



UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

Modelos y análisis de las irregularidades del oleaje a partir de los períodos y alturas de crestas

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Jesús Ferrin** para optar al título de Licenciado en Matemática.

Tutor: Dr. José Benito Hernández.

Caracas, Venezuela

Mayo 2017

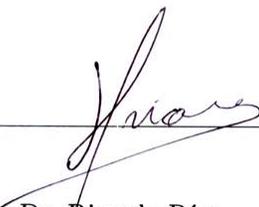
Nosotros, los abajo firmantes, designados por la Universidad Central de Venezuela como integrantes del Jurado Examinador del Trabajo Especial de Grado titulado “**Modelos y análisis de las irregularidades del oleaje a partir de los períodos y alturas de crestas**”, presentado por el **Br. Jesús Ferrin**, titular de la Cédula de Identidad **20.362.078**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al título de **Licenciado en Matemática**.



Dr. José Hernández
Tutor



Dra. Mairene Colina
Jurado



Dr. Ricardo Ríos
Jurado

Dedicatoria

Este proyecto va dedicado a todas aquellas personas que siempre han estado a mi lado apoyándome: a toda mi familia y amigos cercanos que en los momentos más difíciles de mi vida me han dado fuerzas para superar cualquier contratiempo.

Es un gran honor contar con personas tan valiosas en mi vida.

Agradecimiento

Le quiero agradecer a mi tutor, el Dr. José Hernández, por su paciencia y dedicación. En poco tiempo he aprendido muchas cosas gracias a su disposición a ayudarme en cualquier dificultad.

Igualmente, le tengo mucho que agradecer a toda mi familia, que siempre han sido clave en mi vida. También quiero darles las gracias a todos aquellos profesionales vinculados a la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela por haberme enseñado tantas cosas durante mis años de estudios.

Resumen

El análisis de las olas del mar generadas por el viento proporcionan información vital para el diseño y operación de los sistemas marinos, y del océano. Las variaciones en los mares generados por el viento dependen de la ubicación geográfica, la estación, la presencia de los ciclones tropicales, etc. Además, el perfil de ola en un estado del mar determinado es extremadamente irregular en el tiempo y en el espacio. El conocimiento de las distribuciones de probabilidad para las olas extremas y de las alturas de cresta es de importancia fundamental para la ingeniería marina y costera, de manera que al diseñar las estructuras costeras es vital considerar los diferentes aspectos que permiten caracterizar el patrón del oleaje que incide sobre ellas. Un paso importante hacia esta caracterización es definir la ola de diseño, para lo cual se requiere analizar los registros de oleaje tomados durante al menos un año en el sitio de interés, además de involucrar la selección y ajustar una distribución de probabilidad adecuada a las alturas de oleaje y extrapolar para definir la correspondiente altura de diseño.

Palabras clave: Alturas de crestas, periodo, olas extremas, cruces, fórmula de Rice

Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Estudio de las propiedades del mar	4
1. La representación espectral	8
2. Características de las olas	15
3. Cruces y fórmula de Rice	18
4. Modelo de Banda Estrecha	22
5. Modelo de Banda Ancha	23
6. La distribución de Gumbel	26
7. Proceso de Poisson	27
Capítulo 2. Distribuciones de probabilidad para ola máxima y alturas de cresta	31
1. Los modelos probabilísticos de las olas del mar	31
2. Las estadísticas de ola a corto plazo	34
3. Modelos para los máximos de altura de olas y crestas	35
4. El modelo Rayleigh-Stokes	37
5. El modelo Longuet-Higgins	40
6. El modelo de Cavanié	41
Capítulo 3. Modelo y análisis de resultados	42
1. Período de cresta	44
2. Altura de la cresta	47
3. PDF común del período de cresta y altura de cresta	50
4. Densidad espectral	51
5. Modelos de Longuet-Higgins y Cavanié para T_c y A_c	53
6. Aproximación de Rayleigh para la altura de cresta de ola	65
7. Resultados generales	67

Conclusiones

70

Bibliografía

72

Introducción

El análisis de las olas del mar generadas por el viento proporcionan información vital para el diseño y operación de los sistemas marinos, y del océano. Las variaciones en los mares generados por el viento dependen de la ubicación geográfica, la estación, la presencia de los ciclones tropicales, etc. Además, el perfil de ola en un estado del mar determinado es extremadamente irregular en el tiempo y en el espacio.

La caracterización de las propiedades estocásticas de las olas del mar surgió por primera vez en la década de 1950. Neumann (1953), Pierson (1952, 1955), St Denis y Pierson (1953) introdujeron el enfoque estocástico para el análisis de los mares al azar, mientras que Longuet-Higgins (1952) demostraron la estimación probabilística de altura de las olas al azar.

Con respecto al diseño de los sistemas marinos, se requiere información sobre el mundo real. En este sentido, los recientes avances tecnológicos permiten el uso del enfoque probabilístico para estimar las respuestas de los sistemas marinos en rutas marítimas, incluidos los valores extremos, con una precisión razonable. Dicha tecnología se presta a la aplicación del enfoque probabilístico como una parte integrada de la tecnología de diseño moderno en la marina, el mar y la ingeniería costera. La finalidad de lo anterior es proporcionar una comprensión completa del concepto moderno de análisis estocástico y la predicción probabilística de los mares aleatorios generados por el viento.

Considerando que las estadísticas de ola a largo plazo, en general, son bastante específicas del sitio, las que son a corto plazo parecen ser más bien universales. Por tanto, es de interés establecer las formas y parametrizaciones adecuadas de las estadísticas a corto plazo para las aplicaciones más amplias. Asimismo, las estadísticas a corto plazo pueden ser utilizadas

para estimar las distribuciones de probabilidad de las olas máximas durante las tormentas individuales, así como en un clima de onda descrita por las distribuciones a largo plazo.

Por otra parte, los modelos no lineales se aplican para analizar el desempeño de los diversos sistemas de registro, donde se demuestra que los instrumentos como la boya o manómetros producen resultados diferentes para la altura de cresta. Las no linealidades modifican las distribuciones de probabilidad, esto incluye la forma analítica (el modelo Rayleigh-Stokes (Nerzic y Prevosto, 1997)). El modelo de Rayleigh-Stokes muestra una concordancia razonable cuando el carácter Lagrangiano de la boya y el filtrado de baja frecuencia en el procesamiento se tiene en cuenta.

El conocimiento de las distribuciones de probabilidad para las olas extremas y de las alturas de cresta es de importancia fundamental para la ingeniería marina y costera, de manera que al diseñar las estructuras costeras es vital considerar los diferentes aspectos que permiten caracterizar el patrón del oleaje que incide sobre ellas. Un paso importante hacia esta caracterización es definir la ola de diseño, para lo cual se requiere analizar los registros de oleaje tomados durante al menos un año en el sitio de interés, además de involucrar la selección y ajustar una distribución de probabilidad adecuada a las alturas de oleaje y extrapolar para definir la correspondiente altura de diseño.

Para este trabajo, tenemos como objetivo analizar los registros de oleaje tomados durante al menos un año en las boyas marinas ubicadas en Ipan (Guam), Hilo (Hawái) y Aunu'u (Samoa Americana).

Este trabajo estará estructurado de la siguiente manera: en el capítulo 1, se darán las definiciones básicas y conceptos relacionados con el mar. Para ello, será necesario estudiar la representación espectral del proceso a considerar. Asimismo, se analizará todo lo referente a los cruces y a la fórmula de Rice.

En el capítulo 2 se estudiará los modelos probabilísticos de las olas del mar, las estadísticas de ola a corto plazo y los modelos para los máximos de altura de olas y crestas.

En el capítulo 3 analizaremos los registros de datos para luego obtener la estimación de la densidad del kernel correspondiente al período y altura de la cresta. De igual forma, estudiaremos la aproximación de Rayleigh, el modelo de Longuett-Higgins, el modelo de Cavanié que corresponda.

Finalmente, daremos la conclusiones a las que se llegó tras realizar los análisis del capítulo 3.

Capítulo 1

Estudio de las propiedades del mar

En este trabajo se busca explicar los principios básicos de apoyo a las técnicas de predicción actuales y proporcionar aplicaciones prácticas de métodos de predicción. Para poder comprender todo lo mencionado es necesario hacer una revisión de algunas técnicas clásicas para estudiar el estado del mar usando parámetros que pueden obtenerse a partir del espectro de energía de la ola.

Procederemos a modelar la superficie del mar como una superficie aleatoria M que evoluciona en el tiempo. Dicho de otra forma expresaremos la superficie del mar como $M(t, x, \omega)$, es decir, un proceso aleatorio M que depende de la posición en el espacio x , del tiempo t y de un parámetro aleatorio ω que pertenece a un espacio de probabilidad (Ω, F, P) .

En nuestro caso, trabajaremos con los datos estadísticos (sobre la altura del mar) obtenidos de boyas marinas. La información que se tiene es la evolución a lo largo del tiempo de la ola en un punto fijo x del espacio. Usaremos la notación $M(t)$ para la altura del nivel del mar en un punto fijo como función del tiempo (prescindiremos del parámetro ω para simplificar).

Para estudiar dicha situación cómodamente es imprescindible hacer algunas suposiciones. La primera sería que el proceso que sirve de modelo es estacionaria, es decir, que la distribución de $M(t + h)$ es la misma para cualquier valor de h , y en particular es siempre igual a la de $M(0)$.

Nuestra siguiente hipótesis es que el nivel medio del mar es 0 y mediremos las variaciones respecto a él (es decir que el proceso que consideramos es centrado: $\mathbb{E}(M(t)) = 0$).

La tercera hipótesis requiere que las trayectorias del proceso sean continuas. M es específicamente una función sobre el espacio producto $[0, \infty) \times \Omega$ con la propiedad de que para cada $t \in [0, \infty)$ fijo, $M(t, \cdot)$ es medible. Si se fija $\omega \in \Omega$ se tiene una función

$$M(\cdot, \omega) : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dicha función se conoce como trayectoria del proceso, y se pide que sea continua para casi todo $\omega \in \Omega$.

La cuarta hipótesis es que el proceso sea ergódico. El concepto de ergodicidad apareció por primera vez en la mecánica estadística clásica. A través del trabajo pionero de Birkhoff, Von Neumann, Khintchine, y otros, se hizo evidente que existe una estrecha conexión entre la teoría ergódica y la teoría de los procesos estocásticos.

Trataremos algunas observaciones preliminares sobre los principales problemas de la teoría y demostraremos algunos resultados. Sólo nos proponemos considerar esos problemas ergódicos que están conectados con los procesos estocásticos de parámetros continuos, y usaremos los conceptos probabilísticos y la terminología que adoptamos.

DEFINICIÓN 1.1. Un **proceso estocástico** es una colección o familia de variables aleatorias $\{X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ definidas sobre algún espacio Ω y ordenadas según el subíndice t , donde T es un conjunto de índices.

Observación:

- Un proceso se dice continuo si T es un intervalo y es discreto si T solamente puede asumir determinados valores.
- En nuestro caso, T representa el intervalo $[0, \infty)$.
- Para ω fijo se obtienen las trayectorias del proceso y para t fijo $X_t(\omega)$ es una variable aleatoria.
- Un proceso estocástico puede interpretarse como una sucesión de variables aleatorias cuyas características pueden variar a lo largo del tiempo.

DEFINICIÓN 1.2. Dada una realización $M(u)$ de un proceso estocástico se define el **promedio temporal** como

$$\langle M(u) \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t M(u) du.$$

DEFINICIÓN 1.3. Un proceso es **ergódico** si los promedios conjuntos son iguales al promedio de tiempo. Es decir

$$\mathbb{E}(M(t)) \equiv \int_{\Omega} M(t, \omega) dP(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t M(u) du.$$

Por lo tanto, la hipótesis de ergodicidad nos permite sustituir los valores esperados (teóricos) por promedios temporales (empíricos).

$$\begin{aligned} Cov(M(t), M(t+h)) &= \mathbb{E}[(M(t) - \mathbb{E}(M(t)))(M(t+h) - \mathbb{E}(M(t+h)))] \\ &= \mathbb{E}[M(t)M(t+h)] - \mathbb{E}[M(t)]\mathbb{E}[M(t+h)] \\ &= \int_{\Omega} M(t, \omega)M(t+h, \omega) dP(\omega) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t M(u)M(u+h) du. \end{aligned}$$

Para tener este resultado nos basamos en que $\mathbb{E}[M(t)] = 0$.

Observación: Todo proceso ergódico es estacionario, sin embargo, lo contrario puede no aplicarse.

Finalmente, llegamos a la hipótesis de Gaussianidad. Antes de hacer las correspondientes observaciones de esta hipótesis es necesario saber cuándo el mar está completamente desarrollado.

Para la primera hipótesis se habló que el proceso que sirve de modelo debe ser estacionario, ya que si se considera la permanencia en el tiempo de las condiciones del mar como hipótesis esta sólo se cumpliría parcialmente (las condiciones del mar cambian con el tiempo, y con ellas los parámetros de las distribuciones estadísticas de la altura de las olas, su longitud, período, etc.). Sin embargo, durante un intervalo de tiempo suficientemente largo de condiciones meteorológicas estables podemos suponer que la distribución de las olas en

un punto específico no cambia con el tiempo. Tiene sentido entonces hablar de altura media, longitud media, período medio y otras características estadísticas en ese punto del espacio. En este caso se dice que el mar está completamente desarrollado.

Es generalmente aceptado que estados completamente desarrollados del mar en aguas profundas pueden ser modelados por procesos Gaussianos. Es decir, que la distribución de la altura de la ola en un punto dado y en un instante de tiempo t tiene la siguiente función de distribución:

$$P(M(t) \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

donde σ^2 es la varianza de la distribución.

Más aún, para cualquier valor de n y cualesquiera instantes de tiempo t_1, t_2, \dots, t_n la distribución del vector $(M(t_1 + h), M(t_2 + h), \dots, M(t_n + h))$ tiene densidad Gaussiana:

$$f_{t_1, \dots, t_n}(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} u' \Sigma^{-1} u}$$

donde $u = (u_1, \dots, u_n)$, $\Sigma = (\text{Cov}(M(t_i), M(t_j)))$.

Al suponer que el proceso es estacionario y centrado, la función de covarianza cumple con la siguiente expresión:

$$r(s, t) = \text{Cov}(M(s), M(t)) = \mathbb{E}(M(s)M(t)) = r(|s - t|).$$

En particular si $s = t$

$$r(s, s) = \text{Var}(M(s)) = \mathbb{E}(M(s)^2) = r(0).$$

La función de covarianza r es par y por lo tanto, si es diferenciable en 0, la derivada debe ser nula. De hecho, si r tiene dos derivadas en el origen la segunda derivada debe ser negativa, esto es: $r''(0) < 0$.

1. La representación espectral

La función de covarianza de cualquier proceso estacionario es positivo-definida:

$$(1.1) \quad \sum_{i,j=1}^n r(t_i - t_j) z_i z_j = \sum_{i,j=1}^n \mathbb{E}(M(t_i)M(t_j)) z_i z_j = \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n M(t_i) z_i \right)^2 \geq 0$$

para algún conjunto finito de puntos de tiempo t_i y números complejos z_i .

Ahora bien, antes de continuar con los conceptos básicos es necesario conocer el Teorema de Bochner.

Primero analicemos la expresión (1.1). Asumiremos que $M(t)$ es continuo c.s, $r(t)$ es continuo para todo t .

Una función continua $r(t)$ tal que el primer miembro de (1.1) es siempre real y no-negativo se dice que es no-negativo definida (positiva-definida). Luego, algún $r(t)$ que pertenece a esa clase es la función de covarianza de un proceso estacionario continuo c.s.

Así, la clase de funciones no-negativas definidas es idéntica que la clase de funciones de covarianza de tal proceso. Ahora procedemos a enunciar un teorema importante debido a Bochner.

Teorema de Bochner

Una función continua $r(t)$ es no-negativa definida, y por consiguiente una función de covarianza si y solo si, existe una función real no-decreciente, continua a la derecha y acotada $F(\omega)$ tal que

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dF(\omega).$$

La función $F(\omega)$ es la función de distribución espectral del proceso.

Demostración:

\Leftarrow) Si $r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dF(\omega)$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^N z_j \bar{z}_k r(t_j - t_k) &= \sum_{j,k=1}^N z_j \bar{z}_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t_j} e^{-i\omega t_k} dF(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^N z_j e^{i\omega t_j} \overline{z_k e^{i\omega t_k}} dF(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^N z_j e^{i\omega t_j} \right|^2 dF(\omega) \geq 0. \end{aligned}$$

\Rightarrow) Para la parte “*solo si*” usaremos algunas propiedades de funciones características. Demostraremos que, dado $r(t)$ existe una función de distribución apropiada $F_{\infty}(\omega) = F(\omega)/F(\infty)$ tal que

$$F_{\infty}(\infty) - F_{\infty}(-\infty) = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dF_{\infty}(\omega) = \frac{r(t)}{r(0)}.$$

Para ello, tomemos un número real $A > 0$, y definamos

$$\begin{aligned}
q(\omega, A) &= \frac{1}{2\pi A} \int_0^A \int_0^A r(t-u) e^{-i\omega(t-u)} dt du \\
&= \frac{1}{2\pi A} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j,k=1}^N r(t_j - t_k) e^{-i\omega t_j} \overline{e^{-i\omega t_k}} \Delta t_j \Delta t_k \\
&= \frac{1}{2\pi A} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j,k=1}^N r(t_j - t_k) \Delta t_j e^{-i\omega t_j} \overline{\Delta t_k e^{-i\omega t_k}} \geq 0.
\end{aligned}$$

Ya que $r(t)$ es no-negativa definida (los t_j definen una partición de $[0, A]$). Pasando al límite, q será la densidad de la distribución espectral deseada.

