UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICA

FUNCIONES CONJUNTO VALUADAS ARMÓNICAMENTE CONVEXAS

Trabajo Especial de Grado presentado ante la Ilustre Universidad Central de Venezuela por el **Br. Gabriel Alberto Santana Zambrano** para optar al título de Lincenciado en Matemática.

CARACAS-VENEZUELA
DICIEMBRE 2016

Quienes suscriben, asignados por la Universidad Central de Venezuela, como integrantes del jurado examinador del Trabajo Especial de Grado titulado: **Funciones Conjunto Valuadas Armónicamente Convexas** presentado por el **Br. Gabriel Alberto Santana Zambrano**, titular de la Cédula de Identidad **20.068.895**, certificamos que este trabajo cumple con los requisitos exigidos por nuestra Magna Casa de Estudios para optar al tí tulo de **Licenciado en Matemática**.

Prof. Nelson Merentes
(Tutor)

Prof. Lysis González
(Jurado)

Prof. Carlos González
(Jurado)

A Dios y a mi hermano Especial que esta en los cielos con él, Ramón Santana

Agradecimientos

Primeramente quisiera agradecer a mi Dios todo poderoso que transformó mi vida grandemente y ha suplido todas mis necesidades. Gracias a mis padres **Angelina Zambrano** y **Gregori Santana** por su apoyo incondicional y la educación que recibi de su parte es su herencia más valiosa. A mi hermana **Sarai** por ser mi complice en todo lo que hago, a mi hermano **Ramón** quien aunque no está ya fisicamente con nosotros me sigue enseñando el gran valor de la vida. A todos mis familiares que me apoyaron a lo largo de la carrera gracias.

Gracias a el profesor **Nelson Merentes** por la oportunidad brindada, a la profesora **Lysis** por su dedicación para la realización de este trabajo, a mis profesores de licenciatura Maira, Tomás, Angel Padilla y a todos gracias.

Un especial agradecimiento a mi novia **Treixis Estrada** quien me apoyo en los momentos más dificiles de mi vida y de mi carrera. A mis Hermanos de universidad Jose, Nelson e Ignacio (Piña) gracias.

Índice general

Resumen

Estudiamos la definición de funciones reales convexas, mostramos resultados importantes de convexidad considerando las definiciones de las medias aritméticas, geométricas y armónicas que son de nuestro especial ínteres pues estan conectadas con la definición de funciones armónicamente convexas introducido en [15]. Analizamos las propiedades de estas funciones reales, reunimos resultados obtenidos para este tipo de funciones como una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard, desigualdad tipo Féjer y Teorema tipo Bernstein-Doetsh.

Estudiamos el concepto de funciones conjunto valuadas [5] y la noción de integral de Aumann [4], investigamos la relación entre las funciones conjunto valuadas y las funciones convexas en la definición de las funciones conjunto valuadas convexas, funciones conjunto valuadas fuertemente convexas módulo c, funciones conjunto valuadas cóncavas, funciones conjunto valuadas fuertemente cóncavas. Mostramos algunos resultados obtenidos para estas funciones. Introducimos la definición de Funciones Conjunto Valuadas Armónicamente Convexas estableciendo una conexión entre las funciones armónicamente convexa y las funciones conjunto valuadas, generalizamos este concepto definiendo las funciones conjunto valuadas amónicas fuertemente convexas módulo c.

Extendemos algunos resultados obtenidos para multifunciones convexas y fuertemente convexas a multifunciones armónicamente convexas y armónica fuertemente convexas: desigualdad tipo Hermite-Hadamard, desigualdad tipo Féjer y Teorema tipo Bernstein-Doetsh.

Palabras Claves: función convexa, función armónicamente convexa, multifunción o función conjunto valuada, multifunciones convexas, multifunciones armónicamente convexas.

Introducción

La convexidad es un concepto que ha sido ampliamente estudiado por sus interesantes aplicaciones en Matemática, Teoría de Optimización, Economía y otras áreas del conocimiento. La definición de función convexa se le atribuye a Jensen, quien la introdujo al demostrar la desigualdad que hoy lleva su nombre y de la que se deducen otras desigualdades importantes como: desigualdad de Hermite-Hadamard, desigualdad de Hölder, desigualdad de Minkowski, entre otras [18].

Formalmente, una función real $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es convexa si para todo $x_1, x_2 \in I$, $t \in [0,1]$ se satisface

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \tag{1}$$

En esta definición la expresión $tx_1 + (1-t)x_2$ corresponde a la media aritmética x_1, x_2 en el dominio de la función y $tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ es la media aritmética de los puntos en el codominio $f(x_1), f(x_2)$.

Por esta razón, a las funciones convexas también se les conoce como funciones AA-convexas, donde A denota la media aritmética.

Ahora bien, si se considera la media armónica de los puntos del dominio de la función f y la media aritmética de los puntos del codominio se obtiene la definición de función armónicamente convexa que fue introducida por İscan en el año 2014 (ver [15]) donde se dice que f es armónicamente convexa si para todo $x_1, x_2 \in I$ y $t \in [0,1]$ se tiene que

$$f\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1). \tag{2}$$

Si la desigualdad en (2) se cumple en sentido contrario decimos entonces que f es armónicamente cóncava. Para este tipo de funciones se han obtenido diversos e importantes resultados, los cuales resaltan la desigualdad tipo Hermite-Hadamard, desigualdad tipo Féjer y el Teorema Bernstein-Doetsh [1, 9, 12, 15].

Otros tipos de variaciones en la definición clásica de convexidad (1) han dado origen a conceptos como midconvexidad, h-convexidad, log-convexidad, convexidad fuerte, entre otros [18].

El estudio de la convexidad también se ha realizado para funciones conjunto valuadas o multifunciones [4, 20], esto es, aplicaciones de la forma $F : X \to 2^Y$ donde X y Y son conjuntos. La noción de función conjunto valuada surge a principios del siglo XX, cuando Berge [5] introducio el concepto de límite superior e inferior de sucesiones de conjuntos y está motivado por sus aplicaciones en Análisis Diferencial e Integral, en la Teoría de Optimización y el Cálculo de Variaciones, entre otras (ver [18]).

Una multifunción $F : X \to 2^Y$ es convexa si para todo $x_1, x_2 \in X$ y $t \in [0, 1]$ se tiene que

$$tF(x_1) + (1 - t)F(x_2) \subset F(tx_1 + (1 - t)x_2). \tag{3}$$

Recientemente se han estudiado distintas nociones de convexidad para funciones conjunto valuadas (ver [16, 17, 22, 23]). Por ejemplo, Huang [14] extendio la definición (3) e introdujo la convexidad fuerte para multifunciones, han sido utilizadas para encontrar cotas al error en algunos problemas de inclusión con restricciones de conjuntos [16]. En este trabajo extendemos para multifunciones la noción de convexidad armónica dada por İscan para funciones reales y para esta clase de funciones conjunto valuadas probamos la contraparte de resultados clásicos del Análisis Convexo: propiedades de estabilidad respecto a operaciones aritméticas, desigualdad de Hermite-Hadamard, desigualdad de Féjer y Teorema de Bernstein-Doetsh.

Estos últimos resultados a nuestro juicio constituyen un nuevo aporte a esta área de estudio.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera

En el capítulo I, definimos función convexa y armónicamente convexa, presentamos algunos ejemplos y estudiamos algunas propiedades y resultados importantes para esta clase de funciones.

En el capítulo II, estudiamos la definición de funciones conjunto valuadas, mostramos algunos ejemplos, estudiamos algunos resultados concernientes a la convexidad y concavidad de funciones conjunto valuadas: desigualdades tipo Jensen y Hermite-Hadamard, Teorema de Bernstein-Doetsch, presentamos resultados tipo Kuhn y Bernstein-Doetsch para multifunciones cóncavas.

En el capítulo III, introducimos el concepto de funciones conjunto valuadas armónicamente convexas, verificamos la estabilidad de estas multifunciones respecto a operaciones aritméticas y demostramos los siguientes resultados: desigualdad tipo Hermite-Hadamard, Desigualdad tipo Féjer y el teorema tipo Bernstein-Doetsch.

Finalmente presentamos una lista de problemas abiertos.

Capítulo 1

Funciones Convexas y Armónicamente Convexas

> "La convexidad está muy presente en nuestras vidas,en la geometría de las hojas de los árboles, en la forma de las exquisitas frutas que consumimos, en los utensilios de cocina, en el trazado de las avenidas y las calles, en las iglesias (...)"
>
> N. Merentes y S. Ribas
> 2013

La convexidad es un concepto fundamental en la matemática y tiene interesantes aplicaciones en otras áreas del conocimiento, su estudio ha aumentado exponencialmente a principios de este siglo obteniendose resultados importantes en esta área, en [18] se encuentra un desarrollo bastante detallado con información de al menos 200 textos que tratan acerca de esta definición.

En estudios recientes se han introducido nuevos conceptos de convexidad a partir de la definición original. Uno de ellos es la convexidad armónica, estos conceptos constituyen la base para el desarrollo de nuestro trabajo.

En este capítulo, haremos una introducción de los conceptos de funciones convexas y funciones armónicamente convexas.

1.1. Función Convexa

En esta sección definiremos las funciones reales convexas, pero antes introduciremos la siguiente definición

DEFINICIÓN 1.1.1. *Un conjunto* $I \subseteq \mathbb{R}$ *se dice que es un* **conjunto convexo**, *si para todo* $x_1, x_2 \in I$ *y* $t \in [0,1]$ *se tiene que*

$$tx_1 + (1-t)x_2 \in I.$$

Así, una función convexa se define como sigue

DEFINICIÓN 1.1.2. *Una función* $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se dice que es una* **función convexa** *si para todo* $x_1, x_2 \in I$ *y* $t \in [0,1]$ *se tiene que:*

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \tag{1.1}$$

Si la desigualdad (1.2) es estricta para $x_1, x_2 \in I$, $t \in [0,1]$ *entones se dice que la función es* **estrictamente convexa**. *Si en (1.2) reemplazamos* $\leq$ *por* $\geq$ *se dice que* f *es* **cóncava** *y si se sastiface la desigualdad estricta, se dice que es* **estrictamente cóncava**.

En el año 1966, M. Polyak generaliza la definición de función convexa y define lo siguinte

DEFINICIÓN 1.1.3. *Una función* $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se dice que es una* **función fuertemente convexa módulo** c *si para todo* $c > 0$,$x_1, x_2 \in I$ *y* $t \in [0,1]$ *se tiene que:*

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - ct(1-t)|x_1 - x_2|^2 \tag{1.2}$$

Geométricamente, vemos que el segmento de recta que une a dos puntos cualesquiera $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$ del gráfico de una función convexa $f : I \to \mathbb{R}$, está por encima de la gráfica de la función f en $[x, y] \subset I$.

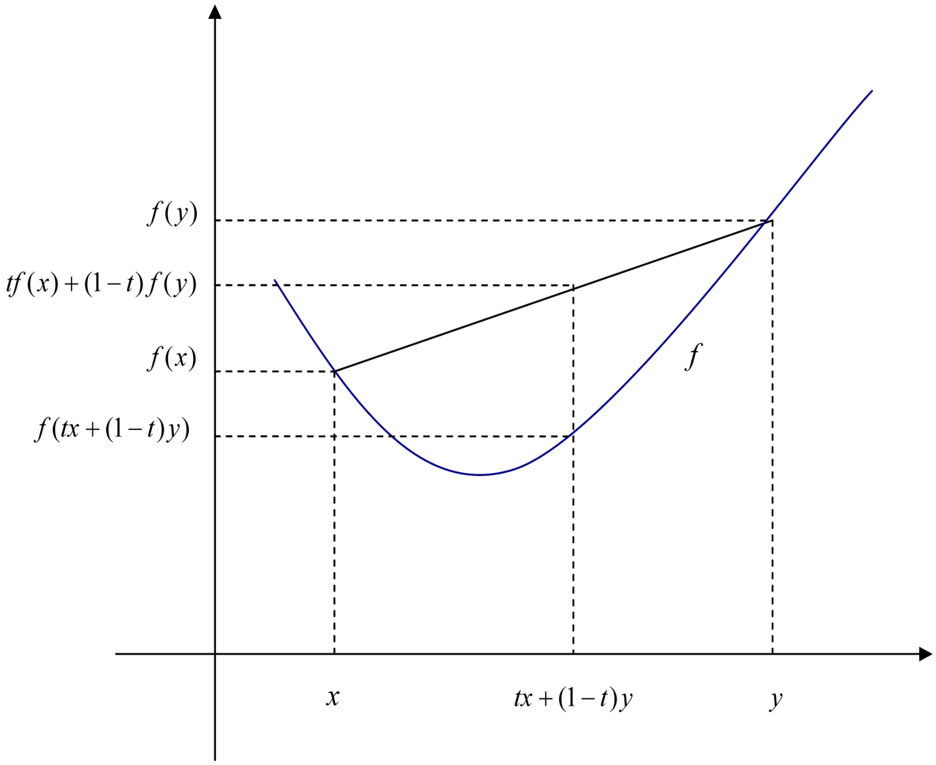

Figura 1.1: Función Convexa.

La función $f(x) = |x|$ es una función convexa pues, para todo $x_1, x_2 \in A \subset \mathbb{R}$ y $t \in [0, 1]$ tenemos evidentemente que

$$|tx_1 + (1-t)x_2| \leq t|x_1| + (1-t)|x_2|$$

Más adelante en este capítulo, presentaremos algunas proposiciones que proveerán ejemplos adicionales de funciones convexas.

A principios del siglos XX el danés Johan. L. W. Jensen demostró la desigualdad que hoy lleva su nombre, de la que se derivan importantes desigualdades clásicas del Análisis Convexo, es por esto que se le atribuye a Jensen el concepto de función convexa.

Proposición 1.1.4. *(Desigualdad de Jensen) Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa, $x_1, x_2 \in I$ y $t, s \in [0,1]$ son tales que $s + t = 1$, entonces*

$$f(tx_1 + sx_2) \leq tf(x_1) + sf(x_2).$$

La siguiente proposición generaliza la desigualdad de Jensen.

Proposición 1.1.5. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Si $x_i \in I$, y $t_1, \cdots, t_n > 0$, son tales que $t_1 + \cdots + t_n = 1$, entonces*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i). \tag{1.3}$$

Demostración: Para demostrar esta desigualdad usaremos el Principio de Inducción Matemática. El caso en el que $n = 2$ coincide con la definición de convexidad. Si $n > 2$ y suponemos que (1.3) se cumple para $n-1$, entonces

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) &= f\left((1-t_n)\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{1-t_n} x_i + t_n x_n\right) \\ &\leq (1-t_n) f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{1-t_n} x_i\right) + t_n f(x_n) \\ &\leq (1-t_n)\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{t_i}{1-t_n} f(x_i)\right) + t_n f(x_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i). \end{aligned}$$

■

El siguiente resultado es conocido como la desigualdad de Hermite-Hadamard, fue demostrado de forma independiene por Ch. Hermite (1883) y J.S. Hadamard (1896). Esta desigualdad es una de las más importante en el estudio del analisis convexo, en [21] hace una especial referencia en los estudios “viejos y nuevos” relacionados con esta desigualdad y sus conexiones con la teoría de choque y la fórmula de la cuadratura.

Teorema 1.1.6. *(Desigualdad Hermite-Hadamard [18]) Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa con $a, b \in I$ tales que $a < b$. Entonces*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

En 1905 el matemático húngaro Leopold Fejér generaliza la desigualdad Hermite-Hadamard haciendo una variación introduciendo una función de densidad simétrica que satisface ciertas condiciones

Proposición 1.1.7. *[18] Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función convexa y $g : [a, b] \to [0, \infty)$ una función de densidad simétrica ($g(a + b - x) = g(x), x \in [a, b]$ y $\int_a^b g(x)dx = 1$). Entonces*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \int_a^b f(s)g(s)ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, x, y \in [a, b], x < y.$$

En análisis matemático la desigualdad de Hölder, llamada así debido a Otto Hölder, es una desigualdad fundamental entre integrales y una herramienta indispensable para el estudio de los espacios L^p. La versión discreta de esta desigualdad es la siguiente

Proposición 1.1.8. *(Desigualdad de Hölder[18]) Sean $\{x_i\}_{i=1}^n$ y $\{y_i\}_{i=1}^n$ números no negativos; $p > 1, q > 1$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces:*

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}.$$

Una representación para integrales de esta desigualdad es la siguiente

Proposición 1.1.9. *[18] Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $p > 1, q > 1$ números, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si f^p y g^q son integrables, entonces $f\dot{g}$ es integrable y*

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q\right)^{1/q}.$$

En la siguiente proposición exponemos un resumen de relaciones que garantizan la convexidad de una función $f : I \to \mathbb{R}$. Estos resultados son de utilidad para extener la noción de convexidad para otros dominios de la función [18].

