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\pi^{jk} \\ &= \frac{1}{m_2}\varepsilon_{ijk}\partial_j h_{0k} \\ &= A_i \\ &= B_{0i,0}. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\boxed{B^{\gamma\beta}{}_{,\gamma} = 0}\,.$$

4.3. Corchetes de Dirac

El conjunto de todas las ligaduras de segunda clase lo denotaremos como

$$\Psi_a = \left(\varphi, \varphi^i, \psi^i, \chi, \chi^i, \xi^i\right).$$

La matriz de Dirac nos queda:

$$\mathcal{C}_{ss'}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2}m_1m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}m_1m_2\delta_{ij} & -m_2\varepsilon_{ijk}\partial_k^{(x)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\left(m_2\right)^2\delta_{ij} \\ -\frac{3}{2}m_1m_2 & 0 & 0 & 0 & -m_2\partial_j^{(x)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}m_1m_2\delta_{ij} & 0 & -m_2\partial_i^{(x)} & 0 & 0 \\ 0 & m_2\varepsilon_{ijk}\partial_k^{(x)} & 2\left(m_2\right)^2\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

La inversa de la matriz de Dirac es:

$$\mathcal{C}^{ss'}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3}\frac{1}{m_1^2}\partial_i^{(x)} & 0 & -\frac{2}{3}\frac{1}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3}\frac{1}{m_1^2}\partial_j^{(x)} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{m_1}\delta_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m_1m_2}\varepsilon_{ijk}\partial_k^{(x)} & \frac{1}{2m_2}\delta_{ij} \\ \frac{2}{3}\frac{1}{m_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{m_1}\delta_{ij} & \frac{1}{m_1m_2}\varepsilon_{ijk}\partial_k^{(x)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2m_2}\delta_{ij} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{m_2}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

Una vez calculada la inversa, ahora podemos escribir los corchetes de Dirac usando

$$\{F(\boldsymbol{x}), G(\boldsymbol{y})\}^{*} = \{F(\boldsymbol{x}), G(\boldsymbol{y})\} - \int\int d^3x' d^3y' \{F(\boldsymbol{x}), \Psi_s(\boldsymbol{x'})\} C^{ss'}(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}) \{\Psi_{s'}(\boldsymbol{y'}), G(\boldsymbol{y})\}.$$

Veamos como quedan los corchetes:

$$\begin{aligned}
&\{h_{0i}(\boldsymbol{x}), \pi^j(\boldsymbol{y})\}^{*} = \{h_{0i}(\boldsymbol{x}), \pi^j(\boldsymbol{y})\} + \\
&-\int\int d^3x' d^3y' \{h_{0i}(\boldsymbol{x}), \Psi_s(\boldsymbol{x'})\} C^{ss'}(\boldsymbol{x'}, \boldsymbol{y'}) \{\Psi_{s'}(\boldsymbol{y'}), \pi^j(\boldsymbol{y})\} \\
= \;& \delta_{ij}\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&-\int\int d^3x' d^3y' \{h_{0i}(\boldsymbol{x}), \varphi(\boldsymbol{x'})\} \left(\frac{4}{3}\frac{1}{m_1^2 m_2}\partial_k^{(x')}\left(\delta^3(\boldsymbol{x'}-\boldsymbol{y'})\right)\right) \{\varphi^k(\boldsymbol{y'}), \pi^j(\boldsymbol{y})\} \\
&-\int\int d^3x' d^3y' \{h_{0i}(\boldsymbol{x}), \chi^k(\boldsymbol{x'})\} \left(-\frac{2}{m_1 m_2}\delta_{kl}\delta^3(\boldsymbol{x'}-\boldsymbol{y'})\right) \{\varphi^l(\boldsymbol{y'}), \pi^j(\boldsymbol{y})\} \\
&-\int\int d^3x' d^3y' \{h_{0i}(\boldsymbol{x}), \chi^k(\boldsymbol{x'})\} \left(\frac{\varepsilon_{knr}}{m_1 m_2^2}\partial_r^{(x')}\left(\delta^3(\boldsymbol{x'}-\boldsymbol{y'})\right)\right) \{\psi^n(\boldsymbol{y'}), \pi^j(\boldsymbol{y})\} \\
= \;& \frac{1}{m_1 m_2}\left(\frac{1}{3}\partial_i\partial_j + \delta_{ij}\partial_k\partial_k\right)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
= \;& \frac{1}{m^2}\left(\frac{1}{3}\partial_i\partial_j p_{kk}^{(m)} - \frac{1}{3}\partial_i\partial_k p_{kj}^{(m)} - \frac{1}{2}\partial_j\partial_k p_{ki}^{(m)} + \frac{1}{2}\partial_k\partial_k p_{ij}^{(m)}\right)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),
\end{aligned}$$