Antes de proceder con el límite, expresemos $q(\omega, A)$ como

$$\begin{aligned}
q(\omega, A) &= \frac{1}{2\pi A} \int_0^A \int_0^A r(t-u) e^{-i\omega(t-u)} dt du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \left(1 - \frac{|t|}{A}\right) r(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \mu(t/A) r(t) e^{-i\omega t} dt,
\end{aligned}$$

donde

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & \text{para } |t| \leq 1 \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

La demostración será en 3 pasos:

Paso 1:

Demostrar que $q(\omega, A) \geq 0$ es integrable, y

$$\int_{\omega} q(\omega, A) d\omega = r(0)$$

de modo que $q(\cdot, A)/r(0)$ es una función de densidad estadística regular.

Paso 2:

Demostrar que

$$\left(1 - \frac{|t|}{A}\right) \frac{r(t)}{r(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\omega, A)}{r(0)} e^{i\omega t} d\omega,$$

de modo que la función $(1 - \frac{|t|}{A}) \frac{r(t)}{r(0)}$ para $|t| \leq A$ es la función característica para la densidad $q(\omega, A)/r(0)$.

Paso 3:

Tomamos límite cuando $A \rightarrow \infty$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{|t|}{A}\right) r(t) = r(t).$$

Dado que el límite de una sucesión convergente de funciones características es también una función característica, en el supuesto que sea continua, debemos demostrar que existe una distribución estadística tal que $r(t)/r(0)$ es su función característica.

Para los pasos (1) y (2). Multipliquemos $q(\omega, A)$ por $\mu(\omega/2M)$ integremos, y cambiemos el orden de integración. El Teorema de Fubini nos permite hacer esto ya que $\mu(\omega/2M)\mu(t/A)r(t)e^{-i\omega t}$ es acotada y tiene soporte en $[-2M, 2M] \times [-A, A]$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\omega/2M)q(\omega, A) d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\omega/2M) \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t/A)r(t)e^{-i\omega t} dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t/A)r(t) \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\omega/2M)e^{-i\omega t} d\omega dt. \end{aligned}$$

Aquí

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\omega/2M) e^{-i\omega t} d\omega &= \int_{-2M}^{2M} \left(1 - \frac{|\omega|}{2M}\right) e^{-i\omega t} d\omega \\
 &= \int_{-2M}^{2M} \left(1 - \frac{|\omega|}{2M}\right) \cos(\omega t) d\omega \\
 &= 2M \left(\frac{\text{sen}(Mt)}{Mt}\right)^2,
 \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
 \frac{M}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t/A) r(t) \left(\frac{\text{sen}(Mt)}{Mt}\right)^2 dt &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(s/MA) r(s/M) \left(\frac{\text{sen}(s)}{s}\right)^2 ds \\
 &\leq \frac{1}{\pi} r(0) \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\text{sen}(s)}{s}\right)^2 ds = r(0).
 \end{aligned}$$

Ahora $\mu(\omega/2M)q(\omega, A) \nearrow q(\omega, A)$ cuando $M \rightarrow \infty$, de modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(\omega, A) d\omega = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\omega/2M)q(\omega, A) d\omega \leq r(0).$$

Hemos demostrado que $q(\omega, A)$ y $\mu(t/A)r(t)$ son absolutamente integrables sobre toda la recta real.

Dado que ellas forman una transformada de Fourier, es decir,

$$q(\omega, A) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t/A)r(t)e^{-i\omega t} dt,$$

podemos usar el Teorema de Inversión de Fourier, el cual establece que

$$\mu(t/A)r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\omega, A)e^{i\omega t} d\omega,$$

lo cual demuestra el paso 2).

Ahora, tomando $t = 0$, obtenemos el paso 1) y $f_A(\omega) = q(\omega, A)/r(0)$ es una función de densidad de probabilidad para alguna distribución con función característica

$$\phi_A(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\omega, A)}{r(0)} e^{i\omega t} d\omega = \frac{\mu(t/A)}{r(0)} r(t).$$

Para el paso 3) necesitamos uno de los lemas básicos de la teoría de probabilidades, la propiedad de convergencia de funciones características: si $F_A(x)$ es una familia de funciones de distribución con funciones características $\phi_A(t)$, y $\phi_A(t)$ converge a una función continua $\phi(t)$, cuando $A \rightarrow \infty$, entonces existe una función de distribución $F(x)$ con función característica $\phi(t)$ y $F_A(x) \rightarrow F(x)$, para todo x donde $F(x)$ es continua.

Aquí las funciones características $\phi_A(t) = \frac{\mu(t/A)}{r(0)} r(t)$ convergen a $\phi(t) = r(t)/r(0)$, y ya que suponemos $r(t)$ continua, sabemos de lo anterior que

$$F_A(x) = \int_{-\infty}^x f_A(\omega) d\omega$$

converge a una función de distribución $F_\infty(x)$ cuando $x \rightarrow \infty$, con función característica $\phi(t)$:

$$\frac{r(t)}{r(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dF_\infty(\omega).$$

Así, hemos obtenido la representación espectral deseada con $F(\omega) = r(0)F_\infty(\omega)$. \square

Observación: El presente teorema caracteriza la clase de todas las funciones de covarianza continuas como las transformadas de Fourier de todas las medidas positivas y finitas en \mathbb{R} .

Así, la representación espectral (por el teorema de Bochner) es la transformada de Fourier de una función de distribución que llamaremos S , es decir, r tiene una representación espectral:

$$r(h) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau h} dS(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau h) dS(\tau)$$

donde S se conoce como función de distribución espectral. Su derivada s , si existe, es la densidad espectral (conocida también como el espectro).

Si la función de covarianza es integrable entonces la fórmula anterior es invertible

$$S(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\tau h) r(h) dh = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(\tau h) r(h) dh.$$

Usando la representación espectral tenemos:

$$r'(h) = \int_{-\infty}^{\infty} -\tau \operatorname{sen}(\tau h) dS(\tau)$$

$$r''(h) = - \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 \cos(\tau h) dS(\tau)$$

y en particular

$$r''(0) = - \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 dS(\tau).$$

La integral anterior es conocida como el segundo momento espectral:

$$m_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 dS(\tau) = -r''(0).$$

Si r no es dos veces diferenciable en 0 entonces $m_2 = \infty$.

La existencia de m_2 está asociada a la regularidad de las trayectorias del proceso. Cuando $m_2 < \infty$ la función de covarianza obtiene un desarrollo diferente cerca del origen.

Efectuando un desarrollo de Taylor de $r(h)$ alrededor del origen tenemos la siguiente expresión:

$$r(h) = r(0) + \frac{r'(0)(h-0)}{1!} + \frac{r''(0)(h-0)^2}{2!} + O(h^2) = \sigma^2 - \frac{m_2 h^2}{2} + O(h^2)$$

donde $O(h^2)$ es el término residual.

Más aún, es posible mostrar que $m_2 < \infty$ si y sólo si M es diferenciable en media cuadrática, es decir, si hay un proceso $M'(t)$ tal que

$$\frac{M(t+h) - M(t)}{h} \rightarrow M'(t) \text{ en } L^2.$$

Entonces

$$\mathbb{E}(M'(t)) = 0, \quad \text{Var}(M'(t)) = -r''(0) = m_2.$$

Este proceso $M'(t)$ es Gaussiano, independiente de $M(t)$ y tiene función de covarianza

$$\text{Cov}(M'(t), M(t+h)) = -r''(h).$$

Uno de los espectros más comunes es el de JONSWAP. Este espectro se basa en un amplio programa de medición de olas (Joint North Sea Wave Project) realizado entre 1968 y 1969 en el Mar del Norte. El espectro JONSWAP, después de su publicación en 1973, recibió reconocimiento casi instantáneo y se hizo muy conocido en la literatura internacional.

2. Características de las olas

Para estudiar adecuadamente a las olas y sus efectos, es necesario conocer algunas de sus características más importantes.

Altura significativa

DEFINICIÓN 1.4. La **altura significativa** de un estado del mar se define como

$$H_{m_0} = 4\sqrt{\text{Var}(M(t))}.$$

Observación:

- La altura significativa es la medida más importante de la severidad del mar y trata de indicar la altura de las olas más altas que uno puede encontrarse durante un período razonable de tiempo.
- Significativa quiere decir que es suficientemente alta como para tener efecto sobre una estructura colocada en el océano.

Características basadas en cruces del nivel medio

Sea $M(t)$ el proceso que modela las olas en un punto del espacio; $M(t)$ representa la altura sobre el nivel medio del mar. Ahora supongamos que $M(t)$ cruza este nivel medio hacia abajo en los instantes t_1, t_2, \dots, t_n . El tiempo entre dos cruces sucesivos del nivel medio hacia abajo definen el período de la ola y la expresaremos de la siguiente manera:

$$T_{d,k} = t_{k+1} - t_k.$$

La distancia vertical entre el máximo y el mínimo valor del proceso en este intervalo se define como la altura de la ola (que se expresará como $H_{d,k}$).

DEFINICIÓN 1.5. Una **cresta** a_c es el máximo valor de M para t en un intervalo entre dos cruces sucesivos hacia abajo del nivel medio: $t_k < t < t_{k+1}$.

DEFINICIÓN 1.6. Un **seno** a_s es el (valor absoluto del) valor mínimo en el mismo intervalo de tiempo.

Observación: Para distinguir diferentes crestas y senos en los intervalos sucesivos ponemos un índice k en cada valor $(a_{c,k}, a_{s,k})$.

Ahora bien, ya que sabemos lo que es una cresta (a_c) y un seno (a_s) podemos definir los parámetros más importantes de las olas.

DEFINICIÓN 1.7. La **frecuencia** es el número de crestas o senos que pasa por un punto en un tiempo determinado. Es la inversa del período.

DEFINICIÓN 1.8. La **longitud de onda** es la distancia entre dos crestas consecutivas.

DEFINICIÓN 1.9. La **pendiente** es el cociente entre la altura y la longitud de la ola.

DEFINICIÓN 1.10. La **velocidad** es el avance de la ola (puede expresarse como el cociente entre la longitud de la ola y el período).

Otras características

El momento espectral de orden n se define como

$$m_n = \int_0^{\infty} \tau^n s(\tau) d\tau.$$

Anteriormente, se vio cómo la existencia del segundo momento espectral para un proceso Gaussiano está relacionada con la regularidad de las trayectorias. Generalmente, la existencia de momentos de orden superior está asociada a una mayor regularidad de las trayectorias.

Por otra parte, la altura significativa en términos de los momentos espectrales es

$$H_{m_0} = 4\sqrt{\text{Var}(M(t))} = 4\sqrt{m_0}.$$

Además, la frecuencia media a partir del espectro está dada por

$$\frac{m_1}{m_0}.$$

Observación: Si el espectro está concentrado alrededor de una frecuencia dominante, la frecuencia media da el período medio.

3. Cruces y fórmula de Rice

En la práctica, el conteo de cruces de nivel se utiliza a menudo como un medio para describir la variabilidad extrema y el comportamiento de un proceso estocástico continuo.

Por ejemplo, para funciones muestrales de un proceso continuo $\{x(t), t \in \mathbb{R}\}$ decimos que $x(t)$ tiene un cruce hacia arriba al nivel u en t_0 si, para algún $\epsilon > 0$, $x(t) \leq u$ para todo $t \in (t_0 - \epsilon, t_0]$ y $x(t) \geq u$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \epsilon)$. Para cada intervalo $I = [a, b]$, escribimos $N_I^+(x, u)$ para el número de cruces hacia arriba por $x(t)$ en I ($N_I^+ = N_I^+(x, u)$ = número de u -cruces hacia arriba por $x(t)$, $t \in I$).

Para procesos continuos que tienen sólo un número finito de u -valores, debe haber intervalos a la izquierda y a la derecha de cada punto de cruce hacia arriba tal que $x(t)$ es estrictamente menor que u a la izquierda y estrictamente mayor que u a la derecha del punto de cruce (también define $N_I = N_I(x, u)$ = número de $t \in I$ tal que $x(t) = u$).

Observación:

- De forma similar que en el caso de cruces hacia arriba, decimos que $x(t)$ tiene un cruce hacia abajo al nivel u en t_0 si, para algún $\epsilon > 0$, $x(t) \geq u$ para todo $t \in (t_0 - \epsilon, t_0]$ y $x(t) \leq u$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \epsilon)$.
- x se dice que tiene un cruce al nivel u en t_0 si en cada vecindad de t_0 , existen puntos t_1 y t_2 tal que $[x(t_1) - u][x(t_2) - u] < 0$.

DEFINICIÓN 1.11. La **intensidad de los cruces hacia arriba** es cualquier función $\mu_t^+(u)$ tal que

$$\int_{t \in I} \mu_t^+(u) dt = \mathbb{E}(N_I^+(x, u)).$$

DEFINICIÓN 1.12. Del mismo modo se define la **intensidad de los cruces**, como $\mu_t(u)$ si

$$\int_{t \in I} \mu_t(u) dt = \mathbb{E}(N_I(x, u)).$$

Para un proceso estacionario, $\mu_t^+(u) = \mu^+(u)$ y $\mu_t(u) = \mu(u)$ son independientes de t . En general, la intensidad es el número medio de eventos por unidad de tiempo, calculadas en el momento t .

La intensidad de cruces hacia arriba $\mu^+(u)$ fue encontrado por Rice para procesos Gaussianos, resultados que más tarde se les dio pruebas estrictas a través de métodos de conteo desarrolladas por Kac.

La fórmula de Rice para los procesos absolutamente continuos

Presentamos la versión más simple de la fórmula de Rice, válida para los procesos $\{x(t), t \in \mathbb{R}\}$ con trayectorias de la muestra absolutamente continua y distribución continua con la densidad $f_{x(t)}(u) = f_{x(0)}(u)$, independiente de t . Para un proceso de este tipo, $x'(t)$ existe casi en todas partes, y las esperanzas condicionales

$$\mathbb{E}(x'(0)^+ | x(0) = u), \mathbb{E}(|x'(0)| | x(0) = u)$$

existen, (con $x^+ = \max(0, x)$).

Teorema (fórmula de Rice)

Para cada proceso estacionario $\{x(t), t \in \mathbb{R}\}$ con densidad $f_{x(0)}(u)$, las intensidades de los cruces y cruces hacia arriba están dadas por

$$\begin{aligned} (1.2) \quad \mu(u) &= \mathbb{E}(N_{[0,1]}(x, u)) = \int_{-\infty}^{\infty} |z| f_{x(0), x'(0)}(u, z) dz \\ &= f_{x(0)}(u) \mathbb{E}(|x'(0)| | x(0) = u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1.3) \quad \mu^+(u) &= \mathbb{E}(N_{[0,1]}^+(x, u)) = \int_0^{\infty} z f_{x(0), x'(0)}(u, z) dz \\ &= f_{x(0)}(u) \mathbb{E}(x'(0)^+ | x(0) = u). \end{aligned}$$

Estas expresiones son válidas para casi todo u , siempre que las densidades envueltas existan.

Básicamente, la fórmula de Rice cuenta el número promedio de veces que un proceso estacionario ergódico $X(t)$ por unidad de tiempo cruza un nivel fijo u . Usaremos la fórmula de Rice para investigar el comportamiento condicional de un proceso estacionario cuando es observado en el entorno de un cruce de un nivel predeterminado.

Antes de establecer la prueba corta vamos a revisar algunos hechos acerca de las funciones de variación acotada, probados por Banach.

Definimos para cualquier función continua $f(t)$, $t \in [0, 1]$, y un intervalo $I = [a, b] \subset [0, 1]$,

$$N_I(f, u) = \text{el número de } t \in I \text{ tal que } f(t) = u.$$

Además, definimos la variación total de $f(t)$, $t \in I$ como $\sup \sum |f(t_{k+1}) - f(t_k)|$, donde se toma el supremo sobre todas las particiones $a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b$.

Lema (Banach)

Para cada función continua $f(t)$, $t \in I$, la variación total es igual a

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_I(f, u) du.$$

Además, si $f(t)$ es absolutamente continua con derivada $f'(t)$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_I(f, u) du = \int_I |f'(t)| dt.$$

Similarmente, si $A \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto medible Borel, y 1_A es su función de indicatriz, entonces

$$(1.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} 1_A(u) N_I(f, u) du = \int_I 1_A(f(t)) |f'(t)| dt.$$

Ahora bien, demostraremos (1.2) aplicando el teorema de Banach sobre el proceso estacionario $\{x(t), t \in \mathbb{R}\}$ con trayectorias de muestra absolutamente continuas, y por lo tanto diferenciable c.s. Si $x(t)$ tiene función muestral absolutamente continua c. s, entonces (1.4) se cumple para casi todo desarrollo, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1_A(u) N_I(x, u) du = \int_I 1_A(x(t)) |x'(t)| dt.$$

Tomando esperanza y usando el teorema de Fubini para cambiar el orden de integración, obtenemos

$$\begin{aligned} |I| \int_{u \in A} \mu(u) du &= \int_{-\infty}^{\infty} 1_A(u) \mathbb{E}(N_I(x, u)) du \\ &= \mathbb{E} \left(\int_I 1_A(x(t)) |x'(t)| dt \right) \\ &= |I| \mathbb{E}(1_A(x(0)) |x'(0)|) \\ &= |I| \int_{u \in A} f_{x(0)}(u) \mathbb{E}(|x'(0)| \mid x(0) = u) du; \end{aligned}$$

aquí también utilizamos que $\{x(t), t \in \mathbb{R}\}$ es estacionario.