Proposición 1.1.10. $f : A \to \mathbb{R}$ *es convexa si y sólo si se verifica alguna de las siguientes relaciones:*

i. $f(x_1+t(x_2-x_1)) \leq f(x_1)+t(f(x_2)-f(x_1))$, *para todo* $t \in (0,1), x_1, x_2 \in A$.

ii. $f(sx_1 + tx_2) \leq sf(x_1) + tf(x_2)$, *para todo* $s, t \in (0,1), s+t = 1$.

iii. Si $x_1, x_2, x_3 \in A, x_1 < x_3 < x_2$ *entonces*

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} = f(x_1)(x_3-x_2)+f(x_2)(x_1-x_3)+f(x_3)(x_2-x_1) \geq 0.$$

iv.

$$\begin{aligned} f[x_1, x_2, x_3] &:= \frac{f(x_1)}{(x_3-x_1)(x_2-x_1)} + \frac{f(x_3)}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)} + \frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\ &= \frac{(x_2-x_3)f(x_1)(x_2-x_1)f(x_2)+(x_1-x_3)f(x_3)}{(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)} \geq 0. \end{aligned}$$

Demostración: Veamos que si f es una función convexa entonces la ecuación (1.2) es equivalente a la desigualdad i.

$$\begin{aligned} f(x_1+t(x_2-x_1)) &= f(x_1+tx_2-tx_1) \\ &= f(tx_2+(1-t)x_1) \\ &\leq tf(x_2)+(1-t)f(x_1) \\ &= f(x_1)+t(f(x_2)-f(x_1)). \end{aligned} \tag{1.4}$$

($i. \Rightarrow ii.$) Si en (1.4) sustituimos $s = (1-t)$ tenemos que

$$f((1-t)x_1+tx_2) = f(sx_1+tx_2) \leq sf(x_1)+tf(x_2)$$

con $x_1, x_2 \in A$ y $s+t = 1$.

($ii. \Rightarrow iii.$) Sean $x_1, x_2, x_3 \in A$ y $x_1 < x_3 < x_2$, entonces existe $t \in (0,1)$ tal que $x_3 = tx_1+(1-t)x_2$, luego

$$\begin{aligned} x_3 = tx_1+x_2-tx_2 &\Rightarrow x_3-x_2 = t(x_1-x_2). \\ &\Rightarrow t = \frac{x_3-x_2}{x_1-x_2}. \end{aligned}$$

Así
$$(1-t) = 1 - \frac{x_3 - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2}.$$

sustituyendo en (1.2) tenemos que

$$f(x_3) \leq \left(\frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1}\right) f(x_1) + \left(\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}\right) f(x_2). \tag{1.5}$$

Multiplicando por $(x_2 - x_1)$ a ambos lados de la desigualdad obtenemos

$$(x_2 - x_1)f(x_3) \leq (x_2 - x_3)f(x_1) + (x_3 - x_1)f(x_2)$$

de donde

$$(x_2 - x_3)f(x_1) + (x_3 - x_1)f(x_2) + (x_1 - x_2)f(x_3) \geq 0. \tag{1.6}$$

($iii. \Rightarrow iv.$) En (1.10) dividimos por $(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2)$, entonces

$$\frac{f(x_1)}{(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)} + \frac{f(x_3)}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \geq 0. \tag{1.7}$$

($iv. \Rightarrow i.$) Multiplicamos (1.11) por $(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)(x_1 - x_2)$, nos dá como resultado que

$$(x_2 - x_3)f(x_1) + (x_3 - x_1)f(x_2) + (x_1 - x_2)f(x_3) \geq 0$$

y así,
$$(x_2 - x_1)f(x_3) \leq (x_2 - x_3)f(x_1) + (x_3 - x_1)f(x_2)$$

.

De esta desigualdad, obtenemos (1.2) deseabamos.

■

1.1.1. Continuidad y derivabilidad de las Funciones Convexas

En esta sección presentamos resultados concernientes a la continuidad y derivabilidad de las funciones convexas. Para asegurar la continuidad de las funciones convexas en todo punto interior de su intervalo de definición, es necesario estudiar la existencia de sus derivadas laterales, este resultado fue demostrado en la última década del siglo XIX, por el austriaco Otto Stolz en [30]. Demostremos antes las siguientes proposiciones.

Proposición 1.1.11. *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa y $x_1, x_2, x_3 \in I$, tales que $x_1 < x_2 < x_3$, entonces*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{1.8}$$

Demostración: Para probar que se cumple la desigualdad del lado izquierdo de (1.8)

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

basta con tomar en cuenta el siguiente cambio de variable

$$x_2 = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}(x_3 - x_1).$$

Utilizando el apartado ($i.$) de la Proposicion 1.1.10, tenemos que

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f\left(x_1 + \left(\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\right) x_3 - x_1\right) \\ &\leq f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}[f(x_3) - f(x_1)]. \end{aligned}$$

Así,

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}[f(x_3) - f(x_1)].$$

Multiplicando a ambos lados por $\frac{1}{(x_2 - x_1)}$, tenemos que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

De manera análoga, considerando el cambio de variable $x_3 = x_1 + \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}(x_3 - x_2)$, se demuestra que

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

$\blacksquare$

El siguiente resultado se obtiene como corolario de la proposición (1.1.11).

Corolario 1.1.12. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces, para cada $a \in I$ la función $f_a : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f_a(x) = \tfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ para todo } x \in I \backslash \{a\}.$$

es creciente.

Demostración: En efecto, dados $a \in I$ y $x, y \in I \backslash \{a\}$ con $x < y$, consideramos tres casos para probar que siempre se cumple que

$$f_a(x) \leq f_a(y).$$

Caso 1: Si $a < x < y$, usamos la primera desigualdad de (1.8) con $x_1 = a, x_2 = x, x_3 = y$, obtenemos directamente que

$$f_a(x) \leq f_a(y).$$

Caso 2: Si $x < y < a$, usamos la segunda desigualdad de (1.8) con $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = a$ tenemos de igual manera que

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} = \frac{-(f(x) - f(a))}{-(x - a)} \leq \frac{-(f(y) - f(a))}{-(y - a)} = \frac{f(a) - f(y)}{a - y}.$$

Es decir,

$$f_a(x) \leq f_a(y).$$

Caso 3: Si $x < a < y$, usando la desigualdad entre el primer y último miembro de la desigualdad (1.8) con $x_1 = x, x_2 = a, x_3 = y$ obtenemos la misma conclusión

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x}=\frac{-(f(x)-f(a))}{-(x-a)}\leq\frac{f(y)-f(a)}{y-a}.$$

Así,

$$f_a(x)\leq f_a(y).$$

■

Usando la Proposición 1.1.11 y el Corolario 1.1.12 se prueba que toda función convexa $f : A \to \mathbb{R}$ posee derivadas laterales y por tanto es continua en todo punto interior de su intervalo de definición, este resultado se conoce como Teorema de Stolz, su prueba puede leerse en [18].

TEOREMA 1.1.13. *(Teorema de Stolz). Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa, entonces f posee derivadas laterales en cada punto de I, las derivadas laterales son crecientes y el conjunto A de los puntos de I, donde f no es derivable es numerable. Además, f es continua en $I - A$.*

Proposición 1.1.14. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces f es derivable por la izquierda y por la derecha, por tanto es continua en todo punto $a \in I^o$. Además, se tiene que*

$$f'(a^-)=\sup\{f_a(x) : x\in I, x<a\},$$

$$f'(a^+)=\inf\{f_a(y) : y\in I, y>a\}.$$

Demostración: Fijando $a \in I^o$ y usando el hecho de que f_a es una función creciente, se tiene que para $x < a < b$ con $x, b \in I$,

$$f_a(x)\leq f_a(b).$$

Así, el conjunto $\{f_a(x) : x \in I, x < a\}$ está acotado superiormente y, por tanto posee supremo. Sea S_a el supremo. Veremos en efecto que $f'(a^-) = S_a$.
Dado $\epsilon > 0$, por definición de supremo, existe $x_0 \in I$ con $x_0 < a$ tal que $f_a(x_0) > S_a - \epsilon$.

Tomando $\delta = a - x_0 > 0$, para $a - \delta < x < a$ tenemos que $S_a - \epsilon < f_a(x_0) \leq f_a(x) \leq S_a$, de donde obtenemos

$$|f_a(x)-S_a|<\epsilon.$$

Esto prueba que $\lim_{x\to a_-} f_a(x) = S_a$, como se quería. El cálculo correspondiente a la derivada por la derecha es análogo.

■

Vale la pena resaltar que en general no podemos asegurar que una función convexa sea derivable en todos los puntos interiores de su intervalo de definición. Por ejemplo, la función valor absoluto es convexa pero no es derivable en 0. Cuando la función posee máximo o mínimo en el intervalo de definición, tampoco podemos asegurar que una función convexa sea continua en tales puntos. Por ejemplo, tomando $f(x) = 0$ para todo $x \in (0, 1)$ y $f(0) = f(1) = 1$, obtenemos una función convexa $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ que no es continua en 0 ni en 1.

1.1.2. Operaciones con Funciones Convexas

En esta sección mostraremos que la convexidad es una propiedad estable respecto a la adición, producto por un escalar y respecto al producto de funciones monótonas.

Proposición 1.1.15. *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones convexas y $c \geq 0$, entonces*

1. *cf es una función convexa.*
2. *$f + g$ es una función convexa*
3. *Si f y g son funciones no negativas y crecientes (decrecientes), entonces el producto $f \cdot g$ es una función convexa no negativa y creciente (decreciente).*

Demostración: Sean f, g funciones convexas $x_1, x_2 \in I$ y $\lambda \in [0, 1]$. Entonces

1. Si $c \geq 0$ entonces

$$\begin{aligned} cf(tx_1 + (1-t)x_2) &\leq c(tf(x_1) + (1-t)f(x_2)) \\ &= t(cf)(x_1) + (1-t)(cf)(x_2). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} (f+g)(tx_1 + (1-t)x_2) &= f(tx_1 + (1-t)x_2) + g(tx_1 + (1-t)x_2) \\ &\leq t(f(x_1) + g(x_1)) + (1-t)(f(x_2) + g(x_2)) \\ &= t(f+g)(x_1) + (1-t)(f+g)(x_2). \end{aligned}$$

3. Si f, g son no negativas y crecientes, entonces para todo $x_1, x_2 \in I$ tales que $x_1 > x_2$,

$$[f(x_1) - f(x_2)] \geq 0 \text{ y } [g(x_1) - g(x_2)] \geq 0,$$

por lo tanto, $[f(x_1) - f(x_2)][g(x_1) - g(x_2)] \geq 0$.

Así,

$$f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2) \geq f(x_1)g(x_2) + f(x_2)g(x_1). \tag{1.9}$$

Entonces

$$\begin{array}{cl}
(f \cdot g) & (tx_1 + (1-t)x_2) = f(tx_1 + (1-t)x_2) \cdot g(tx_1 + (1-t)x_2) \\
\leq & [tf(x_1) + (1-t)f(x_2)][tg(x_1) + (1-t)g(x_2)] \\
= & t^2 f(x_1)g(x_1) + t(1-t)[f(x_1)g(x_2) + f(x_2)g(x_1)] + (1-t)^2 f(x_2)g(x_2) \\
\leq & t^2 f(x_1)g(x_1) + t(1-t)[f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2)] + (1-t)^2 f(x_2)g(x_2) \\
= & [tf(x_1)g(x_1) + (1-t)f(x_2)g(x_2)](t + (1-t)) \\
= & t(f \cdot g)(x_1) + (1-t)(f \cdot g)(x_2).
\end{array}$$

Para el caso en que f, g son decrecientes la prueba es análoga.

■

Uno de los resultados importantes de las funciones convexas viene dada por los resultados de la Proposición 1.1.11 y el Corolario 1.1.12. A continuación demostraremos una proposición que nos provee una caracterización que garantiza la convexidad de una función.

Proposición 1.1.16. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathbf{C}^1$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) f es convexa.

(ii) f' es creciente.

(iii) Para cualesquiera $x, a \in I$ se tiene que $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$.

Demostración: $(i) \Rightarrow (ii)$ Para $a, b \in I$ con $a < b$ debemos probar que $f'(a) \leq f'(b)$. Para ello fijamos $c \in [0, 1] \subset I$ y usando las dos expresiones para $f'(c)$ calculadas en la proposición (1.1.14), obtenemos que

$$f_c(a) \leq f'(c) \leq f_c(b).$$

Si ahora tomamos $x, y \in I$ en la situación $a < x < c < y < b$ y usando el hecho de que f_a y f_b son crecientes, tenemos que

$$f_a(x) \leq f_a(c) = f_c(a) \leq f'(c) \leq f_c(b) = f_b(c) \leq f_b(y).$$

De donde deducimos que

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} f_a(x) \leq f'(c) \leq \lim_{y \to b^-} f_b(y) = f'(b).$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Para $a, x \in I$ con $a \neq x$, usando el Teorema del Valor Medio podemos escribir

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a),$$

donde $c \in (a, x)$. Luego bastará probar que $f'(c)(x - a) \geq f'(a)(x - a)$.

En efecto, si $a < c < x$, al ser f' creciente tendremos que $f'(c) \geq f'(a)$, y basta multiplicar ambos miembros por $x - a > 0$. En otro caso será $x < c < a$ luego $f'(c) \leq f'(a)$ pero la desigualdad se invierte al multiplicar ambos miembros por $x - a < 0$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Para probar que f es convexa, tomamos $x, y \in I$ con $y < x$ y $t \in [0, 1]$, entonces tomando $a = tx + (1 - t)y$, bastará probar que

$$f(a) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Notemos que,

$$t = \tfrac{a-y}{x-y} \text{ y } 1 - t = \tfrac{x-a}{x-y}.$$

Aplicando (iii) tenemos que,

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a). \tag{1.10}$$

Así como

$$f(y) = f(a) + f'(a)(y - a). \tag{1.11}$$

Tomando en cuenta que

$$x - a = x - tx - (1 - t)y = x(1 - t) - (1 - t)y = (x - y)(1 - t) > 0$$

y

$$y - a = y - tx - y + ty = t(y - x) < 0.$$

Enlazamos las desigualdades (1.10) y (1.11) obtenemos lo siguiente

$$\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \leq f'(a) \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Así, $\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, entonces

$$\frac{f(a)}{x-a} - \frac{f(a)}{y-a} \leq \frac{f(x)}{x-a} - \frac{f(y)}{y-a}.$$

Es decir,

$$f(a)\left(\frac{y-x}{(x-a)(y-a)}\right) \leq \frac{f(x)(y-a)-f(y)(x-a)}{(x-a)(y-a)},$$

por lo que,

$$f(a) \leq \frac{a-y}{x-y}f(x) + \frac{x-a}{x-y}f(y) = tf(x) + (1-t)f(y).$$

■

La Proposición 1.1.16 provee algunas familias de ejemplos de funciones convexas. Entre ellas, presentamos las siguientes:

1.1.3. Ejemplos

Son funciones convexas las siguientes:

- $f(x) = x^n$ con n natural par, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = |x|^a$ donde $a > 1$ es una constante, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = e^{kx}$ donde k es una constante real, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $f(x) = x^a$ donde $a > 1$, para $x > 0$.
- $f(x) = \log_a x$ con base $0 < a < 1$, para $x > 0$.
- $f(x) = x \log_a x$ con base $a > 1$, para $x > 0$.
- $f(x) = \tan(x)$, para $0 \leq x \leq \pi/2$.

El concepto de convexidad clásica ha dado origen a otros tipos de convexidad. En el año 1905 Jensen intoduce el concepto de función midconvexa, que también se conoce como convexa en el punto medio o Jensen-Convexa. Si se modifica el promedio tomado en los puntos del dominio y del codominio de la función, considerando las medias aritmetica, geometrica, armónica, entre otras, se tienen los conceptos de funciones cuasi convexas, funciones log-convexas, funciones armónicamente convexas, funciones GA,AG-convexas, entre otros (ver [18]).

En particular, si se consideran las medias armónica y aritmética en el dominio y codominio de la función respectivamente se tiene la definición de funciones armónicamente convexas que son de especial ínteres para nuestro trabajo.

1.2. Funciones Armónicamente Convexas

En esta sección el dominio de las funciones que utilizaremos a partir de ahora es armónicamente convexo, por tal motivo es conveniente y necesario definir lo siguiente.

Definición 1.2.1. *Un conjunto* $I \subset [0, \infty)$ *se dice que es un conjunto* **armónicamente convexo**, *si*

$$\frac{x_1 x_2}{t x_1 + (1-t) x_2} \in I$$

para todo $x_1, x_2 \in A$, $t \in [0, 1]$.

La idea de definir una función armónicamente convexa proviene de hacer una variación en el dominio de una función convexa, con esta idea İscan en [15] en el año 2014 define lo siguiente

Definición 1.2.2. *[15] Una función* $f : I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *se dice que es una función* **armónicamente convexa**, *si*

$$f\left(\frac{x_1 x_2}{t x_1 + (1-t) x_2}\right) \leq t f(x_2) + (1-t) f(x_1),$$

para todo $x_1, x_2 \in I$, $t \in [0, 1]$.

Algunos autores han introducido nuevos conceptos de convexidad armónica partiendo de las definiciones de convexidad armónica clásica. Sobre estas clases de funciones, el lector interesado puede revisar [1, 15, 9].

Las variaciones relacionadas a la convexidad armónica surgen al alterar las medias en el codominio de la función obteniendo las siguientes definiciones: función armónicamente s-convexa de segundo tipo, función armónicamente Godunova-Levin (de segundo tipo), entre otros (ver [1, 15, 9]).

Para generalizar todos estos conceptos surge la siguiente definición.

Definición 1.2.3. *Sea* $h : [0,1] \subseteq \Omega \to \mathbb{R}$ *una función positiva. Una función* $f : I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$*, siendo* I *un conjunto armónicamente convexo, se dice que es una función* **armónicamente h-convexa***, si*

$$f\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right) \leq h(t)f(x_2) + h(1-t)f(x_1,$$

para todo $x_1, x_2 \in I$ *y* $t \in (0,1)$.