$$\boxed{\{h_{0i}(\boldsymbol{x}), \pi^j(\boldsymbol{y})\}^{*} = \frac{1}{m^2}\left(\frac{1}{3}\partial_i\partial_j p_{kk}^{(m)} - \frac{1}{3}\partial_i\partial_k p_{kj}^{(m)} - \frac{1}{2}\partial_j\partial_k p_{ki}^{(m)} + \frac{1}{2}\partial_k\partial_k p_{ij}^{(m)}\right)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\,.$$

Donde $p_{ij}^{(m)} = \delta_{ij} - \frac{\partial_i\partial_j}{m^2}$ es el proyector transversal en la capa $\Delta = m^2$, $\Delta = \partial_k\partial_k$, y $m^2 = \frac{m_1 m_2}{2}$.

$$\boxed{\{h_{0i}(\boldsymbol{x}), h_{kl}(\boldsymbol{y})\}^{*} = \frac{1}{m_1}\left(\frac{1}{2}\partial_l p_{ik}^{(m)} + \frac{1}{2}\partial_k p_{il}^{(m)} - \frac{1}{3}\partial_i p_{kl}^{(m)}\right)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\,,$$

$$\boxed{\{h_{ij}(\boldsymbol{x}), \pi^{kl}(\boldsymbol{y})\}^{*} = \left(\frac{1}{2}\delta_{il} p_{jk}^{(m)} + \frac{1}{2}\delta_{jl} p_{ik}^{(m)} - \frac{1}{3}\delta_{kl} p_{ij}^{(m)}\right))\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\,,$$

$$\boxed{\{\pi^{ij}(\boldsymbol{x}), \pi^k(\boldsymbol{y})\}^{*} = \frac{2}{m_2}\left(\partial_k p_{ij}^{(m)} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\left(\partial_l p_{lk}^{(m)} - \partial_k p_{ll}^{(m)}\right) - \frac{1}{2}\partial_j p_{ik}^{(m)} - \frac{1}{2}\delta_{kj}\partial_l p_{li}^{(m)}\right)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\,,$$

$$\boxed{\{h_{0i}(\boldsymbol{x}), \pi^{kl}(\boldsymbol{y})\}^{*} = 0}\,, \quad \boxed{\{h_{ij}(\boldsymbol{x}), \pi^{k}(\boldsymbol{y})\}^{*} = 0}\,,$$

$$\boxed{\{h_{ij}(\boldsymbol{x}), h_{kl}(\boldsymbol{y})\}^{*} = 0}\,, \quad \boxed{\{\pi^{ij}(\boldsymbol{x}), \pi^{kl}(\boldsymbol{y})\}^{*} = 0}\,,$$

$$\boxed{\{\pi^{i}(\boldsymbol{x}), \pi^{j}(\boldsymbol{y})\}^{*} = 0}\,, \quad \boxed{\{h_{0i}(\boldsymbol{x}), h_{0j}(\boldsymbol{y})\}^{*} = 0}\,.$$

Las ecuaciones anteriores constituyen los corchetes de Dirac para la teoría de Morand y Solodukhin.