Puesto que A es un conjunto medible arbitrario, obtenemos el resultado deseado,

$$\mu(u) = f_{x(0)}(u) \mathbb{E}(|x'(0)| \mid x(0) = u)$$

para casi todo u . La demostración de (1.3) es similar. □

Observación: La fórmula de Rice se puede extender a procesos no estacionarios, en cuyo caso la intensidad de cruces depende del tiempo.

4. Modelo de Banda Estrecha

Suponemos que el proceso que representa la altura de la ola es aproximadamente sinusoidal:

$$X(t) = a(t)\cos(\omega_0 t + \varepsilon(t))$$

donde $a(t)$ es la amplitud, $\varepsilon(t)$ es la fase y ω_0 es la frecuencia donde se concentra el espectro. $a(t)$ y $\varepsilon(t)$ varían aleatoriamente con t pero lentamente, de hecho la velocidad es mucho menor que ω_0 . Por ello

$$\begin{aligned} X'(t) &= a'(t)\cos(\omega_0 t + \varepsilon(t)) - a(t)(\omega_0 + \varepsilon'(t))\sin(\omega_0 t + \varepsilon(t)) \\ &\approx -a(t)\omega_0\sin(\omega_0 t + \varepsilon(t)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la distribución conjunta de X y de X'/ω_0 es

$$f\left(x, \frac{x'}{\omega_0}\right) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 + \left(\frac{x'}{\omega_0}\right)^2\right)}.$$

Luego, podemos obtener la densidad conjunta de a y ε :

$$f(a, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi\sigma} a e^{-a^2/2\sigma^2}, \quad 0 \leq a < \infty, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 2\pi$$

y la marginal de la amplitud es una distribución de Rayleigh con parámetro $2\sigma^2$.

Observación: σ^2 es el área bajo la densidad espectral, por lo que si conocemos la densidad espectral es posible hacer predicción sobre la altura de las olas.

5. Modelo de Banda Ancha

La trayectoria de los procesos de banda estrecha tiene un sólo máximo durante cada medio ciclo y es éste el que determina la amplitud. Sin embargo, para procesos que no son de banda estrecha puede haber varios extremos durante el medio ciclo determinado por cruces sucesivos del nivel cero. Por lo tanto, procedemos a eliminar la restricción de que el proceso sea de banda estrecha y así, podremos tener máximos positivos y negativos.

Suponemos que el proceso tiene trayectorias continuamente diferenciables. El proceso X tiene un máximo local en t_0 si $X'(t)$ tiene un cruce hacia abajo en t_0 y una cantidad de resultados sobre máximos locales pueden obtenerse a partir de los resultados para cruces hacia abajo.

Basta pedir que $m_4 < \infty$ para confirmar que X tiene sólo un número finito de máximos en un intervalo finito de tiempo (los procesos de este tipo dependen de los momentos espectrales de hasta orden 4). Si esta condición se cumple, entonces X tiene segunda derivada (en media cuadrática) y $X(t), X'(t), X''(t)$ son conjuntamente Gaussianos con media 0 y matriz de covarianza.

$$\begin{pmatrix} m_0 & 0 & -m_2 \\ 0 & m_2 & 0 \\ -m_2 & 0 & m_4 \end{pmatrix}.$$

Si $m_4 < \infty$ tenemos

$$\text{Cov}(X'(t), X'(t+h)) = -r''(h) = m_2 - \frac{m_4 h^2}{2} + O(h^2) \quad (h \rightarrow 0)$$

$$\text{Cov}\left(\frac{X'(t)}{\sqrt{m_2}}, \frac{X'(t+h)}{\sqrt{m_2}}\right) = 1 - \frac{m_4 h^2}{2m_2} + O(h^2) \quad (h \rightarrow \infty).$$

Definimos como $N'(T)$ al número de máximos locales en $[0, T)$ para $X(t)$, que es igual al número de cruces hacia abajo del nivel cero de $X'(t)$, y obtenemos a partir de la fórmula de Rice que

$$\mathbb{E}(N'(T)) = \frac{T}{2\pi} \left(\frac{m_4}{m_2} \right)^{1/2}.$$

Sea ahora $N'_u(T)$ el número de máximos locales de $X(t)$, $0 < t < T$, con altura mayor que u .

PROPOSICIÓN 1. Sea $X(t)$ un proceso Gaussiano con trayectorias continuamente diferenciables, con segunda derivada $X''(t)$ en media cuadrática que satisface $Var(X''(t)) = m_4 < \infty$ y tal que $X(t), X'(t), X''(t)$ tienen distribución no singular, entonces

$$\mathbb{E}(N'_u(T)) = T \int_u^\infty \int_{-\infty}^\infty |z| p(x, 0, z) dz dx$$

donde $p(x, 0, z)$ es la densidad conjunta de $X(t), X'(t), X''(t)$. Además, si X está normalizado.

$$\mathbb{E}(N'_u(T)) = \frac{T}{2\pi} \left[\left(\frac{m_4}{m_2} \right)^{1/2} \left(1 - \Phi \left(u \left(\frac{m_4}{D} \right)^{1/2} \right) \right) + (2\pi m_2)^{1/2} \phi(u) \Phi \left(\frac{um_2}{D^{1/2}} \right) \right]$$

donde $D = m_4 - m_2^2$.

Llamemos s_1, s_2, \dots, s_N , los instantes en los cuales ocurren los $N' = N'(t)$ máximos locales en $[0, T]$ y sean s'_i los instantes de los mínimos, indexados de modo que $s_i < s'_i < s_{i+1}$. Los valores $X(s_1), X(s'_1), X(s_2), \dots$ representan las amplitudes aparentes mientras que $X(s_1) - X(s'_1)$ son las alturas de ola aparentes.

Notamos que

$$\max(X(s_1), \dots, X(s_{N'})) = \sup\{X(t); s_1 < t < s_{N'}\}$$

es igual a $M(T) = \sup\{X(t); 0 < t < T\}$ si $M(T)$ no se alcanza en 0 ni en T .

A partir de las hipótesis anteriores, si $\text{Var}(X(t)) = m_0$, haciendo una normalización en la ecuación anterior y usando la siguiente notación

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m_2}{m_0} \right)^{1/2}, \quad \nu' = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m_4}{m_2} \right)^{1/2}$$

$$\epsilon = \left(1 - \left(\frac{\nu}{\nu'} \right) \right)^{1/2} = \left(1 - \left(\frac{m_2^2}{m_0 m_4} \right) \right)^{1/2}$$

obtenemos

$$\mathbb{E}(N'_u(T)) = T \left[\nu' \left(1 - \Phi \left(\frac{u}{\epsilon \sqrt{m_0}} \right) \right) + \nu \exp \left(\frac{-u^2}{2m_0} \right) \Phi \left(\frac{u \nu m_2}{\epsilon \nu' \sqrt{m_0}} \right) \right].$$

El número esperado de máximos es $T\nu'$ y podemos considerar el cociente $\mathbb{E}(N'_u(T))/T\nu'$ como una aproximación de la probabilidad de que un máximo local esté por encima del nivel $u > 0$. Definimos la función

$$F_{max}(u) = 1 - \frac{\mathbb{E}(N'_u(1))}{\nu'},$$

que es una función de distribución. La densidad correspondiente es

$$f_{max}(u) = \frac{\epsilon}{\sqrt{m_0}} \phi \left(\frac{u}{\epsilon \sqrt{m_0}} \right) + \left(\frac{1 - \epsilon^2}{m_0} \right)^{1/2} \frac{u}{\sqrt{m_0}} \exp \left(\frac{-u^2}{2m_0} \right) \Phi \left(\frac{u(1 - \epsilon^2)^{1/2}}{\epsilon \sqrt{m_0}} \right).$$

Cuando el proceso es ergódico,

$$\frac{N'_u(T)}{N'(T)} \longrightarrow 1 - F_{max}(u)$$

con probabilidad 1, de modo que $F_{max}(u)$ es el límite de la distribución empírica de las amplitudes aparentes. La forma de la distribución depende del llamado parámetro de ancho espectral $\epsilon = \left(1 - \left(\frac{m_2^2}{m_0 m_4}\right)\right)^{1/2}$. Valores pequeños de ϵ corresponden a espectros de banda estrecha. Concretamente, si $\epsilon = 0$ obtenemos la distribución de Rayleigh

$$\frac{u}{m_0} \exp\left(\frac{-u^2}{2m_0}\right)$$

mientras que para $\epsilon = 1$ obtenemos la distribución Gaussiana truncada en 0

$$\sqrt{\frac{2}{\pi m_0}} \exp\left(\frac{-u^2}{2m_0}\right).$$

6. La distribución de Gumbel

Los valores extremos han constituido desde hace bastante tiempo una disciplina de gran interés, y no sólo para estadísticos sino, entre otros, para científicos e ingenieros.

Para Gumbel, el objetivo de la teoría de valores extremos es analizar valores extremos observados y predecir valores extremos en el futuro.

Por otra parte, De Haan y Ferreira (2006) afirman que la teoría asintótica de valores extremos se ha estudiado paralelamente a la del Teorema Central del Límite, de ahí que ambas teorías tengan bastante semejanza. Para ambos autores, la teoría de extremos para muestras está relacionada con el comportamiento límite del $Máx\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ o del $Min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ cuando n tiende a infinito.

La distribución de Gumbel es usada en ingeniería marítima y en general en el diseño de construcciones civiles que puedan estar sometidas a condiciones climatológicas extremas. Lo que se pretende con esta distribución es obtener la probabilidad de que en una determinada serie se den nuevos máximos dadas unas condiciones iniciales.

La función de distribución de Gumbel es

$$F(x) = e^{(-e^{-(x-\mu)/\beta})},$$

mientras que la función de densidad viene dada por

$$f(x) = \frac{e^{(-e^{-(x-\mu)/\beta})}}{\beta}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

donde μ es el parámetro de localización y $\beta > 0$ el parámetro de escala.

La distribución de Gumbel corresponde al caso en el que $\mu = 0$ y $\beta = 1$.

En este caso, la función de distribución viene dada por $F(x) = e^{-e^{-x}}$.

Observación: La distribución de Gumbel ha sido utilizada con buenos resultados para valores extremos independientes de variables meteorológicas y parece ajustarse bastante bien a los valores máximos de la precipitación en diferentes intervalos de tiempo.

7. Proceso de Poisson

La distribución de Poisson

La distribución de Poisson se atribuye al matemático francés Simeon Denis Poisson (1781-1840) quien lo introdujo en 1837.

La distribución de Poisson es una distribución discreta definida sobre los números enteros no negativos, que tiene un único parámetro λ , donde

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \lambda \in (0, \infty)$$

además, $\mathbb{E}(X) = \lambda$ y $Var(X) = \lambda$.

Definición de proceso de Poisson

DEFINICIÓN 1.13. El estado de un sistema es el conjunto más pequeño de variables que permiten predecir la evolución del sistema conocidas las entradas.

DEFINICIÓN 1.14. El espacio de todos los posibles valores del estado es el espacio de estados.

DEFINICIÓN 1.15. Un proceso estocástico en tiempo continuo y con espacio de estados discreto, $\{N_t\}_{t \in [0, \infty)}$, se dice de contar si verifica los siguientes tres axiomas:

- $N_0 = 0$.
- N_t toma únicamente valores enteros no negativos.
- Si $s < t$ entonces $N_s(w) \leq N_t(w)$ para todo $w \in \Omega$.

Observación: Si en la definición se incluye un cuarto axioma, el cual nos dice que el número de llegadas en cualquier intervalo de longitud $\tau > 0$ tiene distribución de Poisson $(\lambda\tau)$, entonces nos encontramos con un proceso de Poisson.

Algunas situaciones prácticas que pueden modelizarse mediante procesos de contar son

- El número de llamadas telefónicas recibidas por una oficina de reserva de billetes aéreos hasta un tiempo t .
- El número de procesos enviados a un servidor hasta un tiempo t .
- El número de errores de software habidos en un sistema informático hasta un instante t .

En general, puede afirmarse que los procesos de contar sirven para modelizar el número de ocurrencias de un cierto fenómeno desde un inicio de tiempo (fijado en $t = 0$) hasta un instante t .

Procederemos a construir una de las definiciones de proceso de Poisson.

Sea $N(t)$ un proceso de Poisson con parámetro λ . Consideremos un intervalo muy corto de longitud h . Entonces, el número de llegadas en este intervalo tiene la misma distribución que $N(h)$. En particular, podemos escribir (usamos el desarrollo de Taylor de $P(N(h) = 0) = e^{-\lambda h}$ para poder tener la siguiente expresión)

$$\begin{aligned} P(N(h) = 0) &= P(N(h) = 0) + \frac{P'(N(h) = 0)h}{1!} + \frac{P''(N(h) = 0)h^2}{2!} + \dots O(h) \\ &= 1 - \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} - \dots + O(h). \end{aligned}$$

Tenga en cuenta que si h es pequeño, los términos que incluyen potencias de exponente 2 (o mayor) de h son insignificantes en comparación con h . Escribimos esto como

$$P(N(h) = 0) = 1 - \lambda h + O(h).$$

Aquí $O(h)$ es una función que es insignificante en comparación con h , cuando $h \rightarrow 0$. Más precisamente, $g(h) = O(h)$ significa que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0.$$

Ahora, echemos un vistazo a la probabilidad de tener una llegada en un intervalo de longitud h .

$$\begin{aligned} P(N(h) = 1) &= e^{-\lambda h} \lambda h \\ &= P(N(h) = 1) + \frac{P'(N(h) = 1)h}{1!} + \frac{P''(N(h) = 1)h^2}{2!} + \dots \\ &= \lambda h \left(1 - \lambda h + \frac{\lambda^2 h^2}{2} - \dots \right) \\ &= \lambda h + \left(-\lambda^2 h^2 + \frac{\lambda^3 h^3}{2} \dots \right) \\ &= \lambda h + O(h). \end{aligned}$$

Concluimos que

$$P(N(h) = 1) = \lambda h + O(h).$$

Similarmente, podemos mostrar que

$$P(N(h) \geq 2) = O(h).$$

Por lo tanto, podemos definir un proceso de Poisson de la siguiente manera

DEFINICIÓN 1.16. Dado un proceso de contar, $\{N_t/t \geq 0\}$, se dice que es un proceso de Poisson de parámetro (o intensidad) $\lambda > 0$, si verifica las siguientes propiedades:

- El proceso tiene incrementos independientes, es decir, si se tienen instantes $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, entonces, las variables aleatorias $N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ (que representan los números de ocurrencias en los intervalos $(t_0, t_1], (t_1, t_2], \dots, (t_{n-1}, t_n]$) son independientes.
- El proceso tiene incrementos estacionarios, es decir, $N_{t+h} - N_{s+h} = N_t - N_s$ para todos $s < t$ y h arbitrario.
- La probabilidad de que en el intervalo $[0, h]$ se de exactamente una ocurrencia del fenómeno es $P(N(h) = 1) = \lambda h + O(h)$. En virtud del axioma anterior esto mismo es válido para cualquier intervalo de longitud h .
- La probabilidad de que haya dos o más ocurrencias en ese mismo intervalo $[0, h]$ es $P(N(h) \geq 2) = O(h)$. De nuevo, por el axioma 2, esta propiedad es válida para cualquier intervalo de longitud h .

Capítulo 2

Distribuciones de probabilidad para ola máxima y alturas de cresta

Al momento de diseñar las estructuras costeras, es necesario tener en cuenta todos aquellos aspectos que caracterizan el patrón del oleaje que incide sobre ellas.

Para nuestro trabajo fue necesario estudiar la teoría de Gauss, así como las distribuciones de probabilidad no lineales a corto plazo. La teoría lineal de olas de Gauss es una importante aproximación de primer orden, y se muestra, mediante simulaciones, que las relaciones asintóticas de la altura máxima de la cresta se ajustan bastante bien para espectros de ola razonables y duraciones del orden de 1 hora.

Es de gran importancia el conocimiento de las distribuciones de probabilidad para las olas extremas y de las alturas de cresta, por ello en el presente capítulo desarrollamos algunos modelos que son de gran ayuda para tener una comprensión completa del concepto moderno de análisis estocástico y la predicción probabilística de los mares aleatorias generadas por el viento.

1. Los modelos probabilísticos de las olas del mar

Las variaciones del estado del mar se producen en una escala del orden del día, mientras que las escalas estacionales y climáticas varían de 1 a muchos años. En nuestro caso, la escala de tiempo más rápida es la escala asociada con las olas individuales y las escalas más lentas están asociadas con las variaciones en el estado del mar.

Sea $X(t, s)$ un proceso estocástico dependiente del tiempo t y de una variable de estado multivariada s que varía en una escala de tiempo más largo que el tiempo característico de

la dependencia en X (suponemos que esta dependencia de tiempo es más grande, pero no mucho más grande que la escala rápida de tiempo).

Es conveniente indicar la variación temporal lenta por τ y considerar $s(\tau)$ como un proceso estocástico. El tiempo rápido t se mide con una unidad de tiempo $T(s)$ y $X(t, s)$ es por lo tanto localmente estacionaria en intervalos de tiempo largos en comparación con $T(s)$ pero cortos en comparación con las variaciones en s .