Observación 1.2.4. *Para* $h(t) = t, h(t) = t^s, h(t) = \frac{1}{t}$ *y* $h(t) = \frac{1}{t^s}$*, en la definición 1.2.3 coinciden con las definiciones antes mencionadas (ver [18]).*

Definición 1.2.5. *Dos funciones* f *y* g *se dicen que son similarmente ordenadas, si*

$$(f(x_1) - f(x_2))(g(x_1) - g(x_2)) \geq 0,$$

para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

En el año 2016 en [2] se introduce la siguiente definición la cual es la contraparte fuerte módulo c de la definición introducida por İscan.

Definición 1.2.6. *Una función* $f : I \subseteq \mathbb{R}\backslash 0 \to \mathbb{R}$ *se dice que es* **armónica fuertemente convexa módulo** c *si para todo* $x_1, x_2 \in I, t \in [0,1]$ *y* $c > 0$ *se tiene que*

$$f\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right) \leq tf(x_2) + (1-t)f(x_1) - ct(1-t)\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2. \quad (1.12)$$

Si en 1.12 consideramos $t = 1/2$ *decimos que* f *es armónica fuertemente midconvexa módulo c, entonces*

$$f\left(\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}\right) \leq \frac{f(x_2)+f(x_1)}{2} - \frac{c}{4}\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2.$$

1.2.1. Operaciones con funciones armónicamente h-convexas

Proposición 1.2.7. *Sean $h : [0,1] \subseteq \Omega \to \mathbb{R}$ una función positiva tal que $h(t) + h(1-t) \leq 1$, para todo $t \in [0,1]$, $f, g : I \subset \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ funciones armónicamente h-convexas similarmente ordenadas y $c > 0$ una constante, entonces*

1. *cf, es una función armónicamente h-convexa.*
2. *$f + g$, es una función armónicamente h-convexa.*
3. *$f \cdot g$, es una función armónicamente h-convexa.*

Demostración: Para los apartados 1. y 2. la demostración es similar a los de la sección 1.1.2.

3. Como f y g son funciones similarmente ordenadas, se tiene que para todo $x_1, x_2 \in I$

$$[f(x_1) - f(x_2)][g(x_1) - g(x_2)] \geq 0.$$

Así,

$$f(x_1)g(x_1) + f(x_2)g(x_2) \geq f(x_1)g(x_2) + f(x_2)g(x_1). \tag{1.13}$$

Entonces

$$\begin{array}{ll}
(f \cdot g) & \left(\dfrac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) \\
= & f\left(\dfrac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) \cdot g\left(\dfrac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) \\
\leq & [h(t)f(x_2) + h(1-t)f(x_1)][h(t)g(x_2) + h(1-t)g(x_1)] \\
= & h(t)^2 f(x_2)g(x_2) + h(t)h(1-t)[f(x_2)g(x_1) + f(x_1)g(x_2)] \\
+ & h(1-t)^2 f(x_1)g(x_1) \\
\leq & h(t)^2 f(x_2)g(x_2) + h(t)h(1-t)[f(x_2)g(x_2) + f(x_1)g(x_1)] \\
+ & h(1-t)^2 f(x_1)g(x_1) \\
= & h(t)f(x_2)g(x_2) + h(1-t)f(x_1)g(x_1)(h(t) + h(1-t)) \\
\leq & h(t)(f \cdot g)(x_1) + h(1-t)(f \cdot g)(x_2).
\end{array}$$

■

La proposición 1.2.7 establece que la familia de funciones armónicamente convexas es cerrada bajo adición, producto y producto por un escalar positivo.

1.2.2. Propiedades de las funciones armónicamente convexas

A continuación mostramos algunas propiedades de las funciones armónicamente convexas, las cuales proveen diversas condiciones necesarias para asegurar la convexidad armónica de una función f.

Proposición 1.2.8. *[15] Sea $I \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función, entonces*

1. *Si $I \subset (0, \infty)$ y f es una función convexa creciente entonces f es armónicamente convexa.*

2. *Si $I \subset (0, \infty)$ y f es armónicamente convexa decreciente entonces f es convexa.*

3. *Si $I \subset (-\infty, 0)$ y f es armónicamente convexa creciente entonces f es convexa.*

4. *Si $I \subset (-\infty, 0)$ y f es convexa decreciente entonces f es armónicamente convexa.*

Proposición 1.2.9. *Ademas, si $[a, b] \subset I \subset (0, \infty)$ y considerando la función $g : \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right] \to \mathbb{R}$, definida como $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$, entonces f es armónicamente convexa sobre $[a, b]$ si y solo si g es convexa sobre $\left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$.*

1.2.3. Ejemplos

En virtud a la condición 1. de la proposición (1.2.8) son funciones armónicamente convexas las siguientes:

- $f(x) = x^n$ con n natural par, para todo $x \in (0, \infty)$.
- $f(x) = |x|^a$ donde $a > 1$ es una constante, para todo $x \in (0, \infty)$.
- $f(x) = e^{kx}$ donde k es una constante real, para todo $x \in (0, \infty)$.

- $f(x) = x^a$ donde $a > 1$, para $x \in (0, \infty)$.
- $f(x) = \log_a x$ con base $0 < a < 1$, para $x > 0$.
- $f(x) = x \log_a x$ con base $a > 1$, para $x > 0$.
- $f(x) = \tan(x)$, para $0 \leq x \leq \pi/2$.

1.2.4. Desigualdad Hermite-Hadamard para funciones armónicamente convexas

Para funciones convexas sabemos que la desigualdad del tipo Hermite-Hadamard establece que si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1.14}$$

para todo $a, b \in I$ tales que $a < b$.

En [15] se presenta el siguiente teorema, que constituye una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para funciones armónicamente convexas.

Teorema 1.2.10. *Sean $f : I \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ una función armónicamente convexa y $a, b \in I$ con $a < b$. Si f es integrable en $[0,1]$ se tiene que*

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1.15}$$

Demostración: Si en (1.14) consideramos una función convexa, tomando $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ definido en el intervalo cerrado $\left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$, $a, b \in I \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$, entonces tenemos que

$$f\left(\frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}}\right) \leq \frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f\left(\frac{1}{t}\right)dt \leq \frac{f\left(\frac{1}{\frac{1}{b}}\right)+f\left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right)}{2}$$

Así

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a}\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f\left(\frac{1}{t}\right)dt \leq \frac{f(b)+f(a)}{2}.$$

Luego, haciendo cambio de variable $x = \frac{1}{t}$ tenemos que

$$\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f\left(\frac{1}{t}\right) dt = -\int_b^a \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx$$

Obteniendo el resultado deseado,

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

■

1.2.5. Desigualdad tipo Fejér para funciones armónicamente convexas

A continuación presentaremos una desigualdad del tipo Fejér para funciones armónicamente convexas estudiada y demostrada por F. Chen y S. Wu en [9], y que generaliza la desigualdad tipo Hermite-Hadamard probada en el Teorema (1.2.10).

TEOREMA 1.2.11. *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ una función armónicamente convexa y $a, b \in I$ con $a < b$. Si f es integrable en $[a, b]$, entonces*

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \int_a^b \frac{p(x)}{x^2} dx \leq \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} p(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b \frac{p(x)}{x^2} dx$$

donde $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función positiva que satisface lo siguiente

$$p\left(\frac{ab}{x}\right) = p\left(\frac{ab}{a+b-x}\right) \tag{1.16}$$

Demostración: Sea f una función armónicamente convexa en $[a, b]$, entonces para todo $x, y \in [a, b], t \in [0, 1]$

$$f\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right) \leq tf(y) + (1-t)f(x)$$

Nótese que para $t = 1/2$ tenemos la siguiente desigualdad

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) \leq \frac{f(y)+f(x)}{2}$$

tomando ahora $x = ab/tb + (1-t)a$ y $y = ab/ta + (1-t)b$ tenemos que

$$\frac{f(y)+f(x)}{2} = \frac{f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) + f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)}{2}$$

Como f es una funcion armónicamente convexa se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) + f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)}{2} &\leq \frac{(tf(a)+(1-t)f(b)) + (tf(b)+(1-t)f(a))}{2} \\
&= \frac{f(a)+f(b)}{2}
\end{aligned}$$

por otro lado, para todo $t \in [0,1]$ se obtiene lo siguiente

$$\frac{f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) + f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)}{2} \geq f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \tag{1.17}$$

la igualdad en (1.17) se cumple para $t = \frac{1}{2}$. Por tanto

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) + f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)}{2} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1.18}$$

Por otro lado, si p es una función positiva que satisface la condición (1.16), se tiene que

$$\begin{aligned}
p\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) &= p\left(\frac{ab}{a+b-(tb+(1-t)a)}\right) \\
&= p\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right). \qquad (1.19)
\end{aligned}$$

Ahora bien, multiplicamos $p(x)$ a ambos lados de la desigualdad (1.18) para obtener lo siguiente

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) p\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) &\leq \left(\frac{f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) + f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)}{2}\right) p\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) \\
&\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} p\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right).
\end{aligned}$$

por (1.19) tenemos que

$$
\begin{aligned}
f & \left(\frac{2ab}{a+b}\right) p\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) \\
\leq & \frac{f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) p\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)+f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right) p\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)}{2} \\
\leq & \frac{f(a)+f(b)}{2} p\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right).
\end{aligned}
$$

Ahora, integramos a ambos lados con respecto a t sobre $[0,1]$

$$
\begin{aligned}
f & \left(\frac{2ab}{a+b}\right) \int_0^1 p\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) dt \\
\leq & \int_0^1\left(\frac{f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) p\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)+f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right) p\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)}{2}\right) dt \\
\leq & \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_0^1 p\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) dt. \qquad (1.20)
\end{aligned}
$$

Haciendo $x=\frac{ab}{tb+(1-t)a}$ se tiene que

$$dx=-\frac{x^2(a-b)}{ab} dt$$

entonces

$$dt=-\frac{ab}{(a-b)x^2} dx$$

por tanto,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 p\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) dt & = -\frac{ab}{a-b} \int_b^a \frac{p(x)}{x^2} dx \\
& = \frac{ab}{a-b} \int_a^b \frac{p(x)}{x^2} dx. \qquad (1.21)
\end{aligned}
$$

por otro lado

$$\begin{aligned}\int_0^1 f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)p\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\quad dt &= -\frac{ab}{a-b}\int_b^a \frac{f(x)p(x)}{x^2}dx \\ &= \frac{ab}{a-b}\int_a^b \frac{f(x)p(x)}{x^2}dx \quad (1.22)\end{aligned}$$

como $p\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) = p\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)$ entonces

$$\int_0^1 f\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)p\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)dt = \frac{ab}{a-b}\int_a^b \frac{f(x)p(x)}{x^2}dx \quad (1.23)$$

Luego, sustituyendo (1.21), (1.22) y (1.23) en (1.20) y multiplicando a ambos lados de la desigualdad por $\frac{a-b}{ab}$ obtenemos el resultado deseado

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int_a^b \frac{p(x)}{x^2}dx \leq \int_a^b \frac{f(x)}{x^2}p(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b \frac{p(x)}{x^2}dx$$

■

1.2.6. Nuevas desigualdades del tipo Hermite-Hadamard

En esta sección mostraremos algunos resultados que amplían la investigación de la convexidad armónica.
Antes, probaremos el siguiente lema que será de utilidad para demostrar nuevas desigualdades del tipo Hermite-Hadamard para funciones cuyas derivadas son armónicamente convexas que fueron probadas por Iscam en [15].

Lema 1.2.12. *Sea $f : I \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o y $a, b \in I$ con $a < b$. Si f' es integrable sobre $[a,b]$ tenemos que*

$$\begin{aligned}&\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \\ &= \frac{ab(b-a)}{2}\int_0^1 \frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2}f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt. \quad (1.24)\end{aligned}$$

Demostración: Sea

$$A = \frac{ab(b-a)}{2} \int_0^1 \frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2} f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) dt$$

Integrando A por partes, tenemos que

$$A = \frac{(2t-1)}{2} f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\bigg|_0^1 - \int_0^1 f\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) dt.$$

Tomando $x = \frac{ab}{tb+(1-t)a}$, entonces $dx = \frac{-ab(b-a)}{(tb+(1-t)a)^2} dt = \frac{-x^2(b-a)}{ab} dt$, así obtenemos que

$$A = \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx$$

lo cual es lo que queriamos probar.

■

Teorema 1.2.13. [15] *Sean $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o,$x_1, x_2 \in I^o$ con $x_1 < x_2$, y f' es integrable en $[x_1, x_2]$. Si $|f'|^q$ es armónicamente convexa en $[x_1, x_2]$ para $q \geq 1$, se tiene que*

$$\left| \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} - \frac{x_1 x_2}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x^2} dx \right|$$

$$\leq \frac{x_1 x_2 (x_2 - x_1)}{2} \lambda_1^{1-\frac{1}{q}} [\lambda_2 |f'(x_1)|^q + \lambda_3 |f'(x_2)|^q]^{\frac{1}{q}},$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{1}{x_1 x_2} - \frac{2}{(x_2 - x_1)^2} \ln\left(\frac{(x_1+x_2)^2}{4x_1 x_2}\right),$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{x_2(x_2 - x_1)} + \frac{3x_1 + x_2}{(x_2 - x_1)^3} \ln\left(\frac{(x_1+x_2)^2}{4x_1 x_2}\right),$$

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= \frac{1}{x_1(x_2 - x_1)} - \frac{3x_2 + x_1}{(x_2 - x_1)^3} \ln\left(\frac{(x_1+x_2)^2}{4x_1 x_2}\right) \\ &= \lambda_1 - \lambda_2.\end{aligned}$$

Demostración: Por el Lema (1.2.12) y usando la desigualdad de Holder, obtenemos que

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\right|$$

$$\leq\frac{ab(b-a)}{2}\int_0^1\left|\frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2}\right|\left|f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\right|dt$$

$$\leq\frac{ab(b-a)}{2}\left(\int_0^1\left|\frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1\left|\frac{1-2t}{(tb+(1-t)a)^2}\right|\left|f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

por la armónica convexidad de $|f'|^q$ sobre $[a,b]$, tenemos que

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{ab}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)}{x^2}dx\right|$$

$$\leq\frac{ab(b-a)}{2}\left(\int_0^1\frac{|1-2t|}{(tb+(1-t)a)^2}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\times\left(\int_0^1\frac{|1-2t|[t|f'(a)|^q+(1-t)|f'(b)|^q]}{(tb+(1-t)a)^2}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq\frac{ab(b-a)}{2}\lambda_1^{1-\frac{1}{q}}[\lambda_2|f'(a)|^q+\lambda_3|f'(b)|^q]^{\frac{1}{q}}.$$

Operando sobre cada integral obtenemos que

- $$\int_0^1\frac{|1-2t|}{(tb+(1-t)a)^2}dt$$

$$=\frac{1}{ab}-\frac{2}{(b-a)^2}\ln\left(\frac{(a+b)^2}{4ab}\right),$$

- $$\int_0^1\frac{|1-2t|(1-t)}{(tb+(1-t)a)^2}dt$$

$$=\frac{1}{a(b-a)}-\frac{3b+a}{(b-a)^3}\ln\left(\frac{(a+b)^2}{4ab}\right),$$

$$\bullet \int_0^1 \frac{|1-2t|t}{(tb+(1-t)a)^2}dt$$
$$= \frac{-1}{b(b-a)} + \frac{3a+b}{(b-a)^3}\ln\left(\frac{(a+b)^2}{4ab}\right).$$

■

TEOREMA 1.2.14. [15] *Sean $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ una función diferenciable en I^o,$x_1,x_2\in I^o$ con $x_1<x_2$, y f' es integrable en $[x_1,x_2]$. Si $|f'|^q$ es armónicamente convexa en $[x_1,x_2]$ para $q\geq 1$ y $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, entonces*

$$\left|\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} - \frac{x_1x_2}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2}\frac{f(x)}{x^2}dx\right|$$
$$\leq \frac{x_1x_2(x_2-x_1)}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\mu_1|f'(x_1)|^q+\mu_1|f'(x_2)|^q\right]^{\frac{1}{q}},$$

donde

$$\mu_1 = \frac{x_1^{2-2q}+x_2^{1-2q}[(x_2-x_1)(1-2q)-x_1]}{2(x_2-x_1)^2(1-q)(1-2q)},$$

$$\mu_2 = \frac{x_2^{2-2q}-x_1^{1-2q}[(x_2-x_1)(1-2q)+x_2]}{2(x_2-x_1)^2(1-q)(1-2q)}.$$

Demostración: Por el Lema (1.2.12) y la desigualdad de Holder y la armónica convexidad de $|f'|^q$ sobre $[a,b]$, tenemos que

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{ab}{b-a}\int_0^1\frac{f(x)}{x^2}dx\right|$$
$$\leq \frac{ab(b-a)}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|^p dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\times\left(\int_0^1 \frac{1}{(tb+(1-t)a)^{2q}}\left|f'\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq \frac{ab(b-a)}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_0^1 \frac{t|f'(a)|^q+(1-t)|f'(b)|^q}{(tb+(1-t)a)^{2q}}dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

luego, operando cada integral tenemos que

$$\mu_1=\int_0^1 \frac{t}{(tb+(1-t)a)^{2q}}dt$$

$$=\frac{[a^{2-2q}+b^{1-2q}[(b-a)(1-2q)-a]]}{2(b-a)^2(1-q)(1-2q)}$$

y

$$\mu_2=\int_0^1 \frac{1-t}{(tb+(1-t)a)^{2q}}dt$$

$$=\frac{[b^{2-2q}-a^{1-2q}[(b-a)(1-2q)+b]]}{2(b-a)^2(1-q)(1-2q)}.$$

■

Capítulo 2

Funciones Conjunto Valuadas

Las funciones conjunto valuadas son de gran utilidad en la Matemática y otras áreas del conocimiento. El interés por las funciones conjunto valuadas se incrementó considerablemente en la segunda mitad del siglo XX debido al auge de las aplicaciones del Análisis Diferencial e Integral de las funciones conjunto valuadas a una gran variedad de problemas en la Teoría de la Optimización, el Cálculo de Variaciones y Análisis convexo (ver [3]). Este concepto fue introducido por Claude Berge [5] en el año 1963.