Por otro lado, sabemos que los corchetes de Dirac entre las ligaduras de segunda clase y cualquier función del espacio de fases es cero. Como todas las ligaduras que tenemos son de segunda clase, las podemos igualar fuertemente a cero, así el Hamiltoniano para la teoría es

$$H=\int d^3x\left[\frac{m_1}{2}\left(h_{ij}h_{ji}-h_{ii}h_{jj}\right)+\frac{m_2}{4}\left(\pi^{ij}\pi^{ji}-\pi^i\pi^i\right)+A_{ij}\varepsilon_{ikl}\partial_k h_{jl}\right].$$

Ahora podemos calcular las derivadas temporales de las variables del espacio de fases.

$$\begin{aligned}\dot{h}_{ij} &= \{h_{ij}(\boldsymbol{x}),H(\boldsymbol{y})\}^* \\ &= -\frac{m_2}{6}\delta_{ij}\pi^{kk}+\frac{m_2}{4}\pi^{ij}+\frac{m_2}{4}\pi^{ji}+\frac{1}{m_1}\partial_i\partial_j\pi^{kk}-\frac{1}{2m_1}\partial_j\partial_k\pi^{ik}-\frac{1}{2m_1}\partial_i\partial_k\pi^{jk}.\end{aligned}$$

Recordemos que de los vínculos obtuvimos que $\pi^{kk}=0$, entonces, usando esto nos queda

$$\dot{h}_{ij} = \frac{m_2}{4}\pi^{ij}+\frac{m_2}{4}\pi^{ji}-\frac{1}{2m_1}\partial_j\partial_k\pi^{ik}-\frac{1}{2m_1}\partial_i\partial_k\pi^{jk}.$$

Luego, de los vínculos ψ^i y φ^i se obtiene que

$$\pi^{ji}=\pi^{ij}+\frac{2}{m_2}\partial_j h_{0i}-\frac{2}{m_2}\partial_i h_{0j},$$

$$\partial_j\pi^{ij}=-m_1 h_{0i}.$$

Sustituyendo lo anterior en la expresión para $\dot{h}_{ij}$ esta nos da

$$\dot{h}_{ij} = \frac{m_2}{2}\pi^{ij}+\partial_j h_{0i}. \tag{4.3.1}$$

Ahora hallemos la expresión para $\dot{h}_{0i}$

$$\begin{aligned}\dot{h}_{0i} &= \{h_{0i}(\boldsymbol{x}),H(\boldsymbol{y})\}^* \\ &= -\frac{1}{2m^2}\partial_i\partial_k\partial_l h_{lk}-\frac{1}{3}\partial_i h_{kk}+\partial_k h_{ik}+\frac{1}{m^2}\partial_i\partial_k\partial_k h_{ll}-\frac{1}{6m_1}\partial_i\partial_k\pi^k-\frac{1}{2m_1}\partial_k\partial_k\pi^i+ \\ &\quad -\frac{1}{2m^2}\partial_k\partial_l\partial_l h_{ki}.\end{aligned}$$

Si sustituimos en la ecuación anterior $\pi^i=\frac{2}{m_2}\left(\partial_i h_{kk}-\partial_k h_{ki}\right)$, que se obtiene de la ligadura χ^i, obtenemos que

$$\begin{aligned}\dot{h}_{0i} &= -\frac{1}{3m^2}\partial_i\partial_l\partial_k h_{kl}-\frac{1}{3}\partial_i h_{kk}+\partial_k h_{ik}+\frac{1}{3m^2}\partial_i\partial_k\partial_k h_{ll} \\ &= \frac{1}{3m^2}\partial_i\partial_k\left(\partial_k h_{ll}-\partial_l h_{lk}\right)-\frac{1}{3}\partial_i h_{kk}+\partial_k h_{ik} \\ &= \frac{1}{3m_1}\partial_i\partial_k\pi^k-\frac{1}{3}\partial_i h_{kk}+\partial_k h_{ik}.\end{aligned}$$