En nuestro caso trabajaremos para intervalos que son largos con respecto a la escala de tiempo rápido. Tal condición conduce entonces a expresiones de la forma

$$(2.1) \quad P(\max_t X(t, s) < x \mid 0 \leq t \leq D) = F(x, s)^{\frac{D}{T(s)}}$$

para s fijo y duraciones D considerablemente mayor que $T(s)$. Esta expresión tiene la propiedad del producto correcto de eventos independientes y $F(x, s)$ es similar a una función de distribución acumulada. Mediante el fraccionamiento de un historial de tiempo $s(\tau)$ en segmentos donde el estado es (aproximadamente) constante, se obtiene mediante un simple argumento limitante que

$$(2.2) \quad P(\max_t X(t, s) < x \mid 0 \leq t \leq D) = e^{\int_{\tau=0}^D \log(F(x, s(\tau))) d\tau/T(s(\tau))}.$$

Alternativamente, la integral puede ser escrita como una integral sobre las distribuciones de estado correspondientes, $\pi_e(s)$,

$$(2.3) \quad P(\max_{t,s} X(t, s) < x \mid 0 \leq t \leq D) = e^{\int_s \log F(x, s) \pi_e(s) ds/T(s)}.$$

Cuando $D \rightarrow \infty$ y el proceso $s(\tau)$ es ergódico, $\pi_e(s)$ converge a la distribución estacionaria $\pi(s)$ del proceso lento. Si además $1/\langle T \rangle = \int_s \Gamma(s)/T(s) ds$, entonces

$$(2.4) \quad P(\max_{t,s} X(t, s) < x \mid 0 \leq t \leq D) = \left(e^{\int_s^D \log F(x, s) \pi(s) < T > d\tau / T(s)} \right)^{D / < T >} = G(x)^N$$

donde $N = D / < T >$. Ya que G , similar a F , tiene las propiedades de una función de probabilidad acumulada, obtenemos la forma familiar para el máximo de N eventos independientes idénticamente distribuidas, o ya que, N suele ser bastante grande, la forma asintótica correspondiente.

Para aplicar la ecuación (2.4), es necesario determinar (i) la función $F(x, s)$ y (ii) la distribución a largo plazo. Si se puede identificar la ecuación (2.1) con la distribución para el máximo de eventos independientes individuales, la elección para $F(x, s)$ es obvia. Sin embargo, es importante observar que una forma $F(x, s)^N$ bien puede ser suficiente para N razonablemente grandes incluso si $F(x, s)$ es diferente de la distribución de un solo evento.

En el procedimiento de límite llevado a cabo en la ecuación (2.2), se asume de manera tácita que la partición nunca es más fina que los resultados en la duración de una sección que se hace mucho más larga que $T(s)$.

Una manera bastante general de determinar F es por medio de la fórmula de Rice y la propiedad de Poisson de cruces hacia arriba. Recordemos que la frecuencia media de cruces hacia arriba de un nivel x se obtiene de la fórmula de Rice dada por $a_X(x) f_X(x)$ donde $a_X(x) = E(\max(\frac{dX}{dt} |_0, 0))$ cuando $X(0) = x$ y $f_X(x)$ es la densidad de probabilidad de X .

Cuando cruces hacia arriba de niveles altos se producen de acuerdo con un proceso de Poisson, la probabilidad de que no hay cruces hacia arriba a lo largo del intervalo da

$$(2.5) \quad F(x, s) = e^{-a_{X(\cdot, s)}(x) f_{X(\cdot, s)}(x) T(s)}.$$

Como es bien conocido, $a_X(x)$ es constante para los procesos de Gauss, y en muchos casos una función de x que varía lentamente en comparación con f_x .

Para las olas oceánicas, las expresiones anteriores pueden aplicarse en diferentes configuraciones. En primer lugar, se aplican a los máximos de altura de crestas, en cuyo caso X es la elevación de la superficie en un solo punto y s es el estado del mar, por ejemplo, variando durante una tormenta como en Borgman (1973), o dado en forma de una distribución a largo plazo de altura de ola significativa y el período medio como en Krogstad (1985). Sin embargo, exactamente la misma metodología puede aplicarse para X siendo la altura de ola significativa donde s significa las variaciones estacionales y climáticas para el proceso estocástico de altura de ola significativa.

2. Las estadísticas de ola a corto plazo

Por el término del estado del mar entenderemos la condición plena del mar definido, por ejemplo, en términos del espectro de olas, sus parámetros derivados o cualquier otra condición que sea necesaria. Los parámetros más básicos que definen el estado del mar son la altura significativa de la ola, H_s , y el período medio de cruce por cero, T_z . Vamos a suponer que ambos parámetros se definen en términos del espectro de olas como $H_s = 4m_0^{1/2} = 4\sigma_0$ y $T_z = (m_2/m_0)^{1/2}$, donde $m_k = \int_0^\infty f^k S(f) df$.

El período máximo, T_p , es el período correspondiente al máximo del espectro. A veces aplicaremos espectros no dimensionales tal que

$$(2.6) \quad S(f) = \frac{H_s^2 T_p}{16} S_0(f T_p)$$

donde $\int_0^\infty S_0(x) dx = 1$ y $\max(S_0(x)) = S_0(1)$. La pendiente media del mar es el número adimensional $s = H_s/\lambda_0$ donde λ_0 es la longitud de ola correspondiente al pico espectral.

Las estadísticas de ola a corto plazo se ocupan de las propiedades de las olas individuales en un estado de mar constante. La distribución conjunta para la altura y el período de las olas individuales ha atraído una extensa investigación, ver Cavanié y otros (1976), Longuet-Higgins (1975) y Robin y Olagnon (1991), y sus referencias. Sin embargo, se sabe que las

alturas y crestas de las olas adyacentes están correlacionadas en el tiempo, y la secuencia de las alturas de las olas es en realidad a veces modelado como una cadena de Markov. Puesto que se supone que la función $F(x, s)$ define la distribución del máximo que ocurre sobre la duración del estado del mar en lugar del suceso individual, no es necesariamente pertinente utilizar la distribución de las alturas individuales de las olas o crestas.

3. Modelos para los máximos de altura de olas y crestas

Debido a la importancia de la teoría lineal de olas de Gauss, es fundamental conocer la forma de la F -función (ecuación (2.1)) para este caso. Considere los registros de alturas de olas de un mar gaussiano $\eta(t)$, $0 < t < T$, tomados en una ubicación fija. El registro típico de las alturas de olas tiene un pico espectral alrededor de $f_0 = 0,1Hz$ y disminuyendo en frecuencias altas como f^{-p} donde p está entre 4 y 5. El proceso de Gauss correspondiente está por lo tanto bien definida con una correlación que se extiende casi a unos pocos minutos, es decir, mucho más corto que la duración típica de un estado del mar estacionario. El número de cruces hacia arriba de un nivel x por unidad de tiempo es por la fórmula de Rice $\lambda = T_z^{-1}e^{-x^2/2m_0}$. Por otra parte, los cruces hacia arriba superiores tienden a ocurrir de acuerdo al proceso de punto de Poisson. Por lo tanto, la probabilidad para que la altura de la cresta no supere $x(> 0)$ durante el intervalo de tiempo D es

$$(2.7) \quad P(\eta \leq x) = e^{-\lambda D} = e^{\left(-\frac{D}{T_z}e^{-x^2/(2m_0)}\right)} \simeq \left(1 - e^{-x^2/(2m_0)}\right)^N, \quad N = D/T_z.$$

Observación:

- N es el número de olas en lugar del número de crestas.
- En la derivación de la ecuación (2.7) no hay ninguna suposición sobre estrechez del espectro o la existencia del momento espectral de cuarto orden.

Ambas expresiones en la ecuación (2.7), por supuesto, son virtualmente idéntica a la forma asintótica Gumbel $e^{-e^{-(y-a_N)/b_N}}$, $b_N^{-1} = a_N = (2\log N)^{1/2}$, $y = y/\sigma_0$ cuando N es grande.

Longuet-Higgins mostró que la altura de ola debe ser normalizado de acuerdo con la media cuadrática de la amplitud de la ola en lugar de la desviación estándar de la elevación de la superficie como en la distribución de Rayleigh, y Naess pasó a probar la fórmula explícita.

$$(2.8) \quad P(H/m_0^{1/2} \leq x) = \left[1 - e^{\left(\frac{-x^2}{m_0(1-\rho(T/2))}\right)} \right],$$

donde ρ es la función de correlación en el registro de ola y T es el período de la ola.

Actualmente, el valor a utilizar es el mínimo de la función de correlación, que se encuentra típicamente entre -0,6 y -0,75 para los espectros de olas (el valor mínimo depende sólo de la forma del espectro). De la ecuación (2.8) es necesario encontrar la forma de la altura máxima en un estado constante del mar, y, como se ha señalado por Naess (1985), la aplicación de un supuesto de altura de las olas independientes es algo inconsistente con la hipótesis de banda estrecha. Sin embargo, como también se ha señalado por Naess, el efecto de la correlación entre las alturas de las olas adyacentes para espectros de ola típica no parece ser más que un pequeño tanto por ciento cuando N es grande. La ecuación (2.8) elevada a la potencia $N = D/T_z$ es por lo tanto, un modelo adecuado.

La generalización más simple del modelo de Gauss es asumir que el registro de la ola es una transformación determinística de un proceso Gaussiano subyacente, es decir,

$$(2.9) \quad \eta(t) = G(X(t)),$$

donde G es una función fija. Las expresiones para G se pueden determinar a partir de observaciones de la distribución de probabilidad de η , o, como se analiza en (Rychlick y

otros, 1997), mediante el ajuste de las propiedades de cruces a nivel de η como se obtiene de la fórmula de Rice. Para la altura máxima de la cresta entonces tenemos

$$(2.10) \quad P(\max(\eta) \leq x) = \left[1 - e^{(-g(x)^2/2)}\right]^{D/T_z},$$

donde g es la función inversa de G .

Observación: El mismo argumento no es inmediatamente aplicable a la altura máxima de las olas ya que la altura de las olas podría ser dependiente de G tanto en la cresta como en el punto más bajo.

Las distribuciones de valores extremos asintóticas que encontramos son principalmente de la forma de Gumbel, y si V pertenece a la clase Gumbel con una distribución de valor extremo de la forma $e^{(-e^{-(y-a_N)/b_N})}$ y $Z = H(V)$ es una transformación estrictamente creciente de V , entonces Z también pertenece a la clase Gumbel con constantes asintóticas dadas por $\tilde{a}_N = H(a_N)$, $\tilde{b}_N = H'(a_N)b_N$. Esto se aplica en particular para la transformación en la ecuación (2.9) para lo cual se obtienen las constantes asintóticas

$$(2.11) \quad a_N = G(\sigma_x \sqrt{2 \log N}), \quad b_N = G'(\sigma_x \sqrt{2 \log N}) / (\sigma_x \sqrt{2 \log N}), \quad N = D/T_z.$$

4. El modelo Rayleigh-Stokes

Existen varias densidades propuestas en la literatura para aproximar la altura de una cresta de ola o su amplitud. Para el mar de Gauss el modelo más simple y más frecuentemente usado es la densidad de Rayleigh.

La variable de Rayleigh normalizada R tiene la densidad dada por $f(r) = r e^{(-r^2/2)}$, $x > 0$. Es bien sabido que para un mar gaussiano la aproximación de Rayleigh funciona muy bien para las olas altas y en realidad es una aproximación conservadora ya que tenemos

$$P(A_c > h) \leq P(R > 4h/H_s) = e^{-8h^2/H_s^2}.$$

En ese trabajo también se muestra que para cualquier modelo de ola de mar con intensidad de cruce $\mu(u)$, uno tiene $P(A_c > h) \leq \mu(u)/\mu(0)$. La aproximación se hace más precisa a medida que el nivel h aumenta.

La intensidad de cruce $\mu(u)$ viene dada por la fórmula de Rice, Rice (1944), y puede calcularse cuando se conoce la densidad conjunta del nivel del mar $X(t)$ y su derivada $X'(t)$,

$$\mu(u) = \int_0^{+\infty} z f_{X(t), X'(t)}(u, z) dz.$$

Para un mar gaussiano se puede calcular explícitamente

$$\mu(u) = \frac{1}{T_z} e^{-8u^2/H_s^2}.$$

Para los modelos de olas no lineales con olas de Stokes aleatorias, la intensidad de cruce se tiene que calcular utilizando la integración numérica.

Observación: Las olas de Stokes se trata de olas de perfil troncoidal (perfil resultante del movimiento circular y de la propagación, en un instante dado) y su teoría no lineal se puede utilizar en aguas profundas, intermedias y superficiales. Su teoría se basa en una matemática compleja que tiene en cuenta los efectos de la altura en la velocidad y describe con mayor precisión las asimetrías en la velocidad orbital.

El modelo de Gauss de primer orden de la superficie del mar se basa en la superposición de las olas generadas por el viento que se propagan libremente sin límites, que cumplen la relación de dispersión. Comenzando con un modelo de Gauss como la primera aproximación, es posible calcular aproximaciones de orden mayor por métodos de perturbación.

Al asumir un espectro de banda estrecha centrado alrededor de k_m , la elevación de las olas de primer orden (Gaussiana) se puede escribir como un producto de una amplitud y una función de tiempo de fase $X(t) = \sigma_0 a(t) \cos(\theta(t))$, donde la amplitud y la frecuencia instantáneas varían lentamente. Con $\sigma_0 k_m = \pi s/2$ como el parámetro de perturbación, el modelo de banda estrecha de segundo orden unidireccional para la elevación normalizada se convierte en

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \zeta(t)/\sigma_0 &= \left(\frac{\pi}{2}s\right) c_0(\kappa) + \left(\frac{\pi}{2}s\right) c_{diff}(\kappa) a^2(t) + a(t) \cos(\theta(t)) \\ &+ \left(\frac{\pi}{2}s\right) c_{sum}(\kappa) a^2(t) \cos(2\theta(t)) \end{aligned}$$

donde $\kappa = k_m h$ es la profundidad adimensional (c_0 , c_{diff} y c_{sum} son las constantes de profundidad adimensional). Este modelo tiene la misma forma que el modelo utilizado por Martinsen y Winsterstein (1992).

Nos basaremos en lo anterior para obtener el modelo de Rayleigh-Stokes. Si volvemos a la ecuación (2.12), la amplitud $a(t)$ será de variación lenta en comparación con $\theta(t)$. Por lo tanto, el máximo de $\eta(t)$ se producirá alrededor de la duración máxima de $a(t)$, cuando $\theta(t)$ es igual a 0, y entonces

$$(2.13) \quad \eta(t_c)/\sigma_0 = \left(\frac{\pi}{2}s\right) c_0(\kappa) + a(t_c) + \left(\frac{\pi}{2}s\right) (c_{diff}(\kappa) + c_{sum}(\kappa)) a^2(t_c),$$

donde t_c son los tiempos de los máximos del proceso de Gauss de primer orden $X(t) = a(t) \cos(\theta(t))$. Por lo tanto, para el máximo bien podemos considerar el máximo de

$$(2.14) \quad Z = \left(\frac{\pi}{2}s\right) c_0(\kappa) + X + \left(\frac{\pi}{2}s\right) (c_{diff}(\kappa) + c_{sum}(\kappa)) X^2 = H(X),$$

que a su vez es de la forma Gaussiana transformada. Suponiendo la expresión anterior para el máximo de X se obtiene el modelo de Rayleigh-Stokes:

$$P(\eta_{max} \leq x \mid 0 \leq t \leq D) = \left(1 - e^{-\left(\frac{h(x/\sigma_0)^2}{2}\right)}\right)^{D/T_z},$$

$$(2.15) \quad h(z) = \frac{\sqrt{1 + 4\gamma(z - \pi s c_0/2)} - 1}{2\gamma},$$

donde $\gamma = \pi s(c_{diff}(\kappa) + c_{sum}(\kappa))/2$. Tenga en cuenta que $std(\eta) = \sigma_0 + O(s^2)$ y las constantes asintóticas para el máximo $\eta(t)$ son

$$(2.16) \quad a_N/\sigma_0 = \sqrt{2\log N} + \frac{\pi s}{2}[-2c_{diff}(\kappa) + (2\log N)(c_{diff}(\kappa) + c_{sum}(\kappa))]$$

$$(2.17) \quad b_N/\sigma_0 = \left[1 + 2\frac{\pi s}{2}(c_{diff}(\kappa) + c_{sum}(\kappa))\sqrt{2\log N}\right] / \left(\sqrt{2\log N}\right)$$

donde $N = D/T_z$.

5. El modelo Longuet-Higgins

Longuet-Higgins, derivó su distribución aproximativa considerando la distribución conjunta de la amplitud de la envolvente y la derivada temporal de la fase envolvente. El modelo es válido para procesos de banda estrecha. Se cose para dar resultados relativamente precisos para olas grandes, por ejemplo, para olas con amplitudes significativas.

La densidad de Longuet-Higgins depende, además de la altura significativa de las olas H_s y el período de pico T_p , en el parámetro de anchura espectral $\nu = \sqrt{\frac{m_0 m_2}{m_1^2} - 1}$, (para un proceso de banda estrecha, $\nu \approx 0$). La densidad explícita viene dada por

$$f_{T_c, A_c}^{LH}(t, x) = c_{LH} \left(\frac{x}{t} \right)^2 e^{-\frac{x^2}{8} [1 + \nu^{-2} (1 - t^{-1})^2]},$$

donde

$$c_{LH} = \frac{1}{8} (2\pi)^{-1/2} \nu^{-1} [1 + (1 + \nu^2)^{-1/2}]^{-1}.$$

6. El modelo de Cavanié

Otra densidad explícita para la altura de la cresta fue propuesta por Cavanié y otros. Aquí cualquier máximo local positivo se considera como cresta de una ola, y entonces la segunda derivada (curvatura) en el máximo local define el período de ola por medio de una función coseno con la misma altura y la misma curvatura de cresta.