2.1. Preliminares

A continuación, presentaremos algunos conceptos que seran de utilidad a lo largo del trabajo.

2.1.1. Espacios Topológicos Lineales

Dado Y un conjunto arbitrario, denotamos $\mathbf{P}(\mathrm{Y})$ a la familia de todos los subconjuntos de Y. Es decir, $\mathbf{P}(\mathrm{Y}) = \{A : A \subseteq \mathrm{Y}\}$ es el conjunto de potencias de Y o partes de Y.

DEFINICIÓN 2.1.1. *Un* **espacio topológico** *es una dupla* (X, τ)*, donde* X *es un conjunto y* τ *es un subconjunto de* $P(X)$ *que cumple lo siguiente:*

1. $\emptyset \in \tau$ *y* $X \in \tau$.

2. *Si* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Delta} \subseteq \tau$ *es una coleción de elementos de* τ*, entonces*

$$\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha \in \tau.$$

3. *Si* $\{U_k\}_{k=1}^{n} \subseteq \tau$ *es una colección finita de elementos de* τ*, entonces:*

$$\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \tau.$$

Si (X, τ) *es un espacio topológico, los elementos de* τ *se llaman* **conjuntos abiertos** *y al conjunto* $V \subseteq X$ *se llaman* **cerrado***, si el conjunto* $X\backslash V$ *es abierto.*

Definición 2.1.2. *Sea* X *un espacio topológico,* $x \in X$ *y* $F \in 2^X$*.*
Diremos que V *es una vecindad de* x*, si existe un conjunto abierto* A *tal que* $x \in A \subset V$*. Análogamente,* S *es una vecindad de* F *si existe un abierto* O *tal que* $F \subset O \subset S$*. Los conjuntos* A *y* O *se les llama vecindad abierta de* x *y* F *respectivamente.*

Definición 2.1.3. *Sea* $A \subseteq X$*. La* **clausura** *de* A*, se denota por* $\overline{A}$ *y se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen al conjunto* A*. Esto es,*

$$\overline{A} := \bigcap \{V \subseteq X : A \subseteq V \quad y \quad V \quad es \quad cerrado\}$$

En este trabajo, utilizaremos el concepto de espacio métrico que definiremos a continuación.

Definición 2.1.4. *Sea* X *un conjunto. Se dice que* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *define una* **métrica** *en* X *si se cumplen las siguientes propiedades: para todo* $x, y, z \in X$ *se tiene que*

1. $d(x, y) \geq 0$*. La igualdad se cumple para* $x = y$*.*

2. $d(x, y) = d(y, x)$*.*

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(desigualdad triangular)*

En estas condiciones, se dice que el par (X,d) es un **espacio métrico**.

Dado $z \in X$ y $r > 0$. La bola abierta de centro z y radio r, denotado por $B(z,r)$ es el conjunto

$$B(z,r) = \{x \in X : d(x,z) < r\}. \tag{2.1}$$

Si $r = 1$ decimos que B es la bola unitaria con centro $x \in X$.

Si en (2.1) reemplazamos $<$ por $\leq$ diremos que $B(z,r) = \overline{B(z,r)}$ es una bola cerrada.

Definición 2.1.5. *Un subconjunto A de un espacio métrico X está* **acotado** *si, y solo si, está contenido en una bola abierta. De hecho, si A está acotado, para cada $z \in X$ se puede encontrar un $r \in \mathbb{R}$ positivo tal que $A \subset B(z,r)$.*

En el conjunto de los reales, con la topológia usual, los intervalos abiertos centrados en un punto x originan todas las vecindades de x, de esta manera toda vecindad de x contiene un intervalo abierto centrado en x. Se dirá que los intervalos abiertos centrados en x son un sistema fundamental de vecindades del punto x. Generalizando esta idea definimos lo siguiente

Definición 2.1.6. *Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Una subfamilia $B_c(x)$ de la familia $V_c(x)$ de vecindades de x, se denomina* **base de vecindades** *en un punto x, si para $V \subset V_c(x)$ existe una vecindad $U \subset B_c(x)$ tal que $U \subset V$.*

2.1.2. Espacios Vectoriales y Cuerpos

Definición 2.1.7. *Un espacio vectorial (sobre el cuerpo $\mathbb{R}$) es un conjunto V en el que están definidas dos operaciones, $+ : V \times V \to V$ y $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$, que sastifacen*

1 $x + y = y + x$ *para todo* $x, y \in V$;

2 $x + (y + z) = (x + y) + z$ *para todo* $x, y, z \in V$;

3 *Existe un elemento,* $0 \in V$, *tal que* $x + 0 = x$ *para todo* $x \in V$;

4 *Para cada* $x \in V$ *existe otro elemento,* $-x \in V$, *tal que* $x + (-x) = 0$;

5 $1 \cdot x = x$ *para todo* $x \in V$*;*

6 $(\alpha \cdot \beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ *para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*,* $x \in V$*;*

7 $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$*,* $x, y \in V$*;*

8 $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ *para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*,* $x \in V$*.*

Así, la norma en un espacio vectorial se define como sigue

DEFINICIÓN 2.1.8. *Sea* X *un* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial, diremos que* $p : \mathrm{X} \to [0, \infty)$ *es una norma si:*

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$*, para* $x, y \in \mathrm{X}$ *(desigualdad triangular).*
2. $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$*, para* $\lambda \in \mathbb{C}$ *y* $x \in \mathrm{X}$*.*
3. *Si* $p(x) = 0$ *si y solo si* $x = 0$*.*

Para obtener los resultados esperados en este trabajo es necesario tener en cuenta la definición de las operaciones entre conjuntos.

La siguiente definición muestra algunas operaciones aritméticas con conjuntos.

DEFINICIÓN 2.1.9. *Sean* $A, B \subset \mathbb{R}$ *y* $b \in \mathbb{R}$*. Entonces:*

- $-cA + B = (-c)A := \{d, c \in \mathbb{R} : \exists a \in A, b \in B(d = -ca + b)\}$,
- $A \cdot B := \{c \in \mathbb{R} : \exists a \in A, b \in B(c = a \cdot b)\}$,
- $A \cdot b = b \cdot A = A \cdot \{b\} := \{c \in \mathbb{R} : \exists a \in A(c = a \cdot b)\}$

Ahora bien, un espacio de Banach se define de la siguiente manera

DEFINICIÓN 2.1.10. *Un* **espacio de Banach** *es una espacio normado completo, esto es, un espacio normado en el que toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Un concepto que utilizaremos a traves de este y el siguiente capítulo es el de cuerpo.

Definición 2.1.11. *Sea $\mathbb{K}$ un conjunto dotado de las operación de suma y producto $(\mathbb{K}, \bullet, +)$, $\mathbb{K}$ se dice que es un* **cuerpo** *si para todo $a, b, c \in \mathbb{K}$ se tiene que*

- $a \cdot b, a + b \in \mathbb{K}$.
- $a + (b + c) = (a + b) + c$.
- $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$.
- *Existe* $0 \in \mathbb{K}$ *tal que* $a + 0 = 0 + a = a$.
- *Existe* $1 \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ *tal que* $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
- *Para todo* $a \in \mathbb{K}$ *existe* $-a \in \mathbb{K}$ *tal que* $a + (-a) = 0$.
- *Para todo* $a \neq 0 \in \mathbb{K}$ *existe* $a^{-1} \in$ *tal que* $a \cdot a^{-1} = 1$.
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Un **subcuerpo** *de un cuerpo $\mathbb{K}$ es un subconjunto $D \in \mathbb{K}$ que contiene el* 0 *y* 1*, además D es cerrado bajo las operaciones de adición y producto.*

Ejemplos: Los números complejos ($\mathbb{C}$), los números reales ($\mathbb{R}$), el espacio de matrices ($\mathbb{M}_{n \times n}$) con las operaciones usuales son cuerpos.

En $\mathbb{R}$, con el orden usual nos permite estudiar los concepto del infimo y supremo, definiciones que serán de utilidad a lo largo de este trabajo.

Definición 2.1.12. *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que está acotada superiormente si existe un número real M tal que*

$$f(x) \leq M, x \in Dom(f).$$

Este número real M recibe el nombre de **cota superior** *de la función f. Geométricamente significa que ninguna imágen es superior al valor M y, por tanto, la gráfica de f estará por debajo de la recta $y = M$.*

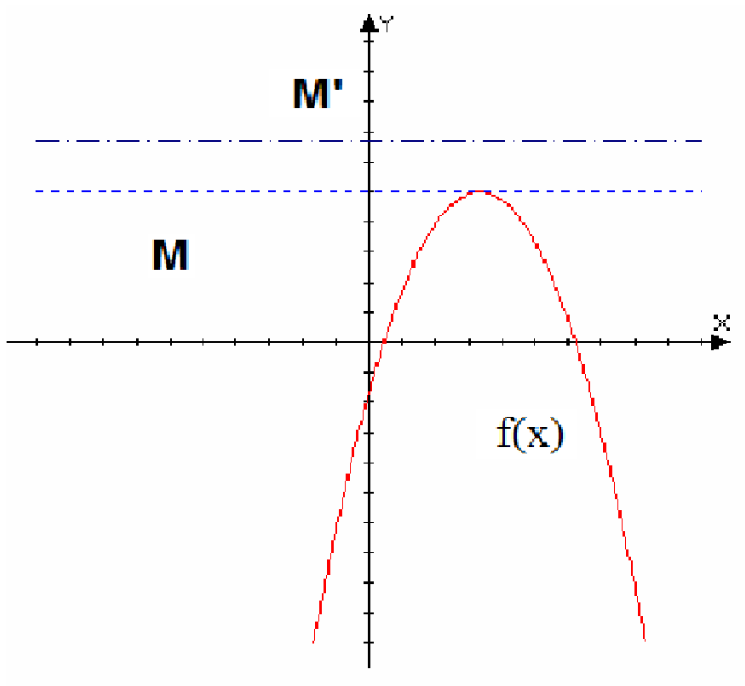

Figura 2.1: Cota superior de f.

Si M es una cota superior de la función f, cualquier otro número real M' mayor que M, también es cota superior de f. En consecuencia, si una función está acotada superiormente siempre tendrá un conjunto de cotas superiores.

Ahora bien, de manera análoga definimos cota inferior

Definición 2.1.13. *Una función f se dice que está acotada inferiormente si existe un número real m tal que*

$$f(x) \geq m, x \in Dom(f).$$

Este número real m recibe el nombre de **cota inferior** *de la función f. Geométricamente, esto significa que ninguna imagen es inferior al valor m y, por tanto, la gráfica de la función f estará por encima de la recta $y = m$.*

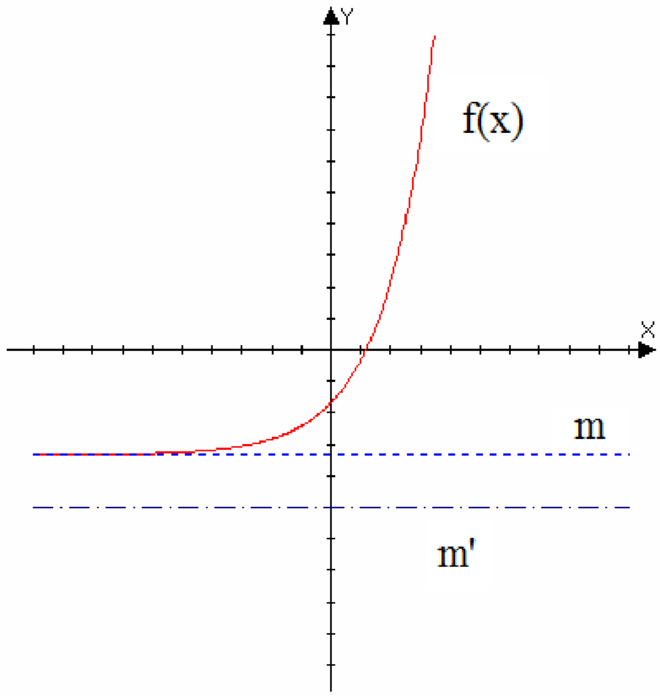

Figura 2.2: Cota inferior de f.

Si m es una cota superior de la función f, cualquier otro número real m' menor que m, también es cota inferior de f. En consecuencia, si una función está acotada inferiormente siempre tendrá un conjunto de cotas inferiores.

Ahora bien, con estas nociones definimos supremo e ínfimo de una función.

DEFINICIÓN 2.1.14. *Sea $A \subset \mathbb{R}$. Un elemento $b \in \mathbb{R}$ se llama* **supremo** *de A ($b = \sup(A)$) si b es la mínima cota superior de A. El valor b se llama* **ínfimo** *de A ($b = \inf(A)$), si b es la máxima cota inferior de A.*

Veamos algunas propiedades básicas del ínfimo y supremo de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$.

Proposición 2.1.15. *(Monotonía del supremo y del ínfimo) Sean $A, B \in \mathbb{R}$ tales que $A \subset B$, entonces*

1. $\sup A \leq \sup B$.

2. $\text{ínf}\, A \geq \text{ínf}\, B$.

Proposición 2.1.16. *(Propiedades aritméticas del ínfimo y del supremo)*

1. Si $A, B \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, *entonces* $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

2. Si $A \in \mathbb{R}$ *y* $b > 0$, *entonces* $\sup(bA) = b \sup(A)$.

3. Si $A \subset \mathbb{R}$ *y* $b < 0$, *entonces* $\sup(bA) = b\, \text{ínf}(A)$.

4. Si $A \subset \mathbb{R}$ *y* $b > 0$, *entonces* $\text{ínf}(bA) = b\, \text{ínf}(A)$

En la siguiente sección definiremos las funciones conjunto valuadas y funciones conjunto valuada convexas.

2.2. Funciones conjunto valuadas

Cada subconjunto de Y se puede identificar con su función característica, el conjunto de partes de Y también se denota en la literatura por 2^{Y}. Cuando Y es un espacio métrico, el conjunto 2^{Y} puede ser dotado de una métrica denominada Métrica de Hausdorff, que se define como

$$d_H(A,B) := \text{máx}\left\{ \ \sup_{x \in A} d(x,B), \quad \sup_{y \in B} d(y,A) \ \right\}; A, B \in 2^{\mathbf{Y}}.$$

En el caso en el que en Y no está definida una métrica, D. Narvaes y G. Restrepo en [20] definen topologías adecuadas en el conjunto de partes de Y (2^{Y}).

Definición 2.2.1. *Dados dos conjuntos* X *y* Y, *una función* $F : \mathrm{X} \to 2^{\mathrm{Y}}$ *se denomina* **multifunción o función conjunto valuada**. *Es decir una función conjunto valuada* $F : \mathrm{X} \to 2^{\mathrm{Y}}$, *asocia a cada punto de* X *un subconjunto de* Y.

Mostraremos ahora, algunos ejemplos de funciones conjunto valuadas.

2.2.1. Ejemplos

1. Si en un conjunto X se define una relación de equivalencia $\sim$ y se denota por X/ $\sim$ al conjunto de las clases de equivalencias, entonces la función $F : \mathbb{X} \to 2^{\mathbb{Y}}$ que asocia a cada $x \in$ X su clase de equivalencia es una multifunción.

2. Dada una matriz A de orden $m \times n$ y un vector $b \in \mathbb{R}^m$, definimos la función conjunto valuada $F : \mathbb{R}^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ como:

$$F(x) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\},$$

donde la desigualdad $Ax \leq b$ se satisface si cada entrada z_{ii} de Ax es menor o igual a la entrada b_{ii} de b; $i \in \{1, \cdots, m\}$.

3. Dada una función $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, se puede considerar la multifunción $F : \mathbb{X} \to 2^{\mathbb{Y}}$, definida por

$$F(y) := f^{-1}(y) = \{x \in \mathbb{X} : f(x) = y\}.$$

Cuando $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{R}$ y $f(x) := x^2$, se tiene

$$F(y) := \begin{cases} \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\} & , \quad y \geq 0. \\ \emptyset & , \quad y < 0. \end{cases}$$

2.2.2. Integración de funciones conjuntos valuadas

Las integrales de funciones conjunto valuadas aparecen en numerosos problemas de convexificación (también llamados de relajación) porque la integral de una función conjunto valuada medible siempre es convexa [3]. La noción de integración de funciones conjunto valuadas fue introducida por Aumann [4] en el año 1965 y posteriormente en el año 1967 desarrollada por Gerard Debreu [11]. En nuestro trabajo utilizaremos la definición introducida por Robert J. Aumann la cual presentamos a continuación. Considerando la multifunción $F : [0,1] \to 2^Y$, T como el intervalo $[0,1]$ y el conjunto $\mathfrak{F} = \{f(t)$ es integrable en $\mathrm{T} : f(t) \in F(t) \wedge t \in \mathrm{T}\}$.