Recordemos que $\partial_k \pi^k = m_1 h_{kk}$, esto se obtiene de la ligadura φ, sustituyendo en $\dot{h}_{0i}$ nos queda

$$\dot{h}_{0i} = \partial_k h_{ik}. \tag{4.3.2}$$

De la ecuación (4.3.1) podemos ver que $\dot{h}_{kk} = \partial_k h_{0k}$, y junto con (4.3.2) obtenemos que $\partial_\nu h^{\mu\nu} = 0$, que era otra de las propiedades obtenidas para el campo $h_{\mu\nu}$ en la sección 4.1. Continuando, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}^{ij} &= \{\pi^{ij}(\boldsymbol{x}), H(\boldsymbol{y})\}^* \\
&= -m_1 h_{ij} + \frac{2}{m_2}\partial_r\partial_r h_{ij} - \frac{2}{m_2}\partial_r\partial_j h_{ir} \\
&= -\left(m_1 h_{ij} + \frac{2}{m_2}\varepsilon_{jrl}\varepsilon_{lkn}\partial_r\partial_k h_{in}\right) \\
&= -\left(m_1 h_{ij} + 2\varepsilon_{jrl}\partial_r A_{li}\right),
\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}^{i} &= \{\pi^{i}(\boldsymbol{x}), H(\boldsymbol{y})\}^* \\
&= m_1 h_{0i} + \frac{2}{m_2}\partial_k\partial_i h_{0k} - \frac{2}{m_2}\partial_k\partial_k h_{0i} \\
&= m_1 h_{0i} + \frac{2}{m_2}\varepsilon_{ikr}\varepsilon_{rln}\partial_k\partial_l h_{0n} \\
&= m_1 h_{0i} + 2\varepsilon_{ikr}\partial_k A_r.
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

4.4. Comprobación de las ecuaciones de movimiento

En esta sección vamos a comprobar si todo lo obtenido anteriormente reproduce las ecuaciones de movimiento (4.1.1) y (4.1.2) y la información derivada de ellas.

De (4.1.1) obtenemos las siguientes ecuaciones

$$m_1 h^{ii} + \varepsilon^{0\rho\alpha\beta}\partial_\rho B_{\alpha\beta,}{}^{0} = 0, \tag{4.4.1}$$

$$m_1 h^{0i} + \varepsilon^{i\rho\alpha\beta}\partial_\rho B_{\alpha\beta,}{}^{0} = 0, \tag{4.4.2}$$

$$m_1 h^{i0} + \varepsilon^{0\rho\alpha\beta}\partial_\rho B_{\alpha\beta,}{}^{i} = 0, \tag{4.4.3}$$

$$m_1 h^{ij} - m_1\eta^{ij} h + \varepsilon^{j\rho\alpha\beta}\partial_\rho B_{\alpha\beta,}{}^{i} = 0. \tag{4.4.4}$$

Vemos que (4.4.1) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} m_1 h_{ii} - \partial_i \left(\varepsilon_{ijk} B_{jk,0} \right) &= 0 \\ \Rightarrow m_1 h_{ii} - \partial_i \pi^i &= 0. \end{aligned}$$

La ecuación anterior es justamente la ligadura φ.

Luego, (4.4.2) nos queda

$$\begin{aligned} m_1 h_{0i} - \varepsilon_{ijk} \partial_0 B_{jk,0} + 2\varepsilon_{ijk} \partial_j B_{0k,0} &= 0 \\ \Rightarrow m_1 h_{0i} - \dot{\pi}^i + 2\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k &= 0 \\ \Rightarrow m_1 h_{0i} + 2\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k &= \dot{\pi}^i. \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Podemos ver que la expresión (4.3.4) es igual a la expreción (4.4.5), por lo que se reproduce la ecuación de movimiento (4.4.2).

Continuando, tenemos que (4.4.3) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} -m_1 h_{i0} + \varepsilon_{jkl} \partial_j B_{kl,i} &= 0 \\ \Rightarrow -\left(m_1 h_{i0} + \partial_j \pi^{ij} \right) &= 0 \\ \Rightarrow m_1 \left(h_{i0} - h_{0i} \right) &= 0, \text{ hemos usado que } \partial_j \pi^{ij} = -m_1 h_{0i}. \end{aligned}$$

Entonces, de lo anterior nos queda que $h_{i0} = h_{0i}$, esta información ya la habiamos obtenido de los multiplicadores.