El modelo utiliza el parámetro ν y un parámetro de ancho de banda de orden superior ϵ , definido por

$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}};$$

donde, para un proceso de banda estrecha, $\epsilon \approx 0$. La distribución Cavanié está dada por

$$f_{T_c, A_c}^{CA}(t, x) = c_{CA} \left(\frac{x^2}{t^5} \right) e^{-\frac{x^2}{8\epsilon^2 t^4} \left[\left(t^2 - \left(\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \nu^2} \right) \right)^2 + \beta^2 \left(\frac{1 - \epsilon^2}{1 + \nu^2} \right) \right]},$$

donde

$$c_{CA} = \frac{1}{4} (1 - \epsilon^2) (2\pi)^{-1/2} \epsilon^{-1} \alpha_2^{-1} (1 + \nu^2)^{-2},$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} [1 + (1 - \epsilon^2)^{1/2}],$$

$$\beta = \epsilon^2 / (1 - \epsilon^2).$$

Capítulo 3

Modelo y análisis de resultados

Tenemos como objetivo analizar los registros de oleaje tomados durante el mes de abril en las boyas marinas ubicadas en Ipan (Guam), Hilo (Hawái) y Aunu'u (Samoa Americana). La estación correspondiente a la boya ubicada en Ipan es la 12101, donde la latitud es $13^{\circ} 21' 15''$ N y la longitud es $144^{\circ} 47' 18''$ E. Asimismo, la profundidad de agua es de 200,00 m (metros) y la frecuencia de muestreo es de 1,280 Hz (hercios).

Por otra parte, la estación 18801 (Hilo, Hawái) tiene una latitud de $19^{\circ} 46' 48''$ N y una longitud de $154^{\circ} 58' 12''$ O. La profundidad de agua es de 345,00 m y la frecuencia de muestreo es de 1,280 Hz.

Finalmente, la estación 18901 (Aunu'u, Samoa Americana) tiene una latitud y una longitud de $14^{\circ} 15' 54''$ S y $170^{\circ} 29' 36''$ O, respectivamente. Es de 77,00 m la profundidad de agua y de 1,280 Hz la frecuencia de muestreo.

A partir de la información obtenida, podemos concluir que para las estaciones 12101 (Ipan) y 18801 (Hilo), estamos ante registros de aguas profundas. Esto quiere decir que la profundidad es mayor que la mitad de la longitud de onda (condición usada en aguas profundas). Por el contrario, la estación 18901 (Aunu'u) nos presenta registros de aguas poco profundas. El oleaje para estos casos puede definirse como un proceso estocástico, que varía de forma aleatoria en el espacio y en el tiempo, como se ha dicho.

Se tomaron 7 registros en la boya ubicada en Ipan y 10 en las boyas ubicadas en Hilo y Aunu'u. Dichos registros contienen los datos obtenidos durante 30 minutos y se tomarán como ejemplo, solo uno de ellos por cada boya para representar las características de ola, esto lo haremos para simplificar el trabajo. Luego de realizar los respectivos análisis, se elaborará

un cuadro comparativo de las características de ola para todos los registros y de esta manera, tener resultados más completos.

Los siguientes cuadros muestran los diferentes nombres que tendrán los registros tomados.

Registro	Año	Mes	Día	Hora
Guam1	2016	Abril	05	2:55 pm
Guam2	2016	Abril	05	4:25 pm
Guam3	2016	Abril	05	4:55 pm
Guam4	2016	Abril	05	5:25 pm
Guam5	2016	Abril	05	6:25 pm
Guam6	2016	Abril	05	11:25 pm
Guam7	2016	Abril	06	12:55 am

CUADRO 1. Estación 12101 (Ipan)

Registro	Año	Mes	Día	Hora
Hawaii1	2016	Abril	07	2:17 pm
Hawaii2	2016	Abril	07	9:17 pm
Hawaii3	2016	Abril	07	10:17 pm
Hawaii4	2016	Abril	07	12:17 am
Hawaii5	2016	Abril	08	1:17 pm
Hawaii6	2016	Abril	08	10:17 am
Hawaii7	2016	Abril	08	11:47 am
Hawaii8	2016	Abril	13	3:17 pm
Hawaii9	2016	Abril	13	4:17 pm
Hawaii10	2016	Abril	13	10:17 am

CUADRO 2. Estación 18801 (Hilo)

Registro	Año	Mes	Día	Hora
Samoa1	2016	Abril	09	11:08 pm
Samoa2	2016	Abril	13	2:08 pm
Samoa3	2016	Abril	15	11:38 am
Samoa4	2016	Abril	18	1:38 pm
Samoa5	2016	Abril	19	7:38 pm
Samoa6	2016	Abril	20	5:38 pm
Samoa7	2016	Abril	21	12:08 pm
Samoa8	2016	Abril	22	2:38 pm
Samoa9	2016	Abril	23	12:38 pm
Samoa10	2016	Abril	24	10:38 am

CUADRO 3. Estación 18901 (Aunu'u)

Nota: La intención es usar como ejemplos registros distintos para cada sección.

1. Período de cresta

Como ejemplo de los datos de interés, en la siguiente figura presentamos tres registros de la altura del mar tomados el 5 de abril a las 4:25 pm en Ipan (Guam2), el 7 de abril a las 9:17 pm en Hilo (Hawaii2) y el 13 de abril a las 2:08 pm en Aunu'u (Samoa2).

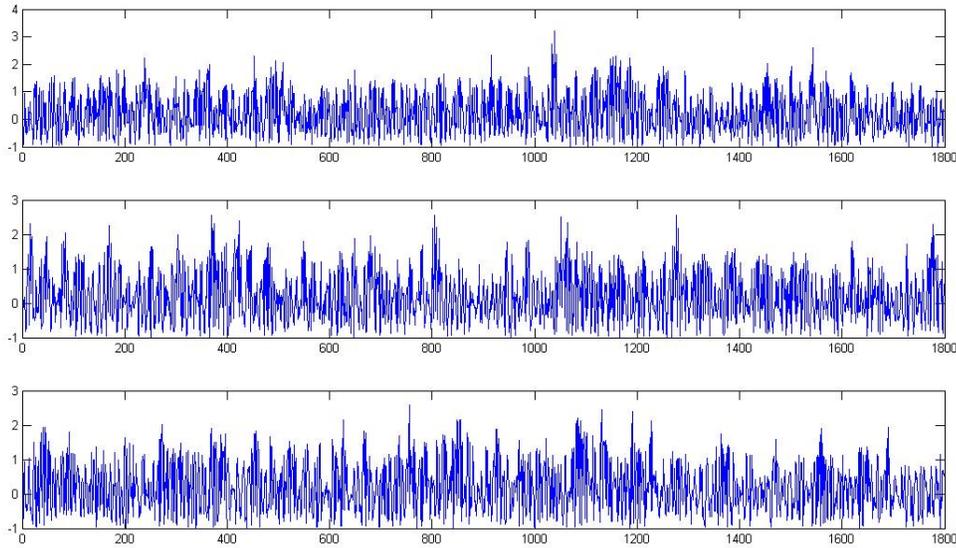


FIGURA 3.1. Tres registros de la altura del mar durante períodos de 30 minutos (gráfica superior, central e inferior: Ipan, Hilo y Aunu'u, respectivamente).

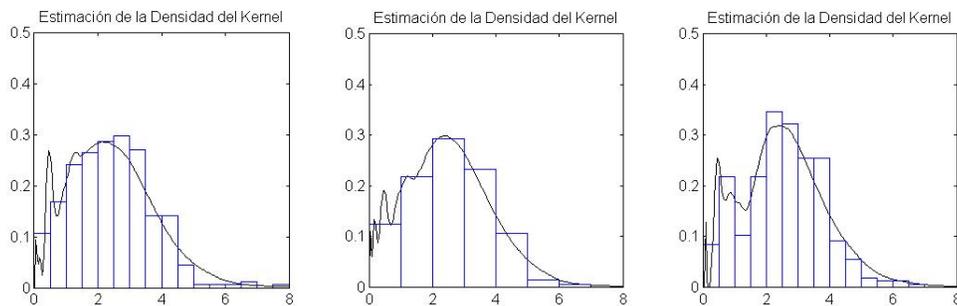
A partir de la figura, se podría llegar a conclusiones tales como que el número de máximos es similar al número de cruces por cero (para cada uno de los casos), es decir, aproximadamente existiría un máximo por cada cruce por cero. Esto correspondería a un proceso de banda estrecha que puede ser simplificado a una densidad de probabilidades de Rayleigh. Sin embargo, es muy anticipado concluir tal cosa.

Ahora, se interpola cada una de las señales a una red más densa. Esto se obtendrá dando un valor apropiado a la variable *rate* que se puede utilizar como entrada a la función de WAFO `dat2wa`.

Luego, se utilizará un estimador de densidad de núcleo (KDE) para estimar la función de densidad de probabilidad (PDF) del período de cresta y comparar el PDF resultante con un histograma de los períodos observados almacenados en el período de cresta. Para definir una escala adecuada para la densidad se calcula primero la media y el máximo de los períodos de cresta observados.

Nota: Se utiliza internamente en KDE un parámetro $L2 = 0$, y provoca una transformación logarítmica de los datos para asegurar que la densidad sea cero para valores negativos.

Procedemos a mostrar el histograma del período de cresta (de cada uno de los registros) comparado con la estimación de la densidad del núcleo.



(ER)



FIGURA 3.2. Estimación de la densidad del núcleo del período de cresta observada en los registros tomados en Ipan (izquierda), Hilo (centro) y Aunu'u (derecha); línea sólida: KDE, en comparación con el histograma de los datos.

En la primera gráfica, el período de cresta incrementa su frecuencia de ocurrencia hasta los tres segundos. A partir de allí, empieza a descender.

Igualmente, en la segunda gráfica observamos que hasta los primeros tres segundos la frecuencia de que ocurra el período de cresta se incrementa mientras más tiempo transcurre. Sin embargo, luego empieza a descender la frecuencia de que ocurra dicho período.

Para la última gráfica, vemos cómo hasta el primer segundo la frecuencia de ocurrencia del período de cresta se incrementa. Asimismo, la frecuencia adquiere nuevamente ese comportamiento hasta poco antes de llegar al tercer segundo. Por último, la gráfica nos muestra

un comportamiento similar con respecto a las otras dos, es decir, la frecuencia de que ocurra el período de cresta empieza a descender poco antes de los tres segundos.

2. Altura de la cresta

Para esta sección se tomaron como ejemplos los registros de datos: Guam1, Hawaii1 y Samoa1. Se usó el programa `dat2steep`, el cual identifica olas y para cada ola da varias características. Es de interés identificar el período medio y la altura de la cresta, así como la altura y la pendiente de la ola.

Pasemos ahora a los estimadores de la densidad del núcleo de la altura de cresta. Es bien sabido que para el mar gaussiano la cola de la densidad es bien aproximada por la distribución de Rayleigh. Aquí, uno puede obtener ayuda mediante la transformación de datos. Esto se puede hacer eligiendo diferentes valores de la entrada $L2$ en la función `kde`.

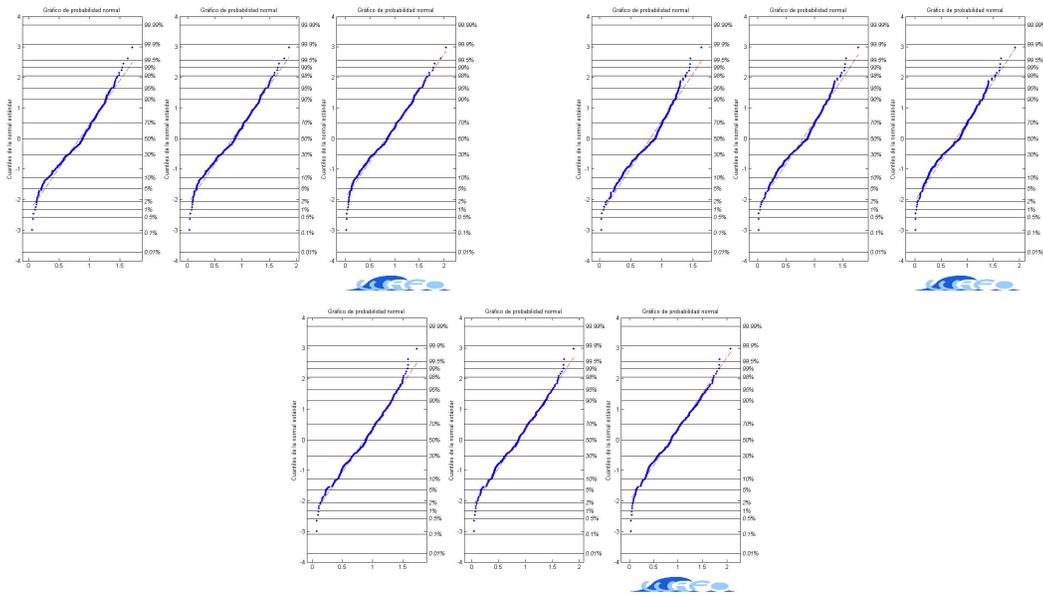
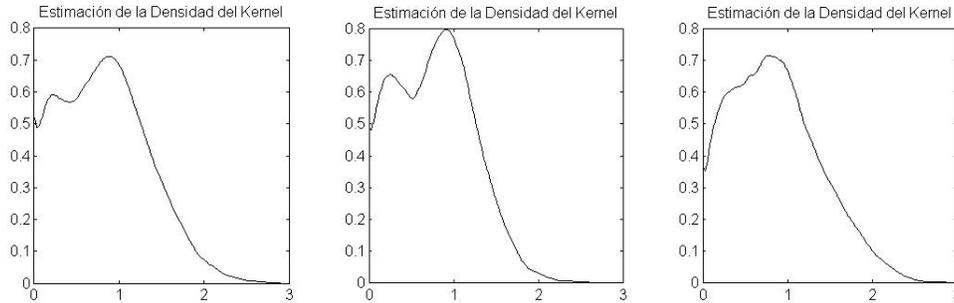


FIGURA 3.3. Trazo normal de los datos transformados (de izquierda a derecha: $L2 = 0,6$; $L2 = 0,7$ y $L2 = 0,8$) de Ipan (arriba a la izquierda), Hilo (arriba a la derecha) y Aunu'u (abajo).

En la figura se observa que para los tres casos sería una buena opción tomar $L2 = 0,8$; ya que el trazo normal de los datos transformados es aproximadamente lineal.



(ER)



FIGURA 3.4. Estimación de la densidad del núcleo de la altura de cresta. De izquierda a derecha: Ipan, Hilo y Aunu'u.

En la figura 3.4 se refleja la frecuencia de ocurrencia de las alturas de cresta de cada uno de los registros. Si se contempla con cuidado las primeras gráficas (las que representan los registros de la altura del mar), notamos que la frecuencia de ocurrencia de las alturas de cresta de estas podría tener semejanza a lo visto en las estimaciones de la densidad del núcleo (kernel) de las gráficas correspondientes a la figura 3.4, a pesar de que las dos figuras representan registros distintos. Esto nos podría indicar que no ha habido grandes cambios en el sistema de oleaje en el tiempo transcurrido entre cada registro.

Asimismo, en las gráficas podemos observar que al alcanzar una altura de cresta mayor a un metro, estas tienen un comportamiento similar (es decir, sus frecuencias son parecidas). Sin embargo, cuando se obtiene una altura de cresta menor o igual a un metro, se tiene un comportamiento claramente diferente.

La integral de la densidad estimada para la estación 12101 (Ipan), 18801 (Hilo) y 18901 (Aunu'u) es 0,9696; 0,9746 y 0,9775; respectivamente, pero debe ser una. Por lo tanto, cuando usamos la densidad estimada para calcular diferentes probabilidades con respecto a la altura de la cresta, la incertidumbre de la probabilidad calculada es de al menos 0,03 (estación

12101); 0,025 (estación 18801) y 0,02 (estación 18901). Sospechamos que esto se debe a que la densidad estimada no es cero para los valores negativos. Para comprobar esto, calculamos la distribución acumulada usando la fórmula,

$$P(A_c \leq h) = 1 - \int_h^{+\infty} f_{A_c}(x) dx$$

donde $f_{A_c}(x)$ es la densidad estimada de A_c (altura de la cresta). Para la función de densidad de probabilidad, se usó un código que da una estimación de la función de distribución acumulada (CDF) para la altura de la cresta y la compara con la distribución empírica calculada a partir de los datos por medio de la función `edf` o `plottedf`.

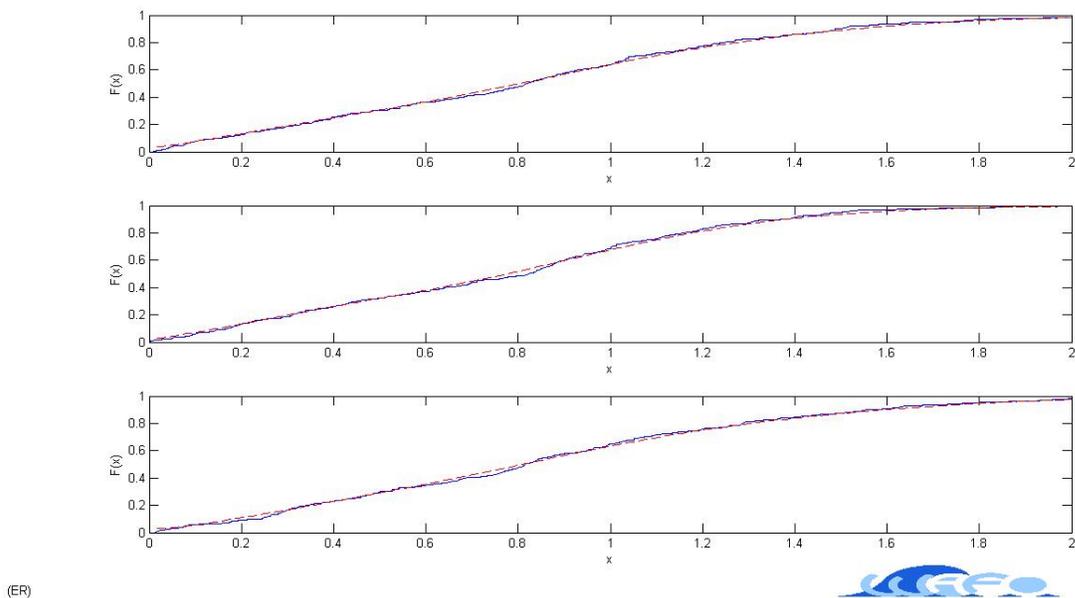


FIGURA 3.5. Comparación de la distribución empírica de la altura de la cresta con la distribución acumulada calculada a partir del estimador KDE (gráfica superior, central e inferior: Ipan, Hilo y Aunu'u, respectivamente).