Definición 2.2.2. *Sea $F : \mathrm{T} \to 2^Y$ una función conjunto valuada. La* **integral de Aumann** *de F se define como*

$$\int_{\mathrm{T}} F(t)dt = \left\{ \int_{\mathrm{T}} f(t)dt : f \in \mathfrak{F} \right\}.$$

Es decir, la integral de Aumann de una multifunción es la colección de las integrales de sus selecciones ($\mathfrak{F} := \{f : [0,1] \to 2^Y \ \mid \ f(t) \in F(t)\ \forall t \in [0,1]\}$).

En [8] se estudia en detalle las selecciones medibles de una función conjunto valuada, ademas de agregar una nueva definición denominada la **integral de Pettis**.

2.2.3. Funciones Conjunto Valuadas Convexas

En esta sección extenderemos el concepto de convexidad para funciones conjunto valuadas. El concepto de convexidad para una función conjunto valuada $F : X \to 2^Y$, donde X y Y son espacios vectoriales, está relacionada con su gráfico que definimos de la siguiente manera

$$Gr(F) := \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

Definición 2.2.3. *Decimos que $F : X \to 2^Y$ es convexa si y sólo si, $Gr(F)$ es un subconjunto convexo de $X \times Y$.*

Proposición 2.2.4. *La multifunción F es convexa si y sólo si para todo $x_1, x_2 \in X$ y para todo $t \in [0,1]$, se tiene que*

$$tF(x_1) + (1-t)F(x_2) \subseteq F(tx_1 + (1-t)x_2). \tag{2.2}$$

Demostración: Supongamos que F es convexa, es decir, $Gr(F)$ es un conjunto convexo de $X \times Y$ y veamos que (2.2) se cumple para todo $t \in [0,1], x_1, x_2 \in X$. Consideremos $z \in tF(x_1) + (1-t)F(x_2)$. Por tanto, existen $y_1 \in F(x_1)$, $y_2 \in F(x_2)$ tales que, $z = ty_1 + (1-t)y_2$. Como $Gr(F)$ es convexo, entonces, para todo $t \in [0,1]$

$$t(x_1, y_1) + (1-t)(x_2, y_2) = (tx_1 + (1-t)x_2, ty_1 + (1-t)y_2) \in Gr(F),$$

es decir, $z = ty_1 + (1-t)y_2 \in F(tx_1 + (1-t)x_2)$, para todo $t \in [0,1]$. Lo que demuestra que la inclusión (2.2) es válida. El recíproco, se demuestra de manera análoga.

■

Definición 2.2.5. *La multifunción F es midconvexa o Jensen-convexa si satisface la inclusión (2.2) para $t = 1/2$, es decir*

$$\frac{F(x)+F(y)}{2} \subseteq F\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Proposición 2.2.6. *Si $H \subseteq X$ es un conjunto convexo con respecto al origen, entonces, para $0 < a < b$ se tiene que $aH \subseteq bH$.*

Ejemplo 2.2.7. *Sea $H \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto convexo y no vacío que posee al origen de $\mathbb{R}^3 = Y$. Sea $F : \mathbb{R} \to 2^Y$ una función conjunto valuada definida por $F(x) = -x^2 H$. Siendo $f(x) = -x^2$ una función cóncava, se tiene que para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y $t \in [0,1]$*

$$-(tx_1^2 + (1-t)x_2^2) \leq -(tx_1 + (1-t)x_2)^2.$$

Como el conjunto H es convexo y posee al origen, podemos aplicar la proposición (2.2.6) y obtenemos la siguiente inclusión

$$-(tx_1^2 + (1-t)x_2^2)H \leq -(tx_1 + (1-t)x_2)^2 H = F(tx_1 + (1-t)x_2)$$

Luego, usando la convexidad de H tenemos que

$$-(tx_1^2 + (1-t)x_2^2)H = -tx_1^2 H - (1-t)x_2^2 H = tF(x_1) + (1-t)F(x_2),$$

y por lo tanto

$$tF(x_1) + (1-t)F(x_2) \subseteq F(tx_1 + (1-t)x_2).$$

En el 2010, Hui Huang generalizó el concepto de multifunción convexa en [14] al introducir la contraparte multivaluada de la convexidad fuerte. El concepto de función conjunto valuada fuertemente convexa es una extensión de lo estudiado por el matemático B. T. Polyak [26] en el año 1966 para funciones fuertemente convexas a valores reales.

Definición 2.2.8. *Si X, Y son espacios vectoriales normados, y $D \subset \mathrm{X}$ un conjunto convexo. Una función conjunto valuada $F : D \to 2^{\mathrm{Y}}$ es* **fuertemente convexa módulo** *c si para $c > 0$, $x_1, x_2 \in D$ y $t \in (0,1)$ se tiene que*

$$tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + ct(1-t)\|x_1 - x_2\|^2 \overline{B} \subset F(tx_1 + (1-t)x_2), \quad (2.3)$$

donde $\overline{B}$ denota la clausura de la bola unitaria de X. *Decimos que una función conjunto valuada $F : D \to 2^{(}\mathrm{Y})$ es* **fuertemente cóncava módulo** *c si para todo $x_1, x_2 \in D$ se tiene que*

$$F(tx_1 + (1-t)x_2) + ct(1-t)\|x_1 - x_2\|^2 B \subset tF(x_1) + (1-t)F(x_2). \quad (2.4)$$

Si tomamos $t = 1/2$ decimos que F es **fuertemente midconvexa módulo** *c si*

$$\frac{1}{2}F(x_1) + \frac{1}{2}F(x_2) + \frac{c}{4}\|x_1 - x_2\|^2 \bar{B} \subset F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

y F es **fuertemente midcóncava módulo** *c si*

$$F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \frac{c}{4}\|x_1 - x_2\|^2 B \subset \frac{F(x_1) + F(x_2)}{2} \quad (2.5)$$

Nótese que para $c = 0$ las nociones de convexidad y convexidad fuerte coinciden.

En [18] se pueden revisar otros conceptos de convexidad conjunto valuada, así como diversos resultados de gran importancia para estas clases de funciones: teorema de Descomposición (K. Nikodem [22], 1989), teorema tipo Kuhn(T. Cardinali, K. Nikodem, F. Papalini [7], 1993) y una generalización teorema del Sandwich (E. Sadowska [28], 1996).

2.3. Desigualdades para funciones conjunto valuadas fuertemente convexas

En esta sección demostraremos que las funciones conjunto valuadas fuertemente convexas satisfacen desigualdades del tipo Jensen y Hermite-Hadamard.

Veamos antes, algunas definiciones y resultados preliminares.

Notación 2.3.1. *Denotamos por $cl(Y)$ como la familia de todos los subconjuntos no vacíos y cerrados de Y. También denotaremos por $n(Y)$ a la familia de subconjuntos no vacíos de Y.*

El siguiente lema establece las condiciones que debe cumplir una función conjunto valuada a valores en $2^{\mathbb{R}}$ para ser fuertemente convexa módulo c.

Lema 2.3.2. *[23] Una función multivaluada $F : I \to cl(\mathbb{R})$ es fuertemente convexa módulo c si y solo si F tiene una de las siguientes formas:*

a) $F(x) = [f_1(x), f_2(x)]$, $x \in I$.

b) $F(x) = [f_1(x), +\infty)$, $x \in I$.

c) $F(x) = (-\infty, f_2(x)]$, $x \in I$.

d) $F(x) = (-\infty, +\infty)$, $x \in I$.

donde $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ son funciones fuertemente convexa y cóncava módulo c, respectivamente.

Demostración: $(\Rightarrow)$ Si $F : I \to cl(\mathbb{R})$ es una función fuertemente convexa módulo c entonces para todo $c > 0$, $x_1, x_2 \in I$ y $t \in [0, 1]$ se tiene que

$$tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + ct(1-t)\|x_1 - x_2\|^2 \bar{B} \subset F(tx_1 + (1-t)x_2) \quad (2.6)$$

donde $\bar{B} = [-1, 1]$ es la clausura de la bola unitaria de $\mathbb{R}$.

Si $x_1 = x_2 = x$ tenemos que $tF(x) + (1-t)F(x) \subset F(x)$, por lo que $F(x)$ es un conjunto convexo y cerrado ($F(x) \subset cl(\mathbb{R})$), así, $F(x)$ necesariamente es de la forma $a), b), c)$ o $d)$, es decir que todos los valores de F son convexos. Mas aún si $F(x_0)$ es acotado superior o inferiormente para algún x_0^I, entonces $F(x)$ es acotado superior o inferiormente para todo $x \in I$. Así, definimos lo siguiente

$$f_1(x) = \inf F(x), \text{ si } F(x) \text{ es scotado inferiormente}$$

y

$$f_2(x) = \sup F(x), \text{ si } F(x) \text{ es scotado superiormente.}$$

Luego por (2.6), la proposición (2.1.15) y (2.1.16) se tiene que

$$
\begin{aligned}
\text{ínf}\, F(tx_1 + (1-t)x_2) &\leq \text{ínf}(tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + ct(1-t)\|x_1 - x_2\|^2 \bar{B}) \\
&= t\,\text{ínf}\, F(x_1) + (1-t)\,\text{ínf}\, F(x_2) + ct(1-t)|x_1 - x_2|^2\, \text{ínf}[-1,1] \\
&= t\,\text{ínf}\, F(x_1) + (1-t)\,\text{ínf}\, F(x_2) - ct(1-t)|x_1 - x_2|^2.
\end{aligned}
$$

Es decir

$$f_1(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf_1(x_1) + (1-t)f_1(x_2)$$

por lo que $f_1(x)$ es una función fuertemente convexa módulo c.

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
\sup F(tx_1 + (1-t)x_2) &\geq \sup(tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + ct(1-t)\|x_1 - x_2\|^2 \bar{B}) \\
&= t\,\text{ínf}\, F(x_1) + (1-t)\,\text{ínf}\, F(x_2) + ct(1-t)|x_1 - x_2|^2 \sup[-1,1] \\
&= t\,\text{ínf}\, F(x_1) + (1-t)\,\text{ínf}\, F(x_2) + ct(1-t)|x_1 - x_2|^2.
\end{aligned}
$$

Es decir

$$f_2(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf_2(x_1) + (1-t)f_2(x_2) + ct(1-t)|x_1 - x_2|^2.$$

Por lo que $f_2(x)$ es una función fuertemente cóncava módulo c. Así, $F(x)$ es de la forma $a), b), c)od)$ con $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ funciones fuertemente convexa y fuertemente cóncava módulo c respectivamente.

($\Leftarrow$) Supongamos sin perdida de generalidad que $F(x) = [f_1(x), f_2(x)]$ donde $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ son funciones fuertemente convexas y fuertemente cóncava módulo c respectivamente, entonces por definición se tiene que

$$tf_1(x_1) + (1-t)f_1(x_2) - ct(1-t)|x_1 - x_2|^2 \geq f_1(tx_1 + (1-t)x_2)$$

y

$$tf_2(x_1) + (1-t)f_2(x_2) + ct(1-t)|x_1 - x_2|^2 \leq f_2(tx_1 + (1-t)x_2)$$

Así, obtenemos la siguiente inclusión

$$
\begin{aligned}
&[tf_1(x_1)+(1-t)f_1(x_2)-ct(1-t)|x_1-x_2|^2, tf_2(x_1)+(1-t)f_2(x_2)+ct(1-t)|x_1-x_2|^2] \\
&= [tf_1(x_1)+(1-t)f_1(x_2), tf_2(x_1)+(1-t)f_2(x_2)] + ct(1-t)|x_1-x_2|^2[-1,1] \\
&= t[f_1(x_1), f_2(x_1)] + (1-t)[f_1(x_2), f_2(x_2)] + ct(1-t)|x_1-x_2|^2[-1,1] \\
&= tF(x_1) + (1-t)F(x_2) + ct(1-t)|x_1-x_2|^2\bar{B} \\
&\subset [f_1(tx_1+(1-t)x_2), f_2(tx_1+(1-t)x_2)] \\
&= F(tx_1+(1-t)x_2)
\end{aligned}
$$

Así F es una multifunción fuertemente convexa módulo c.

■

2.3.1. Desigualdad de Jensen

Esta desigualdad fue probada por el matemático danés Johan Jensen en 1906. Dada su generalidad, la desigualdad aparece en múltiples contextos.

En su formulación más simple, la desigualdad establece que una transformación convexa de la media es menor o igual en valor que la media de una transformación convexa. Sin embargo, su formulación formal más general se expresa en el contexto de la teoría de la medida.

Esta es una versión de la desigualdad de Jensen llamada desigualdad integral de Jensen y establece lo siguente

TEOREMA 2.3.3. *[23] Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función, si f es una función convexa entonces satisface*

$$f\left(\int_X \varphi(x)d\mu\right) \leq \int_X f(\varphi(x))d\mu, \tag{2.7}$$

para cada espacio de probabilidad (X, Σ, μ) y toda función $\varphi : X \to I$ μ-integrable.

Si f es una función fuertemente convexa módulo c, cumple lo siguiente

$$f\left(\int_X \varphi(x)d\mu\right) \leq \int_X f(\varphi(x))d\mu - c\int_X (\varphi(x)-m)^2 d\mu, \tag{2.8}$$

donde $m = \int_X \varphi(x)d\mu$.

El siguiente teorema provee una desigualdad de tipo Jensen para funciones conjunto valuadas fuertemente convexas módulo c.

Teorema 2.3.4. *[23](desigualdad tipo Jensen) Si $F : I \to cl(\mathbb{R})$ es una función conjunto valuada fuertemente convexa modúlo c, entonces para cada función $\varphi : X \to I$ μ-medible se tiene que*

$$\int_X F(\varphi(x))d\mu + c\left(\int_X (\varphi(x)-m)^2 d\mu\right)\bar{B} \subset F\left(\int_X \varphi(x)d\mu\right),$$

donde $m = \int_X \varphi(x)d\mu$.

Demostración:

En virtud del Lema 2.3.2 suponemos sin pérdida de generalidad que F es de la forma $F(x) = [f_1(x), f_2(x)]$, con $x \in I$ y f_1, f_2 definidos como en el Lema 2.3.2 puesto que para los demás casos la prueba es análoga.

Sea $h : X \to \mathbb{R}$ una selección μ-integrable perteneciente al conjunto $F \circ \varphi(x)$, entonces sabemos que f_1 es fuertemente convexa y f_2 es fuertemente cóncava. Del teorema (2.3.3) se tiene que

$$f_1\left(\int_X \varphi(x)d\mu\right) \leq \int_X f_1(\varphi(x))d\mu - c\int_X (\varphi(x)-m)^2 d\mu, \tag{2.9}$$

$$\leq \int_X h(x)d\mu - c\int_X (\varphi(x)-m)^2 d\mu. \tag{2.10}$$

y

$$\begin{aligned} f_2\left(\int_X \varphi(x)d\mu\right) &\geq \int_X f_2(\varphi(x))d\mu + c\int_X (\varphi(x)-m)^2 d\mu, \\ &\geq \int_X h(x)d\mu + c\int_X (\varphi(x)-m)^2 d\mu. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} &\left[\int_X h(x)d\mu - c\int_X (\varphi(x)-m)^2 d\mu, \int_X h(x)d\mu + c\int_X (\varphi(x)-m)^2 d\mu\right] \\ &\subset \left[f_1\left(\int_X \varphi(x)d\mu\right), f_2\left(\int_X \varphi(x)d\mu\right)\right] \end{aligned}$$

$$= F\left(\int_X \varphi(x)d\mu\right).$$

Así,

$$\int_X h(x)d\mu + c\int_X (\varphi(x)-m)^2 d\mu[-1,1] \subset F\left(\int_X \varphi(x)d\mu\right).$$

Y en consecuencia

$$\int_X F(\varphi(x))d\mu + c\int_X (\varphi(x)-m)^2 d\mu\bar{B} \subset F\left(\int_X \varphi(x)d\mu\right).$$

■

2.3.2. Desigualdad de Hermite-Hadamard

En los años 1883 y 1896, Hermite y Hadamard respectivamente, demostraron de manera independendiente una desigualdad que en honor a ellos se conoce como la desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para funciones convexas punto valuadas de la forma $f : I \to \mathbb{R}$, y establece que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2},$$

para todo $a, b \in I$ tales que $a < b$.

La versión para funciones fuertemente convexas fue demostrada en el año 2010 por N. Merentes y K. Nikodem en [19] y es la siguiente

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{c}{12}(a-b)^2 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{c}{6}(a-b)^2.$$

para todo $a, b \in I$ tales que $a < b$.

En el siguiente teorema presentamos una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para las funciones conjunto valuadas fuertemente convexas.