Después, estudiando la ecuación (4.4.4), la podemos reescribir como sigue

$$\begin{aligned} m_1 h_{ij} - \eta^{ij} h - \varepsilon_{jkl} \partial_0 B_{kl,i} + 2\varepsilon_{jkl} \partial_k B_{0l,i} &= 0 \\ \Rightarrow m_1 h_{ij} - \eta^{ij} h + \dot{\pi}^{ij} + 2\varepsilon_{jkl} \partial_k A_{li} &= 0, \text{ usando que } h = 0, \text{ se obtiene que} \\ \Rightarrow -\left(m_1 h_{ij} + 2\varepsilon_{jkl} \partial_k A_{li} \right) &= \dot{\pi}^{ij}. \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

Podemos ver que la expresión (4.3.3) es igual a la expreción (4.4.6), por lo que se reproduce la ecuación de movimiento (4.4.4).

De (4.1.2) obtenemos las siguientes ecuaciones

$$m_2 B^{ji,j} - \varepsilon^{\nu\rho 0i} \partial_\rho h^0{}_\nu = 0, \tag{4.4.7}$$

$$m_2 B^{0i,j} + m_2 \eta^{ij} B^{k0,k} - \varepsilon^{\nu\rho 0i} \partial_\rho h^j{}_\nu = 0, \tag{4.4.8}$$

$$m_2 B^{ij,0} - \varepsilon^{\nu\rho ij}\partial_\rho h^0{}_\nu = 0, \tag{4.4.9}$$

$$m_2 B^{ij,k} - m_2\eta^{ik}B^{\gamma j}{}_{,\gamma} + m_2\eta^{jk}B^{\gamma i}{}_{,\gamma} - \varepsilon^{\nu\rho ij}\partial_\rho h^k{}_\nu = 0. \tag{4.4.10}$$

La ecuación (4.4.7) la podemos reescribir como

$$\begin{aligned} B_{ji,j} + \frac{1}{m_2}\varepsilon_{ijk}\partial_k h_{0j} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{m_2}\varepsilon_{ijk}\partial_j h_{0k} &= B_{ji,j} \\ \Rightarrow B_{0i,0} &= B_{ji,j}. \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

La expresión (4.4.11) ya la habiamos obtenido de las ligadura ψ^i.

Recordando que ya se había obtenido que $B^{k0,k} = 0$, y sustituyendo esto en (4.4.8), llegamos a lo siguiente

$$\begin{aligned} B_{0i,j} + \frac{1}{m_2}\varepsilon_{lki}\partial_k h_{jl} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{m_2}\varepsilon_{ikl}\partial_k h_{jl} &= B_{0i,j}. \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

La expresión (4.4.12) concuerda con la obtenida ya anteriormente para $B_{0i,j}$, así que la ecuación de movimiento (4.4.8) se satisface.

La ecuación (4.4.9) se puede reescribir como

$$B_{ij,0} - \frac{1}{m_2}\varepsilon_{ijk}\partial_k h_{00} + \frac{1}{m_2}\varepsilon_{ijk}\partial_0 h_{0k} = 0.$$

Multiplicando la ecuación anterior por ε_{ijr} obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijr}B_{ij,0} - \frac{2}{m_2}\partial_r h_{00} + \frac{2}{m_2}\partial_0 h_{0r} &= 0 \\ \Rightarrow \partial_r h_{00} - \frac{m_2}{2}\varepsilon_{ijr}B_{ij,0} &= \partial_0 h_{0r} \\ \Rightarrow \partial_r h_{00} - \frac{m_2}{2}\pi^r &= \partial_0 h_{0r}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior h_{00} como h_{kk} y π^k como la expresión que se obtiene a partir de los vínculos obtenemos

$$\partial_0 h_{0r} = \partial_k h_{rk}. \tag{4.4.13}$$

Vemos que la ecuación (4.3.2) se corresponde con (4.4.13).