En la figura 3.5 observamos que para cada uno de los registros, la bondad de ajuste de las dos distribuciones de probabilidad es bastante buena y además, muestra que nuestra hipótesis de que el PDF es demasiado bajo para pequeñas crestas parece ser correcta.

3. PDF común del período de cresta y altura de cresta

Utilizaremos el estimador de la densidad del núcleo para encontrar un buen estimador de la parte central de la densidad conjunta del período de cresta y la altura de cresta. Por lo general, los estimadores de densidad del núcleo dan malas estimaciones de la cola de la distribución, a menos que haya grandes cantidades de datos disponibles. Sin embargo, un KDE proporciona estimaciones cualitativamente buenas en regiones con datos suficientes, es decir, en la parte principal de la distribución. Esto es bueno para la visualización (`pdfplot`) y los modos de detección, las simetrías (anti-simetría) de las distribuciones.

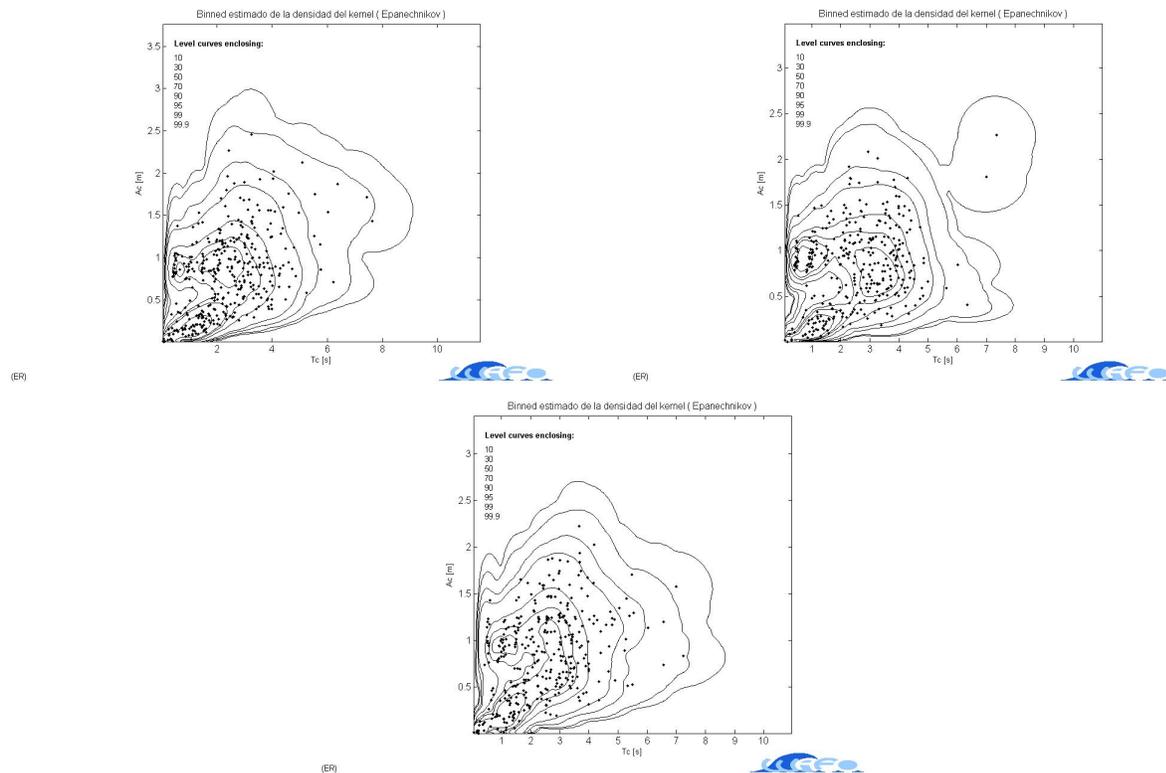


FIGURA 3.6. Estimación del núcleo de la densidad conjunta del período de cresta (T_c) y la altura de la cresta (A_c) comparado con los datos observados (puntos) obtenidos en Ipan (arriba a la izquierda), Hilo (arriba a la derecha) y Aunu'u (abajo).

La figura 3.6 refleja la estimación del núcleo de la densidad conjunta de T_c y A_c comparado con los datos observados, las gráficas fueron obtenidas a partir de los registros Guam3, Hawaii3 y Samoa3. Las líneas de contorno, a menudo llamado simplemente un “contorno”,

unen puntos de igual elevación (altura) por encima de un nivel dado, tal como el nivel medio del mar. En la figura 3.6 las líneas de contorno se dibujan de tal manera que contienen proporciones especificadas (estimadas) de datos.

Podemos ver que para cada uno de los casos, la estimación del núcleo al parecer describe la distribución de datos bastante bien. Llegamos a esa conclusión pues las gráficas tienen concordancia con las presentadas en las secciones anteriores. A pesar de que en las primeras gráficas se representan registros distintos, entre ellos no hay un período de tiempo tan largo y es poco probable que haya grandes cambios. También es obvio que no se puede utilizar para extrapolar fuera del rango de observación.

Asimismo, observamos que las olas con alturas menores en los registros de oleaje pueden presentar periodos más cortos, mientras que olas de alturas mayores que la media no parecen mostrar ninguna correlación con el período de ola.

4. Densidad espectral

Tenemos la intención de calcular la densidad conjunta teórica del período y altura de cresta del modelo Gaussiano transformado y compararla con la KDE. Sin embargo, antes es necesario definir la densidad espectral de cada uno de los registros (usaremos como ejemplos: Guam⁷, Hawaii⁷ y Samoa⁷).

La función principal de los espectros consiste en representar la distribución energética sobre un rango de frecuencias y direcciones. De esta manera, la distribución de energía en el dominio de frecuencias se representa por el espectro de energía $S(f)$.

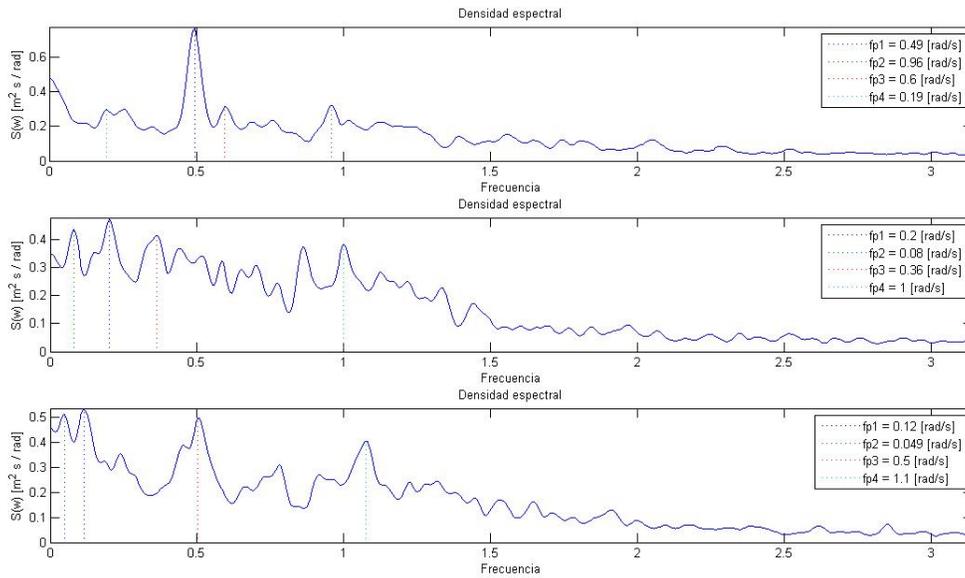


FIGURA 3.7. Densidad espectral: Ipan (arriba), Hilo (centro) y Aunu'u (abajo).

Cada una de las gráficas, que corresponden a la figura 3.7, muestran el espectro de energía para un mar en completo desarrollo para diferentes velocidades del viento. Puede observarse que el tamaño y posición del pico del espectro varía conforme varía la velocidad del viento. Además, notamos que, por lo general, cuando menor es la velocidad menor es la altura de ola y más alta su frecuencia o más bajo su período. Estos resultados nos indican que estamos ante olas que se propagan por la superficie del océano en calma y no olas que genera el viento en una tormenta que parecen caóticas.

Dicho de otra forma, se observa que existen picos muy marcados que están asociados a una gran cantidad energética y que se encuentran en frecuencias bajas. Por otro lado, se puede observar otros picos con menor energía asociada y en frecuencias más altas. Igualmente, en los casos de Ipan, Hilo y Aunu'u observamos espectros bimodales que reflejan la existencia de dos trenes de olas superpuestos con distintas frecuencias dominantes. Uno de ellos corresponde al “*swell*” y el otro corresponde a las olas generadas localmente.

Los sistemas de olas conocidos como “*swell*” viajan grandes distancias y se mezclan con las olas generadas localmente. El “*swell*” se define como las olas que viajan fuera del área

donde han sido generadas. Durante su desplazamiento las olas más pequeñas son sobrepasadas por olas mayores y esto produce un tren de ondas más regular que se mueve en una dirección común.

A partir de lo anterior podemos concluir que no sería adecuado realizar un ajuste de los espectros medidos con un espectro JONSWAP, ya que este se ajusta mejor a un mar de fondo (tipo “*swell*”), para los cuales el agrupamiento esperado del oleaje es mayor y se espera, por tanto, que la energía contenida en la banda de frecuencia infragravitatoria sea mayor. Los estados de mar tipo “*swell*” se identifican con un coeficiente de correlación lineal alto en el ajuste al espectro JONSWAP. Por lo tanto, para todos aquellos estados de mar tipo “*sea*” (olas generadas localmente) y los compuestos de “*sea*” y “*swell*”, identificados con valores bajos del coeficiente de correlación lineal no es adecuado aplicarles un ajuste de los espectros medidos con un espectro JONSWAP.

Como opción alternativa se tiene el espectro de Pierson-Moskowitz. El espectro Pierson Moskowitz es un modelo espectral que recibe el nombre de su autor y que al igual que el resto de espectros, es un modo de representación irregular del oleaje, muy distinta a la descripción del oleaje regular, como consecuencia de que las variables no se mantienen constantes en el tiempo. En la descripción espectral se representa el comportamiento del oleaje como una señal compleja que puede caracterizarse por su espectro de energía o función de densidad espectral, con el objetivo de trabajar con toda la información y obtener resultados lo más cercanos a la realidad. Este espectro está desarrollado a partir de los estudios realizados en el Mar del Norte, con el fin de representar estados del mar, generados por el viento, completamente desarrollados.

5. Modelos de Longuet-Higgins y Cavanié para T_c y A_c

En esta parte consideraremos el mar gaussiano. Suponemos que el nivel de referencia es cero y que el espectro es conocido (por la parte anterior). Vamos a presentar algunos resultados explícitos que son conocidos y estudiados en la literatura acerca de las características de

las olas. Algunos de ellos son exactos, otros se derivan de la simplificación de las funciones aleatorias que describen la superficie del mar.

Nota: En esta sección seguiremos usando como ejemplos los registros Guam7, Hawaii7 y Samoa7, para mantener la continuidad con respecto a la sección anterior. No obstante, si vemos que algunos registros presentan características muy distintas al resto, también se tomarán como ejemplos y el resultado se comparará con el obtenido anteriormente.

Para las olas gaussianas, el espectro y los momentos espectrales contienen información exacta sobre el comportamiento promedio de muchas características de ola. Las funciones de WAFO, `spec2char` y `spec2bw`, calculan una larga lista de parámetros característicos de olas.

Registro	H_s	\bar{T}	T_z	\bar{T}_c	T_p
Guam1	2,83	6,38	5,03	3,00	19,57
Guam2	2,80	6,21	4,96	3,01	14,54
Guam3	2,77	6,36	5,05	3,01	24,47
Guam4	2,80	6,49	5,10	2,97	22,48
Guam5	2,94	6,27	5,02	3,02	12,45
Guam6	2,81	6,31	4,99	2,99	14,51
Guam7	2,68	6,16	4,90	2,95	13,12

CUADRO 4. Características de ola: Estación 12101 (Ipan)

Registro	H_s	\bar{T}	T_z	\bar{T}_c	T_p
Hawaii1	2,58	6,26	5,06	3,09	11,33
Hawaii2	2,76	6,61	5,19	3,04	14,82
Hawaii3	2,76	6,38	5,06	2,98	13,38
Hawaii4	2,81	6,23	5,01	3,06	12,01
Hawaii5	2,85	6,99	5,49	3,11	14,12
Hawaii6	3,02	7,34	5,68	3,11	18,23
Hawaii7	2,82	6,73	5,31	3,04	13,26
Hawaii8	2,84	6,48	5,18	3,09	13,58
Hawaii9	2,85	6,53	5,16	3,03	13,90
Hawaii10	2,88	6,30	5,04	3,04	12,90

CUADRO 5. Características de ola: Estación 18801 (Hilo)

Registro	H_s	\bar{T}	T_z	\bar{T}_c	T_p
Samoa1	2,88	6,31	5,00	3,01	17,03
Samoa2	2,77	6,56	5,22	3,05	12,99
Samoa3	2,80	6,39	5,13	3,06	12,35
Samoa4	2,82	6,92	5,46	3,13	18,77
Samoa5	2,95	7,20	5,59	3,09	15,91
Samoa6	2,81	6,33	5,08	3,03	11,42
Samoa7	2,87	6,51	5,15	3,06	15,87
Samoa8	2,87	6,79	5,39	3,13	14,43
Samoa9	2,91	5,98	4,82	2,95	11,84
Samoa10	2,92	7,07	5,48	3,09	22,55

CUADRO 6. Características de ola: Estación 18901 (Aunu'u)

Los cuadros 4, 5 y 6 nos muestran algunos datos importantes, como el período medio entre máximos. De igual forma, en los cuadros vemos cómo los valores de T_p son altos para las alturas significativas que obtuvimos, razón por la cual no es adecuado realizar un ajuste de los espectros medidos con un espectro JONSWAP (reafirmando la conclusión a la que se había llegado anteriormente).

Por otra parte, observamos que la mayoría de las características de ola (H_s , \bar{T} , T_z y \bar{T}_c) de los registros de cada estación tienen valores similares. Sin embargo, T_p muestra valores muy dispares en algunos registros. Concretamente, para la estación 12101 (Ipan), T_p es muy distinto en Guam1, Guam3 y Guam4 comparado a lo que se ve en los otros registros, T_p en la estación 18801 (Hilo) es muy distinto en el registro Hawaii6 con respecto a los demás y en Aunu'u, T_p muestra valores claramente diferentes en Samoa1, Samoa4 y Samoa10 si se les compara con los demás. Todo lo observado anteriormente se debe al carácter irregular de los oleajes.

Nota: Al ser tan distintos los valores de T_p y T_z , el oleaje correspondiente a cada estación está lejos de ser regular, ya que cuando más regular es el oleaje más se parece T_p a T_z (aunque normalmente T_p es mayor que T_z).

Ahora bien, usamos la función `spec2mom` para ver qué momentos espectrales se calculan. La información más básica sobre las olas está contenida en los momentos espectrales. Una de las variables de salida contiene ahora información sobre qué tipo de momentos se han calculado, en este caso los momentos espectrales hasta el orden de cuatro (m_0, \dots, m_4).

Otras de las características importantes de olas son los parámetros de anchura espectral usados habitualmente en los modelos de Longuet-Higgins y Cavanié. En los siguientes cuadros se mostrarán los valores de dichos parámetros.

Registro	ν (modelo de Longuet-Higgins)	ϵ (modelo de Cavanié)
Guam1	0,77	0,80
Guam2	0,75	0,79
Guam3	0,76	0,80
Guam4	0,78	0,81
Guam5	0,75	0,79
Guam6	0,77	0,80
Guam7	0,76	0,79

CUADRO 7. Parámetros de anchura espectral: Estación 12101 (Ipan)

Registro	ν (modelo de Longuet-Higgins)	ϵ (modelo de Cavanié)
Hawaii1	0,72	0,79
Hawaii2	0,78	0,81
Hawaii3	0,76	0,80
Hawaii4	0,73	0,79
Hawaii5	0,78	0,82
Hawaii6	0,81	0,83
Hawaii7	0,77	0,81
Hawaii8	0,75	0,80
Hawaii9	0,77	0,80
Hawaii10	0,74	0,79

CUADRO 8. Parámetros de anchura espectral: Estación 18801 (Hilo)

Registro	ν (modelo de Longuet-Higgins)	ϵ (modelo de Cavanié)
Samoa1	0,76	0,79
Samoa2	0,76	0,81
Samoa3	0,74	0,80
Samoa4	0,77	0,81
Samoa5	0,81	0,83
Samoa6	0,74	0,80
Samoa7	0,77	0,80
Samoa8	0,76	0,81
Samoa9	0,73	0,79
Samoa10	0,81	0,82

CUADRO 9. Parámetros de anchura espectral: Estación 18901 (Aunu'u)

En los cuadros se muestran los valores correspondientes a los parámetros de anchura espectral para el modelo de Longuet-Higgins. Se observa que en los tres casos nos encontramos en una situación similar, los parámetros tienen valores altos, por lo que el sistema de olas predominante es “*sea*”.