Teorema 2.3.5. *[23] Sea $F : I \to cl(Y)$ una función conjunto valuada fuertemente convexa modulo c. Entonces*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx + \frac{c}{12}(b-a)^2 B \subset F\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{2.11}$$

y

$$\frac{F(a)+F(b)}{2}+\frac{c}{6}(b-a)^2B\subset\frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx, \tag{2.12}$$

para todo $a, b \in I$ tales que $a < b$

Demostración: Para probar la condición (2.11) usamos el Teorema 2.3.4. Consideramos $X = [a, b]$, $\varphi(x) = x, x \in [a, b]$ y $\mu = \frac{1}{b-a}\lambda$ donde λ, es la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}$. Entonces

$$m=\int_X \varphi(x)d\mu=\frac{a+b}{2}$$

entonces

$$F\left(\int_X \varphi(x)d\mu\right)=F\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

$$\int_X(\varphi(x)-m)^2d\mu=\frac{1}{12}(a-b)^2 \quad \text{(ver observación (2.3.6))}$$

y

$$\int_X F(\varphi(x))d\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx.$$

Luego, sustituimos estos valores en la desigualdad del Teorema 2.3.4 y obtenemos que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx+\frac{c}{12}(a-b)^2B\subset F\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Para probar la condicion (2.12), tomamos $z = \frac{u+v}{2} + \frac{c}{6}(a-b)^2\beta$ arbitrario, donde $u \in F(a)$, $v \in F(b)$ y $\beta \in B$. Consideremos ahora la función $f : [a, b] \to Y$ definida por

$$f(x)=\frac{b-x}{b-a}u+\frac{x-a}{b-a}v+c(b-x)(x-a)\beta.$$

Por la convexidad fuerte de F y por la definición de F se tiene que

$$f(x)\in\frac{b-x}{b-a}F(a)+\frac{x-a}{b-a}F(b)+c\frac{b-x}{b-a}\frac{x-a}{b-a}(b-a)^2B\subset F\left(\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b\right)$$

Notese que

$$F\left(\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b\right)=F(x).$$

Luego, $f(x) \in F(x)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b \frac{b-x}{b-a}u + \frac{x-a}{b-a}v + c(b-x)(x-a)\beta dx, \\
&= \int_a^b \frac{b-x}{b-a}u + \frac{x-a}{b-a}v dx + \int_a^b c(b-x)(x-a)\beta dx, \\
&= \frac{u}{b-a}\int_a^b (b-x)dx + \frac{v}{b-a}\int_a^b (x-a)dx + c\beta \int_a^b (b-x)(x-a)dx, \\
&= \frac{u}{b-a}\left[-\int_0^{b-a} tdt\right] + \frac{v}{b-a}\left[\int_{b-a}^0 tdt\right] + c\beta\left[\int_a^b (bx-ab-x^2+ax)dx\right] \\
&= \frac{u}{b-a}\left[-\frac{t^2}{2}\right]_{b-a}^0 + \frac{v}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{b-a}^0 + b\beta\left[\frac{bx^2}{2} - abx - \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}\right]_a^b, \\
&= \frac{(b-a)}{2}(u+v) + c\beta\left[\frac{b^3-a^3}{6} + \frac{a^2b-ab^2}{2}\right], \\
&= \frac{(b-a)}{2}(u+v) + c\beta\left[\frac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{6}\right], \\
&= \frac{(b-a)}{2}(u+v) + \frac{c\beta}{6}(b-a)^3, \\
&= (b-a)\left[\frac{u+v}{2} + \frac{c\beta}{6}(b-a)^2\right] = (b-a)z.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$z = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) \in \frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx.$$

■

Observación 2.3.6.

$$\int_X (\varphi(x)-m)^2 d\mu = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

Prueba:

$$
\begin{aligned}
\int_X (\varphi(x)-m)^2 d\mu &= \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{b-a}\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b \\
&= \frac{1}{3(b-a)}\left[\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3-\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3\right] \\
&= \frac{2}{3(b-a)}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \\
&= \frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}
$$

■

2.3.3. Teorema tipo Bernstein-Doetsch

El teorema de Bernstein-Doetsch provee condiciones que aseguran la convexidad de una función, la versión original fue mostrada hace más de 100 años [6], en este caso extenderemos ese resultado para multifunciones. La idea principal en un teorema de tipo Bernstein-Doetsch es que a partir de la midconvexidad fuerte de una función conjunto valuada F podamos establecer una condición más debil de continuidad que implique la convexidad fuerte de F.

Este resultado fue demostrado por los profesores H. Leiva, N. Merentes, K. Nikodem y J. Sánchez en [16].

Antes de demostrar el resultado mencionado, es necesario presentar algunos resultados y definiciones preliminares. El siguiente lema generaliza la definición de midconvexidad fuerte módulo c.

Lema 2.3.7. *[16] Si $F : D \to n(\mathbf{Y})$ es fuertemente midconvexa módulo c entonces*

$$
\frac{k}{2^n}F(x_1)+(1-\frac{k}{2^n})F(x_2)+c\frac{k}{2^n}(1-\frac{k}{2^n})\|x_1-x_2\|^2\bar{B} \subset F\left(\frac{k}{2^n}x_1+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x_2\right),
$$

para todo $x_1, x_2 \in D$ *y todo* $k, n \in \mathbb{N}$ *tal que* $k < 2^n$.

Los detalles de esta demostración pueden leerse en [16].

Ahora veamos la definición de funciones conjunto valuadas semicontinuas

Definición 2.3.8. *Sean* X, Y *espacios topológicos y* $F : X \to 2^Y$ *una multifunción, con respecto a la topologia de Hausdorff en* 2^Y *se tienen las siguientes definiciones*

i. Se dice que F *es* **semicontinua inferiormente** *en* $x_0 \in X$ *si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $\|x - x_0\| < \delta$ *se tiene que*

$$F(x_0) \subset F(x) + \varepsilon B, \forall x \in X$$

ii. Se dice que F *es* **semicontinua superiormente** *en en* $x_0 \in X$ *si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $\|x - x_0\| < \delta$ *se tiene que*

$$F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B, \forall x \in X$$

iii. Se dice que F *es* **continua** *en* $x \in X$ *si es semicontinua superiormente e inferiormente en* x.

En las definiciones i. y ii., B *denota una bola abierta de* Y.

Una multifunción F *es semicontinua superiormente (inferiormente) en* X*, si lo es en cada punto* x *de* X*. Análogamente* F *es continua en* X *si lo es en todo punto* $x \in X$.

Definición 2.3.9. *Dado un punto* $a \in X$*, una base de vecindades* $\mathfrak{W}$ *es una familia de entornos de a, de manera que para cada entorno de a existe un abierto básico que lo contiene. Es decir, si* $Ent(a) = \{entornos\ de\ a\}$

$$\forall V \in Ent(a), \exists U \in \mathfrak{W} : U \subseteq V.$$

El lema que probaremos a continuación provee una familia de ejemplos de multifunciones continuas.

Lema 2.3.10. *[24] Para cada conjunto acotado* $A \subset Y$*, la función conjunto valuada* $F : \mathbb{R} \to n(Y)$ *definida por* $F(t) = tA, t \in \mathbb{R}$*, es continua en* $\mathbb{R}$

Demostración: Denotamos $\mathfrak{W}$ como una base fija arbritaria de vecindades del cero en Y. Fijamos $t_0 \in \mathbb{R}$ y consideramos una vencidad abierta $W \subset \mathfrak{W}$. Para probar la continuidad de F debemos ver que F es semicontinua superior e inferiormente, entonces, dado que A es acotado, existe un número positivo c tal que $cA \subset W$. Por tanto, para todo $t \in (t_0 - c, t_0 + c)$ tenemos que

$$F(t) = tA = (t_0 + t - t_0)A \subset t_0A + (t - t_0)A \subset F(t_0) + W.$$

Ahora bien, como $F(t_0) = t_0A \subset W$, tenemos que $F(t) \subset F(t_0)+W \subset W$. Así F es una función semicontinua superiormente.

Análogamente, $F(t_0) \subset F(t) + W$ para todo $t \in (t_0 - c, t_0 + c)$. Así F es continua en $\mathbb{R}$.

■

El siguiente teorema establece que dada la midconvexidad fuerte de una función conjunto valuada F, bajo ciertas condiciones podemos asegurar su convexidad fuerte.

TEOREMA 2.3.11. *[16] Sea D un conjunto convexo. Si $F : D \to bcl(\mathbf{Y})$ es una función conjunto valuada fuertemente midconvexa módulo c y semicontinua superiormente sobre D, entonces es fuertemente convexa módulo c.*

Demostración: Sean $x_1, x_2 \in D$ y $t \in (0, 1)$. Tomando en cuenta la densidad de los números diadicos en $[0, 1]$ podemos considerar una sucesión de números diadicos $\{q_n\} \subset (0, 1)$ tal que $q_n \to t$. Así, fijando $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$ entonces

$$|q_n - t| < \varepsilon.$$

Consideramos ahora un subconjunto acotado $A \subset Y$, entonces por el Lema 2.3.10 tenemos que la multifunción $G : \mathbb{R} \to n(Y)$ definida por $G(t) = tA, t \in \mathbb{R}$ es continua. Luego para todo $F(x) \subset A$, con $x \in D$, se tiene que

$$tF(x_1) \subset q_nF(x_1) + \frac{\varepsilon}{4}\bar{B},$$
$$(1 - t)F(x_2) \subset (1 - q_n)F(x_2) + \frac{\varepsilon}{4}\bar{B} \tag{2.13}$$

y

$$ct(1-t)\|x_1-x_2\|^2\bar{B} \subset cq_n(1-q_n)\|x_1-x_2\|^2\bar{B}+\frac{\varepsilon}{4}\bar{B}. \tag{2.14}$$

Para todo $n \geq n_1$. Por otra parte, dada la semicontinuidad superior de F en el punto $tx_1+(1-t)x_2$, tenemos

$$F(tx_1+(1-t)x_2) \subseteq F(tx_1+(1-t)x_2)+\frac{\varepsilon}{4}\bar{B}$$

como $q_n \to t$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_2$ entonces

$$F(q_nx_1+(1-q_n)x_2) \subset F(tx_1+(1-t)x_2)+\frac{\varepsilon}{4}\bar{B}, \tag{2.15}$$

Por tanto usando (2.13),(2.14) y (2.15) y el Lema 2.3.7, obtenemos que para todo $n \geq \max\{n_1,n_2\}$

$$\begin{aligned}
t & \quad F(x_1)+(1-t)F(x_2)+ct(1-t)\|x_1-x_2\|^2\bar{B} && (2.16)\\
\subset & \quad q_nF(x_1)+(1-q_n)F(x_2)+cq_n(1-q_n)\|x_1-x_2\|^2\bar{B}+\frac{3}{4}\varepsilon\bar{B} && (2.17)\\
\subset & \quad F(q_nx_1+(1-q_n)x_2)+\frac{3}{4}\varepsilon\bar{B} \subset F(tx_1+(1-t)x_2)+\varepsilon\bar{B}. && (2.18)
\end{aligned}$$

Como las inclusiones anteriores se satisfacen para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
tF(x_1)+(1-t)F(x_2)+ct(1-t)\|x_1-x_2\|^2\bar{B} &\subset \bigcap_{\varepsilon>0}(F(tx_1+(1-t)x_2)+\varepsilon\bar{B})\\
&= \overline{F(tx_1+(1-t)x_2)}.
\end{aligned}$$

Luego por la condición (2) de la proposición 1 en [31] se tiene que

$$\overline{F(tx_1+(1-t)x_2)} = F(tx_1+(1-t)x_2).$$

Así mostramos que F es fuertemente convexa módulo c.

■

De este teorema obetenemos el siguiente corolario, el cual constituye el resultado del tipo Bernstein-Doetsch.

TEOREMA 2.3.12. *(Teorema de tipo Bernstein-Doetsch)[16] Si* $F : D \to bcl(Y)$ *es una función conjunto valuada fuertemente midconvexa módulo* c *y acotada sobre un subconjunto de* D *con interior no vacío, entonces* F *es continua y fuertemente convexa módulo* c.

Demostración: Sea F una multifunción fuertemente midconvexa módulo c y acotada sobre $A \subset D$, entonces existe una vecindad abierta $V \subset \mathfrak{W}$ tal que para todo $z \in A$ se tiene que $F(z) \subset V$. Así F es acotada en un subconjunto $V \subset Y$, por tanto y en virtud al Lema 2.3.10 tenemos que $F : s \in \mathbb{R} \mapsto sV$ es continua. Luego por definición F es semicontinua superior e inferiormente en V.
Así F cumple con las hipotesis del teorema 2.3.11, por tanto F es una función conjunto valuada fuertemente convexa módulo c.

$\blacksquare$

2.4. Funciones conjunto valuadas fuertemente cóncava

En la definición (2.2.8) mencionamos el concepto de una función conjunto valuada fuertemente cóncava y fuertemente midcóncava módulo c. Si en (2.4) consideramos $t \in (0,1)$ fijo diremos que F es una función conjunto valuada **fuertemente t-cóncava**.

En esta sección mostraremos algunos resultados expuestos por los profesores Mejía, Merentes y Nikodem en [17].

El siguiente Lema generaliza la definición de midcóncavidad.

Lema 2.4.1. *Si* $F : D \to 2^Y$ *es fuertemente midcóncava módulo c entonces para todo* $x_1, x_2 \in D$ *y* $k, n \in \mathbb{N}$ *tal que* $k < 2^n$ *se tiene lo siguiente*

$$F\left(\frac{k}{2^n}x_1 + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)x_2\right) + c\frac{k}{2^n}\left(1 - \frac{k}{2^n}\right)\|x_1 - x_2\|^2$$

$$\frac{k}{2^n}F(x_1) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)F(x_2)$$

El lector interesado puede leer la demostración de este Lema en [17].

El Lema que a continuación presentaremos será de gran utilidad para la demostración del teorema tipo Kuhn.

Lema 2.4.2. *Sea A_1, A_2, C subconjuntos de X tal que $A_1 + C \subset A_2 + C$. Si A_2 es convexo y cerrado y C es un conjunto acotado y no vacío, entonces $A_1 \subset A_2$.*

El siguiente teorema constituyen un resultado tipo Kuhn el cual provee la fuerte midconcavidad a partir de una condición más debil (t-cóncavidad).

TEOREMA 2.4.3. *[17] Sea $D \subset X$ un conjunto convexo y $t \in (0,1)$ un número fijo. Si $F : D \to 2^Y$ es una función conjunto valuada t-cóncava módulo c, entonces F es fuertemente midcóncava módulo c.*

Demostración: Fijamos $x_1, x_2 \in D$ y tomamos $z := \frac{x_1+x_2}{2}$, $\quad u := (1-t)x_1 + tz$ y $u := (1-t)z + x_2$. Notemos que $z = tu + (1-t)v$. Entonces

$$\|x_1 - z\| = \|z - x_2\| = \|u - v\| = \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|,$$

Así,

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}t(1-t)\|x_1 - x_2\|^2\bar{B}\\ = t^2(1-t)\|x_1 - z\|^2\bar{B} + t(1-t)^2\|z - x_2\|^2\bar{B} + t(1-t)\|u - v\|^2\bar{B}.\end{gathered}$$

Usando ahora la definición de t-cóncavidad, obtenemos que

$$\begin{gathered}2t(1-t)F(z) + \frac{1}{2}t(1-t)c\|x_1 - x_2\|^2\bar{B} + tF(v) + F(z)\\ = 2t(1-t)F(z) + c[t^2(1-t)\|x_1 - z\|^2\bar{B} + t(1-t)^2\|z - x_2\|^2\bar{B}\\ +1(1-t)\|u - v\|^2\bar{B}] + tF(u) + (1-t)F(v) + F(z)\\ = 2t(1-t)F(z) + t[F(u) + ct(1-t)\|x_1 - z\|^2\bar{B}] + (1-t)[F(v)\\ +c(1-t)t\|z - x_2\|^2\bar{B}] + [F(z) + ct(1-t)\|u - v\|^2\bar{B}\\ \subset 2t(1-t)F(z) + t(tF(z) + (1-t)F(x_1)) + (1-t)(tF(x_2) + (1-t)F(z))\\ +tF(u) + (1-t)F(v)\\ = t(1-t)F(x_1) + t(1-t)F(x_2) + 2t(1-t)F(z) + t^2F(z) + (1-t)^2F(z)\end{gathered}$$

$$+tF(u) + (1-t)F(v)$$
$$= t(1-t)F(x_1) + t(1-t)F(x_2) + F(z) + tF(u) + (1-t)F(v).$$

Por el Lema (2.4.2), tenemos que

$$2t(1-t)F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{1}{2}t(1-t)c\|x_1-x_2\|^2\bar{B} \subset t(1-t)F(x_1)+t(1-t)F(x_2).$$

Por tanto,

$$F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \frac{c}{4}\|x_1+x_2\|^2\bar{B} \subset \frac{1}{2}F(x_1) + \frac{1}{2}F(x_2),$$

Así concluimos la demostración.

■

El siguiente Teorema nos provee una fuerte cóncavidad módulo c a partir de la semicontinuidad inferior y la fuerte midcóncavidad de una función conjunto valuada F.

TEOREMA 2.4.4. *[17] Si $F : D \to 2^Y$ es fuertemente midcóncava módulo c y semicontinua inferiormente en D, entonces F es fuertemente cóncava módulo c.*

La demostración de este teorema es similar al teorema (2.3.11) y se puede leer con detalle en [17].

En consecuencia del teorema (2.4.3) y el teorema (2.4.4) obtenemos el siguiente corolario el cual constituye un teorema tipo Bernstein-Doetsch para funciones conjunto valuadas fuertemente cóncavas módulo c.