Recordemos que $B^{\gamma\beta}{}_{,\gamma} = 0$, de esto se obtiene que $B^{\gamma i}{}_{,\gamma} = 0$, sustituyendo lo anterior en (4.4.10) y reescribiendo, obtenemos

$$B_{ij,k} - \frac{1}{m_2}\varepsilon_{ijl}\partial_l h_{k0} + \frac{1}{m_2}\varepsilon_{ijl}\partial_0 h_{kl} = 0.$$

Multiplicando la ecuación anterior por ε_{ijr} obtenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijr}B_{ij,k} - \frac{2}{m_2}\partial_r h_{k0} + \frac{2}{m_2}\partial_0 h_{kr} &= 0 \\ \Rightarrow \partial_r h_{k0} - \frac{m_2}{2}\varepsilon_{ijr}B_{ij,k} &= \partial_0 h_{kr} \\ \Rightarrow \partial_r h_{k0} + \frac{m_2}{2}\pi^{kr} &= \partial_0 h_{kr}. \end{aligned} \tag{4.4.14}$$

Vemos que la ecuación (4.3.1) se corresponde con (4.4.14), por lo que (4.4.10) se satisface.

Con todo lo anterior logramos comprobar que a través del formalismo canónico se logran reproducir todas las ecuaciones de movimiento covariantes obtenidas a través de la formulación Lagrangiana.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se llevó a cabo la formulación canónica en un espacio-tiempo plano de un modelo alternativo para gravedad masiva linealizada en (3+1) dimensiones propuesto por Morand y Solodukhin.

Se encontró que el campo $h_{\mu\nu}$ tiene 5 componentes independientes, al igual que el campo $B_{\alpha\beta,\sigma}$, y que se pueden escribir uno en términos del otro. Entonces, se puede tomar tanto a $h_{\mu\nu}$ o a $B_{\alpha\beta,\sigma}$ como campo principal, y reescribir el otro en términos de éste, obteniendo así una teoría con 5 grados de libertad.

Al aplicar el método de Dirac a la teoría, encontramos que todas las ligaduras eran de segunda clase, por lo que no hay generadores para transformaciones de calibre, entonces esta teoría no es invariante de calibre.

Encontramos que la teoría queda descrita en téminos de los corchetes de Dirac y a través del Hamiltoniano

$$H = \int d^3x \left[\frac{m_1}{2} \left(h_{ij}h_{ji} - h_{ii}h_{jj} \right) + \frac{m_2}{4} \left(\pi^{ij}\pi^{ji} - \pi^i \pi^i \right) + A_{ij}\varepsilon_{ikl}\partial_k h_{jl} \right].$$

Usando el álgebra obtenida en términos de los corchetes de Dirac, y el Hamiltoniano anterior, se pudo ver que las ecuaciones covariantes de movimiento halladas a través de la formulación Lagrangiana se reproducen de la manera esperada.

Bibliografía

[1] Kevin Morand and Sergey N. Solodukhin. Dual massive gravity. *Phys.Lett. B 715 260-266*, 2012. arXiv:1204.6224.

[2] Claudio Teitelboim Marc Henneaux. *Quantization of gauge systems*. Princeton University Press, 1994.

[3] Pio J. Arias and Rolando Gaitan D. Selfdual spin 2 in 2+1 dimensions revisited. *Rev.Mex.Fis. 52S3 140-142*, 2004. arXiv:hep-th/0401107.

[4] Pio J. Arias. Spin 2 in 2+1 dimensions, 1998. arXiv:gr-qc/9803083.

[5] Kurt Sundermeyer. *Constrained Dynamics*. Lecture Notes in Physics 169. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 1982.

[6] Christian Fräßdorf. Quantization of singular systems in canonical formalism. 2011. users.physik.fu-berlin.de/ pelster/Bachelor/fraessdorf.pdf.

[7] Claudio Teitelboim Andrew Hanson, Tullio Regge. *Constrained Hamiltonian Systems*. Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.

[8] P A M Dirac. *Lectures on quantum mechanics*. Monographs series (Yeshiva University. Belfer Graduate School of Science), no. 2. Belfer Graduate School of Science Yeshiva University, 1964.

[9] W. Greiner and J. Reinhardt. *Field Quantization:*. Springer, 1996.

[10] Toshihide Maskawa and Hideo Nakajima. Singular lagrangian and the dirac-faddeev method. *Progress of Theoretical Physics*, 56(4):1295–1309, 1976. doi: 10.1143/PTP.56.1295.