Igualmente, los cuadros muestran los valores de los parámetros de achura espectral para el modelo Cavanié. Como en el caso del modelo de Longuet-Higgins, los parámetros tienen valores altos para los tres casos, por lo que el sistema de olas predominante es “*sea*”. Además, vemos que estos valores son ligeramente superiores en comparación con los del modelo anterior, así que el sistema de olas “*sea*” es incluso más predominante en este caso.

Ahora, comenzamos definiendo un espectro de Pierson-Moskowitz, describiendo un estado del mar a partir de algunas características de las olas (hallados gracias al espectro definido a partir de cada registro).

Aplicaremos dos aproximaciones para el PDF conjunto de (T_c, A_c) . Concretamente se considerarán los modelos de Longuet-Higgins y Cavanié, cuyas densidades son calculadas por las funciones `lh83pdf` y `cav76pdf`, respectivamente. Ambas funciones necesitan momentos espectrales como entradas. Hay que tener en cuenta que los modelos sólo dependen de unos pocos momentos espectrales y no del espectro completo de la ola.

En WAFO se ha modificado la densidad de Longuet-Higgins para ser aplicable para los modelos Gaussianos transformados. Calculamos la transformación propuesta por Winterstein y la combinamos con el modelo de Longuet-Higgins.

Antes de mostrar las representaciones gráficas de los modelos de Longuet-Higgins y Cavanié, presentaremos las nuevas características de ola obtenidas a partir del espectro de Pierson-Moskowitz.

Registro	H_s	\bar{T}	T_z	\bar{T}_c	T_p	ν	ϵ
Guam1	2,82	15,22	14,23	10,05	18,66	0,37	0,70
Guam2	2,79	11,31	10,57	7,47	13,86	0,37	0,70
Guam3	2,76	19,03	17,80	12,57	23,33	0,37	0,70
Guam4	2,79	17,48	16,35	11,55	21,43	0,37	0,71
Guam5	2,93	9,68	9,05	6,39	11,87	0,37	0,70
Guam6	2,80	11,28	10,55	7,45	13,83	0,37	0,70
Guam7	2,67	10,20	9,54	6,74	12,51	0,37	0,70

CUADRO 10. Características de ola (espectro de Pierson-Moskowitz): Estación 12101 (Ipan)

Registro	H_s	\bar{T}	T_z	\bar{T}_c	T_p	ν	ϵ
Hawaii1	2,57	8,81	8,24	5,82	10,80	0,37	0,70
Hawaii2	2,75	11,52	10,78	7,61	14,13	0,37	0,70
Hawaii3	2,75	10,40	9,73	6,87	12,75	0,37	0,70
Hawaii4	2,80	9,34	8,73	6,17	11,45	0,37	0,70
Hawaii5	2,84	10,98	10,27	7,25	13,46	0,37	0,70
Hawaii6	3,01	14,18	13,26	9,36	17,38	0,37	0,70
Hawaii7	2,82	10,31	9,64	6,81	12,64	0,37	0,70
Hawaii8	2,83	10,56	9,88	6,97	12,94	0,37	0,70
Hawaii9	2,84	10,81	10,11	7,14	13,25	0,37	0,70
Hawaii10	2,87	10,03	9,38	6,62	12,30	0,37	0,70

CUADRO 11. Características de ola (espectro de Pierson-Moskowitz): Estación 18801 (Hilo)

Registro	H_s	\bar{T}	T_z	\bar{T}_c	T_p	ν	ϵ
Samoa1	2,87	13,24	12,39	8,75	16,23	0,37	0,70
Samoa2	2,76	10,10	9,45	6,67	12,38	0,37	0,70
Samoa3	2,79	9,60	8,98	6,34	11,77	0,37	0,70
Samoa4	2,81	14,60	13,65	9,64	17,89	0,37	0,70
Samoa5	2,94	12,37	11,57	8,17	15,17	0,37	0,70
Samoa6	2,80	8,88	8,30	5,86	10,89	0,37	0,70
Samoa7	2,87	12,34	11,54	8,15	15,13	0,37	0,70
Samoa8	2,86	11,22	10,49	7,41	13,76	0,37	0,70
Samoa9	2,90	9,21	8,61	6,08	11,29	0,37	0,70
Samoa10	2,91	17,54	16,40	11,58	21,50	0,37	0,70

CUADRO 12. Características de ola (espectro de Pierson-Moskowitz): Estación 18901 (Aunu'u)

En los cuadros se pueden ver claras diferencias entre las características de ola del espectro original (de cada registro) y las del espectro de Pierson-Moskowitz. Una de esas diferencias se encuentran en el parámetro de anchura espectral del modelo de Longuet-Higgins, donde ahora su valor se aleja de 1. Esto quiere decir que dicho modelo puede tener más concordancia con los datos observados, ya que está basada en un modelo gaussiano de banda estrecha (Cavanié también se basa en ese modelo). Por el contrario, a pesar que hay diferencia entre los parámetros de anchura espectral del modelo de Cavanié del espectro inicial con el de Pierson-Moskowitz, no se aleja lo suficiente a 1. Por lo que la concordancia con los datos observados podría no ser tan exacta.

Igualmente, vemos cómo los parámetros para cada estación son iguales. Esto nos podría dar una idea que las representaciones gráficas de los modelos de Longuet-Higgins y Cavanié de cada estación serán similares para la mayoría de los casos.

Nota: El ajuste de los espectros medidos con un espectro Pierson-Moskowitz nos muestra un acercamiento mayor a un oleaje regular con respecto a cada estación, ya que son más parecidas T_p y T_z en comparación con el espectro definido.

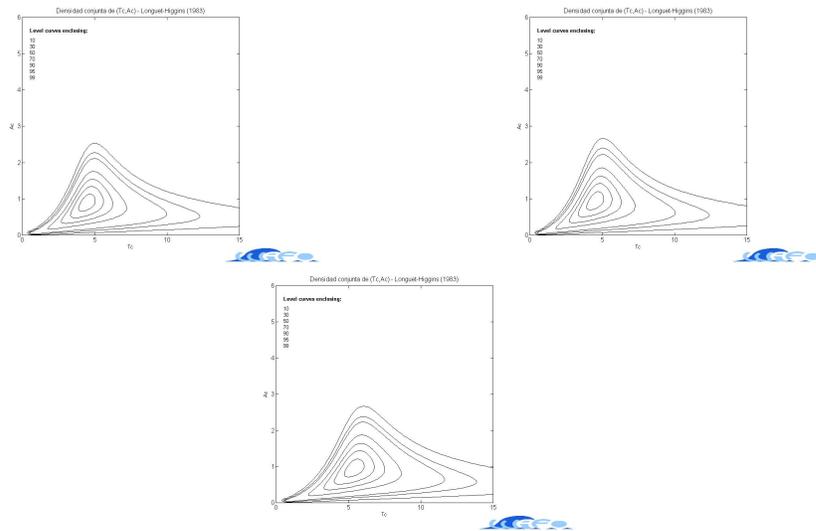


FIGURA 3.8. Modelo de Longuet-Higgins para PDF común del período de cresta T_c y altura de cresta A_c (mar Gaussiano lineal): Ipan (arriba a la izquierda), Hilo (arriba a la derecha) y Aunu'u (abajo).

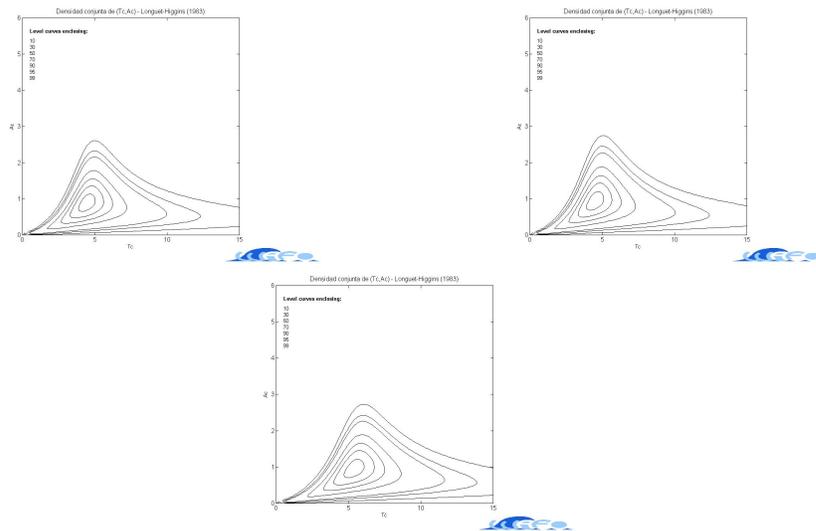


FIGURA 3.9. Modelo de Longuet-Higgins para PDF común del período de cresta T_c y altura de cresta A_c (mar Gaussiano transformado): Ipan (arriba a la izquierda), Hilo (arriba a la derecha) y Aunu'u (abajo).

En las figuras 3.8 y 3.9 se contemplan el modelo de Longuet-Higgins para cada registro (Guam7, Hawaii7 y Samoa7). Como se esperaba, las figuras muestran que las olas más altas son las más regulares en el período de crestas, con la probabilidad condicional concentrada aproximadamente en $T_c = 5$. Además, la distribución es asimétrica en el período medio entre

máximos. Un trabajo anterior (Longuet-Higgins, 1975) produjo una distribución que usaba la misma medida de ancho espectral pero que era simétrica en el período e inconsistente con las distribuciones observadas.

Por otra parte, en las figuras 3.8 y 3.9 se pueden observar que las líneas de contorno se dibujan de tal manera que contienen proporciones predefinidas de la masa de probabilidad total dentro de los contornos. También podemos ver que en la figura 3.9 (mar Gaussiano transformado) se dan olas un poco más altas para el espectro definido si se compara con la figura 3.8 (mar Gaussiano lineal), es decir, incluyendo algunos efectos no lineales, el modelo de Longuet-Higgins da olas un poco más altas para el espectro definido.

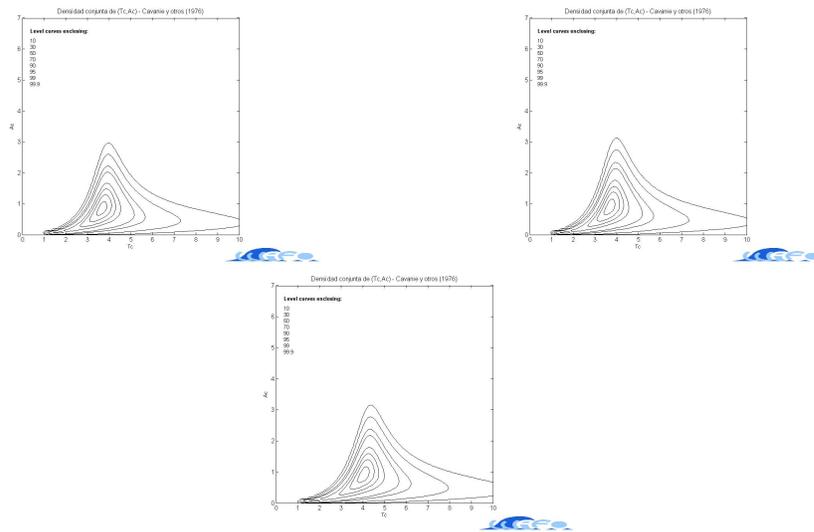


FIGURA 3.10. Líneas de contorno de la densidad conjunta del período de cresta y la altura de cresta propuesta por Cavanié, para el mar Gaussiano: Ipan (arriba a la izquierda), Hilo (arriba a la derecha) y Aunu'u (abajo).

La figura 3.10 muestra las gráficas correspondientes al modelo de Cavanié (para los registros Guam7, Hawaii7 y Samoa7), donde las observaciones que se pueden hacer no son muy distintas a lo que se muestra en las figuras 3.8 y 3.9. Sin embargo, si se contempla con cuidado podemos ver ciertas diferencias, como que la probabilidad condicional está concentrada cerca de $T_c = 4$. Por otro lado, la distribución conjunta de Cavanié es asimétrica cerca del período medio entre máximos (por lo que no es tan exacta como el modelo de Longuet-Higgins).

De acuerdo a lo visto anteriormente, notamos que tiene apoyo el sustento teórico de los modelos de Longuet-Higgins y Cavanié comparado a los resultados obtenidos. Debido a que el modelo de Longuet-Higgins tiene la gran ventaja de utilizar un parámetro de ancho espectral de orden menor (dependiente del segundo y no del cuarto momento), mientras que la distribución de Cavanié (a pesar de presentar una buena concordancia con los datos observados) tiene el defecto de utilizar el parámetro de anchura espectral ϵ el cual depende del cuarto momento de la función de densidad espectral. Este momento tiene el inconveniente de estar asociado a la cuarta potencia de la función de densidad espectral y cualquier pequeño error en la distribución resulta muy amplificado, sobre todo para las altas frecuencias.

Anteriormente, se mencionó que para cada estación, T_p tiene valores muy dispares en algunos registros si los comparamos con el resto. A partir de esto, tomaremos como ejemplos uno de ellos por estación, los registros Guam4, Hawaii6 y Samoa10, para representar nuevamente los modelos de Longuet-Higgins y Cavanié y así, poder ver cuáles son las diferencias que tienen con respecto a lo obtenido previamente.

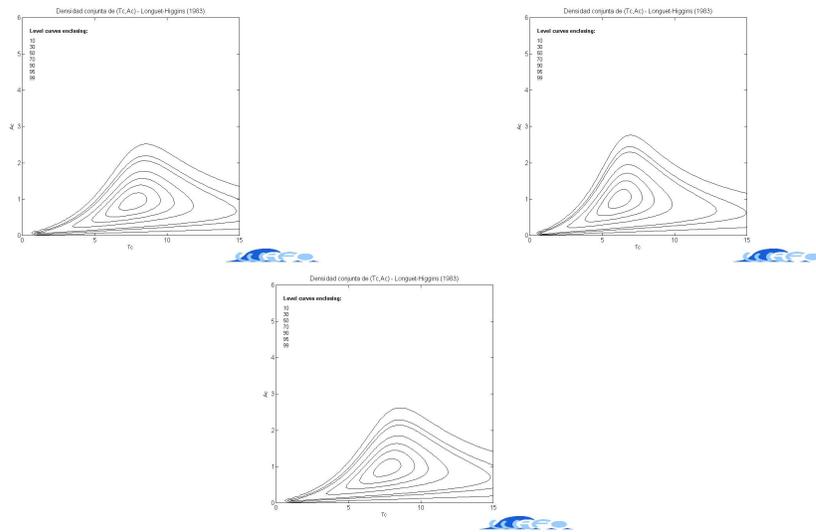


FIGURA 3.11. Modelo de Longuet-Higgins para PDF común del período de cresta T_c y altura de cresta A_c (mar Gaussiano lineal): Ipan (arriba a la izquierda), Hilo (arriba a la derecha) y Aunu'u (abajo).

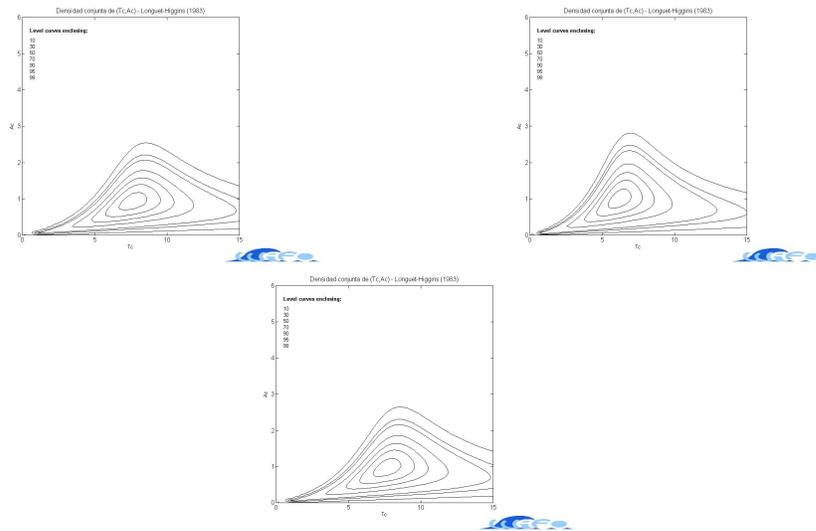


FIGURA 3.12. Modelo de Longuet-Higgins para PDF común del período de cresta T_c y altura de cresta A_c (mar Gaussiano transformado): Ipan (arriba a la izquierda), Hilo (arriba a la derecha) y Aunu'u (abajo).

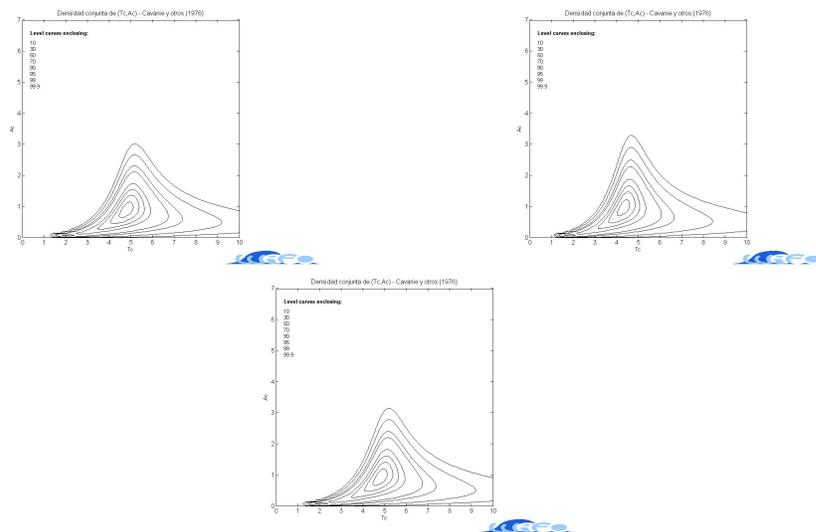


FIGURA 3.13. Líneas de contorno de la densidad conjunta del período de cresta y la altura de cresta propuesta por Cavanié, para el mar Gaussiano: Ipan (arriba a la izquierda), Hilo (arriba a la derecha) y Aunu'u (abajo).