Corolario 2.4.5. *[17] Sea $t \in (0,1)$. Si $F : D \to 2^Y$ es una función conjunto valuada fuertemente t-cóncava módulo c y semicontinua superiormente en un punto de D, entonces F es continua y fuertemente cóncava módulo c*

La demostración de este corolario es análoga a la del teorema (2.3.12) de la sección anterior.

Capítulo 3

Funciones Conjunto Valuadas Armónicamente Convexas

En los capítulos anteriores hemos enunciado y demostrado algunos resultados preliminares del estudio que se ha realizado en el campo de la teoría de la convexidad. La definición clásica de convexidad puede extenderse a la de convexidad armónica para funciones conjunto valuadas.

A continuación, en este capítulo introduciremos la definición de función conjunto valuada armónicamente convexa y armónica fuertemente convexa, lo cual extienden los conceptos introducidos en [15, 2] para funciones conjunto valuadas.

Definición 3.0.6. *Sean* X *y* Y *cuerpos y* $F : D \subset \mathrm{X} \to 2^{\mathrm{Y}}$ *una función conjunto valuada. Se dice que* F *es* **armónicamente convexa** *si para todo* $x_1, x_2 \in D$ *y* $t \in [0,1]$ *se tiene que*

$$tF(x_2) + (1-t)F(x_1) \subset F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right). \tag{3.1}$$

Si consideramos $t = 1/2$ *diremos que* F *es* **armónicamente midconvexa** *si satisface lo siguiente*

$$\frac{F(x_2) + F(x_1)}{2} \subset F\left(\frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}\right)$$

Es posible generalizar esta definición de la siguiente forma

Definición 3.0.7. *Sean* X, Y *un cuerpo y un espacio de Banach respectivamente y* $F : D \subset \mathrm{X} \to 2^{\mathrm{Y}}$ *una función conjunto valuada. Se dice que* F *es* **armónica fuertemente convexa módulo c** *si para todo* $x_1, x_2 \in D$, $t \in [0,1]$ *y* $c > 0$ *se tiene que*

$$tF(x_2)+(1-t)F(x_1)+ct(1-t)\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\bar{B} \subset F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right), \quad (3.2)$$

donde $\bar{B}$ *es la clausura de la bola unitaria de* Y. *Si tomamos* $t = 1/2$ *decimos que* F *es una función* **armónica fuertemente midconvexa módulo** c *si*

$$\frac{F(x_2)+F(x_1)}{2}+\frac{c}{4}\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\bar{B} \subset F\left(\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}\right) \quad (3.3)$$

Ejemplo 3.0.8. *Sean* $f_1, f_2 : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funciones armónicamente convexas tales que* $f_1(x) \leq f_2(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$. *Entonces la multifunción* $F : D \to 2^Y$ *definida como* $F(x) = [f_1(x), f_2(x)]$ *es armónicamente convexa.*

Prueba: *Como* f_1 *y* $-f_2$ *son funciones armónicamente convexas se tiene que para todo* $x_1, x_2 \in D$ *y* $t \in [0,1]$ *lo siguiente*

$$f_1\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right) \leq tf_1(x_2)+(1-t)f_1(x_1). \quad (3.4)$$

$$tf_2(x_2)+(1-t)f_2(x_1) \leq f_2\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right). \quad (3.5)$$

Entonces

$$[tf_1(x_2)+(1-t)f_1(x_1)), tf_2(x_2)+(1-t)f_2(x_1)]$$

$$\subset [f_1\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right), f_2\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right)]$$

Luego, mediante un cálculo elemental podemos ver que

$$tF(x_2)+(1-t)F(x_1) \subset F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right)$$

Así, F *es una función conjunto valuada armónicamente convexa.*

Ejemplo 3.0.9. *Consideramos la multifunción del ejemplo (2.2.7) del Capítulo 2 definida como* $F(x) = -x^2H$ *pero esta vez* $f(x) = -x^2$ *es una función armónicamente cóncava y* H *un conjunto convexo que posee al origen, entonces para todo* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *y* $t \in [0,1]$ *se tiene que*

$$-(tx_2^2 + (1-t)x_1^2) \leq -\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right)^2.$$

Por la proposición (2.2.6) tenemos que

$$-(tx_2^2 + (1-t)x_1^2)H \subseteq -\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right)^2 H = F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right).$$

Usando la convexidad del conjunto H *tenemos que*

$$-(tx_2^2 + (1-t)x_1^2)H = -tx_2H - (1-t)x_1H = tF(x_2) + (1-t)F(x_1).$$

Por tanto

$$tF(x_2) + (1-t)F(x_1) \subseteq F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right)$$

así, F *es una función conjunto valuada armónicamente convexa.*

Ejemplo 3.0.10. *Si* $G : I \to 2^Y$ *es armónicamente convexa, entonces* $F(x) = G(x) - cx^2H$, $x \in I$, *es armónica fuertemente convexa módulo c.*

3.1. Operaciones con funciones conjunto valuadas armónicamente convexas

En esta sección, demostraremos que las funciones conjunto valuadas armónicamente convexas son estables bajo la suma, el producto por un escalar y el producto entre funciones.

Proposición 3.1.1. *Sean* X, Y *cuerpos sobre* $\mathbf{R}$ *y* $F, G : \mathrm{X} \to 2^{\mathrm{Y}}$ *funciones conjunto valuadas armónicamente convexas. Entonces*

1. $F + G$ *es una función conjunto valuada armónicamente convexa.*

2. *λF con $\lambda \in \mathbf{R}$ es una función conjunto valuada armónicamente convexa.*

3. *Si para cada par de puntos $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$, se tiene $F(x_1) \bigcap F(x_2) \neq \emptyset$ o $G(x_1) \bigcap G(x_2) \neq \emptyset$ entonces $F \cdot G(x)$ es una función conjunto valuada armónicamente convexa.*

Demostración: 1. Sean $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$ y $t \in [0,1]$. Dado que F y G son función conjunto valuada armónicamente convexa se tiene que

$$F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right) \supseteq tF(x_2)+(1-t)F(x_1)$$

y

$$G\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right) \supseteq tG(x_2)+(1-t)G(x_1)$$

además tomando en cuenta que si A, B, D, E son conjuntos tales que $A \subseteq B$ y $D \subseteq E$ entonces $A + D \subseteq B + E$, obtenemos el resultado deseado

$$\begin{aligned} F+G\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right) &= F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right)+G\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right) \\ &\supseteq [tF(x_2)+(1-t)F(x_1)]+[tG(x_2)+(1-t)G(x_1)] \\ &= t(F+G)(x_2)+(1-t)(F+G)(x_1). \end{aligned}$$

■

2. Sean $\lambda \in \mathbf{R}$ y $X_1, x_2 \in \mathrm{X}$, entonces:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right) &\supseteq \lambda \cdot (tF(x_2)+(1-t)F(x_1)) \\ &= t(\lambda F(x_2))+(1-t)(\lambda F(x_1)) \end{aligned}$$

Para $\lambda = 0$ se cumple la igualdad.

■

3. Antes de probar que $F \cdot G$ es una función conjunto valuada armónicamente convexa veamos que si $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$, entonces

$$F(x_1)G(x_2)+F(x_2)G(x_1) \subseteq F(x_1)G(x_1)+F(x_2)G(x_2).$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $F(x_1)\bigcap F(x_2) \neq \emptyset$. Tenemos que

$$\{0\} \subseteq [F(x_1) - F(x_2)],$$

donde 0 es el elemento neutro de Y con respecto a la suma. Así

$$\{0\} \subseteq [F(x_1) - F(x_2)][G(x_1) - G(x_2)]$$

Luego, como en Y vale la propiedad distributiva respecto a la adición, la expresión anterior es equivalente a

$$\{0\} \subseteq F(x_1)G(x_1) - F(x_1)G(x_2) - F(x_2)G(x_1) + F(x_2)G(x_2)$$

de modo que, sumando $F(x_1G(x_2))$ y $F(x_2)G(x_1)$, queda

$$F(x_1)G(x_2) + F(x_2)G(x_1) \subseteq F(x_1)G(x_1) + F(x_2)G(x_2) \tag{3.6}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta este resultado demostraremos que $F \cdot G$ es una función conjunto valuada armónicamente convexa. Para $t \in [0,1]$ y $x_1, x_2 \in$ X se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
(\quad & F \cdot G)\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) \\
= \quad & F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) \cdot G\left(\frac{x_1x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right), \\
\supset \quad & [tF(x_2) + (1-t)F(x_1)][tG(x_2) + (1-t)G(x_1)], \\
= \quad & t^2F(x_2)G(x_2) + t(1-t)F(x_2)G(x_1) + t(1-t)F(x_1)G(x_2) + (1-t)^2F(x_1)G(x_1), \\
= \quad & t^2F(x_2)G(x_2) + t(1-t)[F(x_2)G(x_1) + F(x_1)G(x_2)] + (1-t)^2F(x_1)G(x_1), \\
\supset \quad & t^2F(x_2)G(x_2) + t(1-t)[F(x_2)G(x_2) + F(x_1)G(x_1)] + (1-t)^2F(x_1)G(x_1), \\
= \quad & [tF(x_2)G(x_2) + (1-t)F(x_1)G(x_1)][t + (1-t)], \\
= \quad & tF(x_2)G(x_2) + (1-t)F(x_1)G(x_1), \\
= \quad & t(F \cdot G)(x_2) + (1-t)(F \cdot G)(x_1).
\end{aligned}$$

■

3.2. Desigualdad Hermite-Hadamard

En la sección (2.3) del capítulo 2 se demostró que

Teorema 3.2.1. *[23] Sea $F : D \to cl(Y)$ una función conjunto valuada fuertemente convexas módulo c. Entonces si B es la bola unitaria en Y*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx + \frac{c}{12}(b-a)^2\bar{B} \subset F\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

y

$$\frac{F(a)+F(b)}{2} + \frac{c}{6}(b-a)^2\bar{B} \subset \frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx,$$

para todo $a, b \in D$ tales que $a < b$

Nótese que para $c = 0$ el teorema provee una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para funciones conjunto valuadas convexas.

Teorema 3.2.2. *Sea $F : D \to cl(Y)$ una función conjunto valuada convexa, entonces*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx \subset F\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{3.7}$$

y

$$\frac{F(a)+F(b)}{2} \subset \frac{1}{b-a}\int_a^b F(x)dx, \tag{3.8}$$

para todo $a, b \in D$ tales que $a < b$

En esta sección probaremos una desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para multifunciones armónicamente convexas.

Para funciones a valores reales armónicamente convexas, la versión de la desigualdad de Hermite-Hadamard es la siguiente

Teorema 3.2.3. *[9] Sean $f : I \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ una función armónicamente convexa y $a, b \in I$ con $a < b$. Si f es integrable en $[0,1]$ se tiene que*

$$f\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \leq \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)}{x^2}dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Extendemos la desigualdad Hermite-Hadamard para funciones conjunto valuadas armónicamente convexas como sigue:

TEOREMA 3.2.4. *Sean* X, Y *cuerpos y* $D \in X$ *un subcuerpo, si* $F : D \subset \mathrm{X} \to cl(\mathrm{Y})$ *es una función conjunto valuada armónicamente convexa, entonces*

$$\frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{F(x)}{x^2}dx \subset F\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \tag{3.9}$$

y

$$\frac{F(a)+F(b)}{2} \subset \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{F(x)}{x^2}dx, \tag{3.10}$$

para todo $a, b \in D$ *tales que* $a < b$

Demostración: Si en (3.7) consideramos una función conjunto valuada convexa $G(t) = F\left(\frac{1}{t}\right)$ definida en $\left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$, entonces

$$\frac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} F\left(\frac{1}{t}\right)dt \subset F\left(\frac{1}{\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}{2}}\right)$$

Así,

$$\frac{ab}{b-a}\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} F\left(\frac{1}{t}\right)dt \subset F\left(\frac{2ab}{a+b}\right).$$

la prueba de este teorema se reduce a demostrar que

$$\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} F\left(\frac{1}{t}\right)dt = \int_a^b \frac{F(x)}{x^2}dx.$$

Notemos que en virtud a la definición (2.2.2) se tiene que

$$\int_{\mathrm{T}'} F\left(\frac{1}{t}\right)dt = \left\{\int_{\mathrm{T}'} f\left(\frac{1}{t}\right)dt : f \in \mathfrak{F}\right\}.$$

Donde para cada función punto valuada $f\left(\frac{1}{t}\right)$ con $t \in \mathrm{T}' = \left[\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right]$ se tiene que

$$\int_{\mathrm{T}'} f\left(\frac{1}{t}\right)dt = \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f\left(\frac{1}{t}\right)dt,$$

Luego, para $x = \frac{1}{t}$, tenemos que

$$\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} f\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx.$$

Entonces,

$$\left\{ \int_a^b \frac{f(x)}{x^2} dx : f(x) \in F(x) \wedge x \in [a,b] \right\} = \int_a^b \frac{F(x)}{x^2} dx.$$

Así, tenemos que

$$\frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{F(x)}{x^2} dx \subset F\left(\frac{2ab}{a+b}\right).$$

Para probar (3.10) razonamos de manera análoga y obtenemos que

$$\frac{F\left(\frac{1}{\frac{1}{b}}\right) + F\left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right)}{2} \subset \frac{ab}{b-a} s \int_a^b \frac{F(x)}{x^2} dx.$$

Por tanto

$$\frac{F(b) + F(a)}{2} \subset \frac{ab}{b-a} \int_a^b \frac{F(x)}{x^2} dx.$$

■

3.3. Desigualdad de Fejér

En esta sección, introduciremos una generalización de la desigualdad del tipo Hermite-Hadamard para funciones conjuntoo valuadas armónicamente convexas. En [9] estudian la desigualdad de Fejér para funciones armónicamente convexas, en este trabajo extenderemos el trabajo de Chen y Wu para funciones reales armónica a funciones conjunto valuadas.

Teorema 3.3.1. *Sean $F : I \subset \mathbb{R}\backslash\{0\} \to 2^{\mathbb{R}}$ una función conjunto valuada armónicamente convexa y $a, b \in I$ con $a < b$. Si F es Aumann integrable sobre $[a,b] \subset I$ entonces*

$$\frac{F(a)+F(b)}{2}\int_a^b \frac{P(x)}{x^2}dx \subseteq \int_a^b \frac{F(x)P(x)}{x^2}dx \subseteq F\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int_a^b \frac{P(x)}{x^2}dx. \tag{3.11}$$

donde $P:[a,b]\to 2^{\mathbb{R}}$, $P(x)=\{p(x)$ *es no negativa e integrable,* $p(x)\in P(x)\}$ *y sastiface lo siguiente*

$$P\left(\frac{ab}{x}\right)=P\left(\frac{ab}{a+b-x}\right). \tag{3.12}$$

Demostración: Sea $F:[a,b]\to 2^{\mathbb{R}}$ una función conjunto valuada armónicamente convexa, entonces para todo $x,y\in[a,b]$ se tiene lo siguiente

$$tF(y)+(1-t)F(x)\subseteq F\left(\frac{xy}{tx+(1-t)y}\right)$$

para $t=\frac{1}{2}$ obtenemos la siguiente inclusión

$$\frac{F(y)+F(x)}{2}\subseteq F\left(\frac{2xy}{x+y}\right)$$

consideramos ahora $x=ab/(tb+(1-t)a)$ y $y=ab/(ta+(1-t)b)$, así

$$\frac{F(y)+F(x)}{2}=\frac{F\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)+F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)}{2}.$$

Como F es una funcion conjunto valuada armónicamente convexas se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{F(a)+F(b)}{2} &= \frac{(tF(b)+(1-t)F(a))+(tF(a)+(1-t)F(b))}{2}\\ &\subseteq \frac{F\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)+F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)}{2}\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que para todo $t\in[0,1]$

$$\frac{F\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)+F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)}{2}\subseteq F\left(\frac{2ab}{a+b}\right) \tag{3.13}$$

la inclusión (3.13) cumple la igualdad para $t = \frac{1}{2}$. Por tanto

$$\begin{aligned}\frac{F(a)+F(b)}{2} &\subseteq \frac{F\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right)+F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)}{2}\\ &\subseteq F\left(\frac{2ab}{a+b}\right).\end{aligned}$$

Entonces, dado $P : [a,b] \to 2^{\mathbb{R}}$ una función conjunto valuada tal que $P(x) = \{p(x)$ es no negativa e integrable, $p(x) \in P(x)\}$ y además cumple la condición (3.12), se tiene que

$$\begin{aligned}P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right) &= P\left(\frac{ab}{a+b-(tb+(1-t)a)}\right)\\ &= P\left(\frac{ab}{ta+(1-t)b}\right).\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}&\frac{F(a)+F(b)}{2}P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)\\ &\subseteq \frac{F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)+F\left(\frac{ab}{at+(1-t)b}\right)P\left(\frac{ab}{at+(1-t)b}\right)}{2}\\ &\subseteq F\left(\frac{2ab}{a+b}\right)P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right).\end{aligned}$$

Integrando en ambos lados de la inclusión con respecto a t sobre $[0,1]$ tenemos que

$$\begin{aligned}&\frac{F(a)+F(b)}{2}\int_0^1 P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt\\ &\subseteq \int_0^1\left[\frac{F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)+F\left(\frac{ab}{at+(1-t)b}\right)P\left(\frac{ab}{at+(1-t)b}\right)}{2}\right]dt\\ &\subseteq F\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int_0^1 P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt. \qquad (3.14)\end{aligned}$$

Notemos que por la definición de Aumann, tenemos que

$$\int_0^1 P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt = \left\{\int_0^1 p\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt, p(x)\in P(x)\right\}$$

operando sobre cada integral (los detalles de estas integrales se encuentran en la sección (1.2.5) del capítulo 1) se tiene que

$$\int_0^1 p\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)dt = \frac{ab}{a-b}\int_a^b \frac{p(x)}{x^2}dx;$$

así,

$$\left\{\frac{ab}{a-b}\int_a^b \frac{p(x)}{x^2}dx, p(x)\in P(x)\wedge x\in[a,b]\right\} = \frac{ab}{a-b}\int_a^b \frac{P(x)}{x^2}dx. \quad (3.15)$$

Razonando de manera análoga obtenemos la siguiente igualdad

$$\int_0^1 \left[\frac{F\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)P\left(\frac{ab}{tb+(1-t)a}\right)+F\left(\frac{ab}{at+(1-t)b}\right)P\left(\frac{ab}{at+(1-t)b}\right)}{2}\right]dt$$

$$= \frac{ab}{a-b}\int_a^b \frac{F(x)P(x)}{x^2}dx. \quad (3.16)$$

Luego, sustituyendo (3.15) y (3.16) en (3.14) y multiplicando $\frac{ab}{a-b}$ a ambos lados de la inclusión, obtenemos el resultado deseado.

$$\frac{F(a)+F(b)}{2}\int_a^b \frac{P(x)}{x^2}dx \subseteq \int_a^b \frac{F(x)P(x)}{x^2}dx \subseteq F\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\int_a^b \frac{P(x)}{x^2}dx.$$

■

3.4. Teorema tipo Bernstein-Doetsch

En esta sección probaremos un teorema tipo Bernstein-Doetsch para funciones conjunto valuadas armónicamente convexas. Para ello presentamos un lema que generaliza la definición de armónica midconvexidad, las demostraciones del lema y el teorema que veremos están hechas basadas en las ideas de Leiva, Merentes, Nikodem, Sanchez que aparecen en [16].