En las figuras 3.11 y 3.12 se aprecia el modelo de Longuet-Higgins para cada registro y claramente notamos diferencias entre estas y las obtenidas a partir de los registros Guam7, Hawaii7 y Samoa7. Las gráficas correspondientes a Ipan y Aunu'u tienen la probabilidad

condicional concentrada aproximadamente en $T_c = 7,5$; a diferencia de lo visto anteriormente ($T_c = 5$).

Para la estación 18801 (Hilo), también notamos que la probabilidad condicional en este caso es distinta a lo que se había contemplado antes. Aún así, la diferencia entre las dos representaciones no es tan grande.

De igual forma, en la figura 3.13 (correspondiente al modelo de Cavanié) se observa que la probabilidad condicional (para los tres casos) es distinta si se compara a lo visto en la figura 10. No obstante, las dos representaciones tienen una similitud mayor comparado a lo obtenido en el modelo de Longuet-Higgins.

Todo lo observado se podría tomar como algo normal, ya que el sistema de olas predominante para los tres casos es “*sea*”.

6. Aproximación de Rayleigh para la altura de cresta de ola

Usaremos una aproximación de Rayleigh transformada para la altura de cresta derivada del espectro marino obtenido a partir de Guam⁵, Hawaii⁵ y Samoa⁵. Para comprobar la exactitud de las aproximaciones, utilizaremos el espectro estimado a partir de cada uno de los registros (daremos las distribuciones acumuladas para las densidades calculadas).

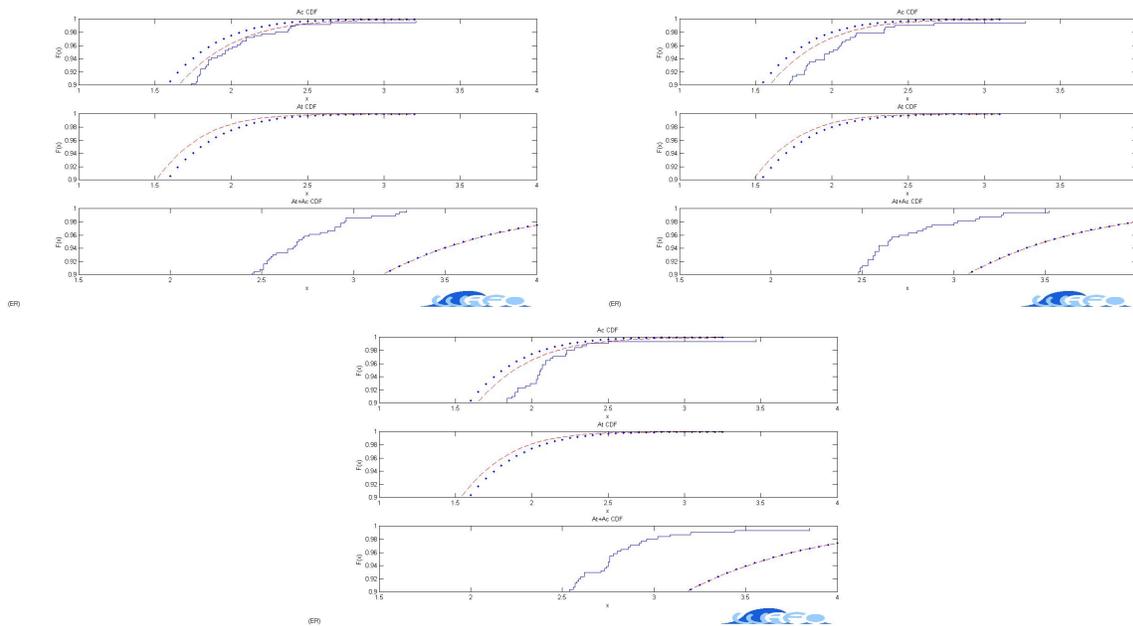


FIGURA 3.14. Cola de la distribución empírica de la altura de la cresta (arriba), la altura del seno (centro) y la amplitud (inferior) en comparación con la aproximación de Rayleigh (puntos) y el modelo de Rayleigh transformado (gráfica superior izquierda, superior derecha e inferior: Ipan, Hilo y Aunū'u, respectivamente).

Podemos observar diferencias entre las distribuciones de cresta y de seno observadas y la obtenida a partir de la transformación calculada con la función `hermitetr` propuesta por Winterstein (Martinsen y Winterstein derivaron una expresión para la asimetría y la curtosis de las olas de Stokes de banda estrecha y las utilizaron para definir la transformación). Sin embargo, todavía da una aproximación mejor que la aproximación de Rayleigh estándar (puntos). Finalmente, se puede ver que las variables Rayleigh y transformadas de Rayleigh dan aproximaciones demasiado conservadoras a la distribución de la amplitud de la ola.

Por otra parte, la distribución de Rayleigh se caracteriza por una banda de frecuencias relativamente angosta. Dicho de otra forma, esta distribución es exacta para un oleaje tipo “*swell*” puro y ancho de espectro igual a cero. Rayleigh supone que si se tiene una cresta grande, el siguiente seno será grande. Entonces se puede concluir que las diferencias entre las distribuciones de cresta y de seno observadas y la transformación de Rayleigh son evidentes debido a que anteriormente se vió que el sistema de ola predominante es “*sea*”, por lo que

no nos encontramos ante un espectro de banda estrecha. Todo esto nos aclararía de por qué la cola de la distribución empírica de la altura del seno es tan inexacta, ya que estamos en sistemas de oleaje irregulares.

Contemplamos que en el caso de Aunu'u, la altura de la cresta y la amplitud se prolongan por más tiempo en comparación con Ipan e Hilo. Por lo tanto, inferimos que en dicho caso el sistema de oleaje es más irregular. Quizás, este resultado se deba también a que en dicha estación se representa un sistema de oleaje de aguas poco profundas, por lo que sería más conveniente usar el modelo Jahns-Wheeler (Jahns y Wheeler, 1973)).

7. Resultados generales

Al inicio del capítulo, se mencionó que se tomaron 7 registros (que contienen los datos obtenidos durante 30 minutos) en la boya ubicada en Ipan y 10 en las boyas ubicadas en Hilo y Aunu'u. Para llegar a resultados más exactos, vamos a mostrar las frecuencias de pico y los parámetros de anchura espectral, así como algunas características de ola correspondientes a cada registro durante el mes de abril de 2016.

Nota: En la sección 5 ya se había mostrado las características de ola y los parámetros de anchura espectral de cada registro. Sin embargo, no estaban incluidos las frecuencias de pico de todos ellos.

Registro	f_{p_1}	f_{p_2}	f_{p_3}	f_{p_4}	ν	ϵ	H_s	\bar{T}	T_z	\bar{T}_c	T_p
Guam1	0,49	0,12	0,98	1,1	0,77	0,80	2,83	6,38	5,03	3,00	19,57
Guam2	0,5	0,12	0,98	1	0,75	0,79	2,80	6,21	4,96	3,01	14,54
Guam3	0,025	0,5	1,3	1	0,76	0,80	2,77	6,36	5,05	3,01	24,47
Guam4	0,53	1	1,1	0,9	0,78	0,81	2,80	6,49	5,10	2,97	22,48
Guam5	0,54	1	0,48	0,08	0,75	0,79	2,94	6,27	5,02	3,02	12,45
Guam6	0,5	0,092	1	0,23	0,77	0,80	2,81	6,31	4,99	2,99	14,51
Guam7	0,49	0,96	0,6	0,19	0,76	0,79	2,68	6,16	4,90	2,95	13,12

CUADRO 13. Estación 12101 (Ipan)

Registro	f_{p_1}	f_{p_2}	f_{p_3}	f_{p_4}	ν	ϵ	H_s	\bar{T}	T_z	\bar{T}_c	T_p
Hawaii1	0,63	0,086	0,49	1,2	0,72	0,79	2,58	6,26	5,06	3,09	11,33
Hawaii2	0,61	0,08	0,15	0,49	0,78	0,81	2,76	6,61	5,19	3,04	14,82
Hawaii3	0,52	0,58	0,067	1,2	0,76	0,80	2,76	6,38	5,06	2,98	13,38
Hawaii4	0,61	1,2	0,098	1,4	0,73	0,79	2,81	6,23	5,01	3,06	12,01
Hawaii5	0,055	0,38	0,98	0,44	0,78	0,82	2,85	6,99	5,49	3,11	14,12
Hawaii6	0,074	0,74	0,34	0,22	0,81	0,83	3,02	7,34	5,68	3,11	18,23
Hawaii7	0,2	0,08	0,36	1	0,77	0,81	2,82	6,73	5,31	3,04	13,26
Hawaii8	0,55	0,63	0,29	1,2	0,75	0,80	2,84	6,48	5,18	3,09	13,58
Hawaii9	0,57	0,21	0,37	0,08	0,77	0,80	2,85	6,53	5,16	3,03	13,90
Hawaii10	0,049	0,6	0,38	0,2	0,74	0,79	2,88	6,30	5,04	3,04	12,90

CUADRO 14. Estación 18801 (Hilo)

Registro	f_{p_1}	f_{p_2}	f_{p_3}	f_{p_4}	ν	ϵ	H_s	\bar{T}	T_z	\bar{T}_c	T_p
Samoa1	0,043	0,54	0,18	1,2	0,76	0,79	2,88	6,31	5,00	3,01	17,03
Samoa2	0,067	0,62	0,45	1,2	0,76	0,81	2,77	6,56	5,22	3,05	12,99
Samoa3	0,51	0,061	0,44	1,1	0,74	0,80	2,80	6,39	5,13	3,06	12,35
Samoa4	0,025	0,48	1	0,17	0,77	0,81	2,82	6,92	5,46	3,13	18,77
Samoa5	0,086	0,49	0,56	0,33	0,81	0,83	2,95	7,20	5,59	3,09	15,91
Samoa6	0,48	1	0,098	0,6	0,74	0,80	2,81	6,33	5,08	3,03	11,42
Samoa7	0,12	0,049	0,5	1,1	0,77	0,80	2,87	6,51	5,15	3,06	15,87
Samoa8	0,48	0,061	0,94	0,99	0,76	0,81	2,87	6,79	5,39	3,13	14,43
Samoa9	0,48	0,38	0,27	0,92	0,73	0,79	2,91	5,98	4,82	2,95	11,84
Samoa10	0,086	0,67	1,1	0,4	0,81	0,82	2,92	7,07	5,48	3,09	22,55

CUADRO 15. Estación 18901 (Aunu'u)

Los resultados obtenidos en los cuadros 13, 14 y 15 reflejan un comportamiento similar a lo ya visto en los registros usados como ejemplos. En ellos se observa que existen picos muy marcados que están asociados a una gran cantidad energética y que se encuentran en frecuencias bajas. De igual forma, se puede observar otros picos con menor energía asociada y en frecuencias más altas.

Por otra parte, a partir de lo visto en la densidad espectral de los registros tomados como ejemplos y de lo mencionado anteriormente, en los casos de Ipan, Hilo y Aunu'u observamos espectros bimodales. Además, al no ver cambios bruscos en los registros de cada estación, podemos confirmar que estamos ante olas formadas por largos picos y senos bien definidos que se propagan por la superficie del océano en calma y no olas que genera el viento en una tormenta que parecen caóticas.

Asimismo, no hay una diferencia tan amplia para los parámetros de anchura espectral de cada registro con respecto a las tres estaciones. Dichos resultados también nos dice que el sistema de olas predominante es “*sea*”, conclusión a la que se había llegado anteriormente.

Sabemos que son varias las causas que originan la variación de la superficie libre del mar, y aunque su efecto es único, su estudio y análisis exige distinguirlas, lo que puede llegar incluso a permitir realizar ciertas predicciones sobre su evolución, al menos dentro de unos ciertos márgenes, en diferentes horizontes temporales. Por lo tanto, al no ver grandes cambios en las características de ola de cada estación durante el mes de abril de 2016, podríamos concluir que en las próximas horas se seguirán presentando olas que se propagan en calma.

Conclusiones

El conocimiento de las características del oleaje para condiciones medias y extremas es de vital importancia para el diseño de todo tipo de estructuras costeras. El análisis o aproximación espectral se manifiesta como uno de los mecanismos más utilizados para el estudio y caracterización del oleaje. Asimismo, la definición paramétrica de los espectros escalares de energía se manifiesta como una herramienta fundamental para reproducir y representar con mayor fidelidad la complejidad que presentan los diferentes estados de oleaje.

En este trabajo se consideraron tres estaciones: 12101 (Ipan), 18801 (Hilo) y 18901 (Aunu'u), como ejemplos para analizar las olas del mar en dichas localizaciones. Los resultados que obtuvimos es que, para los tres casos, observamos espectros bimodales. Formalmente, es usual descomponer a los estados combinados en los dos estados elementales (“*sea*” y “*swell*”), para luego calcular parámetros significativos. Las olas generadas por vientos locales u oleaje tipo “*sea*”, se caracterizan por ser de carácter irregular, donde predomina una gran dispersión tanto en intensidad como en dirección. Dicha situación produce que su espectro frecuencial sea de banda ancha.

También pudimos darnos cuenta que el sistema de oleaje predominante de las estaciones es “*sea*”, ya que se calcularon los parámetros de anchura espectral (de los modelos de Longuet-Higgins y Cavanié) y los resultados se acercan a un sistema de este tipo. Asimismo, para nuestros casos, concluimos que no estamos ante olas caóticas (como las generadas por el viento en una tormenta).

Luego de descubrir que el sistema de oleaje predominante es “*sea*” concluimos que no sería adecuado realizar un ajuste de los espectros medidos con un espectro JONSWAP, ya que este se ajusta mejor a un mar de fondo (tipo “*swell*”). De esta manera, como opción

alternativa se tomó el espectro de Pierson-Moskowitz. Se definió un espectro de Pierson-Moskowitz, describiendo un estado del mar a partir de algunas características de las olas (hallados gracias al espectro inicial). Todo esto fue necesario para representar los modelos de Longuet-Higgins y Cavanié.

En el enfoque lineal de Longuet-Higgins, se asume que la altura de la cresta y la altura del seno son distribuciones de Rayleigh. Longuet-Higgins (1983) derivó la distribución conjunta, basada en un mar de bandas estrechas. Tiene el mismo mérito que la distribución conjunta de Cavanié al ser asimétrica en el período de ola. Dichos modelos fueron de gran utilidad para descubrir algunas de las características del sistema de oleaje de cada estación, como por ejemplo, que las olas más altas son las más regulares en el período de crestas.

Por otra parte, el sustento teórico de la distribución probabilística de Rayleigh se fundamenta en el estudio de series con un ancho espectral igual o cercano a cero. A su vez, el método resulta también favorable para estados combinados donde ambos se propagan de manera simultánea.

A partir de lo anterior, podríamos llegar a una conclusión de lo que pasó en nuestros casos. Sabemos que posiblemente, para las estaciones que consideramos, las diferencias entre las distribuciones de cresta y de seno observadas y la transformación de Rayleigh son evidentes debido a que el sistema de ola predominante es “*sea*”, por lo que no nos encontramos ante un espectro de banda estrecha. Sin embargo, se mencionó que estados combinados también podrían ser favorables para la distribución de Rayleigh, por lo que estos resultados quizás se deban a qué tan altos son los valores de los parámetros de anchura espectral. Finalmente, vimos cómo en el caso de Aunu’u el sistema de oleaje es más irregular en comparación con Ipan e Hilo, debido a que la altura de la cresta y la amplitud se prolongan por más tiempo.

En resumen, a pesar de que claramente no nos encontramos con sistemas de oleajes regulares, los resultados que obtuvimos en los registros de cada estación no muestran cambios lo suficientemente bruscos como para pensar que estamos ante tormentas, huracanes, etc. Por lo tanto, podríamos decir que estamos ante olas que se propagan por la superficie del océano en calma y así, inferimos que en las próximas horas las olas seguirán presentando un comportamiento similar.

Bibliografía

- [1] OCHI, Michel. (1998). Ocean Waves. The Stochastic Approach. Cambridge University Press.
- [2] Ortega, Joaquín. (2001). Estudio de Algunas Propiedades del Mar Usando Modelos Aleatorios. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Volumen VIII, Nro. 2, pp 111-130.
- [3] Rychlik, I., Johannesson, P., Leadbetter, M. R. (1997). Modeling and Statistical Analysis of Ocean Wave Data Using Transformed Gaussian Processes. Marine Structures 10, pp 13-47.
- [4] Prevosto, M., Krogstad, H., Robin, A. (2000). Probability distributions for maximum wave and crest heights. Coastal Engineering 40, pp 329-360.
- [5] Ibáñez Rosales, A. (2011). Análisis estadístico de valores extremos y aplicaciones (trabajo de grado de maestría). Universidad de Granada, Granada.
- [6] Cao Abad, R., (2002), Introducción a la Simulación y a la Teoría de Colas, A Coruña, España: NET-BIBLO, S.L.
- [7] WAFO group. A Matlab Toolbox for Analysis of Random Waves and Loads [en línea]. Disponible en: <http://www.maths.lth.se/matstat/wafo/documentation/wafotutor25.pdf>.