Lema 3.4.1. *Si $F : D \to n(Y)$ es armónica fuertemente midconvexa módulo c entonces*

$$\frac{k}{2^n}F(x_2) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)F(x_1) + c\frac{k}{2^n}\left(1 - \frac{k}{2^n}\right)\left\|\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right\|^2 \overline{B}$$

$$\subset F\left(\frac{x_1 x_2}{\frac{k}{2^n}x_1 + (1 - \frac{k}{2^n})x_2}\right). \tag{3.17}$$

para todo $x_1, x_2 \in D$ y todo $k, n \in \mathbb{N}$ tal que $k < 2^n$.

Demostración: Procederemos a demostrar este lema por el Principio de Inducción Matemática sobre n.

• Para $n = 1$, tenemos que $k = 1 < 2$ y así la inclusión

$$\frac{F(x_2) + F(x_1)}{2} + \frac{c}{4}\left\|\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right\|^2 \overline{B} \subset F\left(\frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2}\right)$$

coincide con la definión de armónica midconvexidad módulo c.

• Supongamos ahora que se cumple para algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $k < 2^n$, deseamos ver que se cumpla para $n+1$. Notemos que $k < 2^n$ entonces $\frac{k}{2^{n+1}} < \frac{1}{2}$ por tanto $\left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right) < \frac{1}{2}$.

De esta manera sustituyendo $t = \frac{k}{2^{n+1}}$ en la definición de función armónicamente midconvexa módulo c, obtenemos lo siguiente

$$
\begin{aligned}
\bullet \quad & \frac{k}{2^{n+1}}F(x_2)+\left(1-\frac{k}{2^{n+1}}\right)F(x_1)+c\frac{k}{2^{n+1}}\left(1-\frac{k}{2^{n+1}}\right)\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\bar{B}\\
= \quad & \frac{k}{2^{n+1}}F(x_2)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{k}{2^{n+1}}\right)F(x_1)+c\frac{k}{2^{n+1}}\left(\frac{(2^n)^2-2^{n-1}k}{(2^n)^2}\right)\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\bar{B}\\
= \quad & \frac{k}{2^{n+1}}F(x_2)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{k}{2^n}\right)F(x_1)+\frac{1}{2}F(x_1)\\
+ \quad & c\frac{k}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{2}\left(\frac{(2^n)^n+(2^{n-1}-2^n)k}{(2^n)^2}\right)\right)\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\bar{B}\\
= \quad & \frac{k}{2^{n+1}}F(x_2)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{k}{2^n}\right)F(x_1)+\frac{1}{2}F(x_1)\\
+ \quad & c\frac{k}{2^{n+1}}\left(\frac{k}{2^{n+1}}+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)\right)\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\bar{B}\\
= \quad & \frac{1}{2}\left[\frac{k}{2^n}F(x_2)+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)F(x_1)+c\frac{k}{2^n}\left(1-\frac{k}{2^n}\right)\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\bar{B}\right]\\
+ \quad & \frac{1}{2}F(x_1)+\frac{c}{4}\left(\frac{k}{2^n}\right)^2\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\bar{B}\\
\subset \quad & \frac{1}{2}\left[\frac{k}{2^n}F(x_2)+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)F(x_1)+c\frac{k}{2^n}\left(1-\frac{k}{2^n}\right)\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\overline{B}\right]\\
+ \quad & \frac{1}{2}F(x_1)+\frac{ck^2}{4(2^{2n})}\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\overline{B}.
\end{aligned}
$$

Nótese que

$$
\frac{ck^2}{4(2^{2n})}\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2=\frac{c}{4}\left\|\frac{x_1-\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x_2}}{x_1\left(\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x_2}\right)}\right\|^2,
$$

Entonces

$$
\frac{1}{2}\left[\frac{k}{2^n}F(x_2)+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)F(x_1)+c\frac{k}{2^n}\left(1-\frac{k}{2^n}\right)\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\overline{B}\right]
$$

$$+\frac{1}{2}F(x_1)+\frac{ck^2}{4(2^{2n})}\left\|\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\right\|^2\overline{B}$$

$$\subset \frac{1}{2}F\left(\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x_2}\right)+\frac{1}{2}F(x_1)+\frac{c}{4}\left\|\frac{x_1-\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x_2}}{x_1\left(\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x_2}\right)}\right\|^2\overline{B}$$

$$\subset F\left(\frac{x_1\left(\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}\right)}{\frac{k}{2^n}x_1+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)\left(\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}\right)}\right)$$

$$= F\left(\frac{x_1x_2}{\frac{k}{2^n}x_1+\left(1-\frac{k}{2^n}\right)x_2}\right)$$

■

El siguiente teorema proporciona condiciones que asegura la armónica fuerte convexidad de una función conjunto valuada.

TEOREMA 3.4.2. *Sea D un conjunto convexo. Si $F : D \to bcl(Y)$ es una función conjunto valuada fuertemente armónicamente midconvexa módulo c y semicontinua superiormente sobre D, entonces F es armónica fuertemente convexa módulo c.*

Demostración: El esbozo preliminar de esta demostración coincide con lo hecho para multifunciones fuertemente convexas módulo c.
Sean $x_1, x_2 \in D$ y $t \in (0,1)$. Por la densidad de los números diádicos en $[0,1]$, podemos tomar una sucesión de números diadicos $\{q_n\} \subset (0,1)$ tal que $q_n \to t$.
Fijando $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$ entonces $\|q_n - t\| < \varepsilon$.

Sea $A \subset Y$ un subconjunto acotado, entonces por el Lema 2.3.10 se tiene que la multifunción $F : s \in \mathbb{R} \to sA$ es continua, así para todo $F(x) \subset A$ con $x \in D$ se tiene que

$$tF(x_2) \subset q_nF(x_2) + \frac{\varepsilon}{4}\bar{B},$$

$$(1-t)F(x_1) \subset (1-q_n)F(x_1) + \frac{\varepsilon}{4}\bar{B} \tag{3.18}$$

y

$$ct(1-t)\|x_1 - x_2\|^2\bar{B} \subset cq_n(1-q_n)\left\|\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right\|^2 \bar{B} + \frac{\varepsilon}{4}\bar{B} \qquad (3.19)$$

para todo $n \geq n_1$. Por otra parte, dada la semicontinuidad superior de F en el punto $\frac{x_1 x_2}{tx_1+(1-t)x_2}$, obtenemos que

$$F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) \subset F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) + \frac{\varepsilon}{4}\bar{B}$$

como $q_n \to t$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_2$ entonces

$$F\left(\frac{x_1 x_2}{q_n x_1 + (1-q_n)x_2}\right) \subset F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) + \frac{\varepsilon}{4}\bar{B} \qquad (3.20)$$

para todo $n \geq n_2$. Por tanto, usando (3.18), (3.19), (3.20) y el Lema (3.4.1), obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} tF(x_2) + (1-t)F(x_1) + ct(1-t)\left\|\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right\|^2 \bar{B} \\ \subset q_n F(x_2) + (1-q_n)F(x_1) + cq_n(1-q_n)\left\|\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right\|^2 \overline{B} + \frac{3}{4}\varepsilon\bar{B} \\ \subset F\left(\frac{x_1 x_2}{q_n x_1 + (1-q_n)x_2}\right) + \frac{3}{4}\varepsilon\bar{B} \\ \subset F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) + \varepsilon\bar{B}, \end{aligned}$$

para todo $n \geq \text{máx}\{n_1, n_2\}$.

Dado que estas inclusiones se satisfacen para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} tF(x_2) + (1-t)F(x_1) + ct(1-t)\left\|\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}\right\|^2 \bar{B} \\ \subset \bigcap_{\varepsilon > 0}\left(F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right) + \varepsilon\bar{B}\right) \\ = \overline{F\left(\frac{x_1 x_2}{tx_1 + (1-t)x_2}\right)}, \end{aligned}$$

Luego, por la condición (2) de la proposición 1 en [31] se tiene que

$$\overline{F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right)} = F\left(\frac{x_1x_2}{tx_1+(1-t)x_2}\right)$$

Así mostramos que F es armónica fuertemente convexa módulo c.

■

Motivado por este teorema al igual que la sección (2.3.3) obtenemos un colorario que constituye un resultado del tipo Bernstein-Doetsch extendidas a las funciones conjunto valuadas armónicamente convexas.

TEOREMA 3.4.3. *Si $F : D \to bcl(Y)$ es una función conjunto valuada fuertemente armónicamente midconvexa módulo c y acotada sobre un subconjunto D con interior no vacío, entonces F es continuo y armónica fuertemente convexa módulo c.*

La demostración de este corolario es análoga a la demostración del corolario de la sección (2.3.3).

Conclusiones

Siguiendo el esquema de estudio que motivó a la definición de multifunciones convexas, extendimos el concepto de funciones reales armónicamente convexas para multifunciones y definimos funciones conjunto valuadas armónicamente convexas, armónicamente midconvexas, armónica fuertemente convexa módulo c y armónica fuertemente midconvexa módulo c. Este tipo de funciones son estables bajo operaciones aritméticas y satisfacen desigualdades del tipo Hermite-Hadamard, tipo Féjer y demostramos que en efecto una función conjunto valuada armónicamente convexa cumple con las condiciones del teorema tipo Bernstein-Doetsch.

A nuestro juicio esta investigación amplia el estudio de la convexidad y deja abiertas preguntas que pueden ser abordadas en futuros trabajos, entre los problemas por resolver estan: definir la contraparte cóncava de las definiciones que introdujimos, extender para funciones conjunto valuadas la idea expuesta en la proposición (1.2.8) para relacionar las funciones conjunto valuadas convexas con las armónicamente convexas, extender los resultados obtenidos en [17] para funciones conjunto valuadas armónicamente cóncavas, obtener un resultado tipo Kuhn para multifunciones armónicamente convexas, estudiar el teorema de Sierpiński para multifunciones armónicamente convexas y extender la noción de k-convexidad para multifunciones armónicamente convexas.

Bibliografía

[1] M. Aslam Noor, K. Inayat. *Some Integral Inequalities for Harmonically h-convex functions*. U.P.B. Series A, Vol 77,ISS.1, (2015).

[2] M. Aslam Noor, K. I. Noor, S. Iftikhar. *Strongly harmonic convex functions, Preptint (2016).*

[3] J-P. Aubin, H. Frankowska. *Set-valued Analysis*. Birkhäuse. (1990).

[4] R. J. Aumann. *Integrals of Set-Valued Functions*. The Hebrew University, Jerusalem, Israel. Journal of mathematical analysis and applications 12,1-12 (1965).

[5] C. Berge. *Topological Space: Including a treatment of Multi-Valued functions, vector spaces and convexity*. Dover Publications, INC. Mineola, New York, (1963).

[6] F. Bernstein, G. Doetsch. *Zur theorie der konvexen Funktionen*, Math. Ann. 76, no. 4. MR 1511840, , 514-526 (1915).

[7] T. Cardinali, K. Nikodem, F. Papalini. *Some results on stability and on characterization of k-convexity of set-valued functions*. Anal. Pol. Math LVIII,2, 185-192 (1993).

[8] B. Cascales, V. Kadets, J. Rodríguez. *Measurable selectors and set-valued Pettis integral in non-separable Banach spaces*. Mathematics Subject Classification. 28B05, 28B20, 46G10. Key words and phases, (2000).

[9] F. Chen, and S. Wu *Fejer and Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions*. Hindawi Publishing Corporation, Journal of applied Mathematics, Volume 2014.(2014).

[10] R. Datko. *On the integration of set-valued mappings in a Banach space.* Washington, D.C. IMC. pág 205-207.

[11] G. Debreu. *Integration of Correspondence.* In Proc. 5th Berkeley Symp. On Math. Stat. and Prob. vol II, 351-372 (1966).

[12] S. S. Dragomir. *Inequalities of Hermite-Hadamard type for HA-Convex functions.* Mathematics, College of Engineering and Science, Victoria University, PO Box 14428, Melbourne City, MC 8001, Australia. (2015).

[13] C. González. *Teoremas de tipo Bernstein-Doetsch para multifunciones convexas y cóncavas.* Tesis. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. Escuela de matematica. (2016).

[14] H. Huang. *Global error bounds with exponents for multifunctions with set constraints.* Communications in Contemporary Mathematics 12, No. 03, 417-435 (2010).

[15] İ. İscan. *Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions.* Department of Mathematics, Faculty of Art and Sciences, Giresun University, 28100, Giresun, Turkey, (2014).

[16] H. Leiva, N. Merentes, K. Nikodem, J. L. Sanchez. *Strongly convex set-valued maps.* Disponible Online en htpp://www.springerlink.com, J. Glob Optim 57:695-705 DOI 10.1007/s 10898-013-00-0051-4, (2013).

[17] O. Mejias, N. Merentes, K. Nikodem. *Strongly concave set-valued maps.* Mathematica Aeterna, Vol. 4, no. 5, 477-478 (2014).

[18] N. Merentes, S. Ribas. *El desarrollo del concepto de función convexa.* Ediciones IVIC, Caracas-Venezuela, (2013).

[19] N. Merentes, K. Nikodem. *Remarks on strongly convex functions.* Aequationes Math. 80, 1-2 193-199 (2010).

[20] D. X. Narváez, G. Restrepo. *Funciones Multivaluadas.* Facultad de Ciencias Naturales y Exactas Universidad del Valle. Revista de Ciencias, septiembre 20, (2011).

[21] C. Niculescu, L. Persson. *Old and new on the Hermite-Hadamard inequality.* Real Analysis Exchange, vol. 29(2), 663-685 (2003/2004).

[22] K. Nikodem. *A characterization of midconvex set-valued functions*. Acta Universitatis Carolinae-Mathematica ET Physica, (1989).

[23] N. Nikodem, J. Sanchez, L. Sanchez. *Jensen and Hermite-Hadamard inequalities for strongly convex set-valued maps*. Mathematica Aeterna, vol. 4, NÂ° 8, 979-987 (2014).

[24] K. Nikodem. *K-convex and K-concave Set-Valued Functions*, Zeszyty Nauk. Politech. Lódz. Math. 4(3), Art. 52 (2003).

[25] K. Nikodem. *Continuity of K-convex Set-Valued Fumctions*. Bulletin of the Polish Academy of Sciencies Mathematics. Vol. 34. No. 7-8 (1986).

[26] B. T. Polyak. *Existence theorems and convergence of minimizingsequences in extremun problens with restrictions*. Sov. Math. Dokl. 7, 72-75 (1966).

[27] E. Sadowska. *Hadamard inequality and a refinement of Jensen inequality for set-valued functions*. Results Math. 32, 332-337 (1997).

[28] E. Sadowska. *A sandwich with convexity for set-valued functions. Math. Pannonica, 7/1, 163-169 (19996).*

[29] A. W. Roberts, D.E Varberg. *Convex Functions*. Academic Press, New York (1973).

[30] O. Stolz. *Grundzüge der Diferential und Integralrechung*, vol. 1 Teubner, Leipizing, 1893.

[31] R. Winklee. *Upper Semicontinuity of Set Valued Functions and a Topological Counterpart of Birkitoff's Ergodic Theorem*. Mathematics Subject Classification Primary 26E25; Secondary 37B99. Austrian Science Foundation FWF. Project No. 59612-N23. 1-14 (2